

Lõputööd juhuslikest ekslemistest

Juhuslik ekslemine on keskne ja väga oluline stohhastiline mudel, millel on palju erinevaid üldistusi ning variatsioone. Lõputöö(de) eesmärk on selliste mudelitega tutvumine ning omaduste tundmaõppimine. Töö on peamiselt referatiivne, kuid hõlmab ka arvutisimulatsioone ja ülesannete lahendamist.

Juhuslik ekslemine. Olgu X_1, X_2, \dots sõltumatud ja sama jaotusega (iid) juhuslikud suurused, mille väärtused on täisarvud (st $X_i \in \mathbb{Z}$, p.k.), olgu $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Juhuslikku protsessi $S := \{S_n\}_{n \geq 1}$ nimetatakse **juhuslikuks ekslemiseks** (*random walk (RW)*). Kui $X_i \in \{-1, +1\}$, on juhuslik ekslemine **lihtne** (*simple random walk (SRW)*). Juhuslikust ekslemisest ja tema erinevatest omadustest võib lugeda igast tõenäosusteooria õpikust.

Juhuslik ekslemine S on **rekurrentne** (*recurrent*) kui ta p.k. naaseb alguspunkti 0 lõpmata palju kordi: $P(S_n = 0, \text{ i.o.}) = 1$, vastasel juhul on **transientne** (*transient*). Kui juurdekasvu X_i jaotus on mitteperioodiline, siis rekurrentsus tähendab seda, et S väisab igat täisarvu z lõpmata palju kordi, p.k. $P(S_n = z, \text{ i.o.}) = 1$. Kui mingi osake eksleb juhuslikult ning see ekslemine on rekurrentne, siis näeme teda igal pool jälle ja jälle. Transientsus tähendab, et juhuslik ekslemine (osake) väisab iga täisarvu vaid lõplik arv korda ning siis me teda ei näe. Juhuslik ekslemine S on transientne parajasti siis kui positiivse tõenäosusega ei naase ta kunaagi alguspunkti, st $P(S_n \neq 0, \forall n) > 0$. Teisisõnu, tema **põgenemistõenäosus** (*escape probability*) on suurem nullist. See aga tähendab, et S väisab nii alguspunkti kui ka iga teist täisarvu z ülimalt lõplik arv kordi, seejärel "kaob lõpmatusse": iga $z \in \mathbb{Z}$ korral $P(S_n = z, \text{ i.o.}) = 0$.

Kui juurdekasvudel on lõplik keskvärtus $\mu = EX_i$, siis on S rekurrentne parajasti siis kui $\mu = 0$. Tõepoolest, kui $\mu > 0$, siis suurte arvude seaduse kohaselt $S_n/n \rightarrow \mu$, p.k. ja sellest järeldub vahetult transientsus. Kui $\mu = 0$, siis $S_n/n \rightarrow 0$, p.k.. sellest vahetult ei järeldu rekurrentsus, kuid seda saab tõestada. Tõestused on erinevad, näiteks nn Chung-Fuchs teoreem [2], Thm (2.7) või läbi Kesten-Spitzer-Whitmani teoreemi [6, 7]. Lihtne juhuslik ekslemine on seega rekurrentne parajasti siis kui $P(X_i = -1) = P(X_i = 1) = 0.5$ ja (lisaks ülaltoodud üldistele teoreemidele) saab seda tõestada ka läbi tõenäosusi genereerivate funktsioonide [3], ptk 5.6. või läbi

Stirlingi valemi [2] (2.3). SRW korral on põgenemistõenäosusel lihtne kuju: $P|(X_i = 1) - P(X_i = -1)|$.

Juhuslik ekslemine juhuslikus keskkonnas. Vaatleme lihtsat juhuslikku ekslemist, kus igale täisarvule vastab tõenäosus $p(z) \in (0, 1)$. Kui ekslemine jõuab punkti z , siis ta hüppab punkti $z + 1$ tõenäosusega $p(z)$. Seega $P(S_{n+1} = z+1 | S_n = z) = p(z)$ ning $P(S_{n+1} = z-1 | S_n = z) = 1-p(z)$. Kui $p(z) \equiv p$, on meil lihtne juhuslik ekslemine, kuid üldiselt mitte. Veendu, et S on endiselt Markovi ahel, kuid mitte enam sõltumatute juhuslike suuruste summa. Tõenäosusi $\{p(z)\}_{z \in \mathbb{Z}}$ nimetatakse **keskkonnaks** (*environment*). Keskkonda modelleeritakse juhuslikuna. Seega olgu $\{p(z)\}_{z \in \mathbb{Z}}$ iid $[0, 1]$ -väärtuselised juhuslikud suurused, ning iga ω korral olgu keskkond $\{p(z, \omega)\}_{z \in \mathbb{Z}}$ nende juhuslike suuruste realisatsioon. Peale keskkonna fikseerimist alustab juhuslik ekslemine oma teekonda, kusjuures

$$P^\omega(S_{n+1} = z + 1 | S_n = z) = p(z, \omega).$$

Fikseeritud keskkonna (ehk fikseeritud ω) korral on S Markovi ahel, kuid mitte (vt [1]). Sellist mudelit nimetatakse **juhuslikuks ekslemiseks juhuslikus keskkonnas** (*random walk in random environment (RWRE)*).

Millal on RWRE S rekurrentne ning millal on ta transientne? Analoogia põhjal võiks arvata, et S_n on rekurrentne parajasti siis kui keskmine juurdekasv (keskmistatud üle keskkonna) on null ehk $\mu := E[p(z) - (1-p(z))] = 0$ (ekvivalentsetel $Ep(z) = 0.5$). Selgub aga, et S_n on rekurrentne hoopis siis, kui $\eta := E(\ln \frac{p(z)}{1-p(z)}) = 0$. Kui $\eta > 0$, siis on S_n transientne ning $\lim_n S_n = \infty$, p.k.; kui $\eta < 0$, siis on S_n transientne ja $\lim_n S_n = -\infty$, p.k.. Seega võibolla, et keskmine juurdekasv on positiivne kuid $\lim_n S_n = -\infty$, p.k. (üliõpilane leiab sellise näite). RWRE-protsessil on palju teisigi tavalisest juhuslikust ekslemisest erinevaid omadusi. Näiteks kehtib küll koondumine $S_n/n \rightarrow v$, p.k., kus v on konstant, kuid üldiselt $v \neq \mu$ ja võib juhtuda, et $v = 0$ – koondumine aeglasem (vt [1]). Vaata ka [8]

(Multiple) excited random walk. Kujutame lihtsat juhuslikku ekslemist, mille korral paremale ja vasakule hüppamise tõenäosus on $1/2$ välja arvatud siis kui ta satub esimest korda uuele täisarvule. Sellisel juhul hüppab ta paremale (juurdekasv on $+1$) tõenäosusega $1/2 < p < 1$. Sellist olukorda kirjeldatakse erialases kirjanduses järgmiselt: igal täisarvul on üks küpsis.

Sattudes esimest korda täisarvule, sööb juhuslikult ekslev osake küpsise, kirstub sellest ning tema paremale hüppamise tõenäosus on $p > 1/2$. Sattudes aga samale täisarvule uuesti, on küpsis söödud ning vasakule ja paremale hüppamise tõenäosus on uuesti $1/2$. Kas ühest küpsisest igal täisarvul piisab, et juhuslik ekslemine muutuks transientseks ning $S_n \rightarrow \infty$, p.k? Selgub, et ei piisa – juhuslik ekslemine on ikka rekurrentne. Aga kui igal täisarvul on kaks küpsist – sattudes uuele täisarvule esimest või teist korda, on paremale hüppamise tõenäosus p , kuid edaspidi jälle $1/2$. Sellisel juhul on põgenemistõenäosus

$$\left(2 - \frac{1}{(2p-1)}\right)_+,$$

seega positiivne kui $p > 3/4$. Seega piisavalt suure p korral on põgenemine teoreetiliselt võimalik (positiivne tõenäosus) ja saab näidata, et sellisel juhul tõepoolest on protsess transientne, st põgenemine toimub p. k. ehk

$$P(S_n = 0, i.o.) = 1.$$

Seda mudelit on kerge üldistada – igal täisarvul on terve hunnik võibolla erinevaid (st erinevate tõenäosustega) küpsiseid. Formaalselt: igale täisarvul z on lõpmatu küpsiste vektor $w(z) = (w(z, 1), w(z, 2), \dots)$, kus $w(z, i) \in [1/2, 1]$. Meie viimases näites $w(z) = (p, p, 1/2, 1/2, \dots)$ iga z korral. Erinevatele täisarvudele vastavad vektorid $w(z)$ võivad olla erinevad. Vektorid $(w(z))_{z \in \mathbb{Z}}$ moodustavad nn **küpsiste keskkonna** (*cookie environment*). Pane tähele, et kui $w(z) = (p, p, p, \dots)$ iga z korral, siis on meil tavaline (ebasümmeetriline) lihtne juhuslik ekslemine, mis on transientne. Üldiselt aga on protsess S keerulisem ja pole üldiselt isegi mitte Markovi ahel (miks?). Seega ka selle protsessi rekurrentsus ja transientsus ei järeldu Markovi ahelate teooriast.

Tihti modelleeritakse vektoreid $w(z)$ juhuslikena – keskkond $(w(z))_{z \in \mathbb{Z}}$ on iid juhuslike suuruste $(W(z))_{z \in \mathbb{Z}}$ realisatsioon. Pane tähele, et erijuhul (siis kui iga z korral $W(z, 1) = W(z, 2) = \dots$) saame siit eelmises paragrahvis vaadeldud RWRE, kuid üldiselt on protsess nüüd märksa keerukam. Teatud juhtudel on protsessi transientsus ja rekurrentsus tõestatud [9, 4, 5]. Üliõpilane refereerib neid tulemusi, toob näiteid, simuleerib protsesside käitumist ning toob näiteid.

References

- [1] Mouad El Bouchattaoui. Random walk in random environment: A short introduction. *arXiv preprint arXiv:2407.04758*, 2024.
- [2] Rick Durrett. *Probability: theory and examples*, volume 49. Cambridge university press, 2019.
- [3] Geoffrey Grimmett and David Stirzaker. *Probability and random processes*. Oxford university press, 2020.
- [4] Elena Kosygina and Martin Zerner. Positively and negatively excited random walks on integers, with branching processes. *Electronic journal of probability*, pages 1952–1979, 2008.
- [5] Elena Kosygina and Martin PW Zerner. Excited random walks: results, methods, open problems. *arXiv preprint arXiv:1204.1895*, 2012.
- [6] S. Lalley. One-dimensional random walks. <http://galton.uchicago.edu/lalley/Courses/312/RW.pdf>.
- [7] Ron Peled. Recurrence for general random walks (random walks and Brownian motion, lecture notes, lecture nr 4).
- [8] Pál Révész. *Random walk in random and non-random environments*. World Scientific, 2013.
- [9] Martin PW Zerner. Multi-excited random walks on integers. *Probability theory and related fields*, 133(1):98–122, 2005.