

Kommutatiivse unitaalse Banachi algebra Gelfandi teisend ja spektraalkujutuse teoreem

Lineaarteisenduse T omaväärtuste hulka nimetatakse tema *spektriiks* $\sigma(T)$. Lineaaralgebra kursusest on teada, et kui $p \in \mathbb{C}[x]$ on polünoom, siis maatriksi $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ korral kehtib võrdus

$$\sigma(p(A)) = p(\sigma(A)) = \{p(\lambda) \mid \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Sama nähtus esineb aga palju üldisemas kontekstis. Öeldakse, et vektorruum $\mathcal{A}$ üle $\mathbb{C}$ on $\mathbb{C}$ -*algebra*, kui tal on defineeritud vektorite korrutamine nii, et mistahes $\lambda \in \mathbb{C}$ ja $a, b, c \in \mathcal{A}$ korral

$$\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b)$$

ning $a(b + c) = ab + ac$ ja $(a + b)c = ac + bc$. Öeldakse, et algebra $\mathcal{A}$ on

1. *kommutatiivne*, kui $ab = ba$ mistahes $a, b \in \mathcal{A}$ korral;
2. *unitaalne*, kui leidub $1 \in \mathcal{A}$ nii, et $1a = a = a1$ iga $a \in \mathcal{A}$ korral.

Normeeritud kompleksne ruum $\mathcal{B}$ on *Banachi algebra*, kui tema norm on täielik ja mistahes $a, b \in \mathcal{B}$ korral $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$ (kolmnurgavõrratus korrutamistehte jaoks tagab tehte pidevuse).

Olgu $\mathcal{B}$ kommutatiivne unitaalne Banachi algebra, siis hulk

$$M = \{\varphi : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{C} \mid \varphi \text{ on lineaarne, multiplikatiivne ja } \varphi(1) = 1\}$$

on kompaktne Hausdorffi ruum (punktiviisilise koondumise topoloogia mõttes). Kommutatiivsuse eeldus tagab, et $M \neq \emptyset$. Nüüd saame vaadelda ruumi

$$C(M) = \{F : M \rightarrow \mathbb{C} \mid F \text{ on pidev}\}.$$

Unitaalse (kommutatiivse) Banachi algebra $\mathcal{B}$ *Gelfandi teisendiks* nimetatakse kujutust

$$\Gamma : \mathcal{B} \rightarrow C(M), \quad \Gamma(f)(\varphi) = \varphi(f).$$

Elemendi $f \in \mathcal{B}$ *spektriiks* nimetatakse kõigi kompleksarvude λ hulka $\sigma(f)$, mille korral $f - \lambda \cdot 1$ ei ole pööratav. Gelfandi teisendi paljudest omadustest järeldub, et kui ψ on kogu komplekstasandil diferentseeruv (st esitub Tayloriga reana $\psi(z) = \sum c_n z^n$), siis iga $f \in \mathcal{B}$ korral (siin $\psi(f) = \sum c_n f^n \in \mathcal{B}$)

$$\sigma(\psi(f)) = \psi(\sigma(f)) \quad (\text{spektraalkujutuse teoreem}).$$

Bakalaureusetöö eesmärk on esitada Gelfandi teisendi omaduste üksikasjalikud tõestused koos järeldusega, mida tuntakse spektraalkujutuse teoreemina (*spectral mapping theorem*).

Viited

- [1] R. G. Douglas, *Banach algebra techniques in operator theory*, 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 179, Springer, New York, 1998.