MSI matemaatika eriala bakatööde teemade tuvustus 2024

Funktsionaalanalüüsi uurimisrühma teemad

Rainis Haller

26. septembril 2024

1. Algebra, professor Valdis Laan
2. Funktsionaalanalüüs, professor Rainis Haller
3. Geomeetria ja topoloogia, professor Viktor Abramov
4. Juhuslikud protsessid, professor Jüri Lember
5. Murrulised tuletised, iseärasustega diferentsiaal- ja integraalvõrrandid ning mittekorrektsed ülesanded, professor Arvet Pedas
6. Rakendusstatistika, professor Krista Fischer
7. Teoreetiline mehaanika, emeriitprofessor Jaan Lellep
8. Topoloogilised algebrad, kaasprofessor Mart Abel
9. Matemaatikahariduse keskus, kaasprofessor Karin Täht

... tegeleb peamiselt Banachi ruumide geomeetria ja mittelineaarse funktsionaalanalüüsiga koosseisus:

- prof. Rainis Haller
- kaasprof. Johann Langemets
- kaasprof. Märt Põldvere
- lektor Kati Ain
- lektor Natalia Saealle
- lektor Indrek Zolk

- järeldoktorant Yoël Perreau
- järeldoktorant Andrés Quilis

- doktorant Jaan Kristjan Kaasik
- doktorant Jaagup Kirme
- doktorant Paavo Kuuseok
- doktorant Marcus Lõo
- doktorant Triinu Veeorg
- doktorant Nikita Leo

Projektides ja juhendamises osalevad ka:
Sheldon Dantas, Miguel Martin, Vegard Lima, Aleksei Lissitsin, Andre Ostrak, Abraham Rueda Zoca, Olesia Zavarzina
Järeldoktorantuuri taotlenud: Henrik Wirzenius

Doktorikaitsmised 2020–2024:

- Katriin Pirk „*Diametral diameter two properties, Daugavet-, and Δ-points in Banach spaces*“, juhendajad: R. Haller, J. Langemets ja T. A. Abrahamsen;
- Rihhard Nadel „*Big slices of the unit ball in Banach spaces*,juhendajad: R. Haller, J. Langemets ja V. Lima;
- Andre Ostrak „*Diameter two properties in spaces of Lipschitz functions*“, juhendajad: R. Haller ja M. Põldvere;
- Stefano Ciaci „*Extreme geometric structure of the unit ball in Banach spaces*“, juhendajad: J. Langemets ja A. Lissitsin.

Doktoritöö on peaaegu valmis:

- Julia Martsinkevitš „*Geometric structure of the dual space of strict ideals in Banach spaces*“, juhendaja M. Põldvere.

Võimalik ka:

- Tauri Viil „*Structural properties of subspaces in Banach spaces and spaces of operators*“, juhendajad: E. Oja ja M. Põldvere.

- PRG1901 „Banachi ruumide ühikkera plastilisus ja ekstremaalne geomeetriline struktuur ning selle rakendused Lipschitzi ruumide, vektorväärtustega funktsioonide ruumide ja tensorkorrutiste uurimisel“, 2023–2027, rahastamine 2023–2024: 354 000 EUR, vastutav täitja R. Haller;
- PSG487 „Suure viilu fenomen Banachi ruumides ning selle rakendused Lipschitzi ruumide uurimisel“, 2020–2024, rahastamine: 252 750 EUR, vastutav täitja J. Langemets;
- SJD58 „Daugaveti- ja Delta-punktid kui Banachi ruumide teooria suurte ja väikeste viilude fenomenide vahelülid“, 2022–2024, rahastamine: 118 920 EUR, vastutav täitja Y. Perreau.

Tõenäoline:

- PRG2545 „Ekstremaalsed nähtused Banachi ruumide geomeetrias: väikesed ja suured viilud ning nende rakendused Lipschitzi-vabades ruumides ja nende kaasruumides“, 2025–2029, vastutav täitja J. Langemets.

EMS-i üliõpilaspreemia:

- 2019, Triinu Veeorg, bakatöö, juhendajad R. Haller ja K. Pirk;
- 2021, Nikita Leo, bakatöö, juhendajad R. Haller ja O. Zavarzina (V. N. Karazini nimeline Harkivi Rahvuslik Ülikool);
- 2023, Kaarel August Kurik, bakatöö, juhendajad R. Haller ja N. Leo.

Professor Gerhard Rägo nimeline mälestusmedal:

- 2021, Paavo Kuuseok.

Õpetamise arendamise grant:

- 2022, Natalia Saealle ja Ella Puman;
- 2023, Kati Ain ja Kaido Lätt.

Tartu Ülikooli aumärk:

- 2023, Johann Langemets.

Publikatsiooniauhind:

- 2020, Andre Ostrak „*Characterisation of the weak-star symmetric strong diameter 2 property in Lipschitz spaces*“, J. Math. Anal. Appl. 483 (2020) (preemia sai ka Kristo Väljako);
- 2021, Johann Langemets „*Symmetric strong diameter two property in tensor products of Banach spaces*“, J. Math. Anal. Appl. 491 (2020);
- 2022, Nikita Leo „*Plasticity of the unit ball of c and c_0*“, J. Math. Anal. Appl. 507 (2022);
- 2022, Triinu Veeorg „*Characterizations of Daugavet- and delta-points in Lipschitz-free spaces*“, Studia Math. 268 (2023).

Arnold Humala preemia:

- 2021/22, Rihhard Nadel doktoritöö eest;
- 2022/23, Andre Ostrak doktoritöö eest (sel aastal sai preemia ka Kristo Väljako).

Banachi ruumide geomeetria

I Daugaveti omadus ja selle variatsioonid (diameeter-2 omadused). Nende omaduste lokaalsed versioonid. Rakendamine Lipschitzi funktsioonide ruumide uurimisel

II Banachi ruumi ühikkera plastilisus

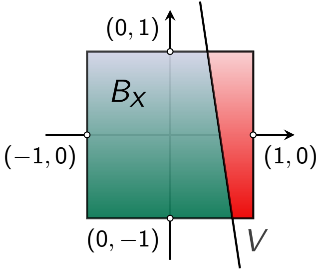
III Normi saavutavad operaatorid

IV Loenduva arvu viiludega määratud ruumid

- BR-I X on Daugaveti omadus (DP), kui iga $x \in S_X$ on Daugaveti punkt ehk iga ühikkera B_X viilu V ja iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $y \in V$ nii, et $\|x - y\| \geq 2 - \varepsilon$.

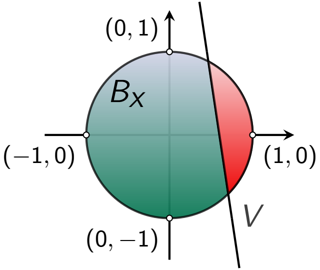
$X = \mathbb{R}^2$

$\|(a, b)\| = \max\{|a|, |b|\}$



$X = \mathbb{R}^2$

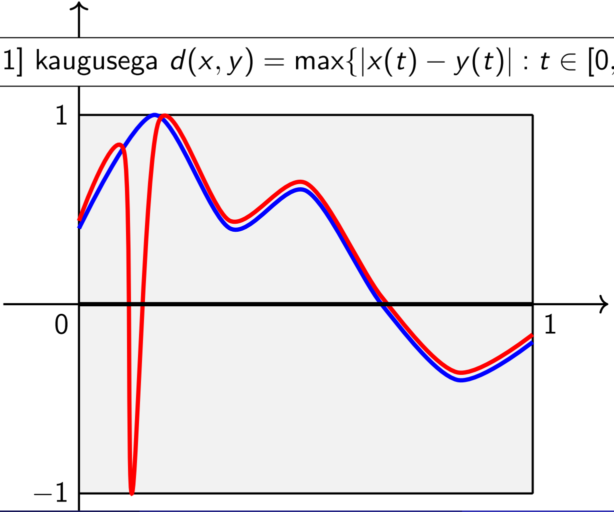
$\|(a, b)\| = \sqrt{|a|^2 + |b|^2}$



Banachi ruumidel $C[0,1]$ ja $L_1[0,1]$ on Daugaveti omadus.

BR-I X on Daugaveti omadus (DP), kui iga $x \in S_X$ on Daugaveti punkt ehk iga B_X viilu V ja iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $y \in V$ nii, et $\|x - y\| \geq 2 - \varepsilon$.

C[0,1] kaugusega $d(x, y) = \max\{|x(t) - y(t)| : t \in [0, 1]\}$



BR-I X on Daugaveti omadus (DP), kui iga $x \in S_X$ on Daugaveti punkt ehk iga B_X viilu V ja iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $y \in V$ nii, et $\|x - y\| \geq 2 - \varepsilon$.

$$
\begin{tikzcd}
 & \text{SSD2P} \arrow[d, Rightarrow] & \text{ASQ} \arrow[l, Rightarrow] \arrow[dd, Rightarrow] \\
\text{DP}=\text{DSD2P} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \text{SD2P} \arrow[d, Rightarrow] & \\
\text{DD2P} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \text{D2P} \arrow[d, Rightarrow] & \text{WASQ} \arrow[l, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] \\
\text{DLD2P} \arrow[r, Rightarrow] & \text{slice-D2P} & \text{LASQ} \arrow[l, Rightarrow]
\end{tikzcd}
$$

- Teemaga on rohkem seotud Stefano Ciaci, Jaan Kristjan Kaasik, Paavo Kuuseok ja Triinu Veeorg

Olgu M meetriline ruum kaugusega d. Lipschitzi funktsioonid $f\colon M \to \mathbb{R}$, moodustavad Lipschitzi funktsioonide Banachi ruumi $\mathrm{Lip}(M)$ normiga

$$\|f\|_L = \sup\left\{\frac{|f(x)-f(y)|}{d(x,y)} : x, y \in M, x \neq y\right\}.$$

Iga $x \in M$ määrab pideva lineaarse kujutuse

$$\delta(x)\colon\ \mathrm{Lip}(M) \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto f(x).$$

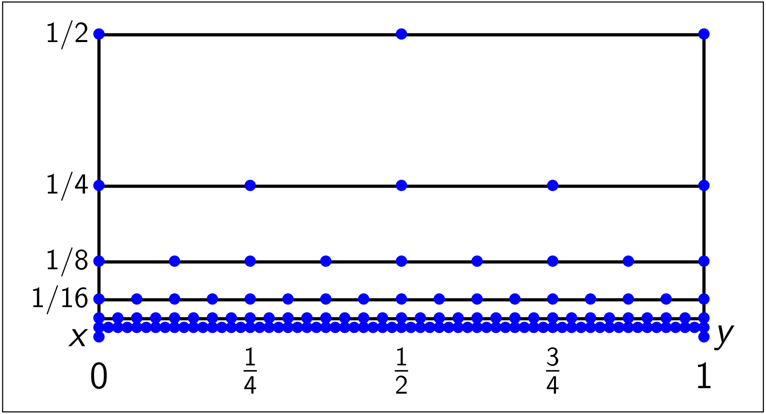
Kokku saame Lipschitzi-vaba Banachi ruumi

$$\mathcal{F}(M) \coloneqq \overline{\mathrm{span}}\,\delta(M) \subset \mathrm{Lip}(M)^* \qquad \Big(F(M)^* = \mathrm{Lip}(M)\Big).$$

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f\in\mathrm{Lip}(M)"] \arrow[d, hook, "\delta"'] & \mathbb{R} \\
\mathcal{F}(M) \arrow[ur, dashed, "\widehat{f}\in\mathcal{L}(\mathcal{F}(M){,}\mathbb{R})"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\delta_M"'] & N \arrow[d, "\delta_N"] \\
\mathcal{F}(M) \arrow[r, dashed, "\hat{g}"] & \mathcal{F}(N)
\end{tikzcd}$$

1) Triinu Veeoru näide M, mille puhul on Banachi ruumil $\mathcal{F}(M)$ RNP, aga sel ruumil on Daugaveti punkte, nt $m_{x,y} := \frac{\delta(x)-\delta(y)}{d(x,y)}$.



2) Andre Ostrak püüab praegu lahendada 60 a vana tuntud probleemi: Kas igal Banachi ruumi ℓ_1 ekvivalentsel ümbernormeeringul on MAP? Idee on vaadelda leitud erilist loenduvat meetrilist ruumi, kus kaugused 0, 1 ja 2. Sel juhul on küsimus, kas Banachi ruumil $\mathcal{F}(M)$ on MAP.

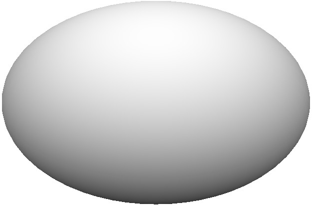
Olgu X Banachi ruum. Selle ühikkera B_X on plastiline, kui
iga kaugusi mittesuurendav bijektsioon $B_X \to B_X$ on isomeetriline ehk ei leidu kaugusi (mingis osas) kokku suruvat bijektsiooni $B_X \to B_X$.

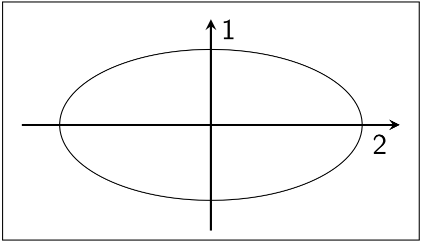
Kas iga Banachi ruumi ühikkera on plastiline?

Eukleidilise ruumi ℓ_2 ellipsoidiga piiratud hulk

$$B := \left\{x = (\xi_k) : \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\xi_k|^2}{a_k^2} \leqslant 1\right\}, \text{ kus } a_k = \begin{cases} 1, & \text{kui } k \text{ paaris}, \\ 2, & \text{kui } k \text{ paaritu}, \end{cases} \text{ on}$$

plastiline.



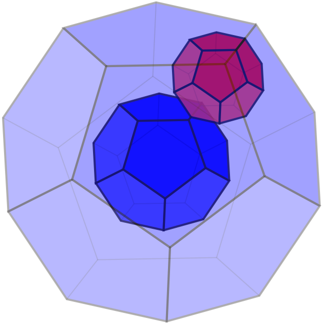


- Banachi ruumi X ühikkera B_X on plastiline, kui iga kaugusi mittesuurendav bijektsioon $B_X \to B_X$ on isomeetriline ehk kaugusi ei muuda.

Kas iga Banachi ruumi ühikkera on plastiline?

Selle küsimuse lahendamisel on olulise panuse andnud:

- Nikita Leo,
- Kaarel August Kurik.



- Operaator $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ saavutab normi, kui leidub $x_0 \in B_X$ nii, et

$$\|Tx_0\| = \sup\{\|Tx\| : x \in B_X\} =: \|T\|.$$

- Lipschitzi kujutus $f\colon M \to \mathbb{R}$ saavutab normi tugevalt, kui leiduvad $x_0, y_0 \in M$ nii, et

$$\frac{|f(x_0) - f(y_0)|}{d(x_0, y_0)} = \sup\left\{\frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)} : x, y \in M, x \neq y\right\} =: \|f\|_L.$$

Kas kõiki lõplikumõõtmelisi operaatoreid (s.o operaatorid, mille väärtuste hulk on lõplikumõõtmeline vektoralamruum) saab lähendada normi saavutavate operaatoritega?

- Teemaga on rohkem seotud Jaagup Kirme.

- Hulk A on loenduva arvu viiludega määratud hulk, kui leidub hulga A viilude jada $\{S_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ nii, et iga hulga A viil S sisaldab ühte viiludest S_n.
- Separaablit Banachi ruumi X nimetatakse loenduva arvu viiludega määratud ruumiks, kui ruumi X iga kumer tõkestatud alamhulk on LVM-hulk.

Kõik refleksiivsed ruumid on sellised, aga nt Banachi ruumid $C[0,1]$ ja $L_1[0,1]$ ei ole, nende ühikkera ei ole LVM-hulk.

Kas igal mitte-LVM-ruumil leidub alamruum $Y \subset X$ nii, et Y on isomorfne Daugaveti omadusega Banachi ruumiga?

- Teemaga rohkem seotud Marcus Lõo.

Baka- ja magistritööd ei pea tingimata uusi matemaatilisi tulemusi andma. On väga palju selliseid teemasid, mis võimaldavad üliõpilasel ja juhendajal õppida mingit matemaatika olemasolevat osa sügavuti ja võib-olla alustuseks kaardistada seal lahtised probleemid edasiseks uurimistööks. Ka referatiivse töö matemaatika võib olla väga värske, iga päev avaldatakse matemaatika tulemusi ja me ju hoiame oma alal toimuval silma peal. Minge konkreetse inimese juurde (vt loendit eespool) ja küsige temalt. Selline teema võib olla nt

- nõrgalt jadalised täielikud Banachi ruumid;
- lumehelbe-kaugusega meetrilised ruumid;
- Banachi võred.

Rohkem infot

- Daugaveti ja diameeter-2 omaduse kohta saad rohkem lugeda Katriini ja Rihhardi Novaatoris ilmunud artiklist: https://novaator.err.ee/1210441/kaks-doktoritood-aitavad-moista-eksootilise-ruumi-eripara
- Uurimisrühma veebileht (EST): https://www.math.ut.ee/et/sisu/funktsionaalanaluus
- Uurimisrühma veebileht (ENG): https://sites.google.com/view/functionalanalysistartu/about