

# Inverssete poolrühmade $\lambda$ -põimikorrutis

Poolrühma  $S$  nimetatakse *inversseks*, kui mistahes  $s \in S$  korral leidub üheselt määratud element  $s^{-1} \in S$  nii, et kehtivad võrdsused

$$s = ss^{-1}s \quad \text{ja} \quad s^{-1} = s^{-1}ss^{-1}.$$

Sarnaselt kuulsale Wagner-Prestoni teoreemile (inverssete poolrühmade ‘Cayley teoreem’) kehtib, et mistahes inversne poolrühm on sisestatav  $\lambda$ -põimikorrutisse fundamentaalsest inverssest poolrühmast ja Cliffordi poolrühmast. Öeldakse, et  $e \in S$  on *idempotent*, kui  $ee = e$  ning kõigi idempotentide alamhulka tähistatakse sümboliga  $E(S)$ .

1. Inversne poolrühm  $S$  on *fundamentaalne*, kui mistahes  $s \in S$  korral kehtib implikatsioon

$$(\forall e \in E(S))(se = es) \Rightarrow s \in E(S).$$

2. Inversne poolrühm  $S$  on *Cliffordi poolrühm*, kui mistahes  $s \in S$  korral kehtib võrdus  $ss^{-1} = s^{-1}s$ .

Olgu  $S$  ja  $T$  inverssed poolrühmad ja fikseeritud homomorfism  $\varphi : T \rightarrow \text{End}(S)$ , tähistame siin elemendi  $t \in T$  kujutist sümboliga  $\varphi_t$ . Klassikaliselt defineeritakse poolrühmade  $S$  ja  $T$  poolotsekorrutis (homomorfismi  $\varphi$  suhtes)  $S \ltimes T$  hulgal  $S \times T$  tehtega

$$(s, t)(u, v) := (s\varphi_t(u), tv).$$

Paraku ei tarvitse inverssete poolrühmade poolotsekorrutis ise olla inversne. Selle probleemi lahendamiseks võttis B. Billhardt [1] kasutusele struktuuri, mida ta nimetas  $\lambda$ -poolotsekorrutiseks. Tähistame lühidalt  $\mathbf{r}(s) := ss^{-1}$ . Niisiis, inverssete poolrühmade  $S$  ja  $T$   $\lambda$ -poolotsekorrutis  $S \ltimes^\lambda T$  defineeritakse hulgal

$$\{(s, t) \in S \times T \mid s = \varphi_{\mathbf{r}(t)}(s)\}$$

tehtega

$$(s, t)(u, v) := (\varphi_{\mathbf{r}(tv)}(s)\varphi_t(u), tv).$$

Kujutuste hulka  $S^T$  saab vaadelda inversse poolrühmana punktiviisilise korrutamise  $*$  suhtes st mistahes  $f, g : T \rightarrow S$  korral

$$(f * g)(t) := f(t)g(t), \quad t \in T.$$

Olgu  $f : T \rightarrow S$  suvaline ja  $t \in S$ . Tähistame siis  $f^t : T \rightarrow S$ ,  $f^t(x) := f(xt)$ . Moodustades nüüd  $\lambda$ -poolotsekkorrutise  $S^T \ltimes^\lambda T$ , kus  $\varphi : T \rightarrow \text{End}(S^T)$  defineeritakse võrdusega  $\varphi_t(f) = f^t$ , tehatega

$$(f, t)(g, t') = \left( f^{r(tt')} * g^t, tt' \right)$$

saame poolrühmade  $S$  ja  $T$   $\lambda$ -põimikkorrutise  $S \text{ wr}^\lambda T$  ning [2, Teoreem 5.3.7] kohaselt mistahes inversse poolrühma  $X$  korral leiduvad fundamentaalne poolrühm  $T$  ja Cliffordi poolrühm  $S$  nii, et  $X$  on isomorfne poolrühma  $S \text{ wr}^\lambda T$  mingi alampoolrühmaga.

Bakalaureusetöö eesmärk on esitada detailne tõestus eelnevale väitele koos vajaliku teooriaarendusega.

## Viited

- [1] B. Billhardt, *On a wreath product embedding and idempotent pure congruences on inverse semigroups*, Semigroup Forum **45** (1) (1992), 45–54.
- [2] M. V. Lawson, *Inverse semigroups: the theory of partial symmetries*, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1998.