Uurimisteemade tutvustus TÜ MSI üliõpilastele

Rainis Haller

25. septembril 2025 Tartus

Loodetavasti on teile silma jäänud mõni TÜ matemaatilise analüüsi õppejõud või teadlane, nt **Johann Langemets, Märt Põldvere, Natalia Saealle**, või olete enda uurimistöö võimalikku teemat arutanud mõne meie doktorandiga (**Jaan Kristjan Kaasik, Jaagup Kirme, Nikita Leo, Marcus Lõo, Triinu Veeorg**), noore doktoriga (**Stefano Ciaci, Rihhard Nadel, Andre Ostrak, Katriin Pirk**) või järeldoktoriga (**Yoël Perreau, Andrés Quilis**). Või on teile meeldinud meie õppeained, nt Matemaatiline analüüs I, II ja III, Funktsionaalanalüüs I, II ja III, Mõõt ja Lebesgue'i integraal või Üldine topoloogia I.

Noorte (esimeste) uurimisteemade mitmekesisus on matemaatilise analüüsi valdkonnas meie (uurimisrühma, ülikooli ja Eesti) taseme hoidmiseks ja tõstmiseks oluline. Reeglina on küll bakatööde teemad seotud meie endi uurimistöö aktiivse suunaga. Arvestage ka, et ühel tööl võib vabalt olla mitu juhendajat. Isegi kui täna kõik matemaatilise analüüsi õppejõud-teadlased või doktorandid omi teemasid välja ei paku, siis on nad kõik juhendamiseks või kaasjuhendamiseks valmis. Igatahes on kõik üliõpilased meie juurde väga oodatud.

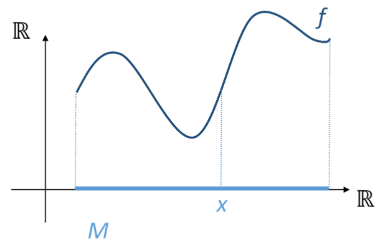
1 Uurimistöö FA uurimisrühma juures

a) **Diameeter-2 omadused.** Tutvustus eeldab põhjalikumat sissejuhatust ja individuaalset lähenemist. Banachi ruumide diameeter-2 omaduste maailm on küllaltki kirju, üldiselt uuritakse siin Banachi ruume, mille ühikkera kõik teatud tüüpi osahulgad (nt viilud) on diameetriga 2, nt Daugaveti ruume. Siin on mitmeid tuntud ja vähem tuntud lahendamata probleeme. Meie rühma liikmed ja mitmed meie head tuttavad matemaatikud tegelevad selles vallas aktiivselt. Viimasel ajal on suurema tähelepanu all nende omaduste lokaliseeritud variandid, mille puhul ühikkera kindlat punkti (Δ-punkti või Daugaveti punkti) sisaldavad viilud on diameetriga 2.

b) **Lipschitzi funktsioonide ruumid ja Lipschitzi-vabad ruumid.** Olgu $M \subseteq \mathbb{R}$ (või olgu (M, d) suvaline meetriline ruum). Öeldakse, et kujutus $f\colon M \to \mathbb{R}$ on *Lipschitzi funktsioon*, kui mingi reaalarvu L korral kehtib mis tahes elementide $x, y \in M$ jaoks võrratus

$$|f(x) - f(y)| \leqslant L \cdot |x - y| \qquad \big(|f(x) - f(y)| \leqslant L \cdot d(x, y)\big).$$

Lipschitzi funktsiooni f on võimalik vaadelda teatud pideva lineaarse kujutuse $\hat{f}\colon \mathcal{F}(M) \to \mathbb{R}$ ahendina, kus $\mathcal{F}(M)$ on teatud Banachi ruum. N-ö *Lipschitzi-vabade ruumide* $\mathcal{F}(M)$ kohta on vähe teada ja neid uuritakse intensiivselt. Näiteks on teada, et $\mathcal{F}(\mathbb{R}) = L_1(\mathbb{R})$, aga juba $\mathcal{F}(\mathbb{R}^2)$ ei ole rahuldavalt kirjeldatud. Uurimistöö käigus antakse ülevaade selles vallas avaldatud tulemustest ja ehk keskendutakse mingile konkreetsele juhule täpsemalt. Meie rühma liikmed ja mitmed meie head tuttavad matemaatikud tegelevad selles vallas aktiivselt.



Joonis 1: Ühe Lipschitzi funktsiooni $f\colon M \to \mathbb{R}$ graafik, kus $M \subset \mathbb{R}$

c) **Normi saavutavad operaatorid.** Olgu X Banachi ruum üle $\mathbb{K}$, kus $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ või $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Kõigi pidevate lineaarsete funktsionaalide $X \to \mathbb{K}$ hulk $L(X, \mathbb{K})$ on ise Banachi ruum loomulike vektorruumi tehetega ja normiga $\|f\| = \sup_{x \in B_X} |f(x)|$. Siin tähistab B_X Banachi ruumi X kinnist ühikkera ehk $B_X = \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}$. Öeldakse, et $f \in L(X, \mathbb{K})$ *saavutab normi*, kui leidub $x_0 \in B_X$ nii, et $|f(x_0)| = \|f\|$. On teada, et normi saavutavate funktsionaalide hulk on tihe Banachi ruumis $L(X, \mathbb{K})$ (Bishopi–Phelpsi teoreem). Samuti on teada, et iga funktsionaal ruumist $L(X, \mathbb{K})$ saavutab oma normi parajasti siis, kui X on refleksiivne (s.o Jamesi teoreem). Olukord on palju komplitseeritum, kui funktsionaalide asemel vaatleme üldiseid operaatoreid suvaliste Banachi ruumide vahel. Banachi ruumide X ja Y korral on pidevate lineaarsete operaatorite $X \to Y$ hulk $L(X, Y)$ Banachi ruum normiga $\|A\| = \sup_{x \in B_X} \|Ax\|$. Öeldakse, et operaator $A \in L(X, Y)$ saavutab normi, kui leidub $x_0 \in B_X$ nii, et $\|Ax_0\| = \|A\|$. On teada, et alati ei saa kõiki kompaktseid operaatoreid (s.o oluline alamklass kõigi pidevate lineaarsete operaatorite seas) lähendada normi saavutavate operaatoritega (M. Martín, 2014). Aga siiani ei ole teada, kas kõiki lõplikumõõtmelisi operaatoreid (s.o operaatorid, mille väärtuste hulk on lõplikumõõtmeline vektoralamruum) saab lähendada normi saavutavate operaatoritega. Mitmed meie head tuttavad matemaatikud tegelevad selles vallas aktiivselt.

d) **Loenduva arvu viiludega määratud Banachi ruumid** Aastal 2010 tõid A. Avilés, V. Kadets, M. Martín, J. Merí ja V. Shepelska sisse loenduva arvu viiludega määratud Banachi ruumi mõiste, et üldistada Asplundi ja Radon–Nikodými omadusega separaableid Banachi ruume. Olgu X Banachi ruum. Kumerat tõkestatud hulka $A \subset X$ nimetatakse *loenduva arvu viiludega määratud hulgaks*, kui leidub hulga A viilude jada $\{S_n : n \in \mathbb{N}\}$ nii, et iga hulga A viil sisaldab mingit hulka S_n. Separaablit Banachi ruumi X nimetatakse *loenduva arvu viiludega määratud ruumiks*, kui ruumi X iga kumer tõkestatud alamhulk on loenduva arvu viiludega määratud hulk. Selle mõistega on lähedalt seotud loenduva nõrga π-baasi olemasolu Banachi ruumis. Mõlema mõistega on seotud erinevaid lahtisi küsimusi, mis vajaksid täiendavat uurimist.

2 Referatiivne töö matemaatilise analüüsi valdkonnas

Baka- ja magistritööd ei pea tingimata uusi matemaatilisi tulemusi andma. On väga palju selliseid teemasid, mis võimaldavad üliõpilasel ja juhendajal õppida mingit matemaatika olemasolevat osa sügavuti ja võib-olla alustuseks kaardistada seal lahtised probleemid edasiseks uurimistööks. Ka referatiivse töö matemaatikas võib olla väga värske, iga päev avaldatakse matemaatika tulemusi ja me ju hoiame oma alal toimuval silma peal. Minge konkreetse inimese juurde (vt loendit eespool) ja küsige temalt. Selline teema võib olla nt 1) nõrgalt jadalised täielikud Banachi ruumid või 2) lumehelbe-meetrika.