

Pythagorase teed võrel $\mathbb{Z}^2$

Jan Willemson

Cybernetica

jan.willemson@{gmail.com,cyber.ee}

Vaatleme tasandil täisarvulist võret $\mathbb{Z}^2$. Lubades võre punktide vahel ainult täisarvulise pikkusega samme, on iga punkt mistahes teisest saavutatav kõige rohkem kahe sammuga – piisab ülimalt ühest horisontaalsest ja ülimalt ühest vertikaalsest sammust.

Olukord muutub aga tunduvalt huvitavamaks, kui keelame horisontaalsed ja vertikaalsed sammud. Formaalselt defineerime suunamata graafi $\mathcal{G}$, mille tippude ja servade hulga on vastavalt

$$\begin{aligned} V(\mathcal{G}) &= \{(x, y) : x, y \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}^2, \\ E(\mathcal{G}) &= \{(A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)) : |AB| \in \mathbb{Z}, x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2\}, \end{aligned}$$

ja küsime, milline on (graafi mõttes) lühim tee iga kahe tipu vahel.

Kuna graafi iga nihe täisarvuliste koordinaatidega vektori võrra on ilmselt graafi $\mathcal{G}$ automorfism, võime alguspunktiks fikseerida suvalise tipu; olgu siis alguspunktiks $O(0, 0)$. Seega võime küsida, kui kaugel on (graafi mõttes) sellest punktist kõik ülejäänud punktid.

On selge, et kaugusel 0 asub ainult punkt O ise ja kaugusel 1 asuvad parajasti kõik punktid $(a; b)$, mille korral $ab \neq 0$ ja $a^2 + b^2$ on täisruut.

Ülejäänud osa vastusest on aga üllatav – osutub, et kaugusel 3 on punktid $(0, 1)$, $(0, 2)$ ja $(1, 2)$ (ning nendega sümmeetrilised), kõik ülejäänud punktid aga asuvad punktist O kaugusel 2! Seejuures pole vastavate graafiteede kirjeldused sugugi lihtsad. Näiteks (eukleidilises mõttes) lühim teekond punktist $(0, 0)$ punkti $(2111, 569)$ (mis asub O -st eukleidilisel kaugusel $\approx 2186,3$) on

$$(0, 0) \xrightarrow{(-50643549, 196449668)} (-50643549, 196449668) \xrightarrow{(50645660, -196449099)} (2111, 569)$$

ning moodustub sammudest eukleidiliste pikkustega vastavalt 202872475 ja 202872451.

Meil on sellele teoreemile olemas värske ja esialgne AI abil leitud tõestus, mis kasutab olulisel määral algebralist arvuteooriat ja ruutvorme. See tõestus vajab aga inimesepoolset kontrolli ja lünkade täitmist ning sobib sellisena hästi bakalaureusetöoks arvu- ja graafiteooriast huvitatud tudengile.

Teoreemil on ka loomulikud edasiarendused; näiteks võime küsida, mis toimub kõrgema mõõtmelistes võredest. See osa on veel täiesti läbi uurimata ja sobib magistriritööks.

Pikemalt saab ülesande kohta lugeda e-prindist <https://arxiv.org/abs/2605.20831>.