Analüütiliste funktsioonide lähendamine polünoomidega ja trigonomeetriliste polünoomidega

Bakalaureusetöö teema (juhendaja Urve Kangro)

Numbriliste meetodite kursuses vaadeldakse funktsioonide interpoleerimist ning leitakse jääkliige n korda pidevalt diferentseeruva funktsiooni lähendamisel interpolatsioonipolünoomiga. Tekib küsimus, kui hästi on võimalik analüütilisi funktsioone lähendada. Analüütiliste funktsioonide parima lähendamise kohta polünoomidega on teada Bernsteini teoreem: kui funktsioon f on regulaarne ellipsis, mille fookused on ± 1 ning ellipsi pooltelgede summa on ρ, ning tal on iseärasus ellipsi rajal, siis

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\inf_{f_n \in \Pi_n} \max_{t\in[-1,1]} |f(t) - f_n(t)|} = \frac{1}{\rho}.$$

Siin Π_n on kõigi kuni n astme polünoomide hulk ning juure all olev avaldis on funktsiooni f parima võimaliku lähenduse viga kuni n astme polünoomiga lõigul $[-1, 1]$.

Parima lähenduse polünoomi pole üldiselt võimalik reaalselt arvutada. Töös uurime, kas sarnased tulemused on võimalik saada ka interpolatsioonipolünoomiga lähendades, nii tavaliste polünoomide kui ka trigonomeetriliste polünoomidega lähendamisel. Samuti võib vaadelda juhtu, kus me tahame funktsiooni lähendada mingis suuremas piirkonnas, kuid interpolatsioonisõlmed saame mingil põhjusel paigutada ainult etteantud lõigule. Tulemused on kasutatavad mitmete arvutusmeetodite koonduvuskiiruse leidmisel, kui on teada et (diferentsiaal- või integraal- või integro-diferentsiaal- vms.) võrrandi lahend on mingis piirkonnas analüütiline.

Töö sobib tudengile, kes on võtnud Kompleksmuutuja funktsioonide teooria kursust.