

BAKALAUREUSETÖÖ PROJEKT

Ruumi ℓ_∞^n isomeetrilised koopiad Lipschitzi-vabades ruumides

Juhendajad: Rainis Haller ja Jaan Kristjan Kaasik

Ruumi ℓ_∞^n ühikker on n -mõõtmeline kuup. Lipschitzi-vaba ruumi $\mathcal{F}(M)$ norm väljendab massi ümberpaigutamise minimaalset kulu meetrilisel ruumil M . Projekt uurib, kuidas kuubi geometria saab esineda sellistes transpordikuluruumides.

Juhendaja hiljutises artiklis on tõestatud, et iga $n \in \mathbb{N}$ korral leidub lõplik meetriline ruum M , mille Lipschitzi-vaba ruum sisaldab ℓ_∞^n lineaarset isomeetrilist koopiat. Projektis saab valida järgmiste suundade vahel.

1. Referatiivne ülevaade. Esitada iseseisvalt loetav käsitus Lipschitzi-vabadest ruumidest, väikeste mõõtmete konstruktsioonidest ja üldise teoreemi tõestusest. Selgitada tõestuse põhiideid ning seost transpordiplaanide ja normi arvutamisega. Põhjalik referatiivne käsitus on iseseisev bakalaureusetöö eesmärk.

2. Minimaalsuse küsimus. Kui väheste punktidega meetrilisest ruumist piisab? Tähistame

$$m(n) = \min\{|M| : \mathcal{F}(M) \text{ sisaldab } \ell_\infty^n \text{ lineaarset isomeetrilist koopiat}\}.$$

Keskenduda näiteks juhule $n = 5$: leida võimalikult väike näide ning uurida selle minimaalsust. Omaette tulemus oleks ka $m(5)$ teadaoleva ülemise või alumise hinnangu parandamine.

3. Uus üldine võrepõhine tõestus. Otsida kõigi n korral toimivat uut konstruktsiooni lõplikul hulgal $M_n \subset \mathbb{Z}^n$, kasutades maksimum-meetrikat ja võrepunktidevahelisi transpordiplaane. Eesmärk on saada lihtsam üldine tõestus ning võimaluse korral väiksemad meetrilised ruumid.

Töö täpsem fookus valitakse koos juhendajaga. **Edukas uurimuslik töö võib viia ühise teadusartikli valmimiseni.**

Eelteadmised: lineaaralgebra ja matemaatilise analüüsi põhiteadmised. Vajalikud funktsionaalanalüüsi ja Lipschitzi-vabade ruumide mõisted omandatakse töö käigus.

Lähteartiklid.

R. Haller, *Isometric copies of ℓ_∞^n in Lipschitz-free spaces over finite metric spaces*, arXiv:2609.16230.

S. S. Khan, M. Mim ja M. I. Östrovskii, *Isometric copies of ℓ_∞^n and ℓ_1^n in transportation cost spaces on finite metric spaces*, arXiv:1907.01155.

S. Ostrovska ja M. I. Ostrovskii, *Isometric structure of transportation cost spaces on finite metric spaces*, arXiv:2112.02689.