Mittekorrektsed ülesanded

Bakalaureusetöid juhendavad Uno Hämarik, Toomas Raus ja Urve Kangro

Loodusnähtuste ja tehnoloogiliste protsesside matemaatilisel uurimisel koostatakse vastava nähtuse või protsessi matemaatiline mudel (selle teemaga saab tutvuda kursuses MTMM.00.326 "Matemaatiline modelleerimine") ja formuleeritakse matemaatiline ülesanne. Seda ülesannet nimetatakse korrektseks ülesandeks tingimustel 1) ülesandel leidub parajasti üks lahend, 2) see lahend sõltub pidevalt lähteandmetest. Kui mõni neist tingimustest pole täidetud, nimetatakse ülesannet mittekorrektseks ülesandeks (mittekorrektselt seatud ülesandeks). Ülesannet ümber formuleerides saab sageli rahuldada tingimust 1), aga mitte tingimust 2). Seega võib öelda ka, et mittekorrektsed ülesanded on ülesanded, kus lähteandmete väiksel muutusel lahend muutub väga palju. Sellised ülesanded kerkivad näiteks meditsiinilistes tomograafiauuringutes, geoloogias maavarade otsingul, õhu ja vee kvaliteedi uurimisel, ilmaennustustes, kusjuures andmed saadakse mõõtmisel ning sisaldavad paratamatut mõõtmisviga. Ilmaennustuste kohta on laialt tuntud väide, et liblika tiivalöök Brasiilias võib põhjustada tornaado Texases. Seda väitis 50 aastat tagasi USA matemaatik ja meteoroloog Edward Norton Lorenz. Ta märkas, et ilmastiku mõõteandmeid vaid pisut muutes (näiteks täpsema mõõteriista saamisel) võib ilmastikuprognoos kardinaalselt muutuda. E. N. Lorenz on üks kaoseteooria loojatest.

Mittekorrektsed ülesanded on ka paljud standardsed andmetöötluse ülesanded, näiteks suure konditsiooniarvuga lineaarse võrrandisüsteemi lahendamine, mõõtmisvigadega andmete numbriline diferentseerimine, andmete interpoleerimine, signaali ja kujutise töötlus. Mittekorrektse ülesande stabiilseks lahendamiseks (regulariseerimiseks) lähendatakse ülesanne korrektse ülesandega, kusjuures lähendustäpsust väljendav regulariseerimisparameeter valitakse sõltuvalt lähteandmete veatasemest. Mittekorrektsete ülesannete kesksed küsimused on regulariseerimisalgoritmide ja regulariseerimisparameetri valiku reeglite uurimine. Selle teemaringiga saab tutvuda ka kursustel MTMM.00.210 "Mittekorrektsed ülesanded", MTMM.00.217 "Sissejuhatus mittekorrektsetesse ülesannetesse". Viimase aine kursusel saab osaleda 2025.a. kevadel. Teema sobib bakalaureusetööks, aga on jätkatav ka magistri- ja doktoritööks. Mittekorrektsete ülesannete Tartu Ülikooli uurimisgrupi tegevuse kohta leiab rohkem infot veebilehelt https://reg.cs.ut.ee/.

Lineaarsed mittekorrektsed ülesanded esitatakse tüüpiliselt operaatorvõrrandina

$$Au = f, \tag{1}$$

kus antud on funktsioon f ja lineaarne operaator A Hilberti või Banachi ruumide vahel ning u on otsitav funktsioon. Erijuhuks on lineaarne võrrandisüsteem lahendivektori u leidmiseks, kui operaatoriks A on maatriks ja andmeteks f on vektor.

Täpse parema poole f asemel on tüüpiliselt teada lähend f_δ,

$$\|f_\delta - f\| \le \delta.$$

Kui lähteandmete veatase δ on teada, saab sageli ülesannet regulariseerida, valides sobivas regulariseerimismeetodis regulariseerimisparameetri sõltuvalt suurusest δ nii, et lähislahend koondub täpseks lahendiks protsessis $\delta \to 0$.

Järgnevalt mõned näited konkreetsetest teemadest.

1) **Esimest liiki integraalvõrrandi numbriline lahendamine kollokatsioonimeetodiga** (juhendaja U. Hämarik ja/või U. Kangro).

Esimest liiki (Fredholmi) integraalvõrrand on võrrand kujul

$$Au(t) \equiv \int_a^b K(t.s)u(s)ds = f(t),$$

kus tuum $K(t,s)$ ja funktsioon $f(t)$ on antud ja funktsioon $u(s)$ on otsitav. Ülesande lahendamiseks arvutil on vaja ülesanne diskretiseerida.

Kollokatsioonimeetodis valitakse kollokatsioonipunktide $\{t_1, ..., t_n\}$ ja baasfunktsioonide $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ komplektid ning otsitakse lähislahendi $u_n = \sum_{i=1}^n c_i\varphi_i$ kordajaid $\{c_1, ..., c_n\}$, mis rahuldaksid kollokatsioonitingimusi

$$\int_a^b K(t_i.s)u_n(s)ds = f_\delta(t_i), \quad i = 1, ..., n.$$

Eesmärk on leida lihtsamatel juhtudel tingimusi, mil kollokatsioonimeetod osutub sobiva $n = n(\delta)$ valiku korral regulariseerimismeetodiks.

2) **Landweberi iteratsioonimeetodi kiirendamine** (juhendaja U. Hämarik ja/või T. Raus).

Klassikaline Landweberi iteratsioonimeetod võrrandi (1) lahendamiseks on kujul

$$u_{n+1} = u_n + \omega A^*(f_\delta - Au_n), \quad \omega \in (0, \frac{1}{\|A\|^2}), \quad n = 0, 1, 2, ...,$$

kus u_0 on alglähend ja A^* on operaatori A kaasoperaator. Iteratsioonid peatatakse esimese n korral, kus $\rho_n := \|Au_n - f_\delta\| < \delta$. Meetodi puuduseks on see, et vajatav iteratsioonide arv $n = n(\delta)$ on sageli väga suur. Kirjanduses on välja pakutud kiirendatud Landweberi meetod kujul

$$u_{n+1} = z_n + \omega A^*(f_\delta - Az_n), \quad z_n = u_n + \alpha_n(u_n - u_{n-1}), \quad n = 0, 1, 2, ...,$$

valides $\alpha_n = \frac{n-1}{n+1}$ või $\alpha_n = \frac{n-1}{n+2}$. Arvutused näitavad, et täpsema lähislahendi saab, valides α_n sõltuvana mitte ainult n-ist, vaid ka ρ_n väärtusest. Töö eesmärk ongi uurida sobiva α_n valikut.

3) **Regulariseerimisparameetri heuristilisest valikust Tihhonovi meetodis** (juhendaja U. Hämarik ja/või T. Raus).

Tihhonovi regulariseerimismeetod on kujul

$$u_\alpha = (\alpha I + A^*A)^{-1}A^*f_\delta.$$

Kui lähteandmete veatase δ pole teada, tuleb regulariseerimisparameeter α valida mingi heuristilise reegli järgi (s.t. veataset kasutamata). Kvaasioptimaalsuse reeglis valitakse regulariseerimisparameetriks funktsiooni

$$\psi_\alpha = \alpha\|A^*(\alpha I + AA^*)^{-2}f_\delta\|$$

globaalne miinimumkoht. Arvutused näitavad, et paljudel juhtudel saame parema parameetri (täpsema lähislahendi), võttes parameetriks α funktsiooni ψ globaalse miinimumkoha asemele mingi lokaalse miinimumi. Töö eesmärgiks on arvutil näiteülesandeid lahendades formuleerida reegel, milline miinimumkoht sobib parameetriks α.