Liu teoreem Morita ekvivalentsuse kohta

Bakalaureuse- või magistritöö teema (juhendaja Valdis Laan)

24. september 2025. a.

Suuremas osas **referatiivse** töö eesmärk on anda Liu teoreemi ([1, teoreem 3.7]) üksikasjaline (ja originaalist pisut selgemini esitatud) tõestus. See teoreem väidab, et kui poolrühmad S ja T on seotud Morita kontekstiga, mille kujutused on sürjektiivsed ja bipolügoonid unitaarsed, siis unitaarsete mittesingulaarsete polügoonide kategooriad üle nende poolrühmade on ekvivalentsed.

Olgu S poolrühm. Hulka A nimetatakse *parempoolseks polügooniks* üle poolrühma S, kui on defineeritud kujutus

$$A \times S \to A,\ (a, s) \mapsto aa$$

nii, et iga $a \in A$ ja $s, t \in S$ korral $a(st) = (as)t$. Sellist polügooni tähistatakse A_S. Parempoolsete polügoonide morfism on kujutus $f : A_S \to B_S$, mis rahuldab tingimust $f(as) = f(a)s$ iga $a \in A$ ja $s \in S$ korral.

Polügooni A_S nimetatakse

- *unitaarseks*, kui iga $a \in A$ jaoks leiduvad $a' \in A$ ja $s \in S$ nii, et $a = a's$;
- *mittesingulaarseks*, kui iga $a, a' \in A$ korral

$$((\forall s \in S)\ as = a's) \implies a = a'.$$

Kõigi unitaarsete mittesingulaarsete parempoolsete S-polügoonide kategooriat tähistame NAct_S.

Morita konteksti definitsiooni võib leida näiteks artiklist [2]. Lühidalt öeldes on see komplekt kahest bipolügoonist ja kahest bipolügoonide homomorfismist, mis rahuldavad teatud kooskõla tingimusi. Morita kontekste on Morita teoorias mugavam kasutada kui ekvivalentsifunktoreid kategooriate vahel.

Kui monoidide korral on selge, kuidas peaks defineerima Morita ekvivalentsuse, siis poolrühmade Morita ekvivalentsuse defineerimiseks on mitmeid võimalusi. Üks võimalus oleks öelda, et poolrühmad S ja T on *Morita ekvivalentsed* (või N-*ekvivalentsed*), kui kategooriad NAct_S ja NAct_T on ekvivalentsed. Seega Liu teoreem annab piisava tingimuse kahe poolrühma Morita ekvivalentsuseks. See teoreem on väga üldine, sest poolrühmadele S ja T ei esitata mitte mingeid lisanõudmisi (faktoriseeruvus, püsivus vmt.).

Sellel teemal võib proovida tõestada ka **uusi tulemusi**. Näiteks võib uurida järgmisi probleeme.

- Kas Liu teoreemis saab asendada kujutuste sürjektiivuse nõude üldisema aktsepteerivuse nõudega?
- Kas õnnestub leida poolrühm, mille korral kategooriad NAct_S ja FAct_S on mitte-ekvivalentsed? (Me teame, et faktoriseeruva poolrühma puhul peavad need kategooriad olema ekvivalentsed, seega me otsime kontranäidet, kus S oleks mittefaktoriseeruv.) Kas näiteks $\mathsf{NAct}_{\mathbb{N}}$ ja $\mathsf{FAct}_{\mathbb{N}}$ on ekvivalentsed, kus poolrühmaks on $(\mathbb{N}, +)$?
- Millised on üldse kategooria NAct_S omadused? Kas temas on mingi hulk tekitavaid või kotekitavaid objekte? Kas on midagi võimalik öelda projektiivsete objektide kohta? Jne.

Valdkond: algebra, poolrühmateooria, Morita teooria.

Märksõnad: poolrühm, polügoon, kategooria, ekvivalentsifunktor, unitaarne polügoon, mittesingulaarne polügoon, polügoonide tensorkorrutis, Morita kontekst.

Viited

[1] H. Liu, Morita equivalence based on Morita contexts for arbitrary semigroups, Hacet. J. Math. Stat. **45** (2016), 1083–1090.

[2] V. Laan, Acceptable Morita contexts for semigroups, ISRN Algebra, vol. 2012, article ID 725627, 2012, 5 pages.