0010100

Matemaatika ja kaasaeg

0010100

TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

MATEMAATIKA JA KAASAEG

XX

ABIMATERJALE MATEMAATIKA ÕPETAJATELE JA ÕPPIJATELE

TARTU 1975

PILK ALGEBRALISSE TOPOLOOGIASSE

M. Kilp

Mis on topoloogia?

Topoloogia kujutab endast kaasaegse matemaatika üht olulisemat ja äärmiselt kiiresti edasiarenevat osa.

Topoloogiat on võimalik vaadelda kui üht geomeetria haru (nn. pidevuse geomeetria). Selgitame seda väidet veidi täpsemalt. Koolis õpitava eukleidilise geomeetria üheks olulisemaks mõisteks on geomeetriliste kujundite võrdsuse mõiste. Kaks kujundit on eukleidilise geomeetria seisukohalt võrdsed siis, kui neid on võimalik viia ühtimisse. Kui kahe konkreetse kujundi korral selline ühtimisse viimine tõepoolest võimalik on, siis võime selle protsessi läbi viia alati nii, et teostame üksteise järel teatava arvu rööplükkeid, pöördeid ja peegeldusi. Teisendusi, mis saadakse teatava arvu rööplükete, pöörete ja peegelduste järjestrakendamise tulemusena, nimetatakse *liikumisteks*[1]. Kõik liikumised moodustavad nende järjestrakendamise tehte suhtes rühma. Seega on kaks kujundit eukleidilise geomeetria seisukohalt võrdsed parajasti siis, kui leidub selline liikumiste rühma element (liikumine), mis viib ühe vaadeldavatest kujunditest teiseks. Eukleidilise geomeetria põhiülesandeks ongi kõigi vaadeldavate kujundite jaotamine võrdsete kujundite klassideks. Seda saab teha, nagu me nägime, kasutades liikumiste rühma.

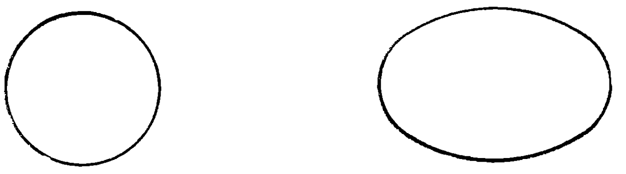
Iga liikumist iseloomustavad järgmised omadused:

1) liikumisel säilivad lõikude pikkused, millest saab juba järeldada, et liikumisel
2) säilivad lõikudevahelised nurgad,
3) sirge läheb alati sirgeks,
4) säilivad ühel sirgel asetsevate lõikude suhted.

Loobume nõuetest 1 ja 2, säilitame aga kaks viimast, muutes nad uuteks iseseisvateks tingimusteks. Niiviisi jõuame nn. afiinsete teisenduste juurde. Osutub, et ka kõik afiinsed teisendused moodustavad teisenduste järjestrakendamise tehte suhtes rühma. Kasutame nüüd oma tähelepanekut kujundite võrdsuse ja liiku-

[1] Sageli mõistetakse liikumisi ka kitsamalt, ilma peegeldusi lubamata.

miste rühma vahelisest seosest eukleidilise geomeetria korral ning loeme analoogiliselt kaks kujundit võrdseiks, kui leidub selline afiinne teisendus, mis viib esimese neist kujundeist teiseks. Sel moel jõuame uue geomeetriani, mida nimetatakse afiinseks geomeetriaks. Et afiinseid teisendusi on rohkem kui liikumisi (sellise afiinse teisenduse tüüpiliseks näiteks, mis ei ole liikumine, on paralleelprojekteerimine), siis on olemas kujundeid, mis on afiinse geomeetria seisukohalt võrdsed, ei ole seda aga eukleidilise geomeetria seisukohalt. Näiteks afiinse geomeetria mõttes on võrdsed kaks suvalist kolmnurka, aga ka ringjoon ja ellips (joon. 1).



Joonis 1.

Astume eespool kirjeldatud rada pidi veel ühe sammu edasi. Vaatleme nimelt ruumi kõiki selliseid üksüheseid teisendusi, mis teisendavad ruumi terveks ruumiks ning mis koos oma pöördteisendusega on pidevad. (Pideva teisenduse all mõistame teisendust, mis «küllalt lähedased» punktid viib «küllalt lähedasteks». Mida viimane asjaolu täpselt tähendab, jätame esialgu lahtiseks. Mida see eukleidilise ruumi korral tähendab, on siiski pikemata selge.) Selliseid teisendusi nimetatakse *topoloogilisteks teisendusteks*. Ruumi kõik topoloogilised teisendused moodustavad samuti rühma. Me peame kaht kujundit võrdseteks e. *homöomorfseteks*, kui leidub selline topoloogiline teisendus, mis viib ühe neist kujundeist teiseks. Niiviisi jõuamegi geomeetria haruni, mida nimetatakse *topoloogiaks*.

Piltlikult võib topoloogilist teisendust endale ette kujutada kui teisendust, mille korral ei toimu kujundite katkirebimist (see garanteerib teisenduse pidevuse — lähedased punktid lähevad lähedasteks) ega kokkukleepumist (kokkukleepumine tähendaks pöördteisenduse korral katkirebimist, pöördteisendus peab aga samuti pidev olema). Niisiis homöomorfsed on need kujundid, mida saab deformeerida üksteiseks ilma rebendite ja liideteta. Edasises toome mitmeid homöomorfsete kujundite näiteid. Praegu märgime vaid, et juba eespool öeldust on selge, miks topoloogiaga tegelevat matemaatikut (topoloogi) võib pidada inimeseks, kes ei oska vahet teha sõrmuse ja kohvitassi vahel.

Topoloogia peamiseks ülesandeks on kindlaks teha, millal kaks kujundit on topoloogiliselt võrdsed (homöomorfsed). Topoloogia ise jaguneb kaheks suureks osaks: üldiseks ehk hulgateoreetiliseks ja algebraliseks ehk kombinatoorseks topoloogiaks. *Üldises topo-*

loogias on põhiliseks uurimisobjektiks topoloogilised ruumid ja nende mitmesugused omadused. Mida endast kujutab topoloogiline ruum, miks sellise mõiste uurimine matemaatikas hädatarvilikuks osutus ning kuidas topoloogilist ruumi korrektselt defineerida — sellest on võimalik lugeda «Matemaatika ja kaasaja» eelmisest numbrist.[2] Mitterangelt väljendudes on topoloogiline ruum just selline ruum (s. t. punktihulk), milles on mõtet rääkida «küllalt lähedastest» punktidest. Seejuures ei kasutata siin «läheduse» määramiseks mitte punktidevahelise kauguse mõistet, vaid selle ruumi alamhulkade vahelisi seoseid. Viimane asjaolu viitab üsna selgesti põhjusele, miks topoloogiat esialgu nimetati *Analysis situs* (asendi analüüs).

Algebraline topoloogia on topoloogia osa, milles vaadeldakse teatud topoloogilises ruumis (edaspidi eukleidilises ruumis) asetsevaid selliseid kujundeid, mida saab teatud mõttes jaotada väiksemateks kujunditeks. Selles topoloogia osas osutub võimalikuks tõhusalt kasutada algebra aparatuuri (täpsemalt: lõpliku arvu moodustajatega Abeli rühmi). Edasises püüame gi põgusalt selgitada topoloogia selle osa olemust.

Topoloogia kui iseseisva matemaatikaharu loojaks loetakse möödunud sajandi üht silmapaistvamat matemaatikut Bernhard Riemanni[3] (1826—1866). Algebralise topoloogia rajajaks on põhjust lugeda prantsuse matemaatikut Henri Poincaréd (1854—1912), selle arengus on olulised olnud ka hollandi matemaatiku L. E. J. Brouweri, ameerika matemaatikute J. W. Alexanderi, S. Lefschetzi, O. Vebleni, N. Steekrodi, S. Eilenbergi jt. tööd. Noorematest selle suuna viljelejatest märkigem inglise matemaatikut M. F. Atiyah't ja nõukogude matemaatikut S. P. Novikovi, kes on saavutanud äärmiselt silmapaistvaid tulemusi uusi, nn. *K*-teooria meetodeid kasutades.

Märkigem esimese osa lõpetuseks, et veidi on topoloogiast juttu ka Jevgeni Gabovitši raamatus «Arvudeta matemaatika» (Tln., 1968).

Topoloogilised invariandid

Lepime kokku edasises termini «kujund» all mõista suvalist punktihulka kolmemõõtmelises eukleidilises ruumis. Toome järgnevas mõningaid näiteid homöomorfsetest kujunditest. Et joonisel 2 kujutatud tsentraalprojekteerimise puhul lähedased punktid kolmnurgal (mida vaatleme joonena) lähevad lähedasteks punktideks ringjoonel ja vastupidi, siis on ringjoon ja kolmnurk homöo-

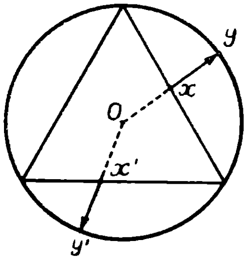
---

[2] S. Baron. Mõnda topoloogilistest ruumidest. — Matemaatika ja kaasaeg, XIX, lk. 14—24.

[3] Vt. Ü. Lumiste. Riemann topoloogia ja üldise kõvera ruumi geomeetria loojana. — Matemaatika ja kaasaeg, XI, lk. 65—76.

morfsed. Et samalaadilist tsentraalprojekteerimist saab teha ka mistahes kumera hulknurga ja ringjoone korral, siis on ringjoon homöomorfne ka mistahes kumera hulknurgaga.

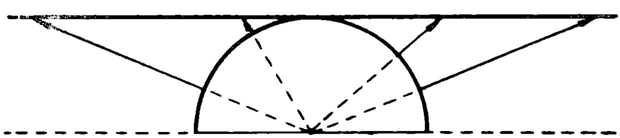
Joonisel 3 on kujutatud kaks homöomorfset pinda, mis on muide homöomorfsed ka kohvitassi pinnaga. Topoloogias nimetatakse sellist pinda *tooriks* ehk rõngaspinnaks.



Joonis 2.

Joonis 3.

Mistahes vahemikku on võimalik «painutada» otspunktideta poolringjooneks, mis (vt. joon. 4) on homöomorfne sirgega. Järelikult ei ole topoloogia seisukohalt mingit vahet ka vahemiku ja sirge vahel.

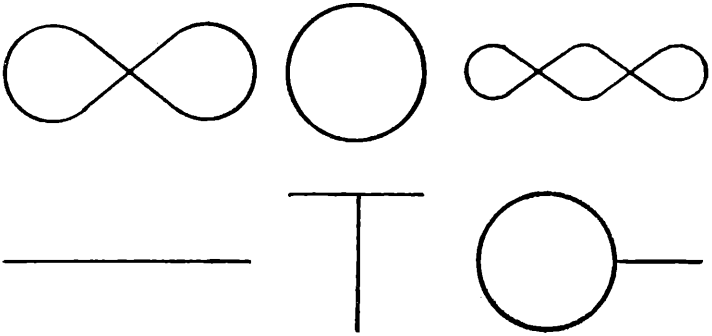


Joonis 4.

Nagu eespool juba mainitud, on topoloogia põhiülesandeks kujundite topoloogilise võrdsuse kindlakstegemine. Et teha kindlaks kahe kujundi homöomorfsust, tuleb meil konkreetselt näidata see topoloogiline teisendus, mis viib ühe meie kujundeist teiseks. Nii me toimisimegi, kui näitasime, et näiteks kolmnurk ja ringjoon on homöomorfsed. Mida teha aga siis, kui me ei ole suutelised sellist topoloogilist teisendust leidma? Siis on kaks võimalust: esiteks — selline topoloogiline teisendus on tegelikult siiski olemas, kuigi meil seda leida ei õnnestunud, või teiseks — sellist teisendust polegi. Nende kahe võimaluse olemasolu viitab sellele, et meil oleks tarvis luua ka teatud meetodid kujundite mittehomöomorfsuse kindlakstegemiseks. Kujunditel on mitmesuguseid omadusi. Osa neist on sellised, mis ei säili topoloogilise teisenduse korral. Niisuguse omaduse näiteks on tippude arv. Nagu juba teame, on kolmnurk ja kumer nelinurk omavahel homöomorfsed (kuna mõlemad neist on ringjoonega homöomorfsed), ühel neist aga on kolm ja teisel neli tippu. On ka omadusi, mis säilivad iga topoloogilise teisenduse korral. Selliseid omadusi nimetatakse *topoloogilisteks omadusteks* ja vastavaid näitajaid *topoloogilisteks invariantideks*. Eespool öeldust on selge, et kui kahe kujundi üht ja sama tüüpi topoloogilised invariandid osutuvad erinevaiks, siis ei saa need kujundid homöomorfsed olla. Vaatleme mõningaid topoloogiliste invariantide näiteid.

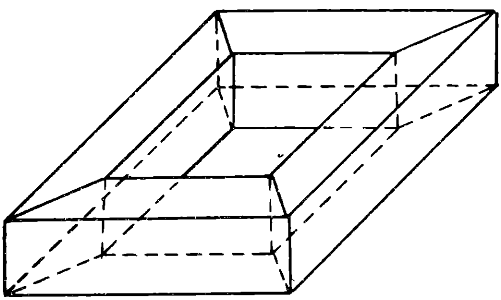
1° **Sidususekomponentide arv.** Kui meil on tegemist mingi kujundiga K ja P on selle kujundi punkt, siis punkti P sidususekomponendiks nimetatakse kujundi K kõigi nende punktide hulka, mida saab punktiga P ühendada täielikult kujundisse K kuuluva joone abil. On selge, et iga kujund laguneb teatud arvuks sidususekomponentideks ning et see sidususekomponentide arv on topoloogiline invariant. Siit järeldub, et numbrimärgid 9 ja 10 (kui geomeetrilised kujundid) ei ole homöomorfsed.

2° **Eraldavate punktide arv.** Kui kujund koosneb ühest sidususekomponendist, siis nimetatakse teda sidusaks. Sidusa kujundi punkti, mille kuitahes väikese ümbruse väljajätmine kujundist muudab selle mittesidusaks, nimetatakse eraldavaks punktiks. Et topoloogilise teisenduse korral eraldav punkt peab ilmselt minema eraldavaks punktiks (üks-ühesuse tõttu erinevad eraldavad punktid peavad muidugi minema erinevateks eraldavateks punktideks), siis on selge, et eraldavate punktide arv on tõepoolest topoloogiline invariant. Samuti on invariant mitteeraldavate punkide arv. Neid invariante kasutades on küllalt lihtne veenduda selles, et kõik joonisel 5 esitatud kujundid on paarikaupa mittehomöomorfsed: ülemise rea kujundeil on lõpmata palju mitteeraldavaid punkte ja vastavalt 1, 0 ja 2 eraldavat punkti, alumise rea kujundeil on lõpmata palju eraldavaid punkte ning vastavalt 2, 3 ja lõpmata palju mitteeraldavaid punkte.



Joonis 5.

3° **Euleri karakteristik.** Vaatleme pindu, mida saab katta kõverjooneliste hulknurkade võrguga nii, et hulknurki oleks võrgus lõplik arv ja iga hulknurk oleks homöomorfne ringiga. Tähistame sellisel pinnal asetsevate hulknurkade (e. tahkude) arvu tähega F, kõikide servade arvu tähega E ja kõigi tippude arvu tähega V. Avaldist $V-E+F$ nimetatakse vaadeldava pinna Euleri karakteristikuks. On võimalik tõestada, et Euleri karakteristik on topoloogiline invariant. Et sfäär on ilmselt homöomorfne tetraeedri pinnaga, tetraeedril on aga 4 tippu, 6 serva ja 4 tahku, siis on tetraeedri pinna, aga seega siis ka sfääri Euleri karakteristik $4-6+4=2$. Joonisel 6 esitatud kujund on ilmselt homöomorfne tooriga. Joonisel on näha, et $V=16$, $E=32$, $F=16$; seega toori Euleri karakteristik on $16-32+16=0$. Järeldus: sfäär ja toor ei ole homöomorfsed.



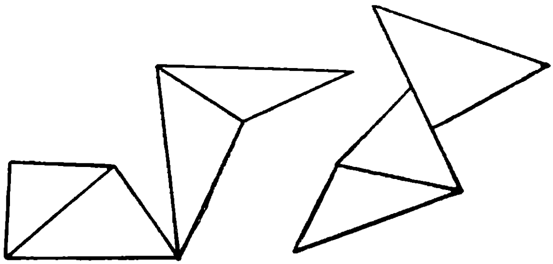
Joonis 6.

Euleri karakteristikuga seotud küsimustest võib veidi lähemalt lugeda juba eespool mainitud J. Gabovitši raamatust «Arvudeta matemaatika».

Homoloogiarühmad

Lepime kokku nimetada punkti nullmõõtmeliseks simpleksiks, lõiku ühemõõtmeliseks, kolmnurka kahemõõtmeliseks ja tetraeedrit kolmemõõtmeliseks simpleksiks. *Simplitsiaalseks kompleksiks* nimetatakse siis sellist simpleksite hulka, mille korral kaks sellesse hulka kuuluvat simpleksit üldse ei lõiku või siis on nende ühisosaks terve vähemamõõtmeline simpleks. Joonisel 7 vasakul asetsev simpleksite hulk on kompleks, paremal asetsev aga ei ole, kuna siin on kahe kolmnurga ühisosaks ainult osa küljest.

Simpleksit nimetatakse *orienteerituks*, kui selle tipud on järjestatud. Seejuures loetakse kaht järjestust ühesugusteks, kui üht neist on võimalik saada teisest paarissubstitutsiooni abil. Selgitame seda lähemalt järgmise näitega. Vaatleme näitena kahe-

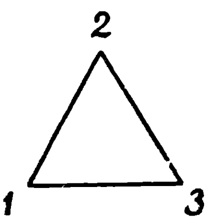


Joonis 7.

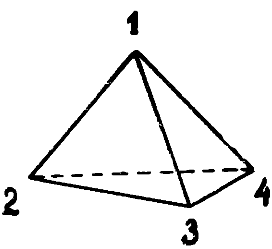
mõõtmelist simpleksit tippudega 1, 2, 3 (joonis 8). Selles järjekorras võetud tippudega orienteeritud simpleksit tähistame edaspidi järgmiselt: (1 2 3). Vastavalt meie kokkuleppele on siis (2 3 1) ja (3 1 2) sellesama orienteeritud simpleksi tähisteks, (1 3 2), (2 1 3) ja (3 2 1) aga vastupidiselt orienteeritud simpleksi tähisteks.

Meie poolt antud orienteeritud simpleksi definitsiooni võib üldistada, lugedes $(n-1)$-mõõtmeliseks orienteeritud simpleksiks n punktist koosnevat järjestatud hulka. Kui meil on tegemist orienteeritud simpleksiga $(p_1 p_2 \ldots p_n)$, siis orienteeritakse temas sisalduvad väiksemamõõtmelised simpleksid vastavalt järgmisele reeglile: $(n-2)$-mõõtmelise simpleksi korral, mis asetseb punkti p_k vastas, loetakse orientatsiooniks järjestusele $(p_1 \ldots p_{k-1} \; p_{k+1} \ldots p_n)$ vastavat orientatsiooni, kui k on paaritu arv, ning vastasel juhul vastupidist orientatsiooni. Saadud orientatsiooni nimetatakse *indutseeritud orientatsiooniks*. Näitena vaatleme tetraeedrit joonisel 9, kus orientatsioon olgu määratud järjestusega (1 2 3 4). Tipu 2 vastas seisva tahu orientatsioon peab vastavalt ülalöeldule olema vastupidine järjestuse (1 3 4) poolt määratud orientatsioonile, tähistame seda orienteeritud simpleksit nii: —(1 3 4).

Et see reegel alati rakendatav oleks, tuleb lugeda, et nullmõõtmelisel simpleksil, s. o. punktil, on korraga kaks orientatsiooni.



Joonis 8.



Joonis 9.

Kui kahe orienteeritud simpleksi ühisosaks on vähemamõõtmeline simpleks, siis tekib sellel vastavalt meie kokkuleppele kaks orientatsiooni, mis võivad kas kokku langeda või erineda.

Olgu nüüd $\sigma_1^{(k)}$, $\sigma_2^{(k)}$, ..., $\sigma_m^{(k)}$ mingi simplitsiaalse kompleksi kõigi k-mõõtmeliste orienteeritud simpleksite hulk (üks ja sama simpleks on teatud kindla orientatsiooniga võetud üks kord). *k-mõõtmeliseks ahelaks* nimetatakse $\sigma_1^{(k)}$, $\sigma_2^{(k)}$, ..., $\sigma_m^{(k)}$ poolt moodustatud iga formaalset avaldist kujuga

$$a_1\sigma_1^{(k)}+a_2\sigma_2^{(k)}+\ldots+a_m\sigma_m^{(k)},$$

kus a_1, a_2, ..., a_m on täisarvud. Kahte sellist avaldist loetakse võrdseiks siis, kui on võrdsed kordajad vastavate simpleksite $\sigma_i^{(k)}$ juures, $1\leqslant i\leqslant m$, ning kahe sellise avaldise summa leitakse vastavate kordajate liitmise teel. Kõigi selliste avaldiste hulk moodustab nn. vaba Abeli rühma.

Orienteeritud simpleksi $\sigma_i^{(k)}$ rajaks $\Delta(\sigma_i^{(k)})$ nimetatakse ahelat

$$\sigma_{i1}^{(k-1)}+\sigma_{i2}^{(k-1)}+\ldots+\sigma_{ir}^{(k-1)},$$

kus $\sigma_{i1}^{(k-1)}$, $\sigma_{i2}^{(k-1)}$, ..., $\sigma_{ir}^{(k-1)}$ on need $(k-1)$-mõõtmelised simpleksid, mis moodustavad vaadeldava simpleksi geomeetrilise raja ning mis on võetud indutseeritud orientatsioonidega. Näiteks on joonisel 9 esitatud kolmemõõtmelise simpleksi (tetraeedri) (1 2 3 4) rajaks ahel

$$(2\ 3\ 4)-(1\ 3\ 4)+(1\ 2\ 4)-(1\ 2\ 3).$$

Ahela $a_1\sigma_1^{(k)}+\ldots+a_m\sigma_m^{(k)}$ rajaks loetakse ahelat

$$\Delta(a_1\sigma_1^{(k)}+\ldots+a_m\sigma_m^{(k)})=a_1\Delta(\sigma_1^{(k)})+\ldots+a_m\Delta(\sigma_m^{(k)}).$$

Arvutame näitena ahela $\Delta(1\ 2\ 3\ 4)=(2\ 3\ 4)-(1\ 3\ 4)+(1\ 2\ 4)-(1\ 2\ 3)$ raja. Et

$$\begin{aligned}\Delta(2\,3\,4)&=(3\,4)-(2\,4)+(2\,3),\\ -\Delta(1\,3\,4)&=-(3\,4)+(1\,4)-(1\,3),\\ \Delta(1\,2\,4)&=(2\,4)-(1\,4)+(1\,2),\\ -\Delta(1\,2\,3)&=-(2\,3)+(1\,3)-(1\,2),\end{aligned}$$

siis $\Delta\Delta(1\,2\,3\,4)=0$. See ei ole nii juhuslikult. Saab tõestada, et sellise ahela raja, mis ise on mingi ahela rajaks, võrdub alati nulliga.

Tsükliks nimetatakse ahelat, mille raja võrdub nulliga. Lihtne on näha, et kõik k-mõõtmelised tsüklid moodustavad kõikide k-mõõtmeliste ahelate rühmas alamrühma Z_k. Eelnevast on selge, et kõik need k-mõõtmelised ahelad, mis on mingi $(k+1)$-mõõtmelise ahela rajaks, on tsüklid. Kergesti mõistetav on ka asjaolu, et kõikide viimati mainitud ahelate hulk B_k kujutab endast alamrühma rühmas Z_k. Faktorrühma $H^{(k)}=Z_k/B_k$ nimetatakse meie poolt vaadeldava simplitsiaalse kompleksi *k-mõõtmeliseks homoloogiarühmaks.*

Näitena arvutame välja rühma Z_1 kolmest orienteeritud ühemõõtmelisest simpleksist (1 2), (1 3) ja (2 3) koosneva kompleksi korral (joon. 8). Et meie kompleksis ei ole kahemõõtmelisi simplekseid, siis ei saa ükski ühemõõtmeline ahel olla kahemõõtmelise ahela rajaks, mistõttu $B_1=0$. Järelikult $H^{(1)}=Z_1$. Suvaline ühemõõtmeline ahel näeb välja nii:

$$a(1\ 2)+b(1\ 3)+c(2\ 3),$$

kus a, b ja c on täisarvud. Et tegemist oleks tsükliga, peab vaadeldava ahela raja võrduma nulliga, s. t. kehtima võrdus

$$\Delta(a(12)+b(13)+c(23))=0.$$

Et aga

$$\begin{aligned}&\Delta(a(12)+b(13)+c(23))=\\&=a\Delta(12)+b\Delta(13)+c\Delta(23)=\\&=a(2)-a(1)+b(3)-b(1)+c(3)-c(2)=\\&=-(a+b)(1)+(a-c)(2)+(b+c)(3),\end{aligned}$$

siis

$$-(a+b)(1)+(a-c)(2)+(b+c)(3)=0,$$

millest

$$a+b=0,\quad a-c=0,\quad b+c=0.$$

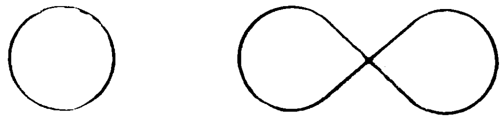
Järelikult $a=c$ ning $b=-a$, mistõttu tsükli üldkujuks saame

$$a(12)-a(13)+a(23)=a[(12)-(13)+(23)].$$

Nüüd on lihtne näha, et vastavus $a[(12)-(13)+(23)]\to a$ kujutab endast isomorfismi rühma Z_1 ja kõikide täisarvude rühma Z vahel. Seega meie näite korral $H^{(1)}=Z$.

Olgu nüüd tegemist kujunditega, mis on homöomorfsed mingi simplitsiaalse kompleksiga. Selliste kujundite k-mõõtmelised homoloogiarühmad on siis topoloogilisteks invariantideks. See tähendab, et kui meil on tegemist kahe homöomorfse kujundiga, mida on võimalik jaotada simpleksite ühendiks, siis nende vastavamõõtmelised homoloogiarühmad peavad olema isomorfsed.

Selliselt simplitsiaalsete komplekside abil on vaadeldavad väga paljud kujundid. Eespool öeldut silmas pidades on nende kujundite mittehomöomorfsuse kindlakstegemiseks kõigepealt mõttekas võrrelda vastavaid homoloogiarühmi. Näiteks vaatleme ringjoont ja arvu 8 meenutavat kujundit tasandil (joon. 10).



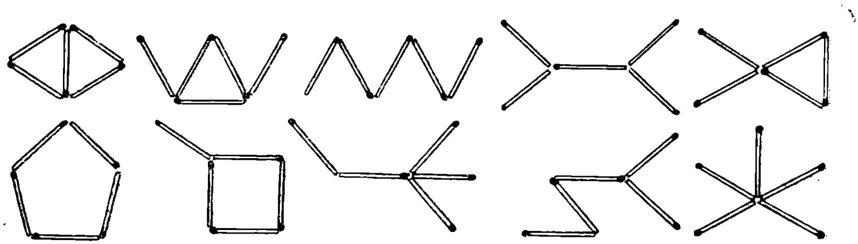
Joonis 10.

Et ringjoon on homöomorfne kolmnurga piirjoonega, siis ühemõõtmeline homoloogiarühm ringjoone jaoks on isomorfne täisarvude rühmaga Z, s. t. ühe moodustajaga vaba Abeli rühmaga. Veidi keerulisem arvutus näitab, et ühemõõtmeline homoloogiarühm «kaheksa» jaoks on isomorfne kahe moodustajaga vaba Abeli rühmaga. Järeldus: ringjoon ja «kaheksa» on mittehomöomorfsed. Tõsi küll, see mittehomöomorfsus oli meil ennegi teada. Paljudel juhtudel, eriti suuremate dimensioonide korral, mil geomeetriline intuitsioon meile enam eriti suureks toeks ei ole, on homoloogiarühmade võrdlemisest suurt kasu.

Lõpetuseks. Algebraline topoloogia on see topoloogia osa, milles kujundeid saab käsitleda simplitsiaalsete kompleksidena, kuid just selliste kujunditega on tegemist enamiku rakenduste juures.

ÜLESANNE TOPOLOOGIAST

Tutvunud eelmise artikli abil topoloogia põhimõistetega, võite asuda oma teadmisi rakendama «praktiliste» ülesannete lahendamisel. Selleks võtke teatav arv tuletikke ning koostage neist geomeetrilisi kujundeid nii, et tuletikud puutuksid üksteist vaid otstega. Tehke kindlaks, millised kujundid on topoloogiliselt võrdsed (homöomorfsed) ja millised erinevad. Kerge on veenduda, et kõik ühest ja kahest tikust moodustatud kujundid on topoloogiliselt võrdsed ning et kolmest tikust saab mooudustada 3 ja neljast tikust 5 topoloogiliselt erinevat kujundit. Alloleval joonisel on esitatud kõik 10 topoloogiliselt erinevat kujundit, mida saab moodustada viiest tikust. Võtke nüüd 6 tikku ja leidke kõik 19 topoloogiliselt erinevat kujundit, mida neist saab moodustada tasandil! Veenduge, et ruumis lisandub neile ainult üks eelmistest topoloogiliselt erinev kujund!



KOLME KUUBI SUMMA

J. Gabovitš, H. Kilov

Arvuteoorias on hästi tuntud ebameeldiv olukord, kus näiliselt lihtsa probleemi püstitamisest kuni selle täieliku lahendamiseni möödub aastakümneid ja isegi sajandeid.

Näiteks aastal 1770 väitis inglise matemaatik Waring, et iga naturaalarv on esitatav ülimalt üheksa positiivse täiskuubi summana. Selle nii lihtsa sõnastusega teoreemi tõestamiseks kulus 142 aastat, kusjuures tõestus osutus keeruliseks ja sugugi mitte elementaarseks (lünklik tõestus Wieferichi poolt 1909; lünga kõrvaldamine Kempneri poolt 1912).

Analoogilise probleemi ratsionaalarvude kohta püstitas aastal 1829 itaallane Libri. Ta tõestas, et iga positiivne ratsionaalarv (edaspidi lühendatult p. r.) on esitatav ülimalt nelja p. r. kuubi summana ja tõstis üles küsimuse, kas ei piisa kolmest liidetavast (et eksisteerib p. r., mis pole esitatavad kahe p. r. kuubi summana, seda oli juba varem tõestanud Leonhard Euler).

«Kolme kuubi probleemi» lahendas peaaegu sada aastat peale probleemi püstitamist inglane Richmond (1922), kes tõestas, et iga p. r. on esitatav (isegi lõpmata mitmel viisil) kolme p. r. kuubi summana. Teiste sõnadega, Richmond näitas, et diofantilisel võrrandil

$$a=u^3+v^3+w^3 \tag{1}$$

on lõpmata palju positiivseid ratsionaalarvulisi lahendeid u, v, w iga etteantud p. r. a puhul. Kõige üllatavam sealjuures oli see, et «reeglivastaselt» osutus ka teoreemi tõestus elementaarseks ja lihtsaks. Alljärgnevad read ongi pühendatud Richmondi teoreemi tõestamisele.

Lähtume samasusest

$$(A-B)^3+(B-1)^3+1=3B^2(A-1)+[A^3-3B(A^2-1)]$$

ning määrame B nii, et avaldis nurksulgudes võrduks nulliga:

$$B=\frac{A^3}{3A^2-3}.$$

Asendades selle B väärtuse lähtesamasusse, saame

$$\frac{A+1}{3A-3}=\left(\frac{2A^2-3}{3A^2-3A}\right)^3+\left(\frac{A^3-3A^2+3}{3A^3-3A^2}\right)^3+\left(\frac{A+1}{A^2}\right)^3.$$

Kui nüüd võtta kasutusele tähistus

$$\frac{A+1}{A-1}=s,$$

siis jõuame samasuseni

$$\frac{s}{3}=D^3+E^3+F^3,$$

kus

$$D=\frac{10s-s^2-1}{6(s+1)},\quad E=\frac{s^3-9s^2+15s+1}{6(s+1)^2},\quad F=\frac{2s(s-1)}{(s+1)^2}.$$

On lihtne veenduda, et kui $1<s<2$, siis on D, E, F positiivsed. F puhul see on ilmne, D ja E puhul saab silmanähtavaks, kui vastavad lugejad kirjutada kujul

$$24-(5-s)^2 \quad \text{ja} \quad 2+(s-1)^3+6s(2-s).$$

Seega on esialgu tõestatud, et iga ratsionaalarv vahemikust (1/3, 2/3) on vähemalt ühel viisil esitatav kolme p. r. kuubi summana.

Et selliselt esitada näiteks arv 1/2, valime $s=1{,}5$. Siis on

$$\frac{1}{2}=\left(\frac{47}{60}\right)^3+\left(\frac{53}{300}\right)^3+\left(\frac{6}{25}\right)^3. \tag{2}$$

Olgu nüüd a suvaline p. r. (pole oluline, kas ta kuulub vahemikku (1/3, 2/3) või mitte). Alati on võimalik leida niisugune p. r. b (ja isegi lõpmata mitmel viisil), et korrutis ab^3 satuks vahemikku (1/3, 2/3). Selleks piisab, kui valida b nii, et oleks rahuldatud tingimus

$$\sqrt[3]{\frac{1}{3a}}<b<\sqrt[3]{\frac{2}{3a}}.$$

Valides $s=3ab^3$, saame $ab^3=D^3+E^3+F^3$ ja siit järeldub arvu a jaoks esitus (1), kus $u=D/b$, $v=E/b$, $w=F/b$. Seega ongi Richmondi teoreem lõplikult tõestatud.

Märgime, et tõestus osutub konstruktiivseks, s. t. võimaldab väite kohaselt leida võrrandi (1) lõpmata palju lahendeid.

Pöördume tagasi arvu $a=1/2$ juurde. Selleks, et saada esitusest (2) erinevaid lahendeid, võtame suvalise $b\neq 1$ nii, et oleks $0{,}874<b<1{,}1005$. Näiteks, kui valida b jaoks väärtused 7/8, 8/9, 9/10, 11/10 ja siis võtta $s=1{,}5b^3$, saame arvu 1/2 neli uut esitust kolme p. r. kuubi summana. Vastavad arvutused jätame lugeja hooleks.

Kui a on naturaalarv, siis Richmondi teoreemist järeldub, et diofantilisel võrrandil

$$x^3+y^3+z^3=at^3 \qquad (3)$$

on lõpmata palju naturaalarvulisi lahendeid (võrreldes võrrandiga (1) näeme, et $u=x/t$, $v=y/t$, $w=z/t$). Pakuvad huvi vaid need arvud a, mis ei jagu ühegi algarvu kuubiga ja seega omavad kuju $a=PQ^2$, kus P ja Q, olles ühisjagajata arvud, on erinevate algarvude korrutised. Niisuguseid arve nimetatakse *antikuupideks*. Kui $a=PQ^2$ jaoks võrrandi (3) lahend on leitud, siis vastava mitteantikuubi PQ^2R^3 jaoks lahendi leidmine on lihtne. Tõepoolest, kui

$$x^3+y^3+z^3=PQ^2t^3,$$

siis on

$$(Rx)^3+(Ry)^3+(Rz)^3=(PQ^2R^3)t^3.$$

Ülesandeks, mis ootab veel lahendamist, on leida algoritm võrrandi (3) *vähima lahendi* leidmiseks naturaalarvudes.

Väiksemate a väärtuste puhul vähima lahendi leidmine võib muidugi teostuda katsetamise teel. Tabelis 1 on toodud võrrandi (3) vähimad lahendid kõikide antikuupide $a\leqslant 50$ jaoks. Tabel on koostatud mitme arvutaja töö tulemusena. Huvitav on märkida, et isegi selle väikese tabeli koostamiseks ei piisanud «käsitsi» töötamisest. Lahtrite $a=12$, 26, 30, 39 ja 49 täitmiseks pidi kasutama elektronarvutit!

Tabel 1

a	x	y	z	t	a	x	y	z	t
2	1	42	71	60	26	52	73	119	44
3	1	1	1	1	28	3	9	14	5
4	12	17	19	15	29	1	1	3	1
5	2	7	9	6	30	8	65	77	29
6	4	7	7	5	31	9	29	43	15
7	13	21	23	15	33	17	37	63	21
9	14	27	34	19	34	4	5	9	3
10	1	1	2	1	35	1	7	26	8
11	2	15	25	12	36	1	2	3	1
12	22	75	77	42	37	20	35	37	14
13	14	39	49	24	38	7	18	19	7
14	2	3	7	3	39	31	52	76	25
15	4	5	6	3	41	8	27	37	12
17	1	2	2	1	42	7	9	20	6
18	3	5	10	4	43	2	2	3	1
19	5	14	19	8	44	1	2	7	2
20	2	3	5	2	45	14	18	19	7
21	2	6	7	3	46	3	5	6	2
22	4	39	41	18	47	1	19	21	7
23	3	13	14	6	49	21	34	74	21
25	52	52	69	29	50	3	5	22	6

Ülesanne esitada *arv üks* kolme p. r. kuubi summana taandub ülesandele lahendada naturaalarvudes diofantiline võrrand

$$x^3+y^3+z^3=t^3. \qquad (4)$$

Viimane köidab matemaatikute tähelepanu antiikajast (Diophantos) kuni tänapäevani.

Vieta leidis (1591) kaks võrrandi (4) lahendite seeriat (m, n — naturaalarvud)

$$\begin{aligned} x&=n(m^3-n^3) \\ y&=m(m^3-n^3) \\ z&=n(2m^3+n^3) \\ t&=m(m^3+2n^3) \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} x&=m(m^3-2n^3) \\ y&=n(2m^3-n^3) \\ z&=n(m^3+n^3) \\ t&=m(m^3+n^3) \end{aligned}$$

$$(m>n) \qquad\qquad (m>n\sqrt[3]{2})$$

Euler näitas, et Vieta valemitest saab vaid osa lahendeid ja andis (1756) meetodi võrrandi (4) täielikuks lahendamiseks. Euleri meetodi lihtsustamisega tegelesid Binet (1841) ning Dickson[1] (1930).

Ent ka seoses võrrandiga (4) jääb üks probleem veel lahendamata ja nimelt selle võrrandi lahendite tabuleerimine kasvavas järjekorras. Siin kordub võrrandi (3) puhul kirjeldatud olukord. Väikeste lahendite tabuleerimine võib toimuda «käsitsi» arvutamise teel, kuid edaspidi tuleb jällegi kasutada elektrontehnika abi. Tabelis 2 on kasvavas järjekorras toodud võrrandi (4) kõik lahendid tingimusega $t<100$.

Tabel 2

x	y	z	t	x	y	z	t	x	y	z	t
3	4	5	6	12	19	53	54	26	55	78	87
1	6	8	9	15	42	49	58	38	48	79	87
3	10	18	19	22	51	54	67	20	54	79	87
7	14	17	20	36	38	61	69	21	43	84	88
4	17	22	25	7	54	57	70	25	31	86	88
18	19	21	28	14	23	70	71	17	40	86	89
11	15	27	29	34	39	65	72	58	59	69	90
6	32	33	41	38	43	66	75	25	38	87	90
2	17	40	41	31	33	72	76	32	54	85	93
16	23	41	44	25	48	74	81	19	53	90	96
27	30	37	46	19	60	69	82	45	69	79	97
3	36	37	46	28	53	75	84				
29	34	44	53	50	61	64	85				

[1] Vt. J. Gabovitš. Ühest üldisest meetodist diofantiliste võrrandite lahendamiseks. — Loodus ja matemaatika, I, Tartu, 1959, lk. 127.

GALOIS' TEOORIAST

U. Kaljulaid

> *Matemaatika, olles seotud reaalsete nähtuste kirjeldamisega, ei tugine kogemusele primitiivsel viisil ega koosne kaugeltki ainult ilmsetest faktidest, vaid on julge teoreetiline üldistus. Teoreemide tõestamisel tuleb tihti minna kaugele väljapoole nende otsest sisu. On võimatu tegutseda teadlaste eeskujul, keda Gulliver külastas Balnibarbi saarel!*
>
> *H. Weyl*

Galois' teooriale valmistasid teed Lagrange'i, Gaussi ja Abeli tööd. Teooria põhiprintsiipide äratundmine ja rakendamine on Galois' teene. Igale algebralisele võrrandile seab Galois vastavusse teatava rühma, ning leidnud rea sügavaid seoseid nende kahe objekti omaduste vahel, annab ta ammendava vastuse raskele, matemaatikuid mitu sajandit köitnud küsimusele algebraliste võrrandite lahenduvusest radikaalides.[1] Galois' vaatekoht võrrandi uurimisele sellele vastava rühma omaduste tundmaõppimise kaudu on pöördelise tähtsusega. Tema töödest sai alguse tendents, kus algebra-alaste uuringute raskuspunkt hakkas kalduma struktuursete teooriate suunas. Selle tendentsi selgepiiriline väljakujunemine toimus käesoleva sajandi kahekümnendail aastail ning erilisi teeneid selles on D. Hilbertil ja E. Noetheril. Käesolevaks ajaks on taoline vaatekoht saanud laialt tuntuks N. Bourbaki teose «Matemaatika elemendid» vahendusel.

Käesolev artikkel koosneb kahest osast. Esimeses neist tutvub lugeja mõnede mõistete, seoste ja tulemustega Galois' teoorias. Siin antakse ka Abel-Ruffini teoreemi tõestus ning käsitletakse üht liini Galois' teooria arengus — Galois' pöördülesannet. Vaadeldav üldsuse aste pole kahtlemata piir: A. Grothendieck esitas Bourbaki seminaris 1959. aastal oma tulemused nn. skeemide Galois' teooria kohta, millest järgnevas käsitletu on väga kitsaks erijuhuks, ning millega Galois' teooriale avanes lai tee geomeetrias. Muidugi, piiriks pole ka see, sest Galois' vastavuse

[1] Vt. ka autori artiklit «Algebraliste võrrandite lahendamise ajaloost». — Matemaatika ja kaasaeg, XVI, 1969, lk. 122—140.

idee kasutamine matemaatikas on nüüd nii sagedane, et see on muutunud peaaegu et filosoofiliseks printsiibiks.[2] Artikli teises osas, mis kannab pealkirja «Duaalsusprintsiibist matemaatikas», vaadeldakse, mil viisil Galois' ideede selline areng on toimunud, ning käsitletakse mõningaid üldisi küsimusi seoses Galois' ideede rakendustega uutes valdkondades.

Alljärgnevaid ridu võib vaadata kui lõppakordi artiklite seeriale[3], milles püüdsin lugejat ette valmistada käesoleva materjali mõistmiseks. Eeldatakse, et lugejal on vajalikud «Matemaatika ja kaasaja» numbrid käepärast ja et ta võib vajaduse korral nende poole pöörduda. Spetsiaalseid viiteid ei anta, kuid iga kord, kui lugeja kohtab mõnd vähetuttavat terminit või fakti, võib ta pöörduda abi saamiseks nimetatud kirjutiste poole. Märgime veel, et artikli teine osa on loetav esimesest sõltumatult, mistõttu lugeja, keda huvitab vaid Galois' teooriast tulenevate ideede üldine areng, võib kohe asuda artikli teise osa lugemisele.

Galois' vastavusest

1. Vaatleme võrrandit $x^4+x^3+x^2+x+1=0$. Selle lahendeiks on 5. astme ühejuured: $\alpha_1=e$, $\alpha_2=e^2$, $\alpha_3=e^3$, $\alpha_4=e^4$, kus $e=$ $=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$. Need lahendid rahuldavad seoseid

$$\alpha_1\alpha_4=1, \quad \alpha_2\alpha_3=1, \quad \alpha_1^2\alpha_3=1, \quad \alpha_1^3\alpha_2=1. \tag{1}$$

Loomulikult rahuldavad lahendid α_i ka Vieta valemitega antud seoseid. Viimased jäävad kehtivaiks ka pärast neis esinevaile lahendeile suvalise 4. järku substitutsiooni rakendamist. Seoste (1) korral me seda väita ei saa. Näiteks, substitutsioon $\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4\\ \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_3 & \alpha_4\end{pmatrix}$ viib seose $\alpha_1\alpha_4=1$ seoseks $\alpha_2\alpha_4=1$, mis tegelikult ei kehti. Kui läbi proovida kõik 24 substitutsiooni juurtel α_1, α_2, α_3, α_4, siis näeme, et seoseid (1) ei riku vaid järgmised neli:

$$\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4\\ \alpha_2 & \alpha_4 & \alpha_1 & \alpha_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4\\ \alpha_4 & \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4\\ \alpha_3 & \alpha_1 & \alpha_4 & \alpha_2\end{pmatrix}.$$

Vahetu kontrollimine näitab, et need neli substitutsiooni moodustavad alamrühma täielikus substitutsioonirühmas $\mathfrak{S}_4$.

Vaatleme üldjuhtu. Olgu antud n-astme algebraline võrrand

$$a_0+a_1x+\ldots+a_{n-1}x^{n-1}+x^n=0. \tag{2}$$

---

[2] Artiklis «Automaatide teooriast» võib lugeja tutvuda Galois' põhiidee realiseerimisega analüütilises küberneetikas, vt. käesolev kogumik, lk. 32—47.

[3] Vt. autori artikleid «Matemaatika ja kaasaeg» vihikutes XVI, lk. 122—140; XVII, lk. 7—22 ja XIX, lk. 39—47.

Võrrandi vasaku poole tähistame $f(x)$ ja loeme, et selle kordajad kuuluvad mingisse fikseeritud korpusesse P. Kasutades polünoomi $f(x)$ tuletist, võib $f(x)$ lahutada selliste tegurite korrutiseks, millel on vaid ühekordsed lahendid. Seda saab teha nii, et nende polünomiaalsete tegurite kordajad kuuluksid samuti korpusse P. Seega edaspidi võime eeldada, et $f(x)=0$ lahendid $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ on kõik ühekordsed.

Olgu

$$\Psi_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)=0, \qquad i \in I \tag{3}$$

kõikvõimalike polünomiaalsete seoste süsteem võrrandi $f(x)=0$ lahendite vahel (Vieta valemitega antud seosed on alati olemas; üldiselt võib see seoste süsteem ka lõpmatuks osutuda). Valime täielikus sümmeetrilises rühmas $\mathfrak{S}_n$ välja kõik sellised substitutsioonid σ — nende hulka tähistame $G(f)$ —, mis kas ei muuda süsteemi (3) ühtki seost või viivad (3) iga seose jällegi selle süsteemi seoseks, s. o. kehtib väide

$$\forall i \in I \; \exists j \in I, \quad \Psi_i^{\sigma}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)=\Psi_j(\alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

Hulk $G(f) \subset \mathfrak{S}_n$ moodustab alamrühma. Tõepoolest, kui $\sigma, \tau \in G(f)$, siis on kerge mõista, et $\sigma \cdot \tau \in G(f)$ ning hulk $G(f)$ sisaldab samuti ka ühiksubstitutsiooni. Et iga n-järku substitutsiooni σ korral leidub $m>0$, et $\sigma^m=\varepsilon$, siis $\sigma^{-1}=\sigma^{m-1}$, millest on selge, et $\sigma^{-1} \in G(f)$.

Definitsioon 1. Substitutsioonirühma $G(f)$, mille elemendid ei riku ühtki võrrandi $f(x)=0$ lahendite vahel kehtivat polünomiaalset seost, nimetatakse selle *võrrandi Galois' rühmaks*.

Näidetega tutvume järgmises punktis.

2. Anname nüüd võrrandi Galois' rühma mõistele veel ühe definitsiooni, milles võrrandit asendab teatav korpus — võrrandi lahutuskorpus. See tagab teooria suurema selguse ja üldsuse ning ühtlasi annab ka võimaluse selle laiemaks rakendamiseks.

Olgu Δ mingi korpus. Vaatleme korpuse Δ selliseid üksüheseid kujutumisi iseendale $\sigma: \Delta \to \Delta$, mis säilitavad korpuses antud summa ja korrutise, s. t. kõigi $a, b \in \Delta$ korral kehtivad seosed

$$(a+b)^{\sigma}=a^{\sigma}+b^{\sigma} \quad \text{ja} \quad (a \cdot b)^{\sigma}=a^{\sigma} \cdot b^{\sigma}.$$

Taolisi kujutusi $\sigma: \Delta \to \Delta$ nimetatakse korpuse Δ *automorfismideks*. Automorfismide $\sigma: \Delta \to \Delta$ üksühesusest järeldub, et iga $b \in \Delta$ jaoks leidub selline $a \in \Delta$, et $a^{\sigma}=b$; seejuures element $a \in \Delta$ on üheselt määratud, kuna $a \neq b \Rightarrow a^{\sigma} \neq b^{\sigma}$. Öeldu lubab veenduda selles, et kujutus, mis antakse valemiga $b^{\sigma^{-1}}=a$, on automorfism. Kui automorfismide korrutamiseks lugeda nende kui kujutuste järjestrakendamist, siis korpuse Δ kõigi automorfismide hulk selle algebralise operatsiooni (korrutamise) suhtes on rühm, mida tähistame $G(\Delta)$. Seejuures rühma $G(\Delta)$ ühikelemendiks on selline automorfism ε, mille tarvis Δ kõik elemendid on püsipunktideks. Rühma $G(\Delta)$ nimetatakse korpuse Δ *kõigi automorfismide rühmaks* ja vahel tähistatakse ka $\mathrm{Aut}(\Delta)$.

Olgu nüüd korpuseks Δ võrrandi (2) lahutuskorpus, s. t. korpuse P vähim laiend, mis sisaldab võrrandi $f(x)=0$ kõik lahendid $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Seega $\Delta=P(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Vaatleme rühma $G(\Delta)$ selliseid automorfisme σ, mis jätavad korpuse P elemendid paigale, s. t. kuuluvusest $a\in P$ järeldub $a^\sigma=a$. Need automorfismid σ moodustavad rühmas $G(\Delta)$ alamrühma, mida nimetatakse *laiendi Δ/P Galois' rühmaks* ja tähistatakse $G(\Delta, P)$.

Märkus. Toodud definitsioon näitab tee kaugeleulatuvaks üldistuseks. Tõepoolest, me võime mitte ainult võrrandi lahutuskorpuse korral, vaid ka suvalise laiendi L/K korral kõnelda viimase Galois' rühmast $G(L, K)$, kus

$$G(L, K)=\{\sigma\in\mathrm{Aut}(L) \mid a^\sigma=a \text{ kõigi } a\in K \text{ korral}\}.$$

Teiste sõnadega, rühma $G(L, K)$ elementideks on korpuse L kõik sellised automorfismid, mille suhtes alamkorpuse K kõik elemendid on püsipunktideks.

Lemma 1. *Olgu $f(x)=0$ algebraline võrrand, mille kordajad kuuluvad korpusesse P, ning mille lahutuskorpuseks olgu Δ. Laiendi Δ/P Galois' rühm ühtib võrrandi $f(x)=0$ Galois' rühmaga.*

Tõestus. Automorfismidel $\sigma\in G(\Delta, P)$ on tähelepanuväärne omadus — nad teisendavad võrrandi $f(x)=0$ iga lahendi jällegi sellesama võrrandi lahendiks. Tõepoolest, võrdusest

$$0=a_0+a_1\alpha+\ldots+a_{n-1}\alpha^{n-1}+\alpha^n$$

järeldub

$$\begin{aligned}0=0^\sigma&=(a_0+a_1\alpha+\ldots+a_{n-1}\alpha^{n-1}+\alpha^n)^\sigma=\\&=a_0^\sigma+a_1^\sigma\alpha^\sigma+\ldots+a_{n-1}^\sigma(\alpha^{n-1})^\sigma+(\alpha^n)^\sigma=\\&=a_0+a_1\alpha^\sigma+\ldots+a_{n-1}(\alpha^\sigma)^{n-1}+(\alpha^\sigma)^n.\end{aligned}$$

Seega kehtib seos $f(\alpha^\sigma)=0$, mis tähendab, et koos elemendiga α on võrrandi $f(x)=0$ lahendiks ka α^σ.

Sellele tähelepanekule tuginedes on lemmat kerge tõestada. Tõepoolest, temast järeldub, et võrrandi $f(x)=0$ iga lahendi α_i ja suvalise $\sigma\in G(\Delta, P)$ korral leidub selline indeks s_i, $1\leqslant s_i\leqslant n$, et $\alpha_i^\sigma=\alpha_{s_i}$. Automorfismi σ üksühesuse ja lahendite $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ ühekordsuse tõttu on erinevate i ja j korral ka indeksid s_i ja s_j erinevad. See tähendab, et $\Phi(\sigma)=\begin{pmatrix}1 & 2 & \ldots & n\\ s_1 & s_2 & \ldots & s_n\end{pmatrix}$ on n-järku substitutsioon. Kuna $\Phi(\sigma\cdot\tau)=\Phi(\sigma)\cdot\Phi(\tau)$, siis Φ on rühma $G(\Delta, P)$ esitus (homomorfism) rühmas $\mathfrak{S}_n$. Esituse Φ tuum $\mathrm{Ker}\,\Phi$ koosneb sellistest automorfismidest σ, mis jätavad paika kõik lahendid, ja seega ka kogu lahutuskorpuse Δ. Ainsaks taoliseks automorfismiks on aga ε. Et homomorfismi Φ tuum $\mathrm{Ker}\,\Phi$ koosneb vaid samasusautomorfismist, siis rühma $G(\Delta, P)$ kujutist $\Phi(G(\Delta, P))$ võime vaadelda rühma $\mathfrak{S}_n$ alamrühmana. Et lõpetada tõestust, peaksime näitama võrduse $\Phi(G(\Delta, P)) = G(f)$ kehtivust. See on lihtne harjutus ning jätame selle kontrolli lugejale. Lemma on tõestatud.

Vaatleme nüüd kaht näidet võrrandi Galois' rühma arvutamisest.

Näide 1. Olgu Q ratsionaalarvude korpus. Leiame Galois' rühma $G(\Delta, Q) = G$ võrrandi $f(x) = x^4 - 2 = 0$ lahutuskorpuse Δ/Q tarvis. Selle võrrandi lahendeiks on $\alpha_1 = \alpha = \sqrt[4]{2}$, $\alpha_2 = i\alpha$, $\alpha_3 = -\alpha$, $\alpha_4 = -i\alpha$. Ratsionaalavaldis $\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 = 0 \in Q$ ning peab seetõttu jääma muutumatuks $G(f)$ elementide toimes. Seega rühm G kas langeb kokku substitutsioonirühmaga

$$H = \{1, (13), (24), (13)(24), (12)(34), (14)(23), (1234), (1432)\}$$

või on selle alamrühm. Siin oleme kasutanud substitutsioonide esitamist tsüklitena või nende korrutisena. Seega rühma G järk $|G|$ on arvu 8 jagajaks (Lagrange'i teoreem). Märgime, et $f(x)$ lahutuskorpuseks on $\Delta = Q(\alpha, i)$. Tähistame sümboliga $[L:K]$ vektorruumi L/K dimensiooni. Kerge on veenduda, et $[Q(\alpha) \cap Q(i) : Q] \leqslant 2$, millest $i \notin Q(\alpha)$ tõttu järeldub võrdus $[Q(\alpha) \cap Q(i) : Q] = 1$. See aga tähendab, et $Q(\alpha) \cap Q(i) = Q$. Et $f(x)$ on taandumatu üle Q (Eisensteini kriteeriumi põhjal), siis $[Q(\alpha) : Q] = 4$. Minimaalne aste algebralisele võrrandile, mille kordajad on korpusest $Q(\alpha)$ ning mida arv i rahuldab, on 2. Seetõttu kehtib võrdus $[Q(\alpha, i) : Q(\alpha)] = 2$. Võrdused $[\Delta : Q(\alpha)] = 2$ ja $[Q(\alpha) : Q] = 4$ näitavad, et $[\Delta : Q] = 8$. Galois' vastavuse põhjal (vt. punkti 4) järeldub sellest võrdus $|G| = [\Delta : Q] = 8$. Seega otsitav rühm G langeb kokku substitutsioonirühmaga H.

Näide 2. Leida Galois' rühm $G(\Delta, Q(i)) = G$ võrrandi $f(x) = x^4 - 2 = 0$ lahutuskorpuse $\Delta/Q(i)$ tarvis. Siin kehtivad võrdused

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_4} = \frac{\alpha_4}{\alpha_3} = \frac{\alpha_3}{\alpha_2} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = i \in Q(i),$$

mistõttu need neli ratsionaalavaldist $\dfrac{\alpha_k}{\alpha_l}$ peavad olema rühma G invariantideks. Sellest järeldub, et

$$G = \{1, (1234), (13)(24), (1432)\}.$$

3. Leiame nüüd n-astme algebralise üldvõrrandi

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

Galois' rühma. Vaatleme selleks laiendit Δ/R, kus R tähistab ratsionaalfunktsioonide korpust $P(a_1, \ldots, a_n)$ ja Δ on üldvõrrandi lahutuskorpus. Eelmises punktis tõestatud lemma 1 tõttu on püstitatud ülesanne samaväärne laiendi Δ/R Galois' rühma leidmisega.

Lemma 2. *Laiendi Δ/R Galois' rühm $G(\Delta, R)$ on isomorfne täieliku sümmeetrilise rühmaga $\mathfrak{S}_n$.*

Tõestus. Kuna võrrandi lahendid $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ on kõik ühekordsed, siis iga automorfism $\sigma \in G(\Delta, R)$ määrab valemite $\alpha_k^\sigma = \alpha_{i_k}$, $k=1, 2, \ldots, n$ kaudu substitutsiooni $S_\sigma = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \\ \alpha_{i_1} & \alpha_{i_2} & \ldots & \alpha_{i_n} \end{pmatrix}$. Võib lugeda, et $S_\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}$. Lemma 1 tõestamisel veendusime selles, et kujutus $\mu : G(\Delta, R) \to \mathfrak{S}_n$, mis antakse valemiga $\mu(\sigma) = S_\sigma$, on monomorfism. Käesoleva lemma tõestamiseks järelikult piisab, kui näitame, et $\mu : G(\Delta, R) \to \mathfrak{S}_n$ on ka epimorfism. Viimase väite põhjendamiseks seame igale substitutsioonile $S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}$ vastavusse lahutuskorpuse Δ teisenduse σ, mille defineerime valemiga

$$\left(\frac{f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}{g(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}\right)^\sigma = \frac{f(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_n})}{g(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_n})}. \tag{4}$$

Et tõestada μ epimorfsust, peame veenduma, et võrduse (4) poolt defineeritud iga teisenduse σ korral kehtib seos $\sigma \in G(\Delta, R)$. Veendume kõigepealt teisenduse σ üksühesuses. Teisenduse σ ühesus järeldub valemist (4) otsekohe, kui arvestada, et korpuse Δ iga elemendi saab kujul $\frac{f}{g}$ kirja panna ühesel viisil. Teisendus σ on ka üksühene, sest substitutsiooni S^{-1} poolt valemiga (4) antud teisenduse $\sigma^{-1} : \Delta \to \Delta$ korral on $\sigma \cdot \sigma^{-1}$ ühikteisendus.

Näitame, et vaadeldavad teisendused σ on korpuse Δ automorfismideks. Tõepoolest, kasutades tähistust $f(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_n}) = f^S(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = f^S$, näeme, et kehtivad võrdused

$$\left(\frac{f_1}{g_1} + \frac{f_2}{g_2}\right)^\sigma = \left(\frac{f_1 g_2 + f_2 g_1}{g_1 g_2}\right)^\sigma = \frac{(f_1 g_2 + f_2 g_1)^S}{(g_1 g_2)^S} = \frac{f_1^S g_2^S + f_2^S g_1^S}{g_1^S \cdot g_2^S} =$$

$$= \frac{f_1^S}{g_1^S} + \frac{f_2^S}{g_2^S} = \left(\frac{f_1}{g_1}\right)^\sigma + \left(\frac{f_2}{g_2}\right)^\sigma \quad \text{ja}$$

$$\left(\frac{f_1}{g_1} \cdot \frac{f_2}{g_2}\right)^\sigma = \left(\frac{f_1 f_2}{g_1 g_2}\right)^\sigma = \frac{(f_1 f_2)^S}{(g_1 g_2)^S} = \frac{f_1^S \cdot f_2^S}{g_1^S \cdot g_2^S} =$$

$$= \frac{f_1^S}{g_1^S} \cdot \frac{f_2^S}{g_2^S} = \left(\frac{f_1}{g_1}\right)^\sigma \cdot \left(\frac{f_2}{g_2}\right)^\sigma.$$

Toodud võrdused ja teisenduse σ üksühesus näitavad, et kehtib seos $\sigma \in \mathrm{Aut}(\Delta)$. Jääb veenduda selles, et iga $a \in R$ korral kehtib

$a^\sigma = a$. Teiste sõnadega, meil jääb tõestada alamkorpuse $R \subset \Delta$ invariantsus valemiga (4) antud automorfismide suhtes. Veelgi enam täpsustades peame iga elemendi $a = \frac{f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}{g(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)} = A(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in R$ ja iga substitutsiooni $S \in \mathfrak{S}_n$ korral näitama, et kehtib seos $A^S(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \equiv A(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Seega tuleb tõestada ratsionaalfunktsiooni $A(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ sümmeetrilisus. Näitame, et see on tõepoolest nii. Kuulugu korpuse Δ element $a = A(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \frac{f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}{g(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}$ alamkorpusesse R. Siis võib selle esitada kujul $a = \frac{\bar{f}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}{\bar{g}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}$, kus $\bar{f}$ ja $\bar{g}$ on polünoomid, mille kordajad kuuluvad põhikorpusesse P. Vieta valemeid $a_i = (-1)^i \sigma_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ kasutades leiame, et funktsioon $A(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ on sümmeetriline. Sellega on näidatud, et $\sigma \in G(\Delta, R)$. Lemma on tõestatud.

4. Olgu K korpus ja G selle korpuse automorfismide lõplik rühm. Seega $G \subset \mathrm{Aut}(K)$. Vaatleme kõiki neid elemente korpuses K, mis on «konservatiivsed» rühma G toime suhtes, s. t. vaatleme järgmist alamhulka korpuses K:

$$K^G = \{a \in K \text{ sellised, et kõigi } \sigma \in G \text{ korral kehtib } a^\sigma = a\}.$$

Kontroll näitab, et K^G on korpus.

Galois' teooria põhiteoreemi võib nüüd sõnastada järgmisel viisil.

Korpuses K sisalduvate ja alamkorpust K^G sisaldavate laiendite L (ühelt poolt) ning rühma G alamrühmade H vahel (teiselt poolt) on võimalik korraldada selline üksühene vastavus $\tau : L_i \leftrightarrow H_{\tau(i)}$, et seosest $L_i \supseteq L_j$ järeldub $H_{\tau(i)} \subseteq H_{\tau(j)}$ ja vastupidi. Seejuures laiendi K/L_i järk $[K : L_i]$ on võrdne alamrühma $H_{\tau(i)}$ elementide arvuga. Kõnesolnud vastavuseks on $\tau : H \leftrightarrow K^H$, kus

$$K^H = \{a \in K \text{ sellised, et kõigi } \sigma \in H \text{ korral kehtib } a^\sigma = a\}.$$

Illustratsiooniks öeldule on järgmine skeem:

$$\begin{array}{ccccc} (1) & \subset & H & \subset & G \\ \updownarrow \tau & & \updownarrow \tau & & \updownarrow \tau \\ K & \supset & L = K^H & \supset & K^G \end{array}$$

Vastavuse τ detailsem tundmine lubab saada laiendi K/K^G ehituse kohta üpris sügavat informatsiooni rühma G «struktuuri» tundmaõppimise teel. Samal ajal on laiendi K/K^G ehituse uurimine «otseste» vahenditega tihti vähe ülevaatlik.

Toome järgnevalt kõnesolnud vastavuse kaks rakendust.

Esiteks vaatleme kordsete lahenditega algebralist võrrandit $f(x) = 0$ kordajatega mingist korpusest P, ning selle võrrandi lahutuskorpuseks olgu Δ. Lemma 1 põhjal on võrrandi $f(x)=0$ Galois' rühm $G(f)$ isomorfne laiendi Δ/P automorfismide rühmaga $G(\Delta,P)$. Võttes $K=\Delta$ ja $G=G(\Delta,P)$, saame seose $K^G=P$. Näeme, et laiendi Δ/P (ja seega ka võrrandi $f(x)=0$) omaduste uurimiseks võib kasutada ülalkäsitletud Galois' vastavust. Nende uuringute resultaadiks on **Galois' kriteerium**.

Võrrandi $f(x)=0$ *lahenduvuseks radikaalides on tarvilik ja piisav tema rühma* $G(f)$ *lahenduvus.*

Galois' kriteeriumi ja lemma 2 otseseks järelduseks on järgmine fundamentaalne tulemus.

Teoreem (Abel-Ruffini). *Algebraline n-astme üldvõrrand ei lahendu radikaalides, kui* $n \geqslant 5$.

Tõepoolest, lemma 2 kohaselt on n-astme algebralise üldvõrrandi Galois' rühmaks täielik sümmeetriline rühm $\mathfrak{S}_n$. Et aga rühmad $\mathfrak{S}_n$, $n \geqslant 5$, on mittelahenduvad, siis teoreemi väide järeldub vahetult Galois' kriteeriumist.

Teiseks, olgu K algebraliste arvude korpus, s. t. ratsionaalarvude korpuse Q lõplik laiend ning olgu $[K:Q]=n$. Kroneckeri teoreemi kohaselt leidub selline kompleksarv $\theta \in K$, et iga $k \in K$ saab ühesel viisil esitada kujul

$$k=k_0+k_1\theta+\ldots+k_{n-1}\theta^{n-1}, \qquad k_i \in Q.$$

Seega $K=Q(\theta)$. Kuna $1, \theta, \theta^2, \ldots, \theta^n$ on lineaarselt sõltuvad üle Q (sest $\dim_Q K=[K:Q]=n$), siis leidub selline ratsionaalarvuliste kordajatega n-astme polünoom $p(x)$, et $p(\theta)=0$. Võib tõestada, et ei leidu ühtki madalamaastmelist polünoomi $q(x)$ samade omadustega. Seetõttu, jagades $p(x)$ kõiki kordajaid x^n kordajaga (normeerides polünoomi $p(x)$), saame θ jaoks nn. minimaalpolünoomi $\bar{p}(x)$, mis on üheselt määratud polünoomiga $p(x)$. Algebra «põhiteoreemi» kohaselt on n-astme algebralisel võrrandil n lahendit; olgu $\bar{p}(x)=0$ lahendeiks peale $\theta_0=\theta$ veel $\theta_1 \ldots, \theta_{n-1}$. Valemitega

$$k^{\varkappa_i}=k_0+k_1\theta_i+\ldots+k_{n-1}\theta_i^{n-1}, \qquad i=0, 1, \ldots, n-1,$$

antud kujutused $\varkappa_i : K \to K$ osutuvad automorfismideks. Hulk $\{\varkappa_0=\varepsilon, \varkappa_1, \ldots, \varkappa_{n-1}\}$ on rühm, mida võimegi vaadelda rühmana G. Et $K^G=Q$, siis rühma G ehituse tundmine lubab saada väärtuslikku informatsiooni algebraliste arvude korpuse K/Q ehituse kohta.

5. Kaasajal on korpuseteooria tsentraalseks ülesandeks antud korpuse kõigi (algebraliste) laiendite klassifitseerimine ja kirjeldamine. Siia kuulub ka nn. *Galois' pöördülesanne* — küsimus antud põhikorpuse kõigi nende laiendite leidmisest, mis omavad Galois' rühmaks etteantud rühma. Näiteks lõplike korpuste korral oli juba É. Galois' aegadest teada, et nende algebralised laiendid on tsüklilised, s.o. omavad Galois' rühmaks tsüklilist rühma, ja et neil on parajasti üks antud järku laiend. Üldjuhul on Galois' pöördülesanne veel praegugi kaugel täielikust lahendusest.

Galois' pöördülesanne oma klassikalisel kujul oli teada juba N. Abelile: leida kõik etteantud Galois' rühmaga algebralised võrrandid. Selle küsimuse saab püstitada mitmes eri vormis.

A. On antud rühm; leida algebraline võrrand, millele antud rühm oleks Galois' rühmaks.

B. Leida meetod kõigi võrrandite saamiseks, millel on etteantud Galois' rühm.

C. On antud rühm; leida niisuguste algebraliste võrrandite kordajate üldkuju, millel Galois' rühmaks on etteantud rühm.

Tsentraalseks nende kolme küsimuse seas on C, sest selle lahendusest tulenevad lahendused ülesandeile A ja B. Kas ülesannet C saab alati lahendada? E. Noether näitas, et vastus on jaatav, kui on õige järgmine (Lürothi) hüpotees.

Vaatleme ratsionaalfunktsioonide korpust $P(x_1, \ldots, x_n)$ muutujaist $x_1, \ldots, x_n$ üle põhikorpuse P. Kerge on leida «elementaarne seeria» alamkorpusi selles korpuses. Võtame selleks $m(\leqslant n)$ algebraliselt sõltumatut[4] elementi $y_1, \ldots, y_m$ korpusest $P(x_1, \ldots, x_n)$ ja vaatleme alamkorpust $P(y_1, \ldots, y_m) \subset P(x_1, \ldots, x_n)$. Siin $P(y_1, \ldots, y_m)$ tähistab põhikorpuse P vähimat laiendit, mis sisaldab elemente $y_1, \ldots, y_m$. Võib tõestada, et korpus $P(y_1, \ldots, y_m)$ on isomorfne korpusega $P(x_1, \ldots, x_m)$. Lürothi küsimus[5] on selles, kas nii saadud alamkorpuste seeriaga $\{P(x_1, \ldots, x_m), m \leqslant n\}$ on ammendatud ratsionaalfunktsioonide korpuse $P(x_1, \ldots, x_n)$ kõik alamkorpused (isomorfismi täpsusega)? Kasutades mõisteid ja fakte algebraliste joonte teooriast, tõestas P. Lüroth selle väite juhul, kui $n=1$. Aastal 1895 andis E. Netto sellele Lürothi tulemusele juba puhtalgebralise ning lihtsustatud tõestuse. G. Castelnuovo tõestas 1894. aastal Lürothi hüpoteesi juhul $n=2$, kasutades selleks sügavaid tulemusi algebraliste pindade kohta. 1908. aastal arvas G. Fano, et ta on leidnud Lürothi hüpoteesile vasturääkiva näite juhul $n=3$, kuid tema arutlustes avastati hiljem olulised lüngad ja vead. Järgnenud aastakümnete vältel tehti palju katseid Lürothi hüpoteesi üldjuhul tõestada, kuid probleem osutus erakordselt raskeks. Rea originaalsete ideede lisamise ja uute tehniliste vahendite kasutamisega õnnestus J. Maninil ja V. Iskovskihhil üsna hiljuti (aastal 1971) G. Fano töö põhiideed päästa. See lubas neil tõestada, et vastus Lürothi küsimusele on üldjuhul eitav. Kasutades analüütilisi meetodeid, jõudsid selle tulemuseni peaaegu samaaegselt ka Ph. Griffiths ja G. Clemens.

---

[4] s. t. ei leidu ühtki m-muutuja polünoomi $f \neq 0$ kordajatega korpusest P, et $y_1, \ldots, y_m$ oleksid võrrandi lahendeiks.

[5] P. Lüroth. Beweis eines Satzes über rationale Curven. — Mathematische Annalen, 1876, B. 9, S. 163—165.

Peatume nüüd veel Galois' pöördülesande ühel erijuhul. Vaatleme ratsionaalarvude korpuse Q Abeli laiendeid, s. t. korpuse Q selliseid laiendeid, mille Galois' rühmaks on Abeli rühm. Täpsemalt, laiend L/Q on Abeli laiend, kui rühm $G(L, Q)$ on Abeli rühm. Kronecker-Weberi teoreem väidab, et korpuse Q iga Abeli laiend sisaldub teatavas korpuses kujuga $Q(\sqrt[n]{1})$, milliseid nimetatakse ka «ringi jaotamise korpusteks». Selles väites sisaldub väärtuslik informatsioon korpuse Q Abeli laiendite ehituse kohta. Juhindudes püüdest Kronecker-Weberi teoreemi üldistada, on talle antud rida erinevaid tõestusi. D. Hilbert püstitas ülesande uurida Abeli laiendeid korpustele $Q(\sqrt{-d})$, kus d on naturaalarv, mis ei sisalda teguritena täisruute, samuti ka suvaliste algebraliste arvude korpuste Abeli laiendeid (Hilberti 12. probleem). Selles võib näha püüet leida antud algebraliste arvude korpuse K jaoks selline «elementaarne seeria» Abeli laiendeid, mis sisaldaksid korpuse K kõiki teisi Abeli laiendeid. H. Hasse lahendas 1923. aastal esimese küsimuse Hilberti probleemist. Kronecker-Weberi teoreemi üldistus suvalistele algebraliste arvude korpustele anti 1961. aastal G. Shimura ja T. Taniyama poolt. Ka algebraliste arvude korpuste mitte-Abeli laiendite uurimisel on saavutatud edu. Põhitulemus on seni järgmine: iga lahenduva rühma G ja suvalise algebraliste arvude korpuse K jaoks leidub selline algebraline laiend L/K, mille Galois' rühm $G(L, K)$ on isomorfne rühmaga G. On leitud meetod kõigi taoliste laiendite saamiseks. Siiski, üldjuhul on olukord Galois' pöördülesande lahendamisel veel üpris kaugel täiuslikkusest — pole sageli isegi selge, kuidas õigesti küsimusi püstitada ja milliseis termineis otsida nende lahendusi.

Duaalsusprintsiibist matemaatikas

1. Matemaatika üheks põhimõisteks on kujunenud morfismi (isomorfismi, homomorfismi jms.) mõiste. Seda tingis morfismi mõistega lähedalt seotud sarnasuse ja ekvivalentsi mõistete väljakujunemine. Sarnasuse mõiste täpse määratluse andis esimesena G. W. Leibniz. Kaht objekti nimetas ta sarnasteks, kui neid ei saa eristada teineteisest, vaadeldes mõlemat omaette, kuna iga võimalik omadus, mis on ühel neist objektidest, on ka teisel. Parimaks näiteks morfismi mõiste väärtusest matemaatikale on R. Descartes'i poolt avastatud isomorfism tavalise planimeetria ja eukleidilise tasandi (kui arvupaaride (x, y) hulga) geomeetria vahel, mis saavutatakse koordinaatide kasutuselevõtuga esimeses. See isomorfism seab planimeetria igale ülesandele vastavusse teatava algebralise ülesande. Idee viljakusest kõneleb näiteks kergus, millega on nüüd võimalik anda vastus klassikuile üliraskeks osutunud küsimusele nurga jaotamisest kolmeks võrdseks osaks (nn. nurga trisektsioon).[6]

Morfismi mõiste tähtsust matemaatikale hakati õigesti hindama alles 19. sajandil seoses uue etapiga geomeetria arengus. Matemaatikud olid selleks ajaks juba harjunud üleminekuga ühe teooria juurest teise juurde terminoloogia muutmise teel. Hakkas kasvama üldise matemaatilise teooria konkreetsete «mudelite» hulk. Kõige reljeefsemalt avaldus see projektiivse geomeetria tekkes. Selle aja tava kohaselt esitati siin külg külje kõrval kahes kõrvuti seisvas veerus «duaalsed» teoreemid. Tuletame meelde, et «duaalsus» projektiivsel tasandil seisneb tões, et selle geomeetria teoreemides mõisted «punkt» ja «sirge» on teineteisega asendatavad ilma teoreemide tõesust rikkumata. Märgime ka, et just püüe tõestada Lobatševski ja Riemanni geomeetriate «olemasolu» neile eukleidiliste mudelite leidmise kaudu kindlustas uutele geomeetriasüsteemidele eluõiguse. Duaalsus ilmneb siin vastavuses ühelt poolt «abstraktse» teooria väidete ja teiselt poolt rohkem «konkreetsete» matemaatiliste objektide omaduste vahel.

Vaadeldud duaalsus projektiivses geomeetrias on üks näide rohkearvulistest duaalsusteoreemidest[7] matemaatikas, mille kõigi ühiseks printsiibiks on isomorfismi leidmine erinevate (matemaatiliste) kategooriate vahel. Avastatud duaalsus lubab seejärel ühtede objektide omadusi automaatselt üle kanda nendega duaalsetele objektidele, mille juures vastavate omaduste leidmine nende objektide vahetu uurimise kaudu on vahel nõudnud terveid sajandeid. Parimaks tõendiks selle kohta on lugejale juba tuttav Galois' teooria.

S. Lie märkas, et iga osatuletistega diferentsiaalvõrrandi jaoks leidub teatav, selle võrrandi muutujail tegutsev teisenduste (pidev) rühm, mis vaadeldavat võrrandit ei muuda. Selle rühma ehitust tundes osutub võimalikuks teha rida järeldusi selle võrrandi lahendite kohta. Selline vaatekoht oli erilise tähtsusega diferentsiaalgeomeetriale. Esimesena mõistis seda selgesti F. Klein. Tema «Erlangeni programmi» (1972. a.) põhiideeks on klassifitseerida objektide geomeetrilised omadused teisenduste rühmade järgi, mille suhtes nad on invariantsed. Selle idee realiseerimine oli edasiseks progressiks morfismi mõiste arengus. Kuid taolisel arengul oli ka negatiivne külg. Nördinult ütleb M. Chasles: «Nüüd võib igaüks võtta mingi tuntud tõe ja rakendades sellele mitmesuguseid üldisi teisendusprintsiipe, saada uusi tõdesid, mis esialgsest erinevad ja on üldisemad. Nendega võib omakorda toimida

---

[6] Täpsemalt selle kohta vt. artiklist Ю. И. Манин. О разрешимости задач на построение с помощью циркуля и линейки. Энциклопедия элементарной математики, т. 4, стр. 205—227.

[7] Duaalsus lineaarruumides, duaalsus kinniste ja lahtiste hulkade vahel topoloogias, Pontrjagini duaalsus Abeli rühmades, Poincarè duaalsus homoloogiate ja kohomoloogiate vahel algebralises topoloogias jt.

samuti, ja nii võib lõpmatuseni suurendada uute tõdede arvu, mis kõik on saadud ühestainsast esimesest. Geniaalsus pole enam vajalik tingimus teadusetempli ehitamisel!» Vaatamata oma universaalsusele jättis Kleini programm välja geomeetria selle arengusuuna, mis tuleneb B. Riemanni loengust, kuid ka sellel teisel suunal on sügavaid seoseid rühmadega. Nende seoste väljaarendamine sai teoks käesoleval sajandil ja viis (Riemanni) ruumide uurimisele holonoomia rühmade abil [8].

2. F. Kleini idee leidis viljaka rakenduse füüsikas, mis tugineb sümmeetria kaalutlustele. Sümmeetria väljendab teatud korda, proportsionaalsust ja kooskõla terviku osade vahel, suhtelist püsivust. Vajadusele kasutada sümmeetria mõistet füüsikas osutas juba P. Curie [9]: «Ma arvan, et füüsikaliste protsesside uurimisel pakuks arvatavasti huvi tuua sisse sümmeetria kaalutlused, mis nii suure eduga leiavad kasutamist kristallograafias. Füüsikud kasutavad tihti tulemusi, mis järelduvad nähtuse sümmeetriast, kuid tavaliselt ei täpsusta nähtuse sümmeetria mõistet, kuna väga tihti paistab see à priori peaaegu ilmselt antuna.»

Ruumi homogeensuse ja isotroopsuse omadusi tunti ammu: nad väljendavad ruumi sümmeetriat liikumiste rühma suhtes. Viimane koosneb kolmemõõtmelise eukleidilise ruumi kaugusi säilitavaist teisendustest ning algebraliseks operatsiooniks selles hulgas on nende teisenduste järjestrakendamine. Selle pideva rühma diskreetsed alamrühmad kirjeldavad mitmesuguste kristallide sümmeetriaid. Teoreetilise füüsika üheks ülesandeks ongi olnud piisava arvu invariantidega (pidevate) teisenduste rühmade leidmine, mis lubaksid interpreteerida mõõtmistest ja katsetest saadud andmete hulki jäävusseaduste terminеis. Füüsikaseaduste invariantsus Lorentsi rühma teisenduste suhtes kajastub erirelatiivsusprintsiibis, mille esimesena formuleeris H. Poincarè [10].

Eriti rikas sümmeetriate poolest on mikromaailm [11]. Uute seaduspärasuste avastamisel elementaarosakeste füüsikas on S. Lie poolt loodud matemaatilisel aparatuuril eriline tähtsus. See seletub osaliselt järgmise asjaoluga. Kui mõni füüsikaline teooria annab oma eksperimentide tulemused diferentsiaalvõrrandite abil, siis neis võrrandeis peituv füüsikaline sisu võib osutuda palju laiemaks ja haarata palju suuremat eksperimentide ringi kui see,

---

[8] Vt. Ü. Lumiste. Ruumi mõiste geomeetrias. — Matemaatika ja kaasaeg, XIV, 1968, lk. 3—21.

[9] P. Curie. Sur la symmetrie dans les phenoménes physique. — Journ. de Phys., 1894, 3(3), p. 393.

[10] Vt. artikleid «Принцип относительности» ja «Профессор Г. А. Лоренц как исследователь» raamatus П. Эренфест. Относительность. Кванты. Статистика. М., 1972.

[11] Järgnevas käsitletud küsimuste põhjaliku esituse võib leida H. Õiglase loengutest «Peatükke teoreetilisest füüsikast», I ja II. TRÜ rotaprint, 1965 ja 1967.

millest need võrrandid tuletati. Seoses elektromagnetilise lainete «avastamisega» Maxwelli võrrandeist, ütleb H. Herz tabavalt: «Ei saa lahti tundest, et matemaatilistel valemitel on meist sõltumatu olemasolu, oma teadvus, et nad on targemad kui meie, targemad isegi kui nende avastajad, sest me saame neilt rohkem, kui neisse esialgselt on pandud.» Heaks näiteks öeldust on ka antiaine avastamine. Märgati, et kui elementaarosakest kirjeldab Dirac'i võrrand, siis võib ta olla kahes erinevas laengulises olekus. Et elektroni käitumist kirjeldab Dirac'i võrrand, oli teada. Ennustati positroni olemasolu, mis leidiski hiljem katselise kinnituse. Siit ennustati ka, et igal osakesel on olemas antiosakene. Elementaarosakeste teoorias eristatakse kahte liiki sümmeetriaid. Ühed neist on seotud aegruumi teisenduste rühma (s. o. Lorenzi rühma) alamrühmadega. Teised, nn. sisemised sümmeetriad, põhinevad spetsiaalsete unitaarsete rühmade vaatlusel ning peegeldavad osakeste «sisemiste» omaduste sümmeetriat.

Loodus pole aga siiski läbinisti vaid sümmeetria! Termodünaamiliste protsesside pöördumatus, ruumilise, ajalise ja laengulise paarsuse seaduste mittekehtivus osakeste nõrkade vastasmõjude korral — kõik see kõneleb asümmeetriast. Rikas neist on ka elusloodus. Siin võib kõnelda asümmeetria ja sümmeetria kihtide vaheldumisest, nende korrustest. Sümmeetria väljendub nüüd asümmeetriliste elementide organiseerumises ning selles peegeldub organismide püüe arengule.

3. Meid ümbritsevat maailma iseloomustab tema struktuursus, selle struktuursuse astmelisus ning struktuuride suhteline iseseisvus. See loob võimaluse üksikute struktuuride väljaeraldamiseks eesmärgiga neid sügavamalt tundma õppida. Erinevate struktuuride sarnasust matemaatikas peegeldab morfismi mõiste — sarnasus teatud teooria tasemel. Taoline lähenemine tingib aksiomaatilise meetodi tarvilikkuse. Selle meetodi kasutamisele matemaatikas pandi alus M. Paschi, D. Hilberti ja E. Steinitzi töödes. Meetodi laialdasem kasutuselevõtt ei kulgenud sugugi valutult. Näiteks oli F. Klein algul «aksiomatiseeritud matemaatika» suhtes meelestatud üpris skeptiliselt, nähes selles kallaletungi intuitsioonile ja fantaasiale, s. o. tõeliselt produktiivsetele elementidele loomingus. Selle suuna vaieldamatult väljapaistvaks saavutuseks on algebra struktuursete teooriate teke käesoleva sajandi kahekümnendail aastail (G. Cantori poolt loodud hulgateooria baasil). Edasiseks etapiks sellel teel oli matemaatilise struktuuri ja sellega tihedalt seotud morfismi mõistete täielik väljakujunemine ning nende muutumine kogu matemaatika ümberkorralduse vahendiks.[12]

---

[12] Lähemalt sellest vt. artiklist G. Kangro. N. Bourbaki «Matemaatika elemendid». — Matemaatika ja kaasaeg, IX, 1965, lk. 2—9.

On kahtlemata õige, et matemaatika algab arvutustest. Kõigil aegadel on arvutused olnud matemaatika hingeks, sest nende arengutase on tihedalt seotud matemaatika rakendusvõimalustega teistes teadustes. Alati on aga «kvantitatiivsete» meetodite areng ja levik esile kutsunud vajaduse matemaatika «kvalitatiivsete» meetodite täiustamiseks ja arendamiseks, sest viimased rikastavad arvutuskunsti uute vormidega ja etendavad organiseerivat osa meetrilise (arvulise) matemaatika arengus.[13]

4. Matemaatika kahe tendentsi, rakendusliku ja teoreetilise, koosmõju on olnud pidevaks stiimuliks paljude väljapaistvate matemaatikute loomingus. Näiteks C. F. Gaussi töid rakendusmatemaatikas iseloomustab F. Klein järgmiselt: «Selle töö stiimulid saab Gauss alati väljastpoolt matemaatikat. Siis aga, probleemide seadel ja nende lahendamisel, avaldub temas eriline loominguline jõud ja kogemus, mille ta võis endas välja arendada vaid «puhta» matemaatika küsimuste lahendamisel. See avaldub ka printsiibis mitte lugeda tehtuks seda, milles on jäänud veel midagi teha.»

Veelgi reljeefsemalt avaldub kõnesolnud tendentside koosmõju J. L. Lagrange'i loomingus. Lagrange'i matemaatilist stiili iseloomustab erakordne sihipärasus, püüe lahendada lõpuni seda või teist kindlat ülesannet. Tema kõige kuulsamaks tööks on aga «Analüütiline mehaanika», mis ilmus 1788. aastal. Siin on ühtsest lähtepunktist käsitletud selleks ajaks leitud mitmesuguseid printsiipe mehaanika ülesannete lahendamiseks, on näidatud nende printsiipide seoseid, sõltuvust üksteisest ja rakenduvuspiire. Mehaanika on selles teoses muutunud matemaatilise analüüsi osaks, kuna ei peatuta mehaanika ülesannete kitsastel erijuhtudel, vaid esiplaanile on toodud vaadeldavate ülesannete lahendamiseks vajalikud üldised algebralis-analüütilised meetodid, mis on järgnevate sajandite vältel olnud lähtepunktiks, vundamendiks ja spetsiaalsete meetodite allikaks paljudele teooriaile rakendusmehaanika eri valdkondades. Need meetodid on olnud ühtviisi rakendatavad nii laevavintide projekteerimisel, laevade lainetuses kõikumise uurimisel, güroskoopiliste kompasside loomisel, kahurikuulide trajektooride arvutamisel, raudteesildade projekteerimisel kui ka taevakehade liikumise uurimisel.[14]

---

[13] Kõigile on näiteks teada, millist osa etendab praegu funktsionaalanalüüs arvutusmeetodite arengus (ja seega ka arvutite kasutamisvõimaluste laiendamisel).

[14] Täpsemalt võib öeldu kohta lugeda artiklist А. Н. Крылов. Жозеф Луи Лагранж. Успехи матем. наук. 1936, вып. II, стр. 3—16. Kaasaegsemaks näiteks öeldust on J. Neumanni looming. Tema vaadetega matemaatika arengule, empiiriliste ja esteetiliste kaalutluste tasakaalule selles võib lugeja tutvuda artikli «The Mathematician» järgi, mis sisaldub raamatus J. Neumann. Collected works. Vol. 1, New York, 1961.

Matemaatikat on võrreldud suurlinnaga, mille äärtel käib vilgas ehitustegevus, kus kerkivad uued rajoonid ja uued kvartalid, kus on puhtam õhk ja kuhu tungleb noorus, kes toob linna ellu uut jõudu ja stiimulit. Nende uute rajoonide sünd on suurlinna arengu paratamatus, tema eluline vajadus. Samal ajal toimub linna tsentris ehitustegevus mitte vähema intensiivsusega ja laiahaardelisusega. Rekonstrueeritakse ja laiendatakse tänavaid, ehitatakse ajakohaseid hooneid, et kohandada suurlinna tsentrit elu uutele vajadustele ja nõuetele. Tõeliselt otstarbeka ja kauni linnaga on tegemist siis, kui need kaks tendentsi tema arengus on heas tasakaalus.

MATEMAATIKA JA LOODUS

Ma võrdlen looduse saladusi matemaatika seadustega. Ma olen veendunud, et üks ja seesama võti avab nii ühe kui ka teise mõtte. Kõike hoolikalt kaaludes tulin järeldusele, et kõik mõõdu ja korra tunnetamisega tegelevad teadused kuuluvad matemaatika juurde, sõltumata sellest, kas nad otsivad seda mõõtu arvudes, kujundites, helides või teistes objektides. Seetõttu peab eksisteerima universaalne teadus, mis uurib kõike mõõdu ja korraga seotut, sõltumata ühest või teisest rakendusest. Seda teadust on kõige õigem nimetada matemaatikaks ning kõiki teisi teadusi võiks lugeda tema osadeks.

R. Descartes

Iga nähtuse analüüs viib meid ühe ja sama substraadini — muutlikkuseni funktsionaalse sõltuvuse seaduse alusel. Kõik nähtused, isegi need, mis oma minimaalsete mõõtmete tõttu näivad olevat mitte seotud looduse võimsate seadustega, on neist niisama vältimatud järeldused nagu Päikese pöörlemine. Tänapäeva sündmusi seob möödunuga vääramatu printsiip, mille kohaselt mitte midagi ei toimu ilma põhjuseta. See on üldkasutatav aksioom. Kui mingi geniaalne mõistus tunneks kõiki antud hetkel looduses tegutsevaid jõude ning kõigi looduses esinevate asjade vastastikuseid seoseid ning kui see mõistus suudaks seda kõike haarata sedavõrd, et kõik need andmed allutada matemaatilisele analüüsile, siis ta võiks kirjeldada üheainsa valemiga nii kõige suuremate taevakehade kui ka kõige väiksemate elektronide liikumist.

P. S. Laplace

Matemaatika on inimmõistuse produkt, mis on sõltumatu katsest, kuid vastab väga hästi reaalsele maailmale ning selgitab seda suurepäraselt.

A. Einstein

Küberneetika

Rein Tammeste mälestuseks

AUTOMAATIDE TEOORIAST

U. Kaljulaid, E. Tamme

Fantaseerida matemaatika võimalikust arenguteest ja tema edusammudest tulevikus on alati riskantne, kui mitte mõttetu. Võimalik, et sel momendil juba töötab keegi teoreemi või teooria kallal, mis võib oluliselt muuta käesolevat arengusuunda.
I. M. Singer (Prospects in Mathematics, Nr. 70, 1971)

Mõnedest vaadetest analüütilises küberneetikas

1. Inimene on püüdnud loodusjõude oma tahtele alistada juba kaugetest aegadest peale. Looduse saladuste uurimine on viinud loodusseaduste avastamiseni. Igale sellisele edusammule on järgnenud nihe tehnika arengus: on loodud uusi masinaid, mis alistatud loodusjõude ära kasutades on mitmekordistanud inimese füüsilisi võimeid. Samal ajal on inimene otsinud teid ja vahendeid aju tegevuse võimendamiseks. Käesoleva sajandi neljakümnendail aastail muutus see küsimus eriti aktuaalseks seoses vajadusega läbi viia erakordselt keerukaid ja suuremahulisi arvutusi. Tekkisid elektronarvutid.[1] Nende kasutamine osutub tarvilikuks üha uutes praktilise ja vaimse tegevuse valdkondades ning kaugeltki alati ei suuda olemasolevad arvutid neid nii kvantiteedilt kui ka kvaliteedilt üha kasvavaid vajadusi rahuldada.[2] Tagasipöördumine arvutilt arvelaua juurde on niisama mõeldamatu kui elektrilt küünlavalguse juurde. Tehnika täiustudes loobutakse tihti inimese sekkumisest masinate töö vahetusse juhtimisse (automaattehased, automaatsed kontroll- ja katseseadmed, automaatpiloodid, täiustunud sõjatehnika jms.). Päevakorda kerkib vajadus täiuslikumate ja võimsamate arvutite ja automaatseadmete loomiseks. Et selles edu saavutada, on kahtlemata oluline teada, kas eesmärki on või-

---

[1] Töö elektronarvutite loomisel algas 1943. a., mil John W. Mauchly eestvedamisel asuti realiseerima esimese arvuti ENIAC projekti. Arvuti valmis 1946. a.

[2] Reaalsuse ja illusioonide tasakaalust on huvitavat materjali raamatus H. D r e y f u s. What computers can't do. New York, 1972.

malik saavutada olemasolevate automaatide täiustamise ja mõõtmete suurendamise teel. Vastasel korral tuleb loota, et õnnestub inimaju tööprintsiipe sügavamalt tundma õppida, tulemusi matemaatiliselt kirjeldada ning saadud mudeleid tehniliselt realiseerida.[3] Matemaatikut huvitab siin esmajoones järgmine küsimus: kas olemasoleva matemaatika abil on võimalik anda adekvaatseid kirjeldusi seaduspärasustele, mis valitsevad keerukate automaatide maailmas?

2. Erinevate (juhtimis)süsteemide korral ilmneb tihti nende struktuurne sarnasus, s. o. paljude elementide ja nendevaheliste seoste analoogilisus, aga ka funktsionaalne sarnasus, s. o. süsteemide ühesugune käitumine analoogilistes olukordades.

See võimaldab luua juhtimissüsteemide klasside ühtset (aksiomaatilist) teooriat, milles konkreetset süsteemi tuleb vaadelda kui klassi esindajat. Elementide käitumise aksiomatiseerimisel tuleb eeldada, et elemente võib vaadelda «mustade kastidena», mille sisemine ehitus ei pea olema teada, kuid mis teatud kindlal viisil reageerivad täpselt määratletud välisärrituste kogumile. Sellise teooria aksiomaatika vajab aga aeg-ajalt täiustamist, eriti pärast olulisi muutusi meie teadmistes elementide füüsikalis-keemilisest loomusest ja nende omadustest. Sobiva mõistete ja meetodite võrgu leidmine antud klassi süsteemide struktuuri ja funktsionaalsete omaduste uurimiseks on siin üks põhilisi ülesandeid.

Sammuks sellel teel on W. McCullochi ja E. Pittsi töö formaalsete närvivõrkude kohta.[4] Keskse1 kohal selles töös on formaalse neuroni mõiste. Viimane kujutab endast (abstraktset) elementi, «musta kasti», millel on m $(m\geqslant 1)$ sisendit $x_1, \ldots, x_m$ ning üks väljund d. Neuronil on $m+1$ arvulist karakteristikut: lävi θ ja sisendite x_i kaalud ω_i. Siinjuures $\omega_i>0$ tähendab, et sisend x_i on ergutav, $\omega_i<0$ aga seda, et sisend x_i on pärssiv. Formaalne neuron töötab diskreetses ajaskaalas $t=0, 1, 2, \ldots$, andes momendil $t=n+1$ impulsi väljundile d parajasti siis, kui momendil $t=n$ ergastatud sisendite kaalude summa ületab neuroni läve. Formaalne närvivõrk on niisuguste elementide ühendus, mis saadakse järgmisel viisil. Neuroni väljund jaguneb sobivaks arvuks harudeks, mis on ühendatud mõnede teiste neuronite sisendiga. Seejuures võib neuroni väljund olla kokku viidud suvalise arvu sisenditega sellessamas või teistes neuronites, kuid iga sisend võib olla ühendatud vaid üheainsa väljundharuga. Mõned neuronite sisendid jäävad vabaks ja need kas samastatakse või siis grupeeritakse võrgu sisendliinideks (iga vaba sisend ühendatakse para-

---

[3] Seoses sellega vt. artiklit Н. Басов, О. Крохин. Лазер-71. — «Известия», 12 февраля 1974.

[4] W. S. McCulloch, E. W. Pitts. A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity. — Bull. Math. Biophys., 1943, 5, pp. 115—133. Selle artikli venekeelne tõlge on kogumikus «Автоматы». M., 1956.

jasti ühe sisendliiniga; viimaseid võib aga olla vähem kui vabu sisendeid). Väljundliinid samastatakse väljunditega, mis pole kokku viidud ühegi teise neuroni sisenditega. Kõik neuronid töötavad üheaegselt ning nende lävi ja kaalud ei muutu aja jooksul. Uurida taolise formaalse närvivõrgu funktsioneerimist tähendab selgitada, milliste signaalidega väljundliinidel reageerib võrk mitmesugustele signaalidele tema sisendliinidel.

Kuigi formaalne närvivõrk on aju üpris primitiivne analoog, oli nende uurimine siiski esimene reaalne samm matemaatiliste vahendite kasutamisel neurofüsioloogias. Taoliste võrkude uurimine stimuleeris suuresti automaatide teooria teket. Tõepoolest, aastal 1946 tuli John von Neumann välja elektronarvutite konstrueerimise uute ideedega (projekt EDVAC). J. Neumannil on konstruktsiooni aluseks moodul, mõiste, mille loomisel on olnud määravaks funktsionaalne sarnasus arvuti elementaarbloki ja formaalse neuroni vahel. Mooduli mõiste kasutuselevõtt arvutite konstrueerimisel lubas eraldada arvuti loogilise sünteesi (ülesanne matemaatilise loogika vallast) vastavate elektrivõrkude tehnilisest sünteesist (insenerikunst).[5] Sellega oli tehtud teine samm automaatide teooria loomise suunas, mille peamiseks ülesandeks kujunes aju ja tulevikuarvutite struktuursete ja funktsionaalsete analoogiate matemaatiline realiseerimine ning mille tulemused pidid tagasiside korras abistama arvutite konstrueerimise uute printsiipide loomisel. Kui aluseks võtta need nõuded, siis tuleb tõdeda, et ka praegu ollakse veel üsna kaugel sellisest automaatide teooriast, mis seda nime täielikult vääriks. Tavaliselt öeldakse, et küberneetika formeerus iseseisvaks distsipliiniks aastal 1948, mil ilmus N. Wieneri raamat «Küberneetika». Kõrvuti Wieneriga tuleb aga osutada J. Neumanni panusele. Kuigi mõlemad teadlased hästi tundsid teineteise töid ja olid vastastikuse mõju all, oli nende lähenemine asjadele erinev. Erinevad huvid tingisid ka erinevuse nimetuses — Neumann nimetas oma varianti «automaatide teooriaks», Wiener aga «küberneetikaks». Viimane on hästi tuntud vastavate tööde tõlgete kaudu vene keelde. Seda ei saa aga öelda automaatide teooria kohta.

3. Mida keerukama ehitusega on arvuti, seda komplitseeritum on tema struktuur ja temas informatsiooni kodeerimise ja liikumise matemaatiline kirjeldamine, samal ajal kui arvutuste loogiline sügavus temas väheneb ja töö kiirus kasvab. Sobiva matemaatilise teooria puudumine keerukate automaatide kirjeldamiseks on kahtlemata oluliseks takistuseks teel võimsate ja mitmekesiseid inimaju funktsioone täitvate automaatide loomisele.

---

[5] Võimalusele selliselt toimida juhtis juba 1910. a. tähelepanu tuntud füüsik-teoreetik P. Ehrenfest. Et tol ajal praktika vajadused piirdusid üpris primitiivsete elektrivõrkude koostamisega, kus Boole'i algebrate kasutamine tundus naeruväärsena, jäi see ennatlik idee märkamatuks.

Juba W. McCullochi ja E. Pittsi uurimused näitasid, et formaalloogika meetodite rakendamine võib anda olulisi tulemusi aju tegevuse modelleerimisel. Automaatide ja loogika sisemise seostatuse tõttu peab teatav loogikasüsteem seisma automaate kirjeldavas teoorias kesksel kohal. Vaevalt võib siin läbi saada loogika traditsioonilise käsitlusega.[6] Näiteks juba seepärast, et täiuslikumad automaadid peavad olema võimelised teostama operatsioone, mis seisnevad analoogiate ja üldistuste realiseerimises. Pole alust arvata, et nende küsimuste matemaatiliseks käsitluseks sobivad loogika tuntud kontseptsioonid ja sümboolika. Ennemini tuleb näha väljapääsu kategooriate ja algebra struktuursete teooriate kasutuselevõtus, sest sarnasuse (ja seda peegeldava morfismi) idee on nende orgaaniliseks komponendiks. Teiste sõnadega, automaatide teooria seisukohalt tundub olevat oluline duaalsusprintsiibi[7] lülitamine loogikasse viimase orgaanilise koostisosana.

Käesoleva sajandi 30-ndail aastail viisid K. Gödeli tulemused loogika olulisse kokkupuutesse aritmeetikaga. Viimasel ajal on loogikas mitmel põhjusel hakanud kõlapinda leidma algebraline lähenemine, mis on täienduseks seni valitsevaks olnud aritmeetilisele vaatekohale. Näiteks sellisest lähenemisest on rekursiivsete funktsioonide teooria algebraline käsitlus A. Maltsevi ja S. Eilenbergi töödes. Võimalik, et aja möödudes toimub kõnesolnud kahe vaatekoha süntees uuel tasemel «aritmetiseeritud algebra» baasil, mis oleks aritmeetilise vaatekoha üldistuseks.

On ka oluline märkida, et formaalne loogika on oma lähenemise tõttu («kõik või mitte midagi»-printsiip) siiani suuresti ära lõigatud võimalusest kasutada matemaatika kõige arenenumat osa — matemaatilist analüüsi — ning kasutab meetodeid kombinatoorikast, valdkonnast, kus esinevad suured matemaatilised raskused. Samal ajal on analüütilises arvuteoorias ning diofantilises geomeetrias ammugi leitud teid pidevuse idee edukaks rakendamiseks loomult diskreetsete ülesannete lahendamisel. Võib väita isegi rohkemat, et kõige sügavamad tulemused nimetatud valdkondades on saadud just sellisel viisil (tihti algebra ja tõenäosusteooria vahendusel).

Antiikmaailma oluliseks saavutuseks oli polaarsuse «lõplik-lõpmatu» sügav käsitlus, mis (nüüd G. Cantori hulgateooriale tugineva) matemaatilise analüüsi tekkega muutus tunnetuse võimsaks vahendiks. Polaarsuse «pidev-diskreetne» sügavam ja täiuslikum ärakasutamine seisab aga alles ees. Et seda tänini veel vajalikul määral tehtud pole, on arvatavasti üheks põhjuseks, miks füüsikud saavad oma perspektiivuuringuis olemasolevast ja füüsikas kasutatavast matemaatikast veel liiga vähe rahuldust.

---

[6] Vt. ka П. Рашевский. О догмате натурального ряда. — Успехи матем. наук, 1973, № 4, стр. 243—246.

[7] Vt. artiklit «Galois' teooriast» käesolevas kogumikus, lk. 17—31.

Selle H. Weylile kuuluva mõtte arendamine tundub olevat vajalik mitmele rakendusi omavale matemaatika osale. Rakenduste nõudmised ning teooriate raskused on loonud situatsiooni, milles üha enam mõistetakse tekkinud ideede väärtust teel eesmärgile, millesse kirglikult uskus C. G. Jacobi: «Saabub aeg, millal matemaatilise analüüsi igast lausest järeldub mõni teoreem arvuteoorias ning iga seaduspärasus naturaalarvude vallas tekitab lause analüüsis.» Võimas toetuspunkt selliste vaadete tekkeks ja arenguks rajati L. Euleri töödes. Rida originaalseid kaalutlusi ülalöeldu kohta sisaldus J. Manini ettekandes «Füüsikaline ja matemaatiline kontiinuum — 20. sajandi ettekujutused», mis esitati 1973. a. matemaatika ajaloole pühendatud Tartu suvekoolis. Need tähelepanekud on kooskõlas J. Neumanni vaatega, mille kohaselt matemaatiline aparatuur keerukate automaatide uurimiseks peaks algama matemaatilisest loogikast ja liikuma algebra, tõenäosuse ja analüüsi struktuuride ning optika ja termodünaamika suunas (L. Boltzmanni poolt antud kujus on viimane paljus lähedane informatsiooni töötlemise ja mõõtmise teooriale). Sama vaatekoht kajastub ka V. Gluškovi ettekandes automaatide teooriale pühendatud konverentsil, mis toimus 27.—31. maini 1968. a. Taškendis. Nimelt V. Gluškovi arvates on matemaatikute põhitähelepanu kuni käesoleva sajandi lõpuni suunatud keerukate automaatide matemaatiliseks kirjeldamiseks vajaliku (formaalse) keele algebra ja topoloogia loomisele.[8]

Algebralisest meetodist automaatide teoorias

Mitmed kokkupuutepunktid automaatide teooria ja algebra struktuursete teooriate vahel olid teada üsna ammu. Nimelt osutub, et iga automaadiga on seotud teatav algebraline objekt, mille struktuuri teooria termineis võib leida vasteid automaadi ehitusega seotud küsimustele. Sellisel viisil toimides õnnestub saada ülevaadet kõikvõimalikest lõplikest automaatidest. Märgime olulist analoogiat Galois' teooriaga, kus algebralise võrrandiga seotakse rühm, mille teooria termineis leiab väljenduse võrrandi lahenduvus radikaalides. Kuigi kasutuselevõetud algebraline aparatuur on üpris tagasihoidlik, osutub vastava idee detailne realisatsioon küllalt komplitseerituks. K. Krohni ja J. Rhodesi uurimus[9] masinate algebralise teooria kohta, mis ilmus 1965. aastal, kujunes siin pöördeliseks sammuks. Järgnevas on ära toodud selle teooria põhijooni.

---

[8] Vt. ka artiklit В. Глушков. Абстрактная теория автоматов. — Успехи матем. наук, 1961, № 5, стр. 3—62.

[9] K. B. Krohn, J. L. Rhodes. Algebraic theory of machines, I. The main decomposition theorem. — Transactions of the American Mathematical Society, 1965, v. 116, pp. 456—464. Töö eeltrükis ilmus 1963. a.

1. Anname lõpliku automaadi täpse matemaatilise määratluse.

Definitsioon. *Lõplikuks automaadiks* e. *masinaks* nimetatakse süsteemi $M=(A, Q, B, \lambda, \delta)$, mis koosneb kolmest lõplikust hulgast A, Q ja B koos fikseeritud funktsioonidega λ: $Q\times A\to Q$ ja δ: $Q\times A\to$ B. Seejuures sisaldab hulk Q sellise elemendi p, et $\lambda(p, x)=p$ iga $x\in A$ korral.

Sisulise interpretatsiooni saamiseks automaadile M omistatakse definitsioonis esinevaile sümboleile järgmised tähendused:
A — sisendsignaalide hulk e. sisendtähestik,
B — väljundsignaalide hulk,
Q — olekute hulk, mille elementi p võib vaadelda kui peatust,
λ: $Q\times A\to Q$ — olekute teisendamist määrav funktsioon,
δ: $Q\times A\to B$ — funktsioon väljundsignaalide saamiseks.

Funktsioonide λ ja δ etteandmiseks kasutatakse sageli tabeleid. Seejuures on maatriksite $\|\lambda(q, x)\|$ ja $\|\delta(q, x)\|$ read indekseeritud hulga Q elementidega, veerud aga hulga A elementidega.

Näide 1. Esitame automaadi $M=(A, Q, B, \lambda, \delta)$ järgmiste andmete abil. Olgu $A=\{a, b\}$, $Q=\{q_0, q_1, q_2, p\}$, $B=\{0, 1, 2\}$ ning funktsioonide λ ja δ tabelid olgu järgmised:

λ	a	b	Λ
q_0	q_1	p	p
q_1	q_1	q_2	p
q_2	p	q_2	q_0
p	p	p	p

δ	a	b	Λ
q_0	1	0	0
q_1	0	1	0
q_2	0	0	1
p	2	2	2

Märgime, et tähestikule A on siis lisatud spetsiaalne sümbol Λ — «tühi sõna». Sellise toimingu eesmärk avaneb kahes järgmises punktis.

2. Automaati $M=(A, Q, B, \lambda, \delta)$ interpreteeritakse tavaliselt kui diskreetses ajaskaalas $T=\{0, 1, 2, \ldots\}$ töötavat süsteemi, mis, olles ajamomendil t olekus $q\in Q$ ja saades sisendsignaali $x\in A$, läheb momendil $t+1$ üle olekusse $\lambda(q, x)\in Q$ ning annab väljundile signaali $\delta(q, x)$. Automaadi funktsioneerimist võib ette kujutada järgmisel viisil. Loeme, et sisenev informatsioon on kantud lindile, mis on jaotatud pesadeks. Seejuures igas pesas asub kas tähestiku A mingi täht või on see tühi (sel korral lepime kokku lugeda, et selles pesas asub spetsiaalne sümbol Λ). Lindi järjestikustesse pesadesse olgu tähestikus A kirjutatud mingi lõplik sõna s ning sellest vasakul ja paremal olgu pesad tühjad (meie kokkuleppe kohaselt on neis sümbol Λ). Ajamomendil $t=t_0$ alustab M tööd situatsioonis, kus tema olek on q_0 (algolek) ja automaati siseneb sõna s kõige vasakpoolsem sümbol x_1. Järgmisel ajamomendil $t=t_0+1$ väljub automaadist M signaal $\delta(q_0, x_1)$ ning automaat läheb üle situatsiooni $(\lambda(q_0, x_1),\ x_2)$. Lint nihkub ühe pesa võrra vasakule. Automaadi edasine tegevus toimub vastavalt tema programmile, milleks on funktsiooni $q'=\lambda(q, x)$ tabel. Võrduse $\lambda(q, x)=q'$ vasak pool näitab, et ajamomendil t on automaat olekus q, ning saab sisendile signaali x. Käsu parem pool q' näitab automaadi olekut ajamomendil $t+1$. Kui automaat M, «lugenud» sõna s, jõuab situatsioonini (q_0, Λ), siis sõna s nimetatakse *lubatud sõnaks automaadi M tarvis.* Kõigi lõplike sõnade hulka (tähestikus A), mida lubab automaat M, nimetatakse *automaadi M poolt lubatud formaalseks keeleks.*[10] Üldisemalt nimetatakse formaalseks keeleks mingis tähestikus A selle tähestiku baasil saadud sõnade hulka. Formaalne keel, mis on lubatavaks keeleks mõnele lõplikule automaadile, kannab *automaadikeele* nime.

Näide 2. Olgu $A=\{a, b\}$. Formaalne keel

$$\{\underbrace{a\ldots a}_{m\text{ korda}}\underbrace{b\ldots b}_{n\text{ korda}} \mid m, n>0\}$$

on automaadikeel, sest ta on lubatavaks keeleks automaadile M, mida vaadeldi näites 1.

Osutub, et kaugeltki mitte kõik formaalsed keeled pole automaadikeeled.

3. Tähestikus A antud kõikvõimalike lõplike sõnade hulk $S(A)$ moodustab sõnade kokkukirjutamise («korrutamise») operatsiooni suhtes poolrühma $S(A)$, s. t. hulgal $S(A)$ antud algebraline operatsioon (sõnade konkatenatsioon) on assotsiatiivne. Loeme edaspidi, et poolrühma $S(A)$ kuulub ka «tühi sõna», mida tähistame Λ ja mis on poolrühmas $S(A)$ ühikuks kirjeldatud operatsiooni suhtes. Ühikuga poolrühmi nimetatakse ka *monoidideks.*

Teooria seisukohalt on oluline jätkata funktsioon $\lambda: Q\times A\to Q$ funktsiooniks $\lambda^*: Q\times S(A)\to Q$. Seda saab teha induktiivselt «töödeldavate» sõnade pikkuse järgi. Vastava definitsiooni formaliseeritud kuju on järgmine.

Kui $x\in A$, siis loeme $\lambda^*(q, x)=\lambda(q, x)$. Olgu funktsioon λ^* defineeritud kõigi sõnade $u\in S(A)$ korral, millede pikkus ei ületa n ning olgu $w=ux$ mingi sõna pikkusega $n+1$. Loeme, et

---

[10] Heaks sissejuhatuseks matemaatilisse lingvistikasse on raamat M. Гросс А. Лантен. Теория формальных грамматик. М., 1971. Selles on küllalt ula tuslikult ja heade näidetega illustreeritult käsitletud seoseid formaalsete keelte automaatide ja algebraliste teooriate vahel.

$\lambda^*(q, w) = \lambda(\lambda^*(q, u), x)$. Analoogiliselt ülaltoodule laiendatakse ka väljundfunktsiooni määramispiirkond hulgale $Q \times S(A)$, mistõttu jätkatud funktsioon δ^* rahuldab tingimust $\delta^*(q, uv) = \delta(\lambda^*(q, u), v)$ kõigi sõnade $u, v \in S(A)$ korral. Edaspidi on otstarbekas funktsioone λ^* ja δ^* tähistada uuesti sümbolitega λ ja δ.

Illustratsiooniks funktsioonide λ^* ja δ^* definitsioonidele esitame siin nende funktsioonide mõned väärtused automaadi korral, mida vaatlesime näites 1:

$$\lambda^*(q_0, aaa) = q_1, \quad \lambda^*(q_0, aabbb) = q_2, \quad \lambda^*(q_2, a) = p,$$
$$\delta^*(q_0, aaa) = 0, \quad \delta^*(q_0, aabbb) = 0, \quad \delta^*(q_0, a) = 1.$$

Nende arvutuste õigsuses on kerge veenduda, kasutades näites 1 toodud tabeleid.

4. Olgu antud automaat $M = (A, Q, B, \lambda, \delta)$, mis fikseeritud ajamomendil $t \in T$ on olekus q. Automaadi M edasist käitumist iseloomustab funktsioon $f: S(A) \to B$, mis iga $u \in S(A)$ korral antakse valemiga $f(u) = \delta(q, u)$. Võivad muidugi leiduda automaadi M sellised erinevad olekud q ja r, et $\delta(q, *) \equiv \delta(r, *)$. Kui aga selline olukord aset ei leia, siis kõneldakse *taandatud automaadist* M. Osutub, et iga automaadiga M saab siduda taandatud automaadi $M' = (A, Q', B, \lambda', \delta')$, mis on *ekvivalentne* automaadiga M järgmises mõttes: iga oleku $q \in Q$ korral leidub selline olek $r \in Q'$, et $\delta(q, *) = \delta'(r, *)$ kui funktsioonid hulgal $S(A)$.

Iga sõnaga $u \in S(A)$ seome vasaknihke $l_u: S(A) \to S(A)$, funktsiooni, mis kõigi $v \in S(A)$ korral antakse valemiga $l_u(v) = uv$. Suvaliste u, v, $w \in S(A)$ korral kehtib seos $l_u l_v(w) = l_{uv}(w)$.

Automaadi $M = (A, Q, B, \lambda, \delta)$ baasil ehitame automaadi $M(f) = (A, Q_f, B, \lambda_f, \delta_f)$, mille olekute hulgaks on

$$Q_f = \{g: S(A) \to B \mid g = f l_u \text{ mingi } u \in S(A) \text{ korral}\}.$$

Funktsioonid λ_f ja δ_f antakse järgmiste valemitega:

$$\lambda_f(g, v) = g l_v, \quad \delta_f(g, v) = g(v).$$

Siin tähistavad $f l_u$ ja $g l_u$ funktsioone $S(A) \to B$, mille väärtusi sõnal $w \in S(A)$ arvutatakse vastavalt valemite $f l_u(w) = f(uw)$ ja $g l_u(w) = g(uv)$ järgi.

Et paremini mõista automaadi $M(f)$ loomust, teeme järgmised tähelepanekud.

Esiteks, iga $u \in S(A)$ korral kehtib võrdus $f l_u(*) = \delta(\lambda(q, u), *)$. Tõepoolest, suvalise $v \in S(A)$ korral kehtivad seosed

$$f l_u(v) = \delta(q, l_u(v)) = \delta(q, uv) = \delta(\lambda(q, u), v),$$

millest järeldub soovitud võrdus.

Teiseks kehtib seos $\delta_f(g, v) = \delta(q, uv)$, sest $\delta_f(g, v) = g(v) = = fl_u(v) = f(uv) = \delta(q, uv)$. Märgime veel, et $\lambda_f(g, v) = gl_v = = fl_u l_v = fl_{uv} = \delta(q, l_{uv}(*))$.

Kolmandaks näitame, et $M(f)$ on taandatud automaat. Selleks piisab näidata, et seosest $\delta_f(g', *) = \delta_f(g, *)$ järeldub $g'(*) = g(*)$. Olgu $g = fl_u$, $g' = fl_w$, $u, w \in S(A)$ ja $v \in S(A)$ olgu suvaline sõna. Oletame, et $\delta_f(g', *) = \delta_f(g, *)$. Kehtivad järgmised võrdused:

$$g'(v) = fl_w(v) = \delta(q, wv) = \delta_f(g', v) = \delta_f(g, v) = \delta(q, uv) = \\ = fl_u(v) = g(v).$$

Neist järeldub, et $g' = g$. Väide on tõestatud.

Toodud arutlused näitavad, et automaadi $M(f)$ olekute hulka Q_f võib vaadelda olekust $f(*) \in Q_f$ lähtuva trajektoorina, milles iga olek on «saavutatav» olekust $f(*)$. Automaadi $M(f)$ seos automaadiga M kajastub selles, et samastanud oleku $f(*) \in Q_f$ olekuga $q \in Q$, me võime hulka Q_f vaadelda kui kõigi nende olekute alamhulka hulgas Q, mis on «saavutatavad» olekust q ning milles on samastatud igasugused kaks olekut, millest edasi on automaadil M ühesugune käitumisjoon.

5. Automaadi $M(f)$ sisendsõnade monoidil $S(A)$ on antud järgmine (Myhilli) ekvivalents $\equiv_f$:

$$v \equiv_f v' \Longleftrightarrow \forall u, w \in S(A),\ f(uvw) = f(uv'w).$$

Teisiti öeldes, sõnad v ja v' on ekvivalentsed parajasti siis, kui funktsioon f teisendab neid ühesugustes kontekstides ühtmoodi. Myhilli ekvivalents monoidis $S(A)$ on stabiilne sõnade korrutamise suhtes, s. t. suvalise $u \in S(A)$ korral järelduvad seosest $v \equiv_f v'$ seosed $vu \equiv_f v'u$ ja $uv \equiv_f uv'$. See omadus võimaldab kahe ekvivalentsiklassi korrutiseks lugeda ekvivalentsiklassi, kuhu kuulub tegureiks olevate klasside suvaliste esindajate korrutis. Tekib poolrühm, mille elementideks on Myhilli ekvivalentsi klassid. Seda klasside poolrühma S_f nimetatakse automaadi $M(f)$ poolrühmaks.

Arvutame näitena trigeri poolrühma.

Triger on automaat $M = (A, Q, Q, \lambda, \lambda)$, kus $A = \{x_0, x_1\}$, $Q = = \{q_0, q_1\}$ ja funktsioon λ antakse tabeliga

λ	x_0	x_1	Λ
q_0	q_0	q_1	q_0
q_1	q_0	q_1	q_1

Seega triger on automaat, mille sisendtähestik ja olekute hulk on kaheelemendilised hulgad ning mille korral funktsioonid $\lambda(q, *)$ ja $\delta(q, *)$ ühtivad, s. o. trigeri väljundsignaal ajamomendil t identifitseeritakse tema olekuga sellel ajamomendil. Funktsiooni λ defineerivast tabelist nähtub, et signaal x_i toob trigeri olekusse q_i sõltumata tema eelnevast olekust.

Trigeri poolrühma saame järgmisel viisil. Võtame $f(*) = \lambda(q_0, *)$. Kongruentsi $\equiv_f$ definitsioonist nähtub, et seos $v \equiv_f v'$ kehtib parajasti siis, kui kõigi $u, w \in S(A)$ korral $\lambda(q_0, uvw) = \lambda(q_0, uv'w)$. Et funktsioon λ omandab vaid kaht erinevat väärtust, siis saame kaks ekvivalentsi $\equiv_f$ klassi $[x_0]$ ja $[x_1]$. Esimesse neist kuuluvad kõik need sõnad hulgast $S(A)$, mille lõputäheks on x_0, teise aga kõik sõnad lõputähega x_1. Neile kahele klassile lisame veel «tühjale sõnale» Λ vastava klassi $[\Lambda]$. Et ekvivalentsiklasside korrutamine defineeritakse nende esindajate korrutamise kaudu, siis nähtub trigeri definitsioonist, et klasside $[x_0]$, $[x_1]$ ja $[\Lambda]$ korrutamine toimub tabeli

$$t \cdot 1 = 1 \cdot t = t, \qquad t \cdot [x_i] = [x_i]$$

järgi. Selles tabelis oleme tähistanud tähega t suvalist klassidest $[\Lambda]$, $[x_0]$ või $[x_1]$ ning $1 = [\Lambda]$.

6. Suvalise monoidiga S saab siduda automaadi $M(S) = (S, S, S, \lambda, \delta)$, kus funktsioonid λ ja δ antakse poolrühma S korrutamise kaudu järgmisel viisil:

$$\lambda(q, u) = \delta(q, u) = q \cdot u \in S \text{ kõigi } q, u \in S \text{ korral.}$$

Kui rakendada seda konstruktsiooni monoidile S_f, saame automaadi $M(S_f)$. Osutub, et viimane modelleerib automaadi $M(f)$ käitumist halvasti. Seepärast täiustame $M(S_f)$ konstruktsiooni.

Funktsiooni $i_f : S_f \to B$ anname valemiga $i_f(s) = f(u)$, kus s tähistab ekvivalentsiklassi $[u]$. Et i_f väärtus ei sõltu esindaja $u \in S(A)$ valikust klassis s, siis on antud definitsioon korrektne. Automaadiks, mille käitumisjoon on «lähedane» $M(f)$ omale, on

$$M(S_f, i_f) = (S_f, S_f, B, \lambda, \delta), \text{ kus}$$

$$\lambda(s, s') = s \cdot s' \quad \text{ja} \quad \delta(s, s') = i_f(s \cdot s').$$

Automaat $M(S_f, i_f)$ on lähedane automaadile $M(f)$ järgmises mõttes: automaadile $M(S_f, i_f)$ on võimalik (vajaduse korral) lisada sisendsignaalide kodeerija ja tema väljundsignaalide dekodeerija niiviisi, et $M(f)$ iga oleku tarvis leidub $M(S_f, i_f)$ taoline olek, millest tööd alustanud automaat $M(S_f, i_f)$ teisendab sisendsignaale samamoodi kui $M(f)$. Sel korral kõneldakse, et $M(S_f, i_f)$ on *automaadi* $M(f)$ *mudeliks*. Et automaatide $M(S_f, i_f)$ ja $M(f)$ osi võib vaadeldavas situatsioonis vahetada, siis on automaadid $M(S_f, i_f)$ ja $M(f)$ *kvaasiekvivalentsed*.

7. Millist informatsiooni automaadi $M(f)$ kohta kannab endas paar (S_f, i_f) ning kuidas seda informatsiooni ära kasutada automaadi $M(f)$ uurimisel?

Mida ulatuslikumaks lähevad automaatseadmete poolt täidetavad funktsioonid, seda rohkem kasvavad tema blokkide mõõtmed ja hierarhilise struktuuri keerukus. See tendents tingib seadmete konstrueerimise mitmes järgus: algul leitakse automaadi blokkide struktuur ning seejärel automaadi optimaalne blokkstruktuur. Taoliselt tuleb tihti toimida keerukamate automaatseadmete loomisel, mistõttu on põhjust nende küsimuste teoreetiliseks käsitluseks — vastava valdkonnaga tegeleb automaatide dekompositsiooni ja sünteesi teooria.

Automaadi tükeldamine «ehituskivideks» on teostatav eri mõõtkavades. Arvuti ehituskivideks võib lugeda nii tema pooljuhtdetaile kui ka masina terveid sõlmi, aju uurimisel aga kas terveid aju piirkondi või siis eri neuroneid. On selge, et optimaalse mõõtkava valik on eduka dekompositsiooni ja sünteesi teooria eelduseks. Ehituskivide klassifikatsioon ja nende omaduste kindlakstegemine nõuab alati erialaseid teadmisi valdkonnas, kuhu need objektid kuuluvad. Eksperimentaalsetele uurimustele lisanduvad siin alati ka matemaatilised meetodid, kus loogika ja algebra vahendeil on küllalt eriline koht.

Artikli esimeses osas oli juttu McCullochi ja Pittsi uurimustest närvivõrkude kohta. Et iga formaalset närvivõrku võib käsitleda lõpliku automaadina, see selgub otse vastavaist definitsioonidest. Võimalus iga lõpliku automaadi käitumisjoone realiseerimiseks mingis formaalses närvivõrgus on aga mõneti üllatav. See McCullochile ja Pittsile kuuluv tulemus lahendab küsimuse automaadi dekompositsioonist, kui tema algblokkide (neuronite) ühendamisel on lubatud tsüklid (neuronite ühendamisel võrguks võivad esineda kuitahes keerulised tsüklid). Praktikas aga esitatakse automaatide (või nende blokkide) omavahelise ühendamise tüübile mitut laadi kitsendusi, mis taolisi tsükleid välistavad. Tihti leiavad kasutamist automaatide järjestikune või paralleelne ühendus, mõni nende kombinatsioon jms. Mitmete sedalaadi ühenduste omadused kajastuvad *automaatide kaskaadi* mõistes. Tutvumegi nüüd selle olulise mõistega.

Vaatleme automaati $M=(A, Q, B, \lambda, \delta)$, mille olek antud ajamomendil määrab ära väljundsignaali samal ajamomendil, s. o. leidub funktsioon $\beta: Q \to B$, milles $\delta(q,x) = \beta(\lambda(q,x))$. Niisugust automaati nimetatakse «olek-väljund»-automaadiks e. *Moore'i automaadiks*. Näiteks Moore'i automaadist on meile juba tuttav triger. Teise tähtsa näitega (PR-automaat) tutvub lugeja järgmises punktis.

Olgu antud kaks Moore'i automaati $M=(A, Q, B, \lambda, \beta)$ ja $M'=(A', Q', B', \lambda', \beta')$, teatav tähestik Z ja suvalised funktsioonid $\sigma: Z\times B \to A'$ ja $\varkappa: Z \to A$. Kodeerija $\varkappa$ teisendab iga signaali hulgast Z automaadile M vastuvõetavaks signaaliks. Kodeerija σ teisendab signaalide paarid, milles esimene komponent on mingi signaal hulgast Z ja teine komponent automaadi M mingi väljundsignaal, vastuvõetavaiks signaalideks automaadile M'.

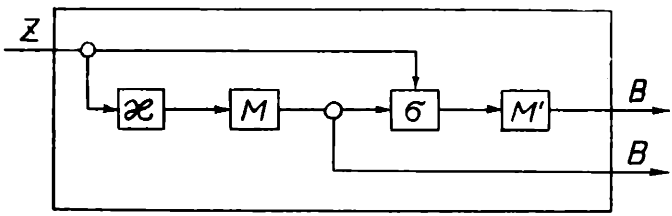
Automaadi M ja M' kaskaad on automaat

$$M' \bigcirc M = (Z,\ Q' \times Q,\ B' \times B,\ \lambda^*,\ \beta^*),$$

mille oleku- ja väljundfunktsioonid on antud valemitega

$$\lambda^*((q',q),z) = (\lambda'(q',\sigma(z,\beta(q))),\lambda(q,\varkappa(z))),$$
$$\beta^*(q',q) = (\beta'(q'),\beta(q)).$$

Automaadi $M' \bigcirc M$ tööd illustreerib joonisel 1 näidatud skeem.



Joonis 1.

Erijuhul, kui leidub funktsioon $\tau : B \rightarrow A'$, et $\sigma(z,y) = \tau(y)$ kõigi $z \in Z$ ja $y \in B$ korral, on tegemist automaatide M ja M' järjestikuse ühendamisega. Paralleelse ühendamisega on tegemist juhul, kui leidub funktsioon $\tau : Z \rightarrow A'$, et kõigi $z \in Z$ ja $y \in B$ korral kehtiks $\sigma(z,y) = \tau(z)$. Automaatide kaskaadi mõistet illustreerib ka järgmises punktis toodud lause tõestus.

8. Automaatide dekompositsiooni teooria põhitulemuseks on **Krohn-Rhodesi teoreem,** mille kohaselt *iga lõplik automaat on modelleeritav trigerite ja teatavaile lõplikele lihtsatele rühmadele G vastavate automaatide $M(G)$ kaskaadiga.* Sel puhul kõneldakse ka, et automaat *kaskadeerub* nende automaatide komplektiks.

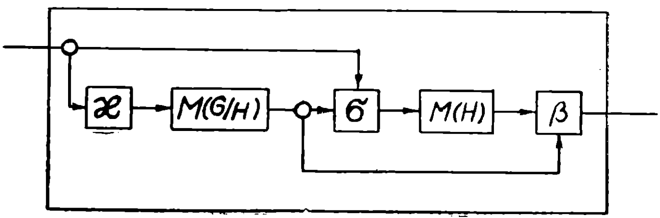
Kõige huvipakkuvam tee selle tulemuse juurde kuulub H. Zeigerile.[11] Tsentraalsel kohal on seejuures *PR-automaa*di mõiste. Niisugust nimetust kannab Moore'i automaat, milles iga sisendsignaal kutsub esile kas substitutsiooni olekute hulgal või siis viib automaadi olekusse, mis selle sisendsignaali jaoks on fikseeritud (s.o. ei sõltu automaadi olekust enne sisendsignaali saamist). Definitsioonist järeldub, et iga *PR*-automaadiga on seotud teatav substitutsioonirühm tema olekute hulgal. Osutub, et taoliste

[11] Vt. H. P. Z e i g e r i artiklit «Cascade decomposition of automata using covers» kogumikus «Algebraic theory of machines, languages and automata». Academic Press, 1968.

automaatide komplekt on piisav suvalise lõpliku automaadi ehitamiseks. Täpsemalt, kehtib

Zeigeri teoreem. *Iga lõplikku automaati saab esitada PR-automaatide kaskaadina.*

Selle teoreemi tõestus on küllalt komplitseeritud. Oluline on märkida, et seejuures kasutatav katete (e. mosaiikpildi) meetod on arvatavasti kohandatav teatavat tüüpi ülesannete matemaatiliseks käsitlemiseks bioloogias. Teekond Zeigeri teoreemilt Krohn-Rhodesi tulemuste juurde koosneb kahest etapist. Esimesel neist näidatakse, et iga PR-automaat on modelleeritav oma substitutsioonirühmale G vastava automaadi $M(G)$ ja teatava automaadi K kaskaadiga, kusjuures K omakorda kaskadeerub trigeriteks. Teisel etapil seostatakse automaadiga $M(G)$ teatav komplekt lõplikke lihtsaid rühmi. Neis mõttekäikudes on oluline osa täita rühma kompositsioonijada mõistel ja Jordan-Hölderi teoreemil.[12] Et rühma G kompositsioonijada faktorid on lihtsad rühmad, siis ülalnimetatud tulemusteni jõudmiseks piisab, kui tõestada järgmine tulemus.



Joonis 2.

Lemma. *Olgu $M=M(G)$ automaat, mis vastab lõplikule rühmale G. Automaat M kaskadeerub rühma G kompositsioonijada faktoreile vastavateks automaatideks.*

Tõestus. Näitame algul, et iga lõpliku rühma G ja tema normaaljagaja $H<G$ korral kaskadeerub automaat $M(G)$ automaatideks $M(H)$ ja $M(G/H)$. Selleks vaatleme joonisel 2 esitatud skeemi.

Rühma G orbiitidel Hg fikseerime (suvaliselt) esindajad. Edaspidi g' tähistabki orbiidi Hg väljavalitud esindajat. Toodud skeemi töö kulgeb järgmiselt.

Ajamoment t:

Sisendile ilmub signaal $g_2 \in G$,

$M(G/H)$ on olekus Hg_1,

$M(H)$ on sellises olekus $h_1 \in H$, et $h_1 g'_1 = g_1$.

[12] Vastavate küsimuste kompaktse esituse automaatide teoorias vajalikul lõplike rühmade juhul võib leida raamatust G. Kangro. Kõrgem algebra, II. Tln., 1950. Käesolevas artiklis kasutatud mõisted rühmateooriast on esitatud ka artiklis U. Kaljulaid. Lisateadmisi rühmadest. — Matemaatika ja kaasaeg, XVII, 1970, lk. 7—22.

Ajamoment $t+1$: kodeerija $\varkappa$ teisendab signaali g_2 signaaliks Hg_2 (siinjuures $Hg'_2=Hg_2$ elemendi g'_2 valiku tõttu). Automaadi $M(G/H)$ töötades tekib signaal $Hg'_1 \cdot Hg'_2=Hg'_1 \cdot g'_2=H(g'_1 \cdot g'_2)'$, mis läheb kodeerijale «β». Samal ajal läheb automaadi $M(G/H)$ väljundil olnud Hg'_1 koos signaaliga g_2 kodeerijale «σ». Kodeerija σ tegutsemisprintsiip on selline:

$$\sigma:(g_2,\ Hg'_1) \to g'_1 g_2[(g'_1 g'_2)']^{-1}=h \in H.$$

Saadud signaal $h \in H$ läheb nüüd $M(H)$ peale, mis on olekus h_1. Automaadi $M(H)$ töötades saame

$$h_1 \cdot h=h_1 g'_1 g_2[(g'_1 g'_2)']^{-1}=g_1 g_2[(g'_1 g'_2)']^{-1}.$$

Kodeerija β teisendab signaalide paare järgmise reegli kohaselt:

$$\beta:(H(g'_1 g'_2)',\ h_1 h) \to h_1 h (g'_1 g'_2)'=$$
$$=g_1 g_2[(g'_1 g'_2)']^{-1} \cdot (g'_1 g'_2)'=g_1 g_2.$$

Need arvutused näitavad, et tõestuse algul toodud väide kehtib. Teoreemi tõestame nüüd induktsiooniga rühma G kompositsioonijada pikkuse järgi (taolise jada pikkusest kui rühma G invariandist saab rääkida Jordan-Hölderi teoreemi tõttu). Kui G on lihtne rühm, siis on teoreemi kehtivus ilmne. Alternatiivsel juhul on rühmal G mittetriviaalne kompositsioonijada

$$G=G_0>G_1>\ldots>G_{k-1}>G_k=(1).$$

Olgu väide tõestatud kõigi rühmade G tarvis, mille kompositsioonijada pikkus on $\leqslant k-1$. Tõestuse algul toodud arutlus näitab, et $M(G)$ kaskadeerub automaatideks $M(G/G_1)$ ja $M(G_1)$. Et aga $M(G_1)$ kaskadeeruvus kompositsioonijada faktoreile G_1/G_2, $G_2/G_3, \ldots, G_{k-1}/G_k=G_{k-1}$ vastavaiks automaatideks tuleneb indutsiooni eeldusest, siis näeme, et vajalik kaskaad automaadi $M(G)$ tarvis on saadud. Teoreem on tõestatud.

9. Trigereid võib lugeda automaadi piisavalt lihtsateks ehitusblokkideks. Kuid mida öelda lõplikele lihtsatele rühmadele G vastavate automaatide kohta? Kui meil oleks teada kõigi lõplike lihtsate rühmade tabel ja vajalikud omadused, siis oleks Krohn-Rhodesi teoreemiga antud automaatide dekompositsiooni ülesandele rahuldav lahendus. Taolist tabelit aga pole.[13] Seetõttu

---

[13] Lõplike lihtsate rühmade klassifikatsiooniga tegeldakse ligi 70 aastat. Esialgu leiti taoliste rühmade terveid seeriaid, hiljem aga individuaalseid väga suurt järku rühmi. Näiteks 1973. a. suvel Iirimaal (Galways) toimunud konverentsil arvutite rakenduste kohta algebras käsitles M. Hall rühma järguga 460 815 505 920, mille lihtsuse peab otsustama arvuti. Asi on selles, et on võimalik anda algoritmi, mis rühma Cayley tabelit kasutades teeb kindlaks rühma lihtsuse. Taolise lähenemise ilmseks puuduseks on kriteeriumi puudumine, mis otsustaks, kas juba koostatud nimekiri sisaldab kõiki lihtsaid lõplikke rühmi või mitte. Küsimus sellise kriteeriumi olemasolust on raske.

tekib mõte otsida lihtsamaid ehituskive, kui seda on lihtsatele rühmadele G vastavad automaadid $M(G)$. Selleks oleks vaja automaati $M(G)$ edasi kaskadeerida. Automaatide kaskaadi ja tema poolrühma seoste täpsem uurimine näitab, et taoline soov pole teostatav.

Nimetame automaati M *mittekaskadeeruvaks*, kui iga kord, kui teda modelleerib automaatide M_1 ja M_2 kaskaad (vastavalt poolrühmadega S_1 ja S_2), järeldub sellest, et kas $M(S_1)$ modelleerib automaati M, või siis $M(S_2)$ modelleerib automaati M.

Automaadi mittekaskadeeruvuse küsimuse algebralist käsitlust võimaldavad järgmised kaks mõistet.

Definitsioon A. Olgu S_1 ja S_2 poolrühmad ning $\sigma: S_1 \to \to \mathrm{End}(S_2)$ olgu monoidi S_1 homomorfism monoidi S_2 endomorfismide poolrühma. Siis *poolotsekorrutis* $S_2 \Delta_\sigma S_1$ on kõikvõimalike paaride $\in S_2 \times S_1$ hulk, milles tehe (paaride korrutamine) on antud reegliga

$$(s_2, s_1) \cdot (s'_2, s'_1) = (s_2 \cdot \sigma_{s_1}(s'_2), \ s_1 \cdot s'_1).$$

Definitsioon B. Poolrühm S on *atomaarne*, kui kõikvõimalike homomorfismide $\sigma: S_1 \to \mathrm{End}(S_2)$ korral seosest $S \mid S_2 \Delta_\sigma S_1$ järeldub $S \mid S_1$ või $S \mid S_2$. (Siinjuures tähistus $P \mid Q$ näitab, et poolrühm P jagab poolrühma Q järgmises mõttes: leidub taoline alampoolrühm $Q_1 \subset Q$, mida saab poolrühmale P epimorfselt kujutada.)

Osutub, et *automaat on mittekaskadeeruv parajasti siis, kui tema poolrühm on atomaarne*. See tulemus on oluline, sest ta kannab automaadi mittekaskadeeruvuse kindlakstegemise ülesandega seotud raskused algebra valda. Mõneti oodatud faktiks on trigeri poolrühma atomaarsus. Lihtsate rühmade atomaarsus tehakse kindlaks üpris suure loogilise sügavusega algebraliste arutlustega. Seega Krohn-Rhodesi teoreemis saadud ehituskivide edasine peenendamine pole võimalik, mistõttu ülevaade kõikvõimalikest lõplikest automaatidest on sellise teooria raames oluliselt seotud lõplike lihtsate rühmade klassifikatsiooniga.

20. Podstamis 1970. a. toimunud rahvusvahelisel konverentsil universaalalgebrate ja nende rakenduste kohta näitas S. Eilenberg uue tee Krohn-Rhodesi tulemuste juurde. S. Eilenbergi poolt teostatud sammul Krohn-Rhodesi tulemuste esitamisel on umbes samasugune toime automaatide teooriale, nagu on seda Galois' teoorias üleminekul võrrandeilt korpuse laiendite uurimisele — see toob kaasa teooria avardumise ja selginemise.

Automaatide teooria ideed on leidnud olulisi rakendusi arvutite skeemide projekteerimise formaliseeritud meetodite loomisel, aga samuti programmeerimise teoreetiliste küsimuste lahendamisel. Väärib erilist tähelepanu ka asjaolu, et Krohn-Rhodesi algebralisest dekompositsiooni teooriast pärinenud kontseptsioonid võimaldasid

R. Kalmanil viia aastail 1962—1967 läbi «algebralise reformi» lineaarsete dünaamiliste süsteemide teoorias, mistõttu see optimaalse juhtimise teooria valdkond muutus eriti reljeefseks, ning on võimalik teooria kiire edasine täiustumine ja laienemine.

On kahtlemata õige, et suurimad edusammud algebras on alati olnud seotud võimalusega tema teooriate sisemiseks arenguks. Seda enam on vaja kasutada võimalusi saadud tulemuste rakendamiseks väljapoole traditsioonilisi piire. Analüütiline küberneetika annab selleks suurepärase võimaluse. Ei või loota, et kõik algebra osad, mis seesuguste uurimuste käigus vajalikuks võivad osutuda, on loodud. Samuti ei tundu tõepärane olevat, et vajalik aparatuur võiks neis puhtalgebraline olla, kuigi on õige, et algebral on igasugustes struktuursetes teooriates alati fundamentaalne osa. Ennemini tuleks olemasolevaid algebra teooriaid ja fakte käsitada kui algmaterjali keele loomisel, mis on adekvaatne keerukate automaatide matemaatilisel kirjeldamisel.

KULDSEID MÕTTEID MATEMAATIKAST

Inimese poolt loodud paljude teaduslike distsipliinide hulgas on üks, mis nimetab end teaduseks. See «teadus» on matemaatika, sest $\mu\alpha\vartheta\eta\mu\alpha$ tähendab kreeka keeles teadust. Tõeline matemaatika austaja lausub selle sõna sügava lugupidamisega.

*

Matemaatika võib toime tulla peaaegu täielikult ilma sõnadeta. Tema jaoks pole olemas keelebarjääre, sest tema keel nagu ka muusika keel on arusaadav kogu inimkonnale.

Matemaatika universaalseks kuldvõtmeks on võrrand. Selle abil avastas Archimedes kuritarvitamise krooni valmistamisel Sürakuusa kuningale. Võrrandid võimaldasid muiste Egiptuse preestritel ennustada Päikese varjutusi ja Siiriuse tõusu. Neid kasutasid Kopernik ja Galilei, Newton, Descartes, Einstein . . .

*

Pärast tähtsaimate loodusteaduste — füüsika ja keemia ning majandusteaduse täielikku allutamist tungib matemaatika tänapäeval teadusaladele, mis talle varem olid suletud — humanitaarteadustesse ja kunsti, relvastades neid kaasaegsemate ja objektiivsemate tunnetusmeetoditega.

С. Коваль. От развлечения к знаниям. Varssavi, 1972, lk. 475.

ARVUTUSKESKUSED EESTI NSV-s

J. Tapfer

1974. aasta algul möödus 15 aastat esimese arvutuskeskuse loomisest Eesti NSV-s. Pilgu heitmiseks läbikäidud aastatele ning mõningase ülevaate hankimiseks ENSV arvutuskeskustest ja nende töösuundadest saatis «Matemaatika ja kaasaja» toimetus arvutuskeskustesse vastavad küsitluslehed. Arvutuskeskuste hulka loeti sealjuures ka need üksused, mis kannavad küll teisi nimesid, kuid täidavad arvutuskeskuste funktsioone ja omavad või saavad peatselt elektronarvuti (näit. arvutustehnika talitus «Eesti Energias», arvutuste mehhaniseerimise osakond «Eesti Tööstusprojektis», mitmed sektorid, arvutusgrupid, laboratooriumid ning isegi nimetu üksus Tallinna Pedagoogilises Instituudis). Küsitluslehtedele vastas enamik arvutuskeskusi. Arvestades aga mõnede vastuste laekumatajäämist ja hoopis uute arvutuskeskuste loomist, ei pretendeeri alljärgnev kirjutis täielikule analüüsile ei keskuste arvus ega töösuundade osas.

Nagu juba mainitud, võib arvutuskeskuste ajalugu ENSV-s lugema hakata 1959. aastast, mil loodi esimene arvutuskeskus Tartu Riikliku Ülikooli geomeetria kateedri juurde. Esimeseks arvutiks oli «Ural-1». Juba järgmisel aastal loodi Tallinnas teine — Küberneetika Instituudi Arvutuskeskus arvuti «M-3» baasil. Edasi järgnes kolmeaastane vaikuseperiood ning alles aastatel 1964—1968 muretsesid endale arvutid «Eesti Tööstusprojekt», Nõo Keskkool, ETKVL, MMKI Eesti filiaal, TPI, Eesti Raadio, Eesti Maaviljeluse ja Maaparanduse Teadusliku Uurimise Instituut.

Järgnevaid aastaid 1969—1971 võib lugeda arvutuskeskuste tekkimise buumiaastateks. Igal aastal loodi nüüd juba 4—6 uut keskust. Paaril viimasel aastal on kasvutempo mõnevõrra stabiliseerunud — ainult 2—4 keskust aasta kohta. Siit järeldub ka põhjus, miks käesolevas artiklis pole võimalik nimetada arvutuskeskuste täpset arvu vabariigis käesolevaks momendiks. Kindlasti aga küünib see arv juba neljandasse kümnesse.

Arvutuskeskuste loomine on olnud tihedalt seotud arvutite soetamise võimalustega. 1959. kuni 1968. aastani oli vabariiki saabunud arvutite nomenklatuur üpris kirju («Ural-1», «M-3», «Ural-4», «Minsk-2», «Ural-11», «Minsk-22», «Nairi», «Minsk-32» ja mõni spetsiaalarvuti). Järgnevatel aastatel seevastu ilmneb juba «Minsk»-tüüpi arvutite ülekaal. Arvuti «Minsk-22» oli ainuvalitseja 1969. aastal, aastail 1970—1971 lisandusid veel «Nairi»- ja «Mir»-tüüpi väikearvutid. Nende hulka eksis vaid Eesti Raadio «Razdan-3» ja paar «Minsk-32». Alates 1972. aastast ilmuvad juba valdavalt arvutid «Minsk-32» ja «Nairi», mis ongi praeguseks levinumad tüübid. Teatepulka on üle võtmas EC-tüüpi arvutid, millistest on saabunud ja saabumas: 1010 Eesti Raadio Arvutuskeskusesse ning Keemia Instituuti, 1020 Tallinna Polütehnilisele Instituudile jt. Olgu muuseas mainitud, et ikka veel töötab ka vabariigi esimene arvuti «Ural-1» Nõo Keskkooli arvutuskeskuses.

Arvutuskeskusi omavad asutused võib tinglikult jagada kahte rühma: esimesse rühma kuuluvad need, kus arvutuskeskused täidavad põhiliselt õppe- ja teadusliku töö ülesandeid, ning teise rühma kõik ülejäänud. Täiesti seaduspäraselt tegid arvutuskeskuste loomisega algust just õppe- ja teadusliku uurimise asutused — TRÜ, Küberneetika Instituut, Nõo Keskkool jne. Käesoleval ajal on ENSV kuuest kõrgemast õppeasutusest oma arvuti juba neljal. Arvutuskeskus on peale selle veel kaheksal teadusliku uurimise instituudil ja ühel keskkoolil.

Teise rühma kuuluvad väga mitmesugused arvutit omavad asutused, ettevõtted ja organisatsioonid: ministeeriumid, Plaanikomitee, Statistika Keskvalitsus, Põlevkivi Kombinaat, samuti mõned tehased: Tallinna Ekskavaatoritehas, «Dvigatel», Tartu Aparaadiehituse Tehas jt. Selle rühma arvutuskeskused on loodud vastavate asutuste tegevuse mõningate sfääride automatiseerimiseks.

Esimese rühma arvutuskeskuste koosseisude suurus on varemloodutel 30—50 töötajat (TRÜ — 50, Küberneetika Instituut — 44, EPA — 40, EMMTUI — 39, TUPTI — 39, TPI — 35 jne.), hilisematel enamikus alla 10 (TPedI — 3, Põlevkivi Instituut — 4, Keemia Instituut — 8 jne.). Teise rühma arvutuskeskused on aga hoopis suuremad (Autotranspordi ja Maanteede Ministeerium — 243, Sideministeerium — 117, ETKVL — 111, Kergetööstuse Ministeerium — 85, Plaanikomitee — 70, Metallitoodete Varustuse EV Valitsus — 70 jne.) ning nad on paremini varustatud kaasaegsema arvutustehnikaga. Mitmetel praegu veel väikestel arvutuskeskustel on plaanis töötajate arvu peatselt tõsta ülalnimetatute tasemele.

Arvutuskeskuste tarkvara analüüsides torkab silma masinkoodi suur ülekaal arvutite «Minsk-22» ja «Nairi» korral (kuni 90%). Keeltest on enam levinud MALGOL (TPI — 65%, AAI — 70% ja märgitud mitmel teisel pingerea esimesena). Kasutatavuselt järgmiseks osutub VELGOL (EMMTUI, Sideministeerium, Küberneetika Instituut, Plaanikomitee jt.). Arvutile «Minsk-32» programmeeritakse SSK-s 50—70% ulatuses. Keeltest on kasutusel «Minsk-22» režiimis MALGOL ja VELGOL. Viimasel ajal on elavat huvi tuntud FORTRAN-i äsja valminud variandi vastu, ALGAMS-i kasutuselevõtt aga alles algab.

Keskmiselt kasutatakse igas arvutuskeskuses 2—3 programmeerimiskeelt. Erandeiks on TPI arvutuskeskus oma 7 võimalusega (MALGOL, VELGOL, FORTRAN, COBOL, ALGAMS, SSK, AKI) ja Küberneetika Instituut kuuega (AKI, MALGOL, VELGOL, FORTRAN, ALGAMS, SSK). See on ka ilmselt põhjendatav, sest TPI tegeleb suures osas just translaatorite väljatöötamisega ja Küberneetika Instituudi arvutit kasutab TA instituutide teadlaste väga mitmekesine pere.

Arvutite kasutusala järgi jaotuvad arvutuskeskused pooleks. Ülalnimetatud esimese rühma keskused ja osa teisest rühmast («Eesti Tööstusprojekt», «Maaparandusprojekt», Plaanikomitee) kasutavad arvuteid põhiliselt konkreetsete probleemide lahendamiseks; insener-tehnilised ülesanded, vaatlusandmete töötlemine (AAI), tugevusarvutused («Tööstusprojekt»), majandusliku informatsiooni töötlemine (EMMTUI), katseandmete statistiline töötlemine (Põlevkivi TUI) jms. Kõrgemate õppeasutuste arvuteid kasutatakse veel suures osas õppetööks.

Ülejäänud arvutuskeskused on tegelnud raamatupidamise ja muude arveldustööde mehhaniseerimisega, aruandluste automatiseerimisega, andmetöötlussüsteemide loomisega jms. Põhilised töösuunad lähemaks 10—15 aastaks on aga üksmeelselt seotud automatiseeritud juhtimissüsteemide väljatöötamisega.

HUVITAVAT TÄISARVUDE RUUTUDEST

Arvul 13 on järgmised hämmastavad omadused. Tema ruut on 169. Lugedes neid arve aga paremalt vasakule saame 31 ja $961=31^2$. Arvu 13 ristsumma on 4, arvu 169 ristsumma aga $16=4^2$. Kahekohaliste arvude hulgas on veel ainult üks samasuguste omadustega arv. Leidke see!

*

Naturaalarvu, mille ruut lõpeb arvu endaga, nimetatakse a u t o m o r f s e k s. Automorfseteks arvudeks on näiteks 5, 6, 25, 76 ja 625, sest nende ruudud on $5^2=25$, $6^2=36$, $25^2=625$, $76^2=5776$, $625^2=390\,625$. Osutub, et n-kohalisi automorfseid arve on ülimalt kaks. Leidke veel teine kolmekohaline automorfne arv! Leidke 4- ja 5-kohalised automorfsed arvud! Näidake, et automorfse arvu esimese numbri ärajätmisel saame jällegi automorfse arvu! Selgitage, kuidas on omavahel seotud samakohalised automorfsed arvud! Saab näidata, et leidub kuitahes suuri automorfseid arve. Näiteks ajakirjas «Квант», 1973, nr. 7, lk. 55 on esitatud 1035-kohaline automorfne arv, mis on leitud elektronarvuti abil.

*

Naturaalarvu ruut ei saa lõppeda mistahes numbritega. Lihtne on veenduda, et ruudu lõpunumbriks võib olla ainult 0, 1, 4, 5 või 9. Kui me nõuame, et arvu ruut lõpeks kahe ühesuguse nullist erineva numbriga, siis nendeks võivad olla ainult 44, näiteks $12^2=144$. On olemas ka kolme neljaga lõppev ruut: $38^2=1444$. Ei leidu aga naturaalarvude ruute, mis lõpeksid nelja või enama nullist erineva ühesuguse numbriga.

MITME ISIKU MÄNGUD

Ü. Kaasik, M. Meriste, T. Prank

Mängu normaalkuju. Käesoleva artikli esimeses osas[1] vaadeldud kahe isiku mängude üldistamisel mängijate arvu suurendamise suunas jõuame üldiselt n isiku mängu mõisteni. Jättes kõrvale mängu defineerimise käikude, informatsioonihulkade jms. kaudu, lähtume kohe matemaatiliseks käsitlemiseks kõige sobivamast, nn. normaalkujust.

Tähistame mängijaid nende järjekorranumbritega ja kõigi mängijate hulka sümboliga $N=\{1, 2, \ldots, n\}$. Olgu iga mängija i jaoks antud tema strateegiate lõplik hulk X_i ja võidufunktsioon

$$K_i = K_i(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n),$$

kus iga $j \in N$ korral $\tau_j \in X_j$. Siis nende hulkade ja funktsioonide süsteemi

$$\Gamma = \{X_1, \ldots, X_n; K_1, \ldots, K_n\}$$

nimetatakse n isiku mänguks. Mängimine (üks partii) seisneb siin selles, et kõik mängijad valivad üheaegselt oma strateegiad

$$\tau_1 \in X_1, \ \tau_2 \in X_2, \ \ldots, \ \tau_n \in X_n,$$

millega ongi määratud nende võidud

$$K_1(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n), \ K_2(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n), \ \ldots, \ K_n(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n).$$

Järgnevas me eeldame enamasti, et tegemist on nullsummamänguga, s.t. strateegiate $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ igasuguse valiku korral

$$\sum_{i=1}^{n} K_i(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n) = 0.$$

Karakteristlik funktsioon. Mängu definitsioonis polnud midagi öeldud selle kohta, kas mängijad võivad oma strateegiate valikut kooskõlastada või mitte. Et sellist kooskõlastamist on praktilistes mängudes raske ära hoida (isegi kui kooskõlastamine reeglitega

---

[1] Ü. Kaasik, M. Meriste, T. Prank. Kahe isiku mängud. — Matemaatika ja kaasaeg, XIX, lk. 74—89.

keelatud on!), siis vaadeldaksegi enamasti nn. kooperatiivmängu, kus on lubatud mängijate ühinemine koalitsioonidesse.

Kui r mängijat moodustasid koalitsiooni $T=\{i_1, \ldots, i_r\} \subset N$, siis selle koalitsiooni T jaoks halvima variandi korral toimub ülejäänud mängijate ühinemine tema vastu. Seega (halvimal juhul) moodustub vastaskoalitsioon

$$N \setminus T = \{j_1, \ldots, j_{n-r}\},$$

mida tähistame sümboliga $-T$. Eeldades koalitsioonide T ja $-T$ olemasolu, saame mängu Γ asemel vaadelda kahe isiku nullsummamängu G mängijatega T ja $-T$. Mängus G valib mängija T strateegia

$$\tau_T \in X_T = X_{i_1} \times \ldots \times X_{i_r},$$

kus $\tau_T = (\tau_{i_1}, \ldots, \tau_{i_r})$, mängija $-T$ aga strateegia

$$\tau_{-T} \in X_{-T} = X_{j_1} \times \ldots \times X_{j_{n-r}},$$

kus $\tau_{-T} = (\tau_{j_1}, \ldots, \tau_{j_{n-r}})$.

Mängija T saab strateegiate sellise valiku korral võidu

$$K_T(\tau_T, \tau_{-T}) = \sum_{k \in T} K_k(\tau_1, \ldots, \tau_n),$$

mängija $-T$ aga (mängu nullsummalisuse tõttu) võidu

$$K_{-T}(\tau_T, \tau_{-T}) = -K_T(\tau_T, \tau_{-T}).$$

Et kahe isiku nullsummamäng on segastrateegiates alati lahenduv, siis mängus G leiduvad optimaalsed segastrateegiad, mis määravad mängu hinna v. Mängus Γ pole koalitsioon T muidugi fikseeritud — seega võib mängu G hinda v vaadelda hulgafunktsioonina $v(T)$, mis on määratud iga koalitsiooni $T \subset N$ korral (kaasa arvatud ka võimalused $T=N$ ja $T=\varnothing$, kus $\varnothing$ tähistab tühja hulka). Nii saadud hulgafunktsiooni $v(T)$ nimetatakse mängu Γ karakteristlikuks funktsiooniks. Karakteristliku funktsiooni väärtus $v(T)$ mingi konkreetse koalitsiooni T korral tähendab seega summaarset võitu, mille see koalitsioon saab endale garanteerida sõltumatult ülejäänud mängijate tegevusest.

Saab näidata, et n isiku nullsummamängu karakteristlik funktsioon $v(T)$ rahuldab järgmisi omadusi:

1° $v(N)=0$,

2° $v(-T)=-v(T)$,

3° $v(S \cup T) \geqslant v(S)+v(T)$, kui $S \cap T=\varnothing$.

Omadustest 1° ja 2° järeldub veel, et $v(\varnothing)=0$.

Osutub, et kehtib ka vastupidine väide, nimelt vastavalt igale suvalise $T \subset N$ korral määratud hulgafunktsioonile $v(T)$, mis rahuldab omadusi 1°—3°, leidub n isiku mäng Γ, mille jaoks $v(T)$ on karakteristlikuks funktsiooniks. Seega võime n isiku kooperatiivmängude uurimise asemel uurida nende mängude karakteristlikke funktsioone.

Karakteristlike funktsioonide uurimisel osutub otstarbekaks jaotada need funktsioonid kahte klassi. Võib nimelt esineda mänge, mille korral ükski koalitsioon ei anna mängijale paremat tulemust kui üksinda mängimine. Sellistes mängudes kehtib mistahes mittelõikuvate koalitsioonide S ja T korral võrdus

$$v(S\cup T)=v(S)+v(T).$$

Mängu, mille karakteristlik funktsioon rahuldab seda võrdust, nimetatakse mitteoluliseks, kõiki teisi mänge aga olulisteks mängudeks. Et mitteolulistes mängudes koalitsiooni astumine ei anna mängijale täiendavat võitu, siis ei ole sellises mängus üldse mõtet koalitsioone moodustada. Seega kooperatiivmängude seisukohalt pole mitteoluliste mängude uurimiseks üldse vajadust.

Ekvivalentsed mängud. Mängude ja nende karakteristlike funktsioonide uurimisel osutub otstarbekaks kasutada strateegilise ekvivalentsi mõistet. Me nimetame n isiku mänge Γ ja Γ' ning vastavaid karakteristlikke funktsioone v ja v' (mis on määratud ühe ja sama mängijate hulga N alamhulkadel) strateegiliselt ekvivalentseteks, kui iga $T\subset N$ korral kehtib seos

$$v'(T)=cv(T)+\sum_{i\in T}c_i,$$

kus $c>0$ ja konstandid $c_1, \ldots, c_n$ rahuldavad tingimust $\sum_{i=1}^{n}c_i=0$. Konstanti c võib siin tõlgendada maksesüsteemi muutmise koefitsiendina (näiteks rubladest dollariteks), konstanti c_i aga fikseeritud maksena mängijale i partii lõpus. Ilmselt maksesüsteemi muutmine ega ka fikseeritud maksed ei mõjuta ühegi mängija strateegia valikut.

Strateegiline ekvivalents osutub ekvivalentsiks tavalises mõttes (ekvivalentsisuhe on sümmeetriline, refleksiivne ja transitiivne) ja lahutab seega n isiku nullsummamängud ekvivalentsiklassideks. Et strateegiline ekvivalents teostab samasuguse lahutuse ka karakteristlike funktsioonide hulgas, siis võime mängude ekvivalentsiklasse edaspidi uurida just karakteristlike funktsioonide ekvivalentsiklasside kaudu.

Ekvivalentsiklassidesse jaotamine tähendab, et me samastame kõik samasse klassi kuuluvad mängud. Seega võib iga klassi puhul piirduda vaid ühe konkreetse esindaja vaatlemisega.

Taandatud mäng. Üldiselt võib igast karakteristlike funktsioonide ekvivalentsiklassist valida suvalise esindaja, kuid tavaliselt püütakse selleks leida mingis mõttes lihtsaim, mida tähistame $v^*(T)$.

Lähtudes funktsioonist $v(T)$ tuleb sobiva esindaja leidmiseks kõigepealt määrata konstandid $c_1, \ldots, c_n$ nii, et kehtiks võrdus

$$\sum_{i=1}^{n} c_i = 0.$$

Selles võrduses vabaks jäänud $n-1$ konstanti määrame seostega

$$v^*(1) = v^*(2) = \ldots = v^*(n),$$

kus $v^*(i) = v^*(\{i\})$ tähendab karakteristliku funktsiooni väärtust ühestainsast mängijast i koosneva koalitsiooni korral. Tähistades selle ühise väärtuse sümboliga $v^*(i) = \gamma$, saame strateegilise ekvivalentsi definitsioonist

$$v^*(i) = cv(i) + c_i$$

kohe valemid konstantide c_i määramiseks:

$$c_i = \gamma - cv(i).$$

Neid võrdusi liites ($i = 1, \ldots, n$) leiame

$$0 = \sum_{i=1}^{n} c_i = n\gamma - c\sum_{i=1}^{n} v(i)$$

ehk

$$\gamma = \frac{c}{n}\sum_{i=1}^{n} v(i).$$

Seega fikseeritud c korral on γ üheselt määratud.

Karakteristliku funktsiooni omadustest 1° ja 3° järeldub, et kehtib seos

$$\sum_{i=1}^{n} v(i) \leqslant 0.$$

Kui selles tingimuses kehtib võrdus, siis igasuguse c korral $\gamma = 0$; vastasel juhul saame aga konstandi c alati valida nii, et $\gamma = -1$. Me ütlemegi, et mäng Γ karakteristliku funktsiooniga v on *taandatud mäng*, kui funktsioon v rahuldab tingimusi

$$v(1) = \ldots = v(n) = \gamma,$$

kus kas $\gamma = 0$ või $\gamma = -1$.

Vaatleme kõigepealt juhtu $\gamma = 0$. Karakteristliku funktsiooni omadust 3° korduvalt kasutades saame

$$v^*(N) \geqslant v^*(T) + \sum_{i \in -T} v^*(i) = v^*(T) \geqslant \sum_{i \in T} v^*(i).$$

Et aga nii $v^*(N) = 0$ kui ka $v^*(i) = 0$, siis järelikult iga koalitsiooni T korral $v^*(T) = 0$ ja vastava ekvivalentsiklassi iga karakteristiku funktsiooni korral

$$v^*(T) = cv(T) + \sum_{i \in T} (\gamma - cv(i)) = 0$$

ehk

$$v(T) = \sum_{i \in T} v(i).$$

See aga tähendabki, et juhul $\gamma=0$ on meil tegemist mitteoluliste taandatud mängudega. Järelikult oluliste taandatud mängude korral $\gamma=-1$.

Huvitav on märkida, et kolme isiku mängude korral leidub ainult üks oluline nullsummamäng taandatud kujul, sest karakteristik funktsioon $v(T)$ on sel juhul võrdustega

$$v(1)=v(2)=v(3)=-1 \quad \text{ja} \quad v(\emptyset)=0$$

üheselt määratud. Tõepoolest, näiteks $v(\{1,2\})$ leidmiseks arvestame, et mängijatest 1 ja 2 koosneva koalitsiooni $T=\{1,2\}$ vastaskoalitsiooniks on $-T=\{3\}$ ning seega

$$v(\{1,2\})=-v(-\{1,2\})=-v(3)=1.$$

Nullsummamängu lahend. Kooperatiivses n isiku mängus saab mängija i partii tulemusena teatava summa α_i, kuhu võivad kuuluda ka hüvitused, mistõttu üldiselt $\alpha_i \neq K_i$. Kõiki antud partiis saadavaid võite kujutab seega vektor

$$\vec{\alpha}=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

Märgime, et vektor $\vec{\alpha}$ kuulub vaatlemisele ainult siis, kui iga $i \in N$ korral kehtib seos

$$\alpha_i \geqslant v(i).$$

See seos väljendab ilmset asjaolu, et mängija astub koalitsiooni ainult siis, kui ta sel juhul võidab vähemalt niisama palju kui üksinda mängides. Et mäng on nullsummaline, siis peab vektor $\vec{\alpha}$ rahuldama veel võrdust

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i=0.$$

Me ütleme, et vektor $\vec{\alpha}=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ on *tulemus* n isiku nullsummalises mängus Γ, kui ta rahuldab äsjatoodud tingimusi.

Olgu $\vec{\alpha}$ ja $\vec{\alpha}'$ mängu Γ mingid tulemused ning T mingi koalitsioon $(T \neq \emptyset)$. Me ütleme, et tulemus $\vec{\alpha}'$ on koalitsiooni T jaoks *eelistatavam* tulemusest $\vec{\alpha}$, kui iga $i \in T$ korral $\alpha'_i \geqslant \alpha_i$, leidub $i_0 \in T$ nii, et $\alpha'_{i_0} > \alpha_{i_0}$, ning

$$v(T) \geqslant \sum_{i \in T} \alpha'_i.$$

Viimane tingimus tähendab, et tulemus $\vec{\alpha}'$ peab olema koalitsiooni T poolt saavutatav, rohkem kui $v(T)$ aga koalitsioon võita ei saa.

Intuitiivselt võiks mängu lahendit mõista kui sellist tulemust $\vec{\alpha}'$, mille korral ei eksisteeri ühtki tulemust $\vec{\alpha}$, mida eelistaks tulemusele $\vec{a}'$ vähemalt üks mittetühi koalitsioon. Kahjuks aga niisugust tulemust $\vec{a}'$ üheski mängus ei eksisteeri. Saab nimelt näidata, et olulises mängus Γ leidub alati koalitsioon, mis eelistab suvalisele fikseeritud tulemusele mingit teist fikseeritud tulemust. Seda asjaolu arvestades defineeritaksegi lahend järgmiselt.

Tulemuste hulka A nimetatakse mängu Γ lahendiks, kui suvalisele tulemusele väljastpoolt hulka A vähemalt üks koalitsioon eelistab mingit A elementi; hulga A iga kahe elemendi korral aga ei leidu koalitsiooni, mis eelistaks üht nendest elementidest teisele.

Näide. Vaatleme kolme isiku mängu, milles kõik mängijad valivad üksteisest sõltumatult kas arvu 0 või 1. Kui kõigi kolme mängija valikud langevad kokku, siis lõpeb partii viigiga, s. t. igaühe võit on 0. Kui aga ühe mängija valik erineb ülejäänud kahe valikutest, siis maksab ainukesena erineva arvu valinud mängija ülejäänud kahele kummalegi summa 1.

Mängijate hulk $N=\{1,2,3\}$ võimaldab antud juhul peale triviaalse eraldi mängimise kasutada ka kaheliikmelisi koalitsioone

$$T_1=\{1,2\},\quad T_2=\{2,3\} \text{ ja } T_3=\{1,3\},$$

sest juhtu $T=N$ pole nullsummalisuse tõttu mõtet vaadelda.

Koalitsiooni moodustamine tähendab, et kaks mängijat lepivad omavahel kokku valida igas konkreetses partiis korraga üks ja sama arv, mis määratakse näiteks juhuslikult võrdsete tõenäosustega. Niisuguse kokkuleppe korral keskmiselt pooltel juhtudel jääb mäng viiki, pooltel juhtudel aga võidab see kaheliikmeline koalitsioon. Koalitsiooni liikmetel on võidu matemaatiline ootus seega kummalgi $^1/_2$, eraldi mängijal -1. Milline tulemuste hulk on selle mängu lahendiks?

Oletame, et tekib koalitsioon T_1 ja mängijad 1 ning 2 otsustavad valida tulemuse

$$\vec{a}_1=(^1/_2,\ ^1/_2,\ -1).$$

Nüüd aga mängija 3, kes on loomulikult huvitatud oma kaotuse vähendamisest, teeb näiteks mängijale 1 ettepaneku moodustada hoopis koalitsioon T_3 ja kasutada tulemust $(1,-1,0)$. Näiliselt on selle ettepaneku vastuvõtmine mängijale 1 kasulik, kuid ainult näiliselt. Nimelt võib mängija 2 nüüd pakkuda mängijale 3 koalitsiooni T_2 ja tulemust

$$\vec{a}_2=(-1,\ ^1/_2,\ ^1/_2),$$

millega mängija 3 ilmselt nõustuks ja kaotajaks osutub seega kokkuvõttes mängija 1. Analoogilise lõpptulemuse saame ka siis, kui lähtume koalitsioonist T_2 või T_3. Asi seletub sellega, et vaadeldava mängu lahendiks osutub tulemuste hulk $A=\{\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3\}$, kus lisaks eelmistele

$$\vec{\alpha}_3=(^1/_2, -1, ^1/_2).$$

Esitatud lühike arutelu näitab seega, et mängija, kes loobub lahendisse kuuluvast tulemusest, saab alati kahju.

Märgime, et kirjeldatud mäng ongi ainus oluline kolme isiku taandatud nullsummamäng (kuigi ka mõnel teisiti sõnastatud mängul võib olla sama karakteristlik funktsioon).

Üldised mängud. Vaatleme n isiku üldist mängu ikka normaalkujul, s. t. antuna süsteemiga

$$\Gamma=\{X_1, \ldots, X_n; K_1, \ldots, K_n\},$$

kus X_i tähendab mängija i strateegiate hulka ja K_i selle mängija võidufunktsiooni. Funktsioonide K_i kohta ei esita me nüüd aga mingeid kitsendavaid nõudeid.

Interpreteerime n isiku üldist mängu Γ kui $n+1$ isiku nullsummamängu $\tilde{\Gamma}$, tuues selleks sisse nn. fiktiivse mängija numbriga $n+1$, defineerides

$$K_{n+1}(\tau_1, \ldots, \tau_n)=-\sum_{i=1}^{n} K_i(\tau_1, \ldots, \tau_n).$$

Muutujad $\tau_1, \ldots, \tau_n$ sõltuvad reaalsete mängijate $1, \ldots, n$ tegevusest ja kuivõrd fiktiivne mängija ei tohi mõjutada mängu käiku, siis ei sõltu ka võidufunktsioonid muutujast τ_{n+1}. Mängu $\tilde{\Gamma}$ nimetame mängu Γ laiendiks nullsummamänguni.

Fiktiivse mängija sissetoomisega oleme teatud mõttes rikkunud mängija definitsiooni, sest mängijal $n+1$ puudub isiklik käik. Me võime aga eeldada, et fiktiivsel mängijal on «valida» ainult üks võimalik strateegia ja seega mängu tulemus tema tegevusest otseselt ei sõltu.

Fiktiivse mängija lisamise võtet võib muidugi kasutada ka kahe isiku üldiste mängude korral. Olgu näiteks kahe isiku üldine mäng määratud võidufunktsioonidega

$$K_1(\tau_1,\tau_2)=K_2(\tau_1,\tau_2)=\begin{cases} ^1/_2, & \text{kui } \tau_1=\overset{0}{\tau}_1,\ \tau_2=\overset{0}{\tau}_2, \\ -1 & \text{ülejäänud juhtudel.}\end{cases}$$

Laiendame selle mängu kolme isiku nullsummamänguks, võttes $K_3=-K_1-K_2$. Saadud mängu karakteristliku funktsiooni $\tilde{v}(T)$ väärtused võib kõik välja kirjutada:

$$\tilde{v}(1)=\tilde{v}(2)=-1,\quad \tilde{v}(\{1,2\})=1,\quad \tilde{v}(3)=-\tilde{v}(\{1,2\})=-1,$$

$$\tilde{v}(\{2,3\})=-\tilde{v}(1)=1,\qquad \tilde{v}(\{1,2,3\})=-\tilde{v}(\varnothing)=0.$$

Siit näeme, et saime ülalvaadeldud näites esitatud mängu, kus mängijate 1, 2 ja 3 osad on täiesti võrdsed — võitlus käib kaheliikmeliste koalitsioonide moodustamise eest. Fiktiivse mängijaga pole aga reaalses mängus võimalik koalitsiooni astuda, sest tegemist on vaid matemaatilise võttega üldise mängu lahendamiseks. Seega lisaks nõudele, et mängu $\tilde{\Gamma}$ tulemus ei tohi sõltuda fiktiivse mängija strateegiast, ei või ka lubada fiktiivsel mängijal osa võtta koalitsioonidest. Toodud lisanõudega välistame võimaluse, et fiktiivne mängija kaudselt mängu tulemust mõjutab. Mängu $\tilde{\Gamma}$ mingit lahendust niisuguse lisanõude korral nimetatakse *diskrimineerivaks lahenduseks* mängija $n+1$ suhtes.

Üldiste mängude uurimine. Me nimetame n isiku üldise mängu Γ karakteristlikuks funktsiooniks v tema laiendi $\tilde{\Gamma}$ karakteristliku funktsiooni $\tilde{v}$ ahendit hulgale $N=\{1, 2, \ldots, n\}$. Nii saadav funktsioon v ei rahulda enam nullsummamängu karakteristliku funktsiooni omadusi 1° ja 2°, kuid kehtima jäävad omadused

$$v(\varnothing)=0$$

ja

$$v(S \cup T) \geqslant v(S)+v(T), \text{ kui } S \cap T=\varnothing.$$

Analoogiliselt nullsummamängudega saab näidata, et iga neid tingimusi rahuldava hulgafunktsiooni v korral leidub selline üldine mäng Γ, millele funktsioon v on karakteristlikuks funktsiooniks.

Samuti nagu nullsummamängude korral eristatakse olulisi ja mitteolulisi üldisi mänge ning samaks jääb ka strateegilise ekvivalentsi mõiste. Ekvivalentsiklassi esindaja v' valitakse üldiste mängude korral tingimustega

$$v'(N)=0; \quad v'(1)=v'(2)=\ldots=v'(n)=\gamma,$$

kus $\gamma=0$ või $\gamma=-1$.

Üldise mängu Γ laiendi $\tilde{\Gamma}$ tulemused võib esitada kujul

$$\vec{\alpha}=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}),$$

kusjuures peab kehtima võrdus

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i=-\alpha_{n+1}$$

ja olema rahuldatud loomulikud nõuded

$$\alpha_i \geqslant \tilde{v}(i) \quad (i=1, \ldots, n),$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \leqslant -\tilde{v}(n+1)=\tilde{v}(\{1, \ldots, n\}).$$

Esimene nendest nõuetest tähendab, et ükski reaalne mängija ei ole nõus võitma vähem sellest, mis ta on suuteline ilma koalitsiooni astumata endale kindlustama. Teise nõude kohaselt ei saa ükski tulemus anda kõigile reaalsetele mängijatele suuremat võitu, kui nad saavad koalitsioonis $\{1, \ldots, n\}$.

Üldise mängu Γ lahendiks nimetatakse mängu $\tilde{\Gamma}$ lahendi niisugust alamhulka A, kus iga $\vec{a}=(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}) \in A$ korral

$$a_{n+1}=v(n+1)$$

ehk

$$\sum_{i=1}^{n} a_i=v(\{1, \ldots, n\}).$$

Kohtunikuskeem. Mitme isiku mängude teoorias on oluline osa karakteristliku funktsiooni mõistel. Paraku ei too aga karakteristlik funktsioon alati esile kõiki mängule iseloomulikke jooni,[2] muuhulgas ei arvesta see näiteks ähvarduste võimalusi. Juba mänguteooria loojad J. Neumann ja O. Morgenstern juhtisid tähelepanu niisugustele puudustele ja avaldasid lootust, et hiljem leitakse parem lahendus. Ühe võimaliku lahendusena ongi esitatud nn. kohtunikuteooria.

Vaatleme käesoleva artikli esimese osa lõpus esitatud kahe isiku üldist mängu maatriksiga

$$\begin{pmatrix} (1;\ 10) & (-2;\ -10) \\ (-10;\ -2) & (10;\ 1) \end{pmatrix}.$$

Selle mängu karakteristlikul funktsioonil on järgmised väärtused:

$$v(1)=-2,\ v(2)=-2,\ v(\{1,\ 2\})=11.$$

Seega ka karakteristliku funktsiooni põhjal otsustades on mängijad näiliselt võrdses seisukorras, kuid ainult näiliselt. Osutub, et mängija 2 saab ähvardusega sundida mängijat 1 valima strateegia τ_1^1, sest tema ähvardus on tunduvalt efektiivsem, võrreldes mängija 1 ähvardusega. Kui mängija 1 ei nõustu nimetatud strateegiat valima, siis peaks mängija 2 ähvarduse täide viima, tekitades sellega mõlemapoolset kahju. Teiselt poolt on teada, et kui ähvardusi kunagi ei realiseerita, siis kaotavad need oma jõu ja ähvardatav keeldub hüvitust maksmast.

Kirjeldatud olukorrast väljapääsu leidmiseks on mängijail mõistlik kasutada erapooletu isiku — kohtuniku abi. Kohtuniku ülesandeks jääb konflikti õiglane lahendamine. Tekib ainult probleem, millist lahendust tuleb lugeda õiglaseks.

---

[2] Vastava näite võib leida raamatust: Дж. Мак-Кинси. Введение в теорию игр. М., 1960, стр. 396—398.

Ilmselt ei tohi kohtunik lahendada iga üksikut konflikti eraldi, vaid peab tegutsema teatud üldiste põhimõtete järgi, mis peavad olema rakendatavad kõigi sellelaadiliste konfliktide korral. Seega peab kohtunik kasutama eeskirjade süsteemi, mis seab igale võimalikule juhule (kus kohtuniku abi üldse vajatakse) vastavusse ühese lahenduse, s. t. määrab üheselt mängijate võidud. Sellist eeskirjade süsteemi nimetame k o h t u n i k u s k e e m i k s.

Esitame siinkohal mõningad nõuded kohtunikuskeemile, pidades aga silmas, et võimalusi kohtunikuskeemi ülesehitamiseks on mitmeid: kasutada võib ju kõiki kohtunikuskeeme, mis on kõigile mängijatele vastuvõetavad. Skeem peab üldiselt rahuldama järgmisi nõudeid.

1. Kohtuniku poolt väljakuulutatud lahendus peab andma igale mängijale vähemalt nii suure võidu, kui ta on võimeline endale kindlustama koalitsiooni astumata (mängijale i vähemalt $v(i)$). Seejuures ei tohi eksisteerida sellist tulemust, mida kõik mängijad eelistaksid kohtuniku poolt pakutavale lahendusele.

2. Kõik printsiibid skeemis peavad olema võrdselt rakendatavad kõikidele mängijatele.

3. Kohtuniku lahendus peab kajastama ähvarduste efektiivsust.

4. Kahe strateegilises mõttes «lähedase» mängu lahendused (kohtuniku otsused) peavad olema samuti lähedased.

Tulles tagasi eespool kirjeldatud näite juurde, märgime, et kõige tunnustatuma skeemi korral peaks kohtunik mängijaile pakkuma tulemust (1,5; 9,5), mis näib olevat kõige paremini kooskõlas mängijate ähvarduste efektiivsusega.

KUS ON VIGA?

Küsimusele, kas ruutvõrrandil saab olla rohkem kui 2 lahendit, vastate arvatavasti eitavalt. Aga kas selline vastus on ikka õige?

Vaatleme võrrandit

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}+\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}=1,$$

milles a, b ja c on kolm erinenvat arvu. Asetame võrrandisse $x=a$. Siis esimene ja kolmas liidetav võrduvad nulliga ning teine ühega. Seega $x=a$ on võrrandi lahendiks. Analoogiliselt kontrollime, et ka $x=b$ ja $x=c$ on selle võrrandi lahenditeks. Seega oleme moodustanud ruutvõrrandi, millel on vähemalt 3 erinevat lahendit! Selgitage, millest tekkis see vastuolu!

ÜHEST UUEST MITTELINEAARSE PLANEERIMISE MEETODIST

I. Mauer

Iga tõeline edu matemaatikas on alati seotud sügavamate, tabavamate, lihtsamate meetodite leidmisega, mis haaravad endasse eelnenu ja heidavad kõrvale endised liiga keerulised arutlused.

David Hilbert

Viimasel aastakümnel on paljude matemaatikute jõupingutused olnud suunatud mittelineaarse planeerimisülesande lahendusmeetodite leidmisele. Väljatöötatud meetoditest on enam tuntud võimalike suundade meetodid, Lagrange'i funktsioonil baseeruvad meetodid ehk hindade meetodid ja trahvifunktsioonide meetodid. On hea, et kõrvuti nende meetodite väärtustega on nüüd formuleeritud ka nende puudujäägid; see aitab matemaatikutel selgepiirilisemalt kujundada oma taotlusi uurimustes. Ühest õnnestumisest sellel pinnal tulebki juttu järgnevas.

Senini «Matemaatika ja kaasaja» veergudel käsitletud mitmesugustest lineaarse planeerimise ülesannetest erineb käesolevas vaatluse alla tulev ülesanne selle poolest, et see sisaldab vähemalt ühe mittelineaarse avaldise. Nii seisneb *mittelineaarse planeerimise ülesanne* mingis eukleidilise ruumi piirkonnas (mis võib olla määratud võrratustega, võrranditega, tabeliliselt jne.) niisuguse vektori (plaani) x^* leidmises, mis minimiseerib funktsiooni $f(x)$ selles piirkonnas. Käsitluse konkreetsuse ning lihtsuse mõttes vaatleme ülesannet, mille piirkond on esitatud m võrrandist koosneva süsteemi $g(x)=0$ abil.

Kasutame vaadeldava ülesande tähistamiseks järgmist kirjutusviisi:

$$x^* : \min[f(x) \mid g(x)=0].$$

Olgu funktsioon $f(x)$ ning vektorfunktsioon $g(x)$ sellised, et lähteülesandel ning järgnevas esitatavate meetodite kõigil minimiseerimisülesannetel on olemas lahendid.

Enne vaadeldava ülesande uue lahendusmeetodi kirjeldamist on otstarbekohane tutvustada selle ülesande kahte varemtuntud lahendusmeetodit.

A. Esitame *Uzawa meetodi* — ühe Lagrange'i kordajate ehk hindade meetoditest. Meetodi iteratiivne protsess seisneb järgnevas:

$$x^{n+1} : \min[f(x) + (y^n, g(x))],$$

$$y^{n+1} = y^n + \alpha g(x^{n+1}), \qquad \alpha > 0,$$

kus m-mõõtmeline arvmuutuja y tähistab Lagrange'i kordajaid ehk hindu ning α — sobivalt valitud skalaari.

See meetod koondub[1] vaid küllaltki tugevatel eeldustel ning ehkki koondub lokaalselt geomeetrilise progressiooni kiirusega, võib koondumise kiirus olla väga väike. Peale selle on skalaari α valik või sobivalt muutmine seotud suurte raskustega. Analoogilised puudujäägid on iseloomulikud ka teistele hindade meetoditele.

B. Kirjeldame ühte trahvifunktsioonide meetodit. Meetodi n-ndal iteratsioonil leiame

$$x^n : \min\left[f(x) + \frac{1}{2} K_n \|g(x)\|^2 \right], \qquad K_n > 0,$$

kus trahvikordaja $K_n \to \infty$, kui $n \to \infty$.

See meetod koondub avaratel eeldustel, kusjuures kehtib hinnang $\|x^n - x^*\| \leqslant C/K_n$ (C — mingi konstant). Meetodi puuduseks on aga asjaolu, et trahvi K_n kasvades minimiseeritav trahvifunktsioon muutub üha «kuristikulisemaks», mistõttu tema miinimumpunkti leidmise protsessid koonduvad üha halvemini. Selline puudus on ka teistel trahvifunktsioonide meetoditel.

Edasi uuest meetodist, mis kujutab endast kahe eespool kirjeldatud meetodi kombinatsiooni. See meetod on formuleeritud viimastel aastatel üheaegselt rea autorite poolt; seda hindade meetodite ja trahvifunktsioonide meetodite puuduste analüüsi ning teoreetilise mõtte seaduspärase arengu tulemusena. Koos vastava range põhjendusega on Moskva matemaatikud[2] teinud ettepaneku nimetada uut meetodit *trahvi-hindade meetodiks*. Samuti antakse nende töös esimesena meetodile koondumishinnangud, asendades tema n.-ö. «komponentmeetodite» teoreetilised arutlused uute, täiuslikumatega.

---

[1] Meetodi koondumise all mõistame piirprotsessi $x^n \to x^*$, $n \to \infty$ kehtimist.
[2] Б. Т. Поляк, Н. В. Третьяков. Метод штрафных оценок для задач на условный экстремум. — Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 1973, т. 13, № 1, стр. 34—46.

Kirjeldame trahvi-hindade meetodit. Meetodi iteratiivne protsess seisneb järgnevas:

$$x^{n+1}: \min\left[\, f(x)+\frac{1}{2} K_n \|g(x)\|^2+(y^n, g(x))\,\right],$$

$$y^{n+1}=y^n+K_n g(x^{n+1}), \qquad K_n>0,$$

kusjuures kordaja K_n valikuks on antud suur vabadus. Kõige lihtsama meetodi variandi saame, kui võtame $K_n=K=\text{const}$.

Ilmselt võib seda meetodit vaadelda kui Uzawa tüüpi hindade meetodit, rakendatuna modifitseeritud Lagrange'i funktsioonile, kuid võib vaadelda ka kui trahvifunktsioonide meetodi modifikatsiooni.

On tõestatud, et teatud eeldustel vaadeldav meetod koondub lahendi x^* ümbruses mitte aeglasema kui geomeetrilise progressiooni kiirusega, kusjuures progressiooni tegur on tehtav kuitahes väikeseks küllalt suure trahvikordaja valikuga, s. o. meetod koondub seda kiiremini, mida suurem on valitud K_n. Et aga trahvi K_n suurendamisega kaasneb minimiseeritava funktsiooni muutumine «kuristikulisemaks», siis meetodi rakendamise käigus on vaja vastavalt saadud arvutustulemustele kas suurendada või vähendada trahvikordajat. Kui miinimumpunkti x^{n+1} leidmisprotsess valitud minimiseerimismeetodi korral koondub liiga aeglaselt, tuleb kordajat K_n vähendada. Kui punkt x^{n+1} leitakse kergelt, kuid meetod tervikuna koondub halvasti, siis tuleb kordajat K_n suurendada. On näidatud, et niisugune trahvikordaja muutumise protsess stabiliseerub, s. o. $K_n=K$, kui $n \geqslant N$.

Nagu eelnenust järeldub, oleme uue meetodi näol saanud meetodi, mis on vaba neist puudustest, mis on iseloomulikud hindade meetoditele ja trahvifunktsioonide meetoditele ning millised leidsid märkimist eespool. Seega annavad senised uurimused põhjust pidada trahvi-hindade meetodit perspektiivseks, kuid otsustava sõna meetodi hindamisel ütleb praktika. Momendil ei ole kahjuks veel jõutud sellega küllaldaselt eksperimenteerida, kuid esimesed katsetused on olnud edukad.

Lõpuks juhime lugeja tähelepanu veelkord asjaolule, et vaatlesime niisugust planeerimisülesannet vaid lihtsuse mõttes. Trahvi-hindade meetod on formuleeritud ning seda on uuritud ka juhtudel, kui ülesande piirkond on antud võrratustega, seda on uuritud lineaarse planeerimisülesande korral ning on näidatud võimalusi selle modifitseerimiseks.

Täiendusi koolimatemaatikale

LOBATŠEVSKI GEOMEETRIA

K. Ariva

V GEOMEETRIA JA REAALNE RUUM

Käesolevaga lõppeva artikliseeria eelnevates osades[1] vaatlesime Lobatševski geomeetria tekkimist ja selgitasime lihtsamaid vahekordi selles geomeetrias. Nagu märkisime, ei leidnud uus geomeetria Lobatševski eluajal tunnustust. Liiga kaugele oli Lobatševski mõte ette jõudnud oma kaasajast. 19. sajandi esimesel poolel ei nähtud veel mingit vajadust teise, Eukleidese omast erineva geomeetrilise süsteemi järele. Niisugune süsteem tundus peaaegu kõigile tolleaegsetele matemaatikutele ebateaduslikku, tarbetu ja arutu fantaasiana. Lobatševskil endalgi ei õnnestunud täiesti rangelt tõestada, et tema elutöö on uus, loogiliselt laitmatu teaduslik teooria. Mahavaikimisele ja pilkele sai ta vastu seada vaid vankumatu subjektiivse veendumuse, mis tugines uue geomeetria üha ulatuslikumal väljaarendamisel ja rakendamisel. Järgnevalt vaatleme loogilist põhjendust, mis viis Lobatševski teooria tunnustamisele, ning selgitame selle teooria asendit ja osatähtsust mitmesuguste geomeetriate süsteemis.

Üks ruum — kaks geomeetriat?

Meenutame, et esimene mitteeukleidiline geomeetria tekkis katsetest paralleelsirgete aksioomi vastuväiteliselt tõestada. Vastupidiselt Saccheri, Lamberti ja Legendre'i lootustele ei jõutud selle tõestusega kuidagi lõpuni. Vastuväitelisest oletusest tehtud järelduste hulk aina kasvas, kuid oodatavat vastuolu ei ilmunud. Gauss aimas ning Lobatševski ja Bolyai deklareerisid, et mingit vastuolu ei olegi oodata, sest saadud järelduste süsteem on uus geomeetria. Tõsi küll, paljud vahekorrad selles geomeetrias on teravas vastuolus meie harjumuspäraste kujutlustega. Kuid teaduses ei kõlba kujutlusvõime kohtunikuks. Lobatševski päevil oli veel väga raske sellist arusaama omaks võtta; tänapäeval ei hämmasta kujutlusega mittehaaratavad tõsiasjad enam kedagi.

---

[1] Matemaatika ja kaasaeg, XII, XIII, XIV, XV, XVI ja XVIII.

Pakub ju näiteks tuumafüüsika kuhjaviisi tõdesid, mida keegi (veel) ei suuda kujutleda. Pealegi on kujutlusvõime treenitav. Nagu kinnitas nimekas nõukogude matemaatik V. F. Kagan, saab küllaldaselt süvenedes ja harjutades kujutleda Lobatševski maailma niisama selgelt kui koolis omaseks muutunud eukleidilist ruumi.

Õigupoolest ei olegi raske esitada Lobatševski geomeetriat nii, et peamised selles kehtivad vahekorrad on kujutatavad lihtsal joonisel ning on sealt haaratavad ühe pilguga. Nagu meie jutustuse eelnevast osast[2] selgus, saab Lobatševski tasandi «kaardistada» — nimelt kujutada vabalt valitud ringi sisepunktide hulgana. Selleks tuleb vaid sobival viisil defineerida sirge ning meetrika põhimõisted — kaugus kahe punkti vahel ja nurk kahe kiire vahel. Lobatševski tasandi[3] sellise mudeli koostas saksa matemaatik F. Klein 1871. aastal.

Me kasutasime kirjeldatud mudelit Lobatševski planimeetrias esinevate seoste näitlikustamisel. Kuid selle mudeli tähendus on tunduvalt sügavam ja eesmärk ulatuslikum. Kleini mudel on viimane lüli, mida Lobatševski otsis: selle mudeli olemasolu muudab Lobatševski subjektiivse veendumuse objektiivseks tõeks. Nimelt ilmneb mudelist, et Eukleidese (s. t. harilikul, koolis vaadeldaval) tasandil leiduvad objektid ja nende objektide vahelised seosed, mille puhul kehtivad kõik Lobatševski planimeetria aksioomid, järelikult ka kõik teoreemid, mis kuuluvad Lobatševski planimeetriasse. Siinjuures on oluline, et mudelis Lobatševski aksioomid õigupoolest ei olegi enam aksioomid, vaid teoreemid, mille tõesus tuleneb Eukleidese tasandil kehtivatest vahekordadest. Seega saab Lobatševski geomeetria algmõisteid nii tõlgendada, et Lobatševski planimeetria aksioomid osutuvad loogilisteks järeldusteks Eukleidese aksioomidest.[4]

Viimasest märkusest järeldub, et iga loogiline vasturääkivus Lobatševski geomeetrias on samaaegselt loogiline vasturääkivus ka Eukleidese geomeetrias. Selgitame seda vahekorda veidi pikemalt. Oletame, et Lobatševski teoorias on mingi loogiline vastuolu, s. t. et selle teooria arendamisel võib jõuda mingi kahe teineteist eitava tõese lauseni

A on B ja *A ei ole B.*

See vastuolu peab sisalduma ka Kleini mudelis, sest selles kehtib

---

[2] Matemaatika ja kaasaeg, XVIII, lk. 74.

[3] Analoogiliselt saab Lobatševski ruumi kujutada kera sisepunktide hulgana. Seepärast kehtivad järgnevad märkused ka Lobatševski stereomeetria kohta.

[4] Ei maksa arvata, et selline vahekord tähendab loogilist vastuolu. Tõsi, Eukleidese geomeetria aksioomidest, mille hulka kuulub ka paralleelsirgete aksioom, järeldub mudelis viimase eitus — Lobatševski aksioom. Kuid nendes aksioomides on siin juttu erinevatest objektidest: sirgeteks mudelis (s. t. Lobatševski tasandil) ei ole sirged Eukleidese tasandil.

kogu Lobatševski planimeetria. Kuid iga vastuolu Kleini mudelis on ühtlasi vastuolu Eukleidese geomeetrias, sest see mudel on osa Eukleidese tasandist.

Siit ilmneb, et kui Lobatševski ja Bolyai eksisid ning paralleelsirgete aksioomi vastuväitelisel tõestamisel tehtud järeldused ei moodusta uut geomeetrilist süsteemi (sest paralleelsirgete aksioom on vastuväiteliselt tõestatav), siis eksis ka Eukleides — tema geomeetrias on siis loogiline vasturääkivus ja ka see geomeetria lakkab olemast teaduslik teooria.[5] Tulemus on esimesel pilgul paradoksaalne, kuid loogiliselt paratamatu: kui me ei loe Lobatševski geomeetriat loogiliselt korrektseks, siis ei tohi me tunnustada ka Eukleidese aastatuhandetevanust süsteemi.[6]

Eukleidese geomeetria loogilises korrektsuses ei ole mingit põhjust kahelda. (Pealegi ilmneb Eukleidese geomeetria aritmeetilisest mudelist[7], et kahelda Eukleidese süsteemis tähendaks kahelda reaalarvude teoorias, seega peaaegu kogu matemaatikas.) Kui aga Eukleidese geomeetria on loogilise vastuoluta, siis — nagu äsja selgus — peab seda olema ka Lobatševski geomeetria. Tuleb seepärast tunnustada kahe erineva geomeetrilise süsteemi olemasolu ja leppida sellega, et puhtloogiliselt ei ole mingit alust eelistada ühte nendest teisele. Lobatševski geomeetria loogilisest korrektsusest omakorda järeldub, et Eukleides talitas õigesti, võttes oma V postulaadi põhilauseks. Seega tunnustades Lobatševski geomeetriat kuulutame ühtlasi lõplikult lahendatuks inimvaimu vaevanud igivana ülesande — V postulaadi probleemi.

On muidugi meeltülendav teada, et kuulus probleem on lahendatud. See kinnitab moodsat veendumust, et teadus lahendab iga korrektselt püstitatud probleemi, kui selleks vaid küllaldaselt aega antakse. Kuid keeruka ülesande lahendus tavaliselt tekitab rea uusi küsimusi. Nii on lugu ka V postulaadi probleemiga. Selle lahendus eeldab kahe erineva geomeetrilise süsteemi võimalikkust. Aga geomeetria kirjeldab ju reaalset ruumi ja ruumil ometi on (sõltumatult meie mõtlemisest) ainult üks struktuur. Kuidas siis seletada seda, et ruumi kirjeldavad kaks erinevat geomeetriat? Kuidas saavad need geomeetriad mõlemad olla loogiliselt korrektsed? Millest on tingitud nende nii tihe seos teineteisega, et tunnustades üht oleme (loogiliselt) sunnitud tunnustama ka teist? Kas leidub veel teisi geomeetriaid peale kahe senivaadeldu?

Selleks, et vastata nendele küsimustele, on tarvis veidi järele mõelda geomeetria ja selles kasutatava meetodi üle.

---

[5] Väiksem õnnetus siinjuures on see, et kui meie oletus on õige, siis luges Eukleides aksioomiks tõestatava lause.

[6] Lisame, et kehtib ka vastupidine seos. Eukleidese geomeetria jaoks omakorda saab ehitada mudeli Lobatševski geomeetria vahenditest. Seepärast tähendab iga loogiline vastuolu Eukleidese süsteemis ühtlasi vastuolu ka Lobatševski teoorias. Järelikult on need kaks geomeetriat sisemise loogilise kooskõlalisuse mõttes samaväärsed.

[7] Matemaatika ja kaasaeg, XVIII, lk. 70.

Täpsus, mida ei saa ületada

Eristame geomeetria kui teatava matemaatilise teooria geomeetria rakendustest. Geomeetrias tuletatakse näiteks kolmnurga pindala valem; leides mõõtmise ja arvutamise teel mingi kolmnurgakujulise plaadi pindala, rakendatakse seda teoreetilist tulemust. Geomeetria rakendused geomeetriasse õigupoolest ei kuulu, ehkki koolitunnis tuleb tegelda segiläbi nii teooria kujundamisega kui ka selle rakendamisega.

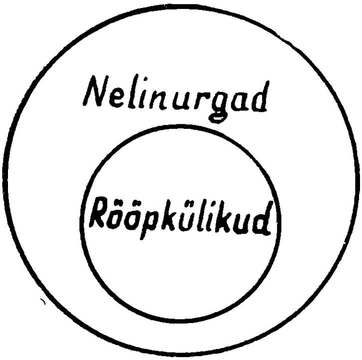
Olles sel viisil välja eraldanud geomeetria kui puhta teooria, paneme tähele, et juba koolikäsitluses ilmneb geomeetria tulemuste üldisus ja absoluutne täpsus. Kui puuduks teooria ja näiteks kolmnurga sisenurkade summat saaks määrata ainult katseliselt, mõõtmise teel, siis jääks täpne väärtus vaatlusest kõrvale ja kõigi kolmnurkade kohta käiva otsustuse saaks sõnastada vaid oletusena. Eukleidese geomeetrias aga näidatakse, et selles geomeetrias kehtivatel eeldustel peab vaadeldav summa olema täpselt 180° igas kolmnurgas — ehkki kolmnurkade hulk on lõpmatu ja uurida eraldi iga kolmnurka on võimatu.

Selgitame, millest tuleneb geomeetriliste tõdede niisugune üldisus ja täpsus.

Geomeetria tekkimisele eelnes geomeetrilise sisuga mõistete kujunemine. Seda geomeetria eelajalukku kuuluvat protsessi kordab õpetamine koolis. Eseme vaatlemisel tekib ja säilib teadvuses kujutlus sellest esemest. Võrreldes mitmesuguseid esemeid ja samuti kujutlusi nendest, õpitakse eraldama kuju poolest samalaadsete esemete hulki. Samakujuliste esemete vaatlemisel jäetakse siis kõrvale kõik, mille poolest need esemed võivad üksteisest erineda (aine, kaal, värvus jne.), ja säilitatakse teadvuses ainult nende ühised tunnused. Sellise abstraheerimisprotsessi kaudu kujunevadki teadvuses mõisted, nagu *kolmnurk*, *rööpkülik*, *prisma*, *püramiid* jne. Geomeetrilise sisuga mõiste niisiis ühendab endas kõik selle ja ainult selle, mis on teatava hulga elementidel kuju poolest ühist. Nagu siit nähtub, on mõiste kujunemine seotud hulga moodustamisega; mõiste on teatava hulga kokkuvõte. Näiteks mõiste ***kolmnurk*** võtab kokku kõigi kolmnurkade hulga.

Geomeetria sai alguse Antiik-Kreekas 6. sajandi paiku e.m.a. tehtud avastusest, et geomeetrilise sisuga mõistete vahel esinevad seosed, mis võimaldavad neid mõisteid üksteisest tuletada. Mõiste uurimine, selle «loogiline töötlus» algab kirjeldamise ja defineerimisega. Mõiste kirjeldamisel antakse teada mõistena kokkuvõetava hulga elementide mõned tähtsamad omadused. Mõiste kirjeldust nimetatakse mõiste definitsiooniks, kui selles sisalduvatest andmetest saab järeldada vaadeldava hulga elementide kõik ühised omadused. Lisaks nõutakse, et definitsioon ei tohi sisaldada midagi liigset, s. t. tingimusi, mida saab järeldada teistest selles esinevatest andmetest. Näiteks lause *rööpkülik* *on nelinurk, mille vastasküljed on paralleelsed*, on definitsioon, sest sellest saab tuletada rööpküliku kõik ülejäänud omadused, s. t. kõik omadused, mis on igal rööpkülikul.[8]

Mõiste defineerimisel näidatakse hulk, millesse defineeritav objekt kuulub, ja lisatakse tingimus, mis eristab selle objekti vaadeldava hulga kõigist teistest elementidest. Mõistet, mis määrab hulga, milles defineeritav objekt sisaldub, nimetatakse soomõisteks. Tingimust, mis eristab defineeritava objekti selle hulga teistest elementidest, nimetatakse liigitunnuseks. Liigitunnus esitatakse ühe või mitme seose (relatsiooni) kaudu. Rööpküliku definitsioonis on soomõisteks *nelinurk* ja liigitunnuseks *vastaskülgede paralleelsus*. Et ka defineeritav mõiste võtab kokku teatava hulga, siis tähendab defineerimine osahulga väljaeraldamist hulgast, mille määrab soomõiste (joon. 1). On muidugi selge, et mõiste defineerimisel teiste mõistete kaudu peavad viimased (s. t. soomõiste ja liigitunnuses esinevad seosed[9]) ise olema eelnevalt defineeritud.



Joonis 1.

Mõistete uurimisel tehakse järeldusi nende definitsioonidest. Tähtsamaid järeldusi nimetatakse teoreemideks. Peale mõistete defineerimise on geomeetri põhiülesandeks teoreemide tõestamine, s. t. näitamine, et lisanduvad teoreemid järelduvad definitsioonidest ja juba tõestatud teoreemidest. Seejuures ilmnevad mõistete vahel üha uued seosed, mille uurimine ongi geomeetria eesmärk.

Eelnevatest märkustest ilmneb, et geomeeter ei uuri reaalseid esemeid, vaid abstraktseid mõisteid; ta ei mõõda ega eksperimenteeri, vaid ainult arutleb loogiliselt; ta ei vaatle konkreetseid üksikjuhte, vaid hulki, mille «üldelementideks» on mõisted; ta otseselt ei uuri oma otsustuste vastavust tegelikkusele, vaid püüab kindlaks teha nende loogilise järelduvuse eelnevalt tunnustatud lausetest. Seepärast ongi geomeetri otsustused alati

[8] Mõistet saab üldiselt mitmel viisil defineerida, kasutades erinevaid soomõisteid ja liigitunnuseid. Näiteks saab rööpküliku välja eraldada nelinurkade hulgast, nõudes vastaskülgede kongruentsust või vastasnurkade kongruentsust või diagonaalide poolitumist lõikepunktis jne. Asendades senise definitsiooni uuega muudame senise definitsiooni tõestamist vajavaks teoreemiks.

[9] Meenutame, et koolikäsitluses on seos kahe hulga elementide vahel samuti hulk, nimelt osahulk nende hulkade ristkorrutises.

täpsed ja kehtivad üldiselt, s. t. vaadeldavate hulkade kõigi elementide puhul.

Definitsioon, mis sisaldab kogu geomeetria

Geomeetria kui teaduslik teooria kujunes 5. ja 4. sajandil e.m.a., mil kreeka mõtlejatele selgus, et geomeetrilise sisuga lausete (definitsioonide ja teoreemide) kogumi saab esitada ühtse loogiliselt järjestatud süsteemina. Mitmetest süstematiseerimiskatsetest osutus parimaks ja jättis kõik teised varju Eukleidese töö, mistõttu kujunenud süsteemi nimetataksegi Eukleidese geomeetriaks.

Ehkki Eukleidese süsteemi loogiline rangus oli paljude aastasadade vältel ületamatuks eeskujuks igasugusele teaduslikule mõtlemisele, esinevad selles siiski puudused, mida õpiti mõistma ja kõrvaldama alles 19. sajandil. Põhiline raskus tekkis Eukleidesel mõnede mõistete defineerimisel. Mõisteid järjestades jõudis ta (samuti nagu teised kreeka geomeetrid) otsusele, et esmasteks mõisteteks, mille uurimisest peab algama geomeetria, on *punkt*, *sirge* ja *tasand*. Niisiis peaksid geomeetria lähtekohaks olema nende mõistete definitsioonid. Eukleidese «Elemendid» algavadki definitsioonidega. Piirdume siin mõne näitega.

1. *Punkt on see, millel ei ole osi.*
2. *Joon on pikkus ilma laiuseta.*
3. *Sirge on joon, mis asetseb ühteviisi kõigi oma punktide suhtes.*

Ükski nendest lausetest ei saavuta eesmärki. Lauses 1 puudub soomõiste[10] ja kõigis lausetes on kasutatud mõisteid, mis ise vajavad veel defineerimist. Jooneks (nagu tänapäeval on selgunud) võib osutuda ka selline punktihulk, mille puhul lause 2 ei kehti. Lause 3 on niivõrd ähmane, et on raske mõista, mida Eukleides sellega mõtles. Kõigi esitatud (ja Eukleidese mõnede teiste) «definitsioonide» põhipuuduseks on aga see, et neid ei saa aluseks võtta punktide ja sirgete uurimisel — neist ei saa midagi olulist järeldada. Ka Eukleides ise ei osanud neid lauseid oma järgnevates mõttekäikudes kasutada.

Tuleb tunnustada (ja selleks andis küllaldase aluse juba Aristotelese formaalne loogika), et antud teooria kõiki mõisteid ei ole võimalik defineerida teiste sellesse teooriasse kuuluvate mõistete kaudu. Iga selle-eesmärgiline katse tekitab paratamatult loogilise ringi: lõppkokkuvõttes mõiste defineeritakse mõiste enda kaudu. Antud teooriasse kuuluvate mõistete hulk peab jagunema kaheks osahulgaks: 1) a l g m õ i s t e d, mida ei defineerita teiste sellessse teooriasse kuuluvate mõistete kaudu, 2) t u l e t a t u d

[10] Seepärast võib punktiks lugeda näiteks *vaprust* või *isekust*.

m õ i s t e d — defineeritakse algmõistete ja nende abil defineeritud mõistete kaudu.

Algmõistete vajalikkusest kerkib probleem, mille lahendust Eukleides ei näinud, ehkki see tal osaliselt käes oli. Kui teooria esimesed mõisted on defineerimata, seega sisuliselt fikseerimata, siis puudub vajalik lähtekoht ka järgnevate mõistete defineerimiseks. Tõepoolest, kui esimesed mõisted ei määra mingeid kindlapiirilisi hulki, siis ei ole millestki välja eraldada osahulki, mille «üldelementideks» on järgnevad mõisted. Seepärast tuleb võimatu muuta võimalikuks: loogiliselt järjekindlas teoorias peab iga mõiste olema defineeritud.

Lahendus, mis leiti alles 19. sajandi lõpul, on lihtne nagu kõik, mida selgesti mõistetakse. Meenutame, et mõiste defineerimine tähendab hulga moodustamist. Hulga moodustamiseks on tarvis eeskirja, mis võimaldab iga objekti puhul otsustada, kas see kuulub sellesse hulka või mitte. Mõiste defineerimisel soomõiste kaudu vaadeldakse vaid teatava eelnevalt uuritud hulga elemente ja näidatakse, missugusel tingimusel need kuuluvad moodustatavasse hulka. Kuid on võimalik toimida üldisemalt, nimelt eraldada nõutavad objektid mistahes, s. t. kõigi objektide hulgast. Hulka määravad tingimused tuleb ka nüüd väljendada mingite seoste abil. Et aga sellisel lähenemisel soomõiste puudub, siis ei saa need seosed olla eelnevalt läbi uuritud. Seepärast saab kogu informatsioon nende seoste kohta sisalduda vaid samades hulka määravates tingimustes. Niisiis peavad püstitatavad tingimused ühteaegu defineerima nii hulga kui ka seosed selle elementide vahel.

Kirjeldatud tüüpi definitsioon meenutab Münchhauseni kangelastegusid. Teatavasti rebis see kuulus luiskaja oma juuksepatsi pidi soomülkast välja nii enda kui ka oma hobuse. Et näidata, kuidas niisugune üritus on geomeetrias võimalik, esitame eukleidilise planimeetria lähtedefinitsiooni, mis pärineb saksa matemaatikult D. H i l b e r t i l t 1899. aastast.

Enne veel üks märkus. Sageli tuleb korraga defineerida mitu üksteisega seotud mõistet (s. t. moodustada mitu hulka ja nende elementide vahelist seost) ja definitsioon võib osutuda õige keerukaks. Sel juhul esitatakse definitsioon osade kaupa ja tuletatakse juba sõnastatud tingimuste abil uusi mõisteid, mis võimaldavad lihtsustada järgnevate tingimuste sõnastusi.

Esitame korraga Eukleidese planimeetria kogu lähtedefinitsiooni, jättes kõrvale vahepeal lisatavate mõistete tuletused.

Punktiks ja *sirgeks* ning seosteks *kuulub*, *on vahel* ja *on kongruentne* nimetatakse mõisteid, mille puhul on täidetud järgmised tingimused:

1° iga kaks punkti kuuluvad ühele ja ainult ühele sirgele; [11]

---

[11] Kui punkt kuulub sirgele, siis öeldakse ka, et sirge läbib punkti. Tingimuse saab siis sõnastada nii nagu koolis: *iga kaht punkti läbib üks ja ainult üks sirge.* Punkte *A* ja *B* läbiva sirge jaoks kasutatakse tähist *AB*.

2° igale sirgele kuulub vähemalt kaks punkti;[12]

3° leidub kolm punkti, mis ei kuulu ühele sirgele;

4° kui punkt B on punktide A ja C vahel, siis on ta ka punktide C ja A vahel;

5° iga kahe punkti A ja C jaoks leidub punkt B, mis kuulub sirgele AC ning on punktide A ja C vahel;

6° igast kolmest ühele sirgele kuuluvast punktist saab vaid üks olla kahe ülejäänud punkti vahel;

7° kui sirge ei läbi kolmnurga[13] tippe, kuid lõikab selle üht külge[14], siis lõikab ta veel teist külge, kuid kolmandat külge ta ei lõika;

8° sirgele kuulub üks ja ainult üks punkt B, mis on selle sirge antud punktist A antud pool[15] ja mille puhul sirglõik AB on kongruentne antud sirglõiguga $A'B'$;

9° kaks sirglõiku, mis on kongruentsed kolmanda sirglõiguga, on kongruentsed teineteisega;

10° kui punkt B on punktide A ja C vahel, punkt B' on punktide A' ja C' vahel, sirglõik AB on kongruentne sirglõiguga $A'B'$ ning sirglõik BC on kongruentne sirglõiguga $B'C'$, siis sirglõik AC on kongruentne sirglõiguga $A'C'$;

11° leidub üks ja ainult üks nurk[16], mille üheks haaraks on antud kiir ja teine haar on sellest antud pool[17] ning mis on kongruentne antud nurgaga;

12° kaks nurka, mis on kongruentsed kolmanda nurgaga, on kongruentsed teineteisega;

13° kui ühe kolmnurga kaks külge ja nendevaheline nurk on vastavalt kongruentsed teise kolmnurga kahe külje ja nendevahelise nurgaga, siis nende kolmnurkade ülejäänud nurgad on vastavalt kongruentsed;

14° kui sirgel on valitud suund ja sirge punktide hulk on jaotatud kahte osahulka nii, et iga punkt esimesest osahulgast eelneb igale punktile teisest osahulgast, siis kas esimeses osahulgas on viimane punkt ja teises osahulgas pole esimest punkti või esimeses osahulgas pole viimast punkti ning teises osahulgas on esimene punkt;

15° punkti, mis ei kuulu antud sirgele, läbib ainult üks sirge, mis ei lõika antud sirget.

Sellest definitsioonist tuleneb iga Eukleidese planimeetriasse kuuluv mõiste; siit järeldub iga selle planimeetria teoreem. Seepärast võib ütelda, et Hilberti definitsioon haarab kogu eukleidilise planimeetria, iga lause selles lõpmatus süsteemis. Kui silmas pidada niisugust sisulist rikkust, siis vahest ei tundugi esitatud definitsioon eriti keerulisena. Keeruline ja aeganõudev oli sellise tingimuste hulga väljaeraldamine, mis on Eukleidese tasandi struktuuri määramiseks piisav ja samal ajal ei sisalda midagi

---

[12] Nagu ikka definitsioonis, nii on ka siin lubamatu nõuda liigset: seda, et sirgele kuulub lõpmata palju punkte, saab järeldada järgnevalt sõnastatavatest tingimustest.

[13] Kolmnurk defineeritakse eelnevate tingimuste abil.

[14] Kolmnurga külg, s. o. sirglõik defineeritakse seose *on vahel* abil nii nagu V klassi matemaatikaõpikus.

[15] Sirge punktide järjestus, suund sirgel ja punkti asetsemine sirgel ühel või teisel pool selle sirge antud punkti defineeritakse eelnevate tingimuste abil. Koolis kasutatakse nende mõistete puhul joonist ja kujutlust.

[16] Nurk defineeritakse ühise alguspunktiga kiirte paarina.

[17] Punkti asetsemine tasandil ühel või teisel pool antud sirget defineeritakse eelnevate tingimuste abil; koolis kasutatakse sel puhul joonist ja kujutlust.

liigset. Thalese esimeste teoreemide tõestamisest Hilberti definitsiooni sõnastamiseni kulus kakskümmend viis sajandit.

Definitsiooni, milles ei ole soomõistet, nimetatakse aksiomaatiliseks definitsiooniks, selles sisalduvaid tingimusi aksioomideks ja nende kaudu määratud hulka matemaatiliseks struktuuriks. Eukleidese tasand on niisiis matemaatiline struktuur ja definitsioonitingimused 1°—15° on eukleidilise planimeetria aksioomid. Eukleidese stereomeetria määramiseks tuleb lisada veel neli tingimust (aksioomi) tasandi kohta ja mõnevõrra täiendada paari planimeetria aksioomi. Kui aga asendada tingimus 15° Lobatševski aksioomiga, siis saame Lobatševski geomeetria (planimeetria või stereomeetria) lähtedefinitsiooni. Aksioomid 1°—14° on seega Eukleidese ja Lobatševski planimeetriate jaoks ühised; nad määravad nende planimeetriate ühisosa — tasandi absoluutse geomeetria.

Et definitsioon on lause, mille puhul on tarbetu küsida, kas see on tõene või väär, siis ei vaja aksioomid tõestamist. Lause tõesus aksiomaatiliselt ülesehitatavas ehk nagu ka öeldakse — deduktiivses teoorias tähendab loogilist järelduvust eelnevatest lausetest; lõppkokkuvõttes tähendab tõesus lause järelduvust teooriale lähteks olevast aksiomaatilisest definitsioonist. Aksioom ei ole ei tõene ega väär lause, sest ta ei järeldu mitte millestki; aksioom on uuritavat struktuuri defineeriv tingimus.[18]

Iga definitsiooni puhul on tarvis uurida, kas tõepoolest eksisteerivad objektid, mis rahuldavad definitsioonitingimusi, s. t. kas hulk, mida kirjeldab definitsioon, ei ole tühi. Eespool[19] selgus, et Hilberti definitsiooniga sellist pahandust ei juhtu. Ilmnes koguni, et seda definitsiooni rahuldavad mitmesugused õige erinevatest objektidest koosnevad hulgad — eukleidilise planimeetria mudelid. Aksiomaatilisele definitsioonile ongi iseloomulik, et see ei määra defineeritavat hulka üheselt. Aksiomaatiline definitsioon eraldab välja kõik konkreetsed hulgad, millel on aksioomidega kirjeldatud struktuur. Matemaatiline struktuur on abstraktsioon, mis võtab kokku teatavate hulkade ühised omadused ja jätab kõrvale kõik nende hulkade erinevused.

Uurides mõistet *rööpkülik* uurib matemaatik korraga kõiki rööpkülikuid. Uurides matemaatilist struktuuri *eukleidiline tasand* uurib ta korraga kõiki selle struktuuri mudeleid. Selle asemel, et

---

[18] Tõsi küll, iga aksioomi saab muuta teoreemiks, s. t. lauseks, mida on tarvis tõestada. Sellise olukorra saavutamiseks tuleb muuta teooriasse kuuluvate mõistete loogilist järjestust. Valides teooria algmõisteteks mingid teised, seniste algmõistete kaudu defineeritud mõisted, muudame struktuuri definitsiooni. Niisiis saab struktuuri, nagu iga mõistet, mitmel viisil defineerida. Näiteks eukleidilise geomeetria jaoks on peale Hilberti süsteemi koostatud mitmeid teisi aksioomide süsteeme, sealhulgas ka niisuguseid, milles kõik Hilberti algmõisted on teiste mõistete kaudu tuletatavad.

[19] Matemaatika ja kaasaeg, XVIII, lk. 70.

vaadelda eraldi üksikjuhte (üksikuid objekte ja hulki), ühendab matemaatik üksikjuhud abstraktseks mõisteks või mõistete süsteemiks — matemaatiliseks struktuuriks. Siit, nagu märkisime, tuleneb matemaatiku otsustuste üldisus. Kuid siin on peidus ka teatav ökonoomse mõtlemise printsiip. Jättes kõrvale kõik üksikjuhtude ebaolulised erinevused, matemaatik ühelt poolt lihtsustab vaatevälja, seega lihtsustab probleemide lahendamist. Teiselt poolt ei tarvitse nüüd tõestada üht ja sama teoreemi teooria igas mudelis eraldi — kord tõestatult abstraktsel üldjuhul on see kehtiv kõigis sama struktuuriga konkreetsetes hulkades.

Et matemaatiline struktuur eraldatakse välja aksioomide abil, siis nimetatakse kirjeldatud uurimismeetodit aksiomaatiliseks meetodiks. Seda meetodit rakendatakse tänapäeval matemaatika kõigis valdkondades ja ka mõnes teises teaduses.

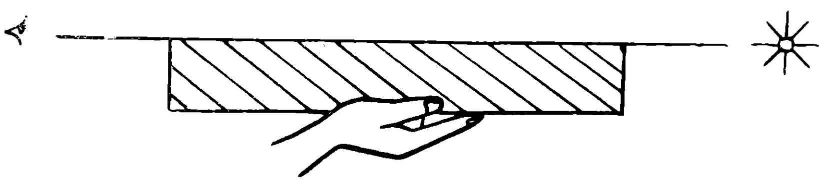
Ja siiski ainult ligikaudne mudel...

Geomeetri otsustuste täpsus ja üldisus tuleneb, nagu näeme, uurimismeetodist, mida ta kasutab. Kuid mida selgemini me mõistame seda meetodit, seda mõistetamatum tundub nende otsustuste kooskõla tegelikkusega. Geomeetri kogu töö ju seisneb abstraktsete mõistete kujundamises ja nendevaheliste seoste analüüsimises. Olles kord püstitanud oma lähtedefinitsiooni, ei tunne ta vähimatki vajadust vaadelda reaalseid esemeid. Ja ometi rakendatakse geomeetria teoreetilisi tulemusi edukalt igal sammul nii igapäevases elus kui ka tehnikas ja tootmises. Jääb mulje, et tegelikkust saab välja mõtelda või et geomeeter kirjutab tegelikkusele ette normid, mida see peab arvestama.

Antiik-Kreeka filosoof Platon arvaski, et tõeline on vaid ideede, s. t. mõistete maailm, ja reaalsed vahekorrad on selle ähmane peegeldus. Saksa mõttetark Kant aga väitis veel 18. sajandil, et reaalsed asjad tekitavad meis ainult ebamäärase taju, mida me ise vormime meie teadvuses sünnist peale sisalduvate ideede abil. Näiteks ruum eksisteerib Kanti järgi ainult meie teadvuses.

See filosoofia, mis püüab seletada geomeetria võimsust, tuleneb õigupoolest geomeetria ja tegelikkuse vahekorra mittemõistmisest ning väljendab salapärasust, mis aastasadade vältel ümbritses geomeetriat. Liiga pikk ja ebateadlik oli olnud aegade hämarusse ulatuv mõistete kujunemise protsess, kui et kreeka ja ka paljud hilisemad mõtlejad oleksid suutnud taibata mõistete päritolu. Pöördepunktiks kujunes Lobatševski geomeetria tunnustamine, mis ühtlasi tähendas Platoni ja Kanti filosoofia läbikukkumist. Mis sünnipärastest ideedest saab enam olla juttu, kui teadvuses võib kõrvuti esineda ruumi kaks erinevat teooriat!

Et mõisted tekivad reaalsete esemete vaatlemisest ja võrdlemisest, siis pärinevad nad tegelikkusest. Kuid nad ei ole asjade koopiad ja tegelikkuses ei ole objekte, mida võiks lugeda nende mudeliteks. Looduses näiteks ei ole punkte, sirgeid ja tasandeid, sest ükski materiaalne objekt ei saa olla läbimõõduta. Punkt on abstraktsioon, mis tekib sageli ettetulevas situatsioonis, kus mõne keha mõõtmed jäetakse ebaolulistena tähelepanust kõrvale. Nii toimime näiteks maastikul, orienteerudes mõne kaugel asetseva põõsa, ehituse või puudegrupi järgi. Sirgjoone mõiste tekib esemete servade ja paberile või tahvlile joonestatud sirglõikude vaatlemisel. Selleks, et otsustada, kas joon on sirge, võrdleme seda joonlaua servaga. Joonlauda ennast kontrollime valguskiire abil (joon. 2). Selles mõttes on valguskiir sirge füüsikaline etaloon. Kuid õigupoolest on ka valguskiir ise abstraktsioon, milles väljendub valguse omadus levida punktist punkti lühimat teed pidi.



Joonis 2.

Geomeetrilise sisuga mõisted saadakse ühesuguse kujuga esemete ühiste omaduste väljaeraldamisega nende esemete kõigist ülejäänud omadustest, mis jäetakse tähele panemata. Seepärast peegeldavad need mõisted reaalsust õige ühekülgselt ja ligikaudselt. Lihtsustatult peegeldavad esemetevaheliste vahekordade lõpmatut mitmekesidust ka mõistetevahelised seosed. Järelikult on kogu geomeetria reaalse ruumi ligikaudne teooria; see on reaalse ruumi lihtsustatud kujutis — ruumi ligikaudne m a t e m a a t i l i n e   m u d e l. Absoluutne täpsus ja üldisus on omane vaid geomeetrias vaadeldavatele seostele, mitte vastavusele geomeetria ja tegelikkuse vahel.

Kui loobuda arvamusest, et geomeetria on reaalse ruumi täpne peegeldus, siis ei tekita kahe erineva geomeetria olemasolu enam mingit arusaamatust. Üht ja sama nähtust seletatakse teaduses sageli mitme erineva teooriaga; pole midagi kummalist tõsiasjas, et ka ruumi kirjeldamiseks on Lobatševski päevist peale meie käsutuses kaks teooriat. Küsimusele, kumb neist teooriatest kujutab täpsemalt reaalset ruumi, ainult loogilise arutlusega vastata ei saa; selle üle otsustamiseks on tarvis sooritada mingi füüsikaline eksperiment. Nimelt sel viisil püüdiski Lobatševski probleemi lahendada. Et selgitada, missugune on kolmnurga sisenurkade summa, mõõtis ta nurgad astronoomiliste mõõtmetega kolmnurgas. Paraku osutus saadud summa erinevus sirgnurgast väiksemaks kui võimalik mõõtmisviga, mistõttu vastus jäi lahtiseks.

Kahemõõtmelised maailmad

Tasandi eukleidiline planimeetria on teatavasti ühel tasandil asetsevate kujundite teooria, mida arendatakse tasandilt lahkumata, s.o. ümbritsevat ruumi kasutamata. Planimeetriat nimetatakse ka tasandi s i s e g e o m e e t r i a k s. Et punkti asukoht tasandil on määratav kahe arvuga — punkti koordinaatidega, siis nimetatakse tasandit kahemõõtmeliseks punktihulgaks.

Näitlikult võib planimeetriat kirjeldada selliste kahemõõtmeliste olendite poolt arendatava geomeetriana, kes elavad tasandil ja kelle jaoks tasand on kogu olemasolev maailm. Nad saavad liikuda mööda tasandit, teha sääl vaatlusi ja sooritada mõõtmisi, kuid tasandist välja vaadata nad ei suuda ning ümbritsevast maailmast puudub neil igasugune ettekujutus. Nende olendite geomeetria kirjeldab nende maailma täpselt; mingit vajadust teise geomeetria järele neil kunagi ei teki.

Ka sfääril saab punkti asendi määrata kahe koordinaadiga, näiteks gloobusel geograafilise pikkuse ja laiusega. Seetõttu võib ka sfääri nimetada kahemõõtmeliseks maailmaks. Kujutleme, et see maailm on samuti asustatud arukate olenditega, kes ei tea midagi ümbritsevast ruumist ja kes uurivad oma maailma geomeetrilist struktuuri — sfääri sisegeomeetriat.[20]

Meile on kõrvalt vaadates selge, et sfäärilises maailmas ei ole sirgeid ja kõige sirgemateks joonteks seal on suurringjooned. Neid jooni nimetatakse sfääri *geodeetilisteks joonteks*. Ka sfääri geomeeter selgitab suurema vaevata, missugused on tema maailma kõige sirgemad jooned. Kuid erinevalt meist ei saa ta oletadagi mingite veel sirgemate joonte olemasolu; tema jaoks suurringjooned ongi sirged. Näitlikkuse mõttes võib asja selgitada nii. Oletame, et ka sfäärilises maailmas levib valgus punktist punkti mööda selle maailma lühimat teed, s.t. mööda sfääri geodeetilist joont. Et ka sfääri elanikule on sirge etalooniks valgusekiir, siis nimetab ta suurringjooni sirgeteks. Vaadeldes oma maailma sirgeid, hakkab ta ehitama selle geomeetriat.

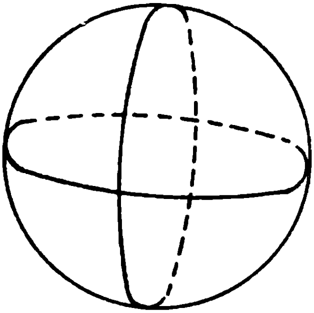
Olgu sfääri raadius väga suur ja liikumisvõimalused sfääril sellega võrreldes niisama piiratud, nagu meil oma maailmas. Et sfääri väga väike piirkond märgatavalt ei erine tasanditükist, siis kujuneb sfääri geomeetril maailmapilt, mis on analoogiline Antiik-Kreeka matemaatikute omaga: ta arendab välja Eukleidese planimeetria.[21]

Alles siis, kui sfääri elanike maailmatunnetus oluliselt süveneb, hakkavad nad mõistma, et nende geomeetria kirjeldab nende

---

[20] Pikemalt on järgnevalt kirjeldatavatest asjaoludest juttu Ü. L u m i s t e artiklis «Ruumi mõiste geomeetrias». — Matemaatika ja kaasaeg, XI, XII, XIII, XIV ning brošüüris Н. И. П о л ь с к и й. О различных геометриях. Киев, 1962.

[21] Stereomeetria olemasolust ei ole tal esialgu aimugi.



Joonis 3.

tegelikkust vaid ligikaudselt. Selline avastus on paratamatu, kui nad õpivad läbima pikemaid vahemaid. Siis selgub neile, et nende maailmas paralleelseid sirgeid ei leidugi, sest iga kaks sirget lõikuvad ja koguni kahes punktis (joon. 3). Sirged osutuvad kinnisteks joonteks ja sfääriline maailm lõplikuks, ehkki sel ei ole ääri. Ilmneb, et iga kolmnurga sisenurkade summa on suurem sirgnurgast ja kolmnurga pindala määrab valem[22]

$$S_\Delta = r^2\delta,$$

kus r on sfääri raadius ja δ on kolmnurga nurgadefekt[23], s. t. $\delta = \Sigma_\Delta - \pi$. Tõsi, sfääri raadiust sfäärilise maailma elanikud ette kujutada ei suuda, kuid nende matemaatikute valemitest selgub sellise nende maailmale iseloomuliku konstandi olemasolu.

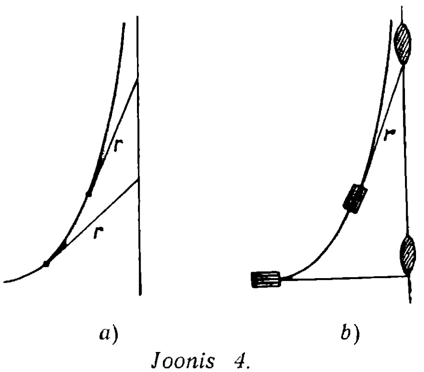
Konstanti $K = \frac{1}{r^2} = \frac{\delta}{S_\Delta}$ nimetatakse s f ä ä r i k õ v e r u s e k s[24]. Sellise konstandi saab leida ka Eukleidese tasandi jaoks, kusjuures siin $K=0$, sest $\delta=0$. Sfääri kõverus on positiivne arv, mis väljendab sfääri erinevust Eukleidese tasandist.

Iga pind on teatav kahemõõtmeline punktihulk. Vaadeldes pinna geodeetilisi jooni selle kahemõõtmelise maailma sirgetena, saab uurida selle maailma geomeetriat (pinna sisegeomeetriat). Osutub, et eukleidilises ruumis leidub ka niisuguseid pindu, mille sisegeomeetriaks on Lobatševski planimeetria. Kirjeldame lihtsamat nendest pindadest.

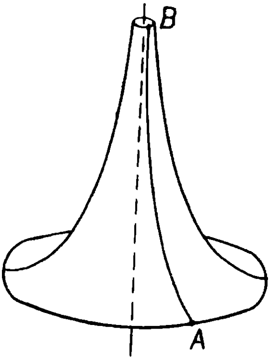
Joont, mille kõik puutujalõigud puutepunktist mingi antud sirgeni (baassirgeni) on võrdsed, nimetatakse t r a k t r i s s i k s (joon. 4, a). Näiteks sirgjooneliselt liikuva mootorpaadiga veetav parv, mis lähtub punktist väljaspool mootorpaadi teed, liigub vaikses vees mööda traktrissi (joon. 4, b). Pinda, mis tekib traktrissi pöörlemisel ümber baassirge, nimetatakse p s e u d o s f ä ä r i k s (joon. 5). Joont, mida mööda lõikab pseudosfääri tasand, mis läbib pöörlemistelge (kõver AB joonisel 5), nimetatakse pseudosfääri meridiaaniks. Lõigates pseudosfääri lahti mööda meridiaani, saamegi tüki Lobatševski kahemõõtmelist maailma.[25]

---

[22] Selle valemi tuletust vt. Matemaatika ja kaasaeg, XIII, lk. 8.
[23] Vt. ka Matemaatika ja kaasaeg, XIII, lk. 77.
[24] Täpsemalt: täis- ehk Gaussi kõveruseks.
[25] Saadud pind on piiratud lõikeservaga ja punkti A trajektooriga pöörlemisel. Pinda, mis kujutaks kogu Lobatševski tasandit, eukleidilises ruumis ei leidu.



Joonis 4.



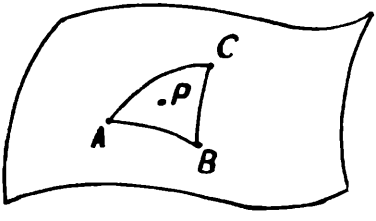
Joonis 5.

Ka pseudosfäärilise maailma elanikud loevad esialgu oma maailma Eukleidese tasandiks. Alles siis, kui arenevad nende liiklusvahendid või kasvab mõõteriistade täpsus, avastavad nad, et nende kodu on Lobatševski maailmas. Kolmnurga pindala jaoks saavad nad valemi $S_\Delta = -r^2\delta$. Siin r on teatav konstant, millega pseudosfäärlased ei oska siduda mingit kujutlust. Meie, kõrvaltvaatajate jaoks on see traktrissi puutujalõigu pikkus (joon. 4). Pseudosfäär on negatiivse kõverusega pind[26], sest selle puhul

$$K = -\frac{1}{r^2} = \frac{\delta}{S_\Delta}.$$

Eukleidese tasandi tükki võib vaadelda piirjuhuna, mis saadakse siis, kui pseudosfääri deformeeritakse (venitatakse ja surutakse kokku) nii, et $K \to 0$. Siit saab mõistetavaks eespool kirjeldatud loogiline seos Lobatševski ja Eukleidese geomeetriate vahel.

Kirjeldame veel suvalise kõverpinna kõveruse määramist. Moodustame sellise pinna geodeetiliste joonte kaartest kolmnurga $\triangle ABC$ (joon. 6). Vaatleme protsessi, milles see kolmnurk tõmbub kokku oma sisepiirkonna mingiks punktiks P. Et kõverpinna väga



Joonis 6.

---

[26] Konstantse negatiivse kõverusega pindu uuris juba 1839. a. hiljem pikemat aega Tartu Ülikoolis töötanud matemaatikaprofessor F. Minding. Juhuslikult ei sattunud ajakirja see number, milles ilmus Mindingi artikkel, Kaasanisse, mistõttu Lobatševskil jäi tegemata tema elutöö jaoks otsustava tähtsusega avastus, et sellised pinnad on tema planimeetria mudeliteks. Selle avastuseni jõudis itaalia matemaatik E. Beltrami alles 1868. a.

väike tükk ei erine märgatavalt Eukleidese tasandi tükist, siis kolmnurga kahanedes selle nurgadefekt δ läheneb nullile. Muidugi läheneb seejuures nullile ka kolmnurga pindala. Osutub, et nurgadefekti ja pindala suhe läheneb teatavale arvule K_P:

$$\lim_{\triangle ABC \to P} \frac{\delta}{S_\triangle} = K_P.$$

Arvu K_P nimetatakse vaadeldava p i n n a k õ v e r u s e k s punktis P. Pinna kõverus pinna erinevates punktides on üldiselt erinev. Punkti muutudes võib muutuda ka kõveruse märk. Eespool vaadeldud pinnad (Eukleidese tasand, sfäär ja pseudosfäär) on lihtsaimat tüüpi, nimelt k o n s t a n t s e k õ v e r u s e g a p i n n a d.

Erinevaid kahemõõtmelisi maailmu, nagu selgus, on lõpmata palju. Oluline on tähele panna, et geomeetria nende maailmade väga väikestes piirkondades peaaegu ei erine Eukleidese planimeetriast. Alles suuremate piirkondade uurimisel tekib vajadus luua mingi üldisem geomeetria — vaadeldava pinna sisegeomeetria.

Ruum, milles me elame

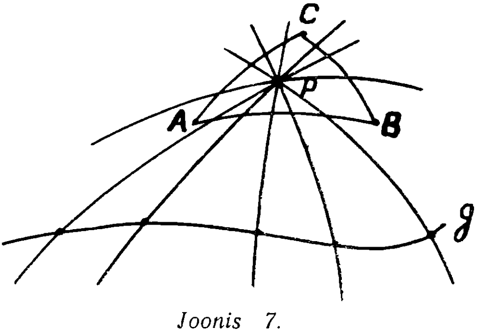
Kolmemõõtmeline ruum, milles me elame, tundub meile lõpmata suure möbleeritud toana. Meile näib, et see tuba on eukleidiline, s. t. niisugune, nagu õpetas Eukleides, sest — midagi muud me ei oska kujutleda. Eukleideselt pärineb ka iseendastmõistetavaks peetav arvamus, et reaalsete kehade olemasoluks on see mahuti küll vajalik, kuid ruum ise ei sõltu temas paiknevatest kehadest. Kui mateeria mingil salapärasel põhjusel häviks, siis ruum nähtavasti säiliks ikka endisena — nagu elutuba, millest on mööbel remondi ajaks välja tassitud.

Iseendastmõistetavad tõed on kõige kahtlasemad tõed; nende üle tasub pead murda. Meie kogemused ja teadmised on veel õige piiratud ja ebatäpsed, mistõttu meie kujutlus oma maailmast võib olla niisama puudulik kui esimene geomeetria, mida arendaksid sfääri ja teiste kõverate kahemõõtmeliste maailmade elanikud, kui sellised olendid eksisteeriksid. Igatahes on meil nende hüpoteetiliste kahemõõtmeliste olenditega palju ühist. Ka meie tunneme mõnevõrra täpsemalt ainult kaduvväikest osa oma maailmast, sest meie liikumisvabadus on esialgu äärmiselt piiratud — hoolimata kosmoserakettidest tammume me praktiliselt veel paigal, ja meie esimene geomeetria on samuti eukleidiline. Niisugune analoogia viib mõttele, et ka meie kolmemõõtmeline maailm võib olla mingil meile kujuteldamatul viisil kõver.

Esimese signaali, et see tõepoolest nii võib olla, andis matemaatika. Selleks signaaliks on Lobatševski geomeetria, mis on ju loogiliselt mõttekas mitte ainult kahe-, vaid ka kolmemõõtmelisel juhul. Lobatševski stereomeetria on kõvera kolmemõõtmelise ruumi esimene matemaatiline mudel. Niisiis mudel on, aga kuidas on lugu tegelikkusega?

Esialgu jätkus ruumi veelgi üldisemate mudelite väljatöötamine matemaatikas. Eeskuju üldistamiseks andsid kahemõõtmelised maailmad — kõverpinnad. Pseudosfäär on ju kõverpinna õige lihtne erijuht; üldiselt on pind punktist punkti muutuva kõverusega. Võimalik on ka muutuva kõverusega kolmemõõtmelise ruumi matemaatiline teooria. Aluse niisugusele teooriale rajas saksa matemaatik Bernhard Riemann juba 1854. a. Tema tööle ei pööratud esialgu tähelepanu. Alles Lobatševski ideede võidukäik sundis matemaatikuid uurima ja arendama ka Riemanni geomeetriat. Selles geomeetrias üldistatakse ka ruumi mõõtmete arvu; nimelt vaadeldakse siin n-mõõtmelisi ruume, kus n on mistahes naturaalarv.[27] Veelgi enam kui Lobatševski teooria leiab Riemanni geomeetria rakendamist mitte ainult ruumi kirjeldamisel, vaid ka paljude teiste valdkondade uurimisel.

Kolmemõõtmelise ruumi kõverust suudame me ka tänapäeval niisama vähe kujutlusega haarata kui sfääri kahemõõtmeline elanik mõistaks sfääri kõverust. Matemaatiliselt saab ruumi kõverust lihtsalt selgitada. Selleks vaadeldakse mingit punkti P ja seda mitteläbivat geodeetilist joont g (joon. 7). Joone g punkti ja punkti P läbib üks ja ainult üks geodeetiline joon.[28] Kõigi selliste geodeetiliste joonte hulk moodustab ruumis teatava pinna α. Eukleidilises ruumis on geodeetilisteks sirged ja pind α on tasand. Kõveras ruumis geodeetiline ei ole sirge, vaid kõige sirgem joon selles mõttes, et ta määrab minimaalse kauguse oma kahe punkti vahel. Seepärast on geodeetilistest joontest moodustatud pind α



Joonis 7.

[27] Matemaatiliselt on selle ruumi punktiks n arvu järjestatud süsteem $(x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n)$.

[28] Vähemalt on see nii punkti P ümbruses, mis meid huvitabki.

kõige tasasem pind kõveras ruumis. Selle pinna kõveruse tema antud punktis saab määrata selleks punktiks koonduva kolmnurga abil. Sel viisil saadavat arvu $K_{P,\alpha}$ nimetatakse r u u m i k õ v e r u s e k s punktis P pinna α sihis:

$$K_{P,\alpha} = \lim_{\triangle ABC \to P} \frac{\delta}{S_\triangle}.$$

Muutes geodeetilist joont g võib moodustada üha uusi pindu, mis läbivad punkti P, ja määrata kõverusi nende sihtides; tulemused üldiselt on erinevad. Osutub, et punktis P määratud kõveruste vahel on teatav sõltuvus, mis võimaldab ruumi kõverust punktis P kirjeldada kuue arvu süsteemiga. Ruumi erinevates punktides on selliste arvukuuikutega määratud kõverused üldiselt erinevad.

Matemaatikute järel hakkasid ruumi kõveruse vastu huvi tundma füüsikud. 1916. a. ehitas A l b e r t E i n s t e i n füüsikalise ruumi mudeli, mille kohaselt ruumi piirkonna geomeetria on määratud selles piirkonnas sisalduva mateeriaga. Einsteini järgi ruum ei ole eukleidiline kast, mis on ükskõikne oma sisu suhtes, vaid mateeria olemasoluvorm — ja vorm sõltub sisust ning muutub koos sellega. Eukleidese geomeetria ligikaudsus tuleneb ühekülgsest vaateviisist: säilitades mõistetes vaid kehade vormi, saame küll lihtsa, kuid ebatäpse teooria. Einsteini relatiivsusteooria on korraga nii ruumi füüsikaline kui ka geomeetriline mudel. Selle teooria kohaselt kirjeldab reaalse ruumi struktuuri Riemanni geomeetria.

1916. aastal oli Einsteini maailmapilt vaid puhas teooria, mida ei kinnitanud veel ükski tegelikkusest pärinev tähelepanek. Kuid juba 1920. aastal leidis Einsteini õpetus esimese eksperimentaalse kinnituse päikesevarjutuse aegu tehtud astronoomilistes vaatlustes. Relatiivsusteooria järgi peab Päikese lähenemisel tema liikumisteel asetsevate lähedaste tähtede vaheline nurkkaugus kahanema ja Päike peab katma tema teele jäävaid tähti veidi hiljem, kui see tuleneb eukleidese geomeetria põhjal tehtud arvutustest. Vaatlusandmed on kooskõlas nende väidetega. Einstein seletas kirjeldatud nähtusi ruumi kõveruse kasvuga Päikese lähenemisel. Et kõveras ruumis ei ole lühimaks teeks (geodeetiliseks) kahe punkti vahel enam Eukleidese sirge, siis kaldub valgusekiir Päikese gravitatsiooniväljas oma esialgselt teelt kõrvale ja tähe asend taevavõlvil näib muutuvat.

Kirjeldatud ja ka mõned teised relativistlikud efektid lubavad otsustada, et ruum, milles me elame, ei ole eukleidiline. See otsustus avab me pilgule uue maailma, millesse suunavaks teeviidaks on Lobatševski geomeetria.

RATSIONAALSED TETRAEEDRID

J. Gabovitš, H. Kilov

1. Sissejuhatus

Olgu antud tetraeeder tippudega A, B, C, D ning servadega $a=BC$, $b=AC$, $c=AB$, $a_1=AD$, $b_1=BD$, $c_1=CD$. Sellist tetraeedrit ja ta ruumala V me tähistame vastavalt sümbolitega

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad V\begin{pmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{pmatrix}.$$

Nendes sümbolites üksteise all seisvad servad (a ja a_1 jne.) on kiivad. Neid nimetatakse tetraeedri *vastasservadeks.*

Tetraeedri ruumala V arvutatakse valemist[1]

$$\begin{aligned} 144V^2 = & \, a^2a_1^2(b^2+c^2-a^2+b_1^2+c_1^2-a_1^2)+ \\ & +b^2b_1^2(c^2+a^2-b^2+c_1^2+a_1^2-b_1^2)+ \\ & +c^2c_1^2(a^2+b^2-c^2+a_1^2+b_1^2-c_1^2)- \\ & -a^2b^2c^2-a^2b_1^2c_1^2-a_1^2b^2c_1^2-a_1^2b_1^2c^2. \end{aligned} \tag{1}$$

Et selles valemis suurus V esineb ruudus, siis ratsionaalsete servadega tetraeedri ruumala on reeglina irratsionaalarv, nagu näiteks

$$V\begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{119}}{432}. \tag{2}$$

Ratsionaalsete servadega tetraeedrid me võime jaotada klassideks nii, et igasse klassi satuksid kõik omavahel sarnased tetraeedrid ja ainult need. Siis kuulub igasse klassi parajasti üks tetraeeder, mille servad on ühisjagajata täisarvud. Viimast me nimetame *primitiivseks* tetraeedriks. Näiteks korrutades tetraeedri (2) servad arvuga 6, saame sama klassi primitiivse esindaja. Ruumala suureneb vastavalt 216-kordseks, seega

$$V\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{119}}{2}.$$

---

[1] Vt. Я. Габович. Объем тетраэдра. — Математика в школе, 1963, № 6, стр. 58.

Tetraeedrit, mille kõik servad ja ka ruumala on ratsionaalarvud, nimetatakse *ratsionaalseks tetraeedriks.*

Ratsionaalsete tetraeedrite ülesleidmine on üldjuhul raske ülesanne. Meetodi selle lahendamiseks andis K. Schwering.[2] Elegantseks ratsionaalse tetraeedri näiteks on

$$V\begin{pmatrix} 9 & 10 & 11 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}=48,$$

kus servad moodustavad aritmeetilise progressiooni.

Schweringi menetluse puuduseks on see, et ta ei võimalda primitiivsete ratsionaaltetraeedrite tabuleerimist servade suuruse järgi. Schweringi poolt antud tabelis esineb vaid kaks tetraeedrit, mille servade pikkused ei ületa arvu 10:

$$V\begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}=\frac{8}{3}, \quad V\begin{pmatrix} 6 & 6 & 8 \\ 9 & 9 & 9 \end{pmatrix}=48.$$

Meie poolt teostatud arvutused näitavad, et selliseid tetraeedreid eksisteerib kakskümmend. Tulemused on antud tabelis 1.

Tabel 1

Nr.	a	b	c	a_1	b_1	c_1	V
1	2	3	3	4	3	3	8/3
2	3	3	4	3	3	4	8/3
3	2	4	4	7	6	5	6
4	2	3	4	8	8	7	6
5	2	4	4	6	7	8	6
6	2	5	6	4	8	7	6
7	3	6	6	4	7	8	9
8	4	4	5	8	7	6	15
9	4	6	8	8	10	7	21
10	2	9	9	8	9	9	64/3
11	4	7	7	6	7	7	24
12	5	6	7	5	8	7	24
13	6	7	7	4	9	9	24
14	4	7	9	10	7	9	24
15	6	6	8	9	9	5	80/3
16	6	6	8	9	9	9	48
17	6	7	7	8	9	9	48
18	6	7	7	9	8	10	48
19	7	8	9	6	9	10	48
20	8	9	9	8	9	9	224/3

Tabeli andmed näitavad, et eksisteerib ratsionaalseid tetraeedreid nelja võrdse servaga (nr. 1, 2, 10 jne.). Näitame, et neli on maksimaalne võimalik võrdsete servade arv. Teatavasti servaga a korrapärase tetraeedri ruumala arvutatakse valemist

[2] Journal für die reine und angewandte Mathematik, **115**, 1895, S. 301—307.

$12V=a^3\sqrt{2}$. Siit on ilmne, et kui a on ratsionaalarv, siis on V irratsionaalne ja seega korrapärane tetraeeder ei saa olla ratsionaalne.

Olgu nüüd tetraeedri viis serva võrdsed arvuga a, kuues serv aga arvuga b (a ja b on ühisjagajata täisarvud). Valemist (1) saame selle tetraeedri ruumala jaoks

$$12V=ab\sqrt{3a^2-b^2}.$$

Selleks, et tetraeeder oleks ratsionaalne, peab kehtima võrdus

$$b^2+g^2=3a^2, \tag{3}$$

kus g on samuti täisarv. Näitame, et see pole võimalik. Kui a oleks paaritu arv, siis arvudest b, g üks peaks olema paarisarv, teine paaritu arv. Jagades võrduse mõlemad pooled neljaga, saaksime vasakule jäägi üks, paremale jäägi kolm, mis muidugi pole võimalik. Järelikult peaks a olema paarisarv. Et kahe paaritu arvu ruutude summa jagub kahega, kuid ei jagu neljaga, siis peaksid b ja g mõlemad olema paarisarvud. Kuid sel juhul oleks arvudel a ja b vastupidi eeldusele ühisjagaja kaks, mis samuti pole võimalik. Väide on tõestatud.

2. Kiiltetraeeder

Kui tetraeedril on neli võrdset serva, siis tuleb eristada kahte juhtu, olenevalt sellest, kas neist kolm väljub ühest tipust või mitte. Esimesel juhul on tegemist tetraeedriga

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & c & c \end{pmatrix}, \tag{4}$$

mille ruumala on vastavalt valemile (1)

$$V=\frac{c}{12}\sqrt{3a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2}.$$

Selleks, et tetraeeder (4) oleks ratsionaalne, peaksid diofantilisel võrrandil

$$(a^2+b^2-c^2)^2+g^2=3(ab)^2$$

olema täisarvulised lahendid, s. t. me peame jälle, nagu võrrandi (3) puhul, leidma kaks täisarvu, mille ruutude summa võrdub kolmekordse ruuduga. Nagu ülal nägime, pole see võimalik. Seega on tõestatud, et tetraeeder (4) ei saa olla ratsionaalne.

Kui neljast võrdsest servast kolm ei välju ühest tipust, siis on tegemist tetraeedriga

$$\begin{pmatrix} a & a & 2x \\ a & a & 2y \end{pmatrix} \tag{5}$$

(tähistus $c=2x$, $c_1=2y$ osutub, nagu kohe näeme, väga sobivaks). Tetraeedri (5) kõik neli tahku on võrdhaarsed kolmnurgad. See tekib siis, kui kahest ühtivast võrdhaarsest kolmnurgast ühte pöörata teatud nurga võrra ümber ühise aluse. Et kuju meenutab kolmnurkset kiilu, nimetame seda *kiiltetraeedriks*.

Kiiltetraeedri (5) ruumala arvutatakse (jällegi valemist (1) tuletatud) valemi järgi

$$V=\frac{2}{3}xy\sqrt{a^2-x^2-y^2}.$$

Ratsionaalse kiiltetraeedri saamiseks peame lahendama naturaalarvudes diofantilise võrrandi

$$x^2+y^2+z^2=a^2, \tag{6}$$

ning selle ruumala avaldub siis lihtsa valemiga

$$V=\frac{2}{3}xyz.$$

Võrrand (6) esineb paljude geomeetriliste ülesannete lahendamisel. Kui otsime vektorit, mille koordinaadid ja pikkus peavad olema täisarvud; kui tahame leida risttahukat täisarvuliste servadega ning diagonaaliga; kui ratsionaalse raadiusega kera pinnal otsime ratsionaalseid punkte — kõikidel nendel ja paljudel teistel juhtudel ülesanne taandub diofantilise võrrandi (6) lahendamisele.

Võrrandi (6) naturaalarvuliste lahendite leidmine on lihtne. Arvud x ja y valime suvaliselt nii, et nende summa oleks paaritu arv; lahutame x^2+y^2 mingite mittevõrdsete tegurite paariks; suurema teguri võrdsustame summaga $a+z$ ning väiksema vahega $a-z$; lõpuks leiame saadud süsteemist z ja a. Olgu näiteks $x=4$, $y=7$, $x^2+y^2=65$. Üks võimalus on valida $a+z=13$, $a-z=5$, mis viib lahendile $4^2+7^2+4^2=9^2$. Kui aga võtame $a+z=65$, $a-z=1$, saame lahendi $4^2+7^2+32^2=33^2$. Tabelis 2 on antud

Tabel 2

a	x	y	z	a	x	y	z	a	x	y	z
3	1	2	2	19	6	10	15	25	12	15	16
7	2	3	6		6	6	17		9	12	20
9	4	4	7		1	6	18	27	7	14	22
	1	4	8	21	8	11	16		10	10	23
11	6	6	7		4	13	16		2	14	23
	2	6	9		4	8	19		2	10	25
13	3	4	12		4	5	20		2	7	26
15	2	10	11	23	6	13	18	29	12	16	21
	2	5	14		3	14	18		11	12	24
17	8	9	12		3	6	22		3	16	24
	1	12	12								

võrrandi (6) kõik ühisjagatata naturaalarvulised lahendid tingimusel $a<30$.

Võrrandi (6) igast lahendist (a; x, y, z) võib saada suuruste x, y, z permuteerimise teel kaks või kolm ratsionaalset kiiltetraeedrit. Nii näiteks permuteeritud lahenditest (21; 8, 11, 16), (21; 8, 16, 11) ning (21; 11, 16, 8) saame vastavalt tetraeedrid

$$\begin{pmatrix} 21 & 21 & 16 \\ 21 & 21 & 22 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 21 & 21 & 16 \\ 21 & 21 & 32 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \begin{pmatrix} 21 & 21 & 22 \\ 21 & 21 & 32 \end{pmatrix}.$$

Lisaks tabelis 1 esinevatele kiiltetraeedritele anname tabelis 3 kõik kirjeldatud meetodiga saadud primitiivsed ratsionaalsed kiiltetraeedrid, mille servade pikkused ei ületa arvu 20.

Et diofantilisel võrrandil (6) on lõpmata palju ühisjagajata naturaalarvulisi lahendeid, siis on ka primitiivseid ratsionaalseid kiiltetraeedreid lõpmata palju.

Tabel 3

a	b	c	a_1	b_1	c_1	V
9	9	2	9	9	16	64/3
9	9	8	9	9	16	64/3
7	7	4	7	7	12	24
7	7	6	7	7	12	24
11	11	4	11	11	12	72
11	11	4	11	11	18	72
11	11	12	11	11	18	72
19	19	2	19	19	12	72
9	9	8	9	9	14	224/3
15	15	4	15	15	10	280/3
13	13	6	13	13	8	96
15	15	4	15	15	20	440/3
11	11	12	11	11	12	168
11	11	12	11	11	14	168
19	19	12	19	19	12	408
17	17	16	17	17	18	576
19	19	12	19	19	20	600

3. Kuboid

Kuboidiks nimetatakse tetraeedrit, mille ühe kolmetahulise nurga kõik tasanurgad on täisnurgad. Kuboid tekib siis, kui kuubilt ära lõigata üks selle kolmetahulistest nurkadest, millega on seletatav ka nimetus.

Olgu näiteks tasanurgad tipu D juures kõik täisnurgad. Siis kuboidi ruumala avaldub lihtsa valemiga

$$V = \frac{a_1 b_1 c_1}{6}.$$

Et külgtahud on täisnurksed kolmnurgad (hüpotenuusidega a, b ja c), siis ratsionaalse kuboidi saamiseks peame lahendama naturaalarvudes võrrandisüsteemi

$$a^2=b_1^2+c_1^2, \qquad b^2=c_1^2+a_1^2, \qquad c^2=a_1^2+b_1^2. \tag{7}$$

Saab näidata, et sellel süsteemil on lõpmata palju ühisjagajata lahendeid ja seega eksisteerib lõpmata palju primitiivseid ratsionaalkuboide. Moodustagu nimelt arvud m, n ja p suvalise Pythagorase kolmiku, s. t. rahuldagu nad Pythagorase võrrandit $m^2+n^2=p^2$. Siis võib asendamise teel kergesti kontrollida, et suurused

$$\begin{array}{lll} a=p^3, & b=m(4n^2+p^2), & c=n(4m^2+p^2), \\ a_1=4mnp, & b_1=n\,|4m^2-p^2|, & c_1=m\,|4n^2-p^2| \end{array} \tag{8}$$

rahuldavad süsteemi (7). Nii näiteks Pythagorase kolmik (3, 4, 5) annab ratsionaalse kuboidi

$$\begin{pmatrix} 125 & 267 & 244 \\ 240 & 44 & 117 \end{pmatrix} \tag{9}$$

ruumalaga $V=205\,920$. See on muide vähimate täisarvuliste servadega ratsionaalne kuboid. Jätame lugeja hooleks veenduda, et süsteem (7) on tõesti rahuldatud:

$$125^2=44^2+117^2, \qquad 267^2=117^2+240^2, \qquad 244^2=240^2+44^2.$$

Kuboidi (9) avastas Halcke (1719), valemid (8) tuletas Saunderson (1740). Poola matemaatik Sierpinski juhtis tähelepanu asjaolule, et Saundersoni valemid annavad ainult osa süsteemi (7) lahenditest. Selle süsteemi üldlahend on tänapäevani teadmata. Seoses sellega võtsid kanadalased Lal ja Blundon, kasutades võimsat elektronarvutit IBM-1620, aastal 1969 ette ulatuslikke arvutusi kõikide primitiivsete ratsionaalkuboidide leidmiseks, mille servade pikkused ei ületa arvu 100 000. Selliseid kuboide on 57. Nende hulgas on viis kuboidi servadega alla 1000. Viimased on toodud tabelis 4.

Tabel 4

a	b	c	a_1	b_1	c_1
125	244	267	240	117	44
157	725	732	720	132	85
500	707	843	693	480	140
281	808	825	792	231	160
348	365	373	275	252	240

4. Võrdtahkne tetraeeder

Tetraeedril

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

on kõik kolm paari vastasservi võrdsed. Kõik selle tahud on kongruentsed kolmnurgad külgedega a, b ja c. Sellepärast seda nimetatakse *võrdtahkseks tetraeedriks.* Lähtudes valemist (1), saame järgmise valemi võrdtahkse tetraeedri ruumala arvutamiseks:

$$72V^2=(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2). \qquad (10)$$

Siit järeldub otsekohe, et tahud peavad olema teravnurksed kolmnurgad, sest ainult sel juhul on valemi (10) parem pool positiivne.

Et saada ratsionaalseid võrdtahkseid tetraeedreid, peame lahendama naturaalarvudes diofantilise võrrandi (10). Kui kolmnurk (a, b, c) on isekülgne, siis võrrandi (10) üldlahend on teadmata. Ent järgmine teoreem näitab, et primitiivseid lahendeid on sel juhul lõpmata palju.

Teoreem. *Igale täisnurksete külgtahkudega ratsionaalsele kuboidile vastab ratsionaalne võrdtahkne tetraeeder, mille tahkudeks on kuboidi põhjaga kongruentsed kolmnurgad ning ruumala võrdub kuboidi kahekordse ruumalaga.*

Tõestus. Kuboidi puhul on kehtivad võrdused (7). Siis on

$$a^2+b^2-c^2=2c_1^2, \quad b^2+c^2-a^2=2a_1^2, \quad c^2+a^2-b^2=2b_1^2.$$

Asendades võrrandisse (10), saame

$$V=\frac{a_1b_1c_1}{3},$$

m. o. t. t.

Seega on võrrandil (10) järgmine erilahend:

$$a=p^3, \quad b=m(4n^2+p^2), \quad c=n(4m^2+p^2),$$
$$3V=4m^2n^2p\,|4m^2-p^2|\cdot|4n^2-p^2|,$$

kus suurustel m, n, p on sama tähendus, mis oli eelmises punktis. Nii näiteks väärtused $m=3$, $n=4$, $p=5$ viivad võrdtahkse tetraeedri juurde

$$V\begin{pmatrix} 125 & 267 & 244 \\ 125 & 267 & 244 \end{pmatrix}=411\,840.$$

Vähimate isekülgsete tahkudega primitiivsete ratsionaalsete võrdtahksete tetraeedrite määramiseks kasutasime elektronarvutit БЭСМ-4. Tulemused on antud tabelis 5.

Tabel 5

a	b	c	V
11	20	21	360
33	65	72	16 640/3
69	91	100	60 840
21	99	100	19 360/3
37	165	168	76 960/3
133	156	187	339 864
116	181	195	349 440
148	195	203	611 520
69	251	260	51 480
125	244	267	411 840

Kui tahud on võrdhaarsed kolmnurgad ($b=a$, $c=2x$), siis on tegemist tetraeedriga

$$\begin{pmatrix} a & a & 2x \\ a & a & 2x \end{pmatrix} \tag{11}$$

ning ülesanne muutub lihtsamaks. Et võrdtahkne tetraeeder (11) osutub ühtlasi kiiltetraeedri erijuhuks ($y=x$), siis ülesanne taandub diofantilise võrrandi (6) erikuju

$$2x^2+z^2=a^2 \tag{12}$$

lahendamisele. Meetod on sama, nagu on kirjeldatud punktis 2. Detailidesse tungimata anname võrrandi (12) *üldlahendi* ühisjagajata naturaalarvudes:

$$a=m^2+2n^2, \qquad x=2mn, \qquad z=|m^2-2n^2|,$$

kus ühisjagajata arvudest m ja n esimene on suvaline paaritu arv, teine naturaalarv.

Tetraeedri (11) ruumala arvutamiseks saame siis valemi

$$3V=8m^2n^2|m^2-2n^2|.$$

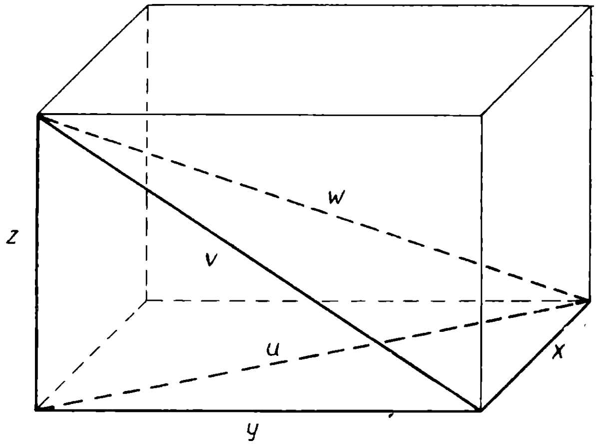
Näide. Väärtustele $m=3$, $n=2$ vastab võrdtahkne kiiltetraeeder

$$V\begin{pmatrix} 17 & 17 & 24 \\ 17 & 17 & 24 \end{pmatrix}=96.$$

5. Diagonaaltetraeeder

Olgu antud risttahukas servadega x, y ja z (vt. joonis). Tõmbame diagonaallõiked (vwx) ja (uwz). Tekib nn. *diagonaaltetraeeder*

$$V\begin{pmatrix} u & x & y \\ v & z & w \end{pmatrix}=\frac{xyz}{6},$$



mis on piiratud kahe diagonaallõikega ning risttahuka kahe tahuga. Selle tetraeedri kõik tahud on täisnurksed kolmnurgad.

Vastupidi võib kergesti tõestada, et kui tetraeedri kõik tahud on täisnurksed kolmnurgad, siis see on diagonaaltetraeeder.

Ratsionaalse diagonaaltetraeedri saamiseks peame lahendama naturaalarvudes diofantilise süsteemi

$$x^2+y^2=u^2, \quad y^2+z^2=v^2, \quad x^2+y^2+z^2=w^2. \tag{13}$$

Selle süsteemi üldlahend on samuti tänapäevani teadmata. Ent saab tuletada valemeid, mis näitavad, et primitiivseid ratsionaalseid diagonaaltetraeedreid on lõpmata palju. Nii näiteks igast risttahukast servadega

$$x=|2m^4-5m^2n^2+2n^4|\cdot(4m^4-m^2n^2+4n^4),$$
$$y=12mn(m^2+n^2)\cdot|2m^4-5m^2n^2+2n^4|,$$
$$z=6\,|m^4-n^4|\cdot|m^4-7m^2n^2+n^4|$$

ülalpool kirjeldatud viisil moodustatud diagonaaltetraeeder on ratsionaalne (m ja n on suvalised naturaalarvud).

Arvulise näite saamiseks valime $m=3$, $n=1$. Siis on risttahuka mõõtmed järgmised:

$$x=37\,961, \quad y=42\,840, \quad z=9\,120.$$

Ülejäänud diagonaaltetraeedri servad arvutame valemitest (13):

$$u=57\,239, \quad v=43\,800, \quad w=57\,961.$$

Primitiivsed ratsionaalsed diagonaaltetraeedrid esinevad suhteliselt harva. Meie poolt teostatud arvutused näitavad, et nende hulgas eksisteerib vaid viis, mille servade pikkused ei ületa arvu 10 000. Need tetraeedrid on toodud tabelis 6.

Ratsionaalsel diagonaaltetraeedril on see huvitav omadus, et mitte ainult selle servad ja ruumala, vaid ka kõikide tahkude pind-

Tabel 6

x	y	z	u	v	w
495	840	448	975	952	1 073
1 925	1 680	2 052	2 555	2 652	3 277
819	1 680	3 740	1 869	4 100	4 181
2 275	1 320	2 772	3 485	3 828	4 453
4 653	1 680	3 404	4 947	3 796	6 005

alad on ratsionaalsed (sest tahud on ratsionaalsete kaatetitega täisnurksed kolmnurgad).

Sama omadus on ka servade w, x, z abil moodustatud kiiltetraeedril

$$\begin{pmatrix} w & w & 2x \\ w & w & 2z \end{pmatrix},$$

sest selle tahkudeks on ratsionaalsed võrdhaarsed kolmnurgad. Kui lähtuda tabeli 6 esimeses reas antud diagonaaltetraeedrist, saame kiiltetraeedri

$$\begin{pmatrix} 1073 & 1073 & 990 \\ 1073 & 1073 & 896 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Tänu sellele imeteldavale omadusele tsiteeritakse tetraeedrit (14) sageli matemaatilises kirjanduses.[3] Meie analüüs näitab, et seda tüüpi tetraeedreid on lõpmata palju.

NELJA NELJAGA

Tõeleid Roosinupp

Kümme araabia numbrimärki on muidugi üldtuntud, kuid sageli ei teata, et enamik neist on tegelikult täiesti tarbetud. Minu uurimiste tulemusena on nimelt selgunud, et mistahes naturaalarvu üleskirjutamiseks piisab ainult numbrist 4, kusjuures sedagi tuleb iga arvu korral kasutada vaid neljas eksemplaris. Selle aluseidrajava väite tõestuseks esitan siinkohal lihtsalt järgmise, nn. Roosinupu valemi:

$$n = -\log_4 \log_4 \underbrace{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{}}}}_{2n} \overline{\sqrt{4}+\sqrt{4}},$$

millest muuhulgas nähtub, et tegelikult jätkuks isegi ainult numbri 4 kolmest eksemplarist — neljas on lisatud vaid sümmeetria huvides.

Et Roosinupu valemi kasutamine on suuremate arvude korral seotud mõningate tehnilist laadi raskustega, siis olen välja töötanud terve rea lihtsustusi. Järgnevalt ongi reprodutseeritud vastavate tabelite paar esimest lehekülge:

[3] В. Серпинский. Пифагоровы треугольники. Москва, 1959, стр. 73 В. Литцман. Теорема Пифагора. Москва, 1960, стр. 99.

$$0=4+4-4-4$$
$$1=44:44$$
$$2=4^{4-4}\cdot\sqrt{4}$$
$$3=\left[\sqrt{44:4+4}\right]$$
$$4=(4+4+\sqrt{4})^{\log 4}$$
$$5=\sqrt{4}+\sqrt{4}+4:4$$
$$6=4+4-4+\sqrt{4}$$
$$7=44:4-4$$
$$8=(4:4)\cdot 4\cdot\sqrt{4}$$
$$9=4\cdot\sqrt{4}+4:4$$
$$10=44:4{,}4$$
$$11=44:(\sqrt{4}+\sqrt{4})$$
$$12=\binom{4}{\sqrt{4}}\cdot 4:\sqrt{4}$$
$$13=4!:\sqrt{4}+4:4$$
$$14=4\cdot 4-4:\sqrt{4}$$
$$15=44:4+4$$
$$16=4+4+4+4$$
$$17=4\cdot 4+4:4$$
$$18=4\cdot 4+4:\sqrt{4}$$
$$19=4!-4-\binom{4}{4}$$
$$20=4\cdot\sqrt{4}\cdot\sqrt{4}+4$$
$$21=4!-4!:(4\cdot\sqrt{4})$$
$$22=\left[\sqrt[4]{(4!!)!}\right]+4+4$$
$$23=4!-4^{4-4}$$
$$24=4^{\sqrt{4}}+4+4$$
$$25=4!+(4+4):4!!$$
$$26=4!+4\cdot\sqrt{4}:4$$
$$27=4!+4!:(4\cdot\sqrt{4})$$
$$28=4\cdot 4\cdot\sqrt{4}-4$$
$$29=4!+4+4:4$$
$$30=(4+4:4)!:4$$
$$31=\left[\sqrt{\binom{44}{\sqrt{4}}+4!}\right]$$
$$32=\sqrt{4}\cdot\sqrt{4}\cdot\sqrt{4}\cdot 4$$
$$33=4\cdot 4\cdot\sqrt{4}+[\log 4!]$$
$$34=4\cdot 4\cdot\sqrt{4}+\sqrt{4}$$
$$35=4!+44:4$$
$$36=(4+4)\cdot 4+4$$
$$37=[\log 4!^{4!}]+\sqrt{4}+\sqrt{4}$$
$$38=4!+4\cdot 4-\sqrt{4}$$
$$39=4!+\binom{4+\sqrt{4}}{4}$$
$$40=4^4:4-4!$$
$$41=[\log 4!^{4!}]+4+4$$
$$42=44+\sqrt{4}-4$$
$$43=44-4:4$$
$$44=44+4-4$$
$$45=44+4:4$$
$$46=44+4:\sqrt{4}$$
$$47=\sqrt{4}\cdot 4!-4:4$$
$$48=(4+4+4)\cdot 4$$
$$49=4:4+4!+4!$$
$$50=4:\sqrt{4}+4!+4!$$
$$51=[\log(\sqrt{4})^{4!}]^{\sqrt{4}}+\sqrt{4}$$
$$52=44+4+4$$
$$53=4!+4!+\left[\sqrt{4!+4}\right]$$
$$54=4!+4!+4+\sqrt{4}$$
$$55=\binom{44:4}{\sqrt{4}}$$
$$56=4!+4!+4+4$$
$$57=4!+4!+4!!+[\log 4!]$$
$$58=4!+4!+\sqrt{4}+4!!$$
$$59=[\log 4!^{44}]-[\log 4!]$$
$$60=44+4\cdot 4$$
$$61=\binom{4!}{\sqrt{4}}:4-4!!$$
$$62=4\cdot 4\cdot 4-\sqrt{4}$$
$$63=(4^4-4):4$$
$$64=(4+4)\cdot(4+4)$$
$$65=(4^4+4):4$$
$$66=\left[\sqrt{4444}\right]$$
$$67=\binom{4!}{\sqrt{4}}:4-\sqrt{4}$$
$$68=4\cdot 4\cdot 4+4$$
$$69=\binom{4!}{\sqrt{4}}:(\sqrt{4}+\sqrt{4})$$
$$70=4!+44+\sqrt{4}$$
$$71=\binom{4!}{\sqrt{4}}:4+\sqrt{4}$$
$$72=(4\cdot 4+\sqrt{4})\cdot 4$$

$73=\binom{4!}{\sqrt{4}} : 4+4$

$74=4!+4!+4!+\sqrt{4}$

$75=(4!+[\log 4!])\cdot(4! : 4!!)$

$76=4!+4!+4!+4$

$77=\binom{4!!}{4}+[\log(\sqrt{4})^{4!}]$

$78=\binom{4!!}{4}+4+4$

$79=4\cdot(4!-4)-[\log 4!]$

$80=(4\cdot 4+4)\cdot 4$

$81=(4-4:4)^4$

$82=4\cdot 4!-[\log 4^{4!}]$

$83=\binom{4!!}{4}+[\log(4\cdot 4)!]$

$84=44\cdot\sqrt{4}-4$

$85=\left[\sqrt{4\cdot\binom{4\cdot 4}{4}}\right]$

$86=44\cdot\sqrt{4}-\sqrt{4}$

$87=4\cdot(4!-\sqrt{4})-[\log 4!]$

$88=44+44$

$89=4\cdot(4!-\sqrt{4})+[\log 4!]$

$90=44\cdot\sqrt{4}+\sqrt{4}$

$91=\binom{4\cdot 4-\sqrt{4}}{\sqrt{4}}$

$92=44\cdot\sqrt{4}+4$

$93=4\cdot(4!-[\log 4!])+[\log 4!]$

$94=4\cdot 4!-4:\sqrt{4}$

$95=4\cdot 4!-4:4$

$96=4\cdot 4\cdot(4+\sqrt{4})$

$97=4\cdot 4!+4:4$

$98=4\cdot 4!+4:\sqrt{4}$

$99=\left[\sqrt{\binom{4!}{4}}-4!!:\sqrt{4}\right]$

$100=(4+4+\sqrt{4})^{\sqrt{4}}$

LOOGILISI ÜLESANDEID

Uusaastaballil

Neli sõpra Jaan, Mati, Rein ja Tõnu läksid koos oma abikaasadega uusaastaballile. Avavalsi tantsis igaüks oma abikaasaga. Seejärel vahetati omavahel partnereid ning tantsupõrandal nägime järgmisi paare: Aino tantsis Jaaniga, Elve Ilme mehega, Urve Elve mehega, Mati Reinu naisega ning Rein Jaani naisega. Tehke kindlaks, kes on kelle abikaasa!

Kes on kelle poeg?

Kolm kolhoosnikku August, Endel ja Juhan saatsid oma poegadele Heikile, Peetrile ja Tiidule, kes õppisid linnas, müügi jaoks teatud hulga mett, kusjuures meekogused kilogrammides suhtusid nagu 1 : 2 : 3. Poisid müüsid mee tuttavale perenaisele ühe ja sama hinnaga. Pärast raha saamist läksid poisid kohvikusse ning arve eest tasusid kokku samapalju, nagu nad olid saanud 2 kg mee müügist, kusjuures igaühe osamaks oli võrdeline mee müügist saadud summaga. Raha ülejäägi saatsid poisid oma vanematele.

On teada, et Peeter maksis kohvikus 1 rubla, Heiki sai mee müügist 24 rubla ning August sai pojalt 33 rubla, Endel aga saatis oma pojale 8 kg mett. Kes on kelle poeg?

Mis värvi?

Kolm sõbratari Eve, Reet ja Tiiu istusid üksteise taga nii, et Tiiu nägi oma mõlemaid sõbratare, Reet nägi Evet, aga ei näinud Tiiut ning Eve ei näinud kumbagi sõbrataridest. Karbist, milles oli 2 valget ja 3 punast baretti (seda teadsid kõik tüdrukud), võeti 3 baretti ning pandi tüdrukutele pähe ilma nende värvi ütlemata. Kaks baretti jäid karpi. Kui Tiiult küsiti, mis värvi barett on tal peas, ei osanud ta sellele vastata. Kuulnud seda, ütles ka Reet, et ta ei tea oma bareti värvi. Nende vastuste põhjal määras Eve õigesti oma bareti värvi. Leidke ka teie, mis värvi barett oli Evel peas.

EESTI KOOLIMATEMAATIKA ÜHEST ARENGUETAPIST

A. Vassil

Eesti koolimatemaatika areng algab esimese eestikeelse matemaatika kooliraamatu ilmumisega 1806. a. (kui mitte arvestada numbrite ja lihtsaimate arvutuste tutvustamist varasemates aabitsates või lugemikes). Nii sellest Peter Hinrik Frey õpikust kui ka teistest möödunud sajandil ilmunud matemaatika kooliraamatuist on kirjanduses mõnevõrra juttu olnud.[1]

Uus tõusulaine emakeelse hariduse nõudmistes saavutas kulminatsiooni 1905. a. revolutsioonile järgnenud aastail. Et tõrjuda tagasi tsaariametnike vastuväited, nagu puuduksid eesti keeles vajalikud sõnad, mis võimaldaksid keskkoolis eesti keeles õpetada, võideldi kätte eestikeelse erakeskkooli avamise õigus ja hakati koostama erialasõnastikke. Nii alustas 1906. a. Tartus tööd Eesti Noorsoo Kasvatuse Seltsi Tütarlaste Gümnaasium ja 1909. a. ilmus esimene «Matemaatika sõnastik».

Esimeseks eestikeelseks keskkooli matemaatika õpikuks on 1912. a. ilmunud O. Perli «Aritmeetika õperaamat keskkoolidele», mis hõlmas ka mõningaid algebra valdkonda kuuluvaid teemasid.

Tähtsaks sündmuseks koolimatemaatika arenguloos on esimene matemaatikakongress, mis toimus 4.—6. aug. 1917. a. Tartus. Selle kongressi töö resultaadina võeti vastu 120 matemaatika ja 100 füüsika oskussõna, koostati aritmeetika ja geomeetria õppekavad. Samuti võeti vastu otsus:[2] «Tuleval õppeaastal peab emakeelne õpetus kõigis algkoolides maksma pandama ja keskkooli vastavates klassides sääl, kus see kohalikkude olude järele võimalik on. Ajutiselt Valitsuselt tuleb nõuda, et ta deklareeriks: igal kodanikul on õigus oma emakeeles õpetust saada.» Märkimist vääriyad on ka J. Sarve mitmed ettepanekud matemaatika õpetamise reformimiseks: algastmel tuleb matemaatika õpetamist alustada hulga mõistest, koolimatemaatikasse peavad kuuluma sümmeetria

---

[1] Vt. L. Võhandu. Vanemast eestikeelsest matemaatilisest kirjandusest. — Matemaatika ja kaasaeg, III, 1964, lk. 62—67; Ü. Lumiste. Lehekülgi matemaatika ajaloost Eestis. — Matemaatika ja kaasaeg, IV, 1964, lk. 70—81.

[2] Ülemaalised matemaatika, füüsika ja kosmograafia õpetajate kongressid Eestis 1917—1927. — Füüsika Õpetamise Komisjoni Toimetised, nr. 4, Tartu, 1928, lk. 8.

mõiste, jäävad ja muutuvad suurused, piirväärtus ja funktsiooni mõiste, trigonomeetriat tuleb käsitleda geomeetria osana, mitte iseseisva õppeainena jt.

Matemaatika sõnastiku teine, täiendatud trükk ilmus 1917. a. Neile sõnastikele ja esimese matemaatikakongressi ettepanekutele tuginetigi, kui hakati ellu viima eestikeelset matemaatika õpetamist keskkoolides.

Koolimatemaatika arengu kodanliku Eesti koolis võib jagada kolme etappi. Algetapil, aastail 1918—1927 toimus programmiteemade valiku täpsustamine ja uuendamine, õpikute kirjutamine paljude autorite poolt ja nende eraviisiline väljaandmine. See etapp lõpeb Eesti Matemaatika Õpetamise Komisjoni (EMÕK) töö tulemusena valminud programmide väljatöötamisega ja arvustamisega. Teine etapp aastail 1928—1937 on uute programmide kinnitamise ja neile vastavate õpikute koostamise aeg. Sellesse etappi langeb ka töökooli printsiibi ulatuslik rakendamine, mis ilmneb eriti rohkearvulises töövihikute avaldamises. Kolmas etapp on seotud jällegi uue programmi väljatöötamisega ning standardõpikute ilmumisega aastail 1937—1940.

Nimetatud kolmest etapist pakub erilist huvi just esimene. Enam kui järgnevatel perioodidel avalduvad seal autorite individuaalsed tõekspidamised koolimatemaatika kursuse ülesehitamisel. Teisel etapil avaldab suurt mõju EMÕK-i programm, kolmandal etapil antakse välja standardõpikud uuenduslikest ideedest loobumise hinnaga.

Järgnevas käsitletakse mõningaid olulisemaid fakte koolimatemaatika arengu esimesest etapist kodanlikus Eestis.

Märgime eelkõige, et matemaatikale ei omistatud tol ajal niisugust osatähtsust nagu tänapäeval. Alljärgnevas tabelis on toodud matemaatika õpetamiseks ettenähtud tundide arv nädalas.[3]

Klassid	VII	VIII	IX	X	XI
1922/23. õ.-a.	4	4	4 R-5	2 R-4 K-3	R-4
1930/31. õ.-a.	4	4	3 M-2	2 R-4	2 R-4
1973/74. õ.-a.	5	6	4	4/5	5/4

[3] Keskkooli ajutised õppekavad 1922/23. õ.-a. Matemaatika. ORK, fond 1108, nim. 3, s.-ü. 596, lk. 23. Keskkooli õppekavad.Gümnaasiumi humanitaar-, reaal- ja majapidamisharu. Tallinn, 1930. Kaheksaklassilise kooli, keskkooli ja õhtukeskkooli programmid 1973/74. õppeaastaks. Matemaatika. Tallinn, 1973.

Tabelis: R — reaalharu, K — kommertsharu, M — majapidamisharu.

Koolimatemaatika programmi kujunemist ja arengut eesti koolis ei saa vaadelda isoleeritult koolimatemaatika arengust rahvusvahelises ulatuses. Arhiivimaterjalide valgusel selgub, et Eesti koolide matemaatikaprogrammide väljatöötamisel kahekümnendate aastate algul on arvestatud Tsaari-Venemaa gümnaasiumide programme, hiljem Saksamaa, Prantsusmaa, Soome, Rootsi, aga samuti Nõukogude koolis kehtestatud programme.

Kodanliku korra algaastail töötati Eesti koolides ajutiste õppekavade järgi. Need olid väga napisõnalised ja orienteerisid õpetajat ainult olulises. Näiteks on 1919/20. õ.-a. keskkooli lõpuklassi matemaatika programm[4] sõnastatud järgmiselt: «Ruut ekvatsioonid. Kõrgema astme ekvatsioonid, mis esimese ehk teise järgu ekvatsioonideks harguvad. Kaheliikmelised ekvatsioonid. Progressioonid. Exponentsiaal ekvatsioonid. Logaritmid. Kombinatoorika. Newtoni kaksliige.» Geomeetria ja trigonomeetria kursuse kohta mainitakse, et neid tuleb õpetada endiste Vene gümnaasiumide õppekavade ulatuses. Üksikud keskkoolid koostasid ise ajutised õppekavad. Ka need olid väga üldsõnalised. Domineerisid teemad, nagu algebralised murrud, funktsiooni mõiste, võrrandid, progressioonid, Newtoni binoom, kompleksarvud, trigonomeetria põhiküsimused, kolmnurkade lahendamine.

Tsaari-Venemaa gümnaasiumides kehtinud õppekavade mõju ilmneb ka 1922. a. avaldatud «Keskkoolide minimaalõppekavades», kus algebra kursus on otseses kooskõlas Kisseljovi õpiku ja Shaposhnikov-Valtsevi ülesannetekoguga; trigonomeetria kursus, mis hõlmab ka tangenslause ja Mollweide laused, ühtib Rõbkini trigonomeetria õpikuga. Geomeetria kursuse kohta aga öeldakse kohe otseselt, et «stereomeetria kursus tuleb läbi võtta Kisseljovi õpperaamatu ulatuses». Nimetatud tendents on mõistetav eriti seetõttu, et suur osa matemaatikaõpetajaid olid saanud keskhariduse, aga samuti kõrgema hariduse Tsaari-Venemaa õppeasutustes.

Tolleaegsetest programmidest on huvitav märkida tõsiasja, et võrreldes praegu kehtivate või veel hiljuti kehtinud programmidega, on suhteliselt vähe muutunud VII ja VIII õppeaasta programmid. Nii olid VII õppeaastal kavas tehted üks- ja hulkliikmetega, hulkliikmete tegureiks lahutamine, algebralised murrud ja esimese astme võrrandid ühe tundmatuga; geomeetrias — sirgjoon, nurgad, kolmnurgad, paralleelsed sirged, hulknurgad, ring, konstruktsiooniülesanded. VIII õppeaasta kavas aga suuruste olenevuse graafiline kujutamine, esimese astme funktsioon, esimese astme võrrandisüsteemide lahendamine graafiliselt ja arvutamise teel, ruutjuur, irratsionaal- ja imaginaararvu mõiste, teise astme funktsioon ja teise astme võrrandi graafiline lahendamine, suuruste mõõtmine, ühismõõduta suurused, pinnad. Pythagorase teo-

---

[4] Keskkooli lõpuklassi matemaatika programm 1919/20. õ.-a. ORK, fond 1108, nim. 3, s.-ü. 590, lk. 73.

reem, sarnasus, trigonomeetrilised suurused ja nende graafiline esitamine, ringjoone pikkus, ringi pindala, konstruktsiooniülesanded.[5]

Teatud püüdu koolimatemaatika sisu uuendamisele näitavad 1922. a. keskkooli reaalharu matemaatika programmi lisatud teemad: IX klassis — ligikaudne arvutamine; X klassis — tõenäosusteooria elemendid, kujutava geomeetria põhijooned ja analüütilise geomeetria algkursus; XI klassis — arvu mõiste üldistamine, piirväärtus, diferentsiaal- ja integraalarvutuse elemendid.

Programmide süsteemipärane koostamine algas 1924. a., kui asutati EMÕK. Selle komisjoni koosseisu kuulusid progressiivse mõttelaadiga matemaatikud, nagu prof. G. Rägo, J. Nuut, A. Borkvell, kes kõik andsid hiljem olulise panuse matemaatikute harimiseks ja kasvatamiseks Nõukogude Eesti kõrgemates õppeasutustes. Tänu nende isikute edumeelsetele vaadetele koolimatemaatika arengu küsimustes kujunes tolleaegne matemaatika programm eesti keskkoolides kaasaegseks. EMÕK-i poolt koostatud programmis on täpselt piiritletud materjali hulk ning lisatud üldiste ja eriliste märkuste osa. Mõnedki seal esitatud metoodilised printsiibid ja näpunäited väärivad kaasajalgi enam rõhutamist. Näiteks: uue mõttekäigu lähtekohaks valitagu võimalikult konkreetne küsimusseade, lausete sisu näitlikustamiseks kasutatagu graafilist meetodit, iga uus mõiste leidku rakendamist, geomeetriliste tõdede deduktiivsele tõestusele asutagu alles siis, kui on tekkinud tarvidus tõestuse järele, stereomeetria kursusega arendatagu õpilaste ruumikujutlust.

EMÕK-i programmis oli erilist tähelepanu pööratud funktsiooni mõiste käsitlemisele ning viimase sajandivahetuse reformi põhimõtteid järgides ka kõrgema matemaatika elementidele.

Tekkis terav vajadus uute õpikute järele. Mõned õpetajad hakkasidki kokkuleppel kirjastajatega õpikuid koostama.

Algebra ja analüüsi elementide valdkonnas ilmusid 1920. a. mimeograafil paljundatud konspektid: H. Jürman «Algebra» II[6] (Tartu, 1920, 40 lk.), K. Maasik «Algebra» III (Tartu, 1920, 91 lk.) ja J. Lang «Algebra» IV (Tartu, 1920, 64 lk.). Nende konspektide lõpus oli esitatud ka ülesandeid. Samal aastal ilmusid ka juba esimesed matemaatika õpikud: Th. Koik «Elementaarne algebra» I (Viljandi, 1920, 288 lk.), V. Päss «Algebra ülesannete kogu» I (Tallinn, 1920, 72 lk.) ja «Algebra» II (Tallinn, 1923, 130 lk.), D. Rootsman «Algebraline analüüs ülesandeis» I ja II (Tallinn, 1920, 219 lk. ja 131 lk.). Hiljem lisandusid: P. Ederberg «Täis- ning murdavaldused ja esimese astme võrrandid» (Tallinn, 1922, 112 lk.), «Juured ja ruutvõrrandid» (Tallinn, 1922,

---

[5] Matemaatika programmid VII ja VIII kl. 1922. a. ORK, fond 1108, nim. 3, s.-ü. 29, lk. 147.

[6] «Algebra» I kohta ei ole õnnestunud teateid saada.

75 lk.), «Algebra ülesannete kogu» III (Tallinn, 1924, 99 lk.), K. R. Veski ja J. Grünthal «Aritmeetika ühes algebra eelkursusega» (Tartu, 1922, 256 lk.), G. Rägo «Matemaatilise analüüsi elemendid» (Tartu, 1922, 146 lk.). Samuti kasutati koolides ka K. R. Veski ja J. Grünthali poolt tõlgitud ning täiendatud N. Shaposhnikovi ja N. Valtsevi «Algebraliste ülesannete kogu» I (Tartu, 1921, 178 lk.) ja II (Tartu, 1921, 174 lk.).

Loetletud õpikute eessõnades on autorid maininud, et algallikatena on kasutatud ka mitmeid saksakeelseid õpikuid. Kõik nimetatud raamatud, välja arvatud Th. Koigi õpik, sisaldavad hulgaliselt ülesandeid, milledest enamik on seotud elulise situatsiooniga ja raskuselt õpilastele jõukohased. Ülesannete kogud olid veel varustatud lühikeste ja asjalike selgitustega.

Th. Koigi õpik on teine eestikeelne algebra õpik. (Esimeseks oli teatavasti 1879. ja 1880. a. ilmunud J. Kurriku «Arvuvald» I ja II). Th. Koigi õpik ülesandeid ei sisalda, küll aga algebra kursuse väga üksikasjaliku käsitluse, eriti üksliikmete (monoomide) ja hulkliikmete (polünoomide) osas. Tutvustatakse veel graafilist meetodit, esimese astme võrrandi lahendamist kahe ja enama tundmatuga ning lisas esitatakse Bezout' teoreem koos järeldustega. Raamatu eessõnas mainib autor, et «algebra formaalne iseloom ja aine hulk võivad õpperaamatu puudumisel tekitada pahe, et õppijate algebra omandamine muutub mehaaniliseks võtete tarvitamiseks, millega aga selle teaduse õpetamise siht jääb täitsa kõrvale»[7]. Raamatus selgitatakse vastavaid ainelõike näidete varal. Mõned tähtsamad laused ja omadused ka tõestatakse. Sellesse õpikusse on lülitatud hulgaliselt ka ajaloolist materjali.

P. Ederbergi, V. Pässi, D. Rootsmani ning N. Shaposhnikovi ja N. Valtsevi õpikud on põhiliselt ülesannete kogud, mis sisaldavad eelnevalt lühikese, kokkuvõtliku ainekäsitluse. Tihti lähtutakse mõnest definitsioonist või teoreemist, mida selgitatakse või tõestatakse ning millele lisatakse ka vastav näide.

D. Rootsmani õpikus «Algebraline analüüs ülesandeis» I antakse relatiivsete arvude liitmise ja lahutamise juures lause: «algebralise avalduse suurus ei muutu, kui igal arvul tehtemärk arvumärgiga ära vahetada», näiteks $\overset{+}{5}-\overset{+}{6}=\overset{+}{5}+\overset{-}{6}$ jne. P. Ederbergi poolt lahendatakse sama probleem lähtudes ülesandest, kus neljast margast lahutatakse järjest 1, 2, 3 jne. marka. K. R. Veski ja J. Grünthali käsitluses selgitatakse suhteliste ehk relatiivsete arvude liitmist ja lahutamist arvteljel. Relatiivsete arvude korrutamisel lähtutakse seal aga ülesandest:[8] «Lootsikumees on praegusel silmapilgul Emajõel Jänese silla all. Ta jõuab

---

[7] Vt. Th. Koik. Elementaarne algebra I. Viljandi, 1920, lk. 5.

[8] Vt. K. R. Veski, J. Grünthal. Aritmeetika ühes algebra eelkursusega. Tartu, 1922, lk. 48.

tunnis keskmiselt v km võrra edasi. Kui kaugel sillast ja kus pool silda on lootsikumees t tunni pärast?»

V. Pässi «Algebra» II sisaldab hulgaliselt materjali matemaatilisest analüüsist, nagu piirväärtus, funktsiooni tuletis ja funktsiooni uurimine, arvread, integraal, kompleksarvud ja võrrandeist ka kolmanda astme võrrandid. Rida teoreeme ja lauseid tõestatakse, tuuakse näiteid. Aine käsitluses jõutakse algebra põhilauseni (ei tõestata).

G. Rägo õpikus «Matemaatilise analüüsi elemendid» käsitletakse funktsiooni graafilist kujutamist, funktsiooni pidevust, tuletist, uurimist, integraalarvutust ja funktsioonide ligikaudset avaldamist polünoomide abil. Raamat sisaldab veel pika saatesõna, mis selgitab kasutatava aine tähtsust. G. Rägo märgib:[9] «Üks tähtsamatest matemaatika ülesannetest on keele loomine, milles oleks võimalik kirjeldada looduse nähtusi lühidalt, täpselt, täielikult.» «Keeleks, milles säärane kirjeldamine kõige kohasemalt sünnib, on funktsioonide keel.» Teoreetiline materjal esitatakse koos rohkete näidisülesannetega, mis põhiliselt on füüsikalise sisuga. Tähtsamad teoreemid tõestatakse ning illustreeritakse rohkete joonistega.

Geomeetria osas püüti samuti esmane vajadus õpikute järele rahuldada mimeograafil paljundatud konspektidega: J. Lang «Planimeetria» II (Tartu, 1920, 22 lk.), E. Kilkson «Stereomeetria» I (Tartu, 1920, 22 lk.). Neile lisandusid: A. Nathingi ja O. Perli «Ruumi algõpetus» (süstemaatiline kursus) I (Tallinn, 1919, 148 lk.) ja II (Tallinn, 1920, 128 lk.), V. Nano[10] «Trigonomeetria õpperaamat keskkoolidele» (Tallinn, 1920, 88 lk.) ja selle kordustrükk koos täiendustega «Tasapinnaline trigonomeetria ja sfäärilise trigonomeetria alged» (Tallinn, 1923, 100 lk.), «Stereomeetria» II (õpetus geomeetrilistest kehadest) (Tartu, 1920, 31 lk.), P. Madisson ja Th. Ussisoo «Planimeetria» (Tallinn, 1921, 96 lk.), P. Madisson «Stereomeetria» (Tallinn, 1921, 108 lk.), G. Rägo «Tasapinnalise analüütilise geomeetria põhijooned» (Tartu, 1921), J. Maramaa «Geomeetria algkooli kõrgematele klassidele» (Tartu, 1922, 128 lk.), E. Krahn «Stereomeetria ühes kujutava geomeetriaga» (Tallinn, 1922, 120 lk.), K. R. Veski ja J. Grünthal «Stereomeetria» (K. Raževski «Stereomeetria» tõlge) (Tartu, 1922, 96 lk.), A. Wildbrett «Analüütilise geomeetria ja differentsiaalarvamise põhijooned» (eestistas E. Krahn) (Tallinn, 1922, 104 lk.).

Geomeetria õpikud sisaldavad põhiliselt teoreetilist materjali, võrreldes algebra ja analüüsi õpikutega on siin ülesandeid ainult vähesel määral. Teoreetilises osas tõestatakse hulgaliselt teoreeme.

---

[9] Vt. G. Rägo. Matemaatilise analüüsi elemendid. Tartu, 1922, lk. 9 ja 13.

[10] Vt. E. Tamme, R. Kruus, U. Kaljulaid. 80 aastat Villem Nano sünnist. — Matemaatika ja kaasaeg, XIX, 1973, lk. 118—122.

Kõikide teoreemide juurde on lisatud selgitavad joonised. Ülesannete hulgast väärivad esiletõstmist konstruktsiooniülesanded, kusjuures on nõutud nende täpset ja korrektset lahendamist — kõigepealt analüüs, siis konstruktsioon, selle tõestus ja uurimine. Eriti on see iseloomulik A. Nathingi ja O. Perli õpikule. Selle õpiku lõppu on lisatud ka matemaatika terminid eesti, vene ja saksa keeles.

V. Nano raamatus «Trigonomeetria õpperaamat keskkoolidele» on tõestatud põhilised trigonomeetria laused ja toodud ka näidisülesanded. Sfäärilise trigonomeetria osas on tutvustatud sfäärilist kaksnurka, kolmnurki ja lahendatud mõned astronoomilise sisuga ülesanded. Selle õpiku arvustuses [11] on rõhutatud puudustena graafikute vähesust, ajalooliste elementide puudumist (1923. a. väljaandes on trigonomeetria ajaloo kohta eraldi paragrahv), sfäärilise geomeetria õpetamise mittevajalikkust.

P. Madissoni «Stereomeetria» õpikus on käsitletud sirgjoone ja tasapinna, aga samuti tasapindade vastastikuseid asendeid, nendega kaasnevaid teoreeme, mitmetahulisi nurki ja kehi (on arvutatud nende pindala ja ruumala). Samuti on seal eraldi paragrahv Guldini lausetega.

Nii algebra kui ka geomeetria õpetamise eesmärkidena rõhutati tol ajal vilumuste ja oskuste kasvatamist tegelikus elus esinevate ülesannete lahendamiseks, samuti loogilise mõtlemise ja ruumikujutluse arendamist. Kooli algebra kursuses pidi juhtivat osa etendama funktsionaalne sõltuvus kui kogu koolimatemaatikat siduv mõiste.

Vaadeldava perioodi programmide ja õpikute kaudu areneb välja eestikeelne erialane terminoloogia ja sümboolika. Positiivselt väärivad märkimist tol ajal esile tõstetud metoodilised tõekspidamised, eriti 1924/25. õ.-a. programmi seletuskirjas ning õpikuis, ja ajaloolise elemendi rõhutamine. Väga hinnatav on tolleaegsete õpetajate aktiivne osavõtt õpikute arvustamisest ajakirjanduse veergudel.

[11] Vt. Kasvatus, 1922, nr. 12, lk. 188—190.

JAAN SARVE TEE TEADLASEKS

Kakskümmend aastat tagasi manalasse varisenud teerajajat mälestades

Ü. Lumiste, E. Tamme

Eestlaste poolt viljeldav teadus ei ole kuigi pika minevikuga, kuid üpris lühiealine on see täppisteaduste valdkonnas. Saksakeelne ja -meelne Tartu ülikool andis eelmisel sajandil küll läti päritoluga matemaatikuid, silmapaistvamatena märgiksime K. Petersoni, P. Kadikist ja P. Bohli, kuid alles 1890-ndail aastail lõpetas matemaatika alal ülikooli esimese teadaoleva eestlasena Mihkel Koik, kes aga pole avaldanud ühtegi tööd, rääkimata teaduslikest uurimustest. Füüsikas on märkimisväärseks erandiks Johan Vilip (1870—1942), kes pärast ülikooli lõpetamist Tartus 1895. a. siirdus vakantside puudumisel Peterburi ja seal akadeemik B. Golitsõni assistendina alustades kujunes heaks spetsialistiks eksperimentaalfüüsika ja eriti seismoloogia alal. Väga üksikud on ka need eestlased, kes on XIX sajandil püüelnud täppisteadusliku hariduse poole teistes ülikoolides. Eametsas A. Holteri kirjutuskoolis äratust saanud Jakob Tülk pidi aastakümneid maalrina ja maamõõtjana raha koguma, et 43-aastase mehena sõita 1873.—76. a. välismaale täiendama end reaalainetes Strassburgi, Genfi ja Pariisi ülikoolides. Teadlast temast selleaegsetes oludes ei saanud, kuid ometi on ta esimene, kes eestikeelsesse kirjutisse põimis juba 1878. a. integraali märgi. Tema elukäik andis tõuke eestlasest täheteadlase saatust kujutava romaani — E. Aspe «Ennosaare Aini» ilmumisele (1888). Kirjaniku fantaasia viib selles peategelase tunnustuseni üksnes võõrsile rändamise hinnaga.

Kodumaal, tegelikkuses avanes eestlaste jaoks tee õppejõu- ja teadlasetoolile alles pärast Suurt Oktoobrirevolutsiooni, mis viis emakeelse hariduse Eestis ka Tartu ülikooli, kus sajandivahetusest oli valitsema saanud vene keel. Meie vanema põlve teadlastekaadri kujunemine oli sellal otse aja käsk. Kogenenumate ja ärksamate eesti haritlaste ees, kes seni olid töötanud enamasti koolipõllul, seisis pakiline ülesanne äratada uuele elule ülikool, millest Tartus olid pärast põhikoosseisude lahkumist säilinud ainult ruumid ja osaliselt nende sisustust.

Täppisteaduste osas langes see ülesanne peamiselt Jaan Sarve õlgadele. Sündinud 1877. a. Võrumaa lõunaosas talurentniku pojana, oli ta raskusi trotsides omandanud Tartus kesk- ja kõrgema hariduse, kuid jäänud endiselt talurahva esindajaks. Ta oli eesrindlike ideede kandjana käinud läbi 1905. a. revolutsiooni tulest ning kujunenud seejärel üheks tuntumaks eesti matemaatika- ja füüsikaõpetajaks Tartus. 1918. aasta pöördelised sündmused viisid J. Sarve eesti hariduselu juhtijate hulka, lühikeseks ajaks koguni kujuneva emakeelse ülikooli etteotsa. Koos J. Vilipiga, kellest ta oli seitse aastat noorem ja kes tema algatusel Peterburist Tartusse kutsuti, olid nad vanimaid eesti kutselisi täppisteadlasi.

Jaan Sarvel kui varasemal teenekal koolimehel ja teadmiste populariseerijal tuli teadusse astuda juba küpses meheeas. Ülikooli professoritooli sai ta kohusetäitjana 41-aastaselt (1919), korralise täitjana 50-aastaselt (1928). Doktorikraadini jõudis ta 53-aastaselt (1931), olles pidanud mööda laskma mitmeid oma nooremaid kolleege. J. Sarv elas pika ja töörohke elu. Pärast Suurt Isamaasõda oli ta aastail 1945—51 Tartu Riikliku Ülikooli geomeetria kateedri juhataja, seejärel siirdus teenitud vanaduspuhkusele. Jaan Sarv suri Tartus 23. augustil 1954. a. ja on maetud Raadi kalmistule.

Käesolevas kirjutises ei ole püütud haarata J. Sarve kogu elu ja tegevust.[1] Eesmärgiks on seatud kujutada seda pikka ja vaevarikast teed, mis viis talurentniku poja rahva püüdlustele truuks haritlaseks ja seejärel, juba küpses meheeas, teaduses uut sõna öelda tahtvaks uurijaks. Me lõpetame oma käsitluse J. Sarve esimese tõeliselt silmapaistva teadusliku uurimusega — doktoriväitekirjaga «Geomeetria alused». J. Sarve edasine biograafia ei ole rikas väliste sündmuste poolest. Tema elu sisuks oli pedagoogiline ja teaduslik uurimistöö ülikoolis. Mõlemate täielik haaramine nõuab täiendavat materjali kogumist ja allikate analüüsimist. Praegu tuleb piirduda J. Sarve avaldatud tööde loeteluga, mille lugeja leiab käesoleva töö lõpus. Tuleb aga arvestada, et mitmed tahud J. Sarve loomingus ei kajastu tema publikatsioonides. Nii on näiteks teada, et tal oli püsiv huvi ideograafia vastu ning et tal on ka endal katsetusi selles suunas.[2] Vähe teame me

---

[1] Märgime tähtsamaid seni ilmunud käsitlustest: G. Vilbaste. Prof. Jaan Sarv 60-aastane. — «Loodusvaatleja», 8, 1937, nr. 6, lk. 187—188; J. Sarv (nekroloog), ajaleht «Tartu Riiklik Ülikool», 1954, 3. sept. H. Epler. Prof. Jaan Sarve elust ja tegevusest. — Matemaatika ja kaasaeg, III, 1964, lk. 68—72.

[2] V.t. A. Ruubel. J. Sarve ideograafiast. — «Noorte Hääl», 1967, 14. jaan. Juhiksime täiendavalt tähelepanu ühele (arvatavasti J. Sarve sulest pärinevale) lühiinformatsioonile ajakirjas «Loodus» (1923, nr. 3, lk. 176). Selles kõneldakse prof. S. A. Toscano käsikirjast elementaarmatemaatika kohta rahvusvahelises keeles, nn. interlinguas, mille avaldamispalvega on autor pöördunud ka ajakirja «Loodus» toimetuse poole, kus matemaatikuid esindas J. Sarv. Samas ajakirjas arvustab J. Sarv üht Jakob Linzbachi tööd, mis ilmus Tallinnas 1823. aastal. See fakt on huvipakkuv seetõttu, et J. Linzbach on teine isik Eestis, kes on aktiivselt tegelnud interlingvistikaga ja sellelt alalt mitmeid teoseid avaldanud (J. Linzbach. Idéographie mathematique. Etude du langage philosophique. Paris, 1931).

tema hilisemast tööst nelja värvi probleemi alal ja geomeetria aluste valdkonnas peale selle, et ta nende probleemidega pikka aega tegeles. Nähtavasti ei pidanud ta oma tulemusi küllalt lõplikeks, et neid avaldada. Meile tänapäeval oleksid aga kõik säilinud materjalid huvipakkuvad ja autorid oleksid väga tänulikud isikuile, kes saaksid nendest teatada.

* * *

Jaan Sarv sündis 21. detsembril 1877. a. endisel Võrumaal Saru vallas Leeguste talus[3], mille oli rentinud tema isa. Ta oli oma vanemate Anne (1835—1918) ja Henn Sarve (1840—1918) ainsaks lapseks.

Oma haridusteest kirjutab J. Sarv 1919. a. elulookirjelduses:[4] «Lugemise ja kirjutamise õppisin suurelt osalt isalt, kes ise ilma mingi koolihariduseta oli, siiski hästi piiblit tundis ja pühapäeviti «võrukeelsest» Jutluseraamatust puhtas lõuna Võru murdes jutlusi kodurahvale ette luges. Alghariduse sain Saru ja Mõniste vallakoolides ja Marienburi[5] Greeka Katoliku kiriku koolis, sest 1885. aastal oli minu isa talurentnikuna Marienburi ligidale Malupi valda Brukna külasse lätlaste sekka elama asunud, ja ainult nimetatud kirikukooli juures oli üks eestlane kooliõpetajaks. Keskhariduse omandasin suuremalt osalt iseõppides ilma eratundideta, ainult põhja pannes Hugo Treffneri eragümnasiumis — kolmandas klassis — 1893/4 õpeaastal ja iseõppimise teel saadud teadmisi siludes nimetatud eragümnasiumi viimases klassis 1899. aasta esimesel poolel. Küpsuse eksami tegin eksternina nimetatud aasta kevadel Tartu gümnasiumi juures.»

Jaan Sarv oli küpsustunnistuse saamisel juba 21-aastane. Viivituse põhjustasid mitte ainult iseõppimise raskused. Tema hilisem õpilane ülikoolis, praegune akadeemik A. Humal meenutab oma õpetaja vestlustest, et noorukieas elas J. Sarv läbi raske kopsuhaiguse ja sellega kaasnenud hingelise kriisi. Nähtavasti taastus tervis siiski sedavõrd, et pärast küpsuseksameid oli otsus kindel — edasi ülikooli. Küll aga jäi J. Sarv elu lõpuni täiskarsklaseks ja tervete eluviiside pooldajaks. Laseme edasi jutustada jälle temal endal.

«Ilma juhatuseta keelte õppimine oli mind teinud võrdleva grammatika austajaks ja «mõistete elementologia» otsijaks. Õieti oligi minu õppimine suurelt osalt nimelt teadmiste elementide otsimine, ja õpitavad ained ainult materjaliks selle päätöö jaoks. Tartu ülikooli fakulteeti valides pidin esiotsa ajaloofilologia fakulteeti astuma, kus ma oma päris tööalaks gnoseologiat arvasin. Aga kui ma olin professor Ohse juures paar ettelugemist ära kuu-

---

[3] Praegu on J. Sarve sünnitalu elumajal mälestustahvel, mis asetati sinna 1968. a. Võru koduloouurijate algatusel.

[4] RAKA, fond 2100, nim. 2, s.-ü. 1055.

[5] Praegu Aluksne Läti NSV-s.

lanud, siis leidsin, et teadmiste elementide otsimine sel viisil, nagu sääl fakulteedis näis teda tehtavat, minu püüetele ei vastanud. Ühtlasi tegid need paar ettelugemist matemaatika ala sagedase riivamisega mulle selgeks, et füüsika-matemaatika fakulteet mulle kohasem on.»

Nii immatrikuleeritigi J. Sarv 1899. a. augustis füüsika-matemaatikateaduskonna puhta matemaatika osakonna üliõpilaseks. Tema loengute külastamise raamatust[6] näeme, et ta kuulas professorite V. Aleksejevi ja P. Grave matemaatikaloenguid, prof. A. Sadovski füüsikakursust, prof. G. Tammanni juures keemiat, prof. G. Kolossovi teoreetilise mehaanika loenguid, prof. B. Sreznevski meteoroloogiakursust ja mõnede teiste professorite loenguid. Sõltuvalt loengute arvust tuli tal poolaastas maksta kuni 25 rubla õppemaksu. Raha õppemaksudeks ja iseseisvaks elamiseks Tartus hankis J. Sarv eratundide andmisega matemaatikas ja füüsikas ning kaastöö tegemisega ajalehtedele ja ajakirjadele. Sellistes tingimustes polnud kerge õppida. Lisaks takistasid õpinguid veel tervisehäired.

J. Sarv 1899. a.

Esimese õppeaasta lõpul 1900. a. kevadel tuli J. Sarvel ülepingutusest tingitud neurasteenia tõttu loobuda eksamite sooritamisest. Järgmise õppeaasta lõpul, 1901. a. mais sooritas ta analüütilise geomeetria ja anorgaanilise keemia eksamid vastavalt professorite V. Aleksejevi ja G. Tammanni juures, kuid ägenev närvihaigus sundis teda eksameid katkestama.

Sama aasta augustis pöördus J. Sarv füüsika-matemaatikateaduskonna dekaani prof. B. Sreznevski poole kirjaliku palvega võimaldada tal eksameid sooritada järgmise aasta kevadel. Ta kirjutas muuhulgas:[6]

«Ma olen talupoja poeg. Minu vanemad teenisid oma leiba füüsilise tööga. Ka mina töötasin varem koos nendega ja kavatsen tagasi minna füüsilisele tööle niipea, kui saavutan praegusel teel

---

[6] RAKA, fond 2100, nim. 1, s.-ü. 14248.

oma eesmärgi või mingitel põhjustel olen sunnitud selle saavutamise püüdest loobuma. Minu eesmärgiks pole mitte eksamid ning nende abil saavutatavad õigused, vaid võimalikult lähedane tutvumine üldse teadusega ja eriti matemaatikaga. [...] Ma elan ja õpin oma isiklikust teenistusest: käesolevaks semestriks sain isalt ainult kaks rubla.

Möödunud kevadel ma enam ei teadnud, kas tulen sügisel tagasi ülikooli või mitte. Kuid tänu suvel peetud dieedile kosusin ma sedavõrd, et on lootust järgmise aasta kevadel sooritada kõik poole kursuse eksamid, kui ma vaid mõõdukalt ja rangelt süstemaatiliselt töötan. Tööd selles suunas ma juba alustasin.»

1901. a. detsembris sooritas J. Sarv edukalt eksamid elementaarmatemaatikas, füüsika üldkursuses, sissejuhatuses analüüsi ning kõrgema algebra ja diferentsiaalarvutuse esimestes osades, 1903. a. mais järgnes neile viimase kahe aine teiste osade ja integraalarvutuse eksamite sooritamine. See ei tähendanud veel ülikooli lõpetamist. J. Sarv kuulas seejärel veel kolme semestri jooksul loenguid, peamiselt G. Kolossovi mehaanikakursusi, kuid 1905. aasta algul oli ta sunnitud õpingud ajutiselt katkestama majanduslike raskuste ja rahutute aegade tõttu.

Ta ise võtab oma ülikooliõpingud eespool tsiteeritud elulookirjelduses kokku järgmiselt:[4] «Füüsika-matemaatika fakulteedi puhta matemaatika A salga üliõpilasena (1899—1907) jatkasin oma endist elementide otsimist — ka endisel viisil, s. o. fakulteedi õpeaineid ainult materjaliks tarvitades. Ettelugemised andsid mulle väga vähe ja isiklik kokkupuutumine professoritega (Aleksejev, Grave, Sadovski) ei lisanud sellele kuigi palju juurde.» Selles juba küpse mehena kirjutatud hinnangus kajastub oma teed otsiva talurahvast pärit uhke nooruki omaaegne suhtumine vene professoreisse. Mis puutub P. Gravesse, siis see oma loiu suhtumisega õppetöösse ja teadusse ning reaktsioonilise hoiakuga muidugi ei väärinud sümpaatiat. Kui P. Grave 1905. a. revolutsiooni kõige pingelisemal ajal oma loengul pöördus üliõpilaste poole üleskutsega loobuda poliitikast ja olla riigikorra ustavad teenrid, katkestasid üliõpilased tema kõne hüüetega «Küllalt!», lahkusid auditooriumist ning kuulutasid Gravele boikoti.[7] Teine matemaatikaprofessor V. Aleksejev oli, erinevalt Gravest, hea ettevalmistusega, teaduslikult aktiivne ja vähem reaktsioonilise hoiakuga. Pärast Moskva ülikooli lõpetamist oli ta end täiendanud kaks aastat Zürichis, Pariisis ja Leipzigis ning koostanud esimese venekeelse monograafia algebraliste invariantide teooriast.[8] Tema rektoriks oleku ajal võeti Tartu ülikooli tööle esimesed eesti õppejõud, arstiteadlased A. Paldrock ja H. Koppel. On

[7] L. Eringson. Tartu Ülikool Esimese Vene revolutsiooni taandumise perioodil (1906.—1907.). — TRÜ Toimetised. Vihik 164, 1965, lk. 111.

[8] Lähemalt vt. Ü. Lumiste. Sada aastat V. Aleksejevi sünnist. — Matemaatika ja kaasaeg, XI, 1966, lk. 96—98.

iseloomulik, et kui pärast 1917. a. Veebruarirevolutsiooni toimus üliõpilaste-matemaatikute üldkoosolek, siis palus see jätta Aleksejev edasi tööle, «sest ta pole kateedrit kunagi kasutanud poliitilise agitatsiooni jaoks». Koosolekust võttis osa ja protokollile kirjutas alla teiste hulgas ka sellal matemaatikaõpetajana töötanud J. Sarv. Hiljem, kui Sarv korraldas matemaatika õpetamist Tartu ülikoolis, saavutas ta 1921. a., et rahuldati Aleksejevi palve määrata ta ülikooli eradotsendiks. Mehaanikaprofessori G. Kolossovi, füüsikaprofessori Sadovski ja keemiaprofessori Tammanni näol oli J. Sarvel kokkupuuteid silmapaistvate, teadust uute oluliste saavutustega rikastanud õpetlastega, kuid et nende ained olid kõrval tema peahuvidest, ei ole need kokkupuuted nähtavasti oluliselt mõjustanud J. Sarve teadusalast arengut.

Jaan Sarve tegevus üliõpilaspõlves ei piirdunud ainult õpingutega. Juba sellal tundis ta endal kohustust kaasa aidata eesti rahva haridustaseme tõstmisel, mis edaspidi kujunes tema elu põhieesmärgiks. *Stud. math.* J. Sarve allkirja kannab suur hulk ajalehtedes, ajakirjades ning ka eraldi brošüüridena ilmunud populaarteaduslikke kirjutusi[9] (vt. [1]—[5] jt.), milles laiadele hulkadele arusaadavas vormis käsitletakse mitmesuguseid loodusnähtusi ning loodusteaduste ja tehnika saavutusi.[10] Kõnesoleval ajal oli J. Sarv üks viljakamaid füüsika ja loodusteaduste populariseerijaid, ühtlasi teenis ta selle tegevusega endale elatist.

Üliõpilasaastad olid otsustavaiks J. Sarve maailmavaate ja tõekspidamiste kujunemisel. Juba H. Treffneri gümnaasiumis 1899. a. tutvus J. Sarv matemaatikaõpetaja M. Volokobinski korteris koos käivas õpilaste ringis sotsialismi ideedega. Ta ise meenutab hiljem:[11] «See ring ei töötanud matemaatika alal, vaid sotsialismi alal. Koosolekutel loeti vist peatükke Marx'i «Kapitalist» ja arutati neid. (Mulle paistsid need arutlused enamasti nagu veidrad selle poolest, et seal oleks nagu püütud iseenesest lihtsaid asju teha ilmaaegu keerulisteks.).»

Järgnevail aastail üliõpilaspõlves oli J. Sarve sõbraks viiulikunstnik Eduard Sõrmus, kellega koos nad võtsid osa üliõpilaste salajastest koosolekutest, suvel aga rändasid mööda kodumaad. J. Sarve meenutustest loeme: «Meie olime kumbki juba aegsasti õiendanud oma arved kiriklusega. Meie ihaldasime näha kõiki oma rahva liikmed nii õnnelikkudena kui meie olime oma Diogenese

---

[9] Ajalehtedes ilmusid J. Sarve pikemad artiklid «Kaste ja udu» («Postimees», 1901, nr. 277, 280; 1902, nr. 4, 122, 124, 127); «Sulatised» (»Postimees», 1901, nr. 285; 1902, nr. 171, 173, 176, 177); «Soojusest» (Postimees», 1902, nr. 8, 18, 19, 31, 58); «Tuul» («Postimees», 1902, nr. 201—204); «Kestvad tuuled» («Postimees», 1902, nr. 210, 214, 216, 218, 219) jt.

[10] Ülevaade J. Sarve populaarteaduslikest kirjutistest on antud A. M e o s e diplomitöös «Ülevaade professor Jaan Sarve elust ja loomingust». TRÜ arvutusmatemaatika kateeder, 1973.

[11] Vt. Hugo Treffneri Gümnaasiumi 50 aasta juubelialbum. Tartu, 1933, lk. 276.

elus. [...] Kui meie koos rändasime kodumaad mööda ja eemalt märkasime kerkivat kiriku torni, siis olime otse hõiskel rõõmsad. See ei olnud mitte ainult arhitektuur, mis meid rõõmustas. Meid rõõmustas meie mõttes valminud tulevikupilt, kus need kõrged majad on tõsise vaimu- ja hingetoidu-jagajad oma ümbrusele. [...] Kõrge maja uksed on avatud igaühele. Sees on muusika, mille mõnest palast saab igaüks osa võtta oma võimete järgi. Siis kantakse ette pärleid maailmakirjandusest, siis jälle muusika, siis loeng, jälle muusika, jälle kirjanduse pärle jne.» (Vt. [30].)

Hilisem matemaatikaprofessor Leningradis J. Depman meenutab[12] oma õpinguteajast Tartu Õpetajate Seminaris 1899.—1904. a. «Käisime (koos klassikaaslase J. Anveldiga — *Ü. L.* ja *E. T.*) suure hoolega «Karskuse Sõbra» kõneõhtutel, mis pühapäeva õhtuti toimusid. Kõnel viibis politsei esindaja, sellepärast oli nende sisu õige piiratud, aga see oli tolleaegsetes oludes ainuke tee peale koolitundide midagi õpetlikku kuulda. Seal nägime esimest korda kõnetoolis pikka üliõpilast, kes juba oma lihtsa riietuse poolest teiste üliõpilaste hulgast silma torkas. Ka oli tema ülesastumiste sisu erinev teiste üliõpilaste omast. «Karskuse Sõbra» eeskujul korraldas ka rattameeste selts «Taara» oma liikmetele kõneõhtuid, mis toimusid äripäevadel ja ainult seltsi liikmetele ilma politsei juuresolekuta. Meie, seminaristid, sinna ei pääsenud, meid suruti argipäeva õhtutel hoolsalt raudvärava taha. «Taara» kõneõhtul esines J. Sarv kõnega «Materialism kalendri sabas». See oli vastuseks pastor Tischleri kirjutusele tähtraamatu «Sirvilaud» sabas. Sarv näitas, et Tischleril teaduslikust materialismist aimugi ei ole. Seminari poisse huvitas kõne väga. Korraldasime J. Anveldi ümberjutustuse Sarve kõnest, sest Anvelt kui erakorteris asuja võis kõnet kuulata. Siit saime meie materialismi algmõisted, mida hoolega 1905. a. maal edasi andsime.» Nii näeme, et üliõpilasaastail ühines J. Sarv kindlalt materialismi ja ateismi propageerijate leeriga, andes innustust sellistelegi proletaarse kultuuri hilisematele silmapaistvatele esindajatele nagu J. Anvelt ja E. Sõrmus.

Loobunud olude sunnil ajutiselt õpingutest ülikoolis, töötas J. Sarv 1905. a. esimesel poolel Tartus ajalehe «Uudised» toimetuses ning teisel poolel Valgas Eesti Krediidiühisuses. Seal lülitus ta kohe revolutsiooni käigus elavnenud ühiskondlikku tegevusse. Pärast Oktoobrimanifesti asutati Valga Demokraatlik Ühisus, mille juhatajaks valiti Jaan Sarv. Ühisus korraldas igal nädalal rahvakoosolekuid, kus selgitati rahvale päevaküsimusi ja «kõneldi vabamast (demokraatlikust) riigikorrast». (Vt. [32].) Kui hakkasid tegutsema karistussalgad, põgenes J. Sarv vangistusohu kar-

---

[12] Kiri Ü. Lumistele 12. X 1969. a. (vt. ka koguteos «Jaan Anvelt». Tallinn, 1965, lk. 67); prof. J. Depmanist lähemalt vt. Matemaatika ja kaasaeg, VII, 1965, lk. 97—99; XVIII, 1972, lk. 114—119.

tusel Soome ja Rootsi kaudu Pariisi, kus täiendas end matemaatika alal 1906. a. veebruarist kuni juunini.

1906. a. sügisel on J. Sarv Tallinnas ja teeb kaastööd ajalehtedele. Valga Demokraatlikus Ühisuses peetud kõnedes väljendatud mõtteid esitab ta avalikkusele *Rusticuse* (lad. k. — talupoeg) varjunime all artiklites «Maaküsimus» («Sõnumid», 1906, nr. 23), «Mida uskuda ja kudas uskuda?» («Sõnumite» lisa, 1906, lk. 42—45 ja 52—53) ja «Teaduse kindlus» («Sõnumite» lisa, 1906, lk. 188—190 ja 194—197). Neist kahes viimases, mis 1909. a. ilmusid eraldi brošüürina [9], esineb J. Sarv veendunud ateistina ja materialistliku maailmavaate propageerijana. Kuulame, millise sisemise kindlusega kõlavad tema sõnad:

«Teie uskuge kõike, mida te tahate. Uskuge jumalaid ja looduseseadusid, uskuge kõiki teadusid ja teadlasi ja selle hulgas ka seltskonnateadlasi. Teie täitke oma usukombeid, nagu teil iganes meelde tuleb.

Ainult, kui teie ka mind ja minu seltsimehi, kes midagi ja kedagi ei usu, uskuma tahate sundida või meie igapäevast erapooletut elu oma usukombetega takistama hakkate, siis keelame teil selle lihtsalt ära, kui me teid ikka keelata ka jaksame. Ja kui meie teid keelata ei jaksa, siis naerame kurvalt teie tegude üle — ja kogume vaikselt jõudu. [...] Ja kui ka meie kord tugevamaks saame, siis paneme ajaviitmata kõik seadused maksma, mis meile sellel silmapilgul tarvilikud näivad olema.» (Vt. [9], lk. 16—17.)

1907. a. jätkas Jaan Sarv õppimist ülikoolis. Selle aasta maikuus andis ta lõpueksamid sellistes ainetes nagu üldfüüsika, meteoroloogia, invariantide teooria, üldine astronoomia, mehaanika, diferentsiaalvõrrandid, variatsioonarvutus ja kõrgem geomeetria. Kõigi matemaatiliste ainete eksamid on antud Aleksejevile. 1907. a. augustis anti J. Sarvele ülikooli lõputunnistus, 1907. a. oktoobris aga tunnistus selle kohta, et ta on omandanud ülikooli juures matemaatika ja füüsika õpetaja kutse.

* * *

Algas J. Sarve üle kümne aasta kestnud töö keskastme koolide õpetajana. 1907. a. lõpul on ta 3 kuud matemaatika ja füüsika lektoriks Põltsamaal Eesti Aleksandrikooli põllumajanduskursustel. Järgmise aasta algul abiellub ta Põltsamaal Juuli Vaheriga, aprillis aga võtab osa rahvusvahelise matemaatikakongressi tööst Roomas, esimese eestlasena sedalaadi kongressil.[13] 1908. a. sügisel sõidab J. Sarv töö otsinguil Venemaale Veliži linna Vitebski kubermangu, kus töötab ühe õppeaasta Elisabeth Tilli eragümnaasiumis õpetajana,

---

[13] Vt. Matemaatika ja kaasaeg, XII, 1967, lk. 3.

Aastal 1909 on J. Sarv tagasi Tartus, kuhu Eesti Noorsoo Kasvatuse Seltsi Tütarlastegümnaasiumi juhtkond kutsus ta matemaatika- ja füüsikaõpetajaks. See 1906. a. asutatud õppeasutus oli esimeseks eesti õppekeelega keskkooliks. Oma tegevusega demonstreeris see kool emakeelse õpetuse eeliseid ning aitas kaasa eestikeelse koolikirjanduse loomisel. J. Sarv oli siin õpetajaks kuni 1918. aastani.

Otsese õpetajatöö kõrval pühendas J. Sarv palju tähelepanu emakeelse õppekirjanduse koostamisele. Juba 1908. a. võttis ta ajakirja «Eesti Kirjandus» veergudel sõna seejuures kerkivate probleemide kohta [8]. Ta taunis sageli juba vananenud võõrkeelsete õpikute vahetut kopeerimist ning arvas, et lisaks välismaistele eeskujudele tuleks arvestada ka uuemaid metoodilisi seisukohti, mis kajastusid rahvusvaheliste kongresside ja konverentside otsustes. Eestikeelsete oskussõnade loomisel soovitas ta neid mitte otseselt tõlkida võõrkeelest, vaid oluliselt arvestada ka vastavate mõistete sisu. Oma seisukohti väljendas ta aastail 1908—1910 sama ajakirja lehekülgedel ka mitmes arvustuses populaarteaduslike ja kooliraamatute kohta.

Samal ajal asus ta ka ise realiseerima seatud põhimõtteid. Juba 1910. a. ilmus Eesti Kirjanduse Seltsi koolikirjanduse seerias J. Sarve õpik «Füsika õpetus» I [11], mis on autori kavandatud ulatusliku füüsikaõpiku alguseks.[14] Selle õpiku 1917. a. kaanetatud väljaandele on lisatud 2 trükipoognat, kuid ka sellisel kujul jääb õpiku I osa lõpetamata. Eessõnas märgib autor, et ta «ei ole ühtegi võõrakeelset õperaamatut otsekohe järele aimanud». Õpikus kohtame originaalset ja tugevalt isikupärast käsitlusviisi nii materjali liigendamisel kui ka mõistete sissetoomsel ja defineerimisel. Ulatuslikus sissejuhatuses esitab ta oma seisukohad füüsikale kui «lihtsamate nähtuste teadusele» ja selle meetoditele. Siin esitab ta ka õpiku kava, mille järgi esimene osa on pühendatud kümnele «väga lihtsale nähtusele» alates liikumisest ning lõpetades magnetismi ja elektriga. Neist kümnest nähtusest jõudis Sarv käsitleda liikumist, raskust ja soojust ning alustada «kehapõnevuse» käsitlemist. Õpiku teises osas kavatses ta käsitleda «vähem lihtsaid nähtusi», nagu pöörlemist ja masinaid, võnkumist, laineid ja häält, valgust ning kristalle. Õpik on selle aja kohta nii sisult kui ka keelelt heatasemeline. Selle laiemat kasutamist koolides takistas aga autori sageli liiga originaalne ja mõnevõrra raskepärane käsitlusviis.

Juba järgmisel, 1911. aastal ilmus «Postimehe» kirjakogu seerias J. Sarve õpik «Elekter» I [12], mis on samuti üsna omapärase käsitlusviisiga. Samal aastal laskis ta trükkida «Posti-

[14] J. Sarve õpikuid ja teisi varasemaid eestikeelseid füüsikaõpikuid on käsitletud E. S. Morna-Kase diplomitöös «Aastail 1855—1917 trükis ilmunud füüsikaalane õppe- ja populaarteaduslik kirjandus». TRÜ üldfüüsika kateeder, 1961.

mehe» trükikojas lühikokkuvõtte oma loengutest elektri kohta [13].

Hinnates J. Sarve füüsikaõpikuid märkis[4] prof. J. Vilip 1928. a., et «Füsika õpetus» I «suure asjatundlikkusega kokku on seatud. Sealjuures oli autoril suurte raskustega võitlemist, sest senini teaduslikke oskussõnu Eesti keeles puudus. Kõigist nendest sai autor üle, luues ise uusi oskussõnu, milledest me tänapäevani mitmeid tunnustame ja tarvitame».

Samast arvamusest loeme: «Eriväljaandena ilmub 1911. a. «Elekter». Siin paistab mõnestki reast silma, et autor juba õige noorelt kõrgel teadusliku arenemise astmel seisab. [...] Võib tõendada, et see raamatukene nii oma väga selge keelega kui ka tähtsamate faktidega elektri alal kõik sisaldab, mis tarvis läheb, et võhik nende salaliku jõudude piirkonda sügavamat pilku visata võiks. Niisugune ajakohaselt kirjutatud raamat elektri üle puudus sellel ajal Eesti keeles.»

Üldse võib öelda, et kuigi J. Sarv lõpetas ülikooli matemaatikuna, olid tema põhihuvid kooliõpetajatöö aastail koondunud füüsikale. Nii pidas ta «Vanemuise» seltsis 1909. a. detsembris ettekande uudistest raadiumi uurimisel, järgmisel aastal avaldas ajakirjas «Noor-Eesti» artikli [10] «uutest» teadustest: «uuest» geomeetriast (mõeldud on Lobatševski geomeetriat), «uuest» mehaanikast (tsiteerime: «...Abrahami, Lorenzi ja Thomsoni järgi keha aine hulk suureneb, kui see keha väga kiiresti liigub»), «uuest» keemiast («...Curie, Soddy ja Rutherford'i järgi ühest lihtainest pika aja jooksul teist või koguni mitut teist võib saada»). J. Sarve sulg vahendas siin eesti haritlaskonnale üldarusaadavas vormis kõige pöörettekitavamaid avastusi täppisteadustes. Tema erilist tähelepanu pälvis pika aja jooksul «uus» mehaanika. 1914. aastal esitas ta Loodusuurijate Seltsile, mille liikmeks ta oli 1910. aastast, oma artikli valguse kiirusest liikuvas keskkonnas [15]. Mõnevõrra ette rutates märgime, et sellele järgnes tosina aasta jooksul veel mitu artiklit samal teemal [20]—[22], [28]. Nende kirjutistega on J. Sarv nähtavasti esimene, kes on Eestis puudutanud Einsteini relatiivsusteooriat. Nii avaldas ta ajakirjas «Loodus», mille üheks asutajaks ta oli koos J. Piiperi, A. Audova jt., 1922. a. artikli «Einsteini teooria» [21]. Selles jagab Sarv mõnede uue teooria eelistes kahtlevate teadlaste skepsist ja märgib, et töös [20] näitas ta, «kuidas elektrimagneti põhilausetest Fizeau ja Michelsoni ja Morley katsete saadus siis tõesti järgneb, kui [...] niinimetatud polarisatsiooni liikme koeffitsient võetakse kahekordselt. Ei ole veel selge, et see koeffitsiendi kahekordselt võtmine veel oleks muuga põhjendatud peale nimetatud katsete saaduse, nii et seda tuleb veel hüpoteetiliseks lugeda. See on aga igatahes näiteks, et on võimalik väga lihtsa hüpoteesi abil meie elektrimagneti teadmiste kogu korraldada, nii et mingit tarvidust ei ole, Carvallo viisil öeldes, aluseid pahupidi pöörata».[15] Sama, 1922. aasta septembris avaldati ajakirjanduses Austraalias päikesevarjutust jälginud Ameerika ekspeditsiooni mõõtmistulemused valguskiire kõrvalekaldumise kohta Päikese gravitatsiooniväljas. Need tulemused kinnitasid Einsteini poolt varem arvutatud suurust 1,74″. J. Sarv reageeris sellele «Looduses» uue artikliga «Valguse raskusest» [22], milles ta võrdleb Lebedevi tulemust valguse rõhu kohta ja Ameerika ekspeditsiooni tulemust ning lõpetab järgmiselt: «Nii toovad Campbelli mõõtmised uue hooga esile küsimuse: kas ei määra tõesti iga keha raskust mitte selle keha aine hulk, vaid temaga seotud energia hulk?»

Käesolevas kirjutises ei ole kahjuks võimalik pikemalt peatuda J. Sarve füüsika-alaste tööde juures, mis kajastavad tema põhilisi teaduslikke huve aastail 1914—1927 ja mille lähem analüüs peaks olema õieti eesti füüsika ajaloo uurijate ülesandeks. Esimese hindaja, prof. J. Vilipi kokkuvõttev arvamus Sarve viimase sellealase töö [28] kohta on igatahes järgmine:[4] «Peab tõendama, et see teoreetiline uuring väga heaste õnnestunud on ja oma lihtsuse poolest ühte kasuliku tööd teoreetilise füüsika alal tähendab, mis paljudel säärase kirjanduse lugejatel rohkem kasu toob, kui keeruliste diferentsiaalvõrrandite lahendamise läbi saadud tulemused.»

* * *

Tulles nüüd tagasi J. Sarve elukäigu jälgimisele Tartus kooliõpetajana töötamise aastail, jõuame Esimese maailmasõja ja Suure Oktoobrirevolutsiooni pöördeliste sündmuste juurde, mis ei jätnud puudutamata ka J. Sarve. 1916. a. oktoobrist kuni 1917. a. juunini oli ta mobiliseerituna tagalas Šadrinski linnas reameheks. Sellal hakati revolutsiooni vaimus ümber korraldama kogu Eesti koolivõrku. 1917. a. aprillis tuli Tartus kokku esimene rahvahariduse kongress, millel otsustati ellu viia emakeelne tasuta ja kohustuslik algharidus ning astuda samme õpetuse üleviimiseks emakeelele ka keskkoolis ja õpetajate ettevalmistamisel. Rahva haridustaseme tõstmiseks otsustati luua rahvaülikoolid. J. Sarv

[15] Sellega seoses märgime, et eespool juba tsiteeritud elulookirjelduses aastast 1919 on J. Sarv oma artikli [20] kohta öelnud järgmist: «. . . sellel ajal väga moes oleva Einsteini teooria vastu katsusin faktisid tuua, selle teooria vastu, mille Einstein ise nüüd viimastel aastatel on pidanud kõrvale jätma». Nähtavasti on siin mõeldud seda, et 1916. aastaks läks Einstein oma erirelatiivsusteoorialt üle üldrelatiivsusteooriale. Ei tahaks siin mainimata jätta ka üht vanemate kolleegide poolt jutustatud lugu, mille järgi J. Sarv olevat kõnelnud oma reisist Berliini Einsteini juurde, et püüda talle selgitada üht uue teooria ebakõla. Einsteini esialgselt tõrjuv hoiak olevat pärast Sarve detailsemaid selgitusi muutunud lugupidavamaks ja lahkudes olevat Einstein oma kolleegi koguni tänanud. Kahjuks pole seni teada ühtegi pidepunkti selle jutustuse sisu tõepärasuse kontrollimiseks. Võib-olla aitaks siin Einsteini kõigi tööde üksikasjalik läbivaatamine, sest ühe versiooni järgi olevat Einstein ühes oma töös maininud J. Sarve.

saatis kongressile kirjalikult oma ettepanekud, mis avaldati trükis [17]. Ta on neis ühel meelel kongressi põhiliste otsustega. Samuti esitab ta üksikasjalikke soovitusi õppeainete valikuks ja töö korraldamiseks rahvaülikoolides. Esimesed rahvaülikoolid loodigi 1917. a. suvel Tallinnas ja 1918. a. jaanuaris Tartus.

Teisel rahvahariduse kongressil 1917. a. juunis, millest J. Sarv sai isiklikult osa võtta, otsustati usuõpetus jätta kooli, kuigi vabatahtliku õppeainena. Kirjutises «Usuõpetus tulevases Eesti koolis» («Postimees», 1917, 3. juuli) põhjendas J. Sarv oma seisukohta, et usuõpetus tuleks koolist välja heita.' Ta kirjutab: «Ka sellel uuendatud kujul, millest kongressil kõneldi, on usuõpetus tulevases Eesti koolis kahjulik. Sest kongressil kõneldi ja mõeldi ikka «ristiusu» õpetust, see on ühte Hebrea mõtteviisi lahku. Kuni me selle õpetuse kooli õppeainete hulka jätame, seni tunnistame lubatavaks, et noorsoo arenevale mõtteviisile juba ette piirid seatakse. Kuigi meie usuõpetajad enam puud latva pidi mullasse istutada ei taha, siis püüavad nad ometi seda kitsasse potti istutada ja pimedasse toa nurka kasvama panna.»

Teise rahvahariduse kongressi soovitusel kutsuti Tartus 1917. a. augustis kokku I matemaatika kongress, millele kogunes umbes 60 matemaatika- ja füüsikaõpetajat.[16] Kongressi üheks organiseerijaks oli J. Sarv, kes valiti ka juhatajaks. Kongressil arutati koolides emakeelsele õpetusele üleminekuga seotud probleeme. Siin fikseeriti põhimõtted, millest tuleks lähtuda uute eestikeelsete oskussõnade moodustamisel, võeti vastu terve hulk matemaatika ja füüsika oskussõnu ning moodustati komisjonid matemaatika, füüsika ja keemia sõnastiku kokkuseadmiseks. Arutuse all olid ka probleemid seoses uute matemaatika õppekavade koostamisega. J. Sarv rääkis reformipüüetest matemaatika õpetamisel ning tegi siin oma ettepanekuid.

Püüdes mõjutada haridus- ja ühiskondlikku elu Oktoobrirevolutsiooni-järgsel perioodil, asus J. Sarv 1917. a. detsembris oma kodus välja andma ajalehte «Aru», mida ta nimetas «ühiselu ja hariduse leheks». Kuni 1918. a. veebruarini ilmus selle käsitsi kirjutatud ja mimeograafil paljundatud ajalehe 18 numbrit.[17] Enamik materjalidest pärineb J. Sarve enda sulest. 1918. a. lõpul tahtis ta *Rusticuse* pseudonüümi all avaldada trükis selle lehe olulisemad materjalid. Sissejuhatuses kirjutas ta: «Lehe toimetas ja andis välja kooliõpetaja, kellel ei olnud kirjamehe ega ärimehe kalduvusi ja kes oma ettevõttega tahtis ainult põhja panna sedalaadi lehe väljaandmisele ja selle juures avaldada oma kogutud mõttekillud ühiselu ja hariduse kohta. Oli kavatsus varsti pääle

[16] Vt. Ülemaalised matemaatika, füüsika ja kosmograafia õpetajate kongressid Eestis 1917—1927. — Füüsika Õpetamise Komisjoni Toimetised, nr. 4, Tartu, 1928.

[17] Ajalehte «Aru» säilitatakse ENSV TA Fr. R. Kreutzwaldi nim. Kirjandusmuuseumis.

lehe asutamist seda edasi anda kooliõpetajate kogule toimetamiseks ja väljaandmiseks ja lugejaid loodeti ka kõigepealt kooliõpetajate hulgast. Aga toimetuse tööst osavõtta tahtjaid leidus ainult üks ja kindlaid lugejaid kogunes ainult kümmekond.»

Ajalehes «Aru» on avaldatud kirjutisi poliitilise olukorra ja hariduselu kohta Eestis, samuti teateid sündmustest Eestis ja mujal. J. Sarv analüüsis Oktoobrirevolutsiooni järel kujunenud komplitseeritud poliitilist olukorda Eestis ning püüdis leida teid korra ja rahu jaluleseadmiseks.

Olulisele kohale seadis ta rahva üldise haridustaseme tõstmise. Ajalehe «Aru» peamiseks sisuks 1918. a. jaanuaris ja veebruaris on Tartu rahvaülikooli organiseerimisega seotud materjalid. Siit leiame ka rahvaülikooli avamisel Tartu ülikooli aulas peetud J. Sarve loengu «Füsika arenemine viimase saja aasta jooksul» teksti.

1918. a. veebruari lõpul okupeerisid Saksa väed Eesti territooriumi. «Aru» lõpetas ilmumise, rahvaülikool katkestas töö. Sellel raskel ajal kirjutas J. Sarv brošüüri «Kuidas hädavalgust saada» [18], milles ta käsitleb dünamo ja aku töötamise põhimõtet ning jagab näpunäiteid, kuidas neid kasutada kodus ajutise elektrivalguse sisseseadmiseks. Oma kodus tehtud katsest kirjutab ta: «Need read siin on niiviisi saadud hädavalgusel kirjutatud: kirjutaja jalad keerutasid dünamomasinat, mõte seadis lauseid ja näpud panid need kirja. Selle juures oli masina keerutamise abinõuks jalgratas. Jalgratas oli nii paigale seatud, et tema tagumine ratas seisis põrandast kõrgemal. Sinna tagumise ratta pääle tuli nöör dünamomasina võllilt. [...] Dünamomasina keerutajal tuli siis ratta selga istuda ja jalgratast sõkkuda. Ratta tüüri kohale parajale kõrgusele oli laud seatud, mille najale rattasõkkuja ennast toetas ja mille pääl ta vaba kätega oma tarvilikku tööd tegi.» (Vt. [18], lk. 5.)

Kutsetööst tõmbus J. Sarv sellel ajal tagasi. Tema eluloo-kirjeldusest loeme:[4] «1918. aasta kevadel, kui Saksa okupatsiooni võimude mõju ka Tartu Eesti Tütarlaste kooli hakkas ulatuma, otsustasin aastaks või paariks kooliõpetaja ametist eemale jääda, et «matemaatikas võimalikult täielikult, niikaugele kui praeguse inimesesoo kultuuriaste lubab ja minu vähene jõud ulatub, järele vaadata, mis Eesti kooliuuendusel teoreetiliselt tuleks selleks silmas pidada, et meie kool mitte ainult teistelt eeskujusid ei võtaks, vaid vahest ka ise teistele midagi pakkuda võiks ja sellega alamalt kultuuri astmelt teiste rahvaste kooliga ühekõrgusele tõuseks» (kiri Eesti Tütarlaste Kooli juhatusele 6. VII 1918).»

* * *

Revolutsiooni esialgsed kooliuuendused ei puudutanud oluliselt vene õppekeelega Tartu (Jurjevi) ülikooli. Saksa okupatsioonivõimude survel oli see ülikool sunnitud aga oma tegevuse

Prof. Jaan Sarv
21. XII 1877 — 23. VIII 1954

Tartu ülikooli didaktilis-metoodiline seminar 1924/25. õ.-a. Esireas (vasakult): G. Rägo, T. Rootsmäe, P. Põld, J. Vilip ja J. Sarv. Tagareas: R. Jaska, L. Golubev, E. Neugard, H. Perlitz, O. Silde, K. Urm, H. Liidemaa, H. Jaakson ja A. Rõigas lõpetama 1918. a. mais. Enamik õppejõududest ja vene üliõpilaskonnast evakueerus Voroneži ning jätkas seal tööd; sellega pandi alus Voroneži ülikoolile. 1918. a. septembris avasid Saksa võimud Tartus saksa õppekeelega ülikooli «Landesuniversität Dorpat». Kirjutises «Ülikool ja emakeel» («Postimees», 1918, 9. oktoober) protesteeris J. Sarv julgelt selle vastu, et selles ülikoolis «mitmesugusest rahvusest professorid on sunnitud võõras keeles lugema mitte teaduse edendamise kasuks vaid politika pärast». Ta soovitas lubada ülikoolis loenguid pidada mitmes keeles, et õppejõud saaksid neid võimalikult emakeeles esitada.

Saksa vägede taandumisel läks võim Eestis kodanlikule Ajutisele Valitsusele, kes detsembri algul võttis Tartu ülikooli üle Saksa okupatsioonivõimudelt. Ülikooli hoolekandjaks ehk kuraatoriks määrati Eesti Noorsoo Kasvatuse Seltsi Tütarlastegümnaasiumi direktor Peeter Põld. Ülikooli allasutuste ülevõtmiseks ja töö organiseerimiseks moodustati ülikooli ülevõtmise komisjon, kuhu kuulusid teaduskondade esindajad ja mõned isikud väljastpoolt, nende hulgas matemaatikaõpetajad Jaan Sarv ja Hermann Jaakson.

Seoses Punaarmee vägede lähenemisega Tartule põgenes kuraator P. Põld 20. detsembril ning jättis oma volitused J. Sarvele. 21. detsembril 1918. a. taastati Tartus nõukogude võim. J. Sarv hakkas korraldama ülikooli elu ning astus samme siin Eesti rahvusliku ülikooli organiseerimiseks. 31. detsembril 1918. a. saabus Tartusse Eesti Töörahva Kommuuni Kultuuri ja Hariduse Valitsuse juhataja Artur Vallner, kes määras J. Sarve Tartu ülikooli ajutiseks juhatajaks. J. Sarv koostas Eesti Töörahva Kommuuni Tartu ülikooli eelarve ja põhikirja projekti, milles oli ette nähtud õigus tasuta kõrgema hariduse saamiseks kõigil Eesti kodanikel.[18]

Ettevalmistused ülikooli käikulaskmiseks katkestas Tartu langemine valgete kätte 14. jaanuaril 1919. a. J. Sarv jätkas kuni P. Põllu tagasijõudmiseni Tartu ülikooli elu korraldamist. Peale ülikooli juhtimise üleandmist P. Põllule tegi J. Sarv jaanuari lõpus ettepaneku enda saatmiseks välismaale tutvuma teiste ülikoolide korraldusega ning võimalustega õppevahendite hankimiseks Tartu ülikoolile.

Selle aasta märtsis sõitiski ta Helsingi ja Kopenhaageni kaudu Londonisse. Ta tutvus Helsingi, Kopenhaageni ja Londoni ülikoolidega ning saatis Tartusse materjale nende kohta. Eriti tutvus ta nende ülikoolide raamatukogude lugemisruumidega ning pidas vajalikuks ka Tartus juba ülikooli avamisel luua raamatukogu juures «teadusliku lugemise ruum». Ühtlasi tegi ta konkreetseid ettepanekuid selle sisustamiseks mööbli ja raamatutega. Põhilise

[18] Lähemalt J. Sarve tegevusest Tartu ülikooli juhatajana vt. E. Tamme. Killuke Tartu ülikooli ajaloost. — «Edasi», 1973, 13. juuli.

tähelepanu pööras Jaan Sarv sellel välismaareisil aga õppimisele ja silmaringi laiendamisele, milleks ligi 4 kuud töötas Londonis Briti Muuseumi lugemisruumis, «kus 30 000 köidet oma käega võtta on», nagu ta kirjutas.

1919. a. augustis jõudis Jaan Sarv tagasi Tartusse. Juba selle aasta juunis oli ta määratud matemaatika-loodusteaduskonna esialgseks korraldajaks (ajutiseks dekaaniks), septembris määrati ta puhta matemaatika professori kohusetäitjaks. Jaan Sarv tegi ära suure töö õppetegevuse organiseerimisel matemaatika-loodusteaduskonnas. See ei olnud sugugi kerge. Eestis ei olnud tollal ühtegi magistri ega doktorikraadiga matemaatikut. Ka ei olnud matemaatika alal Tartu ülikoolis kuni selle ajani töötanud ühtegi eesti rahvusest õppejõudu ega peetud eestikeelseid loenguid. 1919. a. sai matemaatikadotsendiks matemaatikaõpetaja Hermann Jaakson,[19] teisele matemaatikaprofessori kohale kutsuti aga Helsingist noor matemaatikadoktor Kalle Väisälä, kes töötas Tartu ülikoolis kuni 1922. aastani.[20] Mehaanika ja rakendusmatemaatika professori kohale valiti 1920. a. suvel Venemaalt Eestisse opteerunud Gerhard Rägo.[21]

Aastatel 1919—1920 tuli Jaan Sarvel juhatada ka Tartu ülikooli füüsikainstituuti ning lugeda ülikoolis esimesi eestikeelseid füüsikaloenguid. 1920. a. saabus tema kutsel Eestisse prof. J. Vilip, kes võttis oma õlgadele füüsika õpetamise Tartu ülikoolis. 1920. a. kevadel palus J. Sarv end vabastada matemaatika-loodusteaduskonna dekaani kohustustest, põhjendades taotlust tervise halvenemisega ja akadeemiliste kraadide puudumisega. Nii tõmbus J. Sarv mõnevõrra tagasi administratiivsest tööst, mis talle kunagi eriti ei meeldinud, ning pühendas peatähelepanu õppe- ja teaduslikule tööle.

Jaan Sarv hakkas ülikoolis õpetama peamiselt geomeetrilisi distsipliine, nagu analüütilist geomeetriat, diferentsiaalgeomeetriat, kujutavat geomeetriat jt. Esimeste eestikeelsete loengukursuste lugemine matemaatika alal ülikoolis oli seotud mitmete raskustega. Kõigepealt tuli välja töötada vastav eestikeelne terminoloogia, seejärel koostada esimesed eestikeelsed kõrgema matemaatika õpikud. Selles töös lõid kaasa kõik ülikooli matemaatikud. Esimesed väikesemahulised õppevahendid avaldas «Looduse» kirjastusel G. Rägo: «Tasapinnalise analüütilise geomeetria põhijooned» (1921) ja «Matemaatilise analüüsi elemendid» (1922). Neid arvustasid K. Väisälä ja H. Jaakson, pöörates erilist tähele-

---

19 Vt. G. Kangro. Professor Hermann Jaakson. — Matemaatika ja kaasaeg, IV, 1964, lk. 3—8.

20 Vt. O. Prinits, E. Tamme. Kalle Väisälä ja Tartu ülikool. — Matemaatika ja kaasaeg, XV, 1968, lk. 116—119.

21 Vt. O. Prinits. Prof. Gerhard Rägot mälestades. — Matemaatika ja kaasaeg, XVI, 1969, lk. 164—168.


panu terminoloogiale.[22] Järgmise, märksa põhjalikuma käsitlusega analüütilise geomeetria õpiku [25] avaldas autori kirjastusel J. Sarv 1924. a. Selle koostamise eesmärgil oli ta juba 1920. a. algul olnud Helsingis uusimat kirjandust uurimas. Kuigi raamat on pealkirjastatud tagasihoidlikult algkursusena, leiame sellest üsna sügava ja kaugeleulatuva esituse. Esimeste sammude juurest minnakse varsti üle projektiivse käsitluse juurde. Valdav osa õpiku mahust on pühendatud teist järku joonte ja pindade süstemaatilisele uurimisele, kusjuures neid vaadeldakse A. F. Möbiuse ja K. v. Staudti eeskujul kui polaarse süsteemi «korraldusjooni» ja «korralduspindu». Raamatust ja selle rohketest harjutusülesannetest leiab mõndagi huvitavat ka tänapäeva matemaatikaüliõpilane.

Niisama keeruline oli sellal matemaatika õpetamise korraldamine keskkoolis ja siingi ei saanud ülikooli matemaatikud jääda kõrvaltvaatajaiks. Peaaegu täielikult lülitus sellesse töösse G. Rägo, kuid ka J. Sarv kui kõige kogenum ei jätnud kaasa aitamata. Juba 1919. a. märtsis esitas ta haridusministeeriumile algkoolide jaoks uuelaadse geomeetria õppekava projekti, milles aine on jaotatud kolme ossa: deskriptiivseks (kirjeldavaks või

---

[22] Vt. ajakirjad «Kasvatus», 3, 1921, nr. 22, lk. 354—356 ja «Loodus», 1, 1922, nr. 6, lk. 373—375.

vaatlevaks), induktiivseks ja deduktiivseks kursuseks [24].[23] Ta koostas koolide jaoks «Nelja kohaga logaritmide tabelid» [19], mis olid hoopis väiksemad ja käepärasemad kui koolides varem kasutatud viiekohalised tabelid. Teisel ja neljandal matemaatika-, füüsika- ja kosmograafiaõpetajate kongressil esines J. Sarv ettekannetega «Logaritmilisest lineaalist» (1921) ja «Kindla keha definitsioon geomeetrias» (1924).

J. Sarv avaldas oma arvamust ka hariduselu üldiste küsimuste kohta. Ajal, mil kõneldi haritlaste üleproduktsioonist ja kodanlik valitsus kavatses osa keskkoole sulgeda, võttis ta avalikkuse ees julgelt sõna selle kohta, et keskkool ei pea ette valmistama mitte ainult «pehme koha peale istuma» seatavaid ametnikke, vaid igakülgselt arenenud inimesi. Ta kirjutas: «Haridus saab jõud olla alles siis, kui selle hariduse omanik tõesti elus rohkem saavutab ja oskab, kui see, kellel õnneks ei ole läinud seda haridust omandada. Elu ei ole mitte paljalt ametniku elu või muidu sulemeeste elu, vaid elu on kõigepealt võitlus loodusega. Sellepärast, et võitlus loodusega nagu igasugune võitlus saab tagajärjekas olla ainult siis, kui võitleja on sellekohased võtted omandanud, mitte ainult teoreetiliselt, vaid tingimata ka praktiliselt. Peab ütlema, et meie üldhariduslikud koolid tõesti ei valmista kodanikke elu vastu. Kõneldakse, ja päris põhjendatult, et kool võõrutab oma õpilasi füüsilisest tööst. Seda ei tohi mitte olla. [...] Kooli tuleb sisse tuua ka füüsiline töö.» (Vt. [31].)

J. Sarv oli organiseerivalt tegev eesrindlike õppejõudude mitmetes üldist laadi ettevõtmistes, mis olid suunatud rahva haridustaseme tõstmisele ja eelarvamustest vabastamisele. Koos J. Piiperi, A. Audova ja teistega asutas ta populaarteadusliku ajakirja «Loodus», mis ilmus aastatel 1922—1924. Selles avaldas ta oma artikleid Einsteini relatiivsusteooriast [21], [22], millest oli juba juttu eespool.

A. Audova ja teistega asutas J. Sarv 1926. a. esimese ateistliku seltsi Eestis — vabamõtlejate ühingu «Humanitas», kuhu koondusid ülikooli progressiivsed õppejõud. Ühingu juhatajaks oli 1932. aastani bioloogiadoktor Aleksander Audova ja seejärel Jaan Sarv kuni 1940. aastani. Tegevuse esimesel perioodil korraldas «Humanitas» avalikke arutluskoosolekuid usuliste eelarvamuste vastu. Pärast seda, kui A. Audova siirdus poliitilise tagakiusamise tõttu 1932. a. Moskvasse, avalikud rahvakoosolekud harvenesid. «Prof. Sarv organiseeris kitsamale ringkonnale oma korteris pühapäevahommikuti nn. «ilmalikke jumalateenistusi». Need olid huvitavad koosviibimised, mis algasid klaveripaladega tema musikaalsetelt perekonnaliikmetelt. Humanismitemaatilise

---

[23] Neid J. Sarve mõtteid arendas 1924. a. Jüri Nuut oma sisukas kõnes «Geomeetria üldhariduslise õppeainena koolis» IV matemaatika-, füüsika- ja kosmograafiaõpetajate kongressil («Loodus», 1924, nr. 9, lk. 443—454).

ettekande, mis oli oma olemuselt kirikuvaenuline, tegi professor ise. Ja lõpuks pakuti koosolijatele jällegi tõsisesisulist klaverimuusikat.»[24]

* * *

J. Sarve peatähelepanu oli 1920-ndail aastail siiski pööratud teadusliku ja pedagoogilise kvalifikatsiooni tõstmisele. Ta oli ülikooliga seotud eesti matemaatikutest eakaim — sellal juba üle 40 aasta vana, kuid nooremad hakkasid temast ette minema. Nii kaitsesid Tartus doktoriväitekirja H. Jaakson ja J. Nuut vastavalt 1925. ja 1926. aastal, kusjuures üheks oponendiks oli mõlemale J. Sarv. Göttingenist tuli 1926. a. doktorikraadiga tagasi E. Krahn. Kõik nad olid Sarvest ligikaudu poolteist aastakümmet nooremad. Neile järelejõudmiseks tuli rohkesti pingutada. 1920-ndad aastad olidki J. Sarve elus ajajärguks, mil temast kui varasemast viljakast populariseerijast ja teenekast koolimehest sai teadlane. Kooliteemad tema loomingus taandusid, esikohale tuli uurimuslik tegevus. Tema varasemad püüded «teadmiste elementisid» leida omandasid nüüd küpses eas kindlama kuju.

Juba 1923. aasta suvel sõitis ta Riiga kindla eesmärgiga koguda sealses raamatukogus materjale töö jaoks geomeetria alustest. Järgmise aasta suvel oli ta ligi kuu aega Saksamaal, kus Hamburgis kuulas W. Blaschke ja H. Rademacheri loenguid ja harjutustunde ning Göttingenis peamiselt R. Courant'i loenguid, samuti uuris kirjandust sealsetes raamatukogudes. Kuuldust ja loetust tekkisid oma mõtted ja nii ilmusid aastail 1926—1927 tema kaks, esialgu veel episoodilist tööd [26] ja [27] — tema esimesed uurimused matemaatikast.

Esimeses diskuteerib J. Sarv autoritega, kes tõlgendasid valesti Vana-Egiptuse matemaatika põhilisel kirjalikul mälestisel — Rhindi papüürusel leiduvaid jooniseid, ja toetab veenvalt neid, kes ei pea egiptlaste arvutusi vigasteks. Teises toob J. Sarv eesti matemaatikute sekka teema — topoloogilise nelja värvi probleemi, mille kallal siin mitmed on vaeva näinud (J. Nuut, E. Krahn, H. Jaakson).[25] Sarv püüab probleemi positiivselt lahendada, kuid võtab oma tõestuse aluseks viis abilauset, milledest ühe põhjendamisel kasutab tõestamata väidet, ise seda ka märkides. Seega jääb probleem tegelikult lahendamata ja taandatakse teisele, mitte vähem keerulisele probleemile. Kuigi J. Sarv hiljem selle probleemiga tegelemist päriselt ei jätnud, ei ole ta kõnesolevalt alalt enam midagi publitseerinud.

---

[24] A. Prink. «Humanitase» aegadest. — «Edasi», 1967, 13. oktoober.

[25] Lähemalt sellest vt. G. Kangro, Ü. Lumiste, E. Tamme. Jüri Nuudi elu ja teaduslik pärand. — Matemaatika ja kaasaeg, XIII, 1967, lk. 95—108; J. Gabovitš. Nelja värvi probleem. — Matemaatika ja kaasaeg, IV, 1964, lk. 9—17.

Tema artiklite ilmumises järgneb neljaaastane vaheaeg. Need aastad olid täidetud pingsa uurimistööga probleemi alal, mille lahendamisest pidi välja kasvama doktoriväitekiri. Veel kord käis ta 1927. a. veebruaris Riias, et süvendada kirjanduse tundmist. Järgmise aasta maikuul valiti J. Sarv matemaatika korraliseks professoriks ning juba järgmisel kuul on ta Zürichis, kus jälgib kuu aja jooksul kujutava geomeetria kursust ning H. Weyli loenguid relatiivsusteooriast ja funktsiooniteooriast. Ka oli tal isiklikel kokkupuudetel võimalik kõnelda H. Weyliga teda huvitavatest küsimustest, nagu ta kirjutab oma sõidu aruandes, märkides: «Siiski jäi kahjuks nii mõnigi tekkinud küsimus vastuseta. Üks aga paistis selgesti silma: Hermann Weyl toonitab ka oma loengutel ja harjutuste selgitamisel ikka ja jälle geomeetrilise intuitsiooni tähtsust matemaatikas üldse...»

Kolm edasist aastat pingelist tööd viisid doktoriväitekirja «Geomeetria alused» [29] valmimiseni 1931. a. Kaitsmine toimus 5. detsembril 1931. a. ülikooli aulas; oponentideks olid prof. H. Jaakson ja dots. J. Nuut.

Oma väitekirja eessõnas märgib J. Sarv, et pärast M. Paschi, G. Peano, D. Hilberti, O. Vebleni ja F. Schuri põhjalike tööde ilmumist on geomeetria aluste uurimise ülesandeiks jäänud põhimõistete ja aksioomide arvu vähendamine ja meeltega vahetult tajutavale lähendamine. Selleks ajaks oli juba selge, eriti tänu Hilberti tööle, et kogu eukleidiline elementaargeomeetria on ülesehitatav teatud lõplikule arvule aksioomidele tuginedes kui puhtdeduktiivne teooria, milles ei ole vaja kasutada mingeid muid põhimõistete omadusi peale nende, mis on formuleeritud aksioomides. Varasemate autorite poolt ühel või teisel määral kasutatud joonise näitlikkus kui tõestuskäigu argument oli sellega teooriast täielikult välja lülitatud. Hilberti süsteem on aga suhteliselt komplitseeritud. Põhimõisteid on mitu: objektid «punkt», «sirge», «tasand», seosed «kuulub» (näit. punkt kuulub sirgele), «vahel» (üks punkt on kahe teise vahel), «kongruentne» (näit. üks lõik on kongruentne teisega). Seetõttu on ka aksioome Hilberti süsteemis küllalt palju. Nad annavad küll kindla aluse tasandi ja ruumi (kolmemõõtmelise) geomeetria rangeks käsitlemiseks, kuid üleminekul paljumõõtmeliste ruumide käsitlemisele tuleks põhimõistete ja aksioomide süsteemi järjest täiendada.

J. Sarve huvi pälvisid pärast Hilbertit esitatud lihtsamad aksiomaatikad, eriti O. Vebleni ja F. Schuri omad. Nendes on realiseeritud võimalus viia sirge ja tasandi mõisted, samuti kuuluvusseos põhimõistete seast tuletatud mõistete hulka, täiendades mõnevõrra vahelsuse aksioome ja defineerides nende alusel sirge ja tasandi kui teatavad punktihulgad. Kuuluvuse aksioomid langevad sel puhul hoopis ära: vastavad laused on saadavad siis teoreemidena.

Vahelsuse aksiomaatikat üheainsa sirge ulatuses oli Eestis varem analüüsinud J. Nuut oma doktoritöös, kus tema eesmärgiks oli luua sel teel uus alus reaalarvu mõiste käsitlemisele. J..Sarve töös on pearõhk asetatud *n*-mõõtmelise ruumi geomeetria arendamisele üksnes vahelsuse aksioomidest lähtudes.[26] Tema oluliseks saavutuseks on selle näitamine, et samad aksioomid, mis on aluseks vahelsuse käsitlemisele tasandil ja kolmemõõtmelises ruumis, annavad küllaldase aluse ka *n*-mõõtmelise ruumi geomeetria vastava osa arendamiseks. Võib öelda, et J. Sarv toob teadusse, nähtavasti esimesena, *n*-mõõtmelise vahelsusruumi mõiste mistahes naturaalarvulise *n* korral ja arendab üsna kaugele selle teooriat. Ta defineerib sidumid *n*-mõõtmelises vahelsusruumis, tõestades eelnevalt vajalikud põhiteoreemid, ja seejärel laiendab vahelsusruumi ebapunktide ja -alamruumide lisamisega *n*-mõõtmeliseks projektiivseks ruumiks.

Viimasel ajal on uuesti elavnenud huvi vahelsusruumide teooria arendamise vastu.[27] Huvitavamaks saavutuseks on selle näitamine, et kui vahelsusruumi projektiivses laiendis, mille *n*-mõõtmelisel juhul konstrueeris J. Sarv, eksisteerib ainult ebapunkte sisaldav hüpertasand, siis vahelsusruum on modelleeritav kumera hulgana lineaarses ruumis üle mingi järjestatud kaldkorpuse (Ü. Lumiste, 1964). Kui vahelsusruum on pidev (Dedekindi mõttes), siis selleks kaldkorpuseks tuleb tavaline reaalarvude korpus (I. Kolař, 1966; G. Rubinštein, 1970). Hiljuti, 1973. a. näitas G. Rubinštein, et kui pidev vahelsusruum on küllalt avara automorfismide rühmaga (see peab olema transitiivne paralleelide sidumite hulgal), siis see ruum on kas afiinne ruum või Lobatševski ruum.

Ka J. Sarv läheb oma doktoritöös 1931. a. üldjuhult üle pideva vahelsusruumi uurimisele, kuid teeb seda mitte päris korrektselt, märkides lihtsalt, et «...sirgel joonel mõeldakse peale iga ratsionaalse arvuga *n*/*m* tähitud punktidele (*n*/*m*) veel ka iga irratsionaalse arvuga *a* tähitud punkte (*a*)...» (lk. 67), kuid jätab selgitamata,mis annab aluse selliselt mõelda. Eukleidilise geomeetria juurde läheb J. Sarv juba koordinaatide vahendusel, kitsendades projektiivsete teisenduste rühma ortogonaalseks rühmaks. Seetõttu ei ole ta oma töö lõpuosas silmas pidanud meetodi puhtuse nõuet. Võimaluse eukleidilise ja Lobatševski geomeetria aksiomaatiliseks käsitlemiseks Sarve töö esimese osa ideede alusel näitas Ü. Lumiste oma teoses «Geomeetria alused» I (Tartu, 1964).

---

[26] Nende aksioomide süsteemi väga detailse analüüsi tegi 1934. a. A. Humal, kes eraldas välja tõeliselt vajalikud minimaalsed nõuded, mis siiski on küllaldased J. Sarve töös saadud järelduste tuletamiseks.

[27] Vt. näit. Г. С. М. Кокстер. Введение в геометрию. М., 1966, гл. 12.

J. Sarv avaldas oma doktoritöö eesti keeles. See on muidugi üheks põhjuseks, miks ta töö ei ole väljaspool Eestit pälvinud seda tähelepanu, mida see väärib. Võib kahtluseta öelda, et J. Sarve väitekiri, mille kaitsmisel autor oli juba 53-aastane, on eesti vanema põlvkonna matemaatikute üks silmapaistvamaid uurimusi. Ta kroonib pikka ja sihikindlat sammumist teadmiste allikailt teaduse kutsuvate avarusteni kõiki raskusi ja katsumusi trotsides. See oli J. Sarve eneseteostamise tee rentniku pojast teadlaseks läbi kahe revolutsiooni tule.

J. Sarve trükis ilmunud tööd[28]

1. Tähed, päikese süsteem ja orgaaniline loodus. Rahva Lõbu-leht, 1901, nr. 11, lk. 635—648.
2. Õhulaev. — Viru-rannast ja kalju-vallast. Tartu, 1902, lk. 15—20.
3. Maavärisemine ja tulepurskamine. — Ugaunia kalender 1903. Tartu, 1902, lk. 27—32.
4. Praeguse aja teadus I. Morfologia. Anatomia. Füsiologia. Haigusteadus. Arstimiseteadus. Liikide teadus. Tartu, 1904, 32 lk.
5. Soojus töötamas. Elekter inimese teenistuses. Tartu, 1904, 55 lk.
6. Kadumatus ja kaduvus looduses. «Virulase» lisa, 1906, nr. 17, lk. 134—136 ja nr. 18, lk. 139—141.
7. Uus õhulaeva plaan. «Säde» lisa, 1906, nr. 7, lk. 55—56 ja nr. 8, lk. 62—64.
8. Mis emakeelsete õperaamatute kokkuseadimisel mitte soovitav ei ole. Eesti Kirjandus, 3. aastakäik, 1908, lk. 370—372.
9. Kuda uskuda ja mida uskuda? Teaduse kindlusest. Tallinn, 1909, 31 lk. (kir. *Rusticus*).
10. «Uued» teadused. Noor-Eesti, 1910, nr. 4, lk. 388—389.
11. Füsika õpetus I. Tallinn, 1910, 128 lk. (1917. a. väljaandes 160 lk.)
12. Elekter I. Tartu, 1911, 81 lk.
13. Elekter. J. Sarve ettelugemiste sisu. Tartu, 1911, 4 lk.
14. Aleksander Bilov (nekroloog). Eesti Kirjandus, **6**, 1911, lk. 80.
15. Къ вопросу о скорости света въ движущихся средахъ. Протоколы Общества Естествоиспытателей при Имп. Юрьевскомъ Ун-те, **23**, 2, 1914, стр. 215—219.
16. Kas keel rahva või rahvas keele jaoks? — Jõulu-album 1915. Tallinn, 1915, lk. 29—32. (kirj. *Rusticus*).
17. Ettepanekud Hariduse kongressile kooli, iseäranis rahvaülikooli korralduse kohta. Kasvatus ja Haridus, **1**, 1917, nr. 5/6, lk. 135—136.
18. Kuidas hädavalgust saada. Pilk dümanomasina, akkumulaatori, purjemootori ja magneetlambi ehitusse ja tegevusse. Tartu, 1918, 32 lk.
19. Nelja kohaga logaritmide tabelid ühes tarvitamise juhatusega. Tartu, 1921, 20 lk.
20. Die Lichtgeschwindigkeit in bewegten Medien. Tartu Ülikooli juures oleva Loodusuurijate Seltsi aruanded, **28**, 2, 1922, lk. 24.
21. Einsteini teooria. Loodus, 1, 1922, nr. 2, lk. 66—73.
22. Valguse raskusest. Loodus, **2**, 1923, nr. 6, lk. 360—367.
23. Blaise Pascal (1623—1662). Loodus, **2**, 1923, nr. 7, lk. 438.
24. Geomeetria ehk ruumiteadus. Loodus, **3**, 1924, nr. 3, lk. 140—144.
25. Analüütilise geomeetria algkursus. Tartu, 1924, 180 lk.

---

[28] Sellesse nimekirja pole võetud ajalehtedes ilmunud J. Sarve kirjutisi (vt. näit. viide 9) ning tema sulest pärinevaid arvustusi ja lühimärkusi, millest osa on avaldatud ka ajakirjades.

26. Ahmese geomeetrilised kujundid. Tartu Ülikooli Toimetused, A **11**, 5, 1926, 14 lk.
27. Zum Beweis des Vierfarbensatzes. Tartu Ülikooli Toimetused, A **13**, 1, 1927, 10 lk.
28. Direkte Herleitung der Lichtgeschwindigkeitsformeln. Tartu Ülikooli Toimetused, A **13**, 6, 1927, 16 lk.
29. Geomeetria alused. Tartu Ülikooli Toimetused, A **19**, 4, 1931, 88 lk.
30. Kuidas ma sain «Ühenduse» liikmeks. — EÜS «Ühendus» 1906—1931. Tartu, 1931, lk. 39—40.
31. Paar jämedat sõna peenutsemise ajal. Üliõpilasleht, 1931, lk. 64.
32. Tartus ja Valgas. — Punased aastad. Tartu, 1932, lk. 119—125.
33. Mõni sõna populaarteaduslikust kirjandusest. — Raamatu osa Eesti arengus. Tartu, 1935, lk. 230—235.
34. Foundations of Arithmetic. Tartu Ülikooli Toimetused, A **28**, 2, 1935, 34 lk.
35. Die theoretische Reichweite der Faltungs- und Übertragungskonstruktionen. Tartu Ülikooli Toimetused, A **38**, 12, 1943, 5 lk. (koos A. Humalaga).
36. Punktarvutus analüütilises geomeetrias. Tartu Riikliku Ülikooli Toimetised, matem. teadused **1**, 1946, 32 lk.
37. Уравнение прямой в пространстве. Tartu Riikliku Ülikooli Toimetised, matem. teadused **5**, 1948, 24 lk.

KAKS PALJASJALGSET[1]

1920. a. suvel sai Antson aga ootamatult liitlase. Prof. Jaan Sarve perekond suvitas Kuressaares, tema abikaasa õe juures (Kopli tn. 3 — nüüd Töökoja 10). Südasuvel sõitis ka professor ise Kuressaarde. Prof. Sarv oli materialistliku maailmavaate ja ateismi propageerija ning tervete ja loomulikkude eluviiside pooldaja. Tema põhimõte oli: kehale rohkem õhku ja päikest. Lapsed käisid tal paljajalu ja —hirmus mõelda! — ka professor ise läks tihti läbi linna parki ja mere äärde päris paljajalu; isegi sandaale polnud tal jalas.

See rabas Kuressaare väikekodanlasi täiesti. Alvine Miller, kelle juures Sarve perekond elas, meenutas hiljem korduvalt, kuidas kõik naabrid ja tuttavad ajasid ehmatusest silmad pungi pähe ja lausa oigasid:

«Professor, ja paljajalu!»

Eks temalgi oli piinlik sugulase «sündmatu» käitumise pärast.

A. Antsoni reputatsioonile mõjus see aga täiesti hästi. Nüüd ei olnud tema ainus paljasjalgne. Kui juba professor võis käia paljajalu ega see siis nii hull ka ei olnud kui «gümnaasiumi koolihärra» seda tegi. Eesti kodanlikule ülikoolile prof. Sarv sellega küll head reklaami ei teinud. Tema paljajalu käimist halvustades märkis mõnigi Kuressaare saks ja kadakasaks:

«Näha kohe, et matside ülikool: professorid käivad paljajalu.»

V. Miller

[1] See Voldemar Milleri mälestuskild prof. Jaan Sarvest ja kirjanik Aleksander Antsonist, kes tollal oli Kuressaare (nüüdse Kingissepa) gümnaasiumi õpetaja, on võetud ajalehest «Kommunismi Ehitaja», 1961, 30. aprill.

INTERVJUU PROFESSOR GUNNAR KANGROGA

21. novembril 1973 sai 60-aastaseks väljapaistev eesti matemaatik, Eesti NSV teeneline teadlane, füüsika-matemaatikadoktor Gunnar Fromholdi p. Kangro. Ta sündis 1913. a. Tartus ehitusinseneri perekonnas. 1931. a. astus ta Tartu Ülikooli, mille lõpetas 1935. aastal. Kuni Suure Isamaasõja alguseni töötas G. Kangro assistendina Tallinna Tehnikaülikoolis. 1938. a. sai ta magistrikraadi. Suure Isamaasõja ajal oli kuni 1942. a. Punaarmees, siis töötas stipendiaadina Tšeljabinski Põllumajanduse Mehhaniseerimise Instituudis ja alates 1943. aastast Moskva Riiklikus Ülikoolis. 1944. a. novembrist kuni käesoleva ajani on G. Kangro töötanud Tartu Riiklikus Ülikoolis. 1948. aastal omistati talle füüsika-matemaatikadoktori kraad. Alates 1959. aastast juhatab G. Kangro matemaatilise analüüsi kateedrit. 1961. a. valiti ta ENSV TA korrespondentliikmeks.

Seoses juubeliga toimus väljaande «Matemaatika ja kaasaeg» toimetuse intervjuu professor G. Kangroga. Intervjueerijaks oli A. Tauts.

Kas Teie vanematekodus ja perekonnas esines huvi matemaatika vastu? Mida arvasid vanemad Teie tulevikust?

Ei, perekonnas erilist huvi matemaatika vastu ei olnud. Ema oli koolis matemaatikaga isegi hädas olnud. Isal siiski tuli inseneriina matemaatikat mingil määral vaja. Eriala valiku tegin ise. Kodus selle üle rääkimist oli, sest matemaatika oli tol ajal kaunis ebapopulaarne. Muud väljavaadet matemaatikul ei olnud kui õpetajakoht, aga selle ameti vastu puudus mul huvi. Kuid palju ka vaidlemist ei olnud, öeldi, et kui tahad, siis mine.

Kas Teil õdesid-vendi ka oli? Millise eriala nemad on valinud?

Õde on inglise keele filoloog, vend õppis majandust.

Millises vanuses Te oma eriala valisite?

17-aastaselt, pärast kooli lõpetamist.

Tähendab, gümnaasiumi ajal otsus ei olnud veel kindel?

Oli küll, kuid kodus ma sellest ei rääkinud.

Aga millised ained Teid gümnaasiumis veel huvitasid? Millistes ainetes olite edukaim?

Raske öelda, käisin neljas koolis. Tuli tihti elukohta vahetada, siis muidugi ka kooli. Eriti meeldis mulle Tartu Reaalgümnaasium. Seal oli matemaatikaõpetajaks Karl Maasik. Tema metoodika üle on palju vaieldud. Mulle jättis ta hea mulje. Osaliselt on see ka tema teene, et ma selle eriala valisin. Matemaatika polnud aga mul ainus aine, mis oleks võinud erialana kõne alla tulla. Hinnetes küll ei olnud suuri erinevusi. Üllatusi tuli ette ühest koolist teise minekul, sest programmid koolides olid erinevad. Näiteks Tartu Reaalgümnaasiumis oli mul esimese matemaatika kontrolltöö hinne 3—. Samasugune oli ka minu esimene hinne matemaatikas.

Millised õppejõud on Teil üliõpilaspäevist meelde jäänud?

Mäletan eriti professor J. Nuuti, kes tollal oli dotsendi kohal, siis veel professor J. Sarve, professor H. Jaaksonit, professor G. Rägot. Professor A. Humal oli tollal assistent, kuigi doktorikraadiga. Temaga oli mul üliõpilaspõlves vähe kokkupuutumist.

Kes Teie kaasüliõpilastest on praegu tuntumad? Kes on neist Teil rohkem meeles?

Teaduste Akadeemias töötab akad. H. Keres (kellega olen ka koos matemaatilise analüüsi kateedris töötanud) ja füüs.-matemaatikakand. G. Želnin, Tallinna Polütehnilises Instituudis dotsendid G. Mets ja A. Garšnek ning professorid H. Laul ja V. Maasik.

Kas praegu tuntumad teadlased paistsid ka sel ajal teiste hulgas silma?

Jah, eranditult. Nad olid tunduvalt teistest üle. Seda võis kohe algusest peale näha.

Milline oli tolleaegne õppetöö korraldus?

Tol ajal oli üliõpilastel loengul käimine täiesti vaba, kohustust ei olnud. Kursusi tänapäeva mõttes ka ei olnud. Oli ainult eksamite õiendamise järjekord õpinguraamatus. Kuid ka seda järjekorda sai muuta. Näiteks oli juhus, kus üliõpilane lahendas eksamil diferentsiaalvõrrandit, ilma et ta algebra kursust oleks kuulanud. Ta taandas selle võrrandi algebralisele võrrandile ja ütles, et ta algebrat ei ole kuulanud, seega siit edasi teha ei oska. Sellest piisas, sest usuti, et kui ta algebra eksami ära teeb, siis on võimeline sedagi ülesannet lõpuni lahendama. Üldse oli usaldus üliõpilaste vastu siis suurem. Igaühele anti sügisel praktikumiruumi võti, ka lugemissaali võti. Üliõpilased ise pidasid seal korda. Kevadel tuli need võtmed jälle tagasi anda.

Kui kaua sel ajal üliõpilane ülikoolis käis?

Normaalaeg oli 4 aastat, peale selle 1 aasta didaktilis-metoodilist seminari nendele, kes õpetajaks läksid. Oli ka neid, kes lõpetasid kiiremini. Näiteks dots. G. Metsal läks kõigega kokku pisut üle 3 aasta. Ta tegi viimased eksamid nimelt sügisel, siis oli ka see võimalus olemas. Aga oli ka neid, kes väga kaua ülikoolis käisid. Isegi uhkustasid sellega. Oli juhtum, kus üks üliõpilane sattus auditooriumi ja ütles siis, et ta on 20 semestrit ülikoolis käinud, aga seda eksitust ei ole veel olnud, et auditooriumi oleks juhtunud. Ta ootas siiski kannatlikult vaheajani, ainult pärast pahandas, et vist hakkab vanaks jääma, enam ei vaata ette, kuhu astub.

Millistes ruumides siis sellised üliõpilased liikusid, kes auditooriume vältisid?

Nad liikusid oma organisatsiooni ruumides. Nende organisatsioonide tegevust võib ka mitmeti hinnata. Ühelt poolt olid need kasulikud, noored said seal teatavat kasvatust. Seda mainis ka kadunud prof. F. Klement kunagi ülikooli nõukogus. Teiselt poolt viljeldi ka halbu kombeid. Seal oli jõukate vanemate lapsi, keda õppimine ei huvitanud. Need jõid sageli ja ahvatlesid ka teisi jooma. Mõttelaadilt olid need organisatsioonid põhiliselt tagurlikud.

Kas seda tuleb nii mõista, et oli üliõpilasi, kel algusest peale ei olnud kavatsustki ülikooli lõpetada?

Jah, neid oli. Mõnele lihtsalt meeldis üliõpilaselu. Tuli ka ette, et korralikud üliõpilased hakkasid viimase eksamiga venitama, et saaks kauem üliõpilaselu maitsta. Selliste hulgas oli ka neid, kes ei olnud majanduslikult kindlustatud. Need pidid siis õppimise kõrval töötama, aga sellegipoolest püüdsid kauem üliõpilasteks jääda.

Millised korporatsioonid sel ajal olid? Kas Teie ka mõnda korporatsiooni kuulusite?

Korporatsioone oli tol ajal palju. Korporatsiooni astuti sageli seda silmas pidades, kus töötasid selle korporatsiooni vilistlased: nende kaudu sai pärast ülikooli paremini kohta leida. Rida organisatsioone oli kohe sellise erialase orientatsiooniga, näiteks ökonoomika alal «Vironia». Enamasti olid mees- ja naisorganisatsioonid eraldi, oli ka segaorganisatsioone. Mina ei kuulunud ühtegi organisatsiooni, kuid mitmed tuttavad olid organiseeritud. Seetõttu oli mul võimalus organisatsioone külastada, käisin seal lauatennist mängimas. Organisatsioonides ei meeldinud mulle «rebase» olukord. Ta pidi sageli kelnerit mängima. Kui mõnel olengul mõned «värvikandjad» istusid hommikuni, siis pidi ka osa «rebaseid» kohale jääma. Sealjuures ei tohtinud «rebane» ise purju jääda. Ta pidi ära koristama need kaasvõitlejad, kellega see paha nali oli juhtunud. Selle jaoks kasutati sageli suurt vehklemisvahendite korvi, sinna mahtus puhkajaid mitu tükki sisse. Hiljem, kui «rebane» värvid sai, siis oli tal endal võimalus seal puhata.

Kuidas valisite oma magistritöö teema? Millal töö valmis?

Ise ei saanud siin algatust üles näidata. Selleks pidi keegi õppejõud ettepaneku tegema. Seda loeti sobimatuks, kui keegi oleks omal algatusel tulnud väitekirjast kõnelema kas või valmis tööga. Mulle tegi Tallinna Polütehnilises Instituudis prof. J. Nuut ettepaneku väitekirja kirjutamiseks. Polütehnilisse Instituuti asusin tööle 1936. a., siis kui see Tallinnas asutati. Pool aastat pärast seda asusin magistritöö juurde. Pöördusin professor H. Jaaksoni poole, temalt sain teema, ka eksamite nimekirja, selles oli 6 eksamit. Edasi läks töö iseseisvalt kuni kaitsmiseni. Kaitsmine ei olnud avalik, toimus ainult oponentide juuresolekul. Kuuest eksamist esitati küsimusi ainult kahe kohta. Väitekirja kohta ka pikki kõnelusi ei olnud. Mitte nii, nagu doktoriväitekirjade korral, mida kaitsti avalikult. Need läksid tavaliselt pikemate diskussioonidega.

Peale ülikooli lõpetamist töötasite siis Tallinna Polütehnilises Ülikoolis.

Jah. Selle asutuse nimi muutus mitu korda. Algul oli ta Tehnikaülikool.

Kes olid Teil seal kolleegideks? Milliseid tööülesandeid tuli täita?

Üldse oli 4 matemaatikut. Prof. J. Nuut oli laboratooriumi juhataja. Laboratoorium vastas praegusele kateedrile. Olid veel prof. A. Borkvell ja vanem-assistent magister R. Aavakivi. Mina olin noorem-assistent. Prof. J. Nuut ja R. Aavakivi olid teoreetilise mehaanika erialal, prof. A. Borkvell ja mina tegelesime matemaatiliste ainetega. Väga meeldis töökorraldus. Meid, õppejõude, oli ju väga vähe. Sellegipoolest töö nelja peale raskeks ei läinud. Laborante ka ei olnud. Vanem-assistent pidi ka masinakirja enda peale võtma, nooremale seda õnneks ei usaldatud. Head mälestused on hoolitsusest töötingimuste eest. Suurt tähelepanu pöörati ruumide mikrokliimale. Mõõdeti ja reguleeriti mitte ainult temperatuuri, vaid ka õhuniiskust. Bürokraatlik asjaajamine puudus.

Kas töötasite seal kuni sõjani?

Jah, kuni mobilisatsioonini 1941. a. juuli lõpus. Hiljem olin seal veel 1944. a. oktoobrikuul.

Kas mobilisatsiooni ajal ja sõjaväes oli Teiega koos ka teisi matemaatikuid?

Koos minuga mobiliseeriti magistrid R. Aavakivi ja A. Garšnek. R. Aavakivi haigestus teel ja ta tuli maha jätta Leningradi lähedale, kus ta suri. Sõjaväeteenistus ei kestnud mul kaua. Juba 1942. a. veebruaris suunati mind Tšeljabinskisse Põllumajanduse Mehhaniseerimise Instituuti, kus prof. J. Nuut oli matemaatika kateedri juhatajaks. Hiljem saabusid sinna ka magistrid A. Garšnek ja G. Mets ning praegune ENSV Teaduste Akadeemia asepresident akad. N. Alumäe.

Kas sõja ajal saite teadusega tegelda?

Jah, see võimalus oli olemas. Meid määrati valitsuse stipendiaatideks. Tšeljabinskis oli teadusliku tööga raskusi, ei olnud vajalikke ruume. Ka raamatukogud olid puudulikud. Instituut, mille juures me töötasime, andis oma ruumid sõja tõttu ära ja töötas ise üliõpilaste ühiselamus. 1943. a. lõpul avanes võimalus töötada Moskva ülikooli juures. Seal olid võimalused paremad ja ma sain jätkata uurimusi, mis olid seotud doktoritööga. Neid olin alustanud juba Tartus 1940. aastal.

Kuidas valmis Teie doktoritöö?

Doktoritööga alustasin peale magistritöö kaitsmist. Selleks oli ette nähtud töötada kaks aastat Tartus ülikooli stipendiaadina. Läksingi siis 1940. a. Tartusse. Kuid 1940. a. lõpul stipendiaadi koht likvideeriti ja 1941. a. alguses siirdusin jälle Tallinna Polütehnilisse Instituuti. Sellega oli töö esimene etapp lõppenud. Saadud tulemused vormistasin veel enne sõda. Sõja ajal töö avaldati. Moskvas üldistasin varem saadud tulemusi. Töö lõpetasin 1946. a. Eestis.

Mis on kaitsmise päevast meeles?

Kaitsmine oli reedel, 13. juunil 1947. a. Oponeerisid 4 professorit. Protseduur kestis 4 tunni ümber. Kogu aeg pidin püsti seisma. Sõnavõtud olid kohati kaunis elavad. Vaidlusi oli ka keele küsimustes, mis üllatas eriti filolooge.

Milline oli sõjajärgne ülikool? Arvatavasti erines ta tunduvalt praegusest

Jah, muidugi. Olukord oli tookord üsna tõsine. Talv 1944/45 õppeaastal oli selline, et ei olnud võimalik matemaatika auditooriumi kütta. Olin sellepärast sobiv lektor, et olin Uraali külmaga harjunud. Tšeljabinskis meil talvel toas temperatuur tavaliselt üle 0° ei tõusnud, kuigi elektripliit kogu aeg töötas. Seetõttu mul Tartus külmaga raskusi ei olnud. Mõneti oli õppetöö paremini korraldatud kui praegu. Kriit ja tahvlid olid kvaliteetsed. Koosolekuid oli vähe: need, kes koosolekuid korraldasid, kartsid külma. Üliõpilasi oli esimesel aastal vähe. Neistki mitmel ei õnnestunud lõpuni ülikoolis käia. Järgmisel aastal oli olukord tublisti normaalsem. Toimus juba üsna suur vastuvõtt ja töö läks oma tavalisse rööpasse.

Alguses õpetasite algebrat ja kirjutasite algebra õpiku. Siis olete veel olnud geomeetria kateedri juhataja. Milline vahekord Teil kõigi nende ainetega on?

Olukord oli siis selline, et prof. J. Nuut ja prof. A. Humal, kes olid enne sõda ülikoolis algebrat lugenud, töötasid mõlemad Tallinnas, mistõttu pidin hakkama algebraga tegelema. Algebra kursuses toimusid sel ajal suured muutused. Seda hakati nüüd lugema kui abstraktset distsipliini algebralistest süsteemidest, seni aga oli seda loetud kui polünoomide funktsiooniteooriat. Seetõttu tekkis vajadus sellel alal õpik kirjutada. Programmid muutusid ka tunduvalt. Õpiku teine trükk tuli esimesest tublisti erinev. Seepärast pidingi algebrasse rohkem süvenema. Aga põhihuvi oli ikka analüüsi valdkonnas, minu teaduslik töö oli ju algusest peale sellega seotud. Et õppejõude oli tollal vähe, siis ma ei saanudki ainult algebraga tegelda, tuli õpetada ka matemaatilise analüüsi aineid. Nii läksingi järk-järgult analüüsi peale üle. Ma ei saa öelda, et algebra mind ei huvitanud. Huvitas küll, aga analüüsi alal olin juba palju töötanud. Olin rohkem sellesse sisse elanud. Geomeetria kateedri juhataja ülesanded pidin võtma 1952. a. endale seetõttu, et pärast senise juhataja prof. J. Sarve pensionileminekut ühtki geomeetria spetsialisti meile ei jäänud. Geomeetria-alaseid aineid ma ei õpetanud. Tulevase geomeetria kateedri juhataja prof. Ü. Lumiste ettevalmistamine toimus Moskva ülikoolis üheaastase kvalifikatsiooni tõstmise ja aspirantuuri kaudu. Pakiliste vajaduste sunnil pidin geomeetria kateedri juhatajana tegelema ka arvutusmatemaatikute ettevalmistusega.

Kui palju Teil aspirante on olnud ja millistel erialadel nad on töötanud?

Minu esimeseks aspirandiks oli Maret Tamm algebra erialal. Hiljem läks ta tööle Tallinna. Enamus aspirante on olnud summeeruvusteooria alal. Vahepeal oli aga ülikoolil arvutusmatemaatikuid vaja. Arvutusmatemaatikaga tegeles siis teoreetilise mehaanika kateeder, aga funktsionaalanalüüs pakkus selleks paremaid võimalusi. Kolm aspiranti, praegused dotsendid Ü. Kaasik, E. Tamme ja L. Võhandu olidki funktsionaalanalüüsi lähendusmeetodite alal. Need olid võimekad matemaatikud, kes said kiiresti iseseisvalt tööle asuda. Hiljem loodi ka arvutusmatemaatika kateeder, seetõttu ei olnud minul vajadust selles suunas enam edasi töötada. Siis jäigi peamiseks alaks summeeruvusteooria. Siingi tuli uurimispiirkonda laiendada, peamiselt funktsionaalanalüüsi suunas. Mul oli ka üks praktilise kallakuga aspirant, kes tegeles majandusküsimustega, nimelt ehitusdetailide unifitseerimise probleemiga. Mina ei ole ehitusasjadega rohkem tegelnud kui ainult individuaalelamu ehitamisel, mis mulle ülikooli poolt ülesandeks tehti. Aspirant oli aga hästi hakkaja, kaasa aitas ka Maret Tamm, kes oli vahepeal spetsialiseerunud matemaatilise planeerimise alale. Üldse on minu juhendamisel kaitsnud väitekirja 19 aspiranti, praegu aga on juhendada 6 aspiranti.

Millist osa mängib Teie arvates summeeruvusteooria tänapäeva matemaatikas? Kus on selle ala tugevamad koolkonnad?

Summeeruvusteooria on etendanud ja etendab suurt osa funktsionaalanalüüsi arengus. Paljud funktsionaalanalüüsi probleemid on esialgu summeeruvusteoorias üles kerkinud. Ka vastupidi: funktsionaalanalüüs on omakorda summeeruvusteooriat abistanud. On välja kujunenud summeerimisväljade teooria, kus põhimeetodid on just funktsionaalanalüüsi omad. Sealjuures on funktsionaalanalüüs saanud summeeruvusteoorialt mitmed uued ruumide klassid, nagu *FK*-ruumid ja kahe normiga ruumid. Summeeruvusteooria osa matemaatika arengus üldse on olnud küllalt suur. Tal on rohkesti rakendusi paljudel aladel, eriti funktsiooniteoorias ja lähendamise teoorias, ja neid tuleb üha juurde. Tuleb märkida, et mõnede matemaatikute hulgas on summeeruvusteooria kohta tekkinud mõningane väärkujutlus seetõttu, et nad vahetavad summeeruvusteooria ära klassikalise ridade teooriaga tuntud Knoppi raamatu ulatuses, mis on põhiliselt pühendatud koonduvatele ridadele. Summeeruvusteooria on kaasaegne analüüsi haru, mis uurib põhiliselt hajuvaid protsesse. Mis puutub koolkondadesse, siis Nõukogude Liidus on üks suuremaid neist Moskvas, kus tegeldakse põhiliselt summeeruvusteooria rakendustega funktsionaalridadele. Siis veel Sverdlovskis, kus põhiliselt rakendatakse funktsionaalanalüüsi meetodeid. Sverdlovski matemaatikutega on meil kõige rohkem ühist uurimispiirkonda. Ukrainas on tuntud Kiievi ja Dnepropetrovski keskused. Saksa FV-s on juba mainitud Knoppi nimega seotud koolkond Tübingenis, Frankfurdis jm. Kuulus on Poola Banachi nimega seotud funktsionaalanalüüsi koolkond, kus palju tähelepanu pööratakse summeeruvusteooriale. Ungaris uuritakse funktsionaalridu akad. Alexitsi juhtimisel. Seal viibis hiljuti enesetäiendamisel minu õpilastest dots. H. Türnpu, praegu on seal dots. J. Lamp Tallinnast. Mitmed summeeruvusteooria koolkonnad on USA-s, näit. Chicago ülikoolis, kus töötab tuntud spetsialist trigonomeetriliste ridade alal A. Zygmund.

Mida arvate Matemaatika Instituudi loomisest? Kuidas üldse peaks arendama matemaatikat Teaduste Akadeemia liinis?

See on delikaatne küsimus. Sellest on juba hulk aega möödas, kui ühel arutelul TRÜ rektoraadis jäi kehtima seisukoht, et matemaatika fundamentaalsete distsipliinide alal peaks põhiline teaduslik töö toimuma ülikoolis, Teaduste Akadeemia asutused aga tegeleksid põhiliselt matemaatika rakendustega. Selle tõttu on praegu Teaduste Akadeemia matemaatika kui fundamentaalteaduse arendamisest Eestis kõrvale jäänud. Seda olukorda ei saa kuidagi normaalseks lugeda; seda enam, et Eesti NSV on ainus liiduvabariik, kus puudub Matemaatika Instituut. Matemaatika arendamist Teaduste Akadeemia liinis tuleks alustada vastava sektori rajamisega mõne lähedase instituudi, näit. Füüsika Instituudi juures. Selle sektori uurimistöö temaatika peaks olema põhiliselt suunatud matemaatika kui fundamentaalteaduse arendamisele, mitte aga üksteisest isoleeritud juhuslikele rakendustele.

PROFESSOR BÉLA SZŐKEFALVI-NAGY

1973. aastal möödus 60 aastat ühe rahvusvahelises ulatuses tuntuma ungari matemaatiku, Ungari Teaduste Akadeemia tegevliikme, NSV Liidu Teaduste Akadeemia välisliikme professor Béla Szőkefalvi-Nagy'i sünnist.

Professor Béla Szőkefalvi-Nagy sündis 29. juulil 1913. a. Transilvaania (Erdély) «pealinnas» Kolozsváris (praegu Kluž Rumeenias). Tema isa, tuntud geomeeter Gyula Szőkefalvi-Nagy oli Ungari Teaduste Akadeemia liige. B. Szőkefalvi-Nagy õppis Szegedi Ülikooli füüsika-matemaatika osakonnas, kus tema õpetajate hulgas olid niisugused väljapaistvad matemaatikud nagu Frigyes Riesz ja Alfréd Haár.

Üliõpilasaastail tegeles B. Szőkefalvi-Nagy teoreetilise füüsikaga ja kolmekümnendate aastate keskel avaldati juba kaks tema väikest artiklit ajakirjas «Zeitschrift für Physik». Hiljem suundus tema huvi aga matemaatika, esmajärjekorras matemaatilise analüüsi valdkonda. Tema matemaatika-alased uurimused puudutasid algul üsna laia küsimuste ringi: rühmade esituste teooria, invariantsed mõõdud topoloogilistel rühmadel, Hilberti ruumid, geomeetrilised ekstreemumülesanded, võrratused, Fourier' ridadega aproksimeerimine. Tema doktoridissertatsioon on pühendatud geomeetrilis-algebralistele küsimustele integreeruva ruuduga funktsioonide ruumide teoorias ning funktsioonide isomorfsete ja kinniste süsteemide omaduste küsimustele.

Pärast ülikooli lõpetamist sõitis ta teaduslikule komandeeringule Saksamaale ja Prantsusmaale, kus tekkisid isiklikud kontaktid van der Waerdeni, P. Koebe'i, E. Hopfi ja J. Favardiga. Oma eradotsendi dissertatsioonis käsitles ta multiplikaatoritega teisendatud Fourier' ridade ja integraalide aproksimeerivaid omadusi.

Pedagoogilist tööd kõrgemas koolis alustas ta professorina Szegedi Pedagoogilises Instituudis. Alates 1948. aastast on ta Szegedi Ülikooli professor, matemaatilise analüüsi kateedri juhataja, geomeetria kateedri juhataja ajutine asetäitja ja matemaatilise analüüsi kateedri juures oleva Ungari Teaduste Akadeemia matemaatilise analüüsi uurimisrühma juhataja. 1945. aastal valiti ta Ungari Teaduste Akadeemia korrespondentliikmeks, aga 1956. aastal tegevliikmeks.

Tema tulemused klassikalises analüüsis ja kumerate kehade geomeetrias on ülemaailmselt tuntud. Ikkagi on aga Béla Szőkefalvi-Nagy'i teaduslik tegevus seotud peamiselt funktsionaalanalüüsiga, eriti Hilberti ruumide problemaatikaga. Tema varasemates töödes on tulemusi häirituste teooriast, mis mängivad tähtsat osa teoreetilises füüsikas. Üldtuntud on ta töö Hilberti ruumides toimivate lineaarsete operaatorite spektraalteooriast «Spektraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes», mis ilmus 1942. aastal seerias «Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete» (teine väljaanne 1974. a.). See raamat on nüüdki antud probleemi kasulikuks sissejuhatuseks. Tema raamatul «Leçons d'analyse fonctionelle» (nõukogude lugejale tuttav 1954. aastal ilmunud tõlke «Лекции по функциональному анализу» järgi), mis on kirjutatud koos Frigyes Riesz'iga ja mida on korduvalt välja antud ning tõlgitud vene ja inglise keelde, on samuti teenitud edu.

Mitu põlvkonda matemaatikuid on õppinud professor Béla Szőkefalvi-Nagy'i reaalmuutuja funktsioonide teooria õpikust, mis ilmus inglise keeles.

50-ndatest aastatest alates kuuluvad professor Béla Szőkefalvi-Nagy'i teaduslikud uuringud üha enam funktsionaalanalüüsi valdkonda. Lähtudes oma esimestest tulemustest Hilberti ruumide unitaarsetest dilatatsioonidest ja survetest, töötab ta välja uue aparatuuri, uue meetodi, niinimetatud «Fourier' analüüsi» («harmoonilise analüüsi»), mille abil teeb otsustava sammu Hilberti ruumi üldiste operaatorite uurimisel. Saadud tulemused on tihedalt seotud teiste, esmajärjekorras nõukogude ja ameerika õpetlaste uurimustega ning on leidnud tähtsa rakenduse ennustuste teoorias ja stohastiliste protsesside teoorias.

Uued tulemused on osaliselt avaldatud Szegedi ajakirja «Acta Scientiarum Mathematicarum» artiklites, mis on kirjutatud koos rumeenia professori C. Foiasiga. Nende poolt on kirjutatud ka raamat «Analyse harmonique des opérateurs de l'espace de Hilbert», mis on alates 1967. aastast mitu korda välja antud ja tõlgitud vene (Гармонический анализ операторов в гильбертовом протсранстве) ja inglise keelde. Tema uurimustega ühinesid paljud ungari ja välismaised matemaatikud ja nende uurimuste käigus kujunes tema ümber terve rahvusvaheline koolkond.

Tema mitmepalgelist tegevust on kõrgelt hinnatud. Mitme põlvkonna õpilaste poolt austatud professorit Béla Szőkefalvi-Nagy'i autasustati kahel korral, 1950. ja 1953. aastal, Kossuthi preemiaga. 1965. aastal pühitseti ta Dresdeni polütehnilise instituudi ja 1970. aastal Turu ülikooli audoktoriks. 1971. a. valiti ta NSVL TA välisliikmeks ja 1973. aastal Iiri (Kuningliku) Akadeemia (Dublin) auliikmeks. Ta on esinenud ettekannetega real rahvusvahelistel kongressidel, kaks korda luges erikursusi USA-s.

Juba mitu aastakümmet teeb ta kõrgetasemelist pedagoogilist tööd ülikoolis, tema juhendamisel on kasvanud mitu põlvkonda teadlasi ja matemaatika õpetajaid. Ta on üks parimatest kateedrijuhatajatest ülikoolis. Mitmesuguste Ungari Teaduste Akadeemia komiteede ja komisjonide juhina on tal tähtis osa ungari matemaatilises elus ja ungari matemaatiliste uuringute juhtimisel. Ta on Szegedi Attila Józsefi nimelise Ülikooli rahvusvahelises plaanis tuntud matemaatilise ajakirja «Acta Scientiarum Mathematicarum» asendamatu peatoimetaja.

Professor Béla Szőkefalvi-Nagy'il on suur perekond. Tal on kuus juba täiskasvanud last, kellest kolm on füüsikud, kuid nende seas on ka lauljanna, majandusteadlane ja humanitaarainete õpetaja. Professor Béla Szőkefalvi-Nagy armastab väga loodust — Szegedi komitee «Isamaa Rahvarinde» viitse-presidendina arendab ta ühiskondlikku tegevust loodusliku keskkonna kaitseks.

Kohtudes professor Béla Szőkefalvi-Nagy'iga iga päev, ei oska kuidagi öelda, et ta on tõepoolest juba 60-aastane. Tema tegevus hämmastab kõiki oma noorusliku hoo ja haardega. Seoses ta 60-nda sünnipäevaga soovime talle edaspidist suurt edu loovas töös ja head tervist.

Károly Tandori [1]

---

[1] Käesoleva kirjutise autor on Ungari Teaduste Akadeemia korrespondentliige ja Szegedi Attila Józsefi nimelise Ülikooli professor. Vene keelest tõlkis H. Türnpu.

KARL ARIVA 50-AASTANE

Karl Oskari poeg Ariva on sündinud 10. jaanuaril 1924. a. Viljandi lähedal Paistu vallas põllutöölise perekonnas. Oma hariduse sai ta Viljandi Poeglaste Gümnaasiumis ning Tartu Riiklikus Ülikoolis, kus ta esialgu õppis ajaloo-keeleteaduskonnas, hiljem aga füüsika-matemaatikateaduskonna matemaatikaosakonnas. Kõrvuti õpingutega töötas ta matemaatikaõpetajana Viljandi Töölisnoorte Keskkoolis. Ülikooli eduka lõpetamise järel 1963. aastal asus K. Ariva tööle Tartu Riikliku Ülikooli geomeetria kateedrisse. Seal õpetas ta analüütilist geomeetriat, diferentsiaalgeomeetriat, kujutavat geomeetriat ja geomeetria aluseid. 1965. a., kui asutati matemaatika õpetamise metoodika kateeder, kutsuti K. Ariva tööle sellesse kateedrisse, kus tal on avanenud võimalus oma keskkooliõpetaja kogemusi rakendada tulevaste matemaatikaõpetajate ettevalmistusse.

Esialgu oli K. Ariva teaduslik uurimistöö seotud diferentsiaalgeomeetria probleemidega. Esimesed tulemused selles valdkonnas said tunnustava hinnangu. Tööleasumine matemaatika õpetamise metoodika kateedris põhjustas aga ümberlülitumise koolimatemaatika probleemidesse. K. Ariva originaalsed ainekäsitlused uutes matemaatika kooliõpikutes on meie matemaatikaõpetajatele hästi tuntud. Oma seisukohti on ta tutvustanud mitmetel õpetajate kursustel ja konverentsidel.

K. Ariva on aktiivselt kaasa aidanud koolinoorte matemaatikaalase ettevalmistamise tõhustamisele Mittestatsionaarse Matemaatikakooli Nõukogu liikmena ja keskkooliõpilaste matemaatikaolümpiaadi organiseerijana. Sama eesmärki teenivad ka tema kirjutised ajakirjas «Matemaatika ja kaasaeg» ning Mittestatsionaarse Matemaatikakooli väljaannetes. Alates 1. sept. 1972. a. täidab A. Ariva TRÜ Matemaatikateaduskonna prodekaani ülesandeid.

Kohusetruu ja entusiastliku suhtumisega kõigisse ettevõtmistesse on K. Ariva pälvinud oma kolleegide, üliõpilaste ja vabariigi matemaatikaõpetajate austuse ja lugupidamise.

O. Prinits

REIN TAMMESTE

In memoriam

Kui eesti matemaatikud viis aastat tagasi Rünno Mullarit ära saatsid, oli hüvastijätjate seas ka Rünno kursusekaaslane ja hea sõber Rein Tammeste. Halastamatu õnnetuse läbi oleme kaotanud nüüd ka tema: ta hukkus 14. augustil 1973. a. laskumisel Elbruselt.

Rein Tammeste sündis 19. jaanuaril 1939. a. Hiiumaal Käinas Heltermaa algkooli juhataja August Tammeste neljalapselises perekonnas viimase lapsena. Tema omaksed meenutavad: «Esimestel eluaastatel ei olnud Reinul mängukaaslasi, sest eelmine laps oli temast ligi 9 aastat vanem. Võib-olla osalt selle tõttu kujunes Reinu esimeseks suureks huviobjektiks arvelaud, millel ta õppis koos esimeste sõnadega liitma ja lahutama oma õdede, venna ja vanemate eluaastaid. Arvutamise vaheajal aga sõitis ta teistpidi pööratud arvelauaga mööda tube ringi. Kaheaastane Rein arvutas edukalt sadade piires. Hiljem õppis ta iseseisvalt selgeks kahekohaliste arvude korrutamise, mida peatselt oli suuteline kiiresti teostama ka arvelaua abita. 1945. a. kevadel võttis Reinu vend, kes oli tollal Hiiumaal Suuremõisas kooliõpetajaks, Reinu mõneks päevaks enda juurde. Kord VI klassi matemaatikatundi minnes leidis ta Reinu klassi ees õpetajatoolil istumas. Küsimusele, miks ta seal istub, vastas Rein: «Ma õpetan neid. Nad on nii rumalad, mitte midagi ei oska.» Reinu vend alustas tundi peastarvutamisega, milles Rein oligi kõigist üle.»

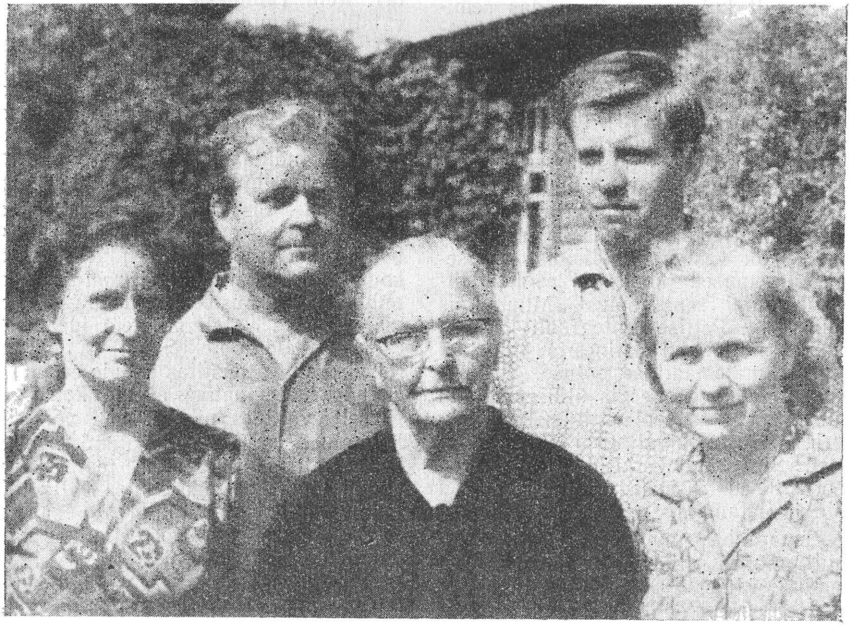
Kooliteed alustas Rein 1945. aastal Vaku algkoolis Hiiumaal, kus kolme aastaga lõpetas neli klassi. Kahel järgmisel aastal õppis ta Käina mittetäielikus keskkoolis ning seitsmenda klassi lõpetas Võru 1. Keskkoolis (1951), kus Reinu vend Endel oli tollal matemaatika ja füüsika õpetajaks. Keskhariduse sai Rein Haapsalu 1. Keskkoolis. Keskkoolis köitsid Reinu nii matemaatika kui ka füüsika, kõrvuti nendega aga ka male ja kabe. Kabes võttis ta 1954. aastal ainsa Eesti NSV esindajana osa NSV Liidu noorte esivõistlustest Kiievis.

Peale keskkooli lõpetamist 1955. a. astus 16-aastane Rein Tammeste Tartu Riikliku Ülikooli Matemaatika-Loodusteaduskonna füüsikaosakonda. Miks ta valis sisseastumisel just füüsika ja mitte matemaatika, pole teada. Ülikoolis ei suutnud ta aga loobuda soovist täiendada oma teadmisi ka matemaatikas. Juba esimesel sessioonil sooritas ta fakultatiivselt matemaatikaosakonnas ettenähtud eksamid ja arvestused. Edasi õppis R. Tammeste viie semestri vältel sisuliselt korraga nii füüsika- kui matemaatikaosakonnas.

Samal ajal hakkas Tammeste aktiivselt tegelema spordiga, millel oli kogu tema edaspidises elus tähtis koht. Ta lülitus 1958. a. aerutajate treeningurühma, kus treenis algusest peale suure innuga. Õppimine kahes osakonnas läks nüüd raskeks; eriti palju aega võtsid laboratoorsed tööd füüsikaosakonnas, mida suure treeningukoormuse ja võistlusreiside tõttu oli raske õigeaegselt sooritada. Alates 1958. a. kevadest jätkas Tammeste ametlikult õppimist ainult matemaatikaosakonnas. Õppimist füüsikaosakonnas ei kahetsenud ta aga kunagi, vastupidi — korduvalt meenutas ta tänumeeli neid õpinguid, mis olevat talle suuresti kasu toonud ka tema matemaatikaalastes töödes. Oma pärisosaks pidas ta siiski matemaatikat selle selguse ja järjekindla loogilise ülesehitamise võimaluste pärast.

Ülikooli lõpetas Rein Tammeste 1960. a. matemaatiku ja keskkooli matemaatikaõpetaja kvalifikatsiooniga. Pärast ülikooli lõpetamist suunati ta tööle TRÜ Arvutuskeskusesse, kus töötas algul vanemlaborandina, hiljem vanema teadusliku töötajana. Kaks aastat peale lõpetamist (1962) astus R. Tammeste statsionaarsesse aspirantuuri TRÜ juures. Aspirantuuri ajal uuris ta dots. L. Võhandu juhendamisel maksimaalse entroopiaga tõenäosusjaotusi mitmesugustes momentidele esitatud kitsendustega eraldatud tõenäosusjaotuste klassides. Tolleaegse töö olulisemad tulemused on avaldatud artiklites [2] ja [3]. Saadud tulemused tundusid talle aga raskepärastena ning tagasihoidlikena, mistõttu jäidki dissertatsiooniks vormistamata. Tõenäoliselt ei arvanud R. Tammeste, et nendest tulemustest ei piisanuks kandidaadikraadi saamiseks. Ta aga ei soovinud oma tööd katkestada teda ennast mitte rahuldavate tulemuste vormistamiseks. Teaduslikku kraadi ja sellega kaasnevat positsiooni ei pidanud ta kunagi omaette eesmärgiks.

Pärast aspirantuuriaja lõppemist 1965. a. sügisel töötas R. Tammeste lühikest aega TRÜ Arvutuskeskuses, 1966. a. asus aga tööle vanemõpetajana TRÜ arvutusmatemaatika kateedrisse. Matemaatilise statistika ja programmeerimise kateedri loomisel 1969. a. siirdus R. Tammeste sinna vanemõpetajaks.



Rein Tammeste koos ema, õdede ja vennaga kodutalus Hiiumaal

R. Tammeste on lugenud mitmesuguseid põhi- ja valikkursusi (tõenäosusteooria, tõenäosused Hilberti ruumides, matemaatiline statistika, informatsiooniteooria, sissejuhatus küberneetikasse, arvutid ja programmeerimine, matemaatiline analüüs, üldine topoloogia, hulgateooria, matemaatiline loogika jt.) ning edukalt juhendanud seminare (hulgateooria, matemaatiline loogika), kursuse- ja diplomitöid. Üliõpilaste seas on R. Tammeste loengud olnud väga hinnatud selguse, arusaadavuse ja mittetriviaalsuse poolest.

Oluliseks R. Tammeste arengus kujunes 1968. aasta sügis, mil ta täiendas end Moskva Riikliku Ülikooli juures. Vestlused sealsete õppejõududega süvendasid tal usku endasse ning äratasid palju värskeid ja sügavaid matemaatilisi ideid, muuhulgas ka matemaatilise loogika ja metamatemaatika valdkonnast, mis määrasid ka R. Tammeste viimase aja huvideringi.

Õppejõuna jätkas Rein Tammeste mõnda aega oma aspirantuuriaegset uurimisteemat, käsitledes aga nüüd entroopiaga seotud küsimusi tunduvalt avaramalt kui varem. Ta pidas seminarides rea sisukaid ettekandeid informatsiooni ja entroopia mõistete aksiomaatilisest üldistamisest. Selle perioodi kõige ilusamad tulemused on vormistatud artiklis [5]. Ent endiselt ei rahuldanud need autorit. R. Tammeste huvid kandusid üle teistele lähedastele probleemidele: ta hakkas üldistama juhusliku suuruse mõistet Hilberti ruumi. Üksteise järel sai ta täiesti iseseisvalt kätte kõik vastava valdkonna olulisemad tulemused juhul, kui eeldas Hilberti ruumi separaablust. Muuhulgas jõudis ta Pettise integraali mõiste juurde, mille abil defineeris juhusliku vektori matemaatilise ootuse. Seejärel suunas ta kogu energia üldisema juhu uurimisele, kus loobus juhusliku vektori väärtuste ruumi separaabluse nõudest. Siin aga kerkisid üles suured teoreetilised raskused, millest mõned jäidki ületamata.

Separaabli ruumi teooria ning samuti mõned üliõpilaste juhendamisel saadud tulemused lõplikudimensionaalsete ruumide kohta olid aluseks originaalsele valikkursusele «Tõenäosused Hilberti ruumides». Üliõpilaste poolt üleskirjutatud loengute põhjal valmis Tammestel hiljem samanimeline rotaprindil paljundatud raamatuke [4], mis saigi tema dissertatsiooni algvariandi aluseks. Seda dissertatsiooni varianti käis Tammeste tutvustamas Vilniuse Riiklikus Ülikoolis ja Leedu NSV Teaduste Akadeemia Füüsika ja Matemaatika Instituudis, aine uudsuse tõttu ei leidunud aga spetsialisti, kes oleks ametlikult julgenud oma hinnangut anda. Tollel R. Tammeste jaoks kriitilisel perioodil nõustus tema oponendiks olema Tbilisi Riikliku Ülikooli Matemaatikateaduskonna dekaan, füüsika-matemaatikadoktor N. N. Vahania, kellega R. Tammestel kujunes erakordselt soe ja südamlik sõprus. N. N. Vahania oli esimene, kes andis R. Tammeste dissertatsioonile asjatundliku hinnangu, näidates ühtlasi töö nõrgad ja tugevad küljed. Selgus, et iseseisvalt tehtud töö mitmed tulemused olid juba varem teada, uueks ja huvitavaks aga osutus komplekssete Hilberti ruumide käsitlemise tõenäosusteoreetiline metoodika (varasemad tulemused käisid enamikus reaalsete Hilberti ruumide kohta). Rein Tammeste tegi töös kiiresti vajalikud muudatused ning 19. märtsil 1971 kaitses TRÜ Matemaatikateaduskonna nõukogu ees edukalt oma dissertatsiooni «Mõningad tõenäosusjaotustega seotud küsimused komplekssetes Hilberti ruumides». Füüsika-matemaatikakandidaadi teaduslik kraad kinnitati talle 2. juunil 1971. a.

Pärast dissertatsiooni valmimist pöördus Rein Tammeste teaduslik huvi põhiliselt matemaatika aluste valdkonda. Tema silmis oli matemaatika puhtkeeleline süsteem. Küsimuses, kas matemaatika vajab mingeid ideaalselt eksisteerivaid objekte, oli ta eitaval seisukohal. Ta püstitas endale eesmärgi esitada matemaatika alused konstruktiivselt, vältides niipalju kui võimalik lõpmatuse mõistete kasutamist. Vastava finiitse aritmeetika teatava variandi jõudis ta põhijoontes välja töötada, kahjuks ei jõudnud aga saadud tulemusi veel avaldada (kuigi avaldamine oli tal plaanis).

Kõrvuti õppe- ja teadusliku tööga jätkas Rein Tammeste ka aktiivset sportlikku tegevust. Vaatamata sellele, et ta alustas aerutamisega alles 19-aastaselt, tulid edusammud kiiresti.

Juba esimesel aastal (1958) sai ta koos oma treeneri K. Kurepõlluga ENSV meistrivõistlustel kahesel süstal 500 m distantsil hõbemedali. Järgmisel aastal kuulus Tammeste juba vabariigi koondvõistkonda NSV Liidu rahvaste II spartakiaadil, kus tuli ühesel süstal 10 000 m distantsil 14. kohale. Samal aastal võitis ta oma esimesed meistritiitlid vabariigi meistrivõistlustel. 1963. a. võistles Tammeste NSV Liidu rahvaste III spartakiaadil, võitis Eesti NSV meistrivõistlustel ühesel süstal kõik 3 esikohta ja tunnistati aasta parimaks mees-süsturiks vabariigis. 1963. a. täitis ta ka NSV Liidu meistersportlase normatiivi.

Tammeste võistlejastaaž aerutamises ulatus 15 hooajani. Arvestades seda, et tal jäid noorteklassi stardid sooritamata, on ta senini üks meie pikema võistlejastaažiga aerutajaid. Üldse võitis Tammeste vabariigi meistrivõistlustel 9 meistritiitlit, 7 hõbe- ja 6 pronksmedalit. Ta oli mitmekülgne aerutaja, mille tõenduseks on esikohad kõikidel vabariigi meistrivõistluste distantsidel, alates 500 meetrist ja lõpetades 10 000 meetri ning maratoniga (maratoni kuldmedalid pärinevad aastast 1964 distantsidelt Tartu — Kaagvere — Tartu ja Tartu — Muuga — Tartu). Vabariigi koondvõistkonna dressi kandis Tammeste üle paarikümne korra. Balti vabariikide matškohtumistelt kuulub temale 2 meistritiitlit, 3 teist ja 4 kolmandat kohta. Ta võttis mitmel korral osa NSV Liidu ametiühingute spartakiaadist, sai hulgaliselt auhinnalisi kohti vabariigi karikavõistlustelt, oli paljukordne «Kalevi» vabariiklik tšempion.

Tammeste oli ka kirglik süstamatkaja, aga mitte matkasüstal, vaid oma võistlussüstal. Süstaga käis ta marjul, tutvus Eestimaa jõgedega, Võrtsjärvega, Peipsiga, Saaremaa ja Hiiumaa ranniku ning Väinamere laidudega.

Kõrvuti aerutamistreeningutega võttis Tammeste osa TRÜ õppejõudude võimlemisrühma tööst selle kõigis vormides ja tegeles vahepeal mõned aastad ka atleetilise võimlemisega. Viimastel aastatel kerkis eelmiste kõrvale veel üks harrastus — alpinism. Aastal 1972 viibis ta alpilaagris «Tsei», kus täitis märgi «NSVL alpinist» normid (tipud Kazbek ja Or-Tsveri); samal aastal käis ta Elbrusel. Ka 1973. a. juulis—augustis oli ta alpilaagris «Uzunkol».

Rein Tammeste ei rääkinud peaaegu kunagi oma saavutustest. Sellest, et ülikooli matemaatikud Rein Tammestest kui teadlasest ja inimesest lugu pidasid, räägib tema määramine Matemaatikateaduskonna nõukogusse (1971) ja valimine teaduskonna ametiühingu büroo esimeheks (1972).

Kolleegide ja sõprade mälestustesse jääb Rein Tammeste püsima elurõõmsa, alati sõbraliku ja erakordselt peenetundelise inimesena, kelles vaimne rikkus ja füüsiline täiuslikkus olid ühendatud harmooniliseks tervikuks. R. Tammeste oli huvitav vestluskaaslane igal alal. Ta oli palju reisinud ja palju mõtelnud ning huvitus paljudest valdkondadest. Rein Tammeste kaotus annab TRÜ matemaatikuteperele veel kaua valusalt tunda.

Kolleegid ülikoolist

REIN TAMMESTE TRÜKIS ILMUNUD TÖÖD

1. Meie külalisi. — Matemaatika ja kaasaeg, VIII, 1965, lk. 102—103.
2. О понятии информации. — TRÜ Toimetised, vihik 165. Filosoofiaalaseid töid, VIII, 1965, lk. 37—54.
3. Вычисление энтропии распределения при помощи моментов. — TRÜ Toimetised, vihik 192. Matemaatika- ja mehhaanikaalaseid töid, VI, 1966, lk. 104—120.
4. Tõenäosused Hilberti ruumides. TRÜ rotaprint, 1969, 108 lk.
5. Одно обобщение понятия информации. — TRÜ Toimetised, vihik 253. Matemaatika- ja mehhaanikaalaseid töid, IX, 1970, lk. 322—335.

REEDIK PALM — MATEMAATIK JA LITERAAT

TRÜ matemaatikute peret on tabanud valus kaotus — 28. veebruaril 1974. a. varises manalasse TRÜ Arvutuskeskuse töötaja Reedik Palm.

Reedik Augusti p. Palm sündis Tartus 27. augustil 1933. a. pedagoogi-kirjandusteadlase perekonnas. Koolipõlv algas 1940. a., Tartu 6. Keskkooli lõpetas ta 1952. a. (1948/49. õ.-a. langes õpinguajast välja tuberkuloosi haigestumise tõttu). Keskkooliõpinguis paistis silma eriti matemaatilistes ainetes, kuid ka teistel aladel olid tema tulemused tublid.

1952. a. astus R. Palm TRÜ matemaatikaosakonda (kavatsusega spetsialiseeruda astronoomia alale), kuid pärast esimest semestrit tuli õpingutes vaheaeg. 1955. a. astus R. Palm uuesti matemaatikaosakonda, mille lõpetas kiitusega 1960. a.

Pärast ülikooli lõpetamist töötas R. Palm lühemat aega ENSV TA Küberneetika Instituudis (insenerina), 1960.—1964. a. ENSV TA Keele ja Kirjanduse Instituudis (vanèminsenerina masintõlke alal) ja edasi kuni surmani TRÜ Arvutuskeskuses (noorema teadusliku töötajana ja insenerina).

Reedik Palmi abikaasa Mare Koit on samuti matemaatik. Isahoolest jäid ilma kaks pisipoega Reimo ja Vello.

Reedik Palmi teadusliku töö suund kujunes välja ülikooli viimastel kursustel — matemaatiline lingvistika ja masintõlge. Tema diplomitöö «Lause morfoloogiline töötlemine automaatsel tõlkimisel» (Tartu, 1960, 331 lk.) on detailne uurimus, mis oli kavandatud matemaatilise sisuga venekeelse teksti katseliseks tõlkimiseks eesti keelde arvutil «Ural-1». Lausete morfoloogilise töötlemise algoritmid olid viidud konkreetsete programmideni arvuti käskude süsteemis. Programmide kogumaht töös oli üle 3000 käsu, millele lisandus mahukas lingvistiline informatsioon 24 tabelis (andmed sõnatüvede kohta, nimi-, tegu-, omadussõnade muudete skaalad jne.). Lekseemide sõnastik nimetatud töös oli kavandatud ligikaudu 2500-märksõnalisena.

Töötades TA Keele ja Kirjanduse Instituudis tegi R. Palm palju matemaatilise lingvistika alase uurimistöö stimuleerimiseks, matemaatilise lingvistika ja küberneetika probleemide tutvustamiseks meie vabariigis. Tema organiseerimisel ja tegelikul toimetamisel ilmus instituudi väljaandena rotaprindikogumik «Сообщения по машинному переводу», 1 (1962), mis andis hea ülevaate meie vabariigis teostatavatest sellealastest uurimustest. R. Palmil endal oli selles kogumikus 4 artiklit. Artiklis [1] selgitab ta masintõlke vahekordi teiste teadusaladega, annab hinnangu masintõlke olukorrale antud etapil ning prognoosib selle arengusuundi (täielikumate keelemudelite loomine, mis hõlmaksid mõningal määral ka keelevälist valdkonda, vabanemine arvutite spetsiifika arvestamisest jne.). Artiklis [2] esitatakse konkreetne meetod (algoritm) ühes mitmete modifikatsioonidega tähtede «lühikoodide» leidmiseks, kus koodid sõltuvad antud sõnastikust. Hinnatakse ka «lühikoodi» efektiivsust tekstide morfoloogilise analüüsi korral (ökonoomia salvestusseadme mahus ca 40%, arvuti tööajas ca 25%). Artiklis [3] antakse ülevaade autori diplomitöö põhiosast. Artiklil on 4 alajaotust: fraasi leksikaalne töötlemine, sõnalõppude identifitseerimine, fraasi struktuuri esialgne analüüs ja ekvivalentsete vormide töötlemine. Artiklis [4] esitab R. Palm uue kontseptsiooni konkreetse tõlkimisalgoritmi automaatseks koostamiseks arvuti abil. Tõlkimisülesande korral keelest L keelde L' on vaja fikseerida ka keeleühikud vastavates keeltes: e_1, e_2, ... ja e'_1, e'_2, ... Tõlkimiseks on tarvis selgitada tingimus A_{ij}, mille korral keele L ühik e_i tõlgitakse keelde L' ühiku e'_j abil. Kokkuvõttes saame tingimuste maatriksi (A_{ij}). Maatriksi elementide iseloom ja keerukus sõltuvad keeleühikute tasemest (enamasti kasutatakse sõnaosi). Tõlkimisülesannet on otstarbekohane lahendada etappide kaupa, kasutades eri etappidel vahendajakeeli, mille puhul tuleb leida samuti omad tingimuste maatriksid. Kui meil on küllaldane hulk vastavate keelte L ja L' paralleelseid tekste, siis on võimalik äsjanimetatud tingimuste maatrikseid koostada automaatselt. Maatriksite koostamisel on muidugi kasulik arvestada nende keelte kohta juba teada olevaid andmeid. R. Palm koostas 1961. a. ka vastava katseprogrammi arvutile «Ural-1». Keeleühikuteks olid sõnad, tekstideks — laused. Katses kasutati 78 paralleelset teksti vene ja eesti keeles, kus kokku esines 602 vene- ja 583 eestikeelset sõna (erinevaid vene- ja eestikeelseid sõnu oli vastavalt 30 ja 42, kusjuures 15 venekeelset sõna tõlgiti eesti keelde mitmel viisil). Tõlkimisalgoritmi koostamine masinal võttis aega umbes 4 tundi. Koostatud tõlkimisalgoritmi tööd kontrolliti konkreetsete tekstide varal.

Suuremale lugejaskonnale mõeldud kirjutistest tuleks märkida artikleid [8] ja [9], kus R. Palm selgitab matemaatilise lingvistika probleeme ning annab soovitusi sellesuunalise töö planeerimiseks (kaadri ettevalmistamine) meie vabariigis. Kirjutistes [6] ja [10] kõneldakse ühest masintõlke ajaloo seisukohalt huvipakkuvast seigast — J. Vaheri poolt 1924. a. konstrueeritud «kirjutusmasinast-tõlgist» (tõlkimismasin, sisuliselt arvatavasti automatiseeritud «sõnaraamat»). Oluline on vahest märkida seda, et J. Vaher oli täiesti teadlikult sõnastanud masintõlkimise ülesande, olles veendunud selle põhimõttelises lahendatavuses. Kirjutises [7] analüüsitakse mõningaid eesti keele ja keelekorralduse probleeme (leidis vastuväiteid Leo Minimuselt, vt. «Keel ja Kirjandus», 3, 1963, lk. 169—171) ja kirjutises [5] küberneetika termineid seoses N. Wieneri «Küberneetika» eestikeelse tõlke ilmumisega.

R. Palmi Tartu-perioodist pärineb ulatuslik artikkel «Математическая лингвистика» I [11], mis on tegelikult suurema töö algus. Töö eesmärgiks oli keele teatava deduktiivse teooria (matemaatilise mudeli) esitamine lingvistiliste (või üldisemalt — semiootiliste) objektide ja operatsioonide kirjeldamiseks. Töö esimeses osas antakse teatav ülevaade algoritmide teooriast (kasutades Markovi normaalalgoritmi mõiste modifikatsiooni), edasi defineeritakse juba spetsiifilised mõisted ja vahekorrad (keel, keele semantika, täielik semantika, teade, teate transkriptsioon, kirjakeel (письменность) jne.) ning selgitatakse nende omadusi. Vaadeldakse ka keele objektide interpreteerimise võimalusi. Töö viimases osas formuleeritakse ka tõlkimise üldine ülesanne, mis seisneb, lühidalt öeldes, algoritmi Z^* leidmises, mis rahuldab tingimust, et iga teate A jaoks kahe kirjakeele ühises semantilises väljas transkriptsioonidega A_1 ja A_2 vastavates süsteemides, kehtiks parajasti ka $Z^*(A_1) = A_2$.

Oma viimases töös [12] annab R. Palm hinnangu matemaatilise lingvistika kaasaegsele olukorrale, selgitades muuhulgas ka teatava seisaku põhjusi masintõlke uurimissuuna arengus.

1960. aastate algul puhkes keskajakirjanduses «füüsikute» ja «lüürikute» vaidlus: kas teaduse ja tehnika võidukäigu ajastul on enam tähtsust kirjandusel. Ka Reedik Palm on irriteerinud «lüürikuid» arvamusega, nagu võiks tulevikus masinad raamatuid kirjutada («Edasi», 27. dets. 1967). Tegelikult aga elas temas endaski «lüürik» — leidliku sõnaga literaat. R. Palmi kirjanduslikest eneseväljendustest on jõudnud aastail 1965—1970 trükisõnasse 4 lühijuttu ja 7 luuletust (neist mitmed «Edasi» ja «Pioneeri» kirjandusvõistlustel premeeritud) ning ligi 20 pilkepala. Seda pole küll palju, kuid need tööd on siiski tähelepandavalt omanäolised.

R. Palmi lühijutud kuuluvad enamasti ulmekirjanduse valda. Ent peamine neis pole imepärane sündmustik, vaid selle vahendusel realiseeritud tõdemus, et inimene on loodud inimväärseks eluks. Autori meelistegelaseks on vaimu- ning tundeerk noor tütarlaps. Kord on see Marsi-tüdruk, kes äratab uurimistöösse mattunud ajaloodoktoris igatsuse vaigulõhnaliste kodumetsade järele («Vaigulõhn» [13]); kord looduslaps, kes oma jutuga libahundiks käimisest viib teadlase mõttele, et pole õige hukka mõista seda, mis tundmatu või tavatu («Libahunt» [18]); kord pioneeritüdruk, kes oma kartmatusega annab metsavennale julguse vabatahtlikust vangipõlvest loobuda («Metsik suvitaja» [20]).

Ka R. Palmi luuletused on mõttesügavad, elu ja inimest jaatavad. Nendes on leidnud poeetilise väljenduse noore inimese jõudmine läbi keeruliste aegade arusaamiseni, et elu tuleb vaadata avasilmi, ilma prillideta («Tüli me ei nori» [16]), et meie mõistuse sajandi inimestes on veel palju seletamata sügavusi («Kas tead, mis on kustunud kaja?» [16]). Loogilise järjena sellele on äratundmine, et tuleb tungida elumõistatustesse, leida lahendust seni lahendamata probleemidele («Kas maksab ilmaaegu vaeva näha?» [16]) ning et tuleviku ehitamiseks on vaja tunda ja mõista inimkonna sajanditepikkust kogemust — sest «puhas rõõm on aina otsida» («Kes minevikku ei mäleta» [22]). Neist aga, kes võtavad elu tarbijalikult kui mõnus-laiska rongisõitu, ilma rutu ja riskita, võib poeet vaid pilkamisi rääkida («Not to be») [22].

Satiirikuna on R. Palm leidnud kõige sagedamini pilkamisväärset meie kirjanduselust. Ta on osatanud literaatide kerget karjääritegemist («Füüsika ja lüürika» [14]), vulgaarsotsioloogilist kirjandusemõistmist («Kuhu te lähete, sm. Andi» [15]), kriitika alalist rahulolematust autoritega («Kuidas ma romaani kirjutasin» [19]), seksiga edvistamist («Uusim proosa» [28]) ja igast tühjast kirjanduse tegemist («Patoloogiline meetod» [28]). Ka on ta pilganud provintslikke snoobe, kes püüavad järele ahvida Lääne elulaadi («Intelligentne sügis» [21]), ja vaikelu nautimist metsakurus, kui suures maailmas käib võitlus ja pingutatakse tulevikku ehitada («Kohalik õhtu» [26]).

R. Palmi sulest pärineb ka veel ligi 30 populaarteaduslikku artiklit, mis on tõlgitud poola, saksa, inglise ja tšehhi keelest ning avaldatud ajalehtedes «Edasi» ja «Noorte Hääl» (osalt ilma tõlkija nimeta). Nende peamiseks sisuks on ebaharilikud nähtused ja sündmused maailma rahvaste elus, looduseriigis ja teadusevallas.

Reedik Palmi hindame eeskätt kui matemaatilise lingvistika spetsialisti ja nimetatud uurimissuuna üht rajajat meie vabariigis. Ent seejuures ei piirdunud ta kaugeltki ainult erialaprobleemidega. R. Palmi huvidering oli erakordselt avar ja avatud: oli raske leida küsimust, mis temas poleks leidnud vastukaja, teda haaranud. Mõttevahetustes oli ta ergas osaleja, kes oma seisukohti kaitses järjekindlalt ja kompromissitult. Niisama aktiivne ellusuhtumine kajastub ka tema ilukirjanduslikes palades. Ning seesugusena, otsimis- ja loomisrahutu teadlasena ning literaadina jääb R. Palm püsima meie mälestusse.

I. Kull, A. Nagelmaa

REEDIK PALMI TRÜKIS ILMUNUD ERIALASED TÖÖD

1. Некоторые замечания о задачах и перспективах МП [машинного перевода] (в дискуссионном порядке). — Сообщения по машинному переводу, 1, Tallinn, 1962, lk. 3—17.
2. Об одном методе «сжатого» побуквенного кодирования. Sealsamas, lk. 49—58.
3. О морфологическом анализе русской фразы. Sealsamas, lk. 59—83.
4. Об одной схеме автоматического составления бинарного переводного алгоритма на основе изучения параллельных текстов. Sealsamas, lk. 84—89.

5. Ühe raske raamatu ümber. — Sirp ja Vasar, 1962, 18. mai. [Toimetuse artikkel saabunud kirjadest N. Wieneri «Küberneetika» eestikeelse väljaande kohta; suure osa artiklist moodustab R. Palmi seisukohtade esitus.]

6. Masintõlke ajaloost. — Õhtuleht, 1962, 1. dets.

7. Matemaatiku pilguga. — Sirp ja Vasar, 1963, 4. jaan.

8. Masintõlkest ning selle arenguperspektiividest. — Rahva Hääl, 1963, 16. mai.

9. Küberneetika ja keeleteadus. — Matemaatika ja kaasaeg, I, 1963. lk. 21—25.

10. Uut masintõlke ajaloos. — Matemaatika ja kaasaeg, XI, 1966, lk. 21—26 (koos I. Kulliga).

11. Математическая лингвистика I. — Труды Вычисл. центра [Тартуского ун-та], 12, 1968, 140 lk.

12. К вопросу об основаниях математической лингвистики. — Труды Вычисл. центра [Тартуского ун-та], 18, 1969, lk. 69—104.

...JA KIRJANDUSLIKUD PALAD

13. Vaigulõhn. (Fantastiline jutustus.) «Pioneeri» 1965. aasta lühijuttude võistlusel auhinnatud II preemiaga — Pioneer, 1965, nr. 8, lk. 8—13.

14. Füüsika ja lüürika. [Satiiriline lühijutt. Kirjut.] Peeter Pseudonüüm. — Pikker, 1966, nr. 12, lk. 5.

15. Kuhu te lähete, sm. Andi? (Retsensioon.) [Satiiriline lühijutt. Kirjut.] R. Retsensent. — Sirp ja Vasar, 1966, 5. aug.

16. Täna õhtul kell 20.00 tantsivad murueide tütred. — Kas tead, mis on kustunud kaja? — Tüli me ei nori. — Kas maksab ilmaaegu vaeva näha? [Luuletused]. — Noorus, nr. 8, lk. 68—69.

17. Otse ja objektiivselt. [Satiiriline lühijutt.] — Pikker, 1966, nr. 20, lk. 7.

18. Libahunt. H. G. Wellsi sajandaks sünnipäevaks. «Edasi» 1966. aasta jutustuste võistlusel III auhinna saanud töö. — Edasi, 1967, 1. jaan.
Vilkolakė. Kūrybinė saváitė. — Kauno tiesos priedas, 1969, liepos 6 (juuli). — Leedu keelde tlk. D. Lukšys.

19. Kuidas ma romaani kirjutasin. (Kogemuste vahetamise korras.) [Satiiriline lühijutt. Kirjut.] A. Autor. — Edasi, 1967, 6. aug.

20. Metsik suvitaja. «Pioneeri» lühijuttude võistlusel auhinnatud II preemiaga. — Pioneer, 1967, nr. 9, lk. 3—5.
Sama. — Jutupaunik 1969. Koostanud H. Väli. Tln., 1969, lk. 72—81.

21. Intelligentne sügis. — Kõne käänud. [Satiirilised luuletused.] — Pikker, 1967, nr. 17, lk. 2.

22. Not to be. — Kes minevikku ei mäleta. «Edasi» 1967. a. luuletusvõistlustel III auhinna saanud tööd. — Edasi, 1967, 26. nov.

23. Rahvuslik leinapäev. Pühapäev, 9. juuni 1968. [Luuletus.] — Edasi, 1968, 16. juuni.

24. Järeleksam. «Edasi» 1968. a. jutustustevõistlusel äramärgitud töö. — Edasi, 1969, 28. sept.

25. Robotite rahvaluulet: Mõistatus. — Raudne loogika (deklamatsioon).— Kodukotus (rahvalik laul). — Perekonnakroonika. — TTO (seltskondlik mäng). — Ohutustehnika. [Satiirilised luuletused.] — Pikker, 1969, nr. 3, lk. 3.

26. Kohalik õhtu. [Pilkeluuletus.] — Pikker, 1969, nr. 9, lk. 5.

27 Ebatüüpiline tüüp. — Optiline murrang. — Kuidas elati Cro-Magnon'is. [Satiirilised luuletused.] — Pikker, 1969, nr. 17, lk. 4.

28. Uusim proosa. — Patoloogiline meetod. — Generatsioonide probleemist. [Satiirilised luuletused.]— Pikker, 1970, nr. 6, lk. 3.

MEIŠE LEVIN — FÜÜSIKA-MATEMAATIKADOKTOR

13. detsembril 1972. aastal kaitses Tallinnas ENSV Teaduste Akadeemia füüsika-matemaatika ja tehnikateaduste osakonna nõukogu ees edukalt oma doktoriväitekirja «Ligikaudse integreerimise mõningaid küsimusi» Tallinna Polütehnilise Instituudi matemaatika kateedri dotsent Meiše Levin. Väitekirja oponeerisid prof. I. B. Simonenko (Rostov Doni ääres), prof. A. N. Kostovski (Lvov) ja prof. G. Vainikko (Tartu).

Meiše Levin sündis 30. juulil 1934. a. Valgas teenistuja perekonnas. 1952. a. kevadel lõpetas ta Valga 2. Keskkooli. Aastatel 1952—1957 õppis TRÜ Matematika-Loodusteaduskonnas. Peale ülikooli lõpetamist töötas ta 2 aastat keskkooliõpetajana ja seejärel aasta teadusliku töötajana vastloodud TRÜ Arvutuskeskuses. Aastatel 1960—63 oli M. Levin Küberneetika Instituudi aspirant. Sel ajal valmis dots. Ülo Kaasiku juhendamisel kandidaadiväitekiri «Integraalide ligikaudsest arvutamisest», mille kaitsmine oli 1963. aastal. Alates 1. septembrist 1964 töötab M. Levin TPI matemaatika kateedris algul vanemõpetajana, 1967. aastast dotsendina ja aastast 1973 professori kohusetäitjana. Aastatel 1970—1972 kirjutas ta vanema teadusliku töötajana doktoriväitekirja.

M. Levinit huvitavate probleemide ring on küllalt lai. Diplomitöö teemaks oli omal ajal nelja värvi probleem prof. H. Jaaksoni juhendamisel. Probleem on olnud ka edaspidi vaatluse all ja tema enda sõnade järgi soovib ta nüüd sellega tõsiselt tegelema hakata.

Üks osa probleeme on seotud elementaarmatemaatikaga. M. Levin on seisukohal, et iga õppejõud-matemaatik peab huvi tundma ka elementaarmatemaatika vastu. Elementaarmatemaatika alalt on ta avaldanud mitu artiklit ka «Matemaatika ja kaasaja» veergudel.

Ta on uurinud teenindusobjektide optimaalse paigutamisega seotud probleeme.

M. Levin on vabariigi matemaatikutest üks väheseid, kes on avaldanud töid matemaatika esteetiliste ja religioossete küsimuste kohta.

Kõige olulisema osa M. Levini teaduslikest töödest moodustavad kvadratuur- ja kubatuurvalemite optimiseerimisega seotud probleemid. Kandidaadiväitekirjas lahendas ta mitmel erijuhul S. Nikolski poolt püstitatud ülesande: leida teatud funktsioonide klassi jaoks minimaalse jääkliikmega kvadratuurvalem (parim kvadratuurvalem).

Integreerimisel on sageli teada, et integrand rahuldab teatud tingimusi integreerimispiirkonna otspunktides (või rajajoonel kordsete integraalide korral). Sel korral on otstarbekas integraali arvutamisel kasutada seda informatsiooni arvestavaid kvadratuur- või kubatuurvalemeid. Doktoriväitekirjas on tuletatud rida niisuguseid valemeid, kusjuures kasutatakse Greeni funktsioone. M. Levin defineerib mitu uut funktsioonide klassi, mille jaoks lahendab parima valemi konstrueerimise ülesande nii fikseeritud kui ka fikseerimata sõlmede korral. On vaadeldud Markovi tüüpi kvadratuur- ja kubatuurvalemeid ning välja töötatud metoodika vastavate ekstreemumülesannete lahendamiseks.

Suur osa väitekirjast on pühendatud parimatele kubatuurvalemitele küllalt laiade funktsiooni klasside jaoks.

On leitud seos parimate kvadratuurvalemite ja parimate kubatuurvalemite vahel vastavates klassides. On vaadeldud kvadratuur- ja kubatuurvalemid, mis on ositi integreerimise valemi üldistusteks, ning lahendatud nende korral ekstreemumülesanne.

M. Levin on avaldanud üle 50 teadusliku publikatsiooni. Tema juhendamisel on kaitstud üks kandidaadiväitekiri, juhendamisel on kaks. Ta on esinenud ettekannetega matemaatika-alastel teaduslikel seminaridel Ukraina NSV ja Valgevene NSV TA matemaatika instituutides, ENSV TA Küberneetika Instituudis, Leningradi, Minski, Rostovi (Doni ääres) ja Tartu ülikoolides, Valgevene matemaatikute kolmandal vabariiklikul konverentsil.

M. Levin on kirjutanud koos S. Ulmiga «Arvutusmeetodite käsiraamtu» (1966) ja «Masinaehitaja käsiraamatu» peatüki «Matemaatika» (1968) ning koos A. Leviniga «Matemaatika ülesannete kogu» (1969).

TPI-s on M. Levin lugenud kõrgema matemaatika põhikursust ja erikursusi (ka TRÜ üliõpilastele). Ta on olnud matemaatika ringi juhendaja, juhendanud üliõpilaste teaduslikke töid, mis on saanud auhinnalisi kohti konkurssidel. Koos üliõpilastega on ta avaldanud viis teaduslikku artiklit.

Ühiskondlikust tööst on M. Levin aktiivselt osa võtnud. Ta on olnud ajalehe «Молодежь Эстонии» korrespondent matemaatika-alastes küsimustes, rahvaülikooli dekaan, teaduslike toimetiste kolleegiumi liige, TPI üliõpilaste vastuvõtukomisjoni matemaatika ainekomisjoni esimees. Praegu on ta aktiivne ühingu «Teadus» lektor, ajakirja «Реферативный Журнал. Математика» referent.

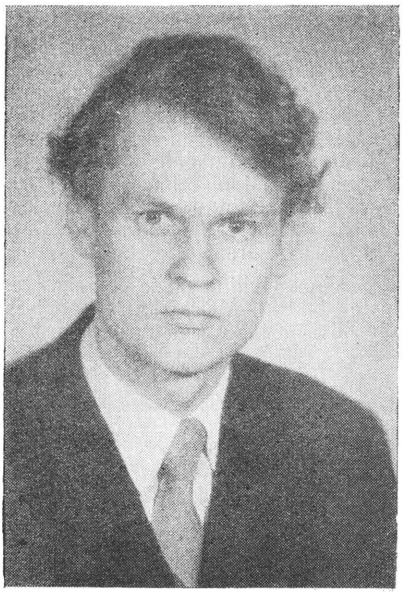
See on lühiülevaade värske teaduste doktori Meiše Levini senisest, intensiivselt jätkuvast uurimistööst.

A. Jõgi

UUSI TEADUSTE KANDIDAATE

26. mail 1971. a. kaitses TRÜ teoreetilise mehaanika kateedri vanemõpetaja **Kalju Soonets** väitekirja teemal «Mõnede konstruktsioonielementide painde uurimine geomeetrilise ja füüsikalise mittelineaarsuse arvestamisel». Väitekiri on pühendatud ristkülikukujuliste plaatide ja silindriliste koorikute painde uurimisele juhul, kui pinged ületavad ka elastsuspiiri. Töö valmis prof. Ü. Lepiku juhendamisel. Oponeerisid professor M. Kornišin Kaasanist ja füüsika-matemaatikadoktor L. Ainola, aprobeerivaks asutuseks oli TPI ehitusmehaanika kateeder. Oponendid andsid K. Soonetsi tööle hea hinnangu, mida kinnitasid ka meie maa paljudest uurimiskeskustest saabunud arvamused. TRÜ Matemaatikateaduskonna nõukogu omistas K. Soonetsile füüsika-matemaatikakandidaadi teadusliku kraadi.

Kalju Soonets sündis 9. juulil 1935. a. Tartus. Ta lõpetas 1952. a. Antsla Keskkooli ja 1957. a. TRÜ Matemaatika-Loodusteaduskonna matemaatikaosakonna mehaanika haru. Keskkooli lõpuklassis oli tema matemaatikaõpetajaks Rudolf Sikk. Pärast aastast töötamist Pärnu 1. Kk. õpetajana asus K. Soonets 1958. a. tööle TRÜ teoreetilise mehaanika kateedri vanemõpetajana. Aastatel 1968—1970 oli aspirantuuris sama kateedri juures.



18. veebruaril 1972. a. kaitses oma väitekirja «Mõningate plastsete konstruktsioonielementide paine materjali korral, millel on erinevad voolavuspiirid tõmbel ja survel» TRÜ teoreetilise mehaanika kateedri assistent **Jaan Lellep.** Tööd juhendas prof. Ü. Lepik, oponeerisid prof. G. Teters Riiast ja füüsika-matemaatikadoktor J. V. Nemirovski Novosibirskist. TRÜ Matemaatikateaduskonna nõukogu omistas J. Lellepile füüsika-matemaatikakandidaadi teadusliku kraadi.

Väitekirjas uuritakse plastsest erinevate voolavuspiiridega materjalist valmistatud varraste, plaatide ja koorikute kandevõime ning dünaamika küsimusi. Vaadeldakse ka mõningate konstruktsioonielementide roomavust materjalide korral, mis käituvad erinevalt tõmbel ja survel.

Jaan Lellep on sündinud Tartu rajoonis 25. juunil 1945. a. Ta lõpetas 1963. a. Nõo Keskkooli, kus tema matemaatikaõpetajaks oli L. Tartes. Tartu Riikliku Ülikooli Matemaatikateaduskonna lõpetas J. Lellep 1968. a. kiitusega. Pärast lõpetamist oli ta TRÜ teoreetilise mehaanika kateedris esialgu aspirandiks (1968—1971), seejärel assistendiks. Praegu töötab J. Lellep samas kateedris vanemõpetajana.

5. mail 1972. a. kaitses TRÜ Matemaatikateaduskonna nõukogu ees väitekirja «Rahvamajanduse tasakaalumudelite uurimise matemaatilised meetodid» TRÜ Arvutuskeskuse juhataja **Jüri Tapfer.** Tööd juhendas füüsika-matemaatikakandidaat dots. Ü. Kaasik. Oponeerisid füüsika-matemaatikadoktor prof. G. Vainikko ja füüsika-matemaatikakandidaat dots. R. Jürgenson. J. Tapferile omistati füüsika-matemaatikakandidaadi teaduslik kraad.

Väitekirjas on välja töötatud iteratsioonimeetodid lineaarsete võrrandisüsteemide lahendamiseks rahvamajanduse mudelites esinevate suuremahuliste ülesannete jaoks. Töö tulemused on praktikas kasutusel olnud vabariigi tootmisharudevahelise tasakaalu ja teiste mudelite uurimisel.

Dissertant sündis 7. juulil 1938. a. Valga rajoonis, õppis Valga 1. Keskkoolis, mille lõpetas 1956. a. Tartu Riikliku Ülikooli Matemaatika-Loodusteaduskonna matemaatikaosakonna lõpetas ta 1961. a. Samast aastast alates töötab TRÜ Arvutuskeskuses.

31. mail 1972. a. kaitses ENSV TA Ühiskonnateaduste nõukogu ees oma väitekirja «Majandusmatemaatilised mudelid sööda tootmise ja kasutamise efektiivseks planeerimiseks majandis» Eesti Maaviljeluse ja Maaparanduse Teadusliku Uurimise Instituudi majandusmatemaatilise sektori juhataja **Tõnu Akkel.** Tööd juhendas dots. Ü. Kaasik,

oponeerisid prof. R. Hagelberg ja majandusteaduste kandidaat V. Aasmäe. T. Akkelile omistati majandusteaduste kandidaadi teaduslik kraad.

Väitekirjas käsitletud mudelites optimiseeritakse söödakultuuride külvipinna struktuuri, loomade arvu gruppides ja söödaratsioone. Ülesande maatriksi koostamine toimub elektronarvuti abil. Koostatud mudeleid kasutatakse Eesti Maaviljeluse ja Maaparanduse Teadusliku Uurimise Instituudi majandite töö planeerimisel.

Tõnu Akkel sündis Tartus 1. märtsil 1936. a., lõpetas 1954. a. Tartu Raudteetranspordi Tehnikumi ja 1959. a. Tartu Riikliku Ülikooli Matemaatika-Loodusteaduskonna matemaatikaosakonna. Seejärel töötas TRÜ Arvutuskeskuses, algul vanem-laborandina ja seejärel noorema teadusliku töötajana. Aastatel 1961—1965 õppis ta TRÜ aspirantuuris, täiendades end 1963/64. õ.-a. stažöörina Tšehhoslovakkias. Aastatel 1965—1968 töötas NSVL TA Majandusmatemaatika Keskinstituudi Eesti filiaalis, algul juhtiva insenerina, siis laboratooriumi juhatajana. Alates 1968. a. on T. Akkel Eesti Maaviljeluse ja Maaparanduse TU Instituudi majandusmatemaatika sektori juhataja.

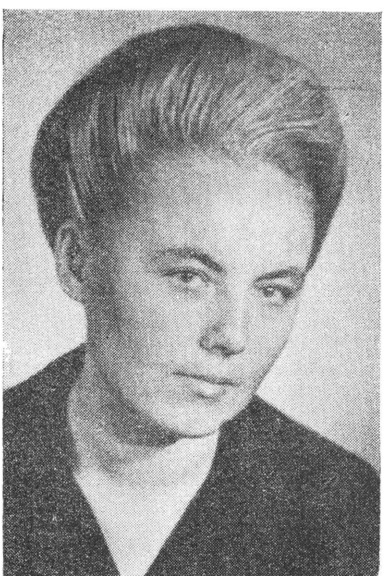
31. mail 1972. a. kaitses oma kandidaadiväitekirja «Kvantitatiivse orgaanilise keemia alase informatsioonilis-loogilise süsteemi loomisest» TRÜ matemaatilise statistika ja programmeerimise kateedri vanemõpetaja **Jüri Kiho.** Kaitsmine toimus Moskvas üleliidulises informatsiooniinstituudis, oponeerisid füüsika-matemaatikadoktor

prof. V. Uspenski ja keemiakandidaat G. Stepanets. Töö juhendajaks oli dots. Ü. Kaasik, teaduslikuks konsultandiks keemiadoktor prof. V. Palm. J. Kihole omistati tehnikakandidaadi teaduslik kraad.

Töös on formaliseeritud keemiliste ühendite struktuuri ja nende reaktsioonivõime sõltuvuse uurimise meetod, välja töötatud ühendite, reaktsioonide ning nende parameetrite sisestuskeel, lahendatud põhiküsimused suurel andmemassiivil põhineva vastava raalimissüsteemi loomiseks.

J. Kiho on sündinud 2. augustil 1941. a. Tartus. Ta lõpetas 1959. a. Tartu 5. Keskkooli ning jätkas õpinguid TRÜ Matemaatika-Loodusteaduskonna matemaatikaosakonnas. Pärast ülikooli lõpetamist 1964. a. oli ta stažöör TRÜ Arvutuskeskuses, aastatel 1967—1970 õppis TRÜ aspirantuuris. Seejärel töötas J. Kiho TRÜ Arvutuskeskuses, aastast 1971 on ta vanemõpetajaks matemaatilise statistika ja programmeerimise kateedris.

13. oktoobril 1972. a. kaitses TRÜ Matemaatikateaduskonna nõukogu ees oma väitekirja «Kahe sõltumatu muutujaga esimest järku osatuletistega diferentsiaalvõrrandite süsteemide geomeetria» TRÜ algebra ja geomeetria kateedri vanemõpetaja **Helgi Kilp.** Tööd juhendas Moskva ülikooli prof. A. Vassiljev, oponeerisid prof. M. Akivis Moskvast ja dots. N. Stepanov Smolenskist. Nõukogu omistas H. Kilbile füüsika-matemaatikakandidaadi teadusliku kraadi.



Väitekirjas uuritakse põhiliselt kvaasilineaarseid erinevate karakteristikutega süsteeme, mis koosnevad m võrrandist ja sisaldavad m otsitavat funktsiooni. Luuakse selliste süsteemide üldine geomeetriline teooria ja uuritakse mõningaid konkreetseid geomeetrilisi ülesandeid.

H. Kilp sündis 27. augustil 1942. a. Viljandi rajoonis. Ta lõpetas 1960. a. kuldmedaliga Jõhvi 1. Keskkooli, kus tema matemaatikaõpetajaks oli L. Mölder, ning astus samal aastal TRÜ matemaatikaosakonda. 1963. a. jätkas H. Kilp õpinguid Moskva Riikliku Ülikooli Mehaanika-Matemaatikateaduskonnas. Pärast Moskva ülikooli lõpetamist 1966. a. töötas H. Kilp TRÜ algebra ja geomeetria kateedris algul assistendina ning 1967. aastast vanemõpetajana. Aastatel 1969—1972 oli H. Kilp aspirantuuris TRÜ algebra ja geomeetria kateedri juures.

13. oktoobril 1972. a. kaitses oma väitekirja «Tuumad lokaalselt kumeras vektorruumis» TRÜ matemaatilise analüüsi kateedri assistent **Leiki Loone.** Tööd juhendas prof. G. Kangro, oponeerisid prof. G. Vainikko ja dots. J. Lamp. L. Loonele omistati füüsika-matemaatikakandidaadi teaduslik kraad.

Väitekirjas üldistatakse ridade teoorias tuntud Knoppi tuuma mõistet. Defineeritakse topoloogilise vektorruumi suvalise elemendi tuum. Kasutades uusi võimalusi, mida annab topoloogia rakendamine tuumade uurimisel, tõestatakse rida huvitavaid tulemusi ka Knoppi tuuma kohta. Lähtudes defineeritud üldisest tuuma mõistest, määratakse jadaruumis peaaegu koonduvuse tuum, mille võrdlemine Knoppi tuumaga selgitab koonduvuse ja peaaegu koonduvuse vahekorda jadaruumis.

Leiki Loone sündis Võru rajoonis 1. märtsil 1944. a. Ta lõpetas 1962. a. Antsla Keskkooli, kus matemaatika-

õpetajaks oli tema isa Rudolf Sikk. Tartu Riikliku Ülikooli lõpetas Leiki Loone kiitusega 1967. aastal. Aastatel 1968—1971 oli ta aspirantuuris TRÜ matemaatilise analüüsi kateedri juures. Pärast aspirantuuri lõpetamist jäi tööle sama kateedri juurde.

13. oktoobril 1972. a. kaitses oma väitekirja «Jäik-plastsete plaatide staatika ja dünaamika paindeülesannete mõningaid lahendusmeetodeid» EPA matemaatika kateedri vanemõpetaja **Elvi Virma.** Tööd juhendas dots. I. Kull, oponeerisid prof. Ü. Lepik ja dots. V. Tamuzs. E. Virmale omistati füüsika-matemaatikakandidaadi teaduslik kraad.

Töös vaadeldakse ümmarguste ja ristkülikukujuliste plaatide paindeülesandeid dünaamilise koormuse korral ning uuritakse plaatide piirkandevõime probleeme matemaatilise planeerimise meetodite abil.

E. Virma sündis 27. novembril 1931. a. Põlva rajoonis. Aastal 1952 lõpetas ta Ahja Keskkooli ja jätkas õpinguid Tartu Riiklikus Ülikoolis. 1957. a. lõpetas ta TRÜ matemaatikaosakonna mehaanika erialal. Pärast lõpetamist töötas Füüsika ja Astronoomia Instituudis, hiljem EPA kõrgema matemaatika kateedris. Aastail 1963—1966 õppis Tartu Riiklikus Ülikoolis sihtaspirantuuris, alates 1967. a. töötab EPA matemaatika kateedris.

10. novembril 1972. a. kaitses TRÜ Matemaatikateaduskonna nõukogu ees oma väitekirja «Hälbiva argumendiga diferentsiaalvõrrandite rajaülesannete lahendamisest diferentsmeetoditega» TRÜ arvutusmatemaatika kateedri vanemõpetaja **Ivar-Igor Saarniit.** Tööd juhendas prof. G. Vainikko, oponeerisid prof. P. Sobolevski ja dots. R. Jürgenson. I.-I. Saarniidule omistati füüsika-matemaatikakandidaadi teaduslik kraad.

Põhiliseks raskuseks hälbiva argumendiga diferentsiaalvõrrandite lahendamisel on lahendite mitteküllaldane siledus. Väitekirjas on hälbiva argumendiga diferentsiaalvõrrandite rajaülesannete lahendamiseks konstrueeritud diferentsmeetod, milles võetakse arvesse lahendite tuletiste katkevust. On uuritud selle diferentsmeetodi koonduvust.

I.-I. Saarniit sündis 11. augustil 1940. a. Tallinnas. Ta lõpetas 1958. a. Tartu 2. Keskkooli ja 1963. a. Tartu

Riikliku Ülikooli Füüsika-Matemaatikateaduskonna matemaatikaosakonna. Seejärel teenis ta Nõukogude armees. Alates 1965. a. töötas I.-I. Saarniit TRÜ Arvutuskeskuses. 1968. a. astus ta TRÜ aspirantuuri. Pärast aspirantuuri lõpetamist 1971. a. töötab ta TRÜ arvutusmatemaatika kateedris.

18. mail 1973. a. kaitses TRÜ Matemaatikateaduskonna nõukogu ees oma väitekirja «Sidusad liikumiste Lie alamrühmad ja nende orbiidid eukleidilistes ruumides R_4 ja R_5» NSVL TA Majandusmatemaatika Keskinstituudi vaneminsener **Kaarin Riives.** Tööd juhendas prof. Ü. Lumiste, oponeerisid prof. V. Rõškov Moskvast ja füüsika-matemaatikakandidaat J. Lõhmus Tartust. Nõukogu omistas K. Riivesele füüsika-matemaatikakandidaadi teadusliku kraadi.

Väitekirjas on leitud kõik sidusad liikumiste Lie alamrühmad ja uuritud nende alamrühmade toimet nelja- ja viiemõõtmelises eukleidilises ruumis R_4 ja R_5. Iga alamrühma jaoks on leitud teda määrav täielikult integreeruv Pfaffi süsteem ja antud vastava maksimaalse mõõtmega orbiidi kirjeldus.

K. Riives on sündinud Tartus 28. augustil 1942. a. Ta lõpetas 1960. a. Tartu 5. Keskkooli ja 1965. a. Tartu Riikliku Ülikooli Füüsika-Matemaatikateaduskonna matemaatikaosakonna. Aastatel 1966—1969 õppis TRÜ aspirantuuris. Pärast seda asus tööle NSVL TA Majandusmatemaatika Keskinstituudi Eesti filiaali.

22. juunil 1973. a. kaitses TRÜ Matemaatikateaduskonna nõukogu ees oma väitekirja «Tõenäosusteooria ja matemaatilise statistika elementide käsitlemisest koolis ning õpilaste statistilise mõtlemisviisi arendamisest» TRÜ matemaatika õpetamise metoodika kateedri vanemõpetaja **Kalle Velsker.** Teaduslikuks konsultandiks oli pedagoogikakandidaat J. Reimand. Oponeerisid akadeemik A. Humal ja pedagoogikakandidaat J. Mikk. Dissertandile omistati pedagoogikakandidaadi kraad.

Töös analüüsitakse tõenäosusteooria ja matemaatilise statistika elementide õpetamise vajalikkust koolis ning selle temaatika osatähtsust õpilaste statistilise mõtlemisviisi arendamisel. Esitatakse autoripoolne programm tõenäosusteooria ning matemaatilise sta-

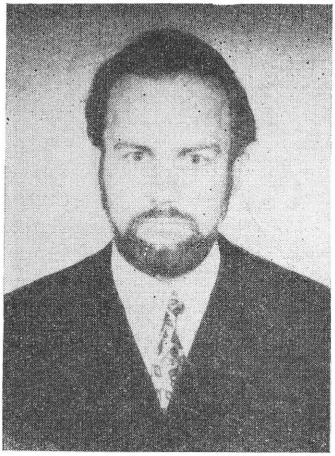
tistika elementide õpetamiseks Eesti NSV üldhariduslikes koolides I—XI klassini. Vaadeldakse selle temaatika seostumist koolimatemaatika senise sisuga. Käsitletakse tõenäosusteooria ja matemaatilise statistika elementide õpetamisega ning õpilaste statistilise mõtlemisviisi arendamisega seotud metoodilisi probleeme.

K. Velsker sündis 26. oktoobril 1935. a. Tartumaal Voore vallas. Keskhariduse sai ta Tartu 6. Keskkoolis (praegune 5. Keskkool), kus matemaatikat õpetas Arvo Lehis. Tartu Riikliku Ülikooli Matemaatika-Loodusteaduskonna matemaatikaosakonna lõpetas K. Velsker 1959. a. Alates sama aasta sügisest töötab ta TRÜ-s, esialgu teoreetilise mehaanika kateedris, seejärel matemaatika õpetamise metoodika kateedris. Aastail 1963—1966 õppis K. Velsker TRÜ aspirantuuris.

22. juunil 1973. a. kaitses oma väitekirja «Hulgateooria ja matemaatilise loogika elemendid koolimatemaatikas» TRÜ matemaatika õpetamise metoodika kateedri vanemõpetaja **Evi Mitt**. Tööd juhendas pedagoogikakandidaat O. Prinits, oponeerisid füüsika-matemaatikadoktor A. Humal ja pedagoogikakandidaat J. Mikk. E. Mitile omistati pedagoogikakandidaadi kraad. Töös uuritakse koolimatemaatika reformimise ja täiustamise võimalusi hulgateooria ja matemaatilise loogika baasil. Esitatakse koolimatemaatika programmi kavand ning mõnede olulisemate teemade metoodiline käsitlus.

Evi Mitt sündis 4. jaanuaril 1936. a. Põlva rajoonis. Õppis Tilsi 7-klassilises Koolis ja Tartu 3. Keskkoolis, mille lõpetas 1954. aastal. Tartu Riikliku Ülikooli Matemaatika-Loodusteaduskonna matemaatikaosakonna lõpetas ta 1959. a. Seejärel töötas 3 aastat matemaatikaõpetajana Võnnu Keskkoolis. Alates 1962. aastast töötab Tartu Riiklikus Ülikoolis, kus aastatel 1968—1971 õppis aspirantuuris.

26. detsembril 1973. a. kaitses TRÜ Matemaatikateaduskonna nõukogu ees oma väitekirja «Korrelatsioonifunktsionaalid juhuslike elementide funktsionaalruumidel» TRÜ matemaatilise statistika ja programmeerimise kateedri vanemõpetaja **Tõnu Möls.** Oponeerisid prof. G. Kangro ja ENSV TA Küberneetika Instituudi vanem teaduslik



töötaja T. Tobias. T. Mölsile omistati füüsika-matemaatikakandidaadi teaduslik kraad.

Kaitstud dissertatsioon koosneb kahest osast. Esimeses osas esitatakse üldine formalism mõningate tõenäosusteooria algmõistete (juhuslikud elemendid ja vektorid topoloogilistel ruumidel, nende jaotused, koondumine jne.) käsitlemiseks. Töö teises osas defineeritakse teatav juhuslike elementide statistilise sõltuvuse näitajate (nn. korrelatsioonifunktsionaalide) klass ja uuritakse selle omadusi. Sügavamaid tulemusi on saadud erijuhtudel, kus juhuslike elementide väärtuste ruum on lõplik või vähemalt separaabel ja metriseeruv.

Tõnu Möls on sündinud 12. juunil 1939. a. Tartus teenistuja perekonnas. Aastal 1963 lõpetas ta Tartu Riikliku Ülikooli Füüsika-Matemaatikateaduskonna füüsikaosakonna teoreetilise füüsika erialal, seejärel õppis aspirantuuris biofüüsika erialal. Aastal 1966 suunati T. Möls tööle arvutusmatemaatika kateedri juurde, hiljem aga matemaatilise statistika ja programmeerimise kateedri juurde vanemõpetajaks. Õppejõuna on ta lugenud mitmesuguseid kursusi tõenäosusteooria, matemaatilise statistika, programmeerimise ja teoreetilise füüsika alal.

UUS LEND ÜLIKOOLI LÕPETANUD MATEMAATIKUID

1973. a. juunis lõpetas TRÜ järjekordne lend matemaatikuid.

Matemaatika erialal kaitsti järgmised diplomitööd:

1. Arend, Ants. Mõningatest operatiivjuhtimise ülesannetest ja nende lahendamise meetoditest. (Juhendaja K. Tinn.)
2. Kaldma, Henn. Liiklustiheduse loendusandmete töötlemisest. (Juhendaja J. Kajari.)
3. Kirjanen, Ilmar. Moraalisüsteemide matemaatilisest käsitlemisest. (Juhendaja dots. I. Kull.)
4. Koppel, Tiit. Kõrgema kooli automatiseeritud informatsioonisüsteem stipendiumi määramisel. (Juhendaja dots. E. Jürimäe.)
5. Kuldmaa, Enn. Tähespektrite numbriline töötlemine. (Juhendaja A. Nilson.)
6. Lahesalu, Laida. Loogiliste ja aritmeetiliste operatsioonide realiseerimine andmete objektiviisilisel töötlemisel. (Juhendaja M. Sarv.)
7. Leiger, Toivo. Vektoralamruumi suhtes tõkestatud elemendid lokaalselt kumeras ruumis. (Juhendaja prof. G. Kangro.)
8. Liias, Udo. Multiplikaatorid Banachi ruumides. (Juhendaja dots. M. Tõnnov.)
9. Meressoo, Toomas. Kihiline hulgateooria. (Juhendaja dots. A. Tauts.)
10. Merivoo, Mihkel. Peyerimhoffi teoreemi üldistusi. (Juhendaja dots. H. Türnpu).
11. Raie, Vahur. Järjestamise algoritmid ja nende analüüs. (Juhendaja H. Mänd.)
12. Raup, Avo. Mittestandardne mudel aritmeetilise keele interpreteerimiseks. (Juhendaja dots. A. Tauts.)
13. Rätsep, Aili. Mõningaid Tauberi teoreemide üldistusi. (Juhendaja dots. T. Sõrmus.)

14. T i i t s, Tõnis. Seadmete ratsionaalse paigutamise ülesande lahendamine tööstusettevõttes. (Juhendaja K. Soonets.)
15. V a n a, Ivo. Tootmine ja realisatsioon õmblustööstuses. (Juhendaja H. Mihkelsoo.)
16. V o o g l a i d, Aare. Kontekstist sõltuv eelnevusanalüüs. (Juhendaja M. Tombak.)

Riigieksamitega lõpetasid matemaatika erialal:

17. K a h r o, Ene
18. L e p i k, Ain
19. M ü r k, Iris
20. S u l g, Madis

M e h a a n i k a erialal kaitses diplomitöö:

21. M o o r l a t, Peep. Viskoosse vedeliku voolamine deformeeruvate seintega torudes. (Juhendaja I. Vainikko.)

R a k e n d u s m a t e m a a t i k a erialal kaitsti järgmised diplomitööd:

22. B a r o n, Inna. Приближённое интегрирование краевой задачи для дифференциального уравнения с запаздыванием. (Juhendaja I. Saarniit.)
23. D i d õ k, Mihhail. О вероятностных мерах на группе $SO(3)$. (Juhendaja T. Möls.)
24. G o n t š a r e n k o, Juri. Пространства Орлича. (Juhendaja dots. M. Tõnnov.)
25. G r i g o r e n k o, Olga. Об одном методе исследования учебного процесса в высших учебных заведениях. (Juhendaja T. Möls.)
26. H u r t, Heido. Ühest eelnevuskonfliktide likvideerimise algoritmist. (Juhendaja M. Sarv.).
27. J e ž o v a, Aleksandra. Расчет на ЭВМ электрофизических и электрических параметров кремниевых силовых вентилей. (Juhendaja V. Grigorenko.)
28. K a a s i k, Jaan. LINKS-koodide dekodeerimisest. (Juhendaja J. Kiho.)
29. K a s k, Juta. Deduktsiooni otsing intuitsionistlikus loogikas. (Juhendaja dots. A. Tauts.)
30. K i i s k ü l a, Tõnis. Menetluste sisalduvus peaaegu summeeruvuse korral. (Juhendaja dots. E. Reimers.)
31. K i v i k a s, Arvo. Valguskiire nõrgenemine Maa atmosfääris. (Juhendaja dots. E. Tiit.)
32. K ä ä r i k, Ene. Meditsiinilisest diagnostikast arvutite abil. (Juhendaja dots. E. Tiit.)
33. L e š t š e n k o v a, Natalja. Теоремы тауберова типа для матричных методов суммирования двойных рядов. (Juhendaja dots. E. Reimers.)
34. L u k k o n e n, Galina. Проблемы формализованного языка юридических норм. (Juhendaja dots. I. Kull.)
35. M a r t i n, Aime. Dispersioonanalüüs. (Juhendaja dots. E. Tiit.)
36. M a š u r j a n, Moris. Инварианты суммируемости и множество совершенства полунепрерывного метода суммирования, сохраняющего сходимости. (Juhendaja dots. E. Jürimäe.)
37. M a t i n, Boriss. Решение задачи теплопроводности с обратным течением времени методом квазиобращения. (Juhendaja dots. E. Tamme.)
38. M e r i s t e, Merik. Topelttäpsusega arvutuste realiseerimine arvutis Minsk-32. (Juhendaja K. Ääremaa.)
39. M u g u, Aare. Tõenäosusteooria aksiomaatikast. (Juhendaja R. Tammeste.)
40. N i k u l i n a, Natalja. Двумерные поверхности с условиями на вектор средней кривизны в евклидовом пространстве R_5. (Juhendaja prof. Ü. Lumiste.)
41. O n o p e r, Alar. Diferentsmeetod mittelineaarse paraboolset tüüpi võrrandi lahendamiseks. (Juhendaja dots. E. Tamme.)
42. O r e n š t e i n. Bertti. О некоторых принципах декомпозиционного решения нелинейных задач оптимизации. (Juhendaja Ü. Ennuste.)
43. P r a n k, Tiit. Funktorite kategooriad intuitsionistliku predikaatarvutuse mudelina. (Juhendaja R. Tammeste.)

44. Pärtma, Nelli. Об одном предельном распределении вероятностей на группе $SU(2)$. (Juhendaja T. Möls.)

45. Semmel, Ludmilla. О решении линейных диофантовых уравнений. (Juhendaja dots. J. Hion.)

46. Sikka, Alar. Tsehhidesse seadmete paigutamise ülesanne. (Juhendaja O. Karma.)

47. Soltanovitš, Miron. О численном интегрировании краевой задачи для линейного дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом. (Juhendaja I. Saarniit.)

48. Sorgina, Raissa. Составление и реализация программ и алгоритмов вычислений параметров некоторых экономико-математических моделей для ЭВМ «Урал-11». (Juhendaja J. Malmsaar.)

49. Suls, Ene-Lea. Paraboolset tüüpi segaülesande klassikalise lahendi aprioorseid hinnanguid. (Juhendaja dots. E. Tamme.)

50. Tammemägi, Jüri. Korrelatsioonifunktsiooni aproksimeerimine. (Juhendaja A. Parring.)

51. Tellas, Urve. Mõningaid küsimusi regressioonanalüüsist. Juhendaja A. Parring.)

52. Timmermann, Matti. Regressioonfunktsioonide mitmene võrdlemine. (Juhendaja A. Parring.)

53. Vooglaid, Maie. Kosmoseaparaadi orbiidi korrigeerimise ülesande lahendamine Pontrjagini maksimumprintsiibil. (Juhendaja I. Vainikko.)

Matemaatika pedagoogilises osakonnas kaitsti järgmised diplomitööd:

54. Ehasalu, Viivi. Kaheksanda õppeaasta matemaatikakursuse sisu ja mahu dünaamika. (Juhendaja dots. O. Prinits.)

55. Helemäe, Liia. Erikallakuga ja üldhariduslike koolide lõpetanute õppetulemuste võrdlev analüüs. (Juhendaja dots. T. Sõrmus.)

56. Hollak, Aili. Algebraliste võrrandisüsteemide graafiline lahendamine. (Juhendaja M. Fischer.)

57. Hõbemägi, Ilme. Koolimatemaatika õpikute ja artiklite bibliograafia 1961—1972. (Juhendaja dots. O. Prinits.)

58. Joonas, Vivian. ENSV koolisüsteemist ja matemaatika- ning füüsikaõpetajate koormusest 1971. a. andmetel. (Juhendaja K. Velsker.)

59. Jürgenson, Saima. Võrrandid koolimatemaatikas. (Juhendaja E. Mitt.)

60. Kirjanen, Ene. Muutuja mõiste koolimatemaatikas. (Juhendaja E. Mitt.)

61. Liiv, Ülle. TRÜ töötajate korteriolud. (Juhendaja J. Reimand.)

62. Meos, Anu. Ülevaade prof. Jaan Sarve elust ja loomingust. (Juhendaja dots. E. Tamme.)

63. Miljan, Riina. Struktuurseid teoreeme subkommutatiivsete poolrühmade kohta. (Juhendaja U. Kaljulaid.)

64. Selliov, Leevi. Astmeoperaatorid ja astmenõrk koonduvus. (Juhendaja dots. H. Türnpu.)

65. Sikk, Elve. Õppeainete struktuurist. (Juhendajad dots. I. Kull ja dots. E. Tamme.)

66. Sõber, Ilme. Järkjärgulise lähendamise meetodi kasutamisest ja kasutamisvõimalustest koolimatemaatikas. (Juhendaja M. Fischer.)

Pedagoogilise osakonna lõpetasid riigieksamitega:

67. Eimre, Anu
68. Haabmets, Kalju
69. Ilves, Helgi
70. Lindström, Anne
71. Loss, Kärt
72. Mettis, Vello
73. Peterson, Toivo
74. Salujärv, Linda
75. Tammur, Age.

EESTI NSV-s ILMUNUD MATEMAATIKA-ALASE KIRJANDUSE NIMESTIK 1972—1973

(Koostanud M. Suurväli)

RAAMATUD

Allik, K., Lamp, J. ja Suuder, I. **Kõrgem matemaatika.** Programm, met. juhendid ja kontrolltööde ülesanded keemia ja insener-majanduse erialade II kursuse kaugüliõpilastele. Tln., 1972. 47 lk. (TPI. Arvutusmat. kat.) Rotaprint.

Ariste, A. **Digitaalseadmete aritmeetika ja loogika.** Loengukonspekt. 1. Arvusüsteemid arvutustehnikas. Tln., 1971. 96 lk. (TPI. Informatsioonitehnika kat.) Rotaprint.

Ariva, K. **Vektorid.** Juhendiks I ja II kursuse õpil. Tartu, 1972. (TRÜ. Mat.-Füüsikakool. 25 ja 26.) Rotaprint.
1. 42 lk., ill. (25)
2. 14 lk., ill. (26).

Ariva, K., Etverk, E., Telgmaa, A., Undusk, A. ja Vihman, A. **Matemaatika õpetamisest VIII kl.** (Abimaterjal õp.) Tln., 1972. 94 lk., joon. Rotaprint.

Baron, S., Jürimäe, E. ja Reimers, E. **Matemaatilise analüüsi praktikum. 2.** Tartu, 1972. 264 lk., joon. (TRÜ. Matem. analüüsi kat.) Rotaprint.

Daniel, L. **Andmetöötluse ülesandeid.** Tln., 1972. 95 lk. (ENSV Kõrgema ja Keskerihar. Min. Tead.-Met. Kab.) Rotaprint.

Espenberg, H. **Integraalarvutus.** [3. tr.] Tartu, 1973, 52 lk., joon. (EPA.) Rotaprint.

Etverk, E., Garšnek, A., Kass, A., Kass, P., Krusberg, H. ja Teeäär, M. **Matemaatika kõrgematesse koolidesse astujaile.** Tln., «Valgus», 1972. 352 lk., joon.

Funktsiooniteooria ülesanded. 1.-2. Tln., 1973. (ENSV Kõrgema ja Keskerihar. Min. E. Vilde nim. TPedI.) Rotaprint.
1. Laigna, K., Levin A. ja Monakov-Rogozkin. 159 lk.
2. Laigna, K. 151 lk., joon.

Hanko, P. **Arvutusmasinad ja programmeerimine.** Loengukonspekt matemaatika eriala üliõpil. Tln., 1972. 151 lk., ill. (ENSV Kõrgema ja Keskerihar. Min. E. Vilde nim. TPEdI. Mat. kat.) Rotaprint.

Informatsiooni ettevalmistamine elektronarvutitele. Juhendmaterjale. Tln., 1973. 48 lk., ill. (A. S. Popovi nim. Raadiotehn., Elektroonika ja Side Tead.-Tehn. Ühingu Arvutustehn. sekts. Eesti Maaviljeluse ja Maaparanduse TUI Arvutuskeskus.) Rotaprint.

Informatsiooniteooria vihik. Õppeabimaterjal erialade 0606 ja 0646 üliõpil. 1. Tabelid. Tln., 1973. 20 lk. (TPI. Automaatika kat.) Rotaprint.

Jablonski, A. A., Noreiko, S. S. Wolfson, S. A. jt. **Teoreetilise mehaanika kursusetööde ülesannete kogu.** Tln., «Valgus», 1972. 296 lk., ill.

Jaeger, A., Kaasik, Ü. ja Ääremaa, K. **Programmeerimine arvutile «Minsk-32».** Õppevahend. Tartu 1973. 287 lk. (TRÜ. Arvutuskeskus.) Rotaprint.

Jõgi, T., Kass, A., Kass, P. ja Sõrmus, I. **Kõrgem matemaatika. 1.** Programm, met. juhendid ja kontrolltööde ülesanded kaugõppeteadusk. I kursuse üliõpilastele. Tln., 1973. 74 lk., joon. (TPI. Mat. kat.) Rotaprint.

Kaasik, Ü. ja Kull, I. **Programmeerimine ALGOL-is.** Tartu, 1972. 138 lk., ill. (TRÜ.) Rotaprint.

Karu, O. **Peastarvutamise võtteid.** (Met. materjal.) Tln., 1972. 12 lk. (ENSV Vabar. Õp. Täiendusinst.)

Kessel, H., Kessel, A., Kiudorv, T. ja Tomson, M. **Protsentülesanded.** Iseseisvaks tööks V kl.

Tln., 1973. 43 lk. (ENSV Haridusmin. ENSV Vabar. Õp. Täiendusinst.) Rotaprint.

Kivi, L. **Esimene kümme.** Didaktiline jaotusmaterjal. I kl. Tln., 1972. 10 lk., 73 eraldi l. ill. ja teksti. (ENSV Vabar. Õp. Täiendusinst.)

Kolde, J. **Matemaatiline statistika.** [Loengukonspekt Tallinna Majandustehnikumi programmeerimise eriala õpilastele.] Tln., 1972. 128 lk., ill. (ENSV Kõrgema ja Keskerihar. Min. Tead.-Met. Kab.) Rotaprint.

Kopõlov, G. **Kinemaatikast.** Tln., «Valgus», 1973. 196 lk., ill.

Korjus, A. **Programmeerimine.** Loengukonspekt. Tln., 1973. 236 lk., ill. (TPI. Arvutusmat. kat.) Rotaprint.

Kraaving, M., Paluver, N., Rünk, O. ja Vallas, E. **Kujutav geomeetria.** Tln., 1972. (TPI.) [Paralleeltekst vene k.] Rotaprint.

Harjutusülesanded. 56 lk., joon.

Lisaharjutusülesanded ehituslike erialade jaoks. 20 lk., joon.

Kraaving, M., Paluver, N., Rünk, O ja Vallas, E. **Kujutav geomeetria.** Tln., 1973. (TPI.) [Paralleeltekst vene k.] Rotaprint.

Harjutusülesanded. 56 lk., joon.

Lisaharjutusülesanded ehituslike erialade jaoks. 20 lk., joon.

Kujutava geomeetria harjutusülesandeid kontrollküsimustega. Tartu, 1972. (EPA.)

1. Riives, S. [2. tr.] 124 lk., joon.
2. Riives, S. ja Ruubel, A. 96 lk., joon.

Kull, Hilja. **Individualiseeritud õpetamisest matemaatikatundides.** Tln., 1973. 48 lk., joon. (ENSV Haridusmin. ENSV Vabar. Õp. Täiendusinst.) Rotaprint.

Kuuselaan, E. **Didaktiline jaotusmaterjal matemaatikast.** I kl. Tln., 1973. 10 lk. (ENSV Haridusmin. ENSV Vabar. Õp. Täiendusinst.) Rotaprint. Lisa: [Arvutuskaardid.] 94 eraldi l., ill.

Kuuselaan, E. **Kontrolltööd matemaatikast algklassidele.** Tln., 1972. 41 lk. (ENSV Vabar. Õp. Täiendusinst.)

Kõiv, H., Liiv, H. ja Roots, H. **Matemaatika ülesannete kogu.** TPI ettevalmistusosak. kuulajaile. 1. Tln., 1972. 72 lk. (TPI. Ettevalmistuskursused.) Rotaprint.

Kõrgema matemaatika praktikum. Insener.-maj. erialade II kursuse üliõpil. Tln., 1972. 48 lk., ill. (TPI. Majandusmat. kat.) Rotaprint.

Laigna, K. ja Levin A. **Funktsiooniteooria.** Kompleksmuutuja funktsioonid. Tln., 1972. 164 lk., joon. (E. Vilde nim. TPedI. Mat. kat.)

Lepamaa, A. **Tõenäosusteooria ja matemaatiline statistika.** [Majandusteadusk. üliõpil.] Tln., 1973. 120 lk., ill. (TPI. Arvutusmat. kat.) Rotaprint.

Lepik, Ü. **Valitud peatükke kõrgemast matemaatikast.** 2. Omaväärtused ja omafunktsioonid. Tartu, 1973. 60 lk., joon. (TRÜ. Teor. meh. kat.) Rotaprint.

Lerner, A. **Algteadmisi küberneetikast.** Tln., «Valgus», 1973, 360 lk., ill.

Lumiste, Ü. ja Ariva, K. **Analüütiline geomeetria.** Tln., «Valgus», 1973. 647 lk., joon.

Malmsaar, R. **Korrelatsioon- ja dispersioonanalüüsi meetodid.** Loengukonspekt. Tln., 1972. 150 lk. (TPI. Stat. ja raamatupidamise kat. NSVL TA Majandusmat. Keskinst. Eesti filiaal.) Rotaprint.

Martin, E. **Funktsiooni piirväärtus.** Juhendmaterjal II ja III kursuse õpil. Tartu, 1972. 18 lk. (TRÜ. Mittestats. Matemaatikakool. 23.) Rotaprint.

Matemaatika ja kaasaeg. Abimaterjale matemaatika õpetajatele ja õppijatele. XVIII. Tartu, 1972. 151 lk., ill. (TRÜ.)

Sisu: E. Koppel, E. Tiit. Sotsioloogilise uurimise statistikast. I. — G. Vainikko. Mõnda funktsionaalanalüüsist. III. — R. Kulmet. Diofantiliste võrrandisüsteemide lahendamine. — M. Koit. Graafid ja lauseõpetus. II. — Ü. Kaasik, M. Preem. Võrkgraafikud. — G. Rägo, O. Prinits. Matemaatika õpetamise ülesanded ja eesmärgid. — A. Leiten. Tükeldamisülesanded. — K. Ariva. Lobatševski geomeetria. — Tõeleid Roosinupp. Palindroomid. — H. Espenberg, J. Gabovitš. Murdjooned. — A. Napolski. Nurga ligikaudne trisektsioon. — M. Levin, L. Portjanski. Ühe kolmnurkade pere omadused. — O. Prinits. Rahvusvahelised matemaatikaolümpiaadid Moskvas, Bukarestis ja Keszthelys. — Hermann Weyl. — Jaan Depman. 17. VII 1885 — 26. VII 1970. — Ivar Petersen teoreetilise küberneetika doktoriks. — E. Tamme. Sulev Ulm arvutusmatemaatika doktoriks. — Matemaatiline päevakaja. — Kroonika. — Bibliograafia. — Ülesandeid.

Matemaatika ja kaasaeg. Abimaterjale matemaatika õpetajatele ja õppijatele. XIX. Tartu, 1973. 138 lk., ill. (TRÜ.)

Sisu: M. K i l p. Hilberti probleemid. — S. B a r o n. Mõnda topoloogilistest ruumidest. — H. E s p e n b e r g. Sümmeetrilised polünoomid. — U. K a l j u l a i d. Polünoomidest ja formaalsetest ridadest. — E. T i i t. Sotsioloogilise uurimise statistikast. II. — M. L a n i n. Matemaatilised mudelid ühiskonnateadustes. — Ü. K a a s i k, M. M e r i s t e, T. P r a n k. Kahe isiku mängud. — A. L e i t e n. Mahutamisülesanded. — U. A l l a. Ceva ja Menelaose teoreemide üldistus. — M. L e v i n. Mõningaid valemeid kolmnurga geomeetriast. — A. T a u t s. Paberi voltimise ülesannetest. — J. G a b o v i t š. Arv π. — T. R o o s i n u p p. Kõik andmed on täpsed. — Kroonika. — Bibliograafia. — Ülesandeid.

Matemaatika õpetamisest 9. klassis. 1. vihik. Tln., 1972. 44 lk. (ENSV Haridusmin.)

Matemaatika- ja mehhaanikaalaseid töid. XI Tartu, 1971. 272 lk., ill. (TRÜ Toimetised. 281. Vene k., resümeed eesti, inglise ja saksa k.)

Sisu: Л. Р о о т с, Э. С а к к о в, К. С о о н е т с. К пятидесятилетию проф. Ю. Лепика. — J. G a b o v i t š. Järjestatud grupoidid ning nende kumerad alamsüsteemid. — O. I v a n o v a. Kaks teoreemi järjestatavatest universaalsetest algebratest. — G. R u b a n o v i t š. Järjestatud unaarsed algebrad. — U. K a l j u l a i d. Nullitegurite puudumisest mõningais poolrühmaringides. — U. K a l j u l a i d. Fundamentaalsest ideaalist lõpliku rühma täisarvuliste koefitsientidega rühmaringis. — H. K i l p. Kahe sõltumatu muutuja, m otsitava funktsiooni ja erinevate karakteristikutega I järku kvaasilineaarsed osatuletistega diferentsiaalvõrrandite süsteemid. (Geomeetriline teooria.) — L. L o o n e, Tõkestatud tuumadest lokaalselt kumeras ruumis. — M. A b e l. Jadade ja lõpmatute maatriksite pööratavus. — T. S õ r m u s. Tauberi tüüpi teoreemid mitmesuguste summeerimisviiside jaoks. — N. V e s k e. Ridade formaalse korrutise summeeruvus Cesàro menetlusega. — E. R e i m e r s. Funktsioonide esitamine arvujadade abil. — H. T ü r n p u. Funktsionaalridade koonduvus peaaegu kõikjal. — V. S t j o p i n. Ortogonaalridade ühest summeerimismenetlusest. — S. B a r o n. Diferentseeritud Fourier' ridade absoluutse summeeruvuse lokaalsuse omadusest. — D. P e r a d z e. Vea jaotusest lineaarsete võrrandite lahendamisel iteratsioonimeetodiga Hilberti ruumis. — G. V a i n i k k o, M. Š l a p i k i e n e. Ühest S. G. Kreini teoreemist analüütilise poolrühmi genereerivate operaatorite häirituste kohta. — G. V a i n i k k o. Kollokatsioonimeetodi stabiilsusest. — T. V a l l n e r, E. T a m m e. Kuuendat järku diferentsiaalvõrrandi rajaülesande lahendamisest võrgumeetodiga. — G. V a i n i k k o, A. P e d a s. Logaritmilise iseärasusega tuumaga integraalvõrrandite lahendamisest kvadratuurvalemite meetodil. — L. K i v i s t i k, T. Š a g a n o v a. Gomory meetodi modifikatsioonid osaliselt täisarvuliste ülesannete lahendamiseks. — J. G a b o v i t š. Antud logaritmilise tuletisega funktsiooni kõrgemat järku tuletiste arvutamisest. — E. V i r m a. Lõplike vahede meetod vabalt toetatud ruudukujulise plaadi piirkoormuse uurimiseks. — E. S a a r e s t e, K. S o o n e t s. Nõtke ruudukujulise plaadi elastilis-plastsest paindest. — L. R o o t s, E. S a k s. Trapetsikujuliste plaatide stabiilsusest. — J. L e l l e p. Ümmarguste plaatide dünaamiline koormamine materjali korral, millel on erinevad voolavuspiirid tõmbel ja survel.

Matemaatika- ja mehaanikaalaseid töid. XII. Tartu, 1972, 303 lk., ill. (TRÜ Toimetised. 305. Vene k., resümeed eesti, inglise ja saksa k.)

Sisu: A. T a u t s. Üldistatud Bethi mudelite seos topoloogiliste pseudo-Boole'i algebratega. — A. T a u t s. Valemite semantiline interpretatsioon üldistatud Bethi mudelites ja pseudo-Boole'i algebrates. — A. P a r r i n g. Sümplektiliste tasandite parved afiinses sümplektilises ruumis. — L. T u u l m e t s. Fokaalse pseudokongruentsi fokaalpinnad ruumis R_4. — L. T u u l m e t s, E. V a g a. Ribaucouri fokaalne pseudokongruents ruumis R_4. — L. T u u l m e t s, T. P ü s s a. Fokaalsed pseudokongruentsid ruumis R_4, mille fokaalpinnad on nulliga võrdse Gaussi kõverusega või väändega. — V. S p e s i v õ h h. Lie alamrühmad maksimaalsete kahemõõtmeliste mittejoonorbiitidega kompleksses ruumis $P_3(C)$. — A. F l j a i š e r. Reaalse projektiivse ruumi P_3 kahemõõtmelistest orbiitidest ja nende homogeensetest ruumidest. — K. R i i v e s. Eukleidilise ruumi R_n kumerate hulktahukate afiinsest klassifikatsioonist ja tunnusest. — E. K o l k. Refleksiivsusest ja summeeruvusest Fréchet' ruumides. — L. L o o n e. Knoppi tuum ja peaaegu koonduvuse tuum ruumis m. — M. A b e l. Mõningaid Banachi algebra väärtustega funktsionaalalgebrate omadusi. — G. K a n g r o. Jääkliikmega Tauberi teoreem Rieszi menetluse jaoks. II. — T. S õ r m u s. Mõned üldistatud Tauberi teoreemid. — I. O g i e v e t s k i, A. P i d g a i k o. Tõkestatud muuduga kahekordsetest arvjadadest. — S. B a r o n, M. T ä h t. Kahekordsete ridade summeeruvustegurid menetluse $A^{\alpha,\beta}$ jaoks. — H. T ü r n p u. Funktsionaalridade summeeruvus peaaegu kõikjal. — H. T ü r n p u. Integraalide koonduvusest peaaegu kõikjal. — E. M a r t i n. Ortogonaalridade kiirusega summeerimisest Euler-Knoppi ja Cesàro menetlustega. — A. K i v i n u k k. Perioodiliste funktsioonide lähendamiskiirusest. — M. T õ n n o v. Mõned teoreemid multiplikaatoritest. — S. B a r o n. Märkused Fourier' rea, diferentseeritud Fourier' rea ja kaasrea absoluutse summeeruvuse lokaalsuse omaduse kohta. — J. H i o n. Kumera hulknurga tippude täisarvulisusest. — A. L e i t e n. Lõigete konstrueerimisest B-algoritmis. — Ü. L e p i k, M. Z i m i r e v. Lõplike elementide meetodi rakendamine tasapinnaliste lööklainete leviku uurimiseks paksus plaadis. — E. V i r m a. Vabalt toetatud ruudukujulise plaadi dünaamikast. — E. V i r m a. Ristkülikukujuliste plastsete plaatide dünaamikast.

M e r z o n, V. **Teoreetiline mehaanika.** Tln., «Valgus», 1972. 271 lk., joon.

M i t t, E., P r i n i t s, O. ja V a s s i l, A. **Kõrgema matemaatika ülesanded. 1. — 2.** Tartu, 1972. (TRÜ. Mat. õpetamise met. kat.) Rotaprint.

1. Õppevahend Bioloogia-Geograafiateadusk. üliõpil. 115 lk.

2. 98 lk.

P i i r i k i v i, P. ja T e p a n d i, J. **Programmeerimine arvutil «Nairii-C».** Õppevahend. Tln., 1972. 91 lk. (TPI. Arvutusmat. kat.) Rotaprint.

Programme kõigile. 3. — 6. Tartu, 1972—1973. (TRÜ. Arvutuskeskus.) Rotaprint.

3. N o o r m a, R. ja K a a s i k, Ü. Elektronarvuti «Nairi-2». 1972. 103 lk., ill. 2. tr. 1973.

4. K a a s i k, Ü. ja N o o r m a, R. Automaatne programmeerimine elektronarvutile «Nairi-2». 1972. 115 lk. 2 tr. 1973.

5. V e l d r e, S., V e l d r e, T. ja A s t e l, H. Ankeetide töötlemisest. 1972. 56 lk., ill.

6. Matemaatilise statistika programmid. 1973. 92 lk., ill.

Sisu: O. N u r m e o t s. Põhistatistikute arvutamine. — O. N u r m e o t s. Lünklike katseandmete töötlemine. — S. K o s k e l. Protsentide võrdlemine. — S. K o s k e l. Empiiriliste jaotuste võrdlemine. — K. P r a g i. Algandmete normeerimine ja korrelatsioonikordajate arvutamine. — H. A s t e l. Osakorrelatsioonimaatriks. — R. E i n s i l d. Rühmitamisülesanne. — T. V e l d r e. Suurima korrelatsiooni tee. — T. V e l d r e. Vähima kauguse tee. — H. A s t e l. Dispersioonanalüüs. — K. P r a g i. Faktoranalüüs. — T. V e l d r e. Transformatsioonanalüüs.

R e i m a n d, J. **Matemaatiline induktsioon.** Juhendmaterjal I ja II kursuse õpil. 2. tr. Tartu, 1973. 14 lk. (TRÜ. Mat.- ja Füüsikakool. 27.) Rotaprint.

R e i m a n d, J. ja V e l s k e r, K. **Elementaarmatemaatika. 1.** Algpraktikum. 2. täiend. tr. Tartu, 1972. 148 lk. (TRÜ. Matem. õpetamise met. kat.) Rotaprint.

S c h u l t s, K. **Jäävuse seadused mehaanikas.** Juhendmaterjal I ja II kursuse õpil. Tartu, 1972. 25 lk., joon. (TRÜ. Mittestats. Matemaatikakool. 24.) Rotaprint.

S õ r m u s, T. ja V a i n i k k o, G. **Harilikud diferentsiaalvõrrandid.** Tln., «Valgus», 1972. 348 lk., ill.

Z a i t s e v, I. **Kõrgem matemaatika.** Õpik tehnikumidele. 3. tr. Tln., «Valgus», 1973. 379 lk., joon.

T a m m, V. **Küberneetika põhimõisteid.** Tartu, 1973. 115 lk., ill. (TRÜ. Majandusteadusk. Majandusküb. ja stat. kat.) Rotaprint.

T a m m e, E. **Arvutusmeetodid. 2.** Tln., «Valgus», 1973. 276 lk., ill.

T a m m e, E. ja V a i n i k k o, G. **Matemaatilise füüsika võrrandid. 1.** Tartu, 1973. 187 lk., joon. (TRÜ. Arvutusmat. kat.) Rotaprint.

Tartu ülikool ja koolimatemaatika areng. Tartus 2.—3. dets. 1972. a. toimunud konv. materjalid. Tartu, 1972. 104 lk., joon. (TRÜ.) Rotaprint.

Sisu: O. P r i n i t s. Tartu ülikooli õppejõudude osast koolimatemaatika arendamisel. — Ü. L e p i k. Prof. G. Rägo metoodilistest tõekspidamistest kõrgema matemaatika õpetamisel. — Ü. L u m i s t e. Artur Oettingen — Tartu XIX sajandi teise poole mitmekülgseid teadlasi. — A. T e l g m a a. Matemaatika õpetamise ümberkorraldamine ja arengusuunad Eesti NSV koolides. — A. V a s s i l. Koolimatemaatika sisu dünaamikast eesti koolis. — J. A f a n a s j e v. Koolimatemaatika aine jõukohasuse uurimisest. — K. A r i v a. Aksiomaatiline meetod kooligeomeetrias. — K. V e l s k e r. Tõenäosusteooria ja matemaatilise statistika elementide koht ning ulatus koolimatemaatikas. — E. M i t t. Hulgateooria ja matemaatilise loogika elementide kasutamine teoreemi ja selle tõestamise käsitlemisel. — E. A a d u s o o. Füüsika ja matemaatika fusioneerimise võimalustest koolikursuses. — R. R u g a. Mõtlemisoskuse ja arvutamisoskuse vahekorrast algklassides. — I. K u l l. Konstruktiivsest matemaatikast. — O. P r i n i t s. Matemaatikaõpetajate ettevalmistamisest. — E. J ü r i m ä e. Matemaatikaõpetajate koolitamisest ENSV-s sõjajärgsetel aastatel. — J. R e i m a n d. Matemaatika ja füüsika õpetajate kontingendi struktuur 1971. a. ja selle muutumisvõimalustest.

T e e ä ä r, M. **Analüütilise geomeetria ülesandeid.** Insener-majanduse erialade I kursuse üliõp. Tln., 1972. 22 lk. (TPI. Majandusmat. kat.) Rotaprint.

T i i d t, U. **Matemaatiline planeerimine. 1.** Lineaaralgebra elemendid. Tartu, 1973. 96 lk., joon. (EPA.) Rotaprint.

T i i t, E. **Matemaatilise statistika tabelid. 2.** Õppevahend. Tartu, 1972. 252 lk., ill. (TRÜ. Mat. stat. ja programmeerimise kat.) Rotaprint.

T o p n i k, E. **Teoreetilise mehaanika ülesannetest. 3.—4.** Tln., 1971—1973. (TPI. Teor. meh. kat.) Rotaprint.

3. Dünaamika. 1971. 200 lk., joon.

4. Analüütiline mehaanika. 1973. 220 lk., joon.

V a l l n e r, T ja V a l l n e r, U. **Nimestike ja registrite koostamine raalil.** Tln., 1972. 77 lk., joon. (Eesti Teadus- ja Tehnikainform. ning Majandusuuringute Inst.) Rotaprint.

V e l s k e r, S. **Arvestustööd matemaatikast.** III kursus. Tln., 1973. 37 lk., joon. (ENSV MN Riikl. Kutsehar. Kom. Õppe.-Met. Kab.) Rotaprint.

V e l s k e r, S. **Arvestustööd matemaatikast.** 11. kl. [Õhtukoolidele.] Tln., 1972. 40 lk., joon. (ENSV Haridusmin. ENSV Vabar. Õp. Täiendusinst.)

V e l s k e r, S. **Matemaatika kontrolltööd õhtukooli VIII klassile.** Met. lisamaterjal õp. Tln., 1972. 67 lk. (ENSV Vabar. Õp. Täiendusinst.)

Ülesandeid matemaatikast. X kl. Materjale X kl. matemaatikaõp. kursusteks. Tln., 1972. 31 lk. (ENSV Vabar. Õp. Täiendusinst.)

Аннотации докладов и выступлений участников Второго совещания-семинара преподавателей математики вузов Белорусской, Латвийской, Литовской, Эстонской ССР и Калининградской области. Таллин, 1973. 80 с. (М-во высш. и сред. спец. образования ЭССР. ЦПИ.) Ротапринт.

Б о б ы л е в Н. А. **К теории фактор-методов решения нелинейных операторных уравнений.** (01.01.01). Автореф. дис. на соискание учен. степ. канд. физ.-мат. наук. Тарту, 1972. 20 с. (ТГУ.)

В а й с б о р д Э. М. **Некоторые аспекты случайного поиска в многоэкстремальных задачах и некоторые игровые задачи.** (01.009). Автореф. дис. на соискание учен. степ. д-ра физ.-мат. наук. Таллин, 1972. 26 с. (АН ЭССР. Отд-ние физ.-мат. и техн. наук). Ротапринт.

В и р м а Э. А. **Некоторые методы решения задач статистического и динамического изгиба жестко-пластических пластин.** (01.023). Автореф. дис. на соискание учен. степ. канд. физ.-мат. наук. Тарту, 1972. 16 с., ил. (ТГУ)

В ы х а н д у Л. и Ю р г е н с о н Р. **Сборник задач по программированию.** (МАЛГОЛ). Таллин, 1972. 171 с. (ТПИ. Каф. вычислит. математики.) Ротапринт.

В ы х а н д у Л., С а л л о К. и Ю р г е н с о н Р. **Система стандартных программ алгоритмического языка «МАЛГОЛ».** Учеб. пособие. Таллин, 1972. 108 с. (ТПИ. Каф. вычислит. математики.) Ротапринт.

Геометрия в VII классе. (Метод. указания для учителей.) Таллин, 1972. 107 с., ил. (М-во просвещения ЭССР.)

Г у с е в В. А., М а с л о в а Г. Г., С е м е н о в и ч А. Ф. и Ч е р к а с о в Р. С. **Геометрия в VIII классе.** Метод. пособие к учебнику геометрии под ред. Д. Н. Колмогорова. Таллин, 1973. 67 с., ил. (М-во просвещения ЭССР.) Ротапринт.

Д е м е н т ь е в а А. М. **Некоторые разностные схемы построения неявной функции.** (01.01.01). Автореф. дис. на соискание учен. степ. канд. физ.-мат. наук. Тарту, 1972. 16 с. (ТГУ.)

ЕС ЭВМ. Операционная система ДОС/ЕС. Таллин, 1973. (Респ. вычислит. центр ЦСУ ЭССР.)

Базисный фортран. Описание языка. Е 10.132,019. Д1 114 с., ил.

Макрокоманды с СУПЕРВИЗОРОМ. Руководство для программиста Е 10.132.016 Д1 86. с., ил.

Метки на дисках. Руководство для программиста. Е 10.132.023 Д1. 185 с., ил.

Инструкция по составлению и оформлению математического обеспечения ЦВМ «М-222». Утв. 18/X 1973 г. Таллин, 1973. 42 с., 1 л. программы. (Гл. произв. упр. энергетики и электрификации ЭССР «Эстонглавэнерго».) Ротапринт.

К е й с И. А. **Некоторые свойства инвариантов управляемых систем.** Препринт № 5. Таллин, 1972. 50 с. (АН ЭССР. Ин-т кибернетики.)

К и л ь п Х. О. **Геометрия систем дифференциальных уравнений первого порядка с двумя независимыми переменными.** (01.006). Автореф. дис. на соискание учен. степ. канд. физ.-мат. наук. Тарту, 1972. 17 с. (ТГУ.)

К у к с Я. П. **Минимаксные оценки параметра линейной модели.** (05.13.01). Автореф. дис. на соискание учен. степ. канд. физ.-мат. наук.

Таллин, 1973. 12 с. (АН ЭССР. Совет физ.-мат. и техн. наук.) Ротапринт.

Куусик В. А., Косе Г. Я. и Рауд Р. К. **Процессор ВЭЛГОЛ-С.** Препринт № 8. Таллин, 1973. 54 с. (Ин-т кибернетики АН ЭССР.) Ротапринт.

Куусик В. А., Рауд Р. К. и Косе Г. Я. **Руководство по системе автоматизации программирования** ВЕЛГОЛ-22Т. Препринт № 4. Таллин, 1971, 64 с (АН ЭССР. Ин-т кибернетики.)

Лахе А. Я. **Физически и геометрически нелинейные переходные волновые процессы осесимметричной деформации упругих оболочек и плоской деформации упругих пластин.** (01.02.04). Автореф. дис. на соискание учен. степ. канд. физ.-мат. наук. Таллин, 1973. 12 с. (АН ЭССР. Совет физ.-мат. и техн. наук). Ротапринт.

Левин М. И. **Некоторые вопросы приближенного интегрирования.** (01.01.07). Автореф. дис. на соискание учен. степ. д-ра физ.-мат. наук. Таллин, 1972. 43 с. (АН ЭССР. Совет физ.-мат. и техн. наук.) Ротапринт.

Леллеп Я. А. **К изгибу пластических элементов конструкций, имеющих различные пределы текучести при растяжении и сжатии.** (01.023). Автореф. дис. на соискание учен. степ. канд. физ.-мат. наук. Тарту, 1971. 13 с. (ТГУ.) Ротапринт.

Лойде Р.-К. Р. **Некоторые вопросы релятивистской теории высших спинов.** (01.04.02). Автореф. дис. на соискание учен. степ. канд. физ.-мат. наук. Таллин, 1973. 16 с., ил. (ТГУ.) Ротапринт.

Лооне Л. Р. **Ядра в локально выпуклом топологическом векторном пространстве.** (01.002). Автореф. дис. на соискание учен. степ. канд. физ.-мат. наук. Тарту, 1972. 17 с. (ТГУ.)

Макарычев Ю. Н., Миндюк Н. Г., Муравин К. С., Кудрявцев С. В. и Суворова С. П. **Алгебра в VII классе.** [Метод. пособие для учителя.] Таллин, 1972. 228 с., ил. (Акад. пед. наук СССР. НИИ содержания и методов обучения. М-во просвещения ЭССР.) Ротапринт.

Макарычев Ю. Н., Миндюк Н. Г., Мурвин К. С., Кудрявцев С. В. и Суворова С. Б. **Алгебра.** VIII [кл. Метод. пособие для учителя. Макет]. Ч. 1—3. Таллин, 1973. (М-во просвещения ЭССР). Ротапринт.

Ч. 1. 92 с.
Ч. 2. 147 с.
Ч. 3. 139 с., ил.

Математика и теоретическая механика. 6. Сборник статей. Таллин, 1971. 111 с. (Труды Таллинского политехн. ин-та. Серия А. № 312). Ротапринт.

Содерж.: Р. Колде. Невырожденные конгруэнции изотропных прямых с бесконечно-удаленными кратными фокусами в ${}^{1}R_4$. — И. Таммерайд. О теоремах тауберова типа с остаточным членом. — И. Таммерайд. Приближение функций и теоремы абелева и тауберова типа с остаточным членом. — Ю. Ярцев. Об одном варианте метода коллокации для решения многомерных интегральных уравнений. — Ю. Ярцев. О программировании метода фейеровской коллокации на языке МАЛГОЛ. — М. Левин. Об одной задаче на эстремум. — М. Левин. Замечание об одной квадратурной формуле. — М. Левин. О формулах интегрирования по кругу и треугольнику. — А. Ыги, М. Левин. Одна частная задача для квадратурной формулы. — Я. Хенно. Групповые системы Менгера.

Математика и теоретическая механика. 7. Сборник статей. Таллин, 1973. 83 с. (Труды Таллинского политехн. ин-та. Серия А. № 345). Ротапринт.

Содерж.: Г. Вейнер. О двух функциях оценки при апроксимации симметричного бинарного отношения отношением эквивалентности. — Ф. Вихманн. О включении методов Вороного-Нёрлунда. — М. Левин. Построение двух наилучших квадратурных формул. — Н. Палувер. О суммировании числовых рядов методом дробно-рациональных приближений. — Я. Хенно. Свободные Ω-системы. — Т. Лийва. Определение собственных неосесимметричных колебаний оболочек вращения отрицательной гауссовой кривизны при разных граничных условиях. — Х. Рельвик. Составление дифференциальных уравнений движения при помощи аналогов кинетической энергии. — Х. Рельвик, О. Сильде. Метод уравнения возможной мощности с применением объекта неголономности. — А. Тюманок. О движении нарастающего слоя частиц по цилиндрической поверхности.

Материалы Четвертой Прибалтийской геометрической конференции по вопросам дифференциальной геометрии. (26—29 июня 1973 г., г. Тарту).

Тарту, 1973. 147 с. (ТГУ.) Ротапринт.

Махоркин В. В. **Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик.** (01.01.04). Автореф. дис. на соискание учен. степ. канд. физ.-мат. наук. Тарту, 1973. 15 с. (ТГУ.) Ротапринт.

Мелс Т. Э. **Корреляционные функционалы на функциональных пространствах случайных элементов.** (01.01.01). Автореф. дис. на соискание учен. степ. канд. физ.-мат. наук. Тарту, 1973. 17 с. (ТГУ.) Ротапринт.

О результатах контрольных работ по физике и математике. Таллин, 1972. 35 с. (М-во просвещения ЭССР.)

Очерки по обработке информации и функциональному анализу. Таллин, 1971. 87 с. (Труды Таллинского политехн. ин-та. Серия А. № 313.) — Ротапринт.

Содерж.: Л. К. Выханду. Об интегрированных системах обработки дискретной информации. — Т. Ю. Микли. Организация программирования в системе «СОДИ». — Т. Ю. Микли, М. О. Томбак. Принципы организации больших массивов информации в системе «СОДИ». — И. Э. Муллат. О циклических разложениях обобщенных графов. — И. Э. Муллат. Об одном принципе максимума для некоторых функций множеств. — Г. А. Вейнер. Об аппроксимации симметричного рефлексивного бинарного отношения отношением эквивалентности. — А. А. Кревальд. Об одной методике информационного изучения динамических систем. — М. А. Абель. О кольце матриц с умножением типа свертки. — Ю. В. Ламп. Матричные преобразования обобщенных последовательностей. — Ю. В. Ламп. Применение упорядоченности в теории матричных преобразований обобщенных последовательностей.

Приск Л. **Руководство по перфорированию на алгоритмическом языке «МАЛГОЛ».** Таллин, 1972. 11 с. (ТПИ. Каф. вычислит. мат.) Ротапринт.

Распознавание образов. (Материалы конференции.) Тарту, 1972. 210 с. (ТГУ.) Ротапринт.

Рийвес К. В. **Связные подгруппы Ли движений и их орбиты в эвклидовых пространствах R_4 и R_5.** (01.01.04). Автореф. дис. на соискание учен. степ. канд. физ.-мат. наук, Тарту, 1973. 22 с. (ТГУ.) Ротапринт.

Саарнийт И.-И. Р. **О разностных методах решения краевых задач дифференциальных уравнений с отклонящимся аргументом.** (01.01.07). Автореф. дис. на соискание учен. степ. канд. физ.-мат. наук. Тарту, 1972. 15 с. (ТГУ.)

Салум В. **Программы для ЭЦВМ «Минск-22».** Вып. 12. Программы для анализа спектров ядерного магнитного резонанса. Под ред. Э. Т. Липпмаа. Таллин, 1973. 115 с. (АН ЭССР. Ин-т кибернетики.) Ротапринт.

Соловьева Б. Л. **Исследование элементарных функций.** Темат. разработка. 20 первых уроков в XI кл. Таллин, 1973. 44 с. (М-во просвещения ЭССР. Респ. ин-т усовершенствования учителей ЭССР.) Ротапринт.

Студенческие труды по алгебре и геометрии. Тарту, 1972. 103 с. (ТГУ. Науч. студ. о-во.) Ротапринт.

Содерж.: К. Каарли. Кольца, в которых все подгруппы аддитивной группы являются подкольцами. — Р. Роомельди. Кольца в которых все мультипликативные подполугруппы с нулем, замкнутые относительно взятия противоположных элементов, являются подкольцами. — П. Пуусемп. Полугруппы эндоморфизмов групп диэдра. — Г. Рубанович. Об упорядоченных группоидах с двумя образующими. — И. Маазикас. Конгруэнция изотропных плоскостей в псевдоевклидовом пространстве ${}^1R_4$. — В. Спесивых. Об однородном пространстве квадрик в P_n. — В. Спесивых, А. Фляйшер. О редуктивности однородных пространств пар «квадрика-линейных образ» в трехмерном проективном пространстве P_3.

Таммела П П. **К теории приведения квадратичных форм, не более чем от шести переменных.** (01.01.03). Автореф. дис. на соискание учен. степ. канд. физ.-мат. наук. Таллин, 1973. 12 с (Ленингр. гос. ун-т им. Д. Д. Жданова.) Ротапринт.

Таммерайд И. Й. **Тауберовы теоремы с остаточным членом для некоторых матричных методов суммирования.** (01.002). Автореф. дис. на соискание учен. степ. канд. физ.-мат. наук. Таллин, 1971. 14 с. (ТГУ.) Ротапринт.

Тапфер Ю. И. **Математические методы исследования моделей равновесия народного хозяйства.** (01.008). Автореф. дис. на соискание учен. степ. канд. физ.-мат. наук. Тарту, 1972. 24 с. (ТГУ.) Ротапринт.

Топник Э. К. **К решению задач по курсу теоретической механики.** 1—2. Таллин, 1972—1973. (ТПИ. Каф. теор. механики.) Ротапринт.

1. Статика. 1972. 127 с., ил.
2. Кинематика. 1973. 106 с., ил.

Труды Вычислительного Центра. Вып. 25—28. Тарту, 1972—1973. (ТГУ.) Ротапринт.

Вып. 25. 1972. 106 с.

Содерж.: Э. А. Тийт. Семейство статистических методов классификации (распознавания образов). — М. Р. Ланин. Правило принятия группового решения. — Т. Э. Мелс. Обобщение сходимости по вероятности: τP-сходимость. — Т. Э. Мелс. Определение общих корреляционных коэффициентов. — Т. Э. Мелс. Существование широкого общего корреляционного коэффициента для случайных элементов на компактном множестве.

Вып. 26. 1972. 99 с.

Содерж.: Т. Э. Мелс. Описание класса общих корреляционных коэффициентов для случайных элементов на конечном множестве. — Э. А. Тийт. Об одной модификации графа корреляции. — М. Р. Ланин, А. К. Лейтен. Применение дискретного программирования к задаче таксономии. — А. Х. Парринг. Некоторые вопросы регрессионного анализа. — Т. А. Вельдре. О форме и объеме требуемой информации при составлении системы решения медицинских и социологических задач. — Т. Э. Мелс. Плотность вероятности для угла вращения при одном частично нормальном распределении вероятностей на группе $SO(3)$.

Вып. 27. 1973. 79 с.

Содерж.: Т. Э. Мелс. Широкий обобщенный коэффициент корреляции с тривиальной группой для сепарабельного локально компактного метрического пространства. — Т. Х.-А. Колло. О частично нормальном распределении вероятностей на группе $SO(3)$. — Л.-М. А. Тоодинг. Статистические оценки в гильбертовых пространствах. — К. К. Праги. Система программ по факторному анализу. — Э. А. Тийт. Процессы Маркова с параметрами, зависящими от некоторого подпространства — модели для демографического прогноза. — М. Р. Ланин, Э. А. Тийт. Математическая модель канала в системе каналов массовых коммуникаций. — М. Р. Ланин. Метод количественной оценки аудитории каналов массовых коммуникаций.

Вып. 28. 1973. 92 с., ил.

Содерж.: Ю. Я. Каазик, М. К. Прээм. Задача нахождения маршрутов. — Х. К. Нярипя. Прямой алгоритм для решения задач целочисленного выпуклого программирования. — А. К. Лейтен. Некоторые модификации задачи коммивояжера. — П. А. Ээльма. Расчет ткани в швейной фабрике. — К. И. Юркатамм. Изучение закономерностей оперативного планирования при помощи имитационной модели цеха.

Шамровский А. Д. **Применение методов теории групп к исследованию волновых процессов в упругих пластинах и оболочках.** (01.02.04). Автореф. дис. на соискание учен. степ. канд. физ.-мат. наук. Таллин, 1973. 24 с. (АН ЭССР. Совет физ.-техн. и мат. наук.) Ротапринт.

VI всесоюзная конференция по экстремальным задачам. Тезисы докладов. Ч. 1—2. Таллин, 16—19 апреля 1973 г. Таллин, 1973. (АН ЭССР. Ин-т кибернетики.) Ротапринт.

Ч. 1. 181 с.
Ч. 2. 181 с.

Ярв Э. А. **Критические интервалы некоторых однопараметровых функционалов.** (01.01.01). Автореф. дис. на соискание учен. степ. канд. физ.-мат. наук. Тарту, 1973. 16 с. (ТГУ.) Ротапринт.

Kõiv, M. and Lõhmus, J. **Generalized deformations of nonassociative algebras.** Definition and some simple examples. Preprint FAI-18 (1972). Tartu, 1972, 26 p. (Acad. of Sciences of Estonian SSR. Institute of Pfysics and Astronomy.)

ARTIKLID

Eesti NSV Teaduste Akadeemia Toimetised. Füüsika. Matemaatika. Tln., 1972.

Nr. 1. Matemaatika-alased artiklid (vene ja ingl. k., resümeed eesti, vene ja ingl. k.):

L. Mõtus. Pidevate süsteemide duaalsest juhtimisest. — I. Randvee. Ajas diskreetsete süsteemide koordineerimine. — Ü. Jaaksoo, Ü. Nurges. Muutuva dimensiooniga lineaarse süsteemi minimaalsest realiseerimisest. — J. Kuks, V. Olman. Regressioonikoefitsientide lineaarne minimakshinnang. — J. Kuks. Regressioonikoefitsientide minimakshinnang. — V. Aladjev. Homogeensete struktuuride arvutatavusest. — A. Kalnins. Normaalisuunalise momendi tasakaalustamatuse efekt koorikuteteoorias.

Nr. 2. Matemaatika-alased artiklid (vene k., resümeed eesti, ingl. ja saksa k.):

J. Henno. Mengeri süsteemide tihedalt sisestatud parempoolsed ideaalid. — E. Raik. Tõenäosus- ja kvantiilfunktsionaaliga stohhastilise programmeerimise ülesannetest. — S. Ulm. Hierarhilise optimiseerimise meetoditest.

Nr. 3. Matemaatika-alased artiklid (vene k., resümeed eesti, ingl. ja saksa k.):

J. Henno. Tihedatest sisestustest Mengeri süsteemides. — A. Siimon. Mõningaid loogiliste skeemide struktuurse sünteesi küsimusi. — E. Raik. Stohhastilise programmeerimise lahendusfunktsiooniga ülesannetest. — И. Муллат. Об одном классе погощающих цепей Маркова. — M. Levin. Kahekordsete integraalide ligikaudse arvutamise valemitest. — Ü. Jaaksoo. Maatriksi hinnangu aproksimeerimisest. — J. Kuks. Minimaksriski alumine tõke. — R. Tavast. Blokkmaatriksi faktoriseerimisest.

Nr. 4. Matemaatika-alased artiklid (vene k., resümeed eesti ja ingl. keeles):

J. Roos. Protsessi senisest käigust sõltuvate koefitsientidega stohhastilise diferentsiaalvõrrandi lahendi piirjaotus. — V. Straus. Q-mittenegatiivsete operaatorite lahutusest regulaarsetes (B, Q)-ruumides. — L. Tuulmets, H. Oidjärv. B-fokaalne ja normaalne B-fokaalne pseudokongruents ruumis R_4. — L. Tuulmets. E. Tamm. Konstantsete invariantidega fokaalsed pseudokongruentsid ruumis R_4. — R. Lepp, E. Raik. Stohhastiliste programmeerimisülesannete randomiseeritud lahendid. — M. Levin. Parimate kvadratuurvalemite tuletamisest. — A. Reitsakas. Arvutusmasinate kompleks «Minsk-32» — «Ruta-110».

Eesti NSV Teaduste Akadeemia Toimetised. Füüsika. Matemaatika. Tln., 1973.

Nr. 1. Matemaatika-alased artiklid (vene ja ingl. k., resümeed eesti, vene, inglise ja saksa k.):

U. Kaljulaid. Fundamentaalse ideaali astmetest. — A. Siimon. Üks mikroprogrammidest vektoraja ümberlülimise funktsioonide moodustamise meetodeid. — H. Jokk. Teist järku harilike diferentsiaalvõrrandite diferentsskeemide koonduvus. — L. Mõtus. Vaba rajaga diferentsiaalvõrrandid stohhastilise juhtimise ülesannetes. — V. Sinivee. Molekulaarsete sfääriliste tensorite keskväärtused. — S. Ulm. Dekompositsioonimeetod matemaatilise programmeerimise ülesannete lahendamiseks. — R.-K. Loide. Weinbergi võrrandi taandamine. — Kadrin Loide, R.-K. Loide. Foldy-Wouthuyseni teisendus $U(1, 3)$-tüüpi võrrandite jaoks. — A. Siimon. Vektoraja ümberlülimise funktsioonide minimiseerimise üks meetodeid.

Nr. 2. Matemaatika-alased artiklid (vene ja ingl. k., resümeed eesti, vene, ingl. ja saksa k.):

J. Henno. Mengeri süsteemide tihedalt sisestatud vasakpoolsed ideaalid. I. — A. Siimon. Loogiliste skeemide analüütilise kirjeldamise keele võimaluste laiendamisest. — V. Aladjev. Mittekonstrueeritavusest ja arvutatavusest homogeensetes struktuurides. — M. Abel. A-väärtustega tõkestatud pidevate funktsioonide algebra maksimaalsete ideaalide ruumi sidusus. — A. Lahe. Plaadi sümmeetrilise deformatsioonilaine üleminek mittesümmeetriliseks lööklaine tekkimisel.

Nr. 3. Matemaatika-alased artiklid (vene ja ingl. k., resümeed eesti, vene, ingl. ja saksa k.):

H. Jokk. Teist järku harilike diferentsiaalvõrrandite diferentsskeemide koonduvus mitteühtlasel võrgul. — M. Apter. Formaalne bioloogilise arengu mudel. — A. Siimon. Signaalide konjunktsioon potentsiaalses elementide süsteemis. — I. Keis. Dünaamiliste süsteemide mingi teisenduste klassiga ekvivalentsest juhtimisest. — R.-K. Loide. Elektromagnetiline interaktsioon kõrgemate spinnide jaoks. — M. Levin. Parimate kvadratuurvalemite täpsustamisest.

Nr. 4. Matemaatika-alased artiklid (vene ja ingl. k., resümeed eesti, vene, ingl. ja saksa k.):

O. Vaarmann. Mõnedest iteratsioonimeetodeist mittelineaarsete võrrandite normaallahendite leidmiseks. — S. M. Mazhar. Lõpmatute ridade absoluutne Cesàro-summeeruvus. — A. Jõgi. Parimate kvadratuurvalemite mõnede tulemuste üldistamine. — J. Henno. Mengeri süsteemide tihedalt sisestatud vasakpoolsed ideaalid II. — A. Siimon. Signaalide disjunktsioon potentsiaalses elementide struktuuris. — V. Poll. Mõned ühe ja mitme muutuja funktsiooni statsionaarsete punktide leidmise interpolatsioonimeetodid. — I. Keis. Dünaamiliste süsteemide lahendite jätkamisest ja tõkestatusest. — A. Roose. Runge-Kutta tüüpi meetodite kasutamisest mittelineaarsete võrrandite lahendamiseks. — M. Kõiv, J. Lõhmus. Kahedimensiooniliste algebrate lõplikud esimest järku assotsiatiivsed ja alternatiivsed deformatsioonid. — J. Engelbrecht. Deformatsioonilainete üleminekuprotsessi mittelineaarne mudel sfäärilise sümmeetria juhul. — I. Randvee. Seostatud alamsüsteemide oleku hindamisest. — Ingrid Mauer. Trahvifunktsioonide meetodid mittekumerprogrammeerimise ülesande lahendamiseks. — T. Riismaa. Kahest ekstreemumülesandest orienteeritud hierarhiliste puude hulkadel.

Gnedenko, B. Matemaatika ja teaduslik-tehniline progress. — Õpilastele NLKP XXIV kongressist. Tln., 1973, lk. 123—134.

Kaasik, Ü. Loendamisülesanded. — Horisont, 1972, nr. 3, lk. 43.

Karu, G. Jäävusseadused 9. klassi mehaanikakursuses. — Nõuk. Kool, 1972, nr. 3, lk. 232—235.

Kenk, K. Teoreetilise mehaanika õpetamise iseärasustest elektrotehnika erialal. [TPI.] — Õppemetoodika küsimusi, 9, 1972, lk. 121—127.

Kureniit, A. ja Tampõld, L. Maatriksmudelite meetod informatsioo-

nivoogude uurimisel. — Tehnika ja Tootmine, 1972, nr. 4, lk. 183—186.

Kärner, M. Õpetajate hinnanguid matemaatika õpetamise kohta 4. klassis. [Küsitluse tulemustest.] — Nõuk. Kool, 1972, nr. 2, lk. 135—138.

Kärner, O. Matemaatika õpetamise mõnest küsimusest ja kontrolltööde tulemustest tasandusklassides. — Tasandusklassid. Tln., 1973, lk. 110—152.

Kärner, O. ja Telgmaa, A. Matemaatika kontrolltöödest 4. klassis. — Nõuk. Kool, 1973, nr. 10, lk. 820—826.

Kärner, O. ja Telgmaa, A. Matemaatika testidest 6. klassis. — Nõuk. Kool, 1972, nr. 9, lk. 764—769.

Laigna, K. Transtsendentsete funktsioonide diferentseerimine koolimatemaatikas. — Nõuk. Kool, 1973, nr. 6, lk. 475—477, joon.

Landra, E. Keel ja matemaatika. — Tehnika ja Tootmine, 1973, nr. 8, lk. 441—443.

Lints, A. Matemaatika 3. klassis. — Nõuk. Kool, 1972, nr. 7, lk. 586—590; nr. 8, lk. 656—660.

Lõhmus, A. Arvutamisest ligikaudsete andmetega. — Nõuk. Kool, 1973, nr. 4, lk. 292—296.

Lõhmus, A. Võimekustestid ja õppeedukus matemaatikas. — Õppetöö teaduslik organiseerimine, 3, 1972, lk. 127—138, joon.

Meldorf, M. ja Seier, G. Arvutustehnika õpetamisest. — Õppemetoodika küsimusi, 10, 1973, lk. 57—60.

Müürsepp, P. Matemaatika ja loovus. [18. ja 19. saj. matemaatikutest.] — Horisont, 1972, nr. 10, lk. 22—25.

Noor, E. Algklasside matemaatika terminoloogiast ja märkidest. — Nõuk. Kool, 1973, nr. 2, lk. 152—156.

Noor, E. Hulga mõiste algklasside matemaatika lähtemõistena. — Nõuk. Kool, 1972, nr. 8, lk. 671—675.

Noor, E. Hulga mõiste algklasside matemaatika lähtemõistena. 2. Naturaalarvu mõiste kujundamine. (Met. lähtekohti.) — Nõuk. Kool, 1972, nr. 9, lk. 757—758.

Nurk, E. Individualiseeritud iseseisvast tööst 5.—7. kl. matemaatikas. — Nõuk. pedagoogika ja kool, 8, 1972, lk. 10—24.

Nurk, E. Probleemõppe rakendamise võimalustest 6. ja 7. kl. matemaatikas. — Nõuk. pedagoogika ja kool, 8, 1972, lk. 109—121.

Nurk, E. Probleemõppe võimalusi 6.—8. klassi matemaatikas. — Nõuk. Kool, 1972, nr. 11, lk. 940—942; nr. 12, lk. 1016—1020.

Pelt, J. Millised on lahendamata ja lahendamatud ülesanded matemaatikas? — Küsimused ja Vastused, 1972, nr. 6, lk. 20—26.

Prinits, O. Esimestest eestikeelsetest matemaatikaõpikutest ja nende autoritest. — Nõuk. Kool, 1973, nr. 12, lk. 1051—1055.

Prinits, O. Professor Gerhard Rägo. [In memoriam.] — Loodusuurijate Seltsi aastaraamat, 61, 1972, lk. 266—267.

Roos, H. ja Allik, K. Kontrolltööde ja eksamite organiseerimine matemaatikas. — Õppemetoodika küsimusi, 10, 1973, lk. 130—136.

Ruga, R. Didaktilise materjali kasutamisest matemaatika õpetamisel 6-aastaste laste eksperimentaalklassis. — Nõuk. Kool, 1973, nr. 12, lk. 995—998, joon.

Ruga, R. Matemaatika õpetamise suundi algastmel. — Nõuk. Kool, 1973, nr. 7, lk. 573—578.

Ruga, R. Matemaatiliste mõistete kujundamine algõpetuses struktuurse materjali baasil. — Algõpetuse aktuaalseid probleeme. Tln., 1973, lk. 90—105, joon.

Saarsoo, H. Katse võrrelda uue ja vana programmi järgi töötanud õpilaste matemaatika-alaste teadmiste taset 5. klassi astumisel. — Nõuk. pedagoogika ja kool, 8, 1972, lk. 75—92.

Saarsoo, H. Kokkuvõtteid matemaatika õpetamisest 5. klassis uue programmi järgi. — Nõuk. Kool, 1973, nr. 2, lk. 132—138; nr. 3. lk. 228—233.

Sarapik, L. Elektronarvutite koormusest Eesti NSV arvutuskeskustes. — Tehnika ja Tootmine, 1973, nr. 8, lk. 416—419.

S e p a, E. Rühmatöö efektiivsusest ülesannete lahendamisel matemaatikas. — Nõuk. pedagoogika ja kool, 7, 1972, lk. 9—36.

S o v a, E. Matemaatika kontrolltööde tulemuste sõltuvus programmi teemadest, õpetaja haridusest ja tööstaažist. — Nõuk. pedagoogika ja kool, 8, 1972, lk. 142—159.

T e l g m a a, A. Matemaatika. [Kat. tööst.] — E. Vilde nim. Tallinna Pedagoogiline Instituut. Tln., 1972, lk. 86—98.

T e l g m a a, A. Matemaatikatestide koostamisest. — Nõuk. Kool, 1973, nr. 12, lk. 1011—1017.

U n d u s k, A. Empiirilistest valemitest keskkooli matemaatikakursuses ja klassivälises töös. — Nõuk. Kool, 1973, nr. 6, lk. 470—475, joon.

V a s s i l, A. Keskkooli trigonomeetriakursuse omandamisest. — Nõuk. Kool, 1972, nr. 3, lk. 223—227.

А л у м я э Н. Правильна ли структура подготовки специалистов связанных с применением вычислительной техники? — Изв. АН ЭССР. Общественные науки, 1972, № 3, с. 231—235.

К а с к Ю. К., Т и н н К. А. и Т ы у г у Э. Х. Организация работ по программированию больших экономических и инженерных задач. — Автоматизированные системы управления производством. Таллин, 1972, с. 128—139.

К я р н е р О. А. О некоторых вопросах преподавания математики и результатах контрольных работ в классах выравнивания. — Классы выравнивания. Таллин, 1973, с. 111—154.

К я р н е р О. А. и Т е л ь г м а а А. Э. О стандартизации контрольных работ по математике. — О методах пед. исследования. Таллин, 1971, с. 126—138.

Н у р к Э. О возможностях применения проблемного обучения по математике 6 и 7-го класса. — Сов. педагогика и школа, 6, 1972, с. 149—163.

Н у р к Э. Об индивидуализированной самостоятельной работе на уроках математики в 5—7 классах. — Сов. педагогика и школа, 6, 1972, с. 240—258.

С а а р с о о Х. Попытка сравнить уровень знаний учащихся по математике, занимавшихся по новой и старой программе при поступлении в 5-ый класс. — Сов. педагогика и школа, 6, 1972, с. 214—233.

С о в а Э. Зависимость результатов контрольных работ по математике от темы программ и от стажа и образования учителей. — Сов. педагогика и школа, 6, 1972, с. 274—288.

С э п а Э. Об эффективности групповой работы на уроках математики. — Сов. педагогика и школа, 6, 1972, с. 18—75.

Ф е л и ц и у с Г. Аппроксимация статистических рядов с использованием ортонормированных функций. — Изв. АН ЭССР. Общетвенные науки, 1972. № 3, с. 253—258.

Х н о н Я. Задача об оптимальной реализации продукции. — Ettekannete teesid IV vabariikl. konv. «Automatiseeritud juhtimissüsteemid Eesti NSV-s». Käärikul 18.—21. dets. 1972. a. Tln., 1972, lk. 39.

L u m i s t e, Ü. Recent advances in the study of the history of mathematics in Estonia. — Items from history of science in the Estonian SSR. Tartu, 1971, pp. 72—94.

M ü ü r s e p p, P. Professor of mathematics Adolf Kneser (1862—1930) and the Tartu university. — Items from history of science in the Estonian SSR. Tartu, 1971, pp. 56—71.

Ülesandeid

KOGUMIKU KAHEKSATEISTKÜMNENDA VIHIKU ÜLESANNETE LAHENDUSED

Ülesande nr. 1 lahendus. Olgu siseringjoone raadius r. Siis kolmnurga kaatetid on $a+r$ ja $b+r$ ning hüpotenuus on $a+b$. Pythagorase teoreemi põhjal

$$(a+r)^2+(b+r)^2=(a+b)^2,$$

millest

$$r^2+(a+b)r=ab.$$

Kolmnurga pindala

$$S=\frac{1}{2}(a+r)(b+r)=\frac{1}{2}[ab+r^2+(a+b)r]=\frac{1}{2}(ab+ab)=ab.$$

Ülesande nr. 2 lahendus. Et esimesel päeval saadi ülikondade müügist kaks korda rohkem raha kui teisel päeval, siis peab kõigi müüdud ülikondade hindade summa jaguma kolmega. Et kõigi kuue ülikonna hindade summa 392 rbl. annab jagamisel kolmega jäägi 2, siis peab müümata jäänud ülikonna hind samuti andma jagamisel kolmega jäägi 2. Seega jäi müümata 68-rublane ülikond ning ülikondi müüdi kogusummas 324 rbl. eest. Teisel päeval müüdi ülikondi $\frac{1}{3}\cdot 324=108$ rbl. eest, s. o. müüdi ülikonnad hinnaga 48 ja 60 rbl.

Ülesande nr. 3 lahendus. Korrutades süsteemi esimest võrrandit x_1-ga, teist x_2-ga jne., saame

$$x_i^2-10x_i+q=0 \quad (i=1,\ 2,\ 3,\ 4) \qquad (1)$$

(siin $q=x_1x_2x_3x_4$). Seega süsteemi lahendiks olevad arvud rahuldavad ruutvõrrandit (1), mistõttu võivad üldse esineda järgmised juhud:

1) kõik tundmatud on võrdsed;
2) kolm tundmatut on võrdsed;
3) tundmatud on paarikaupa võrdsed.

Esimesel juhul, kui $x_1=x_2=x_3=x_4$, saame süsteemist

$$x_1+x_1^3=10.$$

Siit $x_1=2$, mis annab süsteemi ühe lahendi

$$x_1=x_2=x_3=x_4=2.$$

Teisel juhul, kus näiteks $x_1=x_2=x_3\neq x_4$, saame lähtesüsteemist

$$\begin{cases} x_1+x_1^2x_4=10 \\ x_4+x_1^3=10. \end{cases}$$

Esimesest võrrandist teist lahutades

$$(x_1-x_4)-x_1^2(x_1-x_4)=0,$$

$$1-x_1^2=0,$$

$$x_1=\pm 1.$$

Siit saame süsteemi lahendeiks

$$x_1=x_2=x_3=1, \qquad x_4=9$$

ja

$$x_1=x_2=x_3=-1, \quad x_4=11.$$

Tundmatute ümbertähistamine lisab veel 6 lahendit.

Kolmandal juhul, kui näiteks $x_1=x_2$ ja $x_3=x_4$, saame lähtesüsteemist

$$\begin{cases} x_1+x_1x_3^2=10 \\ x_3+x_1^2x_3=10. \end{cases}$$

Esimesest võrrandist teist lahutades

$$(x_1-x_3)-x_1x_3(x_1-x_3)=0,$$

$$x_1x_3=1.$$

Võttes lisaks lähtesüsteemi esimese võrrandi, mis taandub kujule

$$x_1+x_3=10,$$

saame süsteemi lahendeiks

$$x_1=x_2=5+2\sqrt{6}, \quad x_3=x_4=5-2\sqrt{6}$$

ja

$$x_1=x_2=5-2\sqrt{6}, \quad x_3=x_4=5+2\sqrt{6}.$$

Tundmatute ümbertähistamine lisab veel 10 lahendit.

Seega on süsteemil 21 reaalarvulist lahendit.

Ülesande nr. 4 lahendus. Olgu kolmnurga küljed a, $a+d$ ja $a+2d$ $(d>0)$. Et kolmnurga suurim nurk on 120°, siis tema vastaskülg on $a+2d$. Koosinusteoreemi põhjal

$$(a+2d)^2=a^2+(a+d)^2-2a(a+d)\cos 120^\circ,$$

millest

$$3d^2+ad-2a^2=0, \quad d=\frac{2a}{3}.$$

Seega kolmnurga külgede pikkused on $\frac{3a}{3}$, $\frac{5a}{3}$ ja $\frac{7a}{3}$, s. o. küljed suhtuvad nagu 3 : 5 : 7.

Ülesande nr. 5 lahendus. Tingimuste $OA\leqslant OB$ ja $OA\leqslant OC$ põhjal järeldub võrdustest

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{r}{OA}, \quad \sin\frac{\beta}{2}=\frac{r}{OB}, \quad \sin\frac{\gamma}{2}=\frac{r}{OC},$$

et

$$\sin\frac{\alpha}{2}\geqslant\sin\frac{\beta}{2}, \quad \sin\frac{\alpha}{2}\geqslant\sin\frac{\gamma}{2}.$$

Kuna $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$ ja $\frac{\gamma}{2}$ on teravnurgad, siis $\alpha\geqslant\beta$, $\alpha\geqslant\gamma$. Nendest võrratustest ja võrdusest $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$ saame

$$3\alpha\geqslant 180^\circ, \quad 90^\circ>\frac{\alpha}{2}\geqslant 30^\circ, \quad 1>\sin\frac{\alpha}{2}\geqslant\frac{1}{2},$$

$$1>\frac{r}{OA}\geqslant\frac{1}{2}, \quad r<OA\leqslant 2r.$$

Seega tipp A asub siseringjoone ja temaga kontsentrilise ringjoone raadiusega $2r$ vahel või viimati nimetatud ringjoonel.

KOGUMIKU ÜHEKSATEISTKÜMNENDA VIHIKU ÜLESANNETE LAHENDUSED

Ülesande nr. 1 lahendus. Olgu antud arvudeks $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant x_4 \leqslant x_5$. Seega

$$x_1+x_2=1, \quad x_1+x_3=3, \quad x_3+x_5=11 \quad \text{ja} \quad x_4+x_5=11. \tag{1}$$

Et paarikaupa liitmisel saadud summades igaüks antud arvudest esineb neli korda, siis

$$4(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)=1+3+3+6+6+6+8+9+11+11=64,$$

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=16.$$

Arvestades võrdusi (1), on nüüd lihtne leida, et

$$x_1=-1, \quad x_2=2, \quad x_3=4, \quad x_4=4, \quad x_5=7.$$

Ülesande nr. 2 lahendus. Olgu linnadevaheline kaugus $2s$ km, esimese jalgratturi kiirus $x \frac{\text{km}}{\text{t}}$ ja teise jalgratturi kiirus $y \frac{\text{km}}{\text{t}}$. Poole tee läbimiseks kulus esimesel jalgratturil $\frac{s}{x}$ tundi ning selle aja jooksul sõitis teine jalgrattur $(2s-24)$ km. Seega

$$\frac{(2s-24)x}{s}=y. \tag{1}$$

Poole tee läbimiseks kulus teisel jalgratturil $\frac{s}{y}$ tundi ja selle aja jooksul sõitis esimene jalgrattur $(2s-15)$ km. Seega

$$\frac{(2s-15)y}{s}=x. \tag{2}$$

Võrrandeid (1) ja (2) korrutades saame

$$s^2-26s+120=0,$$

$$s_1=6, \quad s_2=20.$$

Seega linnadevaheline kaugus on 40 km.

Ülesande nr. 3 lahendus. Murdudeks, mis rahuldavad võrratust $m \leqslant \frac{a}{b} \leqslant n$, on murrud

$$\frac{bm}{b}, \frac{bm+1}{b}, \frac{bm+2}{b}, \ldots, \frac{bn}{b}.$$

Neid murde on arvult $bn-bm+1$ ning nende summa on

$$S_1=\frac{1}{2}(bn-bm+1)(m+n).$$

Nende hulgas on taanduvateks murdudeks

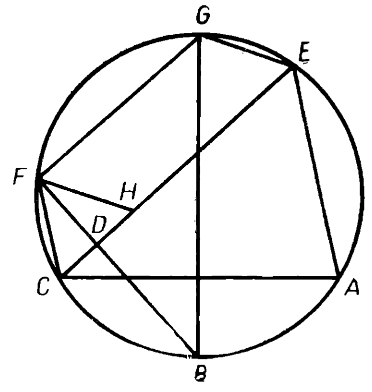
$$\frac{bm}{b}, \frac{bm+b}{b}, \frac{bm+2b}{b}, \ldots, \frac{bn}{b}.$$

Neid murde on arvult $n-m+1$ ning nende summa on

$$S_2=\frac{1}{2}(n-m+1)(m+n).$$

Seega otsitav summa on

$$S = S_1 - S_2 = \frac{1}{2}(b-1)(n^2 - m^2).$$



Ülesande nr. 4 lahendus. Lõigaku sirge BD ($BD \perp EC$) ringjoont punktis F. Tõmbame diameetri BG. $\angle FBG = \angle ACE$ kui ristuvate haaradega nurgad. Järelikult $\smile AE = \smile FG$ ja ka $AE = FG$. Seejuures $FG \parallel EC$, sest $\angle BDC = \angle BFG = 90°$. Kuna $\smile CF = \smile EG$ (kui paralleelsete sirgete vahelised kaared), siis ka $CF = EG$. Tõmbame $FH \parallel GE$. Järelikult $EH = FG$, $FH = GE$. Kolmnurk CFH on võrdhaarne ning tema kõrgus FD poolitab aluse, s. o. $CD = DH$. Nüüd leiame, et $2ED = 2(EC - CD) = 2EC - (EC - - FG) = 2EC - EC + EA = EC + EA$ ja $2CD = CH = EC - FG = EC - EA$.

Ülesande nr. 5 lahendus. Olgu progressiooni esimene liige a_1 ja progressiooni vahe d. Valime naturaalarvu n nii suure, et kehtiksid võrratused

$$a_1 < 10^n, \quad d < 10^n.$$

Siis leidub selline naturaalarv k, et

$$a_k < 10^{n+1}, \quad a_{k+1} \geqslant 10^{n+1}.$$

Järelikult

$$10^{n+1} \leqslant a_{k+1} = a_k + d \leqslant 10^{n+1} + 10^n - 1.$$

See aga ütlebki, et arvu a_{k+1} vasakult teine number on null.

ÜLELIIDULINE ÜLIÕPILASTE OLÜMPIAAD

R. Prank

Esimese üleliidulise üliõpilaste olümpiaadi lõppvoor toimus Moskvas 23. ja 24. oktoobril 1974. a. Võistlesid 5-liikmelised võistkonnad 6 alal: matemaatikas, füüsikas, keemias, bioloogias, võõrkeeltes ning vene keeles ja kirjanduses. Matemaatikutele pakuti esimesel päeval lahendada 5, teisel 6 ülesannet. Kergematele ülesannetele leidus õigeid lahendusi 40 ümber (88 osavõtjat), kummalgi päeval oli aga kahest ülesandest jagu saanud ainult üks osavõtja. Võistluse võitis Moskva, järgnesid Leningrad ja Ukraina NSV. Eesti võistkond (koosseisus J. Lippus ja P. Normak TRÜ-st, P. Pajus TPedI-st ning T. Purre ja H. Rohtla TPI-st) jäi 14-ndaks (18 võistkonna hulgas). Individuaalselt teenis eriauhinna TRÜ V kursuse üliõpilane Peeter Normak, kes ainsana lahendas õigesti esimese päeva 4. ülesande.

Esimesel päeval tuli lahendada järgmised ülesanded:

1. Tõestada, et funktsioonid $f_1, \ldots, f_n$ on lineaarselt sõltumatud parajasti siis, kui leidub selline kogum punkte $t_1, \ldots, t_n$, et $\det \|f_i(t_j)\|_{i,j=1}^{n} \neq 0$.

2. Funktsioon $f(t)$ on määratud poollõigul $[0, +\infty)$ ja omab pideva tuletise.

a) Teada on, et $f(t)+f'(t) \to A$, kui $t \to \infty$. Tõestada, et $f(t) \to A$, kui $t \to \infty$.

b) Teada on, et $f(t) - f'(t) \to A$, kui $t \to \infty$. Kas on õige, et $f(t) \to A$, kui $t \to \infty$?

3. Funktsioon $f(x)$ on määratud poollõigul $[0, +\infty)$ ja omab pideva tuletise, kusjuures $\int\limits_0^{+\infty} |f'(x)| dx < +\infty$. Tõestada, et rida $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f(n)$ koondub parajasti siis, kui koondub integraal $\int\limits_0^{\infty} f(x) dx$.

4. Arvutada $\int\limits_1^{10} x^x \, dx$ relatiivse veaga mitte üle 1%. (Nõutakse vastust, kuid mitte veahinnangut; $\ln 10 = 2{,}3026$.)

5. Olgu kolmemõõtmelises ruumis valitud ristuvad koordinaatteljed ja kumer hulktahukas V_1, mille kõik tipud on täisarvuliste koordinaatidega. Olgu V_k hulktahukas, mille punktide kohavektorid saadakse V_1 iga punkti kohavektori korrutamisel arvuga k. Olgu $N(V)$ täisarvuliste koordinaatidega punktide arv, mis asuvad hulktahukas V või tema pinnal, ja $\mu(V)$ hulktahuka V ruumala. Tõestada, et $N(V_3) - 3N(V_2) + 3N(V_1) - 1 = 6\mu(V_1)$.

Teisel päeval anti järgmised ülesanded:

6. Olgu $f(x)$ lõigul $[0, 1]$ pidev funktsioon ning $\varphi(x)$ vahemikus $(-\infty, +\infty)$ pidev perioodiline funktsioon perioodiga T. Tõestada, et

$$\lim_{n \to +\infty} \int\limits_0^1 f(x)\varphi(nx)\,dx = \frac{1}{T} \int\limits_0^T \varphi(t)\,dt \int\limits_0^1 f(x)\,dx.$$

7. Millise suurima arvu normaale võib tõmmata ellipsile punktist väljaspool ellipsit? Kirjeldada ja joonistada väljaspool ellipsit asuvate punktide hulk, milliseid läbib maksimaalne arv normaale.

8. On antud kaks trigonomeetrilist polünoomi $p(t)$ ja $q(t)$. Tõestada, et leidub selline nullist erinev polünoom $R(x, y)$, et $R(p(t), q(t)) \equiv 0$.

9. On antud jada keradest, mille raadiused lähenevad nullile, kuid summaarne ruumala on lõpmatu. Tõestada, et kuubi saab täita 99% ulatuses lõpliku arvuga nendest keradest.

10. Kõvera tipuks nimetatakse punkti, milles kõverus on ekstremaalne. Tõestada, et igal siledal (lõpmatult diferentseeruval) kinnisel kumeral kõveral on vähemalt neli tippu.

11. Kas neljamõõtmelises ruumis leidub 6 tipu ja 15 servaga kumer hulktahukas?

BIOGRAAFILISI MATERJALE[1] «MATEMAATIKA JA KAASAJA» VIHIKUTES 1—20

[1] Käesolev indeks on põhjalik eesti matemaatikute osas. Teistel juhtudel on viidatud ainult antud isiku kohta käivatele olulisematele materjalidele. (Kursiivis on trükitud viited lehekülgedele, millelt võib leida ulatuslikumaid eluloolisi andmeid.) Tähe B. järel on antud viited kõigile bibliograafia rubriigis loetletud töödele (juhul, kui bibliograafias on samal leheküljel viidatud enam kui ühele sama autori tööle, on sulgudes esitatud viidete arv) ning tähe F. järel viited fotodele. Indeksi koostasid R. Samel ja E. Tamme.

«MATEMAATIKA JA KAASAJA» VIHIKUTE 11—20 SISUKORD

ÜLDKÜSIMUSI

ALGEBRA JA ARVUTEOORIA

GEOMEETRIA

MATEMAATIKA AJALOOST

TÄHTPÄEVI

NEKROLOOGE

LENINI PREEMIA LAUREAATE

UUSI TEADUSTE DOKTOREID

UUSI TEADUSTE KANDIDAATE

KONGRESSID, KONVERENTSID, SEMINARID

KOOLIDEST

MITMESUGUST

MEELELAHUTUST

KEELENURK

UUSI RAAMATUID

BIBLIOGRAAFIA

ÜLESANDEID

«MATEMAATIKA JA KAASAJA» VIHIKUTE 11—20 AUTORID

SISUKORD

«Matemaatika ja kaasaja» vihikuid 9, 11—13 ja 15—19 on veel võimalik osta TRÜ müügipunktist (Tartus, Ülikooli 16) ning tellida posti teel. Tellimused saata aadressil: 202 400, Tartu, Tiigi 78, TRÜ kirjastus- ja trükiosakond.

МАТЕМАТИКА И СОВРЕМЕННОСТЬ XX

Вспомогательные материалы для преподающих и изучающих математику
На эстонском языке
Тартуский государственный университет
ЭССР, г. Тарту, ул. Юликооли, 18

Vastutav toimetaja E. Tamme
Korrektor V. Lang

Ladumisele antud 2. VIII 1974. Trükkimisele antud 12. II 1975. Trükipoognaid 12,25+1 kleebis. Arvestuspoognaid 16,53. Trükipaber nr. 1, 60×90. 1/16. Kohila Paberivabrik. Trükiarv 1500. MB-00333. Tell. nr. 4104. Hans Heidemanni nim. Trükikoda, Tartu, Ülikooli tn. 17/19. II.

Hind 71 kop.

2—2