

# Uurimisteemade tutvustus TÜ MSI üliõpilastele

Rainis Haller

20. septembril 2023. a Tartus

Loodetavasti on teile silma jäänud mõni TÜ matemaatilise analüüsi õppejõud või teadlane, näiteks **Kati Ain**, **Rainis Haller**, **Urve Kangro**, **Johann Langemets**, **Aleksei Lissitsin**, **Märt Põldvere**, **Natalia Saealle**, **Indrek Zolk**, või olete enda uurimistöo võimalikku teemat arutanud mõne meie magistrandiga (**Nikita Leo**, **Deivid Saad**), doktorandiga (**Stefano Ciaci**, **Jaan Kristjan Kaasik**, **Jaagup Kirme**, **Paavo Kuuseok**, **Marcus Lõo**, **Triinu Veeorg**), noore doktoriga (**Rihhard Nadel**, **Andre Ostrak**, **Katriin Pirk**) või järel doktoriga (**Yoël Perreau**). Või on teile meeldinud meie õppeained, nt Ühe- või mitme muutuja matemaatiline analüüs, Funktsionaalanalüüs I, II ja III, Mõõt ja Lebesgue'i integraal või Üldine topoloogia I. Igatahes on kõik üliõpilased meie juurde väga oodatud.

Isegi kui kõik matemaatilise analüüsi õppejõud-teadlased täna oma teemasid välja ei paku, siis nad on kõik juhendamiseks valmis. Matemaatilise analüüsi valdkonnas on meie (uurimisrühma, ülikooli ja Eesti) taseme hoidmiseks ja selle tõstmiseks põhjapanev, et noorte uurimisteemade hulk oleks mitmekesine. Arvestage ka, et ühel tööil võib vabalt olla mitu juhendajat.

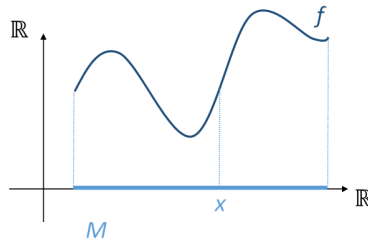
## 1 Uurimistöo FA uurimisrühma juures

a) **Diameeter-2 omaduste teema.** Tutvustus eeldab põhjalikumat sissejuhatust ja individuaalset lähenemist. Banachi ruumide diameeter-2 omaduste maailm on veel liiga kirju ja vajab selgitamist. Üldiselt uuritakse siin Banachi ruume, mille kinnise ühikera kõik viilud on diameetriga 2, näiteks Daugaveti ruume. Siin on mitmeid hästi tuntud ja vähem tuntud lahendamata probleeme. Meie rühma liikmed ja mitmed meie head tuttavad matemaatikud tegelevad selles vallas aktiivselt. Viimasel ajal on suurema tähelepanu all nende omaduste lokaliseeritud variandid, mille puhul ühikera kindlat punkti (Delta punkti või Daugaveti punkti) sisaldavad viilud on diameetriga 2.

b) **Lipschitzi-vabade ruumide teema.** Olgu  $M \subseteq \mathbb{R}$  (või olgu  $(M, d)$  suvaline meetriline ruum). Öeldakse, et kujutus  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  on *Lipschitzi funktsioon*, kui mingi reaalarvu  $L$  korral kehtib mis tahes elementide  $x, y \in M$  jaoks võrratus

$$|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y| \quad (|f(x) - f(y)| \leq L \cdot d(x, y)).$$

Lipschitzi funktsiooni  $f$  on võimalik vaadelda teatud pideva lineaarse kujutuse  $\hat{f}: \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathbb{R}$  ahendina, kus  $\mathcal{F}(M)$  on teatud Banachi ruum. N-ö *Lipschitzi-vabade*



Joonis 1: Ühe Lipschitzi funktsiooni  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  graafik, kus  $M \subset \mathbb{R}$

ruumide  $\mathcal{F}(M)$  kohta on vähe teada ja neid uuritakse intensiivselt. Näiteks on teada, et  $\mathcal{F}(\mathbb{R}) = L_1(\mathbb{R})$ , aga juba  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^2)$  ei ole rahuldavalt kirjeldatud. Uurimistöö käigus antakse ülevaade selles vallas avaldatud tulemustest ja ehk keskendutakse mingile konkreetsele juhule täpsemalt. Meie rühma liikmed ja mitmed meie head tuttavad matemaatikud tegelevad selles vallas aktiivselt.

c) **Normi saavutavate operaatorite teema.** Olgu  $X$  Banachi ruum üle  $\mathbb{K}$ , kus  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  või  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Kõigi pidevate lineaarsete funktsionaalide  $X \rightarrow \mathbb{K}$  hulk  $L(X, \mathbb{K})$  on ise Banachi ruum loomulike vektorruumi tehete ja normiga  $\|f\| = \sup_{x \in B_X} |f(x)|$ . Siin tähistab  $B_X$  Banachi ruumi  $X$  kinnist ühikera ehk  $B_X = \{x \in X: \|x\| \leq 1\}$ . Öeldakse, et  $f \in L(X, \mathbb{K})$  saavutab normi, kui leidub  $x_0 \in B_X$  nii, et  $|f(x_0)| = \|f\|$ . On teada, et normi saavutavate funktsionaalide hulk on tihe Banachi ruumis  $L(X, \mathbb{K})$  (s.o Bishopi–Phelps'i teoreem). Samuti on teada, et iga funktsionaal ruumist  $L(X, \mathbb{K})$  saavutab oma normi parajasti siis, kui  $X$  on refleksiivne (s.o Jamesi teoreem). Olukord on palju komplitseeritum, kui funktsionaalide asemel vaatleme üldiseid operaatoreid suvaliste Banachi ruumide vahel. Banachi ruumide  $X$  ja  $Y$  korral on pidevate lineaarsete operaatorite  $X \rightarrow Y$  hulk  $L(X, Y)$  Banachi ruum normiga  $\|A\| = \sup_{x \in B_X} \|Ax\|$ . Öeldakse, et operaator  $A \in L(X, Y)$  saavutab normi, kui leidub  $x_0 \in B_X$  nii, et  $\|Ax_0\| = \|A\|$ . On teada, et alati ei saa kõiki kompaktsid operaatoreid (s.o oluline alamklass kõigi pidevate lineaarsete operaatorite seas) lähendada normi saavutavate operaatoritega (M. Martín, 2014. a). Aga siiani ei ole teada, kas kõiki lõplikumõõtmelisi operaatoreid (s.o operaatorid, mille väärtuste hulk on lõplikumõõtmeline vektoralamruum) saab lähendada normi saavutavate operaatoritega. Mitmed meie head tuttavad matemaatikud tegelevad selles vallas aktiivselt.

## 2 Referatiivne töö matemaatilise analüüsi valdkonnas

Baka- ja magistritööd ei pea tingimata uusi matemaatilisi tulemusi andma. On väga palju selliseid teemasid, mis võimaldavad üliõpilasel ja juhendajal õppida mingit matemaatika olemasolevat osa sügavuti ja võib-olla alustuseks kaardistada seal lahitud probleemid edasiseks uurimistööks. Ka referatiivse töö matemaatika võib olla väga värske, iga päev avaldatakse matemaatika tulemusi ja me ju hoiame oma alal toimuval silma peal. Minge konkreetse inimese juurde (vt loendit eespool) ja küsige temalt.