

# Multiplikaatorpoolrühmad ja lokaalsed ühikelemendid

Bakalaureuse- või magistritöö teema

juhendajad Valdis Laan ja Kristo Väljako

Selles töös tuleks tutvuda hiljuti avaldatud käsikirjaga [1], kus uuritakse, kuidas ühikelemendita ringi  $A$  saab ideaalina sisestada teatud ühikelemendiga ringi  $M(A)$ , mida autorid nimetavad *multiplier ring*. Nad varustavad  $M(A)$  teatud topoloogiaga ja näitavad, et  $A$  on tihe  $M(A)$ -s parajasti siis, kui ringis  $A$  on olemas lokaalsed ühikelemendid.

Sellel teemal on võimalik kirjutada referatiivne töö, aga on võimalik proovida tõestada ka **uusi tulemusi**. Ennekõike võiks proovida näidata, et sarnased tulemused kehtivad ka poolrühmade jaoks. Selleks tuleks muuhulgas endale selgeks teha, kuidas konstrueeritakse moodulite ja polügoonide tensorskorutusi.

Kui  $A$  on ring, siis

$$M(A) = \{(\rho, \lambda) \mid \rho, \lambda : A \rightarrow A, (\forall a, b \in A) \rho(a)b = a\lambda(b)\}$$

ja selle hulga elemente nimetatakse inglise keeles terminiga *multiplier*. Parema puudumisel võiks eesti keeles kasutada terminit *multiplikaator*. Tundub, et multiplikaatorid on mingis mõttes seotud kaasendomorfismidega [2, Definitsioon 4.1] mõttes. (Alvin Lepik on uurinud kaasendomorfisme poolrühmade korral.) Seda seost võiks natuke lähemalt uurida.

Iga  $x \in A$  korral  $(\rho_x, \lambda_x) \in M(A)$ , kus

$$\rho_x : A \rightarrow A, \quad a \mapsto ax$$

$$\lambda_x : A \rightarrow A, \quad b \mapsto xb.$$

Kujutus  $\rho_x$  on  $x$ -ga paremalt korrutamise kujutus (*right translation by  $x$* ) ja  $\lambda_x$  on  $x$ -ga vasakult korrutamise kujutus (*left translation by  $x$* ). Seega võib vaadelda kujutust

$$\iota : A \rightarrow M(A), \quad x \mapsto (\rho_x, \lambda_x),$$

mis teatud eeldustel on injektiivne ringide homomorfism.

**Valdkond:** algebra, ringiteooria, poolrühmateooria.

**Märksõnad:** ring, moodul, poolrühm, polügoon, tensorkorrutis, lokaalsed ühik-  
elemendid, püsiv moodul, unitaarne moodul, ideaal.

## Viited

- [1] A. Van Daele, J. Vercauteren, Multiplier algebras and local units, 2025, <https://arxiv.org/abs/2507.08769>
- [2] K. Väljako, Tensor product rings and Rees matrix rings, *Comm. Algebra* 50 (2022), no. 11, 4945–4963.