Sissejuhatus vabasse tõenäosusteooriasse

Vaba tõenäosusteooria (*free probability theory*) on tegelikult algebra valdkond, mis uurib, kuidas tõenäosusteooria (või osa sellest) näeks välja siis kui juhuslikud suurused ei oleks kommuteeruvad. Teooria keskel kohal on nn vaba sõltumatuse mõiste. Klassikalisest tõenäosusteooriast on teada, et kui X ja Y on sõltumatud juhuslikud suurused, siis iga n, m korral

$$E(X^m Y^n) = E(X^m)E(Y^n)$$

ning teatud tingimustel see seos (iga n, m korral) defineerib sõltumatuse. Kommutatiivsus võimaldab kergesti arvutada segamomente

$$E(X^{m_1}Y^{n_1}X^{m_2}Y^{n_2}\cdots X^{m_k}Y^{n_k}) = E(X^{m_1+\cdots+m_k}Y^{n_1+\cdots+n_k}) = E(X^{m_1+\cdots+m_k})E(Y^{n_1+\cdots+n_k}).$$

Pane tähele, et (sõltumatus ja kommutatiivsus)

$$E[(X-EX)(Y-EY)(X-EX)] = E(X-EX)^2E(Y-EY) = 0,$$

kuid

$$E[(X-EX)(Y-EY)(E-EX)(Y-EY)] = E(X-EX)^2E(Y-EY)^2 = D(X)D(Y),$$

mis üldiselt ei ole võrdne nulliga.

Öeldakse, et X ja Y on **vabalt sõltumatud** (*free* või *freely independent*), kui mistahes k ja $n_1, m_1, n_2, m_2, \ldots, n_k, m_k \geq 1$ korral

$$E[(X^{m_1}-EX^{m_1})(Y^{n_1}-EY^{n_1})\cdots(X^{m_k}-EX^{m_k})(Y^{n_k}-EY^{n_k})] = 0. \quad (1)$$

On selge, et sõltumatud juhuslikud suurused ei ole vabalt sõltumatud. Seos (1) võimaldab kergesti arvutada (vabu) segamomente:

$$\begin{aligned}
&E(X^m-EX^m)(Y^n-EY^n) = 0 \quad \Rightarrow \\
&E(X^mY^n) - (EX^m)(EY^n) - (EX^m)(EY^n) + (EX^m)(EY^n) = 0 \quad \Rightarrow \\
&E(X^mY^n) = E(X^m)E(Y^n).
\end{aligned}$$

Ülatoodud seos on sama, mis sõltumatuse korral. Kuid selgub, et

$$\begin{aligned}
&E[(X-EX)(Y-EY)(X-EY)(Y-EY)] = 0 \quad \Rightarrow \\
&E(XYXY) = (EY)^2EX^2 + (EX)^2EY^2 - (EY)^2(EY)^2.
\end{aligned}$$

Seega vaba sõltumatuse korral avalduvad segamomendid teisiti.

Vaba tõenäosusruum. Vabas tõenäosusteoorias harilikult tähistatekse uuritavaid objekte (juhuslike suuruste analooge) mingi mittekommutatiivse algebra $\mathcal{A}$ elementidena. Siin $\mathcal{A}$ on ühikelemendiga mittekommutatiivne algebra ning φ

on mingi sellel antude lineaarne fukntsionaal, mille korral $\varphi(1) = 1$ (interpretatsioon: keskväärtus). Paari $(\mathcal{A}, \varphi)$ nimetatakse mittekommutatiivseks tõenäosusruumiks. Algebra elemendid x ja y tekitavad alam-algebrad, olgu need $\mathcal{C}$ ja $\mathcal{B}$. Nendesse alam-algebratesse kuuluvad ka kõik korrutised ja ühikelementid, st iga n korral $x^n \in \mathcal{B}$ ja $y^n \in \mathcal{C}$. Öeldakse, et $\mathcal{B}$ ja $\mathcal{C}$ on vabalt sõltumatud kui iga k ja iga $c_i \in \mathcal{C}$ ning $b_i \in \mathcal{B}$ korral

$$\varphi\Big[(c_1 - \varphi(c_1)1)(b_1 - \varphi(b_1)1) \cdots (c_k - \varphi(c_k)1)(b_k - \varphi(b_k)1)\Big] = 0. \qquad (2)$$

Elemendid x ja y on vabalt sõltumatud, kui nende tekitatud algebrad $\mathcal{C}$ ja $\mathcal{B}$ on vabalt sõltumatud. Võttes $c_i = x^{n_i}$ ja $b_i = y^{m_i}$, näeme et (2) on tõepoolest (1) analoog.

Vaba tsentraalne piirteoreem. Tõenäosusteooria üks keskseimaid tulemusi on tsentraalne piirteoreem, mis (oma kõige lihtsamal ja üldlevinumal) kujul ütleb, et kui $X_1, X_2, \ldots$ on sõltumatud juhuslikud suurused, mille korral $EX_i = 0$ ja $EX_i^2 = 1$, siis nende normeeritud summa koondub jaotuse järgi standardseks normaaljaotuseks:

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}} \Rightarrow \mathcal{N}(0,1).$$

Ülaltoodud koondumist võib käsitleda kui kõikide momentide koondumist, st iga $m \geq 1$ korral

$$E\Big(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}}\Big)^m \to EZ^m, \quad Z \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Olles defineerinud vaba sõltumatuse, tekib küsimus: kui $(\mathcal{A}, \varphi)$ on vaba tõenäosusruum ning $x_1, x_2, \ldots \in \mathcal{A}$ on sõltumatud, kusjuures $\varphi(x_i) = 0$ ja $\varphi(x_i^2) = 1$, siis kas kehtib tsentraalse piirteoreemi analoog: jada

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{\sqrt{n}}?$$

koondub (mingis mõttes) piirjaotuseks?Vabas tõenäosusteoorias on nõrk koondumine defineeritud momentide koondumisena, st

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{\sqrt{n}} \Rightarrow Z \qquad (3)$$

parajasti siis, kui iga $m \geq 1$ korral

$$\varphi\Big[\Big(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{\sqrt{n}}\Big)^m\Big] \to EZ^m.$$

Selgub, et koondumine (3) tõepoolest kehtib, kuid **piirjaotus pole normaaljaotus!**

Bakalaureusetöö on referatiivne. Üliõpilane tutvub kirjanduse põhjal vaba tõenäosusteooria põhimõistetega ja peamiste tulemustega (vaba tsentraalne piirteoreem jne).