0010011

Matemaatika ja kaasaeg

1100100

TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

MATEMAATIKA JA KAASAEG

XIX

ABIMATERJALE MATEMAATIKA ÕPETAJATELE JA ÕPPIJATELE

TARTU 1973

HILBERTI PROBLEEMID

M. Kilp

II rahvusvahelisel matemaatikute kongressil 1900. a. Pariisis esines matemaatika ajaloo ja bibliograafia ning matemaatika õpetamise ja metodoloogia sektsiooni ühisel koosolekul ettekandega «Matemaatilised probleemid» Göttingeni ülikooli 38-aastane professor David Hilbert. Ei enne ega pärast 1900. aastat ei ole leidunud matemaatikut, kes oma teadusliku ettekande oleks pühendanud kogu matemaatika probleemidele. Hilbert aga, selleks ajaks teadusemaailmas juba hästi tuntud oma töödega invariantide teooriast, geomeetria alustest ning algebralisest arvuteooriast, oli matemaatik, kelles matemaatilise mõtte jõud oli harmooniliselt ühendatud tohutu laiahaardelisusega, ning tema ettekanne avaldas matemaatika hilisemale arengule erakordselt suurt mõju. Ettekandest möödunud rohkem kui 70 aasta jooksul ei kaotanud selles esitatud probleemid oma aktuaalsust. Nende lahendamisele on oma jõupingutused suunanud paljud käesoleva sajandi kõige silmapaistvamatest matemaatikutest. Nende probleemidega seotud ideede edasiarendamine moodustab suure osa kogu meie sajandi matemaatikast.

Käesolevas kirjutises püütakse anda lühiülevaade Hilberti esitatud probleemidest. Eri probleemide juures peatume kas vähem või rohkem (või ei peatu üldse) — olenevalt sellest, kuivõrd nad alluvad kirjutise autori nõrgale sulele. Põhilise algallikana on kasutatud Hilberti ettekande venekeelset teksti [1] ning samas raamatus avaldatud kommentaare.

Enne konkreetsete probleemide juurde asumist anname sõna Hilbertile endale — esitame katkeid tema ettekande sissejuhatavast osast.

«Kes meist ei tahaks kõrvaldada katet tuleviku eest, et kas või hetkekski heita pilk meie teadmiste tulevastele edusammudele ning tema arengusaladustele lähematel aastakümnetel? Millised on need eesmärgid, mille endale seavad järgmise põlvkonna juh-

[1] Проблемы Гильберта. Сборник под редакцией П. С. Александрова. М., 1969.

tivad matemaatikud? Millised uued meetodid ning faktid avastatakse matemaatika laial ning rikkal tegevusväljal uuel sajandil?

Ajalugu õpetab, et teaduse areng on pidev. Me teame, et igal sajandil on omad probleemid, mille järgnev ajajärk kas lahendab või heidab kõrvale kui kasutud, et nad uutega asendada. Et endale ette kujutada matemaatiliste teadmiste arengu võimalikku iseloomu lähemas tulevikus, peame oma kujutluses läbi vaatama küsimused, mis on veel lahendamata, ning probleemid, mida püstitab kaasaegne teadus ning mille lahendusi me tulevikult ootame. Selline probleemide ülevaade tundub mulle praegu, uue sajandi künnisel, eriti õigeaegsena. Ei sunni ju ümmargused aastanumbrid meid ainult minevikku tagasi vaatama, vaid suunavad meie mõtet ka tundmatusse tulevikku.

Ei ole võimalik eitada seda suurt tähtsust, mis on teatud probleemidel kogu matemaatika arengu jaoks, ning seda tähtsat osa, mida nad etendavad üksiku teadlase töös. Iga teadusharu on elujõuline niikaua, kuni temas on küllalt uusi probleeme. Uute probleemide vähesus tähendab teadusharu väljasuremist või iseseisva arengu lõppemist. Nagu kõik inimeste ettevõtmised on seotud ühe või teise eesmärgiga, nii on ka matemaatiline looming seotud probleemide seadmisega. Teadlase jõud tuleb ilmsiks probleemide lahendamisel: ta avastab uusi meetodeid, leiab uusi seisukohti, tema ees avanevad laiemad ja vabamad horisondid.

On raske ning tihti isegi võimatu ette õigesti hinnata üksiku ülesande tähtsust, sest lõppkokkuvõttes määrab tema väärtuse see kasu, mille ta toob teadusele. Siit võrsub küsimus: kas on olemas üldisi tunnuseid, mis iseloomustavad head matemaatilist probleemi?

Üks vana prantsuse matemaatik on öelnud: «Matemaatilist teooriat võib lugeda täiuslikuks ainult siis, kui sa oled teinud ta niivõrd selgeks, et oled nõus tema sisu selgitama esimesele vastutulijale». Selle selguse ning arusaadavuse nõude, mis on siin nii järsus vormis püstitatud matemaatilise teooria kohta, püstitaksin ma veelgi teravamalt matemaatilise probleemi suhtes, kui ta pretendeerib täiuslikkusele, sest selgus ja arusaadavus ju köidavad meid, liigne keerulisus ning ebaselgus aga tõukavad eemale.

Edasi, matemaatiline probleem peab olema niivõrd raske, et see meid köidaks, ning samal ajal mitte päris ligipääsmatu, et meil pingutusi mitte lootusetuiks teha, ta peab olema teetähiseks keerulistel radadel, mis viivad varjatud tõdedeni, lõpuks peab ta meid autasustama rõõmuga leitud lahendusest.

Möödunud sajandi matemaatikud pühendusid mõningate raskete ülesannete lahendamisele, nad oskasid õigesti hinnata rasket ülesannet. Ma meenutan ainult Johann Bernoulle'i ülesannet kiireima laskumise trajektoori kohta. «Nagu näitavad kogemused,» ütleb Bernoulle oma ülesandest teatades, «miski ei sunni tarku päid nii suure jõuga tööle teadmiste suurendamiseks kui raske ning samal ajal kasulik ülesanne.» Ning seetõttu loodab ta pälvida matemaatilise maailma tänu, kui ta esitab ülesande oma aja väljapaistvaimatele analüütikutele, et nad võiksid tema nagu proovikivi kallal katsetada oma meetodeid ning mõõta oma jõudu. Sellest Bernoulle'i ning teistest samalaadsetest ülesannetest kasvas välja variatsioonarvutus.

Tihti juhtub aga, et üks ja sama probleem kerkib üles küllalt erinevates matemaatikaharudes. Nii on lühima trajektoori probleemil tähtis ajalooline ja põhimõtteline osa üheaegselt geomeetria alustes, kõverate ja pindade teoorias, mehaanikas ja variatsioonarvutuses. Nagu veenvalt näitas F. Klein, on probleemil korrapärastest hulktahukatest suur tähtsus üheaegselt elementaargeomeetrias, rühmateoorias, algebraliste ning diferentsiaalvõrrandite teoorias!

. . . . . .

Pärast seda, kui me vaatlesime matemaatilise probleemi üldist tähtsust, pöördume küsimuse juurde, millisest allikast matemaatika oma probleemid ammutab. Ei ole kahtlust, et iga matemaatikaharu esimesed ja kõige vanemad probleemid arenesid välja katsetest ning olid meie ette seatud välismaailma poolt... Matemaatikaharu edasisel arenemisel ilmutab edusammudest innustatud inimmõistus juba iseseisvust. Ta püstitab uusi ja viljakaid probleeme ise, sageli ilma välismaailma märgatava mõjuta, ainult mõistete loogilise vastandamise, üldistamise, spetsialiseerimise, õnnestunud klassifitseerimise ning grupeerimise abil. Nii tekkisid Galois' teooria, algebraliste invariantide teooria, Abeli ja automorfsete funktsioonide teooria ning nii tekkisid üldse peaaegu kõik kaasaegse arvu- ning funktsiooniteooria küsimused.

. . . . . .

Teeme veel mõned märkused nende matemaatiliste probleemide lahendamise raskuse kohta.

Kui meil ei ole võimalik leida matemaatilise probleemi lahendust, siis seisneb selle põhjus tihti selles, et me ei asu veel küllalt üldisel vaatekohal, millelt vaadeldav probleem on lihtsalt üks lüli sarnaste probleemide ahelas. Seda vaatekohta otsides me teeme tihti antud probleemi mitte üksnes lihtsamalt uuritavaks, vaid omandame ka meetodi, mis on rakendatav sarnaste ülesannete puhul... Matemaatiliste probleemide uurimisel on spetsialiseerimisel, nagu ma arvan, veel suuremgi osa kui üldistamisel. On täiesti võimalik, et enamikul juhtudel, mil me tagajärjetult otsime vastust mingile küsimusele, seisneb meie ebaedu põhjus selles, et veel on lahendamata meie poolt vaadeldavast probleemist lihtsamad. Siis seisneb kogu asi selles, et tuleb leida need lihtsamad probleemid ning seejuures püüda jõuda nende lahendusteni kõige täiuslikumate meetoditega, kasutades mõisteid, mida on võimalik üldistada. See reegel on üheks kõige võimsamaks hoovaks matemaatiliste raskuste ületamisel, ning, nagu mulle näib, enamikul juhtudel just seda hooba kasutataksegi, sageli küll ebateadlikult.

On ka nii, et me püüame leida vastust, lähtudes ebapiisavatest eeldustest või liikudes vales suunas, ning seetõttu ei jõua eesmärgile. Siis kerkib esile vajadus tõestada, et antud probleem ei ole võetud eelduste ning valitud suuna korral lahenduv. Selliseid mittelahenduvuse tõestusi võib leida juba antiikaja matemaatikutel, näiteks avastus, et võrdhaarse täisnurkse kolmnurga hüpotenuusi ja kaateti suhe on irratsionaalarv. Uusimas matemaatikas etendavad teatud probleemide mittelahenduvuse tõestused väga tähtsat osa. Me konstateerime, et sellistele vanadele ning keerulistele probleemidele, nagu paralleelsuse aksioomi tõestamine, ringi kvadratuur või viienda astme võrrandi lahendamine radikaalides, leiti siiski range ning meid täiesti rahuldav lahendus, kuigi hoopis mitte selles suunas, nagu algul eeldati.

See imestust tekitav tõsiasi koos teiste filosoofiliste kaalutlustega tekitab meis usu, mida kahtlemata jagab iga matemaatik, mida aga senini keegi pole tõestanud — usu sellesse, et iga konkreetne matemaatiline probleem on kindlasti rangelt lahenduv kas siis selles mõttes, et õnnestub leida vastus püstitatud küsimusele, või selles mõttes, et tehakse kindlaks tema lahendamise võimatus ning koos sellega tõestatakse kõikide tema lahenduskatsete paratamatu ebaõnnestumine. Kujutame endale ette mingit lahendamata probleemi, näiteks küsimust selle kohta, kas algarve, millel on kuju $2^n + 1$, on lõpmata palju. Kui ligipääsmatutena see probleem meile praegu ka ei tunduks ning kui abitult me tema ees ka ei seisaks, on meil siiski kindel veendumus, et tema lahendamine õnnestub lõpliku arvu loogiliste järelduste abil.

. . . . . .

Selline veendumus, et iga matemaatiline probleem on lahenduv, on meile meie töös suureks toeks. Me kuuleme endas pidevat kutset: siin on probleem, otsi lahendust. Sa võid ta leida oma mõistuse abil, kuna matemaatikas ei ole *ignorabimus*'t [2].

Matemaatiliste probleemide hulk on lõpmatu ning niipea kui üks probleem on lahendatud, kerkib tema asemele lõpmata palju uusi. Lubage mul edasises nimetada mõned konkreetsed probleemid eri matemaatikaharudest, probleemid, mille uurimine võib oluliselt stimuleerida teaduse edasist arengut.»

Esimene probleem [3]. Kahte hulka nimetatakse ekvivalentseteks, kui leidub selline üksühene vastavus, mis seab kummagi hulga igale elemendile vastavusse mingi üheselt määratud elemendi teisest hulgast. Kahe ekvivalentse hulga puhul öeldakse, et neil on üks ja sama võimsus. Kui hulk X on ekvivalentne hulga Y

---

[2] *Ignorabimus* (lad. k.) — me ei saa teada.

[3] Sellest probleemist ja Coheni tööst oli põgusalt juttu «Matemaatika ja kaasaja» veergudel seoses Moskva matemaatikakongressi ülevaatega.

mingi osahulgaga ning ei ole ekvivalentne hulgaga Y, siis öeldakse, et hulga X võimsus on väiksem kui hulga Y võimsus.

Hulka nimetatakse loenduvaks, kui ta on ekvivalentne kõigi naturaalarvude hulgaga. Kõikide reaalarvude hulga võimsust nimetatakse kontiinumi võimsuseks. Juba 1878. a. esitas hulgateooria rajaja Cantor hüpoteesi, mille kohaselt ei leidu hulka, mille võimsus oleks suurem kui loenduva hulga võimsus ning väiksem kui kontiinumi võimsus (kontiinumhüpotees). Hilberti esimene probleem seisneski kontiinumhüpoteesi tõestamises. Oma esimest probleemi esitades pööras Hilbert tähelepanu ka ühele teisele Cantori poolt püstitatud küsimusele kontiinumi efektiivse täieliku järjestamise kohta (hulka nimetatakse täielikult järjestatuks, kui ta on niiviisi lineaarselt järjestatud, et igas tema mittetühjas alamhulgas leidub vähim element). Kui omaks võtta nn. valiku aksioom, siis järeldub sellest, et mistahes hulk on täielikult järjestatav.

Kuna neid Cantori esitatud küsimusi pika aja jooksul lahendada ei õnnestunud, siis tekkis oletus, et need ongi lahendamatud. Küsimus esitati nüüd järgmisel kujul: lähtudes teatud hulgateooria aksiomaatikast, tõestada, et kontiinumhüpoteesi pole võimalik ei tõestada ega ümber lükata.

Esimesed tõsised tulemused selles suunas sai kaasaja suurim matemaatiline loogik Kurt Gödel, kes 1940. a. teatud hulgateooria aksioomide süsteemist lähtudes tõestas, et kui see süsteem ei ole vasturääkiv, siis ei ole vasturääkiv ka aksioomide süsteem, mis saadakse esialgsele süsteemile valiku aksioomi ja kontiinumhüpoteesi juurdelisamisel. Hilberti probleemi lõplik lahendus järeldus aga noore ameerika matemaatiku Paul Coheni 1963. a. tulemustest, kes tõestas, et eespool nimetatud aksioomide süsteemist saadakse vasturääkimatu aksioomide süsteem ka siis, kui temale juurde lisada valikuaksioomi ja kontiinumhüpoteesi eitused. Niisiis, probleemi lahendus osutus sarnaseks Eukleidese paralleelsuseaksioomiga seotud küsimuse lahendusega — osutus, et mõeldav on hulgateooria, mille aksioomide hulgas on kontiinumhüpotees, kui ka hulgateooria, mille aksioomide hulgas on selle hüpoteesi eitus. Märkigem siinkohal veel, et nende tulemuste eest autasustati P. Coheni 1966. a. Moskva ülemaailmsel matemaatikute kongressil Fieldsi medaliga.

Teine probleem. Hilberti teine probleem on pühendatud aritmeetika aksioomide [4] vasturääkimatusele. Geomeetria aktsioomide vasturääkimatust on võimalik tõestada sel teel, et konstrueeritakse teatud arvuhulk nii, et geomeetrilistele aksioomidele vastavad analoogilised seosed selle arvuhulga elementide vahel — vaadeldava aksioomide süsteemi mudel. Kui selline mudel on konstruee-

[4] J. Hion. Naturaalarvude aksiomaatika. — Matem. ja kaasaeg. XII, lk. 33—40.

ritud, siis ei saa geomeetria aksioomidest tuleneda vasturääkivust, sest kui selline tekiks, siis peaks ta olema avastatav ka meie poolt konstrueeritud mudelis ning viiks lubamatu vasturääkivuseni arvuhulgas. Osutub, et sedalaadi mudeleid on võimalik konstrueerida paljude teooriate korral. Erandlik on siin naturaalarvude aritmeetika, mille jaoks lihtsamat mudelit leida ei ole võimalik. Seetõttu tuleb naturaalarvude aritmeetika vasturääkimatus tõestada otseselt. Nagu Hilbert vastavat probleemi sõnastades selgitas, tuleb sel juhul tõestada, et nendest aksioomidest ei ole võimalik lõpliku arvu loogiliste järelduste abil saada teineteisele vasturääkivaid tulemusi.

Hilbert ise töötas välja teatud tõestuste teooria, mille abil ta lootis leida ka vaadeldava probleemi lahenduse. Et see aga sel teel võimatu on, selgus Gödeli 1931. a. töödest. Samal ajal võib öelda, et kaks aastat hiljem õnnestus Gödelil probleem teatud mõttes lahendada. Nimelt peeti sajandi algul vaieldavaks välistatud kolmanda seaduse (mida väljendab aksioom: «Iga väite A korral kehtib kas A või A eitus») kasutamine lõpmatute hulkade korral. Seetõttu oli Hilberti sooviks leida selline aritmeetika mittevasturääkivuse tõestus, mis ei kasutaks välistatud kolmanda seadust. Gödelil õnnestus 1933. a. tõestada, et kui intuitsionistlik aritmeetika, s. t. aritmeetika, milles välistatud kolmanda seadust ei kasutata, on vasturääkimatu, siis on seda ka klassikaline aritmeetika, kus välistatud kolmanda seadust kasutatakse.

Kolmas probleem. Hilberti kolmanda probleemi sisu seisneb küsimuses, kas on võimalik leida mistahes hulktahuka ruumala (sisuliselt) integreerimist kasutamata, jaotades selleks hulktahuka lihtsamateks hulktahukateks või täiendades teda lihtsamate hulktahukate abil mõneks tuntud hulktahukaks. Et see nii ei ole, selguks, kui õnnestuks näidata, et on olemas kaks tetraeedrit, mille alused ja kõrgused on võrdsed ning mida ei saa lahutada kongruentseteks tetraeedriteks ega ka täiendada kongruentsete tetraeedrite abil hulktahukateks, mida saab juba jaotada kongruentseteks tetraeedriteks.

Et sellised tetraeedrid olemas on, seda näitas Dehn juba samal, 1900. aastal.

Neljas probleem. Neljandas probleemis püstitab Hilbert ülesande uurida geomeetriaid, milles kehtiksid kõik eukleidilise geomeetria aksioomid, välja arvatud üks aksioom kolmnurkade kongruentsuse kohta, ning lisaks veel aksioom, mis nõuab, et igas kolmnurgas oleks kahe külje summa suurem kolmandast küljest. Teatud mõttes lahendas selle probleemi juba 1901. a. Hilberti õpilane G. Hamel.[5]

---

[5] Vt. Busemanni artiklit. Успехи матем. наук, XXI, 1 (127), стр. 153—164.

Viies probleem. Hilberti viienda probleemi võib sõnastada: Kas iga lokaalselt eukleidiline topoloogiline rühm on Lie rühm?

Rühma G nimetatakse topoloogiliseks rühmaks, kui hulk G on topoloogiline ruum ning funktsioonid $f(x, y) = xy$ ning $g(x) = x^{-1}$ on pidevad. Topoloogilist rühma nimetatakse lokaalselt eukleidiliseks, kui iga tema elemendi ümbruses on võimalik defineerida koordinaadid sel teel, et antakse selle punkti teatud ümbruse homeomorfism (üksühene mõlemas suunas pidev kujutus) mingiks eukleidilise ruumi lahtiseks hulgaks. Lie rühmaks nimetatakse sellist topoloogilist rühma, milles eespool nimetatud homeomorfismid on ümbruste lõikel seotud diferentseeruvalt. Vastus sellele küsimusele osutus jaatavaks. Kõigepealt lahendas probleemi bikompaktsete rühmade korral John von Neumann (1933), seejärel kommutatiivsete lokaalselt bikompaktsete rühmade korral L. S. Pontrjagin (1934). Probleemi lõplik lahendus sisaldub Gleasoni ja Montgomery ning Zippini 1952. aasta töödes.

Kuues probleem. Kuuenda probleemi sõnastas Hilbert järgmiselt: Geomeetria aluste alaste uurimustega on tihedalt seotud ülesanne aksiomaatiliselt üles ehitada tõenäosusteooria ja mehaanika.

Praegusel ajal on olemas mitmeid klassikalise mehaanika, kvantmehaanika, statistilise füüsika jt. füüsikaliste distsipliinide aksiomaatilisi käsitlusi. Mis puutub tõenäosusteooriasse, tuleb kõigepealt märkida, et juba ammu enam ei saa seda vaadelda osana füüsikast. Tõenäosusteooria uurimisobjektiks on igasuguste juhuslike sündmuste üldised seaduspärasused, olenemata sellest, kas nad kuuluvad füüsikasse, keemiasse, bioloogiasse või kuhugi mujale. Seniajani on olemas mitmed tõenäosusteooria aksiomaatilised käsitlused. Erilise tunnustuse on leidnud A. N. Kolmogorovi poolt kolmekümnendate aastate algul esitatud aksiomaatika. Vaatamata sellele, et sellesuunalisi uurimusi võib lugeda küllalt edukaks, tuleb neid praegu siiski lugeda esimesteks sammudeks aksiomaatilise tõenäosusteooria ülesehitamisel, kuna mitmetele põhiülesannetele pole siiani isegi ranget matemaatilist sõnastust leitud.

Seitsmes probleem. Algebraliseks arvuks nimetatakse arvu, mis on mingi algebralise võrrandi $a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n = 0$ lahendiks, kus $a_0, a_1, \ldots, a_n$ on täisarvud. Iga mittealgebralist arvu nimetatakse transtsendentseks arvuks. Hilbert püstitas kaks hüpoteesi. Kui võrdhaarse kolmnurga alusnurga suhe tipunurgasse on algebraline arv, aga mitte ratsionaalarv, siis on aluse ja külgserva suhe transtsendentne arv.

Kui α on algebraline arv ja β algebraline irratsionaalarv, siis on aste α^β alati transtsendentne arv (või vähemalt irratsionaalarv).

Hilberti hüpoteesid on saanud positiivse lahenduse, seejuures teine neist tugeval kujul: ilma sulgudes antud lisandita. Mõlema probleemi lahendamisel oli suur osa nõukogude matemaatikul A. O. Gelfondil.

Kaheksas probleem. Kaheksas probleem puudutab algarvude paiknevust. Nagu märgib Hilbert, on selleks, et leida nende algarvude arvu, mis ei ületa etteantud arvu, kõigepealt tarvis tõestada Riemanni väide selle kohta, et dzeeta-funktsiooni

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots$$

kõikide nullkohtade reaalosad võrduvad $^1/_2$-ga, kui mitte arvestada teadaolevaid reaalseid nullkohti $-2, -4, \dots, -2n, \dots$ Selle probleemi positiivse lahenduse olemasolu kinnitavaid tulemusi on küll olemas, probleem ise aga täielikult lahendamata. Hilberti arvates peaks ülaltoodud probleemi lahendus osutuma kasulikuks Goldbachi tuntud probleemi ning kaksikalgarvude probleemi lahendamisel. Goldbachi hüpoteesi kohaselt peab iga paarisarvu olema võimalik esitada kahe algarvu summana. Kaksikalgarvude probleem seisneb aga selles, kas algarvupaare, mille vahe võrdub kahega, on lõpmata palju. Ka kaks viimati nimetatud probleemi on siiani lahendamata.

Kümnes probleem. Kümnes probleem puudutab üht kõige vanemat matemaatikaharu — täisarvuliste kordajatega võrrandite lahendamist täisarvudes. Selliseid võrrandeid nimetatakse diofantilisteks võrranditeks vanakreeka matemaatiku Diophantese auks, kes vaatles mõningaid selliseid ülesandeid. Hilbert sõnastas probleemi järgmiselt:

«Olgu antud suvalise arvu tundmatutega täisarvuliste kordajatega diofantiline võrrand. Tuleb leida üldine meetod, mille abil saab lõpliku arvu sammude järel kindlaks teha, kas antud võrrandil on täisarvulisi lahendeid või mitte».

Diofantiliste võrranditega tegeldi juba antiikajal. Nii esitas Eukleides juba III saj. e. m. a. valemi, mille järgi saab leida võrrandi $x^2 + y^2 = z^2$ kõik täisarvulised lahendid. Diophantes (III saj. m. a. j.) vaatles kahe tundmatuga teise astme võrrandeid ja võrrandisüsteeme. Näiteks vaatles ta võrrandit $ax^2 + bx + c = y^2$ ning lahendas selle mõningatel erijuhtudel. Diofantiliste võrranditega tegelesid sellised matemaatikud nagu Fermat, Euler, Lagrange ning Gauss. Laialt on tuntud Fermat' hüpotees, millele vastavalt võrrandil $x^n + y^n = z^n$ ei ole $n > 2$ korral täisarvulisi lahendeid — selle ülesande lahendamine on palju ohvreid nõudnud, lahendust aga ei paista. On leitud suvalise kahe tundmatuga teise astme võrrandi lahendamise eeskirjad. Mis puutub **aga** kõrgema astme võrranditesse, siis siin on teada lahendusmeetodid vaid teatud erikujuliste võrrandite jaoks.

Probleemi sõnastades uskus Hilbert tõenäoliselt, et üldine lahendusmeetod selliste võrrandite lahendamiseks on olemas ning selle leidmine on ainult aja küsimus. Küsimus sellest, kas selline üldine meetod on olemas, ei kerkinud Hilberti ajal üles kõigepealt seetõttu, et algoritmi mõiste sel ajal matemaatikas veel puudus. Praegusel ajal on algoritmi mõiste rangelt defineeritud ning olemas eriline matemaatikaharu, mis algoritmidega seotud küsimustega tegeleb — algoritmiteooria. Tähtsa koha on omandanud küsimused ühe või teise algoritmi mitteeksisteerimise kohta. Seda «üldist meetodit» mõistetakse praegu samuti nagu teatud algoritmi. Kui Hilberti kümnendale probleemile läheneda kaasaegselt seisukohalt, siis võib selle sõnastada: «Kas on olemas algoritm, mis antud täisarvuliste kordajatega hulkliikme $P(x_1, \ldots, x_n)$ korral selgitaks, kas võrrandil $P=0$ on täisarvulisi lahendeid või mitte.» A priori on võimalik nii probleemi positiivne lahendus (s. t. nõutava algoritmi koostamine) kui ka negatiivne lahendus (s. t. algoritmi olemasolu võimatuse tõestamine).

Varsti pärast probleemi avaldamist õnnestus Thue'l tõestada, et võrrandil $f(x, y)=c$, kus c on täisarv, f aga vähemalt kolmanda astme taandamatu vorm (vorm on hulkliige, mille kõikidel liikmetel on üks ja sama aste) on ülimalt lõplik arv täisarvulisi lahendeid. Kahjuks ei andnud aga Thue' meetod eeskirja lahendite ülemise tõkke leidmiseks. Alles 1968. a. õnnestus Baker'il leida selle võrrandi lahendite ülemise tõkke leidmise algoritm. Seega on vaadeldava võrranditüübi jaoks probleem positiivselt lahendatud.

Üsna varsti pärast algoritmi mõiste defineerimist matemaatilises loogikas tõestati esimesed teoreemid, mis väitsid, et teatud algoritmi ei ole olemas. See asjaolu ning see, et diofantiliste võrrandite lahendamisel põrkuti kokku väga tõsiste raskustega, tekitasid oletuse, et algoritmi, mille olemasolusse uskus Hilbert, ei eksisteeri. See oletus ning algoritmiteooria kiire areng põhjustasid seda, et alates 1953. aastast alustatigi uurimustega selles suunas. Ameerika matemaatikutel Davisel, Putnamil ning J. Robinsonil õnnestus jõuda sellesuunaliste tulemusteni mõnede teiste aritmeetiliste ülesannete puhul, Davisel läks korda kindlaks teha, et kui diofantilisel võrrandil $x^3-zy^3=1$ on iga $k \geqslant 0$ korral selline lahend, mille puhul $x > z^k$, siis lahendub Hilberti kümnes probleem negatiivselt. Et see tõepoolest nii on, selgus 1970. a. Hilberti probleemi lahendajaks osutus noor Leningradi matemaatik J. V. Matijasevitš.[6]

---

[6] Vt. Известия АН СССР, 35, I, 1971, 3—30.

Üheteistkümnes probleem. Üheteistkümnendas probleemis seatakse ülesandeks kanda algebraliste arvkorpuste juhule üle ruutvormide teooria ratsionaalarvude korpusel. Kui probleemi küllalt üldiselt tõlgendada, siis ollakse selle lahendamisest alles kaugel.

Kolmeteistkümnes probleem. Iga seitsmenda astme algebralisele võrrandile on teatud teisenduse abil võimalik anda kuju $t^7 + xt^3 + yt^2 + zt + 1 = 0$, kus x, y, z on kordajad. Selle võrrandi lahend t sõltub ilmselt nendest kordajatest, olles seega viimaste teatav funktsioon $t = f(x, y, z)$. Oma kolmeteistkümnendat probleemi sõnastades püstitas Hilbert hüpoteesi, mille kohaselt seda funktsiooni $t = f(x, y, z)$ ei ole võimalik esitada pidevate kahe muutuja funktsioonide superpositsioonina. A. N. Kolmogorov tõestas 1956. aastal, et iga pidev n muutuja funktsioon on esitatav pidevate kolme muutuja funktsioonide superpositsioonina. Aasta hiljem õnnestus A. N. Kolmogorovi õpilasel V. I. Arnoldil, kes siis oli neljanda kursuse üliõpilane (!), tõestada, et iga pidev kolme muutuja funktsioon on esitatav pidevate kahe muutuja funktsioonide superpositsioonina. Sellega oli Hilberti kolmeteistkümnes probleem saanud negatiivse lahenduse. Kuna aga funktsioonid, mida Kolmogorov ja Arnold oma esitustes kasutasid, polnud isegi mitte diferentseeruvad, siis jääb vaadeldav probleem sisuliselt lahtiseks, kuna säilib võimalus tõestada, et seitsmenda astme võrrandid pole üldiselt lahenduvad mõnes teises kahe muutuja funktsioonide klassis, mis sisaldab kõiki algebralisi kahe muutuja funktsioone.

Neljateistkümnes probleem. Hilberti neljateistkümnes probleem on seotud invariantide teooriaga ning selle lahenduse andis 1956. aastal jaapani matemaatik Nagato.

Seitsmeteistkümnes probleem. Probleemi sõnastus: Olgu antud reaalsete kordajatega n muutuja ratsionaalfunktsioon, mis kõikides reaalsetes punktides, kus ta on määratud, omandab mittenegatiivsed väärtused. Kas seda funktsiooni on võimalik esitada reaalsete kordajatega ratsionaalfunktsioonide ruutude summana? Sellele probleemile andis 1927. a. positiivse lahenduse E. Artin.

Kaheksateistkümnes probleem on seotud eukleidilise ruumi liikumiste diskreetsete rühmadega. Liikumiste rühma G nimetatakse diskreetseks, kui leidub niisugune punkt A ja selline positiivne arv r, et iga punktist A erinev ning punktiga A rühma G suhtes ekvivalentne punkt (s. t. punkt, milleks punkt A läheb mingi rühma G kuuluva liikumise abil), asetseb punktist A mitte lähemal kui r. Rühma G fundamentaalpiirkonnaks nimetatakse sellist punktihulka ruumis, et 1) tema punktid ei ole üksteisega rühma G suhtes ekvivalentsed ja 2) iga ruumi punkt on ekvivalentne mingi selle piirkonna punktiga rühma G suhtes. Eukleidilise n-mõõtmelise ruumi liikumiste iga diskreetset rühma, mille fundamentaalpiirkond on lõplik, nimetatakse n-mõõtmeliseks kristallograafiliseks rühmaks. Kahte sellist rühma loetakse mitteoluliselt erinevaiks, kui nende jaoks on võimalik leida sellised ristkoordinaadistikud, et nende koordinaadistike suhtes on nende rühmade liikumised kirjapandavad ühesuguste lineaaravaldiste abil. Kolmemõõtmelise juhu jaoks oli 1900. aastaks teada, et oluliselt erinevaid kristallograafilisi rühmi on lõplik arv (täpsemalt — 230). See tulemus, milleni teineteisest sõltumatult jõudsid Fjodorov ning Schönfliess, osutus väga tähtsaks kristallograafiale (siit selgub, kust need rühmad endale nime said). Hilbert püstitas ülesande üldistada see tulemus n-mõõtmelisele juhule. Ülesande lahendas Bieberbach aastatel 1910—1912.

Iga liikumiste rühma fundamentaalpiirkonnaks saab valida hulktahuka. Nagu fundamentaalpiirkonna definitsioonist otseselt järeldub, saab sellise hulktahuka kongruentsete eksemplaride abil täita kogu ruumi nii, et erinevatel hulktahukatel ei oleks ühiseid sisepunkte. Kristallograafilistest rühmadest kõneldes püstitas Hilbert veel ka teise küsimuse: kas iga hulktahukas, millel on ülalkirjeldatud omadus, on fundamentaalpiirkonnaks mõnele liikumiste rühmale? Sellele küsimusele andis 1928. aastal negatiivse vastuse Reinhardt.

Üheksateistkümnes ja *kahekümnes probleem*. Hilberti üheksateistkümnes ja kahekümnes probleem moodustavad suure uurimisprogrammi, mis on seotud osatuletistega diferentsiaalvõrranditega ning variatsioonarvutusega ning mille täielikku realiseerimist niipea ei ole ette näha.

Viimases, kahekümne kolmandas probleemis kutsub Hilbert sisuliselt üles edasi arendama variatsioonarvutust.

Lõpetuseks anname veel kord sõna Hilbertile: «Nimetatud probleemid on ainult probleemide näited, aga neid on siiski piisavalt selleks, et selgitada, kui rikas, mitmekülgne ning laiahaardeline on matemaatika (-teadus) juba praegu. Tekib küsimus, kas matemaatika ees seisab kunagi see, mis teiste teadustega toimub ammustest aegadest saadik, kas ta ei lagune mitmeks kitsamaks teadusharuks, mille esindajad saavad üksteisest vaevalt aru ning mille seosed üksteisega jäävad järjest väiksemaks. Ma ei usu sellesse ning ei soovi seda. Matemaatika kujutab endast minu arvates jagamatut tervikut, organismi, mille elujõulisus tuleneb tema osade vahelistest seostest.»

«Nüüd, palju aastaid pärast seda, kui Hilbert oma probleemid püstitas, võib öelda, et nad olid püstitatud hästi. Nad osutusid sobivaks objektiks, et koondada enda ümber erinevaid teaduslikke suundi ning koolkondi esindavate matemaatikute loomingulised pingutused,» nii iseloomustab Hilberti probleeme 1969. aastal akadeemik P. S. Aleksandrov.

MÕNDA TOPOLOOGILISTEST RUUMIDEST

S. Baron

Paljud matemaatilise analüüsi valdkonda kuuluvad probleemid taanduvad normeeritud ruumide ja neist üldisemate meetriliste ruumide (vt. [4]) omaduste uurimisele. Teatavasti saab iga hulka muuta meetriliseks ruumiks, defineerides tema kahe punkti vahelise kauguse mõiste (vt. [2], lk. 387—389). Üheks võimaluseks on nn. diskreetne meetrika, mille korral iga punkti kaugus iseendast on 0 ja iga kahe erineva punkti vaheline kaugus on 1. Diskreetsel meetrilisel ruumil on aga see puudus, et koonduvad ainult need jadad, mis mingist indeksist alates on konstantsed. Praktikas leiab selline ruum harva rakendamist, peamiselt kasutatakse teda teoorias väitevastaste näidete konstrueerimisel.

Seega pole mingi konkreetse probleemi taandamine meetrilise ruumi omadustele mitte alati kerge. Sageli ei saa aga vaadeldavas hulgas X üldse tuua sisse meetrikat nii, et säiliksid hulga X vastava probleemi lahendamiseks vajalikud omadused (siis öeldakse, et X ei ole metriseeruv). Üheks selliseks lihtsaks näiteks on põhifunktsioonide ruum K üldistatud funktsioonide teoorias (vt. näiteks [10], lk. 12—15). Vaatleme veel lihtsamat näidet. Teatavasti defineeritakse reaalarvude ruumis $\mathbf{R} = (-\infty, \infty)$ kaugus ϱ iga kahe punkti $x, y \in \mathbf{R}$ vahel valemiga $\varrho(x, y) = |x - y|$. Mitmel juhul on otstarbekas vaadelda laiemat ruumi, nn. laiendatud reaaltelge $\overline{\mathbf{R}} = [-\infty, \infty]$, mille saame, kui lisame ruumile $\mathbf{R}$ kaks elementi $-\infty$ ja ∞. Ruum $\overline{\mathbf{R}}$ esineb reaalmuutuja funktsioonide teoorias ja integraaliteoorias, kus vaadeldakse mitte ainult tõkestamata funktsioone ja integraale nendest, vaid ka funktsioone väärtustega $-\infty$ ja ∞. Funktsioonaalanalüüsi seisukohalt on $\overline{\mathbf{R}}$ teatavas mõttes isegi parem kui ruum $\mathbf{R}$, sest $\overline{\mathbf{R}}$ on kompanktne (s. t. tema igast jadast saab eraldada koonduva osajada), $\mathbf{R}$ aga mitte (näit. jada $\{n\}$ iga osajada $\{k_n\}$ korral kehtib $k_n \to \infty \notin \mathbf{R}$). Et $\mathbf{R} \subset \overline{\mathbf{R}}$, siis oleks otstarbekas ja loomulik defineerida kaugus hulgas $\overline{\mathbf{R}}$ sama valemiga $\varrho(x, y) = |x - y|$ nagu ruumis $\mathbf{R}$.Sellisel juhul osutuks ruum R ruumi $\overline{R}$ alamruumiks. Seda ei saa aga teha, sest näiteks $\varrho(\infty, 0) = \varrho(-\infty, 0) = \infty \notin R$. Meetrilise ruumi definitsiooni kohaselt peab aga iga kahe elemendi vaheline kaugus olema reaalarv. Märgime, et hulgas $\overline{R}$ võib tegelikult kaugust defineerida mitmel viisil (vt. [6], lk. 44; [9], lk. 99—100), sealhulgas ka nii, et koondumise mõiste säilitaks oma tähenduse, kuid seejuures peab paratamatult mõnede $x, y \in R$ korral nendevaheline kaugus ruumi $\overline{R}$ mõttes erinema nende kaugusest ruumi R mõttes, s. o. suurusest $|x-y|$. Analoogiline on olukord ka kompleksmuutuja funktsioonide teoorias (vt. [8], lk. 16—18).

Juba toodud näidetest on näha, et on vaja meetrilisest ruumist üldisemat ruumi mõistet. Kuidas selleni jõuda? Selleks teeme esialgu mõned kriitilised märkused meetriliste ruumide kohta, analüüsides, kuivõrd palju oleme kasutanud meetrikat. Selgub, et meetrikat oleme kasutanud vähesel määral ja arvulised seosed, mille määrab meetrika, ei etenda reas meetriliste ruumidega seotud küsimustes kuigi suurt osa. Paljudel juhtudel on kõige tähtsam, kuivõrd lähedal on ruumi punktid teineteisele. See on oluline näiteks ruumi elementide jada koonduvuse ning operaatori pidevuse definitsioonis (vt. [5], lk. 35) jm. Nende mõistete definitsioonides mängib suurt osa punkti ümbruse mõiste.

Meetrilises ruumis X nimetatakse punkti $x \in X$ ümbruseks iga lahtist kera $S(x, \varepsilon)$ keskpunktiga x ja raadiusega ε. Jada $\{x_n\} \subset X$ koonduvuse definitsiooni võime esitada näiteks järgmiselt: jada $\{x_n\}$ nimetatakse koonduvaks elemendiks x, s. o. $x_n \to x$, kui iga $\varepsilon > 0$ korral leidub selline N_ε, et $n > N_\varepsilon$ korral $x_n \in S(x, \varepsilon)$. Seega võime koonduva jada mõiste defineerida, kui teame, millised hulgad lugeda punkti ümbruseks. Üldisemalt võib punkti x ümbruseks lugeda iga lahtist hulka, mis sisaldab punkti x. Seega on oluline, millised hulgad on loetud lahtisteks. Nii tulemegi topoloogilise ruumi mõiste juurde, mida harilikult defineeritakse lahtiste hulkade kaudu (kuigi on ka teisi võimalusi, nagu edaspidi näeme).

Topoloogiline ruum on meetrilise ruumi üldistus. Tema esimesed küllalt üldised definitsioonid andsid prantsuse matemaatik M. Frèchet (s. 1878), ungari matemaatik F. Riesz (1880—1956) ja saksa matemaatik F. Hausdorff (1868—1942). Lõplikult andsid topoloogilise ruumi definitsiooni poola matemaatik K. Kuratowski (s. 1896) ja nõukogude matemaatik P. S. Aleksandrov (s. 1896). Topoloogilise ruumi teooria asendamisel on suuri teeneid ka nõukogude matemaatikutel P. S. Urõsonil (1898—1924), A. N. Tihhonovil (s. 1906) jt.

Topoloogilise ruumi (esimene) definitsioon lahtiste hulkade kaudu

Topoloogilise ruumi defineerimisel on lähtekohaks meetrilise ruumi järgmised põhiomadused (vrd. [2], lk. 400—401): *mistahes hulga lahtiste hulkade ühend on lahtine hulk, lõpliku hulga lahtiste hulkade ühisosa on lahtine hulk, tühi hulk ja kogu ruum on lahtised hulgad.* Seepärast antakse järgmine definitsioon.

T o p o l o o g i l i s e k s r u u m i k s nimetatakse hulka X, kui selles on välja eraldatud teatav alamhulkade süsteem $\mathfrak{G}$, nii et on täidetud järgmised tingimused:

1° Kui iga ξ korral $G_\xi \in \mathfrak{G}$, siis $\bigcup\limits_{\xi} G_\xi \in \mathfrak{G}$;

2° Kui $k = 1, \ldots m$ korral $G_k \in \mathfrak{G}$, siis $\bigcap\limits_{k=1}^{m} G_k \in \mathfrak{G}$;

3° $\emptyset \in \mathfrak{G}$, $X \in \mathfrak{G}$.

Süsteemi $\mathfrak{G}$ kuuluvaid hulki nimetatakse l a h t i s t e k s. Tingimused 1°, 2° ja 3° langevad ühte lahtiste hulkade eespool toodud põhiomadustega.

Tingimusi 1°—3° rahuldab näiteks süsteem $\mathfrak{G} = \{\emptyset, X\}$, mis koosneb tühjast hulgast $\emptyset$ ja kogu ruumist X. Seega on X sel korral topoloogiline ruum. Sellist ruumi nimetatakse kokkusulatatud punktide ruumiks ehk triviaalse topoloogiaga ruumiks. Ka süsteem $\mathfrak{G} = \{\emptyset, A, X\}$ rahuldab tingimusi 1°—3°, kui $A \subset X$ on ruumi X mingi pärisosahulk. Seevastu süsteem $\Gamma = \{\emptyset, A, B, X\}$, kus $A, B \subset X$, ei tarvitse rahuldada tingimust 1°, kui ühend $A \cup B \notin \Gamma$. Kui süsteemile Γ lisada hulk $A \cup B$, siis on 1° küll täidetud, kuid üldjuhul pole täidetud tingimus 2°. Kui aga eeldada, et $A \cap B = \emptyset$ või $A \cap B = A$, s. o. $A \subset B$, siis süsteem $\mathfrak{G} = \{\emptyset, A, B, A \cup B, X\}$ rahuldab tingimusi 1°—3° ja X on topoloogiline ruum. Topoloogilise ruumi näiteks on ka nn. s i d u s k a k s i k p u n k t, s. o. kahest punktist koosnev hulk $X = \{a, b\}$, kui võtta $\mathfrak{G} = \{\emptyset, \{b\}, X\}$.

Ruumis $\overline{\mathbf{R}}$ loeme süsteemi $\mathfrak{G}$ kuuluvaks iga hulga, mis avaldab ülimalt loenduva hulga mittelõikuvate selliste hulkade ühendina, millest igaüks on kas mingi vahemik või omab kuju $[-\infty, A)$ või $(B, \infty]$ (vt. [9], lk. 60).

Kuna aga meetrilises ruumis kehtivad lahtiste hulkade omadused 1°—3°, siis on iga meetriline ruum ka topoloogiline ruum. Seevastu ei saa mitte igas topoloogilises ruumis defineerida kaugust kahe punkti vahel (s. o. ei saa ruumi muuta meetriliseks ruumiks) nii, et säiliksid ruumi omadused. Kui aga selline meetrika leidub, siis nimetatakse topoloogilist ruumi m e t r i s e e r u v a k s. P. S. Urõsoni poolt on leitud tingimused, mida peab topoloogiline ruum rahuldama, selleks et ta oleks metriseeruv.

Teatavasti (vt. [2], lk. 401) on meetrilise ruumi osahulk F kinnine parajasti siis, kui tema täiend $\complement F$ on lahtine. Märgime, et suvalise hulga $A \subset X$ täiendiks nimetatakse hulka

$$\complement A = X \setminus A.$$

Seetõttu defineeritaksegi topoloogilises ruumis kinnist hulka kui hulka, mille täiend on lahtine, s. o. $F \subset X$ nimetatakse kinniseks, kui $G = \complement F \in \mathfrak{G}$.

Näiteks on kõigi täisarvude hulk $\mathbf{Z}$ reaalarvude ruumis $\mathbf{R} = (-\infty, \infty)$ kinnine, sest

$$\complement \mathbf{Z} = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} (k, k+1)$$

on omaduse 1° tõttu lahtine, kuna kõik vahemikud $(k, k+1)$ on ruumis $\mathbf{R}$ lahtised (vrd. [4], lk. 18).

Topoloogilise ruumi kinniste hulkade omaduste tuletamisel kasutame täiendi järgmisi omadusi:

$$\complement \bigcup_{\xi} A_{\xi} = \bigcap_{\xi} \complement A_{\xi}, \tag{1}$$

$$\complement \bigcap_{\xi} A_{\xi} = \bigcup_{\xi} \complement A_{\xi}, \tag{2}$$

kus indeksite ξ hulk $\{\xi\}$ on suvaline. Viimaseid valemeid nimetatakse A. de Morgani valemiteks ja nad on aluseks nn. duaalsuse printsiibile. Viimane väljendub selles, et igast teoreemist, mis käib hulkade ühendi või ühisosa kohta, saab automaatselt tuletada duaalse teoreemi, asendades hulgad nende täienditega, ühendid ühisosadega ja ühisosad ühenditega. Seega kehtivad valemid

$$\bigcup_{\xi} A_{\xi} = \complement \bigcap_{\xi} \complement A_{\xi}, \tag{3}$$

$$\bigcap_{\xi} A_{\xi} = \complement \bigcup_{\xi} \complement A_{\xi}, \tag{4}$$

mis järelduvad valemitest (1) ja (2), kui nende mõlemast poolest võtame täiendi ja arvestame, et iga hulga $A \subset X$ korral kehtib $\complement(\complement A) = A$.

Nüüd saame kergesti tuletada kinniste hulkade järgmised põhiomadused (vrd. [2], lk. 401—402): *lõpliku hulga kinniste hulkade ühend on kinnine hulk, mistahes hulga kinniste hulkade ühisosa on kinnine hulk, tühi hulk ja kogu ruum on kinnised hulgad.*

Esimese nendest saame valemi (3) ja tingimuse 2° abil. Nimelt, kui hulgad F_k on kinnised $k = 1, \ldots, m$ korral, siis nende täiendid $\complement F_k$ on lahtised; tingimuse 2° põhjal

$$G = \bigcap_{k=1}^{m} \complement F_k \in \mathfrak{G}.$$

Kasutades valemit (3), saame nüüd, et

$$\bigcup_{k=1}^{m} F_k = \complement \bigcap_{k=1}^{m} \complement F_k = \complement G$$

osutub kinniseks hulgaks.

Analoogiliselt saab valemit (4), täiendi definitsiooni ja lahtiste hulkade kohta esitatud tingimusi kasutades tõestada kinniste hulkade kaks ülejäänud omadust.

Arvestades kinniste hulkade ülaltõestatud omadusi, võib topoloogilise ruumi defineerida ka nende kaudu.

Topoloogilise ruumi (teine) definitsioon kinniste hulkade kaudu

Hulka X nimetatakse topoloogiliseks ruumiks, kui selles on välja eraldatud teatav alamhulkade süsteem $\mathfrak{F}$, nii et on täidetud järgmised tingimused:

1) Kui $k=1, \ldots, m$ korral $F_k \in \mathfrak{F}$, siis $\bigcup_{k=1}^{m} F_k \in \mathfrak{F}$;

2) Kui iga ξ korral $F_\xi \in \mathfrak{F}$, siis $\bigcap_{\xi} F_\xi \in \mathfrak{F}$;

3) $\emptyset \in \mathfrak{F}$; $X \in \mathfrak{F}$;

Süsteemi $\mathfrak{F}$ kuuluvaid hulki nimetatakse kinnisteks. Tingimused 1), 2) ja 3) langevad ühte kinniste hulkade eespool toodud põhiomadustega.

Kuna siin on topoloogilise ruumi definitsioon määranud ainult kõik kinnised hulgad, siis peame lahtised hulgad nende kaudu defineerima. Teeme seda järgmiselt:

Topoloogilise ruumi X osahulka G nimetatakse lahtiseks, kui tema täiend on kinnine, s. t. kui $F = \complement G \in \mathfrak{F}$.

Nüüd saame valemeid (3) ja (4) kasutades tuletada lahtiste hulkade põhiomadused 1°, 2° ja 3°. Nimelt tingimusest 1) järeldub valemi (4) abil tingimus 2°, tingimusest 2) valemi (3) abil tingimus 1°, tingimusest 3) aga tingimus 3°, sest $\complement X = \emptyset$ ja $\complement \emptyset = X$. Varem nägime aga, et tingimustest 1°—3° järelduvad tingimused 1) — 3). Seega on tõestatud topoloogilise ruumi mõlema definitsiooni samaväärsus.

Näidetena vaatame samu ruume, mis enne. Kokkusulatatud punktide ruum X on topoloogiline ruum ka teise definitsiooni järgi, kui võtta $\mathfrak{F} = \{\emptyset, X\}$. Ka süsteem $\mathfrak{F} = \{\emptyset, A, X\}$, kus $A \subset X$, rahuldab tingimusi 1) —3). Süsteem $\mathfrak{F} = \{\emptyset, A, B, A \cup B, X\}$, kus $A, B \subset X$, rahuldab tingimusi 1)—3) juhul, kui $A \cap B = \emptyset$ või $A \cap B = A$; süsteem $\mathfrak{F} = \{\emptyset, A, B, A \cap B, X\}$ aga eeldusel $A \cup B = X$ või $A \cap B = A$. Viimasel juhul paistab, nagu peaks võtma $\mathfrak{F} = \{\emptyset, \complement A, \complement B, \complement A \cap \complement B, X\}$, aga pole mõtet konkretiseerimata hulkade $A, B \subset X$ korral vaadelda nende täiendeid $\complement A$, $\complement B \subset X$. Ka sidus kaksikpunkt on topoloogiline ruum teise definitsiooni järgi, kui võtta $\mathfrak{F} = \{\varnothing, \{a\}, X\}$.

Teiste mõistete definitsioonid jäävad kehtima nagu topoloogilise ruumi esimese definitsiooni korral. Näiteks iga lahtist hulka $U(x) \subset X$, mis sisaldab punkti $x \in X$, nimetatakse punkti x ümbruseks.

Nüüd võime täpsemalt iseloomustada mingile hulgale $A \subset X$ «lähedasi» punkte. Selliseid punkte nimetatakse hulga A puutepunktideks ja defineeritakse järgmiselt:

Punkti $x \in X$ nimetatakse hulga $A \subset X$ puutepunktiks, kui punkti x igas ümbruses $U(x)$ on vähemalt üks hulga A punkt, s. t. kui $A \cap U(x) \neq \varnothing$ punkti x iga ümbruse $U(x)$ korral.

Kui ühisosas $A \cap U(x)$ on iga ümbruse $U(x)$ korral mingi punkt $y \neq x$, siis nimetatakse punkti x hulga A kuhjumispunktiks. Hulga A kuhjumispunkt (ja järelikult ka puutepunkt) x võib hulka A kuuluda või ka mitte kuuluda. Kui aga mõne ümbruse $U(x)$ korral ühisosa $A \cap U(x)$ koosneb ainult punktist x, siis hulga A puutepunkt $x \in A$ ei ole A kuhjumispunkt.

Hulga A kõigi kuhjumispunktide hulka nimetatakse hulga A tuletishulgaks ja tähistatakse A'. Hulga A kõigi puutepunktide hulka nimetatakse hulga A sulundiks ja tähistatakse[1] $[A]$. Järelikult koosneb hulga A sulund $[A]$ hulga A kõigist punktidest ja hulga A kõigist kuhjumispunktidest. Seega $[A] = A \cup A'$, kust $A \subset [A]$. Ka näeme, et $[X] = X \cup X' = X$ ning $[\varnothing] = \varnothing \cup \varnothing' = \varnothing$. Sulundi definitsioonist järeldub otseselt järgmine sulundi monotoonsuse omadus: kui $A \subset B$, siis $[A] \subset [B]$ (tõestada!).

Hulga sulundil on järgmised põhiomadused:

a) $[A \cup B] = [A] \cup [B]$,

b) $A \subset [A]$,

c) $[\varnothing] = \varnothing$,

d) $[[A]] = [A]$.

Neid omadusi võime sõnastada nii: *kahe hulga ühendi sulund langeb ühte nende hulkade sulundite ühendiga, iga hulk sisaldub oma sulundis, tühja hulga sulund on tühi hulk, hulga sulundi sulund langeb ühte hulga sulundiga.*

Lähme üle tõestamisele. Omadused b) ja c), nagu nägime, järelduvad otseselt sulundi definitsioonist. Omaduste a) ja d) tõestamiseks tõestame sulundi järgmise omaduse.

Hulk A on kinnine parajasti siis, kui $[A] = A$.

Tõestus. Olgu A kinnine hulk topoloogilises ruumis X. Siis CA on lahtine hulk. Seega on igal punktil $x \in CA$ selline ümbrus $U(x)$, et $A \cap U(x) = \varnothing$ (võime ju võtta näiteks $U(x) = CA$).

[1] Hulga A sulundit tähistatakse ka sümbolitega $\bar{A}$ ja $\mathrm{cl}\,A$.

Seega saime, et ükski punkt $x \in CA$ ei kuulu sulundisse $[A]$. Järelikult[2] $[A] \subset A$, mis koos omadusega b) annab $[A] = A$.

Olgu nüüd $[A] = A$. Näitame, et A on kinnine, s. o. et CA on lahtine. Et $[A] = A$, siis juhul $x \notin A$, s. o. $x \in CA$ leidub ümbrus $V(x)$, nii et $A \cap V(x) = \varnothing$. Järelikult $V(x) \subset CA$. Seega CA, olles oma punktide x selliste ümbruste $V(x)$ (mis on lahtised hulgad) ühend, on lahtine.

Tõestatud omadusest järeldub otseselt, et hulk A on kinnine parajasti siis, kui tema tuletishulk $A' \subset A$. Tõepoolest, seos $A \cup A' = [A] = A$ on samaväärne seosega $A' \subset A$.

Nüüd võime tõestada põhiomaduse d). Omadusest b) järeldub, et $[A] \subset [[A]]$ iga $A \subset X$ korral. Jääb näidata, et kehtib ka vastupidine sisalduvus. Selleks võtame suvalise punkti $x \in [[A]]$ ja tema suvalise ümbruse $U(x)$. Siis leidub sulundi definitsiooni põhjal ümbruses $U(x)$ vähemalt üks punkt $y \in [A]$. Et $U(x)$ on ka punkti y ümbrus, siis $U(x) \cap A \neq \varnothing$. Kuna $U(x)$ oli punkti x suvaline ümbrus, siis $x \in [A]$. Seega $[[A]] \subset [A]$ ja omadus d) on tõestatud.

Et hulk A on kinnine parajasti siis, kui $A = [A]$, siis põhiomadus d) ütleb, et *sulund* $[A]$ *on kinnine hulk*. Veel enam: *sulund* $[A]$ *on vähim kinnine hulk, mis sisaldab* A, s. o. suvalise kinnise hulga $F \supset A$ korral kehtib $F \supset [A]$. Tõepoolest, kui $A \subset F$, siis sulundi monotoonsuse tõttu $[A] \subset [F] = F$, sest F on kinnine.

Veendume põhiomaduse a) kehtivuses.

Olgu A ja B suvalised hulgad topoloogilises ruumis X. Tähistame $F = [A] \cup [B]$. Kuna $A \subset A \cup B$, siis sulundi monotoonsuse tõttu $[A] \subset [A \cup B]$. Analoogiliselt $[B] \subset [A \cup B]$. Järelikult $F \subset [A \cup B]$. Teiselt poolt on F kinnine ja omaduse b) tõttu $F \supset A \cup B$, kuid sulund $[A \cup B]$ on vähim kinnine hulk, mis sisaldab $A \cup B$. Seega $F \supset [A \cup B]$, mis tõestabki põhiomaduse a).

Arvestades hulga sulundi põhiomadusi võib topoloogilise ruumi defineerida ka sulundi kaudu.

Topoloogilise ruumi (kolmas) definitsioon hulga sulundi kaudu

T o p o l o o g i l i s e k s r u u m i k s nimetatakse hulka X, kui igale osahulgale $A \subset X$ on seatud vastavusse osahulk $[A] \subset X$ nii, et on täidetud tingimused a), b), c) ja d). Hulka $[A]$ nimetatakse hulga A s u l u n d i k s.

Selles definitsioonis on võetud aluseks hulga sulundi mõiste. Järelikult peame kõik teised topoloogilised mõisted defineerima sulundi kaudu, nii et need definitsioonid oleksid kooskõlas eelmiste definitsioonide ja omadustega. Seepärast nimetatakse (topo-

[2] Sisalduvust $B \subset C$ võib tõestada ka nii: iga punkti $x \notin C$ korral $x \notin B$.

loogilise ruumi kolmanda definitsiooni puhul) hulka $A \subset X$ k i n n i s e k s, kui $[A] = A$. Põhiomadus d) ütleb, et *sulund on kinnine hulk*. Nagu ennegi, nimetatakse hulka A l a h t i s e k s, kui tema täiend $\complement A$ on kinnine. Antud juhul täiendab see, et $[\complement A] = \complement A$ ehk $A = \complement[\complement A]$.

Näitame, et topoloogilise ruumi uus definitsioon on samaväärne eelmistega. Arvestades, et tingimused a) — d) järelduvad tingimustest 1) — 3), jääb meil vaid näidata vastupidist järeldumist. Selleks näitame, et tingimusest a) järeldub otseselt hulga sulundi monotoonsus. Tõepoolest, sisalduvus $A \subset B$ on samaväärne seosega $B = A \cup B$. Omaduse a) põhjal kehtib siis $[B] = [A \cup B] = [A] \cup [B]$, mis on samaväärne sisalduvusega $[A] \subset [B]$.

Näitame tingimuse 1) kehtivust. Olgu A ja B kinnised hulgad. Siis $A = [A]$ ja $B = [B]$, kust tingimuse a) põhjal $[A \cup B] = [A] \cup [B] = A \cup B$. Seega oleme tõestanud, et kahe (järelikult iga lõpliku arvu) kinniste hulkade ühend on kinnine hulk.

Veendume tingimuse 2) kehtivuses. Olgu $\{\xi\}$ indeksite suvaline hulk ja kehtigu iga ξ korral sellest hulgast $A_\xi = [A_\xi]$ (s. t. A_ξ on kinnine). Näitame, et hulkade A_ξ ühisosa on kinnine, s. t.

$$[\bigcap_\xi A_\xi] = \bigcap_\xi A_\xi.$$

Sisalduvus $[\bigcap_\xi A_\xi] \supset \bigcap_\xi A_\xi$ järeldub tingimusest b). Jääb näidata vastupidine sisalduvus. Tõepoolest, iga $\eta \in \{\xi\}$ korral $\bigcap_\xi A_\xi \subset A_\eta$ (ühisosa definitsiooni põhjal) ja sulundi monotoonsuse tõttu kehtib $[\bigcap_\xi A_\xi] \subset [A_\eta]$. Indeksi η suvalisuse tõttu kehtib siis $[\bigcap_\xi A_\xi] \subset \bigcap_\xi [A_\xi] = \bigcap_\xi A_\xi$, mida oligi vaja näidata.

Tingimus c) ütleb, et $\emptyset$ on kinnine. Tingimusest b) järeldub $X \subset [X]$ ja kuna $[X]$ on ruumi X osahulk, siis ka $[X] \subset X$. Seega on X kinnine.

Topoloogilise ruumi (neljas) definitsioon punkti ümbruste kaudu

Sageli muudetakse hulk X t o p o l o o g i l i s e k s r u u m i k s, määrates hulgas X punkti ümbruse mõiste. Seda tehakse järgmiselt (vrd. [1], lk. 7).

Olgu igale punktile $x \in X$ seatud vastavusse hulga X mingi osahulkade süsteem $\mathfrak{B}(x) = \{U(x)\}$, mis sisaldab vähemalt ühe osahulga $U(x)$. Hulki $U(x)$ sellest süsteemist nimetame punkti x ü m b r u s t e k s.

Hulka X nimetatakse t o p o l o o g i l i s e k s r u u m i k s, kui hulgad U nimetatud süsteemidest $\mathfrak{B}(x)$ rahuldavad tingimusi:

A) $x \in U(x)$ iga punkti x ja iga tema ümbruse $U(x)$ korral;

B) iga punkti mistahes kahe ümbruse ühisosa sisaldab selle punkti mingi ümbruse, s. t. kui $U_1, U_2 \in \mathfrak{B}(x)$, siis leidub selline $U \in \mathfrak{B}(x)$, et $U \subset U_1 \cap U_2$;

C) kui $y \in U(x)$, siis leidub punkti y selline ümbrus $U(y) \in \in \mathfrak{B}(y)$, et $U(y) \subset U(x)$.

Tingimus C) ütleb, et hulk $U(x)$ sisaldab koos iga oma punktiga y ka selle punkti mingi ümbruse. Järelikult (vrd. [4], lk. 18; [2], lk. 400) võime ümbrused $U(x)$ nimetada l a h t i s t e k s hulkadeks ruumis X.

Näiteks meetrilises ruumis võib lugeda $U(x) = S(x, r)$, s. t. võib punkti x ümbrusteks $U(x)$ võtta lahtised kerad $S(x, r)$ iga $r > 0$ korral.

Näitame, et tingimused A) — C) on samaväärsed topoloogilise ruumi definitsiooniga.

Olgu X — topoloogiline ruum ja $U(x)$ punkti x ümbrus, s. t. punkti x sisaldav lahtine hulk. Siis on A) täidetud. Tingimus B) on ka täidetud, sest hulk $U_1 \cap U_2$ sisaldab punkti x ja on lahtine tingimuse 2° tõttu. Seega võime võtta $U = U_1 \cap U_2$. Tingimuse C) täidetus on ilmne, võime ju võtta $U(y) = U(x)$.

Näitame nüüd, et tingimuste A), B) ja C) kaudu võib ruumis X defineerida hulga $A \subset X$ sulundi nii, et oleksid täidetud tingimused a) — d). Selleks tuleb hulga p u u t e p u n k t defineerida nii nagu eespool ja hulga s u l u n d kui tema puutepunktide hulk. Tingimuste b) ja c) täidetus on siis ilmne.

Näitame, et on täidetud tingimus d), milleks tingimuse b) tõttu piisab sisalduvusest $[[A]] \subset [A]$. Selleks võtame suvalise punkti $x \in [[A]]$. Et sulundi definitsiooni tõttu $[A] \cap U(x) \neq \emptyset$ iga $U(x)$ korral, siis $[A]$ sisaldab vähemalt ühe punkti $y \in U(x)$ (mõnikord võib kehtida $y = x$). Et $y \in U(x)$, siis leidub tingimuse C) põhjal ümbrus $U(y) \subset U(x)$. Kuna aga $y \in [A]$, siis leidub punkt $z \in A \cap U(y) \subset A \cap U(x)$. Et aga $U(x)$ oli punkti x suvaline ümbrus, siis oleme saanud $x \in [A]$, mida oligi vaja näidata.

Jääb näidata tingimuse a) kehtivust. Näitame kõigepealt, et $[A \cup B] \subset [A] \cup [B]$. Selleks võtame suvalise $x \in [A \cup B]$. Juhul, kui kehtib $x \in [A] \subset [A] \cup [B]$, siis on x kuuluvus hulka $[A] \cup \cup [B]$ tõestatud. Oletame, et $x \notin [A]$. Siis leidub vähemalt üks selline $U_1 = U_1(x)$, et $A \cap U_1 = \emptyset$. Analoogiliselt, kui $x \notin [B]$, siis leidub selline ümbrus $U_2 = U_2(x)$, et $B \cap U_2 = \emptyset$. Tingimuse B) põhjal leidub selline $U \in \mathfrak{B}(x)$, et $U \subset U_1 \cap U_2$. Järelikult $U \cap (A \cup B) = \emptyset$, mis räägib vastu oletusele $x \in [A \cup B]$.

Näitame ka vastupidise sisalduvuse $[A] \cup [B] \subset [A \cup B]$. Võtame suvalise punkti $y \in [A] \cup [B]$. Siis iga ümbruse $V = = V(y) \in \mathfrak{B}(y)$ korral kehtib $A \cap V \neq \emptyset$ või $B \cap V \neq \emptyset$. Järelikult $V \cap (A \cup B) = (V \cap A) \cup (V \cap B) \neq \emptyset$, mis tähendabki, et $y \in \in [A \cup B]$. Seega järelduvad tingimustest A) — C) kõik tingimused a) — d) ja X on järelikult topoloogiline ruum.

Märgime, et topoloogilise ruumi defineerimiseks on ka teisi võimalusi. Võib näiteks lähtuda tuletishulga mõistest (vt. [7], lk. 17—24).

Hausdorffi ruumid

Topoloogilised ruumid, mis rahuldavad ülalnimetatud tingimusi, võivad olla kas primitiivsed või, vastupidi, nii keerulised, et erinevad liiga palju meetrilistest ruumidest ja nendes ei saa arendada funktsionaalanalüüsi. Seepärast nõutakse, et topoloogilised ruumid rahuldaksid veel täiendavaid tingimusi. Sellisteks lisatingimusteks on nn. eralduvustingimused. Vaatleme kahte nendest.

Topoloogilist ruumi X nimetatakse T_1-ruumiks, kui vastavalt igale kahele erinevale punktile $x, y \in X$ leidub punkti x ümbrus $U(x)$, mis ei sisalda punkti y, s. t. $U(x) \not\ni y$, ja vastupidi, leidub ka $U(y) \not\ni x$ (vt. joon. 1).

On kerge näha, et *topoloogiline ruum on T_1 ruum parajasti siis, kui tema iga ühepunktiline hulk on kinnine*. Tõepoolest, kui X on T_1-ruum, siis ükski $y \neq x \in X$ ei saa olla ühepunktilise hulga $\{x\}$ puutepunktiks, sest leidub ümbrus $U(y) \not\ni x$, s. o. $U(y) \cap \{x\} = \emptyset$. Järelikult, $[\{x\}] = \{x\}$ ja $\{x\}$ on kinnine. Vastupidi, kui iga ühepunktiline hulk ruumis X on kinnine, siis iga $x, y \in X$ korral on täiendid $\complement\{x\}$ ja $\complement\{y\}$ lahtised ning $y \neq x$ korral on hulgad $\complement\{x\}$ ja $\complement\{y\}$ vastavalt y ja x ümbrusteks, mis ütlebki, et X on T_1-ruum.

Viimase kriteeriumi rakendusena veendume, et *sidus kaksikpunkt $X = \{a, b\}$ ei ole T_1-ruum*. Tõepoolest, ruumis X on ühepunktiline hulk $\{a\}$ küll kinnine, ühepunktiline hulk $\{b\}$ aga mitte. Seega X pole T_1-ruum.

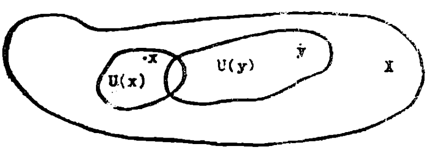
Vaatleme veel kitsamat ruumide klassi kui T_1-ruumid.

Topoloogilist ruumi nimetatakse T_2-ruumiks ehk Hausdorffi ruumiks, kui iga kahe erineva punkti $x, y \in X$ korral leiduvad nende ümbrused $U(x)$ ja $U(y)$, mis ei lõiku, s. o. $U(x) \cap U(y) = \emptyset$ (vt. joon. 2).

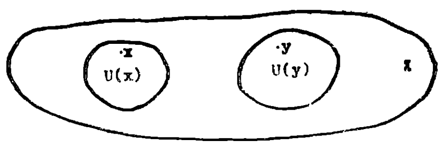
Iga meetriline ruum on T_2-ruum (vt. näiteks [3], lk. 41, teoreem 8).

Hausdorffi ruumid on eriti tähtsad selle poolest, et nendes, nagu peatselt näeme, võib jada koonduda ainult üheks elemendiks.

Jada koonduvust topoloogilises ruumis defineeritakse samuti kui meetrilises ruumis (vrd. [4], lk. 5). Topoloogilise ruumi X elementide x_n jada $\{x_n\}$ nimetatakse koonduvaks elemendiks



Joonis 1.



Joonis 2.

$x \in X$ (tähistatakse $x_n \to x$), kui punkti x iga ümbruse $U = U(x)$ korral leidub selline indeks N_U, et $n > N_U$ korral $x_n \in U$ (järelikult sisaldab U jada $\{x_n\}$ kõik punktid, välja arvatud lõplik hulk neist).

Osutub aga, et isegi T_1-ruumis võib jada koonduda mitmeks elemendiks. Näiteks olgu $X = \{x_n\}$-suvaline loenduv (s. t. kordamisi mittesisaldava jadana esitatav) hulk. Nimetame kinnisteks hulkadeks $\emptyset$, kõik lõplikud hulgad $\{x_{n_1}, \ldots, x_{n_m}\} \subset X$ ja X. Siis on X topoloogiline ruum, milles võib veenduda vahetult, kasutades teist definitsiooni, ning kuna üheelemendilised (kui lõplikud) hulgad on kinnised, siis X on T_1-ruum. Punkti $x \in X$ ümbrusteks on kogu ruum X ja hulgad $X \setminus \{x_{n_1}, \ldots, x_{n_m}\}$, $x \notin \{x_{n_1}, \ldots, x_{n_m}\}$. Järelikult sisaldab suvalise punkti suvaline ümbrus jada $\{x_n\}$ kõik liikmed, välja arvatud lõplik hulk neist. Seega võib ruumis X jada koonduda ruumi X igaks elemendiks.

Hausdorffi ruumis on selline olukord võimatu, nagu näitab järgmine teoreem.

Kui X on Hausdorffi ruum, siis ruumis X võib jada koonduda ainult üheks elemendiks. Tõepoolest, kui $x_n \to x$ ja $y \neq x$, siis (T_2-ruumi definitsiooni järgi) leiduvad ümbrused $U = U(x)$ ja $V = V(y)$, mis ei lõiku: $U \cap V = \emptyset$. Leidub indeks N_U, nii et $n > N_U$ korral $x_n \in U$. Järelikult $x_n \notin V$, kui $n > N_U$, mis ütleb, et jada $\{x_n\}$ ei koondu elemendiks y.

Kasutatud kirjandus

1. Kangro, G. Kaasaegse matemaatilise analüüsi mõned iseloomulikud jooned. — Matemaatika ja kaasaeg, V, lk. 3—13.
2. Kangro, G. Matemaatiline analüüs. II osa. Tln., 1968.
3. Kull, I. Reaalmuutuja funktsioonide teooria. Trt., 1963.
4. Vainikko, G. Mõnda funktsionaalanalüüsist, I. — Matemaatika ja kaasaeg, XVI, lk. 3—19.
5. Vainikko, G. Mõnda funktsionaalanalüüsist, II. — Matemaatika ja kaasaeg, XVII, lk 35—43.
6. Дедонне Ж. Основы современного анализа. М., 1964.
7. Стоилов С. Лекции о топологических принципах теории аналитических функций. М., 1964.
8. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. М., 1969.
9. Шварц Л., Анализ, том 1. М., 1972.
10. Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс. М., 1965.

SÜMMEETRILISED POLÜNOOMID

H. Espenberg

Mõnede algebraliste ülesannete lahendamine lihtsustub oluliselt, kui kasutada nn. **sümmeetrilisi polünoome**. Alljärgnevas tutvustame kahe ja kolme muutuja sümmeetrilisi polünoome ning esitame nende rakendusi.[1]

Kahe muutuja sümmeetrilised polünoomid

Kahe muutuja polünoomi $P(x, y)$ nimetame sümmeetriliseks, kui

$$P(x, y) = P(y, x).$$

Sümmeetrilisteks polünoomideks on näiteks $x^3 + y^3$, $x^2y + xy^2 + 1$, $(x + y)(xy - 1)$, sest $x^3 + y^3 = y^3 + x^3$ jne. Polünoom $x^2 - 2y + 3$ aga ei ole sümmeetriline, sest $x^2 - 2y^2 + 3 \not\equiv y^2 - 2x^2 + 3$.

Polünoome

$$\sigma_1 = x + y \quad \text{ja} \quad \sigma_2 = xy,$$

nimetatakse **sümmeetrilisteks põhipolünoomideks**. Nende tähtsuse toob esile **sümmeetriliste polünoomide põhiteoreem**:[2]

iga kahe muutuja sümmeetriline polünoom on esitatav muutujate σ_1 ja σ_2 polünoomina.

Näide 1. *Esitada sümmeetriline polünoom $x^2 + xy + y^2$ põhipolünoomide kaudu.*

Siin

$$x^2 + xy + y^2 = (x + y)^2 - xy = \sigma_1^2 - \sigma_2.$$

Näide 2. *Esitada sümmeetriline polünoom $x^3 - xy + y^3$ põhipolünoomide kaudu.*

Vastuseni jõuame järgmiste teisenduste abil:

$$x^3 - xy + y^3 = (x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) - 3x^2y - 3xy^2 - xy =$$
$$= (x + y)^3 - 3xy(x + y) - xy = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 - \sigma_2.$$

---

[1] Täiendavat materjali võib lugeja leida raamatust [3].

[2] Põhiteoreemi tõestuse võib leida raamatust [3], lk. 10—13. Põhiteoreemi tõestus üldjuhul, s. o. n muutuja sümmeetriliste polünoomide kohta, on esitatud õpikus [1], lk. 263—264.

Selgitame nüüd, kuidas avalduvad σ_1 ja σ_2 kaudu astmesummad, s. o. polünoomid $s_n = x^n + y^n$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$.

On kerge veenduda, et

$$\sigma_1 s_{k-1} - \sigma_2 s_{k-2} = s_k. \qquad (1)$$

Tõepoolest

$$\sigma_1 s_{k-1} - \sigma_2 s_{k-2} = (x+y)(x^{k-1}+y^{k-1}) - xy(x^{k-2}+y^{k-2}) =$$
$$= x^k + xy^{k-1} + yx^{k-1} + y^k - yx^{k-1} - xy^{k-1} = x^k + y^k = s_k.$$

Et $s_0 = x^0 + y^0 = 2$ ja $s_1 = x + y = \sigma_1$, siis valemi (1) põhjal

$$s_2 = \sigma_1 s_1 - \sigma_2 s_0 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2,$$
$$s_3 = \sigma_1 s_2 - \sigma_2 s_1 = \sigma_1(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) - \sigma_2\sigma_1 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2,$$
$$s_4 = \sigma_1 s_3 - \sigma_2 s_2 = \sigma_1(\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2) - \sigma_2(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) =$$
$$= \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2.$$

Analoogiliselt jätkates saame koostada astmesummade tabeli:

$$s_0 = 2,$$
$$s_1 = \sigma_1,$$
$$s_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2,$$
$$s_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2,$$
$$s_4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2,$$
$$s_5 = \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2,$$
$$s_6 = \sigma_1^6 - 6\sigma_1^4\sigma_2 + 9\sigma_1^2\sigma_2^2 - 2\sigma_2^3,$$
$$s_7 = \sigma_1^7 - 7\sigma_1^5\sigma_2 + 14\sigma_1^3\sigma_2^2 - 7\sigma_1\sigma_2^3,$$
$$s_8 = \sigma_1^8 - 8\sigma_1^6\sigma_2 + 20\sigma_1^4\sigma_2^2 - 16\sigma_1^2\sigma_2^3 + 2\sigma_2^4, \text{ jne.}$$

Võrrandisüsteemide lahendamine

Kõrgema astme algebraliste võrrandisüsteemide lahendamisel on üheks sagedamini kasutatavaks meetodiks asendusvõte. Kahe võrrandi süsteemi korral on asendusvõte rakendatav ainult sel juhul, kui süsteemi ühest võrrandist (ükskõik kummast) saab avaldada ühe tundmatu. Asendusvõtte puuduseks on, et ta taandab süsteemi lahendamise ühe kõrgema astme võrrandi lahendamisele.[3]

Nimetatud põhjustel ei õnnestu alati lahendada süsteemi asendusvõttega. Neil juhtudel püütakse ülesannet lahendada kunstlike võtete abil. Sobivate võtete leidmine pole aga sugugi lihtne. Seepärast kujutabki kõrgema astme võrrandisüsteemi lahendamine mõnikord lausa «matemaatilist pähklit».

N ä i d e 3. *Lahendada süsteem*

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7, \\ x^3 + y^3 = 35. \end{cases}$$

[3] Kui süsteemi võrrandite astmed on m ja n, siis asendusvõtte rakendamisel jõuame mn astme võrrandini.

Ülesannete kogus [2] antakse sellele ülesandele järgmine lahendus. Teise võrrandi vasaku poole lahutame tegureiks $(x+y)(x^2-xy+y^2)$ ja seejärel jagame teise võrrandi esimesega. Saame $x+y=5$. Esimese võrrandi mõlemale poolele liidame $3xy$. Saame $(x+y)^2=7+3xy$. Arvestades, et $x+y=5$, saame siit $xy=6$. Nüüd lahendame süsteemi

$$\begin{cases} x+y=5, \\ xy=6 \end{cases}$$

ja saame lähtesüsteemi lahendeiks

$$\begin{cases} x_1=3, \\ y_1=2, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2=2, \\ y_2=3. \end{cases}$$

N ä i d e 4. *Lahendada süsteem*

$$\begin{cases} x^4+3x^2y^2+y^4=109, \\ x^2+y^2+xy=13. \end{cases}$$

Selle süsteemi autoripoolne lahendus (vt. [6], ülesanne 198) on järgmine. Süsteemi esimese võrrandi esitame kujul $(x^2+y^2)^2+x^2y^2=109$. Tähistades $u=x^2+y^2$ ja $v=xy$, saab süsteemile anda kuju

$$\begin{cases} u^2+v^2=109, \\ u+v=13. \end{cases}$$

Teisest võrrandist avaldame u ja asendame esimeses võrrandis u saadud avaldisega. Saame

$$(13-v)^2+v^2=109,$$
$$v^2-13v+30=0.$$

Siit $v_1=10$, $v_2=3$, $u_1=3$, $u_2=10$.
Seega taandub lähtesüsteem süsteemideks:

$$\begin{cases} x^2+y^2=10, \\ xy=3 \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} x^2+y^2=3, \\ xy=10. \end{cases}$$

Lahendame neist esimese. Selleks korrutame teist võrrandit teguriga 2 ning saadud võrrandi liidame ükskord esimese võrrandiga ja teinekord lahutame esimesest võrrandist. Tulemuseks saame süsteemi

$$\begin{cases} (x+y)^2=16, \\ (x-y)^2=4, \end{cases}$$

mis omakorda taandub neljaks lineaarseks võrrandisüsteemiks

$$\begin{cases} x+y=\pm 4, \\ x-y=\pm 2. \end{cases}$$

Lahendades need süsteemid saame

$$\begin{cases} x_1=3, \\ y_1=1, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=1, \\ y_2=3, \end{cases} \quad \begin{cases} x_3=-3, \\ y_3=-1, \end{cases} \quad \begin{cases} x_4=-1, \\ y_4=-3. \end{cases}$$

Analoogiliselt lahendub teine süsteem. Tema lahendid on

$$\begin{cases} x_5 = \frac{1}{2}(\sqrt{23} + i\sqrt{17}), \\ y_5 = \frac{1}{2}(\sqrt{23} - i\sqrt{17}), \end{cases} \qquad \begin{cases} x_6 = \frac{1}{2}(-\sqrt{23} - i\sqrt{17}) \\ y_6 = \frac{1}{2}(-\sqrt{23} + i\sqrt{17}), \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_7 = \frac{1}{2}(\sqrt{23} - i\sqrt{17}), \\ y_7 = \frac{1}{2}(\sqrt{23} + i\sqrt{17}), \end{cases} \qquad \begin{cases} x_8 = \frac{1}{2}(-\sqrt{23} + i\sqrt{17}), \\ y_8 = \frac{1}{2}(-\sqrt{23} - i\sqrt{17}). \end{cases}$$

Mõlemad näitena toodud süsteemid on lahendatavad sümmeetriliste polünoomide abil.

Kui süsteemi

$$\begin{cases} P(x, y) = 0, \\ Q(x, y) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

võrrandite vasakud pooled on sümmeetrilised polünoomid, siis avaldame nad sümmeetriliste põhipolünoomide σ_1 ja σ_2 kaudu. Süsteem (2) võtab kuju

$$\begin{cases} P_1(\sigma_1, \sigma_2) = 0, \\ Q_1(\sigma_1, \sigma_2) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Süsteemi (3) lahendamisel leiame σ_1 ja σ_2 arvulised väärtused ning nende põhjal omakorda x ja y arvulised väärtused. Seega on viimaseks sammuks süsteemi

$$\begin{cases} x + y = \sigma_1, \\ xy = \sigma_2 \end{cases} \tag{4}$$

lahendamine tundmatute x ja y suhtes. Vieta teoreemi põhjal süsteemi (4) rahuldavad x ja y väärtused on ruutvõrrandi

$$z^2 - \sigma_1 z + \sigma_2 = 0$$

lahendeiks. Kui selle ruutvõrrandi lahendeiks on z_1 ja z_2, siis süsteemi (4) lahendeiks on

$$\begin{cases} x_1 = z_1, \\ y_1 = z_2 \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} x_2 = z_2, \\ y_2 = z_1. \end{cases}$$

Rakendame kirjeldatud meetodit eespool kunstlike võtete abil lahendatud süsteemide lahendamiseks.

N ä i d e 5. *Lahendada süsteem*

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7, \\ x^3 + y^3 = 35. \end{cases}$$

Muutujatele σ_1 ja σ_2 üleminekuks kasutame astmesummade tabelit. Saame

$$\begin{cases} \sigma_1^2 - 3\sigma_2 = 7, \\ \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 = 35. \end{cases}$$

Avaldades esimesest võrrandist σ_2 ja asendades σ_2 saadud avaldisega teises võrrandis, saame

$$\sigma_1^3 - \sigma_1^3 + 7\sigma_1 = 35.$$

Siit $\sigma_1 = 5$ ja järelikult $\sigma_2 = 6$. Nüüd tuleb lahendada süsteem

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 6, \end{cases}$$

mis on taandatav ruutvõrrandi $z^2 - 5z + 6 = 0$ lahendamisele. Lähtesüsteemi lahendeiks saame

$$\begin{cases} x_1 = 2, \\ y_1 = 3, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = 3, \\ y_2 = 2. \end{cases}$$

Näide 6. Teine eespool juba lahendatud süsteem

$$\begin{cases} x^4 + 3x^2y^2 + y^4 = 109, \\ x^2 + y^2 + xy = 13 \end{cases}$$

võtab üleminekul muutujatele σ_1 ja σ_2 kuju

$$\begin{cases} \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 5\sigma_2^2 = 109, \\ \sigma_1^2 - \sigma_2 = 13. \end{cases}$$

Avaldades siin teisest võrrandist σ_2 ja asendades σ_2 saadud avaldisega esimeses võrrandis, jõuame biruutvõrrandini

$$\sigma_1^4 - 39\sigma_1^2 + 368 = 0,$$

mille lahendeiks on $\sigma_1 = \pm 4$, $\pm\sqrt{23}$.

Vastavad σ_2 väärtused on:

$$\begin{cases} \sigma_1 = \pm 4, \\ \sigma_2 = 3, \end{cases} \qquad \begin{cases} \sigma_1 = \pm\sqrt{23}, \\ \sigma_2 = 10. \end{cases}$$

Lahendades need neli süsteemi x ja y suhtes (kasutades ruutvõrrandit $z^2 - \sigma_1 z + \sigma_2 = 0$), saamegi süsteemi kõik kaheksa lahendit.

Lisame veel paar näidet.

Näide 7. *Lahendada süsteem* [4]

$$\begin{cases} x^3 + x^3y^3 + y^3 = 17, \\ x + xy + y = 5. \end{cases}$$

Minnes üle muutujatele σ_1 ja σ_2 saame süsteemi

$$\begin{cases} \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^3 = 17, \\ \sigma_1 + \sigma_2 = 5, \end{cases}$$

[4] Vt. [4], ülesanne 985. Ülesannete kogus antud vastuses esineb viga.

mille lahenditeks on $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 3$.
Seega jõuame süsteemideni

$$\begin{cases} \sigma_1 = 2, \\ \sigma_2 = 3, \end{cases} \qquad \begin{cases} \sigma_1 = 3, \\ \sigma_2 = 2. \end{cases}$$

Esimene neist süsteemidest annab (arvestades, et võrrandi $z^2 - 2z + 3 = 0$ lahendid on $z = 1 \pm i\sqrt{2}$)

$$\begin{cases} x_1 = 1 + i\sqrt{2}, \\ y_1 = 1 - i\sqrt{2}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = 1 - i\sqrt{2}, \\ y_2 = 1 + i\sqrt{2}. \end{cases}$$

Teisest süsteemist saame

$$\begin{cases} x_3 = 1, \\ y_3 = 2, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_4 = 2, \\ y_4 = 1. \end{cases}$$

Näide 8. *Lahendada süsteem*[5]

$$\begin{cases} x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 341, \\ x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 330. \end{cases}$$

Asendusega $u = \sqrt{x}$, $v = \sqrt{y}$ jõuame süsteemini

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = 341, \\ u^2v + uv^2 = 330, \end{cases}$$

milles võrrandite vasakuteks poolteks on sümmeetrilised polünoomid u ja v suhtes. Minnes üle sümmeetrilistele põhipolünoomidele $\sigma_1 = u + v$, $\sigma_2 = uv$, saame

$$\begin{cases} \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 = 341, \\ \sigma_1\sigma_2 = 330. \end{cases}$$

Siit $\sigma_1^3 = 1331$ ja $\sigma_1 = 11$ (piirdudes σ_1 reaalsete väärtustega), $\sigma_2 = 30$. Võrrandi $z^2 - 11z + 30 = 0$ abil leiame, et

$$\begin{cases} u_1 = 5, \\ v_1 = 6, \end{cases} \qquad \begin{cases} u_2 = 6, \\ v_2 = 5. \end{cases}$$

Seega lähtesüsteemi lahendid on

$$\begin{cases} x_1 = 25, \\ y_1 = 36, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = 36, \\ y_2 = 25. \end{cases}$$

Näide 9. *Lahendada süsteem*[6]

$$\begin{cases} 2x^3y^2 - y^3x^2 = 36, \\ 2x^2y - y^2x = 6. \end{cases}$$

Teostades esmalt asenduse $x = u$, $y = -2v$, saame pärast mõningaid lihtsustusi

[5] Vt. [4], ülesanne 1003.
[6] Vt. [4], ülesanne 968.

$$\begin{cases} u^3v^2 + u^2v^3 = \frac{9}{2}, \\ u^2v + uv^2 = -\frac{3}{2}. \end{cases}$$

Üleminek muutujatele $\sigma_1 = u + v$ ja $\sigma_2 = uv$ annab

$$\begin{cases} \sigma_1\sigma_2^2 = \frac{9}{2}, \\ \sigma_1\sigma_2 = -\frac{3}{2}. \end{cases}$$

Siit $\sigma_1 = \frac{1}{2}$, $\sigma_2 = -3$. Tuginedes võrrandile $z^2 - \frac{1}{2}z - 3 = 0$ leiame, et

$$\begin{cases} u_1 = -\frac{3}{2}, \\ v_1 = 2, \end{cases} \qquad \begin{cases} u_2 = 2, \\ v_2 = -\frac{3}{2}. \end{cases}$$

Siit

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{3}{2}, \\ y_1 = -4, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = 2, \\ y_2 = 3. \end{cases}$$

Piirdume nende näidetega. Täiendavat harjutusmaterjali võib lugeja leida ükskõik millisest algebra ülesannete kogust. Mitte iga kõrgema astme algebraline võrrandisüsteem pole lahendatav sümmeetriliste polünoomide abil, seepärast vajab harjutamist ka oskus «läbi näha», millise süsteemi puhul saab kasutada sümmeetrilisi polünoome ja millise puhul mitte.

Võrratused

Olgu $f(x, y)$ sümmeetriline polünoom ja ülesandeks tõestada võrratuse

$$f(x, y) \geqslant 0 \tag{5}$$

kehtivus. Ülesande lahendamisel kasutame sümmeetrilisi polünoome, tuginedes järgmisele lemmale:

süsteemi

$$\begin{cases} x + y = \sigma_1, \\ xy = \sigma_2 \end{cases}$$

lahendid on reaalsete σ_1 ja σ_2 korral reaalsed parajasti siis, kui

$$\sigma_1^2 - 4\sigma_2 \geqslant 0. \tag{6}$$

Lemma tõestamine ruutvõrrandi $z^2 - \sigma_1 z + \sigma_2 = 0$ abil on lugejale jõukohane.

Võrratuse (5) tõestamiseks võime seega kasutada järgmist teed.

Avaldame $f(x, y)$ sümmeetriliste põhipolünoomide kaudu ning tõestame saadud võrratuse kehtivuse eeldusel, et $\sigma_1^2 - 4\sigma_2 \geqslant 0$. Otstarbekas on tähistada $\sigma_1^2 - 4\sigma_2 = \varepsilon$ (seega $\varepsilon \geqslant 0$), kust

$$\sigma_2 = \frac{1}{4}(\sigma_1^2 - \varepsilon). \tag{7}$$

Selle seose abil elimineerime tõestatavast võrratusest muutuja σ_2 ning jõuame võrratuseni, mille kehtivuse peame tõestama eeldusel $\varepsilon \geqslant 0$.

N ä i d e 10. *Tõestada võrratus*[7]

$$x^4 + y^4 \geqslant x^3 y + xy^3.$$

Minnes üle sümmeetrilistele põhipolünoomidele, saame võrratuse

$$\sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 \geqslant \sigma_2(\sigma_1^2 - 2\sigma_2)$$

ehk

$$\sigma_1^4 - 5\sigma_1^2\sigma_2 + 4\sigma_2^2 \geqslant 0.$$

Asendus (7) viib võrratusele

$$\sigma_1^4 - \frac{5}{4}\sigma_1^2(\sigma_1^2 - \varepsilon) + \frac{1}{4}(\sigma_1^2 - \varepsilon)^2 \geqslant 0$$

ehk

$$\frac{3}{4}\sigma_1^2\varepsilon + \frac{1}{4}\varepsilon^2 \geqslant 0.$$

Et $\varepsilon \geqslant 0$, siis viimane võrratus kehtib.

N ä i d e 11. *Tõestada, et eeldusel $x + y \geqslant 0$, on*[8]

$$\frac{x^3 + y^3}{2} \geqslant \left(\frac{x + y}{2}\right)^3.$$

Minnes üle muutujatele σ_1 ja σ_2 saame võrratuse

$$\frac{1}{2}(\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2) \geqslant \frac{1}{8}\sigma_1^3.$$

Elimineerides σ_2 võrduse (7) põhjal, saame

$$\sigma_1\varepsilon \geqslant 0.$$

Saadud võrratuse kehtivus on ilmne, sest $\varepsilon \geqslant 0$ ja ka $\sigma_1 \geqslant 0$ (eelduse kohaselt $x + y = \sigma_1 \geqslant 0$).

---

[7] Vt. [4], ülesanne 1210.
[8] Vt. [5], ülesanne 190.

Teisi näiteid sümmeetriliste polünoomide rakendamise kohta

Esitame veel mõned ülesanded, mille lahendamisel on otstarbekas kasutada sümmeetrilisi polünoome.

Näide 12. *Taandada murd*[9]

$$A = \frac{(x+y)^7 - x^7 - y^7}{(x+y)^5 - x^5 - y^5}.$$

Avaldame murru A sümmeetriliste põhipolünoomide kaudu ja siis taandame:

$$A = \frac{\sigma_1^7 - (\sigma_1^7 - 7\sigma_1^5\sigma_2 + 14\sigma_1^3\sigma_2^2 - 7\sigma_1\sigma_2^3)}{\sigma_1^5 - (\sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2)} =$$

$$= \frac{7(\sigma_1^4 - 2\sigma_1^2\sigma_2 + \sigma_2^2)}{5(\sigma_1^2 - \sigma_2)} = \frac{7}{5}(\sigma_1^2 - \sigma_2) =$$

$$= \frac{7}{5}(x^2 + xy + y^2).$$

Näide 13. *Lahendada võrrand*[10]

$$\sin x + \cos x + \sin x \cos x = 1.$$

Tähistame $\sin x = u$, $\cos x = v$. Antud võrrandi asendame süsteemiga, lisades trigonomeetria põhiseose $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$:

$$\begin{cases} u + v + uv = 1, \\ u^2 + v^2 = 1. \end{cases}$$

Üleminek sümmeetrilistele põhipolünoomidele $\sigma_1 = u + v$, $\sigma_2 = uv$ annab süsteemi

$$\begin{cases} \sigma_1 + \sigma_2 = 1, \\ \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 1, \end{cases}$$

mille lahendid leiame asendusvõttega:

$$\begin{cases} \sigma_1 = 1, \\ \sigma_2 = 0 \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} \sigma_1 = -3, \\ \sigma_2 = 4. \end{cases}$$

Teine lahend ei sobi, sest $\sigma_2 = uv = \sin x \cos x$ ei saa võrduda neljaga. Esimesest lahendist leiame, et

$$\begin{cases} u = 0, \\ v = 1 \end{cases} \quad \text{või} \quad \begin{cases} u = 1, \\ v = 0, \end{cases}$$

ehk teisiti,

$$\begin{cases} \sin x = 0, \\ \cos x = 1 \end{cases} \quad \text{või} \quad \begin{cases} \sin x = 1, \\ \cos x = 0. \end{cases}$$

---

[9] Vt. [4], ülesanne 223.
[10] Vt. [6], ülesanne 592.

Seega on lähtevõrrandi lahenditeks

$$x_1=2k\pi \quad \text{ja} \quad x_2=\frac{\pi}{2}+2k\pi.$$

N ä i d e 14. *Leida võrrandi*

$$\sqrt[4]{8-x}+\sqrt[4]{89+x}=5$$

reaalarvulised lahendid.[11]

Tähistades $\sqrt[4]{8-x}=u$, $\sqrt[4]{89+x}=v$, saame

$$\begin{cases} u+v=5, \\ u^4+v^4=97. \end{cases}$$

See süsteem avaldub σ_1 ja σ_2 kaudu kujul

$$\begin{cases} \sigma_1=5, \\ \sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2=97. \end{cases}$$

Tema lahenditeks on

$$\begin{cases} \sigma_1=5, \\ \sigma_2=44 \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} \sigma_1=5, \\ \sigma_2=6. \end{cases}$$

Esimene neist annab u ja v jaoks kompleksed väärtused, nagu nähtub ruutvõrrandist $z^2-5z+44=0$. Teine lahend annab

$$\begin{cases} u=2, \\ v=3 \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} u=3, \\ v=2. \end{cases}$$

Siit leiame, et lähtevõrrandi lahendid on $x_1=-8$ ja $x_2=-73$!

N ä i d e 15. Võrrandi[12] $7x^2+4x+5=0$ lahendid on α ja β. Lahendeid leidmata arvutada $4\alpha^3-6\alpha\beta^2+4\beta^3-6\alpha^2\beta$. Tähistades $\alpha+\beta=\sigma_1$ ja $\alpha\beta=\sigma_2$, võime Vieta teoreemi põhjal öelda, et $\sigma_1=-\frac{4}{7}$ ja $\sigma_2=\frac{5}{7}$. Seega

$$\begin{aligned} 4\alpha^3-6\alpha\beta^2+4\beta^3-6\alpha^2\beta&=4(\alpha^3+\beta^3)-6\alpha\beta(\alpha+\beta)= \\ &=4(\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2)-6\sigma_1\sigma_2=4\sigma_1^3-18\sigma_1\sigma_2= \\ &=-\frac{256}{343}+\frac{360}{49}=\frac{2264}{343}. \end{aligned}$$

Kolme muutuja sümmeetrilised polünoomid

Polünoomi $f(x, y, z)$ nimetame sümmeetriliseks, kui

$$f(x,y,z)=f(y,x,z)=f(z,y,x)=f(x,z,y).$$

Nii näiteks on polünoomid $x^2+y^2+z^2$, $x^3+y^3+z^3-2xyz$, $x(y^2+z^2)+y(x^2+z^2)+z(x^2+y^2)$ sümmeetrilised polünoomid (kontrollige!).

[11] Vt. [5], ülesanne 131.
[12] Vt. [4], ülesanne 638.

Polünoom $f(x, y, z) = (x + 2y)(y + 2z)(z + 2x)$ aga ei ole sümmeetriline, sest

$$f(y, x, z) = (y + 2x)(x + 2z)(z + 2y) \neq f(x, y, z).$$

Polünoome

$$\sigma_1 = x + y + z,$$
$$\sigma_2 = xy + xz + yz,$$
$$\sigma_3 = xyz$$

nimetame sümmeetrilisteks põhipolünoomideks. *Põhiteoreemi*[13] *kohaselt on iga kolme muutuja sümmeetriline polünoom esitatav muutujate* σ_1, σ_2 *ja* σ_3 *polünoomina.*

Astmesummad $s_n = x^n + y^n + z^n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ on avaldatavad σ_1, σ_2 ja σ_3 kaudu, tuginedes valemile[14]

$$s_k = \sigma_1 s_{k-1} - \sigma_2 s_{k-2} + \sigma_3 s_{k-3}. \tag{8}$$

Et $s_0 = x^0 + y^0 + z^0 = 3$, $s_1 = x + y + z = \sigma_1$ ja $s_2 = x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + xz + yz) = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$, siis valemi (8) põhjal

$$s_3 = \sigma_1 s_2 - \sigma_2 s_1 + \sigma_3 s_0 = \sigma_1(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) - \sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 =$$
$$= \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3.$$

Nüüd võime arvutada s_4, seejärel s_5 jne. Koondame tulemused tabelisse:

$$s_0 = 3,$$
$$s_1 = \sigma_1,$$
$$s_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2,$$
$$s_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3,$$
$$s_4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3,$$
$$s_5 = \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2 + 5\sigma_1^2\sigma_3 - 5\sigma_2\sigma_3,$$
$$s_6 = \sigma_1^6 - 6\sigma_1^4\sigma_2 + 9\sigma_1^2\sigma_2^2 - 2\sigma_2^3 + 6\sigma_1^3\sigma_3 - 12\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + 3\sigma_3^2,$$

. . . .

Keerulisema kujuga sümmeetriliste polünoomide avaldamiseks σ_1, σ_2 ja σ_3 kaudu on otstarbekohane kasutada määramata kordajate meetodit.

Näide 16. *Avaldada* $P(x, y, z) = x(y^2 + z^2) + y(x^2 + z^2) + z(x^2 + y^2)$ *sümmeetriliste põhipolünoomide kaudu, kasutades määramata kordajate meetodit.*

Et polünoomi P kõik liikmed on kolmanda astme liikmed, siis peab ta σ_1, σ_2 ja σ_3 kaudu avalduma kujul

$$P(x, y, z) = A\sigma_1^3 + B\sigma_1\sigma_2 + C\sigma_3. \tag{9}$$

[13] Põhiteoreemi tõestus on esitatud raamatus [3], lk. 48—58.

[14] Valemi tõestamise jätame lugejale. Selleks tarvitseb nii σ_1, σ_2, σ_3 kui ka s_{k-1}, s_{k-2}, s_{k-3} avaldada x, y ja z kaudu.

Kordajad A, B ja C on konstandid, mis ei sõltu muutujate x, y ja z väärtustest. Andes neile muutujatele suvalisi väärtusi, saamegi määrata konstandid A, B ja C.

Näiteks $x=1$, $y=0$, $z=0$ korral $P(1,0,0)=0$ ning $\sigma_1=1$, $\sigma_2=0$, $\sigma_3=0$. Seosest (9) saame, et $A=0$. Kui $x=1$, $y=1$, $z=0$, siis $P(1,1,0)=2$, $\sigma_1=2$, $\sigma_2=1$, $\sigma_3=0$ ning seose (9) põhjal $2B=2$, s. o. $B=1$. Kui $x=1$, $y=1$, $z=1$, siis $P(1,1,1)=6$, $\sigma_1=3$, $\sigma_2=3$, $\sigma_3=1$ ning seose (9) põhjal $9+C=6$, s. o. $C=-3$. Seega

$$P(x,y,z)=\sigma_1\sigma_2-3\sigma_3.$$

Näiteid kolme muutuja sümmeetriliste polünoomide kasutamise kohta

Näide 17. *Taandada murd* [15]

$$A=\frac{x^3+y^3+z^3-3xyz}{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2}.$$

Minnes lugejas ja nimetajas üle sümmeetrilistele põhipolünoomidele, saame

$$A=\frac{\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3-3\sigma_3}{2(\sigma_1^2-2\sigma_2)-2\sigma_2}$$

[murru nimetajaks on $2(x^2+y^2+z^2)-2(xy+xz+yz)$]. Pärast lihtsustamist saame

$$A=\frac{\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2}{2\sigma_1^2-6\sigma_2}=\frac{\sigma_1(\sigma_1^2-3\sigma_2)}{2(\sigma_1^2-3\sigma_2)}=\frac{1}{2}\sigma_1=\frac{1}{2}(x+y+z).$$

Näide 18. *Tõestada, et* [16]

$$(a+b+c)^3=27abc,$$

kui $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}=0$.

Tähistades $\sqrt[3]{a}=x$, $\sqrt[3]{b}=y$, $\sqrt[3]{c}=z$, saab ülesanne kuju: tõestada, et

$$(x^3+y^3+z^3)^3=27x^3y^3z^3,$$

kui $x+y+z=0$.

Kui aga $\sigma_1=0$, siis astmesummade tabelist näeme, et $s_3^3=27\sigma_3^3=27x^3y^3z^3$.

---

[15] Vt. [4], ül. 224.
[16] Vt. [5], ül. 62.

Näide 19. *Tõestada, et*[17]

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

kui $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ ja $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$.

Tähistame $\frac{x}{a}=u$, $\frac{y}{b}=v$, $\frac{z}{c}=w$.

Tuleb näidata, et $u^2+v^2+w^2=1$, kui $u+v+w=\sigma_1=1$ ja $\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{w}=\frac{vw+uw+uv}{uvw}=\frac{\sigma_2}{\sigma_3}=0$ (siit $\sigma_2=0$). Kui aga $\sigma_1=1$ ja $\sigma_2=0$, siis tõepoolest

$$u^2+v^2+w^2=s_2=\sigma_1^2-2\sigma_2=1.$$

Näide 20. *Lahendada võrrandisüsteem*[18]

$$\begin{cases} x+y+z=2, \\ (x+y)(y+z)+(y+z)(z+x)+(z+x)(x+y)=1, \\ x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)=-6. \end{cases}$$

Teise võrrandi vasak pool on teisendatav kujule $3(xy+yz+zx)+(x^2+y^2+z^2)=3\sigma_2+(\sigma_1^2-2\sigma_2)=\sigma_1^2+\sigma_2$, kolmanda võrrandi vasakul pool on aga näites 16 esinenud polünoom (erinevus on liikmete rühmitamisviisis). Seega on antud süsteem esitatav kujul

$$\begin{cases} \sigma_1=2, \\ \sigma_1^2+\sigma_2=1, \\ \sigma_1\sigma_2-3\sigma_3=-6, \end{cases}$$

millest saame $\sigma_1=2$, $\sigma_2=-3$, $\sigma_3=0$. Et määrata muutujate x, y ja z väärtusi, on kasulik silmas pidada, et x, y ja z on kuupvõrrandi $k^3-\sigma_1k^2+\sigma_2k-\sigma_3=0$ lahendeiks (meenutage Vieta teoreemi kuupvõrrandi korral!). Seega tuleb meil lahendada kuupvõrrand $k^3-2k^2-3k=0$. Lahendeiks on arvud 0, —1 ja 3. Siit saame lähtesüsteemi jaoks kuus lahendit:

$$\begin{cases} x_1=0, \\ y_1=-1, \\ z_1=3, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=0, \\ y_2=3, \\ z_2=-1, \end{cases} \quad \begin{cases} x_3=-1, \\ y_3=0, \\ z_3=3, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_4=-1, \\ y_4=3, \\ z_4=0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_5=3, \\ y_5=0, \\ z_5=-1, \end{cases} \quad \begin{cases} x_6=3, \\ y_6=-1, \\ z_6=0. \end{cases}$$

---

[17] Vt. [5], ül. 65.
[18] Vt. [5], ül. 170.

N ä i d e 21. *Lahendada võrrandisüsteem*[19]

$$\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=4, \\ x+y+z=6, \\ x^2+y^2+z^2=18. \end{cases}$$

Tähistades $\sqrt{x}=u$, $\sqrt{y}=v$, $\sqrt{z}=w$, saame süsteemi

$$\begin{cases} u+v+w=4, \\ u^2+v^2+w^2=6, \\ u^4+v^4+w^4=18. \end{cases} \qquad (10)$$

Minnes saadud süsteemis üle sümmeetrilistele põhipolünoomidele $\sigma_1=u+v+w$, $\sigma_2=uv+uw+vw$, $\sigma_3=uvw$, saame

$$\begin{cases} \sigma_1=4, \\ \sigma_1^2-2\sigma_2=6, \\ \sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2+4\sigma_1\sigma_3=18. \end{cases}$$

Siit $\sigma_1=4$, $\sigma_2=5$, $\sigma_3=2$.

Kuupvõrrandi $k^3-4k^2+5k-2=0$ lahenditeks on[20] $k_1=k_2=1$, $k_3=2$ ja seega süsteemi (10) lahenditeks:

$$\begin{cases} u_1=1, \\ v_1=1, \\ w_1=2, \end{cases} \qquad \begin{cases} u_2=1, \\ v_2=2, \\ w_2=1, \end{cases} \qquad \begin{cases} u_3=2, \\ v_3=1, \\ w_3=1. \end{cases}$$

Lähtesüsteemi lahendid on

$$\begin{cases} x_1=1, \\ y_1=1, \\ z_1=4, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2=1, \\ y_2=4, \\ z_2=1, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3=4, \\ y_3=1, \\ z_3=1. \end{cases}$$

KASUTATUD KIRJANDUS

1. K a n g r o, G. Kõrgem algebra. Tln., 1962.
2. А н т о н о в Н. П. и др. Сборник задач по элементарной математике. М., 1958.
3. Б о л т я н с к и й В. Г., В и л е н к и н Н. Я. Симметрия в алгебре. М., 1967.
4. Л я п и н С. Е., Б а р а н о в а И. В. Сборник задач по элементарной математике. Арифметика и алгебра. М., 1960.
5. С и в а ш и н с к и й И. Х. Задачник по элементарной математике. М., 1966.
6. Ш а х н о К. У. Сборник задач по математике повышенной трудности. Минск, 1964.

[19] Vt. [4], ül. 1038.

[20] Neid lahendeid on lihtne leida Horneri skeemi abil (vt. Matemaatika metoodiliste artiklite kogumik I. Tln., 1963).

POLÜNOOMIDEST JA FORMAALSETEST RIDADEST

U. Kaljulaid

Käesolev artikkel tekkis soovist anda lugejale käepärane abimaterjal R u f f i n i - A b e l i teoreemi sõnastamiseks ja tõestamiseks. Siin käsitletakse polünoomi sümmeetrilisuse ja taandumatuse mõisteid ning formaalse rea mõistet.

Sümmeetrilistel polünoomidel on rakendusi matemaatika mitmetes valdkondades. Huvipakkuva võimalusega kasutada neid kõrgemaastmeliste võrrandite lahendamisel tutvub lugeja käesoleva kogumiku veergudel, vt. lk. 25—38.

Taandumatuil polünoomidel on polünoomide ringi aritmeetikas umbes samasugune osa kui algarvudel arvuteoorias. Viimaseil aastakümneil on nad leidnud kasutamist kodeerimise ja dekodeerimise teoorias.[1]

Erilist huvi peaks lugejale pakkuma formaalse astmerea mõiste. Selliste ridade teooria elegantne kasutamine on muuhulgas üks neist vahendeist, mille abil H. Cartan värskendas klassikalise matemaatika sellise tähtsa haru nagu kompleksmuutuja funktsiooni teooria ülikoolikursuse esituse. Formaalsed read etendavad viimastel aastatel tähtsat osa matemaatilises lingvistikas ja süsteemide matemaatilises teoorias.

Ühegi kõnesolnud matemaatilise objekti korral pole tema omaduste kõikehõlmava nimistu koostamine artikli eesmärgiks. Lugeja tutvub vaid objekti nende omadustega, mis seda objekti hiljem Abeli teoreemi tõestamisel aktiivselt tegevusse lülitada võimaldavad. Autori arvates on matemaatiliste objektide kasutamine sisukate eesmärkide saavutamisel parim viis nende tundmaõppimiseks. Sellega seletub suuresti nii käesoleva artikli materjali valik kui ka (kohati üpris) lakooniline esitusviis. Märkmete koostamisel on oluliselt kasutatud M. Postnikovi raamatut «Galois' teooria».

1. Polünoomide taanduvusest

1. Olgu P korpus. Võtame vaatluse alla polünoomide ringi $P[x]$, s. t. vaatleme hulka, mis koosneb kõigist polünoomidest kordajatega korpusest P,

[1] Сб. «Некоторые вопросы теории кодирования, М., 1970.

$$f(x) = a_n + a_{n-1}x + \ldots + a_0x^n, \quad a_i \in P.$$

Liitmine ja korrutamine defineeritakse, nagu arvuliste kordajatega polünoomide korralgi, valemitega:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),$$
$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$$

Ringis $P[x]$ puuduvad nullitegurid ja temas võib arendada jaguvuse teooriat nagu täisarvude vallaski; algarvude osas esinevad sealjuures (üle korpuse P) «taandumatud polünoomid». Tutvume nende omapäraste «algarvudega».

Definitsioon. Polünoomi $f(x) \in P[x]$ nimetatakse taanduvaks üle korpuse P, kui leiduvad sellised madalamaastmelised mittekonstantsed polünoomid $f_1(x)$ ja $f_2(x)$ ringis $P[x]$, et $f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$. Vastasel korral on polünoom $f(x)$ taandumatu üle P.

Järgnevalt esitame ühe väite, mis näitab taandumatute polünoomide sarnasust algarvudega.

Lause. *Kui polünoomil $f(x)$ kordajatega korpusest P on ühine lahend polünoomiga $p(x)$, mis on taandumatu üle P, siis $f(x)$ jagub polünoomiga $p(x)$.*

Tõestus. Olgu $g(x) = \text{SÜT}(f(x), p(x))$. Kuna võrrandeil $f(x) = 0$ ja $p(x) = 0$ on ühine lahend, siis[2] $\deg g(x) \geqslant 1$. Eukleidese algoritmi teel saadud polünoomi $g(x)$ kordajad kuuluvad korpusesse P. Kui oleks $\deg g(x) < \deg p(x)$, siis $p(x) = g(x) \cdot p_1(x)$, kus $\deg p_1(x) < \deg p(x)$ ja $p_1(x)$ kordajad on korpusest P. See on aga vastuolus polünoomi $p(x)$ taandumatusega. Seega $\deg g(x) = \deg p(x)$, millega lause on tõestatud.

Näitena vaatleme polünoomide taanduvust üle arvukorpuste. Võtame kasutusele standardsed tähised: Z täisarvude, Q ratsionaalarvude ja C — kompleksarvude hulga jaoks. Olgu $P = Q$. On kerge veenduda, et piisab, kui oskame otsustada, kas antud täisarvuliste kordajatega polünoom $f(x)$ on taanduv ringis[3] $Z[x]$ või mitte. Tõepoolest, olgu $f(x)$ ratsionaalarvuliste kordajatega polünoom. Leiame kordajate a_i vähima ühise nimetaja a ning vaatleme polünoomi $af(x)$; see on täisarvuliste kordajatega polünoom ja tema taandumatus üle Q on ilmselt tarvilik ja piisav polünoomi $f(x)$ taandumatuseks (üle Q). Veelgi enam, osutub, et polünoomi $a \cdot f(x)$ taandumatusest üle Z järeldub $a \cdot f(x)$ taandumatus üle Q ja seega ka $f(x)$ taandumatus üle Q. Seega küsimus polünoomide taandumatusest üle Q on lahendatav, kui oskame selgitada polünoomide taandumatust üle Z. Selleks annab algebra rea tunnuseid. Tutvume mõnedega.

---

[2] Siin $\deg f(x)$ tähistab polünoomi $f(x)$ astet.

[3] polünoom $f(x)$ on taanduv ringis $Z[x]$, kui leiduvad mittekonstantsed täisarvuliste kordajatega polünoomid $f_1(x)$ ja $f_2(x)$, et $f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$, nii et $\deg f_i(x) < \deg f(x)$, $i = 1, 2$.

Eisensteini tunnus. Olgu antud polünoom

$$f(x) = a_n + a_{n-1}x + \ldots + a_1 x^{n-1} + a_0 x^n, \ a_i \in Z.$$

Kui leidub selline algarv p, et on täidetud tingimused [4]

$$p \top a_0; \ p \mid a_i, \text{ kui } i \neq 0; \ p^2 \top a_n,$$

siis $f(x)$ on taandumatu üle Q.

Tunnuse tõestus on lihtne: teinud väitevastase oletuse, jõuab lugeja kergesti vastuoluni.

Sellest tunnusest järeldub muuseas, et (üle Q) taandumatul polünoomil võib olla kuitahes kõrge aste. Tõepoolest, polünoomid $x^n + p$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ on taandumatud üle Q.

Cohni tunnus. Kui polünoomi $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i}x^i$, $a_i \in Z$, kõik kordajad rahuldavad tingimust $0 \leqslant a_{n-i} \leqslant 9$ ja $f(10)$ on algarv, siis $f(x)$ on taandumatu üle Q. Cohni tunnuse põhjal on näiteks polünoomid $x^3 + 8x^2 + 2x + 3$, $2x^3 + 6x + 3$, $2x^3 + x^2 + 2x + 9$ taandumatud üle Q.

Vähem tuntud taandumatuse tunnustest märgime järgmist.

Selleks, et polünoom $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$, $a_i \in Z$, oleks (üle Q) taandumatu, on piisav, et oleks täidetud üks järgmistest tingimustest:

1) $|a_1| > |1 + a_2| + |a_3| + \ldots + |a_n|$,

2) $a_2 > 0$, $\sqrt{a_2} > \frac{3}{\sqrt{2}}(|a_1| + |a_3| + \ldots + |a_n|)$,

3) $a_1 = 0$, $a_2 > 0$, $a_n \neq 0$, $\sqrt{a_2} > \sqrt{3(|a_3| + \ldots + |a_n|)}$,

4) $n > 4$, $a_4 > 0$, $\sqrt{a_4} > \sqrt[4]{2}(1 + |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|)$, $a_n \neq 0$.

Üle kompleksarvude korpuse on taandumatud vaid lineaarpolünoomid. Tõepoolest, kompleksarvuliste kordajatega võrrandil $f(x) = 0$ on algebra põhiteoreemi kohaselt vähemalt üks lahend $\alpha \in C$, millest Bezout' lemma põhjal järeldub, et $f(x)$ jagub teguriga $(x - \alpha)$. Rakendades jagatisele vajaduse korral sama mõttekäiku, veendume, et $f(x)$ laguneb lineaartegurite korrutiseks.

Üle reaalarvude korpuse leidub juba taandumatuid ruutpolünoome — tuntud näiteks on polünoom $x^2 + 1$. Osutub, et kõrgemaastmelised reaalkordajatega polünoomid on juba taanduvad. Et siin lineaarpolünoomidele lisandub ka osa ruutpolünoome, tuleneb asjaolust, et kui $f(\alpha) = 0$, $\alpha \in C$, $\alpha \notin R$, siis ka $f(\overline{\alpha}) = 0$, ning tegur $(x - \alpha)(x - \overline{\alpha})$ on üle R taandumatu.

Märgime, et seni puuduvad efektiivsed tunnused polünoomide taandumatuse kindlakstegemiseks üle suvalise korpuse. Pole

[4] siin $p \mid a_i$ tähendab, et arv a_i jagub arvuga p ning $p \top a_i$, et vastav väide ei kehti.

teada vastus järgmisele huvitavale küsimusele[5] (P. Turan'i probleem).

Kas leidub niisugune mittenegatiivne täisarv c, et iga polünoomi $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i}$, $a_i \in Z$, $a_0 \neq 0$, jaoks leidub polünoom $g(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^{n-i}$, $b_i \in Z$, mis on taandumatu üle Z, selliselt, et $\sum_{i=0}^{n} |b_i - a_i| \leqslant c$.

2. Sümmeetrilised polünoomid

Vaatleme polünoomi $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ kordajatega a_i korpusest P. Alati leidub korpuse P selline laiend L, milles polünoom $f(x)$ lahutub lineaartegureiks, s. t. leiduvad sellised $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in L/P$, et $f(x) = (x - \alpha_1) \ldots (x - \alpha_n)$. Näiteks juhtudel, kui $P \subseteq C$, võime korpuseks L võtta kompleksarvude korpuse C. Polünoomide võrdsuse korral aga peavad olema võrdsed kordajad muutuja x vastavate astmete ees, millest saame tuntud Vieta valemid:

$$\begin{aligned}
-a_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n, \\
a_2 &= \alpha_1\alpha_2 + \ldots + \alpha_{n-1}\alpha_n, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(-1)^{n-1}a_{n-1} &= \alpha_1 \ldots \alpha_{n-1} + \ldots + \alpha_2 \ldots \alpha_n, \\
(-1)^n a_n &= \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n.
\end{aligned} \tag{1}$$

Nende seoste parematel pooltel on omadus mitte muutuda lahendite $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ suvalise ümberpaigutuse $\alpha_1 \to \alpha_{i_1}$, $\alpha_2 \to \alpha_{i_2}$, $\ldots$, $\alpha_n \to \alpha_{i_n}$ korral; siin $(i_1, \ldots, i_n)$ on permutatsioon arvudest $1, 2, \ldots, n$. Seetõttu nimetatakse neid avaldisi sümmeetrilisteks lahendite $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ suhtes.

Nimetatud omadus annab võimaluse n-muutuja polünoomide seast eristada nn. sümmeetrilised polünoomid, s. t. sellised polünoomid $f(x_1, \ldots, x_n)$, mis ei muutu suvalise ümberpaigutuse $x_1 \to x_{i_1}, \ldots, x_n \to x_{i_n}$ korral. Näited sellistest polünoomidest on meil juba olemas: nn. sümmeetrilised põhipolünoomid $\sigma_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, $\sigma_2 = x_1x_2 + \ldots + x_{n-1}x_n$, $\ldots$, $\sigma_{n-1} = x_1x_2 \ldots x_{n-1} + \ldots + x_2x_3 \ldots x_n$, $\sigma_n = x_1x_2 \ldots x_n$. Kerge on leida teisi näiteid: $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$, $x_1^3 x_2^3 \ldots x_n^3$, jne. Kuna sümmeetrilised polünoomid moodustavad alamringi kõigi n-muutuja polünoomide ringis, on kerge suurendada nende näidete arvu. Lugeja märkab, et paljusid sümmeetrilisi polünoome saab avaldada polünoomina sümmeetrilistest põhipolünoomidest, näiteks:

[5] Sellega seoses vt. A. Schinzel, Reducibility of polynomials and covering systems of congruences. — "Acta Arithmetica", 13, No. 1, 1967, p. 91—101.

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2,$$
$$x_1^3 x_2^3 \ldots x_n^3 = \sigma_n^3$$
$$x_1^2 x_2 \ldots x_n + \ldots + x_1 x_2 \ldots x_n^2 = \sigma_1 \sigma_n.$$

Osutub, et iga sümmeetrilist polünoomi saab avaldada polünoomina sümmeetrilistest põhipolünoomidest; teisiti öeldes, iga sümmeetrilise polünoomi $f(x_1, \ldots, x_n)$ jaoks (kordajatega korpusest P) leidub niisugune polünoom $q(x_1, \ldots, x_n)$, (kordajatega samast korpusest P), et

$$f(x_1, \ldots, x_n) \equiv q(\sigma_1(x_1, \ldots, x_n), \sigma_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots,$$
$$\ldots \sigma_n(x_1, \ldots, x_n)).$$

See on nn. põhiteoreem sümmeetrilistest polünoomidest[6]; kasutame teda Ruffini-Abeli teoreemi tõestamisel.

3. Ratsionaalfunktsioonide korpuse sisestamine algebraliselt kinnisesse korpusesse

Olgu P korpus karakteristikuga 0, s. t. $Q \subseteq P$. Vaatleme ratsionaalfunktsioonide korpust $P(x_1, \ldots, x_n) = R$ üle P. Tema elementideks on kahe polünoomi jagatised $\dfrac{f(x_1, \ldots, x_n)}{g(x_1, \ldots, x_n)}$, $f, g \in P[x]$. Selline korpus ei tarvitse olla algebraliselt kinnine, s. t. võivad leiduda mittelineaarsed taandumatud polünoomid üle selle korpuse.

Näide. Olgu $P = Q$. Näitame, et võrrandil $x^2 + 1 = 0$ puuduvad lahendid korpuses $R = Q(x_1, \ldots, x_n)$. Tõepoolest, kui $\dfrac{f(x_1, \ldots, x_n)}{g(x_1, \ldots, x_n)} \in R$ on võrrandi $x^2 + 1 = 0$ lahendiks, siis $\left(\dfrac{f(x_1, \ldots, x_n)}{g(x_1, \ldots, x_n)}\right)^2 \equiv -1$ s. t. $\left(\dfrac{f(c_1, \ldots, c_n)}{g(c_1, \ldots, c_n)}\right)^2 = -1$ igasuguse $(c_1, \ldots, c_n) \in Q^{(n)}$ korral. Et aga $r = \dfrac{f(c_1, \ldots, c_n)}{g(c_1, \ldots, c_n)} \in Q$, oleme jõudnud vastuoluni, sest ei leidu sellist ratsionaalarvu $r \in Q$, et $r^2 = -1$.

Siiski, korpuse R saab sisestada algebraliselt kinnisesse korpusesse, kui algebraliselt kinnine on põhikorpus P. Teostame selle kahes järgus. Algul sisestame korpuse R nn. formaalsete ridade korpusesse.

Mis on formaalne rida?

Muutujat tähistagu x. Formaalne rida on lõpmatu formaalne summa kujuga

$$a_{-m} x^{-m} + a_{-m+1} x^{-m+1} + \ldots + a_{-1} x^{-1} + a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots,$$

[6] Tõestuse võib leida prof. G. Kangro raamatust. Kõrgem algebra. Tln., 1962, lk. 262—264.

kus $a_i \in P$ ja $m \in Z$; lühidalt, $\sum\limits_{i \geqslant -m} a_i x^i = f$. Formaalsete ridade hulka kuuluvad kõik polünoomid, kuna $a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k = \sum\limits_{i \geqslant 0} a_i x^i$, kus $a_{k+1} = a_{k+2} = \ldots = 0$. Iga kahe formaalse rea $f = \sum\limits_{i \geqslant -m} a_i x^i$ ja $g = \sum\limits_{i \geqslant -n} b_i x^i$ korral võib nende summa ja korrutise anda valemitega:

kui näiteks $n \geqslant m$, siis $f + g = \sum\limits_{i \geqslant -n} (a_i + b_i) x^i$, kusjuures $a_{-m-1} = \ldots = a_{-n} = 0$ ja

$$f \cdot g = \sum_{i \geqslant -m-n} c_i x^i, \text{ kus } \begin{cases} c_{-m-n} = a_{-m} \cdot b_{-n} \\ c_{-m-n+1} = a_{-m} b_{-n+1} + a_{-m+1} \cdot b_{-n}. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Lihtne kontroll näitab, et nende tehete suhtes on tegemist ringiga — formaalsete ridade ringiga $P\langle x \rangle$. Lugeja märkab, et siin on tegemist polünoomide liitmise ja korrutamise «laiendamisega» astmeridadele ning et polünoomide korral osutuvad need tehted tavaliseks polünoomide liitmiseks ja korrutamiseks. Seega on polünoomide ring $P[x]$ alamringiks formaalsete ridade ringis $P\langle x \rangle$. Viimane on korpus, sest igal nullist erineval formaalsel real f leidub «pöördrida», s. t. selline rida $f^{-1} \in P\langle x \rangle$, et $f \cdot f^{-1} = 1$. Tõepoolest, igal nullist erineval formaalsel real on kuju

$$f = x^n (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots), \quad n \in Z, \ a_0 \neq 0.$$

Määrates rea $f^{-1} = x^{-n} (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots)$ kordajad b_i võrdustest

$$\begin{gathered} a_0 \cdot b_0 = 1, \\ a_0 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_0 = 0, \\ a_0 \cdot b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered}$$

näeme, et $f \cdot f^{-1} = 1$. Seosest $P[x] \subseteq P\langle x \rangle$ järeldub, et formaalsete ridade korpus sisaldab ka iga kahe polünoomi jagatist, s. t. $P(x) \subseteq P\langle x \rangle$.

Mitme muutuja formaalsete ridade korpuse mõiste defineeritakse induktiivselt:

$$\begin{gathered} P\langle x_1, x_2 \rangle = P\langle x_1 \rangle \langle x_2 \rangle, \\ P\langle x_1, x_2, x_3 \rangle = P\langle x_1, x_2 \rangle \langle x_3 \rangle, \\ P\langle x_1, \ldots, x_n \rangle = P\langle x_1, \ldots, x_{n-1} \rangle \langle x_n \rangle. \end{gathered}$$

Näeme, et $R = P(x_1, \ldots, x_n) \subset P\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$.

Laiendame nüüd formaalsete ridade korpuse algebraliselt kinnise korpuseni. Selleks vaatleme üldisi formaalseid ridu, s. o. formaalseid summasid

$$f = \sum_{i \geqslant 0} a_i x^{\frac{n_i}{n}}, \text{ kus } a_i \in P; \ n \in Z, \ n > 0; \ n, n_0, n_1, \ldots \in Z,$$

$n_0 < n_1 < n_2 < \ldots$ ja täisarvude n_i seas on vaid lõplik arv negatiivseid. Juhul $n = 1$ on tegemist tavaliste formaalsete ridadega. Võttes appi uue muutuja $y = x^{\frac{1}{n}}$, võime üldist formaalset rida f vaadelda kui tavalist formaalset rida muutujast y:

$$f(x) = \sum_{i \geqslant 0} a_i x^{\frac{n_i}{n}} = \sum_{i \geqslant 0} a_i y^{n_i}.$$

See lihtne märkus näitab meile, et üldisi formaalseid ridu võib liita ja korrutada nagu tavalisi formaalseid ridu, kusjuures on jällegi tegemist ringiga, mida tähistame $P\{x\}$. Veelgi enam, $P\{x\}$ on korpus. Tõepoolest, üldise formaalse rea $f(x) \neq 0$ korral vaatleme talle vastavat formaalset rida $f(y) \in P\langle y\rangle$. Kuna $P\langle y\rangle$ on korpus, siis leidub $f^{-1}(y) \in P\langle y\rangle$ nii, et $f(y) \cdot f^{-1}(y) = 1$. Muutuja vahetus $y = x^{\frac{1}{n}}$ annab vajaliku seose.

Osutub, et $P\{x_1\}$ on algebraliselt kinnine korpus, s. t. iga mittelineaarne polünoom kordajatega sellest korpusest on taanduv (üle $P\{x_1\}$).

Defineerime mitme muutuja üldiste formaalsete ridade korpuse induktiivselt:

$$P\{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\} = P\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}\{x_n\}.$$

Kehtivad seosed

$$P[x_1, \ldots, x_n] \subset P(x_1 \ldots, x_n) \subset P\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \subset P\{x_1, \ldots, x_n\} \quad (2)$$

Et korpus $P\{x_1\}$ on algebraliselt kinnine, siis lihtne induktsioon näitab, et ka $P\{x_1, \ldots, x_n\}$ on algebraliselt kinnine korpus (kui seda on põhikorpus P). Seostest (2) järeldub nüüd, et seatud eesmärk on saavutatud.

4. Üldvõrrandi lahutuskorpus

Siin illustreeritakse eelnevas kahes punktis toodud mõistete ja faktide kasutamist, tuuakse üldvõrrandi ja tema lahutuskorpuse mõisted; nad on vajalikud Ruffini-Abeli teoreemi sõnastamiseks algebra tänapäeva keeles.

Kasutame edaspidi sõna «korpus» tähenduses «kompleksarvude korpuse alamkorpus».[7]

Olgu P mingi korpus. Kui kompleksarvud $a_1, \ldots, a_n$ on sellised, et ei leidu ühtki polünoomi $h(x_1, \ldots, x_n) = 0$ kordajatega korpusest P, et $h(a_1, \ldots, a_n) = 0$, nimetame neid algebraliselt sõltumatuiks (üle P).[8]

---

[7] Järgnevates arutlustes piisab, et «korpus» tähendaks «alamkorpus algebraliselt kinnises korpuses karakteristikuga 0».

[8] Mitmed tunnused kompleksarvude algebralise sõltumatuse kindlakstegemiseks leiduvad raamatus А. О. Гельфонд. Алгебраические и трансцендентные числа, М. 1952, lk. 118—121.

Seeria näiteid (üle Q) algebraliselt sõltumatuist arvudest annab järgmine Lindemanni teoreem[9].

Kui algebralised arvud $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ on lineaarselt sõltumatud üle Q, siis arvud $e^{\alpha_1}, \dots, e^{\alpha_n}$ on algebraliselt sõltumatud üle Q. Näiteks, arvud e ja $e^{\sqrt{2}}$ on (üle Q) algebraliselt sõltumatud, sest 1 ja $\sqrt{2}$ on lineaarselt sõltumatud üle Q.

Punkti 3 eeskujul võime moodustada formaalsete ridade korpuse $K = P\{a_1, \dots, a_n\}$. Võtame nüüd suvalised astmeread $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ korpusest K ja vaatleme kõigi taoliste alamkorpuste ühisosa, mis sisaldavad põhikorpust P ja astmeridu $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. See on korpuses K vähim alamkorpus taolise omadusega ja me tähistame teda $P(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = R$.

Definitsioon. Kui võrrandi

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0 \qquad (3)$$

kordajad $a_1, \dots, a_n$ on algebraliselt sõltumatud (üle P), nimetame teda n-astme üldvõrrandiks (üle P). Sisaldagu põhikorpus P ratsionaalarvude korpust Q ja olgu algebraliselt kinnine. Sel korral on astmeridade korpus $K = P\{a_1, \dots, a_n\}$, kuhu kuuluvad üldvõrrandi kordajad, algebraliselt kinnine (vt. punkt 3), mistõttu polünoom $f(x)$ laguneb temas lineaartegureiks. Seega leiduvad sellised $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$, et

$$f(x) = (x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_n).$$

Korpust $R(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \Delta$ nimetatakse üldvõrrandi (3) lahutuskorpuseks.

Osutub, et $R(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = P(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Tõepoolest, ühelt poolt seos $P \subset R$ annab $P(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \subset R(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Teiselt poolt, kuna Vieta valemite põhjal $a_i = (-1)^i \sigma_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, siis $\Delta = R(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = P(a_1, \dots, a_n)(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \subseteq P(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Sellega on väide tõestatud.

Saadud tulemus näitab, et üldvõrrandi lahutuskorpuse iga elemendi võib kirja panna murruna $\frac{f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}{g(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}$, kus f ja g on polünoomid kordajatega põhikorpusest P. Osutub, et see kirjaviis on «ühene», s. t. ei leidu taolist elementi $a \in \Delta$, et

$$a = \frac{f_1(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}{g_1(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} = \frac{f_2(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}{g_2(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}, \quad \text{kus} \qquad (4)$$

$$h \overset{\text{def}}{=} f_1 \cdot g_2 - f_2 \cdot g_1 \neq 0.$$

[9] Selle ja rea teiste algebralise sõltumatusega seotud küsimuste elegantse esituse leiab lugeja raamatust *С. Ленг.* Алгебра. М., 1968, стр. 546—552. On muuseas tõenäone, et arvud e ja π on algebraliselt sõltumatud üle Q, loc. cit., lk. 552.

Toodud väide pole kaugeltki ilmne. Anname tõestuse, kasutades vastuväitelist arutlust.

Oletame, et element a omadusega (4) siiski leidub. Siis aga leidub polünoom $h(x_1, \ldots, x_n)$ kordajatega põhikorpusest P, mis pole nullpolünoom, kuid $h(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0$.

Olgu S_n täielik sümmeetriilne rühm. Moodustame kõigi $\sigma \in S_n$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}$, korral polünoomi $h(x_1, \ldots, x_n)$ «kaaspolünoomid»[10] $h^\sigma(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv h(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$.

Siis

$$h \not\equiv 0 \Rightarrow (\forall \sigma \in S_n) h^\sigma \not\equiv 0 \Rightarrow \prod_{\sigma \in S_n} h^\sigma \not\equiv 0.$$

Korrutis $s(x_1, \ldots, x_n) \overset{\text{def}}{=} \prod_{\sigma \in S_n} h^\sigma(x_1, \ldots, x_n)$ on sümmeetriline polünoom, mistõttu võime talle rakendada põhiteoreemi sümmeetrilistest polünoomidest:

$$s(x_1, \ldots, x_n) \equiv q(\sigma_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \sigma_n(x_1, \ldots, x_n)).$$

Vieta valemeid

$$\sigma_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (-1)^i a_i$$

kasutades saame

$$s(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = q(\pm a_1, \ldots, \pm a_n). \tag{5}$$

Siinjuures $q \not\equiv 0$, kuna $s \not\equiv 0$. Teiselt poolt, kehtivad võrdused

$$s(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \prod_{\sigma \in S_n} h^\sigma(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) =$$

$$= h(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \cdot \prod_{\sigma \neq \varepsilon} h^\sigma(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0, \tag{6}$$

sest $h(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0$. Seoseid (5) ja $q \not\equiv 0$ arvestades järeldame viimati toodud seostest (6), et $a_1, \ldots, a_n$ on algebraliselt sõltuvad üle põhikorpuse P. See on aga vastuolu, kuna arvud $a_1, \ldots, a_n$ kui üldvõrrandi (3) kordajad on algebraliselt sõltumatud üle P. Väide on tõestatud.

Toodud arutlustest järeldub kergesti, et üldvõrrandil on kõik lahendid ühekordsed. Tõepoolest, olgu näiteks $\alpha_1 = \alpha_2$. Võtame $h(x_1, \ldots, x_n) = x_1 - x_2$. Siis $h \not\equiv 0$ ja $h(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \alpha_1 - \alpha_2 = 0$. Vastuolu. See tõestab väite.

---

[10] Näiteks, kui $n = 4$, $h(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 x_3^2 + x_2^5 x_4$ ja $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, siis $h^\sigma \equiv x_2^2 x_4^3 + x_3^5 x_1$.

SOTSIOLOOGILISE UURIMISE STATISTIKAST II

E. Tiit

Mis saab mõõtmistulemustest?

Kaasaegsel sotsioloogil on küsimusele üksainus vastus — materjal võimalikult kiiresti «masinasse».

Vaatleme, mida teeb elektronarvuti saadud mõõtmistulemustega.

Meenutame, et meie lähteandmed kujutasid enesest tabelit, mis ei sisaldanud üksnes arve, vaid ka mitmesuguseid muid sümboleid. Mõõtmise tulemusena *kodeerisime aga kõik sümbolid arvudeks*, nii et edaspidi võime lähteandmete maatriksit

$$
\begin{array}{l}
x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1m} \\
x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2m} \\
\cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \\
x_{n1}, x_{n2} \ldots, x_{nm}
\end{array}
$$

vaadelda arvudest koosnevana. Maatriksi read kirjeldavad üksikindiviide, veerud — üksiktunnuseid.

Kõigepealt uurime iga tunnust eraldi. Nagu varemgi nägime, kuuluvad tunnused mitmesse erinevasse tüüpi vastavalt skaalale, millel nad on väljendatud (nominaalne, järjestatud, kvantitatiivne). Eri tüüpi tunnused vajavad ka üldiselt erinevat matemaatilist töötlust. Järgnevas vaatleme iga tunnuse tüüpi iseloomustavaid karakteristikuid.

Sagedus- ja jaotustabel

Esimene näitaja, mille arvutab elektronarvuti, aga samuti ka materjali käsitsi töötlev statistik-sotsioloog, on uuritava tunnuse s a g e d u s t a b e l.[1]

---

[1] Vajalike statistikamõistetega saab tutvuda raamatutest E. T i i t. Matemaatiline statistika I. TRÜ, 1971 ja E. T i i t. Matemaatilise stasistika tabelid I, 1971; E. T i i t. Matemaatilise statistika tabelid II, 1972.

Olgu vaadeldaval tunnusel m võimalikku erinevat väärtust ehk vastusevarianti (need võivad olla niihästi arvulised kui ka mittearvulised, mis hiljem arvulisteks kodeeritakse). Kõigepealt leiame, mitu vastajat valis mingi variandi (enamasti on vastused sõnastatud nii, et mitut varianti korraga ei saa valida). Sageli on anketeeritavate hulgas ka neid, kes antud küsimusele pole üldse vastanud; nende korral puudub uuritaval tunnusel väärtus ja ka selle võimaluse jaoks tuleb sagedustabelis ruumi jätta.

Näiteks ankeedis «Sinu ideaal» oli tunnusele «Sinu juuste värvus» vastav sagedustabel järgmine (vaatleme ainult naisüliõpilaste vastuseid).

Tabel 1

Juuste värvus

Juuste värvus	Mittevastanud	Hele	Pruun	Tume	Punakas	Kokku
Kood	0	1	2	3	4	
Sagedus	3	43	82	55	7	190

Tartu valikküsitluse andmetel saadi eesti rahvusest täisealiste tartlannade laste arvu kohta andmed, mis on esitatud sagedustabelis 2.

Tabel 2

Laste arv

Laste arv	Mittevastanud	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9 ja rohkem	Kokku
Sagedus	2	1096	793	656	251	99	33	18	8	5	4	2965

Sagedustabelist mõnevõrra ülevaatlikum on aga **jaotustabel**, kus vastajate arvude (sageduste) asemel on antud vastusevariantide esinemise **suhtelised sagedused** (tõenäosused). Enamasti väljendatakse need protsentides. Esitame näitena toodud tunnuse «juuste värvus» jaotustabeli:

Tabel 3

Juuste värvus — Vastamata 1,6%, $n = 187$

Hele	Pruun	Tume	Punakas	Kokku
23,0	43,8	29,4	3,7	100

Võrreldes tabeliga 1 on siin üks veerg vähem — jaotuse leidmisel huvitavad meid ainult need anketeeritavad, kes antud tunnusele on vastanud, seega informatsiooni saame 187 ankeedist; olgu märgitud, et ka viimane veerg, mis sisaldab alati summat 100, ei ole tarvilik ja jäetakse sageli ära.

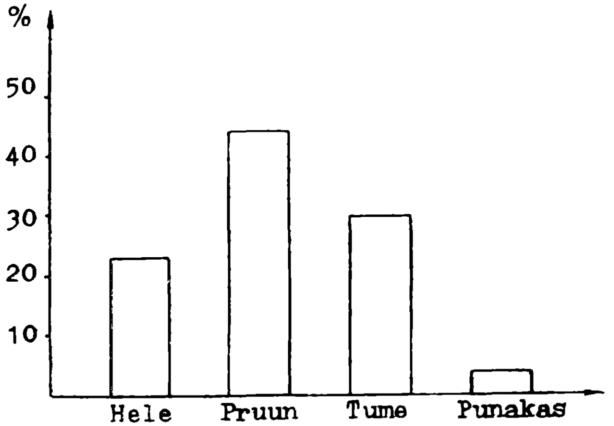
Arvutuste kontrollimisel näeme aga, et

$$23{,}0 + 43{,}8 + 29{,}4 + 3{,}7 = 99{,}9 \neq 100.$$

Kas arvuti on valetanud?

Siiski mitte. Tegemist on ümardamisveaga (mis, muide, sageli häirib väheasjatundlikke lugejaid). Tõepoolest, täpsemini arvutades saaksime 43,8 asemele 43,85 ja 29,4 ning 3,7 asemele vastavalt 29,41 ning 3,74; seega summaks on tõepoolest 100; igakord aga ei saa me ka sellise arvutustäpsuse puhul summaks arvu 100, vaid näiteks 99,99 või 100,02. Mida suurem on arvutustäpsus, seda väiksemaks jääb ümardamisviga, kaotada seda aga pole võimalik ega vajalikki. Tunnuse iseloomustamiseks on aga vajalik ka vastamata jätnud anketeeritavate protsent. Kui see on suur, võib sageli järeldada, et tunnus on halvasti valitud või küsimus ebaõnnestunult sõnastatud.

Jaotustabelit on sobiv illustreerida tulpdiagrammikujulise graafikuga:



Joonis 1.

Tunnuse väärtuste klassifitseerimine

Mõnikord ei ole otstarbekas kõiki vastusevariante eraldi tabelisse paigutada, vaid tuleb mitmeid ühendada. Näiteks vastused küsimusele «Kui vana te olete?» võivad koosneda ligikaudu sajast variandist (kui vastatakse täisaastates). Sageli aga ei ole nii detailseid vastuseid tarvis ning siis **klassifitseeritakse** toodud tabel, valides klassipiirideks ümmargused arvud. Näiteks tavaline vanuse tabel, mida kasutatakse demograafias ja ka sotsioloogias, on järgmine:[2]

Tabel 4

Vanus

Vanuserühm	0—4	5—9	10—15	16—19	20—24	25—29	30—34	35—39	40—44
Suhteline sagedus %	7,1	7,5	8,9	5,9	7,4	7,0	8,1	7,7	7,6

Vanuserühm	45—49	50—54	55—59	60—69	70—79	80—89	90—99	100 ja vanem
Suhteline sagedus %	6,0	4,3	5,5	9,5	5,4	1,8	0,1	0,0

Tabelit võib esitada niihästi sagedus- kui ka jaotustabelina, enamasti aga eelistatakse viimast (sisaldab suhtelisi sagedusi protsentides). Esimesse klassi kuuluvaks loetakse kõik need lapsed, kes pole küsitluspäevaks veel viieaastaseks saanud, kuigi nende vanuseks võib olla neli aastat, üksteist kuud ja kakskümmend üheksa päeva. Viieaastased lapsed aga kuuluvad juba teise klassi. Analoogiline on jaotus ka ülejäänud klasside puhul. Tuleb märkida, et sageli kogutakse materjal otsekohe klasside kaupa (iga anketeeritav märgib, millisesse vanuserühma ta kuulub). Kui aga seda ei ole tehtud, võib klassifitseerida ka arvuti. Nii saame oma tabeli esitada paarikümne klassi abil, mis on reeglina võrdsed (erandiks on 3. ja 4. klass vajaduse tõttu eraldi arvestada alla ja üle 16-aastasi, ning klassid alates 13-ndast vanemate aastakäikude väikese arvukuse tõttu. Matemaatiliste tehete sooritamise ning sagedusgraafikute esitamise seisukohast on võrdsete (või peaaegu võrdsete) klasside juht kindlasti mugavaim. Siiski tuleb mõnikord kasutada ka oluliselt ebavõrdseid klasse, kuna vastasel korral oleks sageduste jaotus liiga ebavõrdne (vt. näiteks tabel 5, mis tugineb tartlaste küsitluse materjalidele).

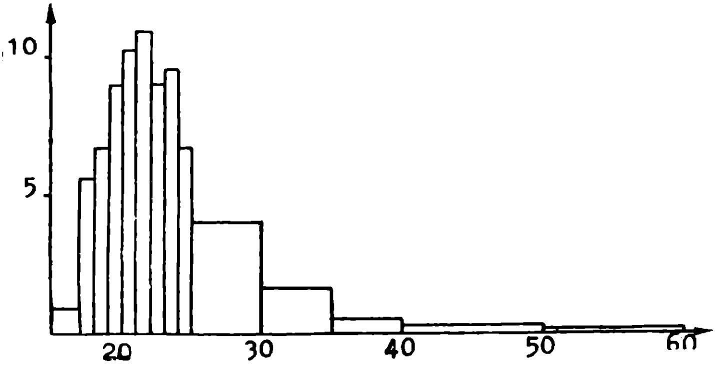
Sellisel puhul tuleb aga olla tähelepanelik tulpdiagrammi koostamisel: õige on diagramm joonestada selliselt, et sagedustega on võrdelised tulpade pindalad —, mitte aga kõrgused (sest ebavõrdse pikkusega klasside korral ei ole pindalad tulpade kõrgustega võrdelised, vt. joon. 2).

[2] Eesti NSV elanikkonna 1970. a. vanusejaotuse tabel on võetud raamatust «Eesti NSV rahvamajandus 1970. aastal», Tallinn, 1971.

Vanus esmakordsel abiellumisel

Vanus aastates	16—17	18	19	20	21	22	23	24
Suhteline sagedus	1,8	5,5	6,6	8,7	10,3	10,8	8,7	9,5
Empiiriline jaotusfunktsioon	0,018	0,073	0,139	0,226	0,329	0,437	0,524	0,619

Vanus aastates	25—26	27—29	30—34	35—39	40—49	50—59	≥60
Suhteline sagedus	13,4	11,7	8,4	2,8	1,4	0,3	0,1
Empiiriline jaotusfunktsioon	0,753	0,870	0,954	0,982	0,996	0,999	1,000



Joonis 2.

Samuti võib tekkida vajadus vastusevariantide ühendamiseks nominaaltunnuste korral; seda eriti siis, kui mõni vastusevariant esineb väga väikesearvuliselt. Näiteks tunnusel «elukutse» võiks ühendada järgmised väheearvukad vastusevariandid klassidesse.

Elukutse

Tabel 6

Näitleja, raamatukogu juhataja	Arst, õpetaja	Teadlane, õppejõud jne.

Loomulikult tuleb siin arvesse ainult mingis mõttes lähedaste vastusevariantide ühendamine. Sobiv on ühendada nii, et ühessegi klassi ei jääks alla 10 (erijuhul — mitte alla 5) vastusevariandi.

Tõenäosuste (protsentide) usalduspiirid

Enamasti on sotsioloogiliste uurimuste eesmärgiks üldistada valimi (väljavõtte) põhjal saadavaid tulemusi kogu uuritavale üldkogumile. Erandiks on mõningad statistilised ja demograafilised andmed (ka rahvaloenduse andmed), mis haaravad *kogu üldkogumit* ning mis ei vaja analüüsimiseks matemaatilise statistika meetodeid (vt. näiteks tabel 4).

Mis puutub aga valimi põhjal saadavaisse tulemustesse, siis ka kõige paremini valitud (esindava ehk representatiivse) valimi puhul sõltuvad tulemused mõnevõrra juhusest ja on üksnes ligikaudselt üldkogumile ülekantavad. Kuidas aga seda ligikaudsust hinnata?

Matemaatilises statistikas kasutatakse sageli usalduspiiride mõistet. Selgitame järgnevas selle ideed.

Oletame, et meil on tarvis valimi abil hinnata mingit näitajat m. Selle täpset väärtust ei saa me määrata, küll aga saame valimi abil leida vahemiku (a, b) nii, et tõenäosus selleks, et hinnatav suurus m rahuldaks võrratusi

$$a \leqslant m \leqslant b,$$

oleks näiteks 0,95. Sel juhul me ütleme, et a ja b moodustavad näitaja m 95%-lised usalduspiirid; arv 0,95 on usaldusnivoo. Usaldusnivooks valitakse 0,95 asemel sageli ka 0,99; sel korral pikeneb vahemik (a, b).

Usaldusnivoo tähendust saaksime interpreteerida järgmiselt.

Oletame, et meil on ankeedis 100 tunnust. Iga tunnuse jaoks arvutame ühe näitaja ja määrame igaühele neist 95%-lised usalduspiirid (need tulevad loomulikult iga tunnuse puhul erinevad). Keskmiselt 95 tunnuse korral asubki selle näitaja õige väärtus tema jaoks arvutatud usalduspiiride vahel, viie tunnuse korral aga langeb näitaja õige väärtus tema usalduspiiridest (pisut) välja, kusjuures selle põhjuseks on mitte arvutusviga, vaid juhus.

Kui aga kasutaksime 99%-lisi usalduspiire, langeks ülalkirjeldatud ankeedi puhul keskmiselt ainult üks näitaja arvutatud usalduspiiridest välja; loomulikult ei tea me seda, missuguse tunnuse puhul meil nii suure hindamisveaga on tegemist. Siin tuleb silmas pidada, et väide on õige *keskmiselt*. Üksikute ankeetide korral võib usalduspiiridest välja langeda 0%—3%, võib-olla ka 10%—15% õigetest väärtustest. *Mida suuremat ankeetide (ja seega ka tunnuste) arvu me vaatleme, seda lähedasem on tegelik usalduspiiridest väljalangevate tunnuste arv teoreetilisele, keskmisele väärtusele.*

Esimeseks näitajaks, mille usalduspiiridega me tutvume, on *tõenäosus* (lõpliku üldkogumi korral, nagu see on sageli sotsioloogiliste uurimuste puhul, tähendab see üldkogumi suhtelist sagedust, mis enamasti esitatakse protsentides). Näiteks tabeli 3 põhjal veendume, et valimist 23% moodustavad heledajuukselised neiud. Selle põhjal (eeldades valimi esindavust) võime kinnitada, et ka kogu naisüliõpilasperest on umbes 23% heledajuukselised. Täpsema tulemuse saavutamiseks leiame tõenäosuse (protsendi) usalduspiirid.

Olgu valimis, mille põhjal arvutatakse suhtelised sagedused, n indiviidi. Vaadeldava vastusevariandi (absoluutne) sagedus olgu k; oletame, et $k > 5$ (vastasel korral annaks kirjeldatav metoodika ebatäpse tulemuse). Arvutame veel suuruse $n-k$ ning leiame tõenäosusele 95%-lised usalduspiirid a ja b valemitest

$$\left.\begin{aligned} a&=\frac{k}{n}-1{,}96\cdot\frac{1}{n}\sqrt{\frac{k(n-k)}{n-1}},\\ b&=\frac{k}{n}+1{,}96\cdot\frac{1}{n}\sqrt{\frac{k(n-k)}{n-1}},\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

99%-lised usalduspiirid saame vastavalt valemitest

$$a=\frac{k}{n}-2{,}58\frac{1}{n}\sqrt{\frac{k(n-k)}{n-1}},$$

$$b=\frac{k}{n}+2{,}58\frac{1}{n}\sqrt{\frac{k(n-k)}{n-1}}.$$

Kui n on väiksem kui 100, tuleb kordajad 1,96 ja 2,58 asendada t-jaotuse tabelist vastavalt valimi mahule n valitavate väärtustega.

Nii saame heledapäiste neidude esinemise tõenäosuse 95%-lised usalduspiirid arvutada järgmiselt:

$$n=187;\ k=43;\ n-k=144;$$

$$\frac{1}{n}\sqrt{\frac{k(n-k)}{n-1}}=\frac{1}{187}\sqrt{\frac{43\cdot 144}{187}}\approx 0{,}0308,$$

$$1{,}96\cdot 0{,}0308\approx 0{,}06=6\%.$$

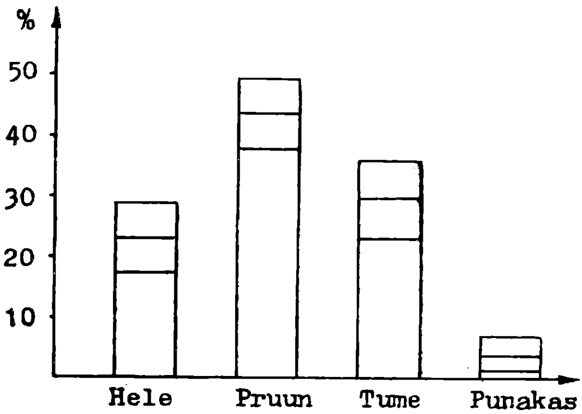
Seega on usalduspiirideks $23{,}0-6{,}0=17{,}0\%$ ja $23{,}0+6{,}0=29{,}0\%$. Samal viisil saaksime arvutada usalduspiirid ka teistele tõenäosustele. Esitame need tabelina (vt. tabel 7), mida illustreerib joonis 3.

Tabel 7

Juuste värvus (95%-lised usalduspiirid)

	Hele	Pruun	Tume	Punakas
Suhteline sagedus	23,0	43,8	29,4	3,7
95%-lised usaldus-piirid	17,0—29,0	37,2—50,4	22,9—35,9	1,0—6,4

Näeme, et suurematele tõenäosustele vastavad pisut laiemad usalduspiirid, kuid *suhteliselt* on suuremate tõenäosuste hinnangud siiski täpsemad (väikese sageduse puhul läheneb hinnangu viga tõenäosuse enese väärtusele!) Siin ongi üks põhjusi, miks väikese sagedusega väärtused on edasise töö seisukohalt ebasoovitavad ning neid on kasulik ühendada (vt. tabel 6).



Joonis 3.

Usalduspiiride võrdlemisel saame teha ka järeldusi tõenäosuste võrdlevate suuruste kohta. Nii võime antud tabeli põhjal kinnitada, et punapäid on tartlannade seas oluliselt vähem kui blonde ja brünette, pruunijuukselisi aga rohkem kui blonde ja samuti ka rohkem kui tumedapäiseid. Blondide ja brünettide arvulise erinevuse tõestamiseks on aga valim liiga väike: usalduspiirid kattuvad tugevasti. Erinevuse tõestamiseks tuleks valimi mahtu 3—4 korda suurendada, nagu näeme järgmises punktis.[3]

Samal viisil võib usalduspiirid arvutada tabelis 2 ning tabelis 5 esitatud tunnustele. Oleks aga viga ülalkirjeldatud meetodil arvutada usalduspiire tunnusele, mida esitab tabel 4: kuna andmed on antud kogu vabariigi kohta, ei sisalda nad valimi viga. Muud liiki vigade (loendus-, arvutus- jne.) arvessevõtmiseks aga ülalkirjeldatud metoodika üldiselt ei sobi. Samuti ei ole õige vaadelda ENSV elanikkonda valimina mingist üldkogumist (NSVL elanikkonnast) — väljavõte ei ole esindav ning selle põhjal pole üldistuste tegemine lubatud.

[3] Mõnevõrra tundlikumate meetoditega tõenäosuste erinevuse kindlakstegemiseks võib tutvuda viites 1 märgitud käsiraamatust.

Valimi mahu määramine tõenäosuse vea abil

Vaatleme, milliseid järeldusi saame veel teha tabelist 7. Oletades, et TRÜ-s käib 3000 naisüliõpilast, võime oma ankeetküsitluse põhjal väita, et heledapäiseid neide on nende seas vähemalt 510, kuid mitte rohkem kui 870.

Nagu näeme, on (tabelis 3 saadud) hinnang üpriski ebatäpne. Põhjuseks on siin suhteliselt väikesearvuline valim. Hinnangu kuju analüüsides näeme, et valimi mahu suurenemisele r korda kaasneb vea vähenemine $\sqrt{r}$ korda, seega ka usalduspiiride kitsenemine $\sqrt{r}$ korda. Käesolevas näites tuli vea suuruseks keskmiselt 6% (vt. arvutusi). Et see viga oleks 2% (usalduspiirkonna ulatus vastavalt 4%), peaks väljavõte suurenema $(6/2)^2 = 9$ korda, seega haarama umbes 1700 küsiteldavat! Praktiliselt ei ole aga nii suurt täpsust protsentide hinnangutes tarvis, ja seetõttu piisabki enamasti mõnesaja- kuni tuhandeindiviidiliste valimite uurimisest.

Vastavalt lubatavale tõenäosuse hinnangu veale on võimalik valimi mahtu ka ette planeerida. Olgu näiteks nõutud, et tõenäosuse hinnang ei tohi tõenäosusega 0,95 ületada kaht sajandikku, s. t.

$$1{,}96 \cdot \frac{1}{n} \sqrt{\frac{k(n-k)}{n-1}} < 0{,}02.$$

Et alati $\frac{k(n-k)}{n^2} \leqslant \frac{1}{4}$, saame siit tingimuse

$$1{,}96 \cdot \frac{1}{2\sqrt{n-1}} < 0{,}02,$$

millest järeldub

$$\sqrt{n-1} > 49,$$

ja järelikult otsitavaks valimi mahuks on $n \approx 2500$.

Ligikaudu saame seose

$$n \approx \frac{1}{\delta^2}, \tag{2}$$

kus δ on viga, mida lubatakse ületada vaid maksimaalselt 5%-lise tõenäosusega.

Lõplik üldkogum

Kõik seni esitatud arvutused ei kasutanud kuskil üldkogumi mahtu N; sisuliselt eeldati üldkogumi lõpmatust. Niisugune eeldus on õigustatud, kui *üldkogumi maht N ületab valimi mahu n vähemalt kümnekordselt.* Vastasel korral võimaldab aga üldkogumi mahu N arvestamine valemeid mõnevõrra täpsustada (usalduspiire kitsendada). Samuti on otstarbekas arvestada üldkogumi mahtu valimi mahu määramisel, vastasel korral võime valimi mahu saada üldkogumi mahule lähedase või seda koguni ületava suurusega!

Usalduspiiride avaldise (1) asemele saaksime, arvestades üldkogumi mahtu N, avaldise

$$\frac{k}{n} \mp 1{,}96 \sqrt{\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{N}\right)\frac{k(n-k)}{n(n-1)}}. \tag{3}$$

Valimi mahu n arvutamiseks 5%-lise tõenäosusega sooritatava maksimaalse lubatava vea δ järgi saame valemi

$$\frac{1{,}96}{2}\sqrt{\frac{1}{n}-\frac{1}{N}} < \delta,$$

millest järeldub ligikaudu:

$$n=\frac{N}{N\delta^2+1}. \tag{4}$$

Vaatame nüüd, kui palju muutuvad eelmistes punktides saadud tulemused, kui arvestame, et $N=3000$ ning kasutame valemite (1) ja (2) asemel valemeid (3) ja (4).

$$\sqrt{\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{N}\right)\frac{k(n-k)}{n(n-1)}} \approx 0{,}0300; \qquad 1{,}96\cdot 0{,}0300 \approx 0{,}06,$$

seega usalduspiirid praktiliselt ei muutunud (tõepoolest, $N:n = 16 > 10$).

Võttes aga $\delta = 0{,}02$, saame valemist (4)

$$n=\frac{3000}{1{,}2+1}=1364 \approx 1400,$$

seega vajalik valimi maht muutus oluliselt.

Empiirilise jaotuse võrdlemine teoreetilise jaotusega

Sagedustabeli abil saame kontrollida, kas uuritav väljavõte kuulub ühte või teise tuntud (tuntud jaotusega) üldkogumisse. Vaatleme näitena järgmist ülesannet.

Olgu real teatrietendustel anketeeritud kõiki vaatajaid. Muuhulgas on kindlaks tehtud, et vaatajaskonna hulgas esines 320 TRÜ üliõpilast, kes jagunesid teaduskondade vahel järgmiselt:

Tabel 8

Üliõpilaste teatrikülastatavus

Teaduskond	Sagedus
Ajaloo-Keele	85
Arsti	77
Bioloogia-Geograafia	23
Füüsika-Keemia	42
Kehakultuuri	10
Majandus	31
Matemaatika	40
Õigus	12
Σ	320

Tabel 9

TRÜ üliõpilaskonna struktuur 1. I 1972

Teaduskond	Sagedus	Tõenäosus %
Ajaloo-Keele	892	20,9
Arsti	1282	30,0
Bioloogia-Geograafia	351	8,2
Füüsika-Keemia	509	11,9
Kehakultuuri	190	4,5
Majandus	464	10,8
Matemaatika	372	8,7
Õigus	212	5,0
Σ	4272	100,0

Küsitakse: kas kõigi teaduskondade üliõpilaste teatrihuvi on võrdne, s. t., teatrikülastajate arvu jaotus langeb ühte üliõpilaste arvu jaotusega teaduskondade kaupa?

Et meil tabelisse 9 on võetud *kõik* TRÜ-s õppivad üliõpilased, võime selle põhjal arvutada *teoreetilised tõenäosused* ühte või teise teaduskonda kuulumiseks; need tõenäosused tulevad võrdelised vastavate teaduskondade üliõpilaste arvudega, tabelis 9 on need antud viimases veerus protsentidena. Võrreldes tabeliga 8, märkame erinevusi. Kas need erinevused on aga põhjustatud lihtsalt juhusest või asjaolust, et eri teaduskondade üliõpilased külastavad teatrit erineva sagedusega?

Sellele küsimusele vastuse saamiseks kasutame χ^2-testi. Arvutame iga vastusevariandi (klassi) jaoks suuruse

$$\frac{(np-k)^2}{np},$$

kus n on küsiteldavate üldarv (valimi maht), k — vaadeldava vastusevariandi sagedus ja p selle vastusevariandi tõenäosus. Summa

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{(np_i-k_i)^2}{np_i},$$

kus m on vastusevariantide või klasside arv (antud juhul $m=8$), tähistame tähega H_{m-1}. Saadud summat võrdleme χ^2-jaotuse tabelist vabadusastmete arvu $m-1$ korral saadavate arvudega. Vastavalt sellele, milliste arvude vahel arvutustulemus H_{m-1} paikneb, saame meid huvitava väite suurema või väiksema tõenäosusega vastu võtta või kummutada. Märgime siinjuures aga, et olulisuse nivoo (eksimise tõenäosuse) valik ei ole matemaatiliselt määratud ja sõltub probleemi olulisusest ning ka konkreetse teadusharu tavast. Esitame siin näitena mõttekäigu meditsiinialastes töödes tavaliste olulisuse nivoode puhul (sotsioloogias lubatakse sageli ka suuremaid vea tõenäosusi).

$$\text{Kui } H_{m-1} > \chi^2_{0{,}01},$$

kinnitame täie veendumusega (eksimisvõimalus on väiksem kui $^1/_{100}$), et *uuritav jaotus ei ole antud teoreetilise jaotusega kooskõlas.*

$$\text{Kui } \chi^2_{0{,}05} < H_{m-1} < \chi^2_{0{,}01},$$

võime lugeda üpriski tõenäoliseks (eksimisvõimalus on väiksem kui $^1/_{20}$), et *uuritav jaotus ei ole antud teoreetilise jaotusega kooskõlas.*

$$\text{Kui aga } H_{m-1} < \chi^2_{0{,}05},$$

tuleb lugeda tõenäoseks, et *uuritav jaotus on kooskõlas antud teoreetilise jaotusega.*

Antud näite puhul tähendaks viimane tulemus, et olulisi erinevusi eri teaduskondade üliõpilaste teatrikülastamises ei esine.

Teostame nüüd vajalikud arvutused, mis ülevaatlikkuse mõttes on koondatud tabelisse 10.

Tabel 10

Teaduskond	np_i	$np_i - k_i$	$(np - k)^2$	$\frac{(np-k)^2}{np}$
Ajaloo-Keele	67	—18	324	4,84
Arsti	96	19	361	3,76
Bioloogia-Geograafia	26	3	9	0,35
Füüsika-Keemia	38	—4	16	0,42
Kehakultuuri	14	4	16	1,14
Majandus	35	4	16	0,46
Matemaatika	28	—12	144	5,14
Õigus	16	4	16	1,00
Σ	320	0		17,11

χ^2-jaotuse tabelist [1] näeme, et vabadusastmete arvu $8 - 1 = 7$ korral on

$$\chi^2_{0{,}05} = 14{,}1; \quad \chi^2_{0{,}025} = 16{,}0 \text{ ja } \chi^2_{0{,}01} = 18{,}5.$$

Et praegu $H_7 = 17{,}11$, kehtib järelikult võrratus

$$\chi^2_{0{,}025} < H_7 < \chi^2_{0{,}01},$$

seega tõenäosus jaotuste kooskõlaks on väiksem kui 0,025 ning õige on järeldada, et eri teaduskondade üliõpilaste teatrikülastamise sagedus on erinev. Siinjuures märkame tabelit 10 silmitsedes, et suuremad kõrvalekaldumised oodatust on Matemaatika-, Ajaloo-Keele- ja Arstiteaduskonnas (kahel esimesel on külastatavus oodatust suurem, viimasel väiksem). Kasutades asjaolu, et vabadusastmete arvu 1 korral on $\chi^2_{0,05}=3{,}84$, võime siit ühtlasi järeldada, et Matemaatika- ja Ajaloo-Keeleteaduskonnas üksikult võetuna on tegelik teatrikülastatavus oodatust *oluliselt erinev.*

Niisugusel viisil on võimalik kontrollida, kas mingi valim esindab üldkogumit representatiivselt, kui valimi jaotus mingite tunnuste järgi on teada. Tavaliselt sobivad nendeks tunnusteks demograafilised tunnused, mille jaotus üldkogumis on reeglina mitmetest allikatest (rahvaloendused, jooksev statistika) teada.

Teoreetilise jaotuse võime aga määrata ka puhtteoreetilistel kaalutlustel. Näiteks võiksime küsida, kas mingisse väljavõttesse sattus võrdselt esindajaid kõigist teadukondadest — s. t. võrrelda antud jaotust ühtlase jaotusega. Teoreetilised tõenäosused on sel juhul kõik võrdsed: $p=\frac{1}{m}$, (kus m on klasside — antud näites teaduskondade — arv), ning meil tuleks arvutada summa

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{(n/m-k_i)^2}{n/m}=\frac{1}{nm}\sum_{i=1}^{m}(n-mk_i)^2\sim H_{m-1};$$

edasine mõttekäik langeb ühte ülalkirjeldatuga.

Samuti on võimalik kontrollida ka seda, kas uuritav tabel kirjeldab normaaljaotusega, Poissoni või mõne teise teoreetilise jaotusega juhuslikku suurust. Loomulikult on sellisel ülesandel mõtet ainult arvuliste tunnuste korral.

Empiiriline jaotusfunktsioon

Vaatleme mingit tunnust, mille väärtused on järjestatud (sellised on ka kõik arvulised tunnused). Sageli pakub huvi leida paralleelselt jaotustabeliga ka jaotusfunktsioon [4] (kasutatakse ka nimetust «summeeritud sagedused»). Toome näite Tartu meeselanikkonna jaotusest hariduse järgi, kus arvutame jaotustabeli põhjal ka empiirilise jaotusfunktsiooni ($n=2684$) (vt. jooniseid 4 ja 5).

Tabeli viimase rea saame suhteliste sageduste summeerimisel:

$$F^*(x_i)=\sum_{j=1}^{i}\frac{k_i}{n},$$

kus liidame kõik suhtelised sagedused alates esimesest ja lõpetades i-ndaga (vaadeldavas lahtris paiknevaga). Tõlgendada saame neid arve järgmiselt: 0,255 osa ehk umbes veerand tartlastest on

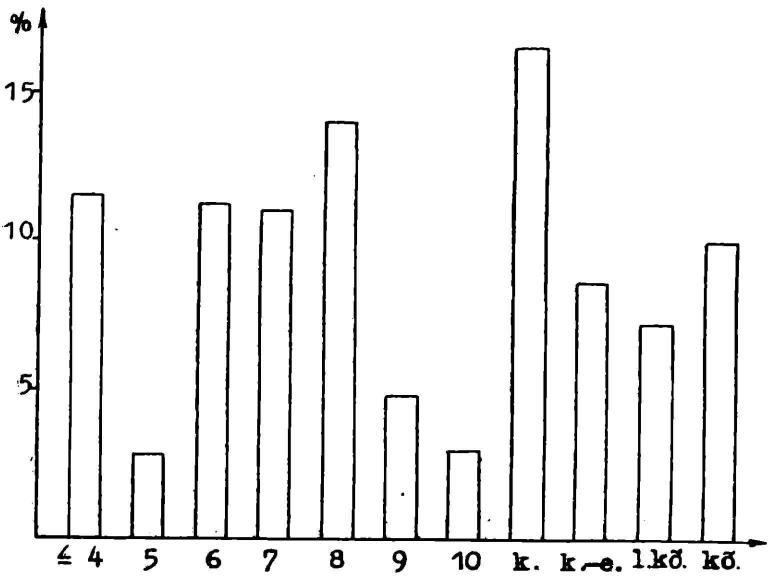
[4] Märgime, et kui tõenäosusteoorias määratletakse jaotusfunktsioon võrratusega $F_X(x)=P(X<x)$ (vt. viide 1), siis praktilises statistikas kasutatakse sagedamini seost $P(X\leqslant x)$; nii teeme ka käesolevas töös.

6-klassilise ja madalama haridusega; 0,505 osa ehk umbes pool tartlastest on 8-klassilise ja madalama haridusega jne.

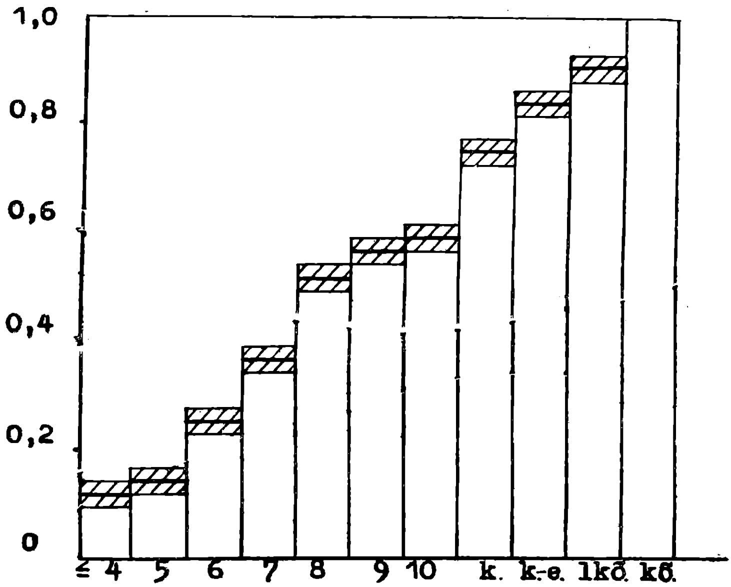
Tabel 11

Haridus	Kuni 4 klassi (4. kaasa arvatud)	5 klassi	6 klassi	7 klassi	8 klassi	9 klassi
Suhteline sagedus %	11,6	2,7	11,2	11,1	13,9	4,7
Empiiriline jaotusfunktsioon	0,116	0,143	0,255	0,366	0,505	0,552

Haridus	10 klassi	11 klassi	Keskeriharidus	Lõpetamata kõrgem	Kõrgem
Suhteline sagedus %	2,9	16,4	8,5	7,1	9,9
Empiiriline jaotusfunktsioon	0,581	0,745	0,830	0,901	1,000



Joonis 4.



Joonis 5.

Arvutades suurused $1-F^*(x_i)$, saame nn. täiendjaotusfunktsiooni, mis näitab x_i-st *kõrgema haridusega* inimeste osa. Nii leiame, et ligi pool $(0{,}495=49{,}5\%)$ tartlastest on kõrgema kui 8-klassilise (s. o. vähem 9-klassilise) haridusega; keskkooli on lõpetanud $1-0{,}581=0{,}419\approx42\%$ tartlastest jne.

Tuleb aga märkida, et niisugune protsendihinnang võib, nagu ülalgi nägime, sisaldada juhuslikku viga. Et seda arvesse võtta, tuleks arvutada *empiirilise jaotusfunktsiooni usaldusspiirid*. Küllalt suure n väärtuse korral võime selleks kasutada ligikaudset valemit (2), mille kohaselt 95%-lised usaldusspiirid saame seosest

$$F^*(x_i)\pm\frac{1{,}36}{\sqrt{n}},$$

99%-lised usaldusspiirid aga seosest

$$F^*(x_i)\pm\frac{1{,}63}{\sqrt{n}}.$$

Arvutades saame käesoleval juhul

$$\frac{1{,}36}{\sqrt{n}}=\frac{1{,}36}{\sqrt{2684}}=0{,}026;\qquad \frac{1{,}63}{\sqrt{2684}}=0{,}031.$$

Seega võime kinnitada 95%-lise tõenäosusega, et näiteks vähemalt 8-klassilise haridusega on $1-0{,}366 \pm 0{,}026$, s. o. 61 kuni 66% meessoost tartlasi (vt. joonis 3).

Sel viisil leitud usalduspiire võime kasutada ka empiirilise jaotuse võrdlemiseks mingi etteantud teoreetilise jaotusega: kui teoreetiline jaotusfunktsioon iga x väärtuse korral paikneb arvutatud usalduspiirkonnas, võime lugeda teoreetilise ja empiirilise jaotuse ühtelangevaks ja oletada, et see teoreetiline jaotus kirjeldab uuritavat juhuslikku suurust. Näeme, et iga empiiriline jaotus võib ühte langeda mitme erineva teoreetilise jaotusega, kusjuures *ühtelangemine on seda parem, mida väiksema usaldusnivooga* $1-\alpha$ *usalduspiirkonda teoreetiline jaotusfunktsioon satub.* Kui aga teoreetiline jaotusfunktsioon kasvõi üheski punktis usalduspiiridest välja langeb, võime kinnitada tõenäosusega $1-\alpha$, (olulisuse nivooga α), et see teoreetiline jaotus ei kirjelda uuritavat juhuslikku suurust (üldkogumi jaotust).

Keskväärtus ja teised paiknemise karakteristikud

Sageli soovitakse uuritavat juhuslikku suurust üheainsa arvu abil iseloomustada. Kui tunnus on *arvuliste väärtustega,* sobib selliseks arvuks kõige paremini keskväärtus (ooteväärtus).

Näiteks naturaalarvuliste väärtustega tunnuse puhul saame keskväärtusele hinnanguks valimi aritmeetilise keskmise

$$\bar{x}=1\cdot\frac{k_1}{n}+2\cdot\frac{k_2}{n}+3\cdot\frac{k_3}{n}+\ldots=\frac{1}{n}\sum i\cdot k_i, \qquad (5)$$

kus k_i on vastava väärtuse esinemise sagedus.

Nii leiame näiteks valimi põhjal, et eesti rahvusest tartlannade keskmine laste arv on (vt. tabel 2)

$$\frac{1}{3165}(1\cdot 793+2\cdot 656+3\cdot 251+4\cdot 99+5.35+6\cdot 18+7\cdot 8+8\cdot 5+10\cdot 4)\approx$$
$$\approx 1{,}16.$$

Valem (5) kehtib üldiselt suvalise arvtunnuse puhul, kuid seda on tülikas rakendada, kui tunnuse erinevate väärtuste arv on suur.

Kui aga tunnuse väärtused on klassifitseeritud, võime kasutada klasside keskpunkte. Saame siis järgmise valemi keskväärtuse hinnangu $\bar{x}$ arvutamiseks:

$$\bar{x}=\frac{a_0+a_1}{2}\cdot\frac{k_1}{n}+\frac{a_1+a_2}{2}\cdot\frac{k_2}{n}+\ldots+\frac{a_{m-1}+a_m}{2}\cdot\frac{k_m}{n}=$$
$$=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{m}(a_{i-1}+a_i)k_i. \qquad (6)$$

Selle valemi järgi võiksime arvutada näiteks tartlase keskmise vanuse või keskmise kuupalga hinnangu. Arvutame näitena tartlanna esmakordse abiellumise keskmise vanuse, kasutades tabelit 5:

$$\bar{x}=\frac{1}{100}(1{,}8\cdot17+5{,}5\cdot18{,}5+6{,}6\cdot19{,}5+8{,}7\cdot20{,}5+10{,}3\cdot21{,}5+$$
$$+10{,}8\cdot22{,}5+8{,}7\cdot23{,}5+9{,}5\cdot24{,}5+13{,}4\cdot26{,}0+11{,}7\cdot28{,}5+8{,}4\cdot32{,}5+$$
$$+2{,}8\cdot37{,}5+1{,}4\cdot45{,}0+0{,}3\cdot55{,}0+0{,}1\cdot60{,}0)=24{,}9,$$ s. o. 24 aastat ja 11 kuud.

Paneme tähele, et siin on arvutamisel arvestatud klasside ebavõrdsust. Klasside keskpunktide leidmist võib jälgida ka jooniselt 2.

Keerukam on olukord mittearvuliste tunnustega. Võtame näiteks hariduse. Tõsi, seda tunnust oleks võimalik arvuliseks kodeerida, võttes aluseks näiteks õpinguaastate arvu. Kuid siingi tekib mitmeid küsitavusi — 10- ja 11-aastane keskkool, erineva semestrite arvuga kõrgem kool jne. Enamasti on järjestatavate tunnuste arvudena väljendamine veelgi problemaatilisem. Selletõttu ei ole sobiv ka nende iseloomustamiseks keskväärtust kasutada, sest viimane tugineb vahetult tunnuste arvväärtusele.

Selle asemel sobib järjestatud tunnuse iseloomustamiseks «keskmine väärtus» — mediaan. Mediaan on niisugune tunnuse väärtus, millest täpselt pool valimit jääb vasakule (on «väiksemad»). Teine pool väljavõttest paikneb siis mediaanist paremal (on temast «suuremad» või «võrdsed»).

Mediaani on hea leida empiirilise jaotusfunktsiooni järgi: mediaaniks on selline tunnuse väärtus x_i, mille puhul empiiriline jaotusfunktsioon saavutab väärtuse 0,5 (ja enamasti ka ületab selle). Nii on hariduse jaotuse puhul mediaaniks väärtus «8 klassi»; et aga mediaan paikneb üsna kahe klassi piiri lähedal ($F^*(x)=0{,}505$), võime ka ümmarguselt öelda, et pooltel tartlastest on haridus kaheksa klassi või vähem, pooltel aga üheksa klassi ja üle selle.

Mõningal juhul sobib keskväärtuse kõrval või isegi selle asemel kasutada mediaani ka arvuliste tunnuste iseloomustamiseks. Eriti tuleks mediaani keskväärtuse asemel soovitada tugevasti ebasümmeetrilise, ühes suunas väljavenitatud jaotustega tunnuste korral. Arvulise tunnuse mediaani saab arvutada suurema täpsusega kui järjestatud tunnuse oma: järjestatud tunnuse puhul saab näidata vaid mediaanklassi, kuna arvulise tunnuse puhul võib arvestada ka elementide paiknemist klassis, nagu näeme järgnevas.

Vaatleme näitena tunnust «tartlanna vanus abiellumisel». Ehkki arvutasime sellele keskväärtuse hinnangu, näeme, et keskväärtust mõjutavad väga tugevasti üksikud eriti vanad abiellujad, mistõttu see näitaja tunnust halvasti iseloomustab. Hoopiski parem iseloomustaja on seetõttu mediaan, mida ka kogu maailma demograafilises kirjanduses antud tunnuse iseloomustamiseks kasutatakse.

Arvutame mediaani. Tabelist 5 näeme, et mediaanklassiks on vanus 23. Vaadeldes selle klassi noorimat (just 23-aastaseks saanud naist) näeme, et temast nooremaid on 43,7%, 23-aastasi on aga 8,7%; meid huvitab aga selline 23-aastane naine, kellest on täpselt 50% naisi nooremad. Selleks peab temast nooremate hulgas olema ka 50 — 43,7 = 6,3% 23-aastasi naisi; mediaaniks oleva indiviidi vanuseks (oletades, et 23-aastased jagunevad oma vanuse poolest ühtlaselt) on 23 ja $\frac{6,3}{8,7}$ s. o. 23,7 aastat ehk 23 aastat ja 9 kuud.

Seega on abiellumisvanuse mediaaniks 23 aastat ja 9 kuud, mis keskväärtusest erineb aasta ja 2 kuu võrra.

Kui aga tunnus on nominaalne, nii et tal ka järjestus puudub, ei ole ka mediaani võimalik defineerida (puudub empiiriline jaotusfunktsioon). Niisuguseid tunnuseid on sobiv iseloomustada maksimaalse sagedusega vastusevariandi — moodi abil. Nii on tunnuse «juuste värv» moodiks «pruun».

Moodi võib määrata ka järjestatavate ning arvuliste tunnuste jaoks. Nii on päris huvitav teada, et arvukaim haridusrühm Tartus on keskharidusega elanikud; samuti, et arvukaim vanuserühm Tartu elanikkonnas on 20—24 aastased (ilmselt avaldab siin mõju üliõpilaste osa tartlaste seas).

Dispersioon, standardhälve ja teised hajuvuse karakteristikud

Kui keskväärtus, mediaan ja mood võimaldavad iseloomustada tunnuse iseloomulikemaid väärtusi, seega tunnuse paiknemist, siis tunnuse hajuvust kirjeldavate karakteristikutega tuleb meil tutvuda käesolevas punktis.

Tuntuimad on arvtunnuse hajuvuse karakteristikud — dispersioon, mille hinnanguteks on vastavalt

$$s^2=\frac{1}{n-1}[\sum i^2k_i - n\bar{x}^2] \tag{7}$$

täisarvuliste väärtustega tunnuste korral,

$$s^2=\frac{1}{n-1}\left[\sum\left(\frac{a_{i-1}+a_i}{2}\right)^2 k_i - n\bar{x}^2\right] \tag{8}$$

klassifitseeritud väärtustega tunnuste korral, ning ruutjuur dispersioonist — standardhälve, mida tähistatakse tähega s ja loetakse alati positiivseks;

$$s=\sqrt{\frac{1}{n-1}[\sum i^2k_i - n\bar{x}^2]}\,. \tag{9}$$

Arvutamise tulemusena saame tartlannade laste arvu dispersiooniks (vt. tabel 2 ja $\bar{x}$ väärtus lk. 63).

$$s^2=\frac{1}{3164}(1\cdot793+4\cdot656+9\cdot251+16\cdot99+25\cdot35+36\cdot18+49\cdot8+$$
$$+64\cdot5+100\cdot4-3165\cdot1{,}16^2)=1{,}967;$$
$$s\approx1{,}40;$$

Abiellumisvanuse dispersiooni arvutamisel lahutame kõigist klassikeskmistest arvu 25, samuti ka keskväärtuse hinnangust $\bar{x}$. Dispersioon selle tagajärjel ei muutu, küll aga läheb arvutamine lihtsamaks:

$$s^2=\frac{1}{100}[1{,}8\cdot(-8)^2+5{,}5\cdot(-6{,}5)^2+6{,}6\cdot(-5{,}5)^2+8{,}7\cdot(-4{,}5)^2+$$
$$+10{,}3\cdot(-3{,}5)^2+10{,}8\cdot(-2{,}5)^2+8{,}7\cdot(-1{,}5)^2+9{,}5\cdot(-0{,}5)^2+$$
$$+13{,}4\cdot1^2+11{,}7\cdot3{,}5^2+8{,}4\cdot7{,}5^2+2{,}8\cdot12{,}5^2+1{,}4\cdot20^2+0{,}30\cdot30^2+$$
$$+0{,}1\cdot35^2-100\cdot(-0{,}1)^2]\approx29{,}57;$$
$$s=5{,}45.$$

Standardhälve avaldub samades ühikutes kui uuritav tunnus; seega võime öelda, et abiellumisvanuse standardhälbeks on 5,45 aastat.

Kui tunnus on ligikaudselt normaaljaotusega, siis langeb vahemikku

$$(\bar{x}-s,\ \bar{x}+s)$$

umbkaudu 2/3 kõigist vastustest; vahemikku

$$(\bar{x}-2s,\ \bar{x}+2s)$$

üle 95% kõigist vastustest ning ligi 99,9% vastustest langeb vahemikku

$$(\bar{x}-3s,\ \bar{x}+3s).$$

Viimases näites on $\bar{x}-s=24{,}9-5{,}45=19{,}45$; $24{,}9+5{,}45=$ $=30{,}35$.

Tabelist 5 näeme, et vahemikus $(\bar{x}-s,\ \bar{x}+s)$ paikneb umbes 70% kogu materjalist; tulemus on üsna ootuspärane, sest kuigi uuritava tunnuse jaotus tugevasti ebasümmeetrilisena erineb oluliselt normaalsest, on ta keskmises osas siiski normaaljaotusega päris hästi lähendatav.

Dispersiooni ja standardhälvet on mõtet arvutada ainult arvuliste väärtustega tunnuse jaoks. *Järjestatud tunnuse* puhul on standardhälbe asemel sobivateks *hajuvuse karakteristikuteks mitmesugused kvantiilid* [1].

Nii on sisuliselt standardhälbele lähedased sekstiilid, s. o. niisugused väärtused x' ja x'', et empiiriline jaotusfunktsioon neis punktides omandab väärtused

$$F^*(x')=\frac{1}{6}; \quad F^*(x'')=\frac{5}{6}.$$

Tõepoolest, nende punktide (samuti kui punktide $\bar{x}-s$ ja $\bar{x}+s$) vahele jääb 2/3 kogu vastuste hulgast. Tülikas on sekstiilide määramisel ainult see, et järjestatud tunnuste puhul ei saa neid enamasti määrata täpselt, vaid tuleb ära näidata üksnes sekstiilklassid; kui aga soovitakse sekstiile määrata arvulise tunnuse jaoks, saab neid (samuti kui mediaanigi) määrata ka päris täpselt.

Tabelis 11 esitatud näites paikneb alumine sekstiil x' klassis «6 klassi», ülemine aga klassis «lõpetamata kõrgem». Ümmarguselt võime öelda, et 2/3 Tartu meeselanikkonnast on 6-klassilise kuni keskharidusega (sealhulgas ka keskeriharidusega).

Nominaaltunnuse korral ei ole ka kvantiilidel mõtet. Teatava määrani iseloomustab tunnuste hajuvust moodi suhteline sagedus n_{mo} ja kontsentratsioonikordaja.

$$H=\frac{m \cdot n_{mo}}{n},$$

mis näitab, mitu korda on moodi sagedus suurem antud klasside arvuga ühtlase jaotuse sagedusest $\frac{n}{m}$.

Mõnikord pakub huvi ka nominaaltunnuse puhul niisugune (võimalikult väikesearvuline) vastusevariantide hulk, mille valisid $\frac{2}{3}$ vastajaist — s. o. hulk, mis on analoogiline hulgaga $(\bar{x}-s, \bar{x}+s)$ arvutunnuste ja hulgaga (x', x'') järjestatud tunnuste korral. Niisuguse hulga leidmiseks järjestame vastusevariandid moodist alates sageduse kahanemise järjekorras ja leiame järjest suhteliste sageduste summad seni, kuni saame tulemuseks 2/3.

Vaatleme näitena tabelit 3. Moodiks on siin vastusevariant «pruun», moodi suhteline sagedus on 43,8% ning moodi kontsentratsioon

$$\frac{4 \cdot 82}{190} \approx 1{,}7.$$

Klasside järjestus sageduse järgi on: pruun, tume, hele, punakas: 2/3 vastustest on kaetud variantidega pruun ja tume (sageduste summa 73,2%).

Keskväärtuse, mediaani ja moodi usalduspiirid

Ka kõigi paiknemise (samuti hajuvuse) karakteristikute hinnang sõltub mõnevõrra valimist (kuigi eeldame valimi esindavust), sisaldab juhuslikku viga. Seda saame arvestada, võttes ka nende karakteristikute puhul kasutusele usalduspiirid [1].

Normaaljaotusega arvulise tunnuse keskväärtuse usalduspiirid lõpmatu üldkogumi puhul avalduvad kujul:

$$\underline{m} = \bar{x} - t_\alpha s/\sqrt{n}; \qquad \bar{m} = \bar{x} + t_\alpha s/\sqrt{n}, \tag{10}$$

kus t_α leitakse t-tabelist vastavalt usaldusnivoole α ja valimi mahule n; kui $n \geqslant 100$, võime võtta 95%-lise usaldusnivoo korral

$$t_\alpha = 1{,}96 \approx 2;$$

99%-lise usaldusnivoo korral

$$t_\alpha = 2{,}58 \approx 2{,}6;$$

$\bar{x}$ ja s on vastavalt keskväärtuse ja standardhälbe hinnangud (5) või (6) ja (9), n — valimi maht. Kui üldkogumi maht N on lõplik ja ligikaudugi teada, võime arvutada usalduspiirid:

$$\bar{x} \mp t_\alpha s \sqrt{\frac{1}{n} - \frac{1}{N}}, \tag{11}$$

kusjuures märgatav erinevus valemite (10) ja (11) kasutamisel tekib vaid juhul, kui $N < 10n$.

Tuleb märkida, et küllalt suure n väärtuse korral on valemid (10) ja (11) kasutatavad ka suvalise jaotusega arvtunnuse korral. Põhjuseks on siin asjaolu, et suvalise jaotuse korral läheneb $\bar{x}$ jaotus normaalsele, kusjuures lähenemine on seda kiirem, mida lähem on tunnuse jaotus normaalsele. Ettevaatlik tuleb olla aga väikese valimi ($n < 10$) ja tugevasti normaalsest erineva (ebasümmeetrilise, U- või J-jaotuse) korral, mil usalduspiiride arvutamisel tuleks kasutada *suuremaid* t_α väärtusi (näiteks arvutada 95%-lised usalduspiirid, kasutades 99%-liste usalduspiiride jaoks vajalikku t_α väärtust).

M e d i a a n i   u s a l d u s p i i r e on parem arvutada variatsioonrea liikmete järgi, kasutades vastavaid tabeleid [1]. Suurte valimite korral saame kasutada valemit

$$k = \frac{n}{2} - \frac{t_\alpha}{2}\sqrt{n}, \tag{12}$$

et määrata mediaani alumiseks usalduspiiriks oleva liikme järjekorranumbrit; ülemiseks usalduspiiriks on siis vastavalt liige järjekorranumbriga $n - k + 1$.

M o o d i d e   u s a l d u s p i i r i d e arvutamiseks leiame vastavate tõenäosuste usalduspiirid. Kui moodi tõenäosuse usalduspiirid ühegi teise klassi tõenäosuse usalduspiiridega ei kattu, kuulub usalduspiirkonda ainult moodklass. Vastasel korral sisaldab moodi usalduspiirkond ka kõiki neid klasse (vastusevariante), mille tõenäosuste usalduspiirid tema tõenäosuse usalduspiiridega lõikuvad.[3]

Arvutame näitena usalduspiirid tabelites 5, 11 ja 1 antud tunnuste paiknemise karakteristikutele.

Tabeli 5 põhjal saime:

$$\bar{x} = 24{,}9; \quad s = 5{,}45; \quad n \approx 2500.$$

Et valim on umbes 10-protsendiline, on $N = 10n$ ja piisab valemi (10) täpsusest. Saame seega 95%-listeks keskväärtuse usalduspiirideks

$$24{,}9 \pm \frac{2 \cdot 5{,}45}{50} = 24{,}9 \pm 0{,}22,$$

seega on usalduspiirid 24,7 ja 25,1 ehk ümmarguselt 24 aastat 9 kuud kuni 25 aastat ja üks kuu.

Mediaani usalduspiiride arvutamisel tabeli 11 põhjal võtame valemis (12) $n = 2684$; $t_\alpha = 1{,}96$;
seega

$$k \approx 1342 - 26 = 1316;$$

usalduspiirideks on 1316 ja 1369 element, neile vastavad empiirilise jaotusfunktsiooni väärtused $F^*(k) \approx 0{,}49$; $F^*(n + 1 - k) \approx$ $\approx 0{,}51$, seega mediaani usalduspiirid on 8-klassilise hariduse piirkonnas.

Moodi usalduspiirkond tabeli 1 põhjal sisaldab ainult vastusevarianti «pruun», sest selle tõenäosuse usalduspiirid ei kattu ülejäänutega ning võib täiesti kindla veendumusega väita, et vastuste maksimum langeb nimelt pruunijuukseliste kohta.

(Järgneb)

ÜLESANNE

Olgu kruusi kallatud selline kogus vett, mille korral kruusi raskuskese saavutab madalaima asendi. Tõestada, et raskuskese asub siis täpselt veepinnal.

MATEMAATILISED MUDELID ÜHISKONNATEADUSTES

M. Lanin

Kaasaegne maailm avastas ootamatult, et matemaatika o
kindla koha leidnud selle maailma igas osas ja nurgakeses. Praeg
on juba kõik harjunud sõnaühenditega «matemaatiline bioloogia»
«matemaatiline lingvistika», «majandusmatemaatika», «matemaati
line psühholoogia», ja vaevalt et kellelegi tundub võimatuna ühen
dada ükskõik millise teadusharu nimetusega sõna «matemaati
line».

Matemaatika areneb nii laiuti kui ka sügavuti, matemaatik
on hõivanud nüüd tähtsa koha ühiskonna elus. Peamine põhjus o
mitte ainult ja mitte niivõrd matemaatika konkreetsetes edusam
mudes viimaste aastate jooksul, kuivõrd matemaatika piiritute või
maluste tunnetamises ja kasvavate vajaduste tekkimises nend
võimaluste kasutamiseks.

Ühiskonnateadustes on muutunud ikka ilmsemaks, et ainul
sõnaline kirjeldus keeruliste süsteemide ja nende vastastikus
mõju puhul viib üldistustele, mis raskesti alluvad analüüsile
võrdlemisele ja rakendamisele. Sellised raskused ületatakse põhi
liselt sõnade asendamise teel matemaatiliste avaldistega. Märgime
et matematiseerimisprotsess võib välja selgitada teatava sarna
suse paljude probleemide struktuuris, kuigi nad näivad erine
vatena.

Matemaatika rakendamine sotsioloogilistes uurimustes puutub
kokku rea raskustega, millest tähtsamad on järgmised kaks:

1) ühiskonnateadustes on vastastikust seost vaadeldava näh
tuse ja vaatleja vahel väga raske viia miinimumini;

2) sotsioloogia uurib nähtusi, mida võib iseloomustada nii
kvantitatiivsete kui ka kvalitatiivsete tunnustega.

Esmased matemaatilised meetodid, mida sotsioloogias raken
datakse, on ülilihtsad, piirdudes elementaarse matemaatilise sta
tistika ning mitmesuguste tunnuste alusel sorteerimise ning klas
sifitseerimisega. Et need meetodid on väga töömahukad (põhju
seks on siin algmaterjali paratamatult suur maht), on nende edu
kaks läbiviimiseks tingimata vajalik kaasaegse arvutustehnika
eriti aga elektronarvutite kasutuselevõtmine.

Primitiivne on vaadata matemaatika ja arvutusmasinate kasutamisele sotsiaalsetes uurimustes ainult kui arvutuste kiirendamise vahenditele, arvutuspersonali töö kokkuhoidmise vahenditele. Selline vaade on juurdunud põhiliselt seetõttu, et sotsiaalsete uurimuste tulemuste töötlemine elektronarvutitel on seni piirdunud põhiliselt elementaar-statistiliste meetoditega, mis kaugeltki ei ammenda kvantitatiivsete meetodite kogu mitmekesisust.

Sammuks edasi matemaatiliste meetodite rakendamisel sotsiaalsetele nähtustele on protsesside modelleerimine, nende mudelite konkreetsete parameetrite leidmine katsetulemuste põhjal, nende katsetamine, imiteerimine ja edasine kasutamine protsesside prognoosimisel.

Mudeli katsetamisel ja uurimisel (muutes tingimusi ja protsessile mõjuvaid faktoreid) on võimalik teha järeldusi reaalsuses kulgeva protsessi kohta eeldusel, et mudel on õigesti konstrueeritud, s. t. vastab tegelikkusele küllaldase täpsusega. Siis asendab mudeli matemaatiline uurimine katsetamist tegelikkuses. Eriti vajalik on see sotsiaalsete protsesside uurimise puhul, sest igasugune eksperimenteerimine on äärmiselt raske ja riskantne, real juhtudel aga («puhta» eksperimendi puhul teatavate faktorite fikseerimisega) isegi täiesti võimatu, ja seetõttu saab matemaatiline eksperiment mudelil sotsiaalse planeerimise asendamatuks vahendiks. Võib oletada, et tulevikus saab sotsiaalsete nähtuste uurimisel põhiliseks matemaatiliseks meetodiks nimelt modelleerimine.

Kaasajal on häid (hästi «töötavaid») sotsiaalsete nähtuste matemaatilisi mudeleid küllaltki vähe; põhjuseks on siin uuritavate nähtuste keerukus. Samal ajal aga käib intensiivne töö kõige erinevamate sotsiaalsete protsesside ja nähtuste mudelite loomise ja katsetamise suunas.

Toome ühe näite matemaatika kasutamisest sotsiaalsete nähtuste analüüsimisel; olgu selleks õpetajate vajaduse prognoosimine (on meil küllaltki aktuaalne probleem). Et ühiskonnas oleks tulevikus küllaldaselt õpetajaid, tuleb analüüsida õpilaste ja õpetajate arvu vahekorda. Esimeses lähenduses võib lugeda lõpetajate arvu mistahes haridussüsteemi korral võrdeliseks õpetajate arvuga samas süsteemis. Õpetajate arv antud süsteemis muutub lõpetajate arvel, kes hakkavad õpetajateks, ja õpetajate arvel, kes langevad välja, s. o. lähevad pensionile või vahetavad elukutset. Eeldame, et mõlemad need arvud on konstantsed. Tähistame lõpetajate arvu, mis tuleb ühe õpetaja kohta, suurusega α, õpilaste osa, kes hakkavad õpetajateks, tähega β ning väljalangenud õpetajate osa sümboliga γ. Õpetajate arvu suhteline kasv δ avaldub siis järgmiselt:

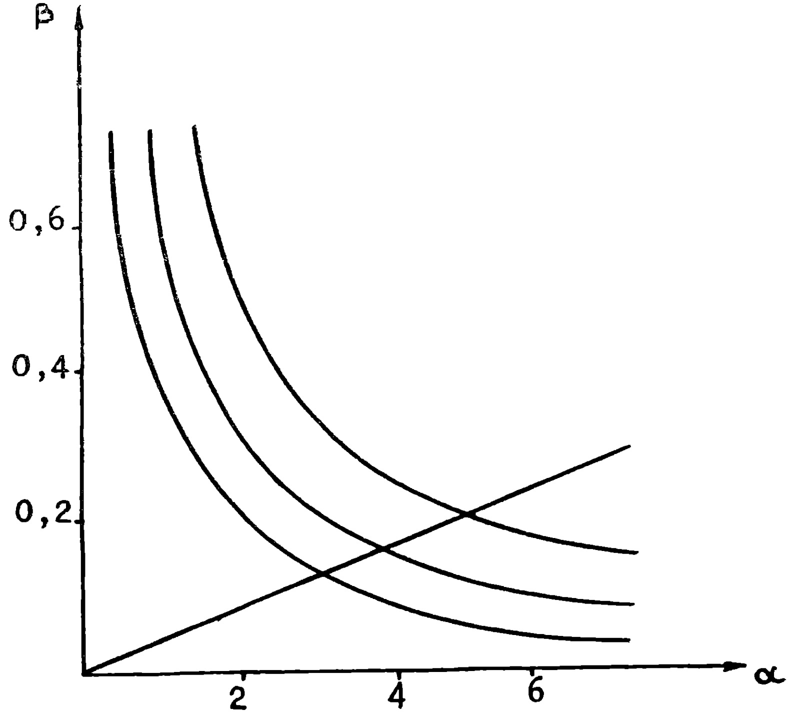
$$\delta = \alpha\beta - \gamma.$$

Näeme valemist, et kui nõutakse rohkem õpetajaid, siis on vaja kas 1) teha ettepanek olemasolevatele õpetajatele välja õpetada rohkem õpilasi, s. t. suurendada suurust α;

2) veenda suuremat arvu lõpetajaid valima õpetaja elukuts s. t. suurendada suurust β või

3) vähendada õpetajate väljalangemist, s. t. vähendada su rust γ.

Ülesande taandamine matemaatilistele seostele võimaldab ava tada ilmsete mõjude kõrval veel rea varjatumaid momente, m tulenevad faktorite omavahelistest mõjutustest. Esitame valem 1 graafiku abil (vt. joonis 1). Oletame näiteks, et olukord ühi konnas on selline, et praktiliselt ei saa kuidagi mõjutada õpetaja



Joonis 1.

arvu pidevat vähenemist väljalangemise teel (nii on see näite juhul, kui väljalangemine toimub põhiliselt pensionile siirdumi arvel), kuid suurusi α ja β võib veel mõjutada. Millised on tul mused õpetajate palga tõstmise puhul? Võiks oletada, et siis su rem osa lõpetajatest valiks õpetaja elukutse (suureneb β), samu et õpetaja olukorra kindlustumine põhjustaks tema töö efektii suse suurenemist (α kasvab). Oletame näiteks, et niihästi suur α kui ka β sõltuvad õpetaja palgast võrdeliselt $\alpha = k_1 s$, $\beta = k$ siis väga madala palga puhul töötavad õpetajad väheefektiivs ja lõpetajad ei taha saada õpetajateks. Vastupidi, küllalt kõrge palga puhul hakkavad olemasolevad õpetajad töötama efektiivsemalt, samuti suureneb ka lõpetajate arv, kes otsustavad hakata õpetajaks. Sel juhul on seos α ja β vahel lineaarne. Seda arvestades *on võimalik arvutada (või ka graafikul leida)* iga antud α väärtuse puhul vastav β väärtus ning ühtlasi ka palk s, mille korral antud α ja β väärtused tagatakse; samuti on võimalik arvutada α ja s vastavalt antud β väärtusele.

Märgime, et toodud näites kirjeldasime teatavat sotsiaalset protsessi lihtsustatult, arvestamata neid mehhanisme, mis määravad ühiskonna kaasaegse olukorra.

Tegelikkuses esinevate konkreetsete olukordade arvestamine muudab mudelist järelduste tegemise ning konkreetsete otsuste vastuvõtmise oluliselt keerukamaks. Ka otsuste tegemiseks on välja töötatud spetsiaalne matemaatiline metoodika — otsustuste teooria.

Ühendades protsessi matemaatilise mudeli faktilise materjaliga konkreetsest ühiskonnast, täiendades mudelit otsustuste tegemise eeskirjadega, saame formuleerida teatava poliitika. Poliitika seostamine reguleerimissüsteemidega võimaldab luua tegevusplaani, et mitte üksnes uurida, vaid ka suunata ühiskondlikke protsesse.

Niisuguse tegevusplaani realiseerimisel omandatud kogemusi kasutatakse uuesti teooriate täpsustamiseks, millest juhindudes on loodud mudelid, mudelite täiustamiseks, seni õigetena tundunud eesmärkide täpsustamiseks, reguleerimissüsteemide parandamiseks jne.

Võib loota, et tänu matemaatilisele aparatuurile põhinevad tulevikus vastuvõetavad otsused ikka rohkem teadmistel ja ikka vähem mõistatamisel, ja et maailm, milles me elame, hakkab funktsioneerima paremini ja vähem sõltuma ettenägematutest sündmustest.

PRANTSLANE TÄPPISTEADUSTEST

Geomeetreil, kes on ainult geomeetrid, on niisiis õige vaim, kuid tingimusel, et neile seletataks kõik ilusasti definitsioonide ja printsiipide abil; muidu on nad võltsid ja talumatud, sest nad on õiged ainult hästi selgitatud printsiipide najal.

Pascal «Erinevus geomeetrilise vaimu ja peenuse vaimu vahel».

Astronoomia sündis ebausust; ilukõne auahnusest, vihast, meelitustest, pettusest; geomeetria ihnsusest; füüsika tühisest uudishimust; ja kõik, isegi moraal, inimlikust uhkusest.

Rousseau «Arutlus küsimuse üle: kas teaduste ja kunstide areng on aidanud puhastada kombeid?»

Seni on teadus ainult lõhkunud. Loodusele rakendatud, on ta hävitanud selle veetluse ja salapära, näidates matemaatilisi jõude seal, kus rahvakujutlus nägi elu, hingelist avaldust ja vabadust.

Renan «Teaduse tulevik».

KAHE ISIKU MÄNGUD

Ü. Kaasik, M. Meriste, T. Prank

Mänguteooria uurib konfliktsituatsioone, kasutades selleks matemaatilisi meetodeid. Konfliktseks nimetame situatsiooni, kus lõpptulemus sõltub vähemalt kahe osavõtja tegevusest, kelle huvid on kas osaliselt või täielikult vastandlikud. Mänguteooria piirdub ainult niisuguste situatsioonide vaatlemisega, kus kõik osavõtjad mõjutavad aktiivselt lõpptulemust ja see tulemus ise on kvantitatiivselt hinnatav. Oma nimetuse on mänguteooria saanud asjaolust, et konfliktsituatsiooni üheks lihtsamaks näiteks osutub mäng selle sõna igapäevases mõttes (bridž, male jt.).

Mängu mõiste. Praktikas määratakse konfliktsituatsioon ehk mäng enamasti teatavate nn. mängureeglite süsteemiga. Üldiselt näevad need reeglid ette, et mäng koosneb lõplikust arvust üksteisele järgnevatest käikudest. Käik kujutab endast valikut erinevate alternatiivide vahel, kus alternatiivideks nimetame antud olukorras olemasolevaid tegutsemisvõimalusi (neid võib põhimõtteliselt olla ka lõpmata palju). Vastavalt sellele, kas valiku sooritab üks mängijatest või mingi juhusliku valiku mehhanism, nimetame käiku isiklikuks või juhuslikuks. Näiteks males on kõik käigud isiklikud, bridžis esineb aga ka üks juhuslik käik — kaartide jaotamine.

Mängureeglite süsteem peab rahuldama mõningaid üsna loomulikke nõudeid. Nii näiteks peavad need reeglid iga mängus esineda võiva olukorra ehk seisu korral võimaldama kindlaks teha, kas mäng on lõppenud (s. t. tegemist on nn. lõppseisuga) või tuleb veel sooritada vähemalt üks käik. Viimasel juhul peavad reeglid omakorda näitama, kas järgmine käik on isiklik või juhuslik. Juhul kui see on isiklik käik, peavad reeglid määrama kõik alternatiivid ja näitama käigul oleva mängija. Kui tegemist on juhusliku käiguga, siis peavad reeglid peale alternatiivide määrama ka nende valimise tõenäosused.

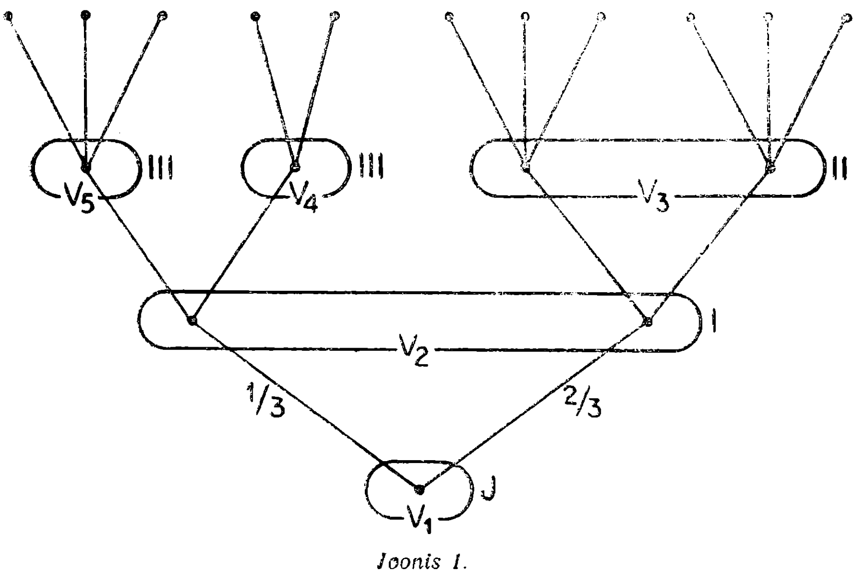
Iga isikliku käigu korral näitavad reeglid veel selle informatsiooni hulga, mille saab käigul olev mängija eelnenud käikudel tehtud valikute kohta. Samuti peavad reeglid iga lõppseisu jaoks määrama kõikide mängijate võitude suurused.

Kui iga mängija käigul olles teab kõiki varem sooritatud valikuid, siis nimetame vastavat mängu **täisinformatsiooniga** mänguks, vastasel juhul **osalise informatsiooniga** mänguks (täisinformatsiooniga mängu näiteks on male, osalise informatsiooniga mängu näiteks bridž). Igal juhul eeldatakse, et kõik mängijad tunnevad mängu reegleid.

Kui igal käigul on alternatiive lõplik arv, siis saab mängu geomeetriliselt kujutada mängupuuna (vt. joonis 1). Sellise puu hargnemiskohad (tipud) kujutavad seise (tipp 0 on algseis). Iga käik tähendab valikut vastavast tipust ülespoole väljuvate harude (alternatiivide) vahel, kusjuures sooritatud käigu tulemusena jõutakse järgmisse tippu. Mäng lõpeb siis, kui jõutakse tippu, kust edasi enam harusid ei lähe (lõppseis). Tippude juurde märgitakse, kas vastavas seisus tuleb teha juhuslik (J) või isiklik käik; isikliku käigu korral näidatakse veel, milline mängija on käigul (I, II jne.). Lõppseisude juurde võib märkida mängijate võidud, juhusliku käigu alternatiivide juurde aga nende tõenäosused.

Mängijatele antav informatsioon määratakse kõikide tippude hulga lahutusega alamhulkadeks V_k (nn. informatsioonihulgad). Käigul olev mängija ei tea üldiselt tippu, milles ta asub, vaid üksnes hulka V_k, kuhu see tipp kuulub. Lahutus informatsioonihulkadeks peab ilmselt rahuldama järgmisi nõudeid.

Iga tipu $t \in V_k$ korral peab käigul olema üks ja seesama mängija (seetõttu ongi mängijate numbrid joonisel 1 kirjutatud mitte tippude, vaid informatsioonihulkade juurde). Alternatiivide arvud peavad ühte hulka V_k kuuluvates tippudes olema võrdsed.



Joonis 1.

sest vastasel juhul saaks käigul olev mängija alternatiivide arvust vastavas tipus lisainformatsiooni oma asukoha täpsemaks määramiseks. Kui $t \in V_k$ ja tippu t' võib ühe käiguga jõuda tipust t lähtudes, siis $t' \in V_k$ (üks mängija ei ole kaks korda järjest käigul).

Kooskõlas varem antud määratlusega võib öelda, et täisinformatsiooniga mängud on parajasti need, kus iga hulk V_k sisaldab ainult ühe tipu.

Mänguteoorias eeldatakse veel, et kõigi mängijate võite saab mõõta samades ühikutes ja et mängijad on oma võidu suurusest ühesugusel määral huvitatud (tarbe korral eeldatakse veel võidusummade ülekantavust ühelt mängijalt teisele, s. t. üks mängija võib teisele maksta «hüvitust»). Mängija i võidu suurust (või selle keskväärtust juhuslikke käike sisaldava mängu korral) tähistame edaspidi sümboliga K_i. Kui iga lõppseisu korral

$$\sum_{i=1}^{n} K_i = 0,$$

siis nimetatakse mängu n u l l s u m m a m ä n g u k s (mängijate arv $n \geqslant 2$ olgu esialgu veel suvaline).

Strateegia. Tavaliselt teeb mängija oma valikud mängu käigus. Oletame aga, et mängija koostab juba enne mängu algust plaani, millise valiku ta kavatseb teha igas võimalikus seisus, kus tal üldse tuleks sooritada käik. Sellist plaani nimetataksegi s t r a t e e g i a k s. Märgime, et strateegia ettevalimise korral ei pea mängija tegema oma valikuid väiksema informatsiooni alusel kui konkreetses partiis — strateegia koostamisel vaadeldakse kõiki praktiliselt võimalikke juhte.

Tähistame mängija i strateegiaid edaspidi sümboliga τ_i, kasutades nende eristamiseks tarbe korral ülemisi indekseid.

Niipea, kui kõik mängijad on valinud oma strateegiad antud partiis, osutub partii tulemus (või selle keskväärtus) üheselt määratuks. Seega võib iga mängija võitu vaadelda kui strateegiate funktsiooni:

$$K_i = K_i(\tau_1, \ldots, \tau_n).$$

Sageli osutubki kõige mugavamaks kirjeldada mängu just kõikide mängijate strateegiate hulkade ja võidufunktsioonide etteandmise teel, minnes täiesti mööda käikude kirjeldamisest. Enne niisuguse käsitluse juurde asumist toome aga seni vaadeldud mõisteid illustreeriva näite.

Näide 1. Vaatleme kahe isiku nullsummamängu, kus iga partii sisaldab järgmised kolm käiku. Esimese käigu teeb mängija I, valides ühe arvudest 1, 2 või 3. Teine käik on juhuslik, kus võrdse tõenäosusega valitakse üks arvudest 0, 1 või 2. Mängijale II teatatakse, kas kahe seni valitud arvu summa on paaris või paaritu (kuid ei teatata summat ennast). Kolmandal käigul valib mängija II ühe arvudest 1 või 2. Võidu suuruseks on igal juhul kõigi kolme valitud arvu summa. Kui see summa on 5 või 6, siis maksab mängija II vastava arvu ühikuid mängijale I, summa teiste väärtuste korral maksab aga mängija I mängijale II.

Mängijal I on algseisus valida vaid kolme alternatiivi vahel (1, 2 või 3). Et sellega tema aktiivne osa mängus piirdubki, on mängija I käsutuses kolm võimalikku strateegiat:

strateegia τ_1^1 — valida 1,
strateegia τ_1^2 — valida 2,
strateegia τ_1^3 — valida 3.

Ka mängijal II tuleb sooritada vaid üksainus valik (kahe alternatiiviga — 1 või 2), kuid ta saab mängu käigus täiendavat informatsiooni. Seetõttu võib see mängija käigu sooritamise ajal olla kahes põhimõtteliselt erinevas olukorras: talle teatati eelmiste arvude summa kohta kas «paaris» või «paaritu». Vastavalt sellele peab ka iga strateegia sisaldama käitumisjuhise nende mõlema olukorra jaoks. Järelikult on mängija II käsutuses kokku neli erinevat strateegiat:

strateegia τ_2^1 — valida igal juhul 1,
strateegia τ_2^2 — juhul «paaris» valida 1, juhul «paaritu» 2,
strateegia τ_2^3 — juhul «paaris» valida 2, juhul «paaritu» 1,
strateegia τ_2^4 — valida igal juhul 2

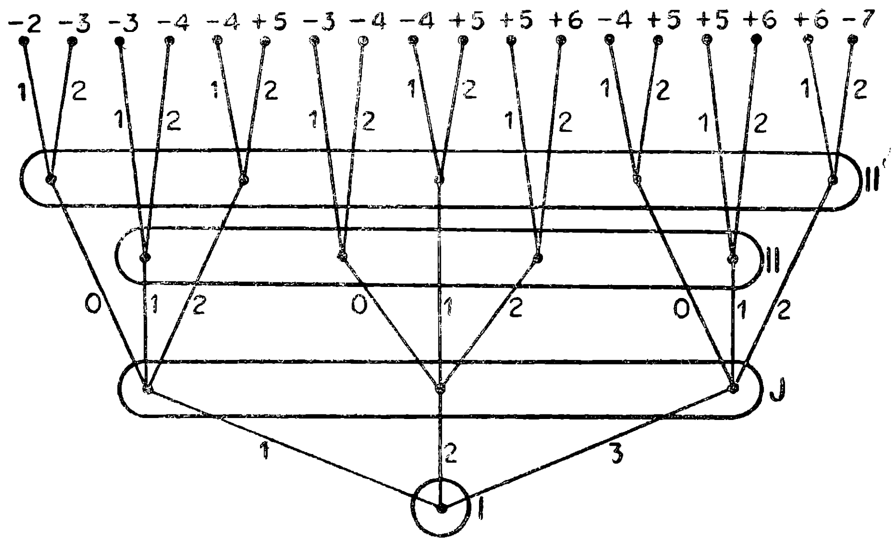
(kui mängijale II teatataks eelmise kahe arvu summa väärtus, siis oleks tal käigu sooritamise ajal viis võimalikku olukorda ja vastavalt sellele ka $2^5=32$ erinevat strateegiat).

Vaadeldava mängu puu on esitatud joonisel 2, kus alternatiivide juurde on märgitud nende tähendused, lõppseisude juurde aga mängija I võidu suurused.

Paneme tähele, et strateegiate fikseerimine ei määra selle (juhuslikku käiku sisaldava) mängu korral lõppseisu ja seega ka võidu suurust üheselt. Seetõttu saab siin strateegiate etteandmisel arvutada vaid võidu keskväärtuse. Näiteks $K_1(\tau_1^2, \tau_2^3)$ leidmiseks arutleme järgmiselt. Esimesel käigul valiti arv 2, teisel käigul tuleb aga kas 0, 1 või 2 (tõenäosustega $1/3$, $1/3$ ja $1/3$). Kolmandal käigul valib mängija II oma strateegia kohaselt nüüd vastavalt teise käigu tulemusele kas 2, 1 või 2, millega mängija I võit tuleb kas -4, -4 või $+6$. Nende keskväärtusena saame

$$K_1(\tau_1^2, \tau_2^3) = -4\cdot\frac{1}{3} - 4\cdot\frac{1}{3} + 6\cdot\frac{1}{3} = -\frac{2}{3}.$$

Mängu hind. Piirdumegi nüüd vaid kahe isiku mängudega ($n=2$) ja võtame vaatlusele kahe isiku nullsummamängu G. Tähistame mängija I kõigi võimalike strateegiate hulga sümboliga X_1 ja mängija II strateegiate hulga sümboliga X_2, eeldades



Joonis 2.

muidugi, et nendes hulkades on kummaski rohkem kui üks element. Et mäng on nullsummaline, siis iga $\tau_1 \in X_1$ ja $\tau_2 \in X_2$ korral

$$K_1(\tau_1, \tau_2) + K_2(\tau_1, \tau_2) = 0.$$

Lihtsuse huvides tähistame siin

$$K_1(\tau_1, \tau_2) = -K_2(\tau_1, \tau_2) = K(\tau_1, \tau_2)$$

ja nimetame seda (otsekorrutisel $X_1 \times X_2$ määratud) funktsiooni K mängu G võidufunktsiooniks.

Kogu mäng G on seega määratud kolmikuga $\{X_1, X_2, K\}$ — sellise määratluse korral öeldakse, et mäng on antud normaalkujul. Mängimine seisneb nüüd lihtsalt strateegiate $\tau_1 \in X_1$ ja $\tau_2 \in X_2$ valikus, kusjuures kumbki mängija ei tea teise valikut. Pärast strateegiate valimist arvutatakse kohe mängu tagajärg $K(\tau_1, \tau_2)$.

Mängu G mängimisel püüab mängija I oma strateegia $\tau_1 \in X_1$ sobiva valikuga suurendada funktsiooni $K(\tau_1, \tau_2)$ väärtust, mängija II püüab aga $\tau_2 \in X_2$ sobiva valikuga vähendada seda väärtust. Seejuures mõjutavad mõlemad mängijad funktsiooni $K(\tau_1, \tau_2)$ aga ainult osaliselt. Siit tulenebki optimaalse käitumisviisi valiku põhiline raskus — kumbki mängija ei tea vastase poolt valitud strateegiat ega saa teha oma valikut sellele toetudes.

Mängija I võitu juhul, kui mõlemad mängijad on valinud oma parima käitumisviisi (kui need üldse eksisteerivad), nimetame mängu G hinnaks ja tähistame tähega v. Selle määramisel võtame äsjanimetatud raskuse ületamiseks vaatlusele fiktiivsed mängud G_1 ja G_2, mille korral ühel mängijal on teada teise mängija poolt valitud strateegia.

Mäng G_1 olgu selline, mis ühtib mänguga G kõigis detailides, kuid lisaks on mängijal II oma strateegia valimisel teada mängija I poolt valitud strateegia τ_1. Mängus G_2 olgu aga mängijal I eelnevalt teada mängija II valik τ_2. Nimetame mänge G_1 ja G_2 vastavalt mängu G minorandmänguks ja majorandmänguks.

Vaatleme kõigepealt mängu G_1, kus mängija II püüab $\tau_2 \in X_2$ valikuga muuta $K(\tau_1, \tau_2)$ väärtust võimalikult väikeseks, s. t. ta püüab fikseeritud τ_1 korral saavutada väärtust [1]

$$\min_{\tau_2} K(\tau_1, \tau_2).$$

See väärtus sõltub muidugi strateegiast τ_1, mille mängija I on juba valinud. Mängija I parimaks tegutsemisviisiks mängus G_1 ongi τ_1 selline valik, et see miinimum oleks võimalikult suur, s. t. et mängija II ei saaks oma strateegia τ_2 valikuga muuta võitu väiksemaks kui

$$v_1 = \max_{\tau_1} \min_{\tau_2} K(\tau_1, \tau_2).$$

Suurus v_1 on ilmselt mängu G_1 hind. Tõepoolest, kui mängija II valib oma strateegia τ_2 eespool kirjeldatud viisil, siis garanteerib ta endale võidu, mis sõltumata vastase tegevusest ei ole väiksem kui $-v_1$. Sealjuures on $-v_1$ suurim võit, mille ta saab endale garanteerida. Strateegia τ_1 ülalkirjeldatud valikuga kindlustab mängija I endale võidu, mis pole väiksem kui v_1, sealjuures v_1 on jällegi suurim võit, mille ta sõltumatult mängija II tegevusest saab endale garanteerida.

Mängu G_2 korral jõuame analoogilise arutlusega järgmiste tulemusteni. Mängijal II on kasulik valida oma strateegia τ_2 nii, et $\max\limits_{\tau_1} K(\tau_1, \tau_2)$ oleks võimalikult väike, s. t. et mängijal I poleks võimalik saavutada mängu G_2 hinnast

$$v_2 = \min_{\tau_2} \max_{\tau_1} K(\tau_1, \tau_2)$$

suuremat võitu. Seega saab mängija II mängus G_2 kindlustada endale võidu, mis pole väiksem kui $-v_2$, mängija I aga saab kindlustada endale võidu, mis pole väiksem kui v_2.

Täiesti vahetult saab kontrollida, et iga mängu G korral kehtib võrratus

$$v_1 \leqslant v_2.$$

Mängu G reeglite kohaselt pole mängijatel mingit informatsiooni vastase valitud strateegia kohta. On aga ilmne, et mängus

[1] Kui strateegiate hulgad on lõpmatud, siis võib osutuda, et miinimum või maksimum ei eksisteeri. Neil kordadel tuleks edaspidi kasutada väärtusi $\inf K(\tau_1, \tau_2)$ ja $\sup K(\tau_1, \tau_2)$.

G ei saa mängija I garanteerida paremat tulemust kui mängus G_2 ega mängija II paremat tulemust kui mängus G_1. Seega, kui mängu G hind v üldse on määratud, siis peab see rahuldama võrratust

$$v_1 \leqslant v \leqslant v_2.$$

Suurusi v_1 ja v_2 nimetame vastavalt mängu G alumiseks ja ülemiseks hinnaks: v_1 on suurim võit, mille mängija I saab endale garanteerida sõltumatult mängija II tegevusest; v_2 on mängija I vähim võit (mängija II vähim kaotus), mille saab oma tegevusega garanteerida mängija II.

Mängija I strateegiaid, mis kindlustavad talle mängu alumisest hinnast mitte väiksema võidu, ja mängija II strateegiaid, mis kindlustavad, et mängija I ei võida mängu ülemisest hinnast rohkem, nimetatakse nende mängijate vähemohtlikeks strateegiateks.

Kui osutub, et $v_1 = v_2$, siis suurust

$$v = \max_{\tau_1} \min_{\tau_2} K(\tau_1, \tau_2) = \min_{\tau_2} \max_{\tau_1} K(\tau_1, \tau_2)$$

nimetatakse mängu G puhtaks hinnaks. Vähemohtlikke strateegiaid $\tau_1{}^*$ ja $\tau_2{}^*$ nimetatakse sel juhul optimaalseteks ja paari $(\tau_1{}^*, \tau_2{}^*)$ mängu G sadulpunktiks.

Maatriksmängud. Vaatleme nüüd niisuguseid kahe isiku nullsummamänge, kus strateegiate hulgad X_1 ja X_2 on lõplikud. Olgu mängus G mängijal I kokku m ja mängijal II kokku n strateegiat, s. t. $X_1 = \{\tau_1{}^1, \ldots, \tau_1{}^m\}$ ja $X_2 = \{\tau_2{}^1, \ldots, \tau_2{}^n\}$. Nüüd võib mängija I strateegia valikut lugeda samaväärseks arvu i (strateegia järjekorranumbri) valikuga hulgast $\{1, \ldots, m\}$ ja mängija II strateegia valikut samaväärseks arvu j valikuga hulgast $\{1, \ldots \ldots, n\}$.

Võidufunktsiooni on selliste mängude korral otstarbekohane esitada maatriksina

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

kus $a_{ij} = K(\tau_1{}^i, \tau_2{}^j)$. Vastavalt sellele nimetataksegi kahe isiku niisuguseid nullsummamänge, kus strateegiate hulgad on lõplikud, maatriksmängudeks ja maatriksit A mängu G maatriksiks. Kui on tarvis veel rõhutada mängijate strateegiate arve, siis öeldakse, et tegemist on $m \times n$ maatriksmänguga (näites 1 kirjeldatud mäng on seega 3×4 maatriksmäng).

Maatriksmängu alumine ja ülemine hind avalduvad vastavalt kujul

$$v_1 = \max_i \min_j a_{ij}; \qquad v_2 = \min_j \max_i a_{ij}.$$

Kui $v_1 = v_2$, siis (samastades strateegia tema järjekorranumbriga) on maatriksmängu optimaalseteks strateegiateks niisugused i^* ja j^* ning sadulpunktiks paar (i^*, j^*), mille korral

$$a_{i^*j^*} = \max_i a_{ij^*} = \min_j a_{i^*j}.$$

Sellise olukorra võimalikkust illustreerime järgmise klassikalise näitega.

Näide 2. Kolonel Blotto juhatab kahe mäekuru, *A* ja *B* kaitsmist. Tema käsutuses on kolm, neid mäekurusid ründaval vastasel aga kaks jagamatut väeüksust. Väljavaated lahingu võitmiseks kurul on võrdelised lahingust osavõtvate jõududega, kuid lihtsamalt kaitstaval kurul *B* tuleb Blotto iga väeüksust sealjuures lugeda kahe eest (näiteks Blotto kaks väeüksust vastase ühe üksuse vastu suudavad kaitsta kuru *A* tõenäosusega $^2/_3$, kuru *B* aga tõenäosusega $^4/_5$). Kuru säilitamine pärast lahingut annab Blottole võidu $+1$. Kuidas peab Blotto oma väeüksused paigutama ja kuidas peab vastane ründama?

Blottol on ilmselt võimalik kasutada nelja erinevat strateegiat. Tähistades tema strateegiaid paariga (x, y), kus x on kuru *A* kaitsvate üksuste arv ja y kuru *B* kaitsvate üksuste arv, saame Blotto strateegiateks:

$$\tau_1^1 = (3, 0), \quad \tau_1^2 = (2, 1), \quad \tau_1^3 = (1, 2) \text{ ja } \tau_1^4 = (0, 3).$$

Kurusid ründava vastase strateegiaid analoogiliselt tähistades saame nendeks:

$$\tau_2^1 = (2, 0), \quad \tau_2^2 = (1, 1) \text{ ja } \tau_2^3 = (0, 2).$$

Kirjutame selle mängu võidufunktsiooni tabelina, lisades juurde vajalikud miinimumid ning maksimumid:

Blotto \ Vastane	(2, 0)	(1, 1)	(0, 2)	$\min_j a_{ij}$
(3, 0)	8/5	3/4	1	3/4
(2, 1)	3/2	4/3	3/2	4/3
(1, 2)	4/3	13/10	5/3	13/10
(0, 3)	1	6/7	7/4	6/7
$\max_i a_{ij}$	8/5	4/3	7/4	

Mängu alumine ja ülemine hind tulevad nüüd vastavalt

$$v_1=\max_i \min_j a_{ij}=4/3 \quad \text{ja} \quad v_2=\min_j \max_i a_{ij}=4/3.$$

Seega $v_1=v_2=4/3$, Blotto ainsaks optimaalseks strateegiaks on $\tau_1{}^2=(2, 1)$ ning vastase ainsaks optimaalseks strateegiaks $\tau_2{}^2=(1, 1)$. Mängu sadulpunktiks on $(\tau_1{}^2, \tau_2{}^2)$.

Domineerimine. Mängu sadulpunkti ja optimaalsete strateegiate leidmiseks võib kasutada ka domineerimise mõistele toetuvat lihtsustamisvõtet. Ütleme, et mängija I strateegia $\tau_1{}^l$ domineerib strateegiat $\tau_1{}^k$ ja kirjutame $\tau_1{}^l \geqslant \tau_1{}^k$, kui iga $j=1, \ldots, n$ korral kehtib võrratus $a_{lj} \geqslant a_{kj}$ (ehk üldjuhul: iga $\tau_2 \in X_2$ korral $K(\tau_1{}^l, \tau_2) \geqslant K(\tau_1{}^k, \tau_2)$). Analoogiliselt mängija II strateegia $\tau_2{}^r$ domineerib strateegiat $\tau_2{}^s$ (kirjutame $\tau_2{}^r \geqslant \tau_2{}^s$), kui iga $i=1, \ldots, m$ korral $a_{ir} \leqslant a_{is}$ (üldjuhul: iga $\tau_1 \in X_1$ korral $K(\tau_1, \tau_2{}^r) \leqslant K(\tau_1, \tau_2{}^s)$).

On ilmne, et domineeritud strateegiaid pole mängijal mõistlik kasutada — domineeriv strateegia annab vähemalt sama suure võidu. Seetõttu võib domineeritud strateegiale vastava rea (veeru) mängu maatriksist lihtsalt välja jätta.

Näites 2 vaadeldud mängu maatriksis

$$\begin{pmatrix} 8/5 & 3/4 & 1 \\ 3/2 & 4/3 & 3/2 \\ 4/3 & 13/10 & 5/3 \\ 1 & 6/7 & 7/4 \end{pmatrix}$$

saame $\tau_2{}^2 \geqslant \tau_2{}^1$ ja $\tau_2{}^2 \geqslant \tau_2{}^3$ tõttu välja jätta esimese ja kolmanda veeru, saadud üheveerulises maatriksis aga kõik elemendid peale teise (maksimaalse). Seega taandub mängu maatriks üheelemendiliseks:

$$(4/3),$$

mis vastab optimaalsetele strateegiatele $\tau_1{}^2$ ja $\tau_2{}^2$.

Kasutame nüüd sama võtet näites 1 vaadeldud mängu korral. Leides võidufunktsiooni väärtused kõigi strateegiapaaride puhul saame selle mängu maatriksi kujul

$$\begin{pmatrix} -3 & -1/3 & -10/3 & -2/3 \\ -2/3 & +7/3 & -2/3 & +7/3 \\ +7/3 & +1 & +8/3 & +4/3 \end{pmatrix},$$

kus domineerimist $\tau_1{}^3 \geqslant \tau_1{}^1$ arvestades võime maha tõmmata esimese rea:

$$\begin{pmatrix} -2/3 & +7/3 & -2/3 & +7/3 \\ +7/3 & +1 & +8/3 & +4/3 \end{pmatrix}.$$

Nüüd võime domineerimiste $\tau_2^2 \geqslant \tau_2^4$ ja $\tau_2^1 \geqslant \tau_2^3$ tõttu (lähtemaatriksis neid domineerimisi veel ei olnud) maha tõmmata kaks viimast veergu, millega maatriks omandab kuju

$$\begin{pmatrix} -2/3 & +7/3 \\ +7/3 & +1 \end{pmatrix}.$$

Et selles maatriksis domineerimisi enam ei esine, siis pole edasine lihtsustamine võimalik. See on ka loomulik, sest vaadeldaval mängul pole sadulpunkti — mängu alumine ja ülemine hind on ju vastavalt

$$v_1 = \max_i \min_j a_{ij} = 1 \quad \text{ja} \quad v_2 = \min_j \max_i a_{ij} = 7/3.$$

Toodud näidetest selgub, et leidub nii sadulpunktiga kui ka sadulpunktita mänge. Sadulpunktiga mängud — need on eriti lihtsalt uuritavad, sest optimaalsete strateegiate leidmine võib esile kutsuda vaid tehnilist laadi raskusi — moodustavad sealjuures üsna ulatusliku klassi. Nii näiteks saab tõestada, et iga täisinformatsiooniga mängu korral $v_1 = v_2$, kusjuures domineeritud strateegiate kõrvaldamise teel on mängu maatriks alati teisendatav üheelemendiliseks. Näide 2 aga tõestab, et sellega pole sadulpunktiga mängude klass veel ammendatud.

Mida aga teha sadulpunktita mängude korral, s. t. juhul kui $v_1 < v_2$? Need mängud tegelikult moodustavadki mänguteooria põhilise uurimisobjekti ja just nende tarvis tulebki kasutusele võtta mõningaid täiendavaid mõisteid.

Segastrateegia. Kui näites 1 vaadeldud mängu lihtsustamise tulemusel saadud maatriksi

$$\begin{pmatrix} -2/3 & +7/3 \\ +7/3 & +1 \end{pmatrix}$$

korral mängija I valib oma vähemohtliku strateegia τ_1^3 (kasutame strateegiate esialgset tähistust), siis on talle garanteeritud võit $v_1 = 1$, mille saavutamiseks mängija II peab valima strateegia τ_2^2. Kui aga mängija I teab või aimab mängija II niisugust kavatsust, siis strateegia τ_1^2 valikuga võib ta saavutada tulemuse 7/3. Kui nüüd mängija II omakorda aimab mängija I seda kavatsust, siis annab strateegia τ_2^1 valik koguni tulemuse $-2/3$ jne. Seega on vastase kavatsusi teada saades võimalik oma võitu suurendada ja kogu küsimus näib taanduvat luure ning vastuluure organiseerimisele.

Väljapääsu olukorrast annab juhusliku katse sooritamine konkreetse strateegia fikseerimise momendil. Nimelt ühe kindla strateegia väljavalimise asemel omistab mängija igale strateegiale teatava sageduse (tõenäosuse), millega see juhusliku katse tulemuses esineda tohib. Kasutatava strateegia tegelik valik toimub nüüd neid sagedusi realiseeriva juhusliku mehhanismi abil. Arusaadavalt võib mõne strateegia esinemise sealjuures hoopis ära keelata — näiteks domineeritud strateegiatele on loomulik omistada sagedus null.

Omistagu mängija I oma strateegiale τ_1^i sageduse ξ_i. Kokkuvõttes tuleb tal seega valida sageduste vektor $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$, kus loomulikult

$$\sum_{i=1}^{m} \xi_i = 1 \quad \text{ja} \quad \xi_i \geqslant 0 \ (i = 1, \ldots, m).$$

Niisugust vektorit ξ nimetame mängija I s e g a s t r a t e e g i a k s.

Analoogiliselt valib mängija II sageduste vektori ehk segastrateegia $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$, kus

$$\sum_{j=1}^{n} \eta_j = 1 \quad \text{ja} \quad \eta_j \geqslant 0 \ (j = 1, \ldots, n).$$

Segaduste vältimiseks nimetame strateegiat selle senises tähenduses edaspidi puhtaks strateegiaks. Ilmselt võib puhast strateegiat samastada niisuguse segastrateegiaga, kus vastav koordinaat on üks ja kõik teised nullid.

Kui mängijad on valinud oma segastrateegiad ξ ja η, siis avaldub võidu keskväärtus (matemaatiline ootus) kujul

$$K(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \xi_i \eta_j.$$

Seda funktsiooni $K(\xi, \eta)$ võime vaadelda kui teatava uue mängu G' võidufunktsiooni, kus strateegiate hulkadeks on

$$X'_1 = \{\xi : \xi_i \geqslant 0, \ \sum_{i=1}^{m} \xi_i = 1\}$$

ja

$$X'_2 = \{\eta : \eta_j \geqslant 0, \ \sum_{j=1}^{n} \eta_j = 1\}.$$

Optimaalsed segastrateegiad. Et ka G' on kahe isiku nullsummamäng, siis võib ülalvaadeldud mõisted siia vahetult üle kanda. Nii näiteks on mängu G' alumiseks ja ülemiseks hinnaks

$$v'_1 = \max_{\xi} \min_{\eta} K(\xi, \eta) \quad \text{ja} \quad v'_2 = \min_{\eta} \max_{\xi} K(\xi, \eta),$$

kusjuures loomulikult $v'_1 \leqslant v'_2$. Kui nüüd osutub, et $v'_1 = v'_2$, siis võime mängu G' sadulpunkti (ξ^*, η^*) tõlgendada kui mängu G sadulpunkti segastrateegiates. Neid vektoreid ξ^* ja η^* nimetamegi mängu G o p t i m a a l s e t e k s segastrateegiateks, mängu G' hinda v' loeme aga ühtlasi mängu G hinnaks.

Saab tõestada, et alati kehtibki võrdus $v'_1 = v'_2$, s. t. maatriksmängu G baasil konstrueeritud mäng G' on alati sadulpunktiga [2]. Seega on maatriksmäng alati lahenduv, ka juhul $v_1 < v_2$ saab leida parima tegutsemisviisi mõlema mängija jaoks — optimaalsed segastrateegiad.

Optimaalsete segastrateegiate tähenduse illustreerimiseks lahendame lõpuni näites 1 vaadeldud mängu, mille maatriks taandus teatavasti kujule

$$\begin{pmatrix} -2/3 & 7/3 \\ 7/3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Domineeritud strateegiate olemasolu arvestades on siin loomulik vaadelda vaid niisuguseid segastrateegiaid $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ ja $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4)$, kus $\xi_1 = \eta_3 = \eta_4 = 0$. Tähistades lihtsuse huvides veel $\xi_2 = p$ ja $\eta_1 = q$ $(0 \leqslant p,\ q \leqslant 1)$, on $\xi_3 = 1 - p$, $\eta_2 = 1 - q$ ning võidu keskväärtus $K(\xi, \eta) = K(p, q)$ avaldub kujul

$$K(p,q) = -\frac{2}{3}pq + \frac{7}{3}p(1-q) + \frac{7}{3}q(1-p) + (1-p)(1-q) =$$

$$= -\frac{13}{3}pq + \frac{4}{3}p + \frac{4}{3}q + 1.$$

Et

$$\min_q K(p,q) = \begin{cases} \frac{4}{3}p + 1 & \text{kui } -\frac{13}{3}p + \frac{4}{3} \geqslant 0 \\ -3p + \frac{7}{3} & \text{kui } -\frac{13}{3}p + \frac{4}{3} \leqslant 0, \end{cases}$$

siis mängu G' alumiseks hinnaks saame

$$v'_1 = \max_p \min_q K(p,q) = 55/39,$$

mis saavutatakse, kui $p = 4/13$. Analoogiliselt saavutatakse ülemine hind

$$v'_2 = \min_q \max_p K(p,q) = 55/39$$

punktis $q = 4/13$. Seega optimaalseteks segastrateegiateks on

$$\xi^* = (0,\ 4/13,\ 9/13) \text{ ja } \eta^* = (4/13,\ 9/13,\ 0,\ 0)$$

ning mängu hind $v = 55/39$. Strateegiate tähendusi meenutades näeme, et mängija I optimaalseks käitumisviisiks on valida 2 sagedusega 4/13 ja 3 sagedusega 9/13. Mängijal II tuleb juhul

[2] Selle väite tõestus, samuti üldine meetod optimaalsete segastrateegiate leidmiseks on esitatud näiteks raamatus: Ü. Kaasik. Matemaatiline planeerimine. «Valgus», Tln., 1967.

«paaris» alati valida 1, juhul «paaritu» aga 1 sagedusega 4/13 ja 2 sagedusega 9/13. Niiviisi mängides võidab mängija I keskmiselt 55/39 ühikut partii kohta (mis on rohkem kui $v_1 = 1$ ja vähem kui $v_2 = 7/3$).

Lõpmatud mängud. Minnes maatriksmängult G üle mängule G' me võtsime tegelikult vaatlusele strateegiate lõpmatud hulgad X'_1 ja X'_2. Et need hulgad on üsna spetsiaalse struktuuriga, siis osutus tulemus suhteliselt lihtsaks. Vaatleme nüüd nn. lõpmatut mängu üldjuhul — olgu normaalkujul antud mängus $G = \{X_1, X_2, K\}$ vähemalt üks hulkadest X_1, X_2 lõpmatu. Sellistel mängudel on küllaltki suur praktiline tähtsus, sest mitmeid majanduslikku ja sõjalist laadi probleeme saab tõlgendada just lõpmatute mängudena.

Osutub, et paljud lõpmatud mängud on üleviidavad nn. mängudeks ühikruudul, kus nii X_1 kui ka X_2 on lõik $[0, 1]$ ja $K(\tau_1, \tau_2)$ seega lihtsalt kahe arvulise argumendi funktsioon. Et mängu puhasteks strateegiateks on nüüd punktid $\tau_1 \in [0, 1]$ ja $\tau_2 \in [0, 1]$, siis koosnevad segastrateegiate hulgad X'_1 ja X'_2 vastavalt kõikidest jaotusfunktsioonidest $F(\tau_1)$ ja $H(\tau_2)$, kusjuures mängija I võidu keskväärtus avaldub kujul

$$K(F, H) = \int_0^1 \int_0^1 K(\tau_1, \tau_2)\, dF(\tau_1)\, dH(\tau_2).$$

Mängud ühikruudul on segastrateegiates lahenduvad funktsiooni $K(\tau_1, \tau_2)$ pidevuse korral, mil kehtib võrdus

$$\max_F \min_H \int_0^1 \int_0^1 K(\tau_1, \tau_2)\, dF(\tau_1)\, dH(\tau_2) =$$

$$= \min_H \max_F \int_0^1 \int_0^1 K(\tau_1, \tau_2)\, dF(\tau_1)\, dH(\tau_2).$$

Optimaalsete segastrateegiate leidmine viib siin enamasti integraalvõrrandite lahendamisele, mistõttu praktikas kasutatakse sageli mitmesuguseid lihtsustavaid ligikaudseid võtteid (näiteks võidufunktsiooni asendamine lihtsama kuju, kuid lähedaste väärtustega funktsiooniga).

Lõpmatute mängude oluliseks klassiks on nn. ajastamismängud, kus mängijail tuleb valida tegutsemismomendid, pidades silmas, et ühelt poolt on parem tegutseda võimalikult hiljem, sest aja möödumisel suureneb tegutsemise efektiivsus, teiselt poolt aga suureneb ka risk mäng kaotada. Selliste mängude tüüpilisteks esindajateks on d u e l l i d.

Duellid jagunevad kuuldavateks ja vaikseteks (kuigi on mõeldavad mõningad segavariandid) vastavalt sellele, kas mängija tegutsemine ja selle tagajärjed saavad otsekohe teatavaks vastasmängijale või mitte. Lihtsaimaks kuuldava duelli tüübiks võib nähtavasti lugeda järgmist.

Kaks vastast (näiteks hävituslennukid) lähenevad teineteisele ühtlase kiirusega, kummalgi neist on kasutada üksainus lask (näiteks õhk-õhk tüüpi rakett), mille tulistamisest vastane otsekohe teada saab (ka siis, kui teda ei tabata!). Muutugu aeg algmomendist kuni kohtumiseni nullist üheni. Kui mängija i ($i = \mathrm{I}$ või II) tulistab ajamomendil t_i, siis tabamise tõenäosus olgu $P_i(t_i)$. Funktsioonide P_i kohta on loomulik eeldada monotoonset kasvamist lõigul $[0, 1]$, kusjuures sageli lisatakse veel rajatingimused $P_i(0) = 0$ ja $P_i(1) = 1$. Vastase tabamine andku mängijale võidu suurusega 1.

Mängijate optimaalsete strateegiate leidmiseks tuleb meil eraldi vaadelda kolme põhimõtteliselt erinevat olukorda.

Kui mängija I tulistab varem, siis avaldub tema võidu matemaatiline ootus kujul

$$K(t_1, t_2) = 1 \cdot P_1(t_1) + (-1) \cdot (1 - P_1(t_1)) = 2P_1(t_1) - 1,$$

sest mängija II tulistab esimese lasu mittetabamise korral alles kohtumismomendil (s. t. valides $t_2 = 1$).

Kui varem tulistab mängija II, siis analoogiliselt saame mängija I võidu matemaatilisele ootusele väärtuse

$$K(t_1, t_2) = (-1) \cdot P_2(t_2) + 1 \cdot (1 - P_2(t_2)) = 1 - 2P_2(t_2).$$

Mängijate üheaegse tegutsemise korral ($t_1 = t_2$) avaldub mängija I võidu matemaatiline ootus kujul

$$K(t_1, t_2) = 1 \cdot P_1(t_1)(1 - P_2(t_2)) + (-1) \cdot P_2(t_2)(1 - P_1(t_1)) = \\ = P_1(t_1) - P_2(t_2).$$

Kokkuvõttes võime seega mängija I võidu matemaatilise ootuse kirjutada kujul

$$K(t_1, t_2) = \begin{cases} 2P_1(t_1) - 1, & \text{kui } t_1 < t_2, \\ P_1(t_1) - P_2(t_2), & \text{kui } t_1 = t_2, \\ 1 - 2P_2(t_2), & \text{kui } t_1 > t_2. \end{cases}$$

Vaadeldes funktsiooni $K(t_1, t_2)$ sõltuvana ainult muutujast t_2 (fikseeritud t_1 korral) näeme, et mängija II püüab valida $t_2 < t_1$ või $t_2 = 1$ sõltuvalt sellest, kas $1 - 2P_2(t_1)$ on väiksem või suurem kui $2P_1(t_1) - 1$. Seega peab mängija I valima oma tulistamismomendi t_1 selliselt, et $1 - 2P_2(t_1)$ poleks ei suurem ega väiksem kui $2P_1(t_1)$, s. t. optimaalne puhas strateegia t_1 tuleb määrata võrrandist

$$2P_1(t_1) - 1 = 1 - 2P_2(t_1)$$

ehk

$$P_1(t_1) + P_2(t_1) = 1$$

(funktsioonide P_i kohta tehtud eeldusi arvestades on see võrrand üheselt lahenduv). Analoogiline arutelu näitab, et mängija II peab tulistama samal momendil.

Üldised mängud. Kui loobuda kitsendusest

$$K_1(\tau_1, \tau_2) + K_2(\tau_1, \tau_2) = 0$$

vähemalt ühe strateegiate paari (τ_1, τ_2) korral, siis saame kahe isiku nn. üldise mängu. Strateegiate arvu lõplikkuse korral saab võidufunktsioonid ka siin esitada maatriksina $A = (a_{ij})$, kus A elementideks on võidufunktsioonide väärtuste paarid

$$a_{ij} = (K_1(\tau_1^i, \tau_2^j); K_2(\tau_1^i \tau_2^j)).$$

Selliseid mänge on loomulik nimetada üldisteks maatriksmängudeks.

Osutub, et tavaliste maatriksmängude lahendamise aparatuuri ei saa üldistele maatriksmängudele vahetult üle kanda. Selles veendumiseks vaatleme kõigepealt näiteks järgmist äärmuseni lihtsustatud situatsiooni.

Kaks kahtlusalust võetakse vahi alla ja isoleeritakse teineteisest. Prokurör on veendunud, et kahtlusalused sooritasid koos raske kuriteo, kuid tal pole piisavalt tõendeid nende süüdistamiseks kohtu ees. Aitaks vaid vähemalt ühe kaebealuse ülestunnistamine. Seepärast räägib prokurör kummalegi kahtlusalusele eraldi, et neil on valida kahe võimaluse vahel: tunnistada oma süüd või mitte. Kui kumbki oma süüd ei tunnista, kavatseb prokurör neile esitada süüdistuse hoopis ühes n.-ö. kõrvalkuriteos, mille kohta tõendeid on piisavalt selleks, et mõista kummalegi näiteks kaks aastat vabadusekaotust. Juhul kui mõlemad end süüdi tunnistavad, lubab prokurör nõuda kummalegi vaid viieaastast vabadusekaotust. Kui süüteo tunnistab üles ainult üks kahtlusalustest, taotleb prokurör sellele üksnes üheaastast, salgajale aga viieteistaastast vabadusekaotust. Mida otsustab teha kumbki kahtlusalustest, et pääseda kergema karistusega?

Olukorda võime tõlgendada kahe isiku (kahtlusaluste) üldise mänguna, kus mõlema mängija esimeseks strateegiaks on salgamine ja teiseks ülestunnistamine. Lugedes aastast vabadusekaotust kui tagajärge —1, saame mängu maatriksi kujul

$$\begin{pmatrix} (-2; & -2) & (-15; & -1) \\ (-1; & -15) & (-5; & -5) \end{pmatrix}.$$

Strateegiate domineerimist kasutades näeme, et mängijal I on, sõltumata teise tegevusest, kasulikum üles tunnistada. Samuti on aga ka mängijal II kasulikum üles tunnistada ning mängu sadulpunktiks on seega (τ_1^2, τ_2^2), s. t. mõlemad kahtlusalused peaksid üles tunnistama, saades järelikult karistuseks viieaastase vabadusekaotuse. Ometi pole see aga kahtlusaluste seisukohalt parim variant — ühise salgamise korral oleks mõlema karistus väiksem.

Seega erinevalt nullsummamängudest ei tarvitse sadulpunkt siin anda parimat käitumisviisi (kuigi sadulpunktil on üsna suur tähtsus, sest kirjeldatud situatsioonis kalduvad kahtlusalused ju üles tunnistama).

Saab esile tuua veel teise olulise erinevuse üldise mängu ja nullsummamängu vahel. Kui nullsummamängus oli võimalik võita ainult teise mängija kaotuse arvel, siis üldises mängus see nii enam pole. Vastasele kaotuse tekitamine ei tähenda veel otsese kasu saamist, kuid kaotuse tekitamise ähvardusel võib vastast sundida hüvitust maksma või strateegiat muutma. Seega ei saa ähvardust kui strateegilist võtet vaatlusest välja jätta. Ähvarduse efektiivsust illustreerib kasvõi näiteks mäng maatriksiga

$$\begin{pmatrix} (1;\ 10) & (-2;\ -10) \\ (-10;\ -2) & (10;\ 1) \end{pmatrix}.$$

Mängijad on siin näiliselt täiesti võrdses seisukorras, kuid ainult näiliselt. Mängija I seisukohalt on kõige kasulikum strateegiate paar (τ_1^2, τ_2^2), mängija II seisukohalt aga paar (τ_1^1, τ_2^1). Kui mängija II teatab, et ta valib strateegia τ_2^1, siis jääb mängijal I valida kaotuse 10 (vastane kaotab 2) ja võidu 1 (vastane võidab 10) vahel. Kui tema omakorda ähvardab valida strateegia τ_1^2, siis annab see küll vastasele kaotuse 2, kuid endale kaotuse 10. Seega mängija II ähvardus on tunduvalt efektiivsem ja tal on lihtsam sundida vastast leppima strateegiate paariga (τ_1^1, τ_2^1).

Kahe isiku üldiste mängude teooria on tihedalt seotud mitme isiku nullsummamängude teooriaga. Nende kohta on aga kavas avaldada ülevaade «Matemaatika ja kaasaja» järgmises numbris.

BRIDŽIÜLESANNE

	♠ K 3 ♡ E 9 5 ♢ E 8 5 3 2 ♣ K S 8	
♠ S 6 4 ♡ S 8 7 6 ♢ S 6 4 ♣ 10 9 6	N W O S	♠ E 10 9 8 7 ♡ K 10 3 ♢ K ♣ E 7 5 3
	♠ Ä 5 2 ♡ Ä 4 2 ♢ Ä 10 9 7 ♣ Ä 4 2	

Trumbita mängus käib W avakäiguks ärtu kuue. S peab iga kaitsemängu korral võtma 12 tihi. Toimetuse arvates võib selle klassikalise ülesande (nn. *Elks' Misery Problem*) lahenduse esitamata jätta.

MAHUTAMISÜLESANDED

A. Leiten

Sageli pakutakse peamurdmiseks mitmesuguseid malelauaga seotud kombinatoorset laadi ülesandeid. Nii näiteks Gaussi tuntud ülesandes küsitakse, kas on võimalik asetada tühjale malelauale 8 lippu selliselt, et ükski lipp ei tulistaks teist. Lippude selliseid paigutusi tõepoolest leidub[1] — neid on isegi 92. Ülesande võib aga esitada ka veidi üldisemal kujul: leida iga malendi jaoks niisugune maksimaalne arv $u_{\max}$ ja minimaalne arv $u_{\min}$, et sobivalt paigutatud u malendit ($u_{\min} \leqslant u \leqslant u_{\max}$) ei tulistaks üksteist ning seejuures hoiaksid tule all terve malelaua. Osutub, et lipu jaoks on need arvud 8 ja 5, oda jaoks 14 ja 8 jne.

Analoogilisi optimiseerimisülesandeid leidub rohkesti ka igapäevases elus, kui vaid sobivalt defineerida «malelaud», «malendid» ja «tulistamisreeglid». Oletame näiteks, et maatükile mõõtmetega $m \times n$ soovitakse püstitada ehitised mõõtmetega 1×1 tingimusel, et mistahes kahe objekti vaheline minimaalne kaugus poleks väiksem kui $d = 1$ ning seejuures ei jääks maatükil vaba ruumi veel mõne objekti paigutamiseks samadel tingimustel (ülesanne on analoogiline kuningate paigutamise ülesandega tühjale malelauale). Maksimiseerimisülesannet, s. o. maatükile võimalikult suure arvu objektide mahutamise ülesannet, on majanduslikust seisukohast loomulik vaadelda kui objektide ratsionaalse paigutamise ülesannet tingimustes, kus objektide liigne hajutamine ei ole mõistlik (majade ehitamine linnades, esemete paigutus seljakotis, töövahendite asetus töölaual jne.). Minimiseerimisülesande puhul, vastupidi, pole objektide liigne tihedus otstarbekas (elektripostide paigutus elektriliinil, elektrilampide arv ruumis, televisioonimastide jaotus, antud piirkonnas jne.), siin on tegemist objektide kokkuhoiuga nende paigutamisel teatavasse piirkonda.

Kui maksimiseerimisülesande puhul eeldada, et objektid üksteist ei «tulista» (s. t. võivad paikneda ka kõrvuti), siis oleme

[1] Lahendused on piltlikult esitatud näiteks raamatus J. Gabovitš. Arvudeta matemaatika. Tln., 1968, lk. 60—61. Samas on vaadeldud ka analoogilist ülesannet odade ja ratsude paigutamisest tühjale malelauale.

saanud tavalise tükeldamisprobleemi: proovige antud kujund jaotada maksimaalseks arvuks etteantud kujuga tükkideks.[2]

Järgnevalt vaatleme mõnede kujundite mahutamist ristkülikule $m \times n$ (m, n — naturaalarvud) tingimusel, et mistahes kahe mahutatava kujundi vaheline minimaalne kaugus poleks väiksem kui $\alpha = 1$.

Näide 1. *Kui palju ruute* 1×1 *mahub maksimaalselt ristkülikule* $m \times n$ *tingimusel, et mistahes kahe ruudu vaheline kaugus poleks väiksem kui* $\alpha = 1$?

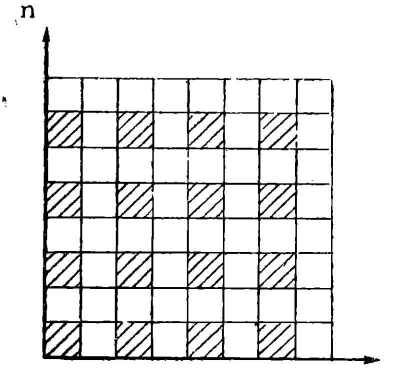
Mahtugu ristkülikule $m \times n$ kokku u_{mn} ruutu mõõtmetega 1×1. Ilmselt $u_{11} = u_{12} = u_{21} = u_{22} = 1$, $u_{13} = u_{23} = u_{31} = u_{32} = 2$, $u_{33} = 4$ jne. Üks võimalikest optimaalsetest mahutamisviisidest on näha joonisel 1 (kui m ja n on mõlemad paaritud arvud, siis on see paigutus ka ainus). Pole raske näha, et

$$u_{1n} = u_{2n} = \left[\frac{n+1}{2}\right], \qquad u_{3n} = u_{4n} = 2\cdot\left[\frac{n+1}{2}\right], \ldots,$$

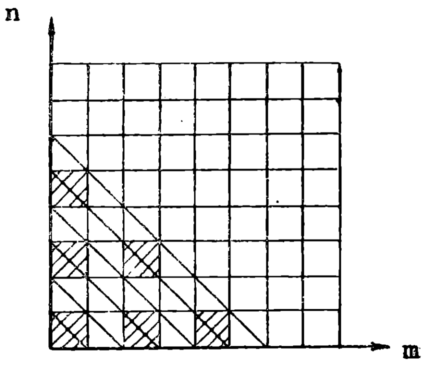
$$u_{mn} = \left[\frac{m+1}{2}\right]\cdot\left[\frac{n+1}{2}\right], \qquad n = 1, 2, \ldots$$

(Siin ja edaspidi kasutame u_{mn} avaldistes nurksulge arvu täisosa märkimiseks ning loogelisi sulge murdosa tähistamiseks.)

Näide 2. *Kui palju ruute* 1×1 *mahub maksimaalselt diagonaalipidi poolitatud poolele ruudule* $n \times n$ *tingimusel, et mistahes kahe ruudu vaheline kaugus poleks väiksem kui* $\alpha = 1$?



Joonis 1.



Joonis 2.

[2] Ristkülikute ja risttahukate *täpsest* tükeldamisest on juttu artiklis: A. Leiten. Tükeldamisülesanded. — Matemaatika ja kaasaeg, XVIII, lk. 54—63.

Ilmselt $u_{11}=0$, $u_{22}=1$, $u_{33}=1$, $u_{44}=3$, $u_{55}=3$, $u_{66}=6$ jne. (vt. joon. 2). Pole raske näha, et $u_{2n,\,2n}=u_{2n+1,\,2n+1}=u_{2n-1,\,2n-1}+n$ $(n=1, 2, \ldots)$. Kehtib ka valem

$$u_{nn}=\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{n}{2}\right]\cdot\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right).$$

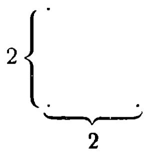
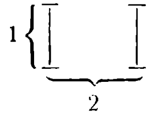
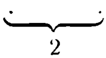
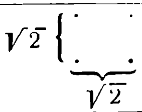
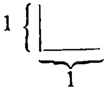
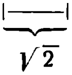
Kui ruudu 1×1 asemel võtta ruut mõõtmetega $l\times l$ $(l=1, 2, \ldots)$, siis saame, et

$$u_{nn}=\frac{1}{2}\left(\left[\frac{n-l+1}{l+1}\right]^2+\left[\frac{n-l+1}{l+1}\right]\right).$$

On võimalik vaadelda ka mahutamist ruumis, kolmnurksel võrgul jne., kuigi järgnevalt on piirdutud ainult väikese koondtabeli esitamisega, millest võib leida, kui palju mahub ristkülikule mõõtmetega $m\times n$ etteantud kujundeid näidetes 1 ja 2 formuleeritud tingimustel.

Lugejale võiks iseseisvaks peamurdmiseks jääda järgmine ülesanne. Ühikringi $(R=1)$ soovitakse mahutada k ühesuurust ringi, mis omavahel ei lõiku, küll aga võivad kõrvuti paikneda. Leida nende ringide suurim raadius $r(k)$ nii, et ülalesitatud tingimus oleks rahuldatud $(k=1, 2, \ldots)$.

Kujund	u_{mn}
l, l; $l=1, 2, \ldots$	$\left[\frac{m+1}{l+1}\right]\cdot\left[\frac{n+1}{l+1}\right]$
1	$\left[\frac{(m+1)(n+1)}{2}\right]$
l; $l=1, 2, \ldots$	$\left[\frac{(m+1)(n+1)}{l+1}\right]$, $m\geqslant l$ $(m\leqslant n)$ $(m+1)\cdot\left[\frac{n+1}{l+1}\right]$, $m<l$ $(m\leqslant n)$
1; 2	$\left[\frac{(m+1)(n+1)}{6}\right]$
k; l; $k<l$; $k, l=1, 2, \ldots$	$u_{mn}\leqslant\left[\frac{m+1}{k+1}\cdot\frac{n+1}{l+1}\right]$, $m\geqslant l$ $(m\leqslant n)$ $\left[\frac{m+1}{k+1}\right]\cdot\left[\frac{n+1}{l+1}\right]$, $m<l$ $(m\leqslant n)$

Kujund	u_{mn}
	$4\left[\frac{m+1}{4}\right]\left[\frac{n+1}{4}\right]+$ $+\left(\left[\frac{m+1}{4}\right]+\left[\frac{m+2}{4}\right]\right)\left[\frac{4}{3}\left\{\frac{n+1}{4}\right\}\right]+$ $+\left(\left[\frac{n+1}{4}\right]+\left[\frac{n+2}{4}\right]\right)\left[\frac{4}{3}\left\{\frac{m+1}{4}\right\}\right]-$ $-\left[\frac{8}{3}\left\{\frac{m+1}{4}\right\}\left\{\frac{n+1}{4}\right\}\right]$
	$\left[\frac{m+1}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right]\left(1-\left[1-\left\{\frac{1}{m}\right\}\right]\right)\left(1-\left[1-\left\{\frac{1}{n}\right\}\right]\right)+$ $+\left[1-\left\{\frac{1}{m}\right\}\right]\left(\left[\frac{n+1}{4}\right]+\left[\frac{n+2}{4}\right]\right)+$ $+\left[1-\left\{\frac{1}{n}\right\}\right]\left(\left[\frac{m+1}{4}\right]+\left[\frac{m+2}{4}\right]\right)$
	$\left[\frac{(m+1)(n+1)}{2}\right]-\left[1-\left\{\frac{1}{m}\right\}\right]\left[1-\left\{\frac{2}{n}\right\}\right]-$ $-\left[1-\left\{\frac{1}{n}\right\}\right]\left[1-\left\{\frac{2}{m}\right\}\right]$
	$2\left[\frac{(m+1)(n+1)}{6}\right]$
	$\left[\frac{(m+1)(n+1)}{3}\right]-1+\mathrm{sign}\left\lvert\left\{\frac{(m+1)(n+1)}{6}\right\}-\frac{1}{2}\right\rvert$
	$2\left[\frac{m+1}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right]+\left[1-\left\{\frac{m}{2}\right\}\right]\left[\frac{n+1}{\sqrt{2}+1}\right]+$ $+\left[1-\left\{\frac{n}{2}\right\}\right]\left[\frac{m+1}{\sqrt{2}+1}\right]-$ $-\left[1-\left\{\frac{m}{2}\right\}\right]\left[1-\left\{\frac{n}{2}\right\}\right]\mathrm{sign}\left[\frac{1}{\varrho}\right]$ $\varrho=\sqrt{\left(m-\left[\frac{m+1}{\sqrt{2}+1}\right](\sqrt{2}+1)+1\right)^2+\left(n-\left[\frac{n+1}{\sqrt{2}+1}\right](\sqrt{2}+1)+1\right)^2}$

Täiendusi koolimatemaatikale

CEVA JA MENELAOSE TEOREEMIDE ÜLDISTUS

U. Alla

Vaatleme ühel sirgel asetsevaid lõike. Seejuures vaatleme iga lõiku alati kindlasuunalisena, nii et otspunktidest on üks algus-, teine lõpp-punkt. Seega algus- ja lõpp-punkti osi vahetades, s. o. lõiku $\overline{AB}$ ümber pöörates saame uue lõigu $\overline{BA}$, mida võiks nimetada esimese lõigu vastandlõiguks.

Kahe samal sirgel asuva lõigu $\overline{AB}$ ja $\overline{CD}$ suhte $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$ all mõtleme nende pikkuste suhet, kusjuures see suhe võetakse märgiga $+$, kui lõigud on samasuunalised, ja märgiga $-$, kui lõigud on vastassuunalised.

Vanakreeka matemaatik Menelaos (I saj.) tõestas teoreemi: Kui mingi sirge lõikab kolmnurga ABC külgi BC, CA ja AB või nende pikendusi vastavalt punktides L, M ja N, siis kehtib:

$$\frac{\overline{BL}}{\overline{LC}} \cdot \frac{\overline{CM}}{\overline{MA}} \cdot \frac{\overline{AN}}{\overline{NB}} = -1.$$

Kasutades seda teoreemi, tõestas XVII sajandi itaalia matemaatik G. Ceva, et kui sirged AD, BE ja CF, mis ühendavad tippe vastasküIgedel või nende pikendustel asetsevate punktidega D, E ja F, läbivad üht ja sama punkti O, siis kehtib võrdus:

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = 1.$$

Püüame nüüd tuletada valemit, millest mõlemad teoreemid tulenevad erijuhtudena.

Edaspidi mõtleme väljenduse «lõigu $\overline{AB}$ punkt $C(\lambda)$» all sellist punkti C lõigul $\overline{AB}$ või selle pikendusel, mille korral kehtib

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \lambda.$$

On kerge näha, et $\lambda=0$ korral $C=A$, $\lambda>0$ korral C on A ja B vahel, $\lambda=\infty$ korral $C=B$, $-1<\lambda<0$ korral C asub lõigu pikendusel üle punkti A, $\lambda<-1$ korral C asub lõigu pikendusel üle punkti B, $\lambda=-1$ korral C on lõpmata kauge punkt.

Pakume nüüd lugejale tõestamiseks rea teoreeme.

Teoreem 1. Kui C on lõigu $\overline{AB}$ punkt $C(\lambda)$, siis $\overline{AC}=\frac{\lambda\overline{AB}}{1+\lambda}$ ja $\overline{CB}=\frac{\overline{AB}}{1+\lambda}$.

Näpunäide. Võrduse $\overline{AC}+\overline{CB}=\overline{AB}$ mõlemaid pooli jagada $\overline{AC}$-ga. Arvestades λ tähendust saamegi pärast teisendust esimese soovitud võrdustest. Teise võrduse leidmiseks kirjutame $\overline{CB}=\overline{AB}-\overline{AC}$ ning kasutame esimesena tõestatud võrdust.

Teoreem 2. Lõigu $\overline{AB}$ punktide $P_1(\lambda_1)$ ja $P_2(\lambda_2)$ korral kehtib

$$\overline{P_1P_2}=\frac{(\lambda_2-\lambda_1)\overline{AB}}{(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)}.$$

Näpunäide. Kirjutame võrduse

$$\overline{P_1P_2}=\overline{AB}-\overline{AP_1}-\overline{P_2B}.$$

Kirjutame $\overline{AP_1}$ ja $\overline{P_2B}$ avaldised, kasutades teoreemi 1. Saadud avaldised paneme ülaltoodud võrdusesse.

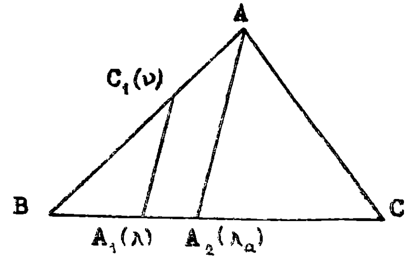
Teoreem 3. Kolmnurga ABC küljel $\overline{AB}$ olgu punkt $C_1(\nu)$ ja küljel $\overline{BC}$ punkt $A_1(\lambda)$. Tipust A lõiguga $\overline{C_1A_1}$ paralleelselt tõmmatud sirge jaotab külje $\overline{BC}$ suhtes $\lambda_a=\frac{(1+\nu)\lambda}{1-\nu\lambda}$.

Näpunäide. Kolmnurkade ABA_2 ja C_1BA_1 sarnasusest järeldame

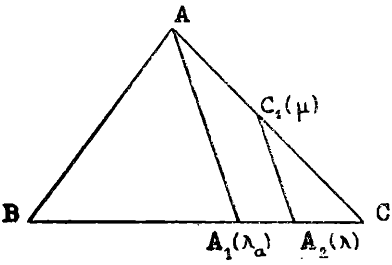
$$\frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1A_2}}=\frac{\overline{C_1B}}{\overline{AC_1}}=\frac{1}{\nu},\quad \text{kust}$$

avaldame $\overline{A_1A_2}=\nu\overline{BA_2}$.

Lõigu $\overline{BA_1}$ avaldame teoreemi 1 kasutades ja asendame viimatisaadud võrdusse.



Teisest küljest rakendame lõigule $\overline{A_1A_2}$ teoreemi 2. Saadud avaldised võrdsustame ja avaldame λ_a.



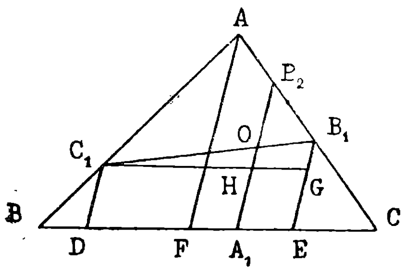
Teoreem 4. Kolmnurga ABC küljel $\overline{BC}$ olgu punkt $A_2(\lambda)$ ja küljel $\overline{CA}$ punkt $C_1(\mu)$. Tipust A lõiguga $\overline{C_1A_2}$ paralleelselt tõmmatud sirge AA_1 jaotab külje $\overline{BC}$ suhtes

$$\lambda_a = \frac{\lambda\mu - 1}{1+\mu}.$$

Näpunäide. Tõestada analoogiliselt teoreemile 3.

Teoreem 5. Kolmnurga ABC külje $\overline{BC}$ punkti $A_1(\lambda)$ ja külje $\overline{CA}$ punkti $B_2(\mu_2)$ ühendav sirge A_1B_2 jaotab külje $\overline{CA}$ punkti $B_1(\mu_1)$ ja külje $\overline{AB}$ punkti $C_1(\nu)$ ühendava lõigu $\overline{B_1C_2}$ suhtes

$$\frac{(1+\nu)(\mu_2-\mu_1)}{(1+\mu_1)(1+\lambda\mu_2\nu)}.$$



Näpunäide. C_1D_1, AF ja EB_1 olgu paralleelsed A_1B_2-ga ja C_1G paralleelne BC-ga. Siis

$$\frac{\overline{B_1O}}{\overline{OC_1}} = \frac{\overline{HG}}{\overline{C_1H}} = \frac{\overline{A_1E}}{\overline{DA_1}}.$$

$\overline{A_1E}$ avaldame $\overline{A_1C}$, $\overline{B_1B_2}$ ja $\overline{CB_2}$ kaudu, kasutades kolmnurkade A_1B_2C ja EB_1C sarnasust. Lõikudel $\overline{A_1C}$ ja $\overline{CB_2}$ rakendame teoreemi 1, $\overline{B_1B_2}$-le aga teoreemi 2. Saadud tulemusi kasutada lõigu $\overline{A_1E}$ avaldises.

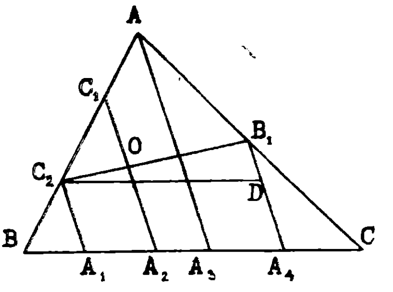
Tähistame $\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}$ λ_x-ga. Avaldame $\frac{\overline{BF}}{\overline{FC}}$ λ_x ja ν kaudu, kasutades teoreemi 3, teiselt poolt aga λ ja μ_2 kaudu, kasutades teoreemi 4. Siit saame λ_x avaldada. Edasi leiame $\overline{DA_1}$ teoreemi 2 põhjal. Kasutades $\overline{A_1E}$ ja $\overline{DA_1}$ avaldisi, saamegi suhte $\frac{\overline{B_1O}}{\overline{OC_1}}$.

Teoreem 6. Kolmnurga ABC külje $\overline{AB}$ punkti $C_1(\nu_1)$ ja külje $\overline{BC}$ punkti $A_2(\lambda)$ ühendav sirge jaotab külje $\overline{CA}$ punkti $B_1(\mu)$ ja külje $\overline{AB}$ punkti $C_2(\nu_2)$ ühendava lõigu $\overline{B_1C_2}$ suhtes

$$\frac{(1+\nu_2)(1+\lambda\mu\nu_1)}{(1+\mu)(\nu_2-\nu_1)\lambda}.$$

Näpunäide. Analoogiliselt teoreemi 5 tõestusele saame

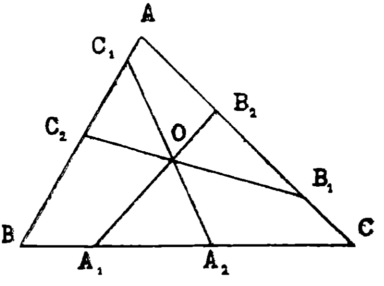
$$\frac{\overline{B_1O}}{\overline{OC_2}}=\frac{\overline{A_2A_4}}{\overline{A_1A_2}}.$$



Edasi uurime võrduse paremat poolt analoogiliselt teoreemi 5 tõestusele, kusjuures võrreldes teoreemiga 5 on lugeja ja nimetaja osad vahetatud.

Teoreem 7. Kui kolmnurga ABC külgedel või nende pikendustel võtta punktid $C_1(\nu_1)$, $C_2(\nu_2)$, $A_1(\lambda_1)$, $A_2(\lambda_2)$, $B_1(\mu_1)$, $B_2(\mu_2)$ nii, et sirged A_1B_2, B_1C_2 ja C_1A_2 lõikuvad ühes punktis, siis kehtib võrdus:

$$1+\lambda_1\mu_2\nu_2+\mu_1\nu_2\lambda_2+\nu_1\lambda_2\mu_2+$$
$$+\lambda_1\lambda_2\mu_1\mu_2\nu_1\nu_2=\lambda_2\mu_2\nu_2.$$



Tõestus: Leiame suhte $\frac{\overline{B_1O}}{\overline{OC_2}}$ jaoks kaks avaldist, rakendades esimesel korral teoreemi 5 lõikudele $\overline{A_1B_2}$ ja $\overline{B_1C_2}$, teine kord teoreemi 6 lõikudele $\overline{B_1C_2}$ ja $\overline{C_1A_2}$. Saadud avaldised võrdsustame.

Teoreemist 7 järeldubki esiteks Ceva teoreem, kui võtta $\nu_1=$ $=\lambda_1=\mu_1=0$, ning teiseks Menelaose teoreem, kui võtta $\lambda_1=\lambda_2$, $\mu_1=\mu_2$, $\nu_1=\nu_2$.

MÕNINGAID VALEMEID KOLMNURGA GEOMEETRIAST[1]

M. Levin

Vaatleme kolmnurka ABC, kasutades tähiseid:

$a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $\alpha = \angle BAC$,

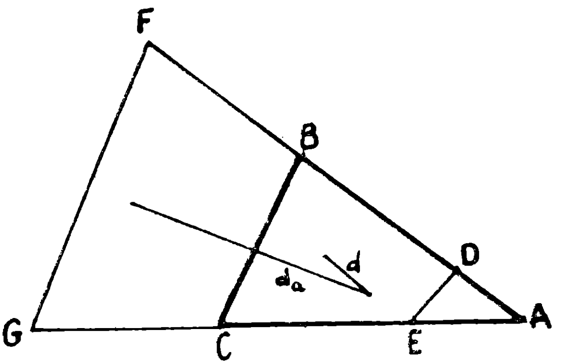
S on $\triangle ABC$ pindala,

p on $\triangle ABC$ pool ümbermõõtu,

R on $\triangle ABC$ ümberringjoone raadius,

d on $\triangle ABC$ siseringjoone ja ümberringjoone keskpunktide vaheline kaugus,

r_a on $\triangle ABC$ küljele BC külgejoonestatud ringjoone raadius (ringjoon puudutab külgede AC ja AB pikendusi[2]),



---

[1] M. Levin. Mõningaid valemeid kolmnurga geomeetriast. Matemaatika ja kaasaeg, XII, 1967, lk. 102—105.

Käesolev artikkel on autori eelmise artikli järg.

[2] Kui me räägime mingi lõigu MN pikendusest, siis oletame, et lõiku on pikendatud üle lõpp-punkti N.

d_a on $\triangle ABC$ ümberringjoone ja küljele BC külgejoonestatud ringjoone keskpunktide vaheline kaugus.

Asetsegu punktid D ja E vastavalt külgedel BA ja CA (või nende pikendustel) nii, et $BD = CE = BC$; punktid F ja G vastavalt külgede AB ja AC pikendustel nii, et $BF = CG = BC$. Tähistame

$$\frac{BC}{DE} = k, \quad \frac{BC}{FG} = m.$$

Eelmises artiklis tõestasime valemi

$$R = d \cdot k. \tag{1}$$

T e o r e e m 1. *Kehtib valem*

$$\frac{r_a}{R} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m^2} - 1\right). \tag{2}$$

T õ e s t u s. Koosinusteoreemi järgi järeldub kolmnurkadest AFG ja ABC

$$FG^2 = (c + a)^2 + (b + a)^2 - 2(c + a)(b + a)\cos \alpha \tag{3}$$

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2bc \cos \alpha. \tag{4}$$

Lahutades vastavalt viimased võrdused, saame

$$FG^2 - a^2 = 2a(a + b + c)(1 - \cos \alpha). \tag{5}$$

Valemist (4)

$$\cos \alpha = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc}. \tag{6}$$

Asendades viimase võrduse (6) valemisse (5), saame

$$FG^2 - a^2 = 2a^2 \cdot \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{abc(p-a)} = 2a^2 \frac{4S}{abc} \cdot \frac{S}{p-a}.$$

Siit, kasutades seoseid

$$R = \frac{abc}{4S} \quad \text{ja} \quad r_a = \frac{S}{p-a},$$

saame võrduse

$$FG^2 - a^2 = 2a^2 \cdot \frac{r_a}{R}.$$

Jagades viimase võrduse mõlemad pooled a^2-ga, saame valemi (2), mida oligi tarvis tõestada.

T e o r e e m 2. *Kehtivad valemid*

$$R = d_a \cdot m \tag{7}$$

$$r_a = \frac{d_a}{2}\left(\frac{1}{m} - m\right). \tag{8}$$

T õ e s t u s. Teada on valem [3]

$$d_a^2 = R^2 + 2Rr_a. \tag{9}$$

Siit

$$d_a^2 = R^2\left(1 + 2\cdot\frac{r_a}{R}\right).$$

Asetades viimasesse suhte $\frac{r_a}{R}$ asemele valemist (2) avaldatud väärtuse, saamegi valemi (7).

Valemi (8) saame, kui valemis (9) R asendada korrutisega $d_a \cdot m$ valemi (7) järgi.

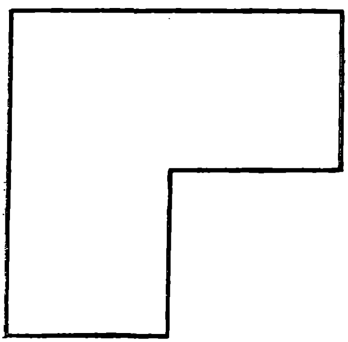
Teoreem ongi tõestatud.

T e o r e e m 3. *Kehtib võrdus*

$$\frac{d}{d_a} = \frac{DE}{FG}.$$

T õ e s t u s e saame kohe, kui vaid võrdus (1) jagada võrdusega (7).

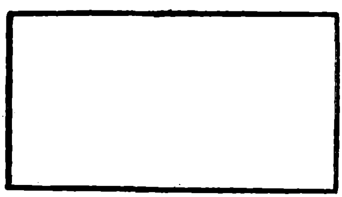
[3] Vt. П. С. М о д е н о в. Сборник задач по специальному курсу элементарной математики (lk. 172). М., 1957.



ÜLESANNE 1

Jaotada antud kujund neljaks kongruentseks osaks.

Neile, kes ülesande 1 on suutnud edukalt lahendada, ei paku arvatavasti raskusi ka ülesanne 2.



ÜLESANNE 2

Jaotada antud kujund viieks kongruentseks osaks.

PABERI VOLTIMISE ÜLESANNETEST

Martin Gardneri artikli ainetel
A. Tauts

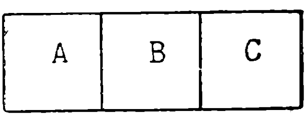
Olgu meil pabeririba, mille pikkuse ja laiuse suhe on 3 : 1. Jaotame ta joontega kolmeks ruuduks ja tähistame ruudud tähtedega (joon. 1). Kui me nüüd murrame pabeririba joonte kohalt kokku, tekib meil kolme lehe paksune pakk, mis pealtvaates on ühe ruudu suurune. Seejuures on ruudud *A*, *B* ja *C* selles pakis ülalt alla lugedes antud kindla murdmisviisi korral kindlas järjekorras. Küsime, mitu erinevat järjekorda on võimalik murdmisviisi valiku kaudu saada. Seejuures me ei loe oluliseks, kumb külg mingil ruudul pealpool on.

On selge, et kolm ruutu võivad üldse olla kuues erinevas järjekorras: *ABC*, *ACB*, *BAC*, *BCA*, *CAB* ja *CBA*. Kas need võimalused on realiseeritavad ka kokkumurdmise teel?

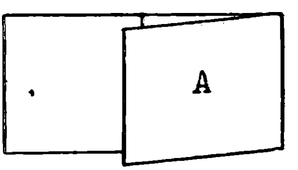
Murrame kõigepealt riba kokku ruutude *A* ja *B* piirjoont mööda. *B* jääb siis *A* alla ja *C* vasakule kõrvale (joon. 2.). Nüüd on aga teist joont võimalik kokku murda kolmel eri viisil:

1) *C* jääb *B* alla,
2) *C* murtakse ettepoole, kuid pistetakse *A* ja *B* vahele,
3) *C* jääb *A* peale.

Sel viisil saame kolm eri järjestust: *ABC*, *ACB* ja *CAB*. Igaüht võime lugeda ka ümberpöördud järjekorras ja siis saame järjestused: *CBA*, *BCA* ja *BAC*. Seega on kõik kuus võimalust realiseeritavad.



Joonis 1.



Joonis 2.

Vaatame olukorda, kus meil on neljast ruudust koosnev riba (joon. 3). Neljast tähest on teatavasti võimalik koostada $4! = 24$ järjestust. On need kõik realiseeritavad?

A	B	C	D

Joonis 3.

Järjestused *ABCD* ja *ABDC* on kergesti realiseeritavad. Selleks tuleb esimest murdejoont kasutades murda *B* *A* alla ja seejärel järgmist murdejoont kasutades murda *C* *B* alla. Edasi tuleb viimast murdejoont kasutades murda *D* esimesel juhul *C* alla, teisel juhul aga *C* peale, s. o. *B* ja *C* vahele.

Katsume nüüd saada järjestust *ACBD*. Oletame, et selline järjestus on realiseeritud. Kuidas peaksid sel juhul asetsema murdejooned?

Võtame paki ette nii, et *A* on peal ja murdejoon *A* ja *B* vahel on paki paremal serval. Murdejoon *B* ja *C* vahel on sel juhul paki vasakul serval, kusjuures *C* on murtud üles, *A* ja *B* vahele. Ruudu *C* teine serv ulatub seega *A* ja *B* vahelise murdejoone poolt tekitatud soppi. Ja just selles sopis asub niisiis kolmas murdejoon. Seega ei saa sel juhul *D* asuda *A* ja *B* vahelt väljas. Tähendab, järjestus *ACBD*, samuti ka *DACB* on võimatu.

A	B	C
P	Q	R
X	Y	Z

Joonis 4.

Selgub, et 24-st järjestusest on realiseeritavad 16.

Üldist eeskirja, mille abil saaks iga n korral leida realiseeritavate järjestuse arvu n ruudust koosneva riba korral, pole seni veel leitud.

Olukord muutub veel komplitseeritumaks, kui tegemist ei ole ribaga, vaid näiteks ristkülikuga. Olgu näiteks tegemist 9 ruuduga, mis on paigutatud ruudukujuliselt 3×3 (joon. 4). Üheksast tähest saab koostada $9! = 362\,880$ järjestust, kuid senini ei ole teada, et keegi oleks välja arvutanud, kui palju neist on realiseeritavad. Osalise lahenduse annab üksikute mitterealiseeritavate järjestusliikide väljaselgitamine.

Olgu meil leht kokku murtud nii, et saadakse ühe ruudu suurune ja üheksa lehe paksune pakk. Asetame paki lauale nii, et ruut *A* jääks pealepoole ruudust *B*. Seejuures pöörame paki nii, et murdejoon *A* ja *B* vahel jääks paki paremasse serva. Kuna kokkumurdmisviis oli suvaline, siis võib muidugi A peal, samuti A ja B vahel olla teisi tähti. Murdejoon A ja P vahel võib olla seejuures paki ülemises või alumises servas, olenevalt sellest, kumb ruudu A külg pealpool on. Mõlemal juhul on P jaoks kolm võimalust: ta võib olla pealpool A-d, A ja B vahel või allpool B-d. Murdejoon P ja Q vahel on igal juhul paki paremal serval. Seega kui P on A ja B vahel, siis peab ka Q olema A ja B vahel, kuna murdejoon P ja Q vahel asub A ja B murdejoone poolt moodustatud sopis. On aga P pealpool A-d või allpool B-d, siis ei saa Q asuda A ja B vahel, sest siis peaks ruudu Q parempoolne serv asuma A ja B murdjoone sopis ja teda poleks võimalik ühendada ruudu P servaga, mis ei asu A ja B vahel. Seega on realiseerimatud kõik sellised järjestused, kus tähtedest P ja Q üks asub A ja B vahel ning teine mitte. Märgime veel, et kui näiteks P ja Q on A järel ja B ees, siis peab olema P eespool kui Q, sest murdejoon A ja P vahel on paki samal serval kui murdejoon Q ja B vahel. Kui Q asuks A ja P vahel, ei saaks tema vastavat serva ühendada B servaga, mis asub tagapool P-d.

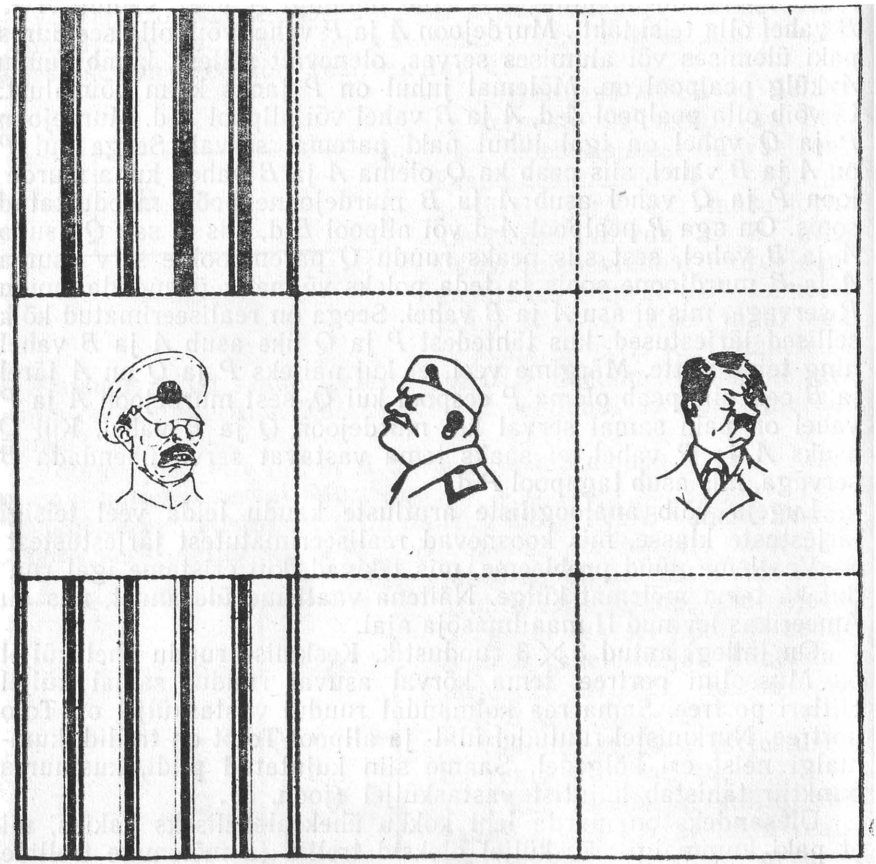
Lugeja võib analoogiliste arutluste kaudu leida veel teisigi järjestuste klasse, mis koosnevad realiseerimatutest järjestustest.

Vaatleme nüüd probleeme, mis tekivad, kui eristame igal ruudul ka tema mõlemat külge. Näitena vaatleme ülesannet, mis oli Ameerikas levinud II maailmasõja ajal.

On jällegi antud 3×3 ruudustik. Keskmise ruudu ühel küljel on Mussolini portree, tema kõrval asuval ruudul samal küljel Hitleri portree. Sama rea kolmandal ruudul vastasküljel on Tojo portree. Nurkmistel ruutudel üal- ja allpool Tojot on trellid, kummalgi neist eri külgedel. Saame siin kujutatud pildi, kusjuures punktiir tähistab kujutist vastasküljel (joon. 5).

Ülesandeks on murda leht kokku üheksaleheliseks pakiks, nii et paki kummalgi välisküljel oleksid trellid ja mõlemate trellide taga järgmisel ruudul oleks portree näoga väljapoole. Kui oletada, et trellide vahel on pilud, mis võimaldavad järgmist ruutu näha, siis näeksime paki kummalgi küljel läbi trellide nägu.

Ülesande lahendamiseks selgitame kõigepealt, milliste trellide taha keegi kolmest nimetatud mehest üldse põhimõtteliselt sattuda võib. Arutleme järgmiselt: kuna naaberruutudel on ühine murdejoon, siis peavad nende pealmised küljed pakis olema suunatud vastassuundadesse. Induktsiooni rakendades saame siit järgmise tulemuse: kui ühelt ruudult teisele liikudes peame ületama paarisarvu murdejooni (oletame, et murdejooni ületame keskelt, mitte nurkadest), siis on nende ruutude pealmised küljed pakis samale poole suunatud. On aga ületatavate murdejoonte arv paaritu, siis on ruutude pealmised küljed suunatud vastaspoole. Järelikult peavad nurkmised ruudud olema kõik pealmise küljega samale poole. Seetõttu on arusaadav, miks ühel neist on trellid pealpool, teisel allpool: kahte pealmist poolt ei saaks ju paki vas-



Joonis 5. (Scientific American, mai 1971)

taskülgedel väljaspool olla. Nurkmiste ruutudega samale poole on suunatud ka keskmine ruut, kuna servadel asuvad ruudud on suunatud vastaspoole.

Seda arvestades näeme, et Tojo ja Mussolini nägu peab olema pakis samas suunas, kus ülemised trellid, Hitleri nägu aga alumiste trellide suunas. Seega tuleb pakk nii kokku panna, et ühel küljel vaataks Hitler läbi alumiste trellide, teisel küljel Tojo või Mussolini läbi ülemiste trellide. Et aga eelmise ülesande puhul, nagu märgitud, ei saa järjestus alata tähtedega $A\,Q$, siis on Mussolini trellide taha asetamine võimatu. Ülemiste trellide taga peab olema Tojo.

Kuna portreed on ühendatud külgmiste murdejoontega, siis peavad nende alumised ääred asuma paki samal serval. Seega peab Hitleri ees olevate trellide ruudul asuma horisontaalne murdejoon allpool Hitleri nägu (on ju ühendatud Tojo portree alaservaga), vertikaalne murdejoon aga paremal. Kumb neist kahest murdmisest enne teha? Trellidega külgnev valge ruut peab jääma trellidele lähemale kui Tojo portree — viimane on ju peaaegu paki vastasküljel.

Seega on vaja vertikaaljoont mööda murdmine enne teha.

Seega saame järgmise eeskirja. Murrame kõigepealt mööda ülemist horisontaaljoont ülemise rea tahapoole. Seega satub Tojo nägu kohe vastu trelle. Siis murrame mööda vasakut vertikaaljoont vasaku osa ettepoole (nagu öeldud, tuli see ju teha enne kui murdmine alumist horisontaaljoont mööda). Nüüd murrame mööda horisontaaljoont, nii et trellid jäävad väljapoole. Siis murrame mööda vertikaaljoont, kusjuures pistame Hitleri portree koos tema taga asuvate ruutudega vahetult talle vastavate trellide taha, s. o. kokkumurtud paki vahele.

Nagu näeme, muudab asjaolu, et kujundid asuvad ainult vastava ruudu ühel küljel, lahenduse tunduvalt konkreetsemaks.

Lõpuks esitame lugejale endale ühe ülesande. On antud 3×3 ruudustik tähtedega (joon. 6), kusjuures seekord on sama täht iga ruudu mõlemal küljel. Ülesandeks on murda leht nii kokku, et saaksime üheksalehelise paki, kus tähed, loetuna ruutude paiknemise järjekorras pakis, annavad sõna BEELZEBUB (s. t. Beltsebul). Jõudu ja visadust ülesande lahendamiseks!

L	Z	E
B	B	E
B	U	E

Joonis 6.

ARV π

J. Gabovitš

1. Esimeseks teadlaseks, kes andis range meetodi π arvutamiseks, oli suur Arhimedes (u. 287—212 e. m. a.).

Meetod seisneb selles, et leitakse küllalt suure täpsusega korrapäraste sisse- ning ümberjoonestatud n-nurkade ümbermõõdud ja moodustatakse nende suhe diameetrisse. Arvu π tõeline väärtus asub kahe leitud suhte vahel. Võtnud $n = 96$, sai Arhimedes tulemuseks

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$

Aritmeetiline keskmine siit annab $\pi = 3{,}142$. Täpsus, mis ületab isegi tänapäeval koolimatemaatikas kasutatavat väärtust $\pi = 3{,}14$.

Arhimedese menetlus jäi püsima peaaegu 2000 aasta vältel; täpsemaks arvutamiseks vaid suurendati külgede arvu n.

Apollonios Pergest (u. 260—u. 170 e. m. a.) sai Arhimedese väärtusega võrreldes täpsema tulemuse $\pi = 3{,}1416$ (muidugi mitte kümnendmurruna kirjutatuna).

Silmapaistev hiina teadlane Tzü Tšun-tži (Tsu Chung-chih; 430—501 m. a. j.) näitas, et

$$3{,}1415926 < \pi < 3{,}1415927.$$

Suured on arvu π uurimisel Samarkandi astronoomi ja matemaatiku al-Kaši (u. 1375—1429) teened. Valides hulknurkade külgede arvu jaoks väärtuse $n = 3 \cdot 2^{28}$, sai ta arvu π seitsmeteistkümne õige kümnendkohaga. Al-Kaši oli ka esimene, kes hakkas kasutama kümnendmurde. Oma arvutuse tulemuse kirjutas ta

$$2\pi = 6{,}2831853071795865.$$

Sada seitsekümmend aastat võttis aega, enne kui al-Kaši poolt saavutatud täpsus osutus ületatuks. Aastal 1600 arvutas hollandlane Ludolf van Ceulen (1539—1610) π kolmekümne viie kümnendkohaga, valides $n = 2^{62}$. Kohutav täpsus vapustas matemaatikuid ja arv π (tol ajal teda nii veel ei nimetatud) sai *Ludolfi arvu* nimetuse. Viimane püsib kohati veel tänapäevani (eriti hollandlastel ja sakslastel).

2. Külgede arvu n suurenemisega muutub arvutamine järjest mahukamaks ja tülikamaks. Sai selgeks, et Arhimedese meetodi võimalused on praktiliselt ammendatud. Tuli otsida põhimõtteliselt uusi menetlusi Ludolf van Ceuleni tulemuse ületamiseks.

Ning uus meetod tõesti tekkis. Aastal 1670 avastas inglane James Gregory (1638—1735), et funktsioon $\arctan x$ on arendatav järgmiseks lihtsaks astmereaks:

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \qquad (1)$$

Kui võtta $x = 1$, saame siit (Leibniz, 1673):

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \qquad (2)$$

Kuigi Leibnizi tulemusel oli suur printsipiaalne tähtsus — esmakordselt sai leitud arvu π jaoks analüütiline avaldis arvrea kujul — osutus rida (2) π arvutamiseks ebakohaseks.

Sel puhul märkis sir Isaac Newton, et rea (2) abil arvu π 20 õige kümnendkoha saamiseks peab arvestama fantastilist liikmete arvu — 5 000 000 000!

Ent mida väiksem on positiivne arv x, seda kiiremini koondub rida (1). Võttes $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ sai Abraham Sharp (1651—1742) rea

$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}} = 1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \dots, \qquad (3)$$

mille abil ta arvutas π seitsmekümne kahe õige kohaga (aastal 1700, s. t. sajand pärast Ludolf van Ceuleni tulemust!).

Järgmise sammu arvu π saladustesse tungimiseks tegi Londoni astronoomiaprofessor Machin (1680—1751). Aastal 1706 tõestas ta oma tähelepanuväärse teoreemi: *kui neljakordsest teravnurgast, mille tangens on* $\frac{1}{5}$, *lahutada teravnurk tangensiga* $\frac{1}{239}$, *saame pool täisnurka.*

Sellele teoreemile vastab Machini valem

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}, \qquad (4)$$

mille praktiline väärtus püsib tänapäevani. Kasutades valemeid (1) ja (4) arvutas Machin π saja õige kohaga.

Prantslane Th. F. de Lagny (1660—1734), kellele Machini tulemus jäi teadmata, kasutas Sharpi valemit (3) π arvutamiseks 127 kohaga (1717. Hiljem selgus, et kõik numbrid, välja arvatud 113., olid õiged; (vt. allpool).

De Lagny «rekord» püsis 72 aastat ja seda esitati (koos mainitud arvutusveaga) kõikides tähtsamates 18. sajandi matemaatika õpperaamatutes ja monograafiates. «Ületrumpajaks» osutus kuulus austria arvutaja Georg Vega (1756—1802), kelle harukdase täpsusega koostatud logaritmilised tabelid tegid ta nime surematuks.

Vega arvutas π 136 õige kohaga, tuletades selleks (Machini omast küll vähema efektiivsusega) valemi

$$\frac{\pi}{4}=2\arctan\frac{1}{3}+\arctan\frac{1}{7}. \tag{5}$$

Nüüd selguski, et de Lagny tulemuses oli 113. number pärast koma valesti arvutatud; 7 asemel pidi olema 8.

Vega tippsaavutus püsis üle poole sajandi. Uus resultaat saadi alles aastal 1844, mil tuntud saksa kiirarvutaja Zacharias Dase (1824—1861), kasutades Viini professori Schulzi poolt tuletatud valemit

$$\frac{\pi}{4}=\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{5}+\arctan\frac{1}{8}, \tag{6}$$

leidis kahe kuu jooksul kakssada arvu π kümnendkohta:

$$\begin{aligned}\pi = 3{,}&14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\\ &83279\ 50288\ 41971\ 69399\ 37510\\ &58209\ 74944\ 59230\ 78164\ 06286\\ &20899\ 86280\ 34825\ 34211\ 70679\\ &82148\ 08651\ 32823\ 06647\ 09384\\ &46095\ 50582\ 23172\ 53594\ 08128\\ &48111\ 74502\ 84102\ 70193\ 85211\\ &05559\ 64462\ 29489\ 54930\ 38196.\end{aligned}$$

Võidujooks jätkus kiirenevas tempos. Aastal 1848 avaldas Tartu tähetorni astronoom-vaatleja, kellel olid ka suured teened matemaatika arengus [1], 250 arvu π kümnendkohta. Vigade vältimiseks teostas ta arvutusi nii Machini kui ka Vega valemi järgi.

Suure füüsiku nimekaim William Rutherford, teisendades Machini valemi kujule

$$\frac{\pi}{4}=4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{70}+\arctan\frac{1}{99}, \tag{7}$$

sai 440 kohta (1853). Kahe aasta pärast teadis poolakas Richter juba 500 kohta.

Umbes samal ajal asus arvu π ründamisele fanaatiline arvutaja William Shanks. Ta sai kuulsaks mitte ainult tohutu suure täpsuse pärast, millega ta π arvutas (707 kümnendkohta), vaid

[1] Vt. J. Gaiduk. Thomas Clausen ja tema matemaatikaalane looming. Matemaatika ja kaasaeg, XII, lk. 116—122. Tartu, 1967.

ka seetõttu, et oma resultaadi saamiseks töötas intensiivselt 20 aastat järjest! Shanksi tulemus avaldati aastal 1873; arvutamisel kasutas ta Machini valemi algkuju (4).

Järgnes kauaaegne vaige, mille murdsid ameeriklased F e r g u s o n ja W r e n c h. Kasutades moodsat arvutustehnikat (kuigi mitte veel elektronmasinat) õnnestus neil kahe aastaga (1946—1948) saada arvu π 808 kümnendkohta. Suure üllatusena avastati, et Shanksil olid õiged vaid 527 kümnendkohta, kõik ülejäänud numbrid ei vastanud tõele!

3. Nagu ülaltoodud valemid näitavad, sõltub π efektiivne arvutamine sellest, kas õnnestub meie suurust avaldada küllalt väikeste argumentidega arkustangensite kaudu.

Valemites (4) ja (5) on arv π avaldatud kahe säärase arkustangensi kaudu. Kaks analoogilist valemit (küll väiksema praktilise väärtusega, ent see pole praegu oluline) leidis 18. sajandi suur teadlane L e o n h a r d E u l e r (1737):

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &= \operatorname{arctan}\frac{1}{2} + \operatorname{arctan}\frac{1}{3}, \\ \frac{\pi}{4} &= 2\operatorname{arctan}\frac{1}{2} - \operatorname{arctan}\frac{1}{7}. \end{aligned} \tag{8}$$

Kas eksisteerib veel sama tüüpi valemeid? Kaua aega ei andnud matemaatikute pingutused sellele küsimusele vastust. Lõpuks aastal 1895 tõestas norralane S t ö r m e r järgmise teoreemi: diofantilisel võrrandil

$$\frac{\pi}{4} = m \operatorname{arctan}\frac{1}{p} + n \operatorname{arctan}\frac{1}{q}, \tag{9}$$

kus m ja n on nullist erinevad ratsionaalarvud ning p ja q ühest suuremad täisarvud, on vaid neli lahendit (mis on parajasti antud valemitega (4), (5) ja (8)).

Sellega oli küsimus võrrandi (9) kohta ammendavalt lahendatud. Ent ammu enne Störmeri teoreemi tõestamist hakati otsima π arvutamiseks sobivaid diofantilise võrrandi

$$\frac{\pi}{4} = a \operatorname{arctan}\frac{1}{x} + b \operatorname{arctan}\frac{1}{y} + c \operatorname{arctan}\frac{1}{z} \tag{10}$$

lahendeid. Siin on jälle a, b, c nullist erinevad ratsionaalarvud ning x, y, z ühest suuremad täisarvud.

Meil esines juba võrrandi (10) kaks lahendit. Schulzi valemis (6) on $a = b = c = 1$, $x = 2$, $y = 5$, $z = 8$; Rutherfordi omas $a = 4$, $b = -1$, $c = 1$, $x = 5$, $y = 70$, $z = 99$.

Uusi lahendeid pakkusid Freiburgi (Saksamaa) matemaatikaprofessor K. B u z e n g e i g e r (1771—1835):

$$\frac{\pi}{4}=8\arctan\frac{1}{10}-\arctan\frac{1}{239}-4\arctan\frac{1}{515}, \tag{11}$$

C. F. Gauss (avaldatud postuumselt 1863):

$$\frac{\pi}{4}=12\arctan\frac{1}{18}+8\arctan\frac{1}{57}-5\arctan\frac{1}{239} \tag{12}$$

ning C. Störmer (1896):

$$\frac{\pi}{4}=6\arctan\frac{1}{8}+2\arctan\frac{1}{57}+\arctan\frac{1}{239}. \tag{13}$$

Nendest valemitest on π arvutamiseks kõige kohasem Gaussi oma (12), sest arkustangensite argumendid on selles kõige väiksemad. Kuid ka ülejäänud kaks valemit on leidnud laialdast kasutamist. Nii näiteks väga täpsetes Petersi ja Steini «Matemaatilistes tabelites» (venekeelne tõlge ilmus 1968) rakendasid autorid Buzengeigeri valemit (11) Shanksi arvutuste osaliseks kontrollimiseks. Störmeri valemist (13) tuleb meil juttu allpool.

Mitmed matemaatikud on leidnud ka teisi diofantilise võrrandi (10) lahendeid (kokku on neid tänapäeval teada 97), ent π arvutamise vaatekohalt nad pakuvad vähe huvi. Kaks võrrandiga (10) seotud probleemi ootavad veel lahendamist. Esimene on puhtteoreetiline küsimus: kas võrrandil (10) on lõplik või lõpmata arv lahendeid? Intuitiivselt näib, et peaks kehtima esimene alternatiiv (Störmeri teoreemi üldistus!), kuid tõestada seda me ei oska. Teine küsimus on suure praktilise väärtusega: kas leidub võrrandil (10) lahend, mille efektiivsus oleks Gaussi valemi (12) omast suurem (s. t. kus $18<x<y<z$)? Igatahes matemaatikute püüdlused vastava valemi leidmiseks pole siiani tulemusi andnud.

Arkustangensite argumentide suuruse vähenemist võib saavutada vaid liidetavate arvu suurendamise hinnaga. See raskendab mõnevõrra Gregory valemi (1) kasutamist π arvutamisel, ent määravaks on siiski argumentide suurus.

On olemas suur hulk valemeid, kus arv π on avaldatud nelja arkustangensi summana. Neist kõige efektiivsemaks loeti Gaussi valemit

$$\frac{\pi}{4}=12\arctan\frac{1}{38}+20\arctan\frac{1}{57}+7\arctan\frac{1}{239}+24\arctan\frac{1}{268}.$$

Aastal 1965 õnnestus käesolevate ridade autoril leida valem

$$\frac{\pi}{4}=44\arctan\frac{1}{57}+7\arctan\frac{1}{239}-12\arctan\frac{1}{682}+24\arctan\frac{1}{12\,943}.$$

Kuigi viimane pole veel aprobeeritud π ulatuslikuks arvutamiseks, on põhjust arvata, et teadaolevatest valemitest (sõltumata liidetavate arvust) on ta kõige kohasem.[2]

4. Elektronarvutite loomisega algas uus ajajärk arvu π ajaloos. Ülesanne, mille lahendamine kestis varem kuid ja aastaid, osutus nüüd lahenduvaks tundide ja isegi minutite vältel, kusjuures eelmiste resultaatidega võrreldes võis saavutada hoopis suuremaid täpsusi.

Pealetungi alustas ameeriklane Reitwiesner aastal 1949. Arvutil ENIAC sai ta 70 tunniga 2037 kümnendkohta. Järgnesid tema kaasmaalased Nicholson ja Jeenel (arvuti NORC, 1954), kellel tänu tunduvale masinaprogrammi parendamisele õnnestus saada 3089 kümnendkohta 13 minutiga!

Inglane Felton, töötades «Pegasusega», arvutas 1958. aastal 33 tunniga 10000 kohta. Samal aastal kordas sama tulemust (arvutil IBM 704) prantslane Genuys; aega läks tal seejuures vaid 100 minutit, jällegi programmi täiustamise arvel. Järgmisel aastal kasutas rühm prantsuse arvutajaid Genuys' täiendatud programmi 16167 koha saamiseks. Kulutatud aeg 4 tundi 18 minutit.

Välja arvatud Felton, kes baseerus Gaussi valemil (12), kasutasid kõik teised arvutajad Machini valemit (4).

Algas viimane rünnak. Tegevus kandub uuesti ookeani taha. Aastaarv: 1962. Ameerika matemaatikaseltsi häälekandja «Mathematics of Computation» avaldab Daniel Shanksi (müstilisel kombel esineb see nimi arvu π ajaloos kaks korda, küll täiesti erinevas kontekstis!) ja John Wrenchi artikli «Calculation of π to 100000 Decimals». Sada tuhat[3] kümnendkohta!

Selle pretsedenditu tulemuse saamine nõudis muidugi suurt ettevalmistustööd. Tuli luua uus, hästi ökonoomne programm. Arvutamiseks valiti masin IBM 7090, mille võimsus ületab seitsmekordselt arvuti IBM 704 võimsuse.

Vigade välistamiseks otsustati arvutusi teostada sõltumatult kahe valemi järgi. Selleks valiti Gaussi ja Störmeri valemid (12) ja (13). Osutus, et ettevaatus polnud ülearune — mõlemad resultaadid ühtisid vaid kuni 70695 kümnendkohani. Viga õnnestus üles otsida kiiresti ja siis ühtisid tulemused täielikult. Kogu arvutamine nõudis aega 13 tundi 5 minutit[4].

---

[2] Vt. sel puhul; J. Gabovitš. Arkustangensite arvutamisest. — EPA teaduslike tööde kogumik nr. 42, Tartu, 1965, lk. 117—125.
Selles artiklis leiab lugeja ka meetodi võrrandi (10) ja analoogiliste võrrandite lahendite saamiseks.

[3] Niipalju numbreid on toodud artiklis. Tegelikult said autorid 100265 kümnendkohta. Muide, arvutamine ise viidi läbi 29. juulil 1961.

[4] Ajakulu jaotus järgmiselt: Arvutamine Störmeri valemi järgi 8 t. 1 min., Gaussi valemi järgi 4 t. 22 min., teisendamine kahendsüsteemist kümnendsüsteemi 42 min.

Oma artiklis püstitasid Shanks ja Wrench küsimuse: kas kaasaja elektronarvutid võimaldavad π arvutamist veel suurema täpsusega? Nende teostatud analüüs näitab, et see pole võimalik. Nad toovad järgmise ilmeka näite: selleks, et saada miljon arvu π kümnendkohta, peaks meie käsutuses olema masin, mis võrreldes (küllalt võimsa!) arvutiga IBM 7090 oleks sada korda kiirem, sada korda kindlam (vigade mitteesinemise suhtes) ja 10 korda suurema salvega. Autorid lõpetavad arutelu sõnadega: «No such machine now exists».

5. Mis oli ajendiks, mis õhutas matemaatikuid otsima järjest enam ja enam arvu π kümnendkohti? Põhjusi selleks oli mitmesuguseid ja eri aegadel nad isegi muutusid.

Kõigepealt oli muidugi vaja saavutada arvu π selline täpsus, mis tagab sellest arvust sõltuvate geomeetriliste suuruste (ringi ümbermõõdu, pindala, silindri, koonuse ruumalade jne.) õige arvutamise.

Koolimatemaatikas, nagu juba mainisime, piisab lähendist $\pi = 3{,}14$. Mitmesugustel insener- ning tehnikaarvutustel on küllaldaseks väärtus $\pi = 3{,}1416$. Tõsisemad nõudmised on astronoomidel («astronoomilise täpsusega» tähendab ju: väga suure täpsusega), kuid ka nemad kasutavad harva suuremat kui kümnekohalist täpsust.

Sellega seoses toob E. B e u t e l (vt. kirjanduse loetelu) järgmise drastilise näite. Olgu antud ring, mille raadius võrdub Päikese kaugusega meile lähimast tähest Proxima Centaurusest (4,3 valgusaastat). Kui arv π on antud kahekümne viie õige kümnendkohaga, siis selle ringi ümbermõõdu arvutamisel tehtud viga ei ületa üht miljondikku millimeetrit!

Niisiis arvutuspraktika vaatekohalt võiks täpsus, mille saavutas juba 15. sajandil samarkandlane al-Kaši, rahuldada kõige rangemaid nõudmisi.

Ent päevakorda tuli hoopis teist laadi probleem: kas π on ratsionaalne (s. t. kahe täisarvu suhtena esitatav) või irratsionaalne arv? Võiks kirjutada paksu raamatu ägedatest vaidlustest selle küsimuse ümber, vääradest teoreemidest, mis sajandite vältel köitsid matemaatikute tähelepanu, ning nende ümber lükkamisest.

Araablane a l - B i r u n i (973—1048) oli esimene, kes avaldas veendumust, et arv π on irratsionaalne. Samal seisukohal asusid ka araabia kultuuriga seotud teadlased M u s a b e n M a i m u n (1135—1204) ning meile juba tuntud al-Kaši. Samal arvamusel olid ka matemaatikaga palju tegelnud L e o n a r d o d a V i n c i ja ta kaasaegne india teadlane N i l a k a n t a [5].

---

[5] Pakub huvi asjaolu, et Nilakanta tuletas valemi (1) 170 aastat enne Gregoryt. Tema töö jäi kahjuks unustusse ja mingit mõju matemaatika arengule ei avaldanud.

Ent kõigi nende ja paljude hilisemate matemaatikute arvamus π irratsionaalsuse kohta oli vaid hüpoteesiks; tõestust ei suutnud keegi esitada. See tõukaski «vastasleeri» esindajaid arvutama üha uusi kümnendkohti lootuses leida mingit korrapärasust (näiteks kümnendmurru perioodilisust, mis otsekohe viitaks π ratsionaalsusele). Viimase otsimine oligi ajendiks suure arvutustöö ettevõtmisel Ludolfil, Sharpil, Machinil, de Lagny'l ning Vegal.

Esimese tõsise katse tõestada arvu π irratsionaalsust tegi aastal 1766 saksa matemaatik, füüsik, astronoom ja filosoof Johann Heinrich Lambert (1728—1777). Et ta tõestus ei olnud päris korrektne, jäi küsimus ikkagi lahtiseks ning vaidlused arvu π iseloomu üle ei soikunud.

Lahendus saabus aastal 1794, mil prantslane Adrien Marie Legendre (1752—1833), täites lünka Lamberti tõestuskäigus, tõestas lõplikult arvu π irratsionaalsuse.

Järeldus Lambert-Legendre'i teoreemist: arv π avaldub lõpmata mitteperioodilise kümnendmurruna. Kuid ka see tulemus ei rahuldanud apsakaid matemaatikuid. Kerkis uus küsimus: kas arv π pole mõne täisarvuliste kordajatega algebralise (näiteks ruut-, kuup- või kõrgema astme) võrrandi lahendiks? Või ei ole ta ühegi sellise võrrandi juureks ja on seega nn. transtsendentne arv?

Möödus veel peaaegu terve sajand, enne kui sellele raskele küsimusele vastus suudeti anda. Aastal 1882 ilmus Buzengeigeri kaaslinlase Ferdinand von Lindemanni (1852—1939) artikkel «Über die Ludolf'sche Zahl». Selles oli esitatud arvu π transtsendentsuse täielik ja range tõestus.[6]

Paistis, et nüüd — pärast arvu π aritmeetilise iseloomu lõplikku selgitamist — kaotab uute kümnendkohtade juurdearvutamine igasuguse mõtte. Otse vastupidi! Matemaatikas tekkis (eriti kaasajal, seoses statistika, küberneetika ning arvutusmatemaatika kiire arenguga) rida uusi suundi ja probleeme, kus arvu π kümnendkohtade kaootiline rodu osutab teadlastele suurt abi.

Toome vaid mõned näited. Uute elektronarvutite korrasoleku kontrollimiseks antakse neile «käsk» arvutada π mõnituhat kümnendkohta.

Noorte arvutajate väljaõpetamisel rakendatakse π arvutamiseks koostatud programme.

Paljude statistiliste ülesannete lahendamisel tuleb kasutada mõnda juhuslikkude arvude jada. Just niisuguse jada moodustavadki arvu π kümnendkohad.

Meie arv on leidnud rakendamist isegi rändkaupmehe ülesande erijuhtude lahendamisel.[7]

---

[6] Professor Lindemanni teoreemil olid vapustavad järeldused konstruktsioonigeomeetrias. Vt. sel puhul: K. Ariva, Konstruktsioonid sirkli ja joonlauaga. — Matemaatika ja Kaasaeg, VI, lk. 40.

[7] Vt. Е. Габович, А. Чиж, А. Ялас. О задаче коммивояжера на узкие места. Труды вычисл. центра, № 22. Тарту, 1971.

6. Pöördume nüüd fantastiliste täpsuste vallast tagasi reaalsesse maailma. Arvu π pika ajaloo vältel on mitu matemaatikut välja pakkunud lähendeid, millel on kümnendmurrust erinev kuju. Pealegi tuleb arvestada, et enne al-Kaši'd ei eksisteerinud veel kümnendmurru mõistet. Meil oli juba juttu Arhimedese lähendist

$$\pi=\frac{22}{7}(-0{,}0013).$$

Sulgudes on antud vea ülemmäär, miinusmärk näitab, et lähend on tegelikust π väärtusest suurem. Teiste sõnadega, meie kirjutusviis on samaväärne võrratustega

$$\frac{22}{7}-0{,}0013<\pi<\frac{22}{7}.$$

Arhimedese lähendi populaarsust, mis kestab tänapäevani, on raske üle hinnata. Keskaegses Euroopas, kultuuri ja teaduse üldise sügava languse ajastul, olid paljud matemaatikud veendunud, et $\frac{22}{7}$ ongi π täpne väärtus. Sellisel arvamusel olid näiteks Oxfordi teadlane Thomas Bradwardine (1290—1349) ning Viini ülikooli esimene rektor Albert von Sachsen (1316—1390).

Ameerika koolides on tarvitusel meie lähendi 3,14 asemel eranditult Arhimedese murd. Seoses sellega pakub huvi järgmine fakt. Ameerika Ühendriikides kasutatakse tänapäevani vedelikkude mõõtmiseks nn. «vana veinigallonit». Selle mahumõõdu ametlik definitsioon kõlab järgmiselt: galloniks nimetatakse läbimõõduga 7 tolli ning kõrgusega 6 tolli silindri mahtu ehk 231 kuuptolli. Jätame lugeja hooleks veenduda, et mõlemad definitsioonid ühtivad vaid siis, kui arv π on asendatud lähendiga 22/7.

Teiseks väga tuntud ja pika ajalooga lähendiks on nn. Metiuse (loe: meetsiuse) arv

$$\pi=\frac{355}{113}(-0{,}0000003),$$

mille populaarsus baseerub kergel meeldejäävusel (moodusta arvujada 113355 ning jaga ta teine pool esimesega) ja suurel täpsusel.

Metiuse arvu «leiutajaks» oli ülalpool mainitud Tzü Tšun-tži (5. sajand). Kuid Euroopani hiinlase saavutus ei küündinud. Arvu taasavastajaks oli üle tuhande aasta hiljem elanud Wittenbergi matemaatikaprofessor Valentius Otho (1550—1605). Ent ka Otho töö jäi unustusse. Kolmandaks avastajaks oli hollandi insener Adriaen Anthoniszoon (1527—1607). Ta oli pärit Prantsuse linnast Metzist, millega ongi seletatav ta latiniseeritud hüüdnimi Metius.

Metiuse arvu lihtsa ja elegantse geomeetrilise konstruktsiooni andis Leydeni ülikooli professor Jakob de Gelder (1765—

1848). Lugeja võib sellega tutvuda kirjanduse loetelus toodud Gardneri raamatus. Märgime, et Gelderi konstruktsioon kuulub kõige täpsemate tänapäeval tuntud ligikaudsete ringi kvadratuuride hulka.

Omapärase ratsionaalse lähendi saame valemist

$$\frac{\pi}{8}=\frac{61}{182}+\frac{21}{365}. \tag{14}$$

Esimesel pilgul paistab, et siin esinevaid lugejaid ja nimetajaid on raske meeles pidada. Kuid sobivalt valitud mnemooniline reegel teeb asja lihtsaks. Reegel on järgmine: kaks kuud (30 + 31 päeva) jagatud poole aastaga pluss kolm nädalat jagatud aastaga. Esitatud lähendi voorus seisneb selles, et ta annab Arhimedese ja Metiuse arvudega võrreldes hoopis suurema täpsuse. Valemist (14) arvutatud π väärtus on õige üheksa kohaga pärast koma. See on juba «astronoomiline» täpsus!

Arvu π on ka lähendatud irratsionaalarvudega. Vanimaid sääraseid lähendeid on hiina astronoomi ja filosoofi Tžan Heni (78—139 m. a. j.) oma, kes õpetas, et ringjoone pikkuse ruut suhtub ümberjoonestatud ruudu perimeetri ruudusse nagu 5 : 8. Siit on kerge tuletada, et

$$\pi=\sqrt{10}\quad(-0{,}021).$$

Vaatamata selle lähendi suhteliselt väikesele täpsusele kasutasid seda laialdaselt Hiina, India ja Araabia matemaatikud.

Huvitava konstruktsiooni pakkus üks algebralise sümboolika rajajaid François Viète (1540—1603): kui täisnurkse kolmnurga kaatetid on 0,6 ja 1,2, siis ta ümbermõõt võrdub arvuga π. Siit saame

$$\pi=1{,}8+\sqrt{1{,}8}\quad(-0{,}00005).$$

Ilus valem ning nimetamisväärne täpsus!

Veel palju suurema täpsusega (kuid ka vastavalt «inetuma» kujuga) on järgmine irratsionaalne lähend:

$$\pi=\frac{11}{4}(1{,}027\sqrt{2}-0{,}31)\quad(-0{,}0000000002).$$

7. Olgu antud $n\times n$ ruuduga malelaud (või ruudukujuline parkett; n võib olla kuitahes suur) ning olgu antud nõel, mille pikkus võrdub parajasti ruudu külje pikkusega. Viskame nõela malelauale ilma igasuguse süsteemita. Nõel võib kukkuda ruudu sisse, võib aga ka lõikuda ruudu küljega. Milline on esimese võimaluse tõenäosus?

Selle probleemiga tegeles kuulus šveitsi astronoom Rudolf Wolf (1816—1893), päikeseplekkide tsükli pikkuse määraja. Wolf tõestas, et otsitud tõenäosus võrdub arvuga $\frac{\pi-3}{3}=0{,}0472\ldots$.

See tähendab, et keskmiselt iga saja viskega satub nõel tervenisti ruudu sisse 5 korda, iga tuhande viskega 47 korda, iga kümnetuhande viskega 472 korda ja nii edasi. Siinjuures tuleb silmas pidada, et need andmed on statistilised: iga üksiku visete seeria puhul võivad esineda toodud keskmistest kõrvalekaldumised, mis üksikutel katsetel võivad olla üsnagi suured.

Ent mida suurem on visete arv, seda enam läheneb eksperimendist saadud tõenäosus teoreetilisele. See aga viib meid kummalisele järeldusele: arvu π väärtuse võib saada ilma igasuguse matemaatikata! Tuleb vaid visata nõel malelauale ja registreerida «tabamusi». Professor Wolf ise sooritas 10000 viset ja sai sel teel «kooliväärtuse» $\pi = 3{,}14$. Esitatud «meetodiga» võib saada kuitahes palju arvu π kümnendkohti, aga selleks tuleb sooritada miljard miljardeid viskeid. Kes soovib, proovigu!

Kirjandus

1. Ф. Рудио. О квадратуре круга. Одесса, 1911.
2. E. Beutel. Die Quadratur des Kreises. Leipzig-Berlin, 1913 (teine trükk 1951).
3. M. Gardner. Mathematical Puzzles and Diversions. London, 1968 (venekeelne tõlge ilmus 1971; arvule π on pühendatud 41. peatükk, mille lugemine paljude faktiliste vigade tõttu nõuab ettevaatust).
4. Ф. Кымпан. История числа π. Перевод с румынского. Москва, 1971.

KÕIK ANDMED ON TÄPSED

T. Roosinupp

Matemaatikas tegeldakse tihti objektidega, mida ei ole olemas. Selliste objektide hulka kuuluvad näiteks ligikaudsed arvud. Et teha igaveseks lõpp paljude inimeste asjatule vaevanägemisele olematute seaduspärasuste tundmaõppimisel ligikaudse arvutuse vallas, tõestan järgmise elementaarse, kuid sügava sisuga teoreemi.

Teoreem. Kõik ligikaudsed arvud on täpsed arvud.

Tõestus. Olgu antud mingi ligikaudne arv A. Meil tuleb tõestada, et tema absoluutne viga $\triangle A$ võrdub nulliga.

Teatavasti kehtib suvaliste ligikaudsete arvude a, b, c (absoluutsete vigadega $\triangle a$, $\triangle b$, $\triangle c$) korral seos (vt. mistahes ligikaudset arvutamist käsitlevat õpikut):

$$\triangle(a - b + c) = \triangle a + \triangle b + \triangle c.$$

Võttes $a = b = c = A$, saame sellest seosest

$$\triangle(A - A + A) = \triangle A + \triangle A + \triangle A = 3\triangle A.$$

Teisest küljest:

$$\triangle(A - A + A) = \triangle(A) = \triangle A.$$

Et kahe viimase võrduse vasakud pooled on võrdsed, siis peavad võrdsed olema ka paremad pooled, s. t. $3\triangle A = \triangle A$, millest saame

$$\triangle A = 0,$$

m. o. t. t.

Professor Ü. Lepik

PROFESSOR ÜLO LEPIK 50-AASTANE

Tartu Riikliku Ülikooli teoreetilise mehaanika kateedri juhataja, professor, füüsika-matemaatikadoktor Ülo Lepik sündis 11. juulil 1921. aastal Tartus. Pärast Treffneri gümnaasiumi lõpetamist astus Ü. Lepik Tartu ülikooli matemaatika-loodusteaduskonna füüsikaosakonda, mille lõpetas 1948. aastal.

Kogu tema teaduslik ja pedagoogiline tegevus on seotud Tartu Riikliku Ülikooli teoreetilise mehaanika kateedriga. Aastatel 1946—1954 töötas ta nimetatud kateedris vanemlaborandina, assistendina ja vanemõpetajana. 1952. aastal kaitses Ü. Lepik kandidaadiväitekirja. 1954. aastal valiti ta kateedri dotsendi kohale, 1958. aastal kaitses Ü. Lepik doktoriväitekirja ja 1960. aastal omistati talle professori teaduslik kutse. Teoreetilise mehaanika kateedri juhatajana töötab ta 1959. aastast.

Ü. Lepiku põhiline teaduslik tegevus on seotud elastsete-plastsete plaatide ja koorikute teooria probleemidega. Oma kandidaadiväitekirjas «Elastsete-plastsete plaatide stabiilsus materjali kokkusurutavuse arvestamisega», samuti aga ka mõnedes teistes teadusliku tegevuse algperioodi töödes uuris ta materjali kokkusurutavuse mõju elastsete-plastsete plaatide kriitilisele koormusele. Need tööd põhinesid A. Iljušini kontseptsioonil, mille kohaselt stabiilsuse ülesannete lahendamisel võib mitte arvestada plaadi kesktasapinnas mõjuvate jõudude muutusi. Hiljem esitas Ü. Lepik variatsiooni võrrandi, mis lubab lahendada stabiilsuse ülesandeid täpses seades. Rea näidete varal selgitas ta, et A. Iljušini hüpoteesi kasutamine neis ülesandeis on täiesti õigustatud.

Ü. Lepik on tegelnud ka stabiilsuse teoorias kasutatavate põhiseisukohtade kriitilise analüüsiga. Kaasajal on nendes küsimustes teatavasti kasutusel kaks kontseptsiooni — Kármáni ja Shanley omad. Vastavalt Kármáni kontseptsioonile oletatakse, et stabiilsuse kadu toimub muutumatu väliskoormuse juures. Shanley järgi on aga niisugune hüpotees lubamatu ja stabiilsuse kadumisel väliskoormus kasvab. Ü. Lepik kuulub viimati märgitud kontseptsiooni pooldajate hulka. Ta lahendas selle baasil terve rea ülesandeid ja esitas uue meetodi surutud varraste arvutamiseks. Stabiilsuseküsimused viisid juubilari elastsete-plastsete varraste ja plaatide pärastkriitilise staadiumi uurimise juurde, kus tal õnnestus arvestada ka koormuse languse ja sekundaarsete plastsete deformatsioonide mõju.

Aastatel 1954—1957 üldistas Ü. Lepik elastsusteoorias üldtuntud Kármáni võrrandid plastsete deformatsioonide juhule ning andis samuti nende integreerimismeetodi. Nimetatud võrrandeid nimetatakse erialases kirjanduses tihti ka Lepiku võrranditeks ja nad kujutavad endast üldisi elastsete-plastsete varraste ja plaatide painde diferentsiaalvõrrandeid. Ü. Lepik üldistas need võrrandid ka algläbipaindega plaatidele ja andis meetodi jääkpingete ja deformatsioonide arvestamiseks.

Eespool nimetatud uurimuste kokkuvõtteks kujunes Ü. Lepiku doktoriväitekiri «Mõningaid elastsete-plastsete plaatide ja varraste tasakaaluküsimusi». Väitekiri sisaldab paljude konkreetsete ülesannete arvuliste tulemusteni viidud lahendusi, mida tuleb tunnistada väljapaistvaks saavutuseks, arvestades arvutustehnika tolleaegset taset.

Professor Ü. Lepik on palju tähelepanu pööranud ka plaatide ja koorikute kandevõime küsimustele. Jäikplastse mudeli kasutamine lubab tükati lineaarse voolamistingimuse ja assotsieeritud voolamisseaduse korral saada rea praktiliselt tähtsate ülesannete täpseid lahendeid. Huvitavaid tulemusi on Ü. Lepik saanud ülesannetes, kus tuleb arvestada jäik-plastsete konstruktsioonide suuri läbipaindeid.

Viimastel aastatel on juubilari tähelepanu pälvinud dünaamika ülesanded. Esimeseks selles valdkonnas oli töö, kus uuriti jäiga südamikuga ümmarguse plaadi läbipaindeid. Ta on lahendanud ka rea ülesandeid tasapinnaliste plastsete lainete levikust paksus plaadis.

Käesoleval ajal tegeleb Ü. Lepik Pontrjagini tuntud maksimumprintsiibi rakendamisega plaatide ja koorikute teoorias.

Erakordselt huvitavad on Ü. Lepiku kirjutatud ülevaateartiklid. Tema esinemised ülelinnalisel elastsus- ja plastsusteooria alasel seminaril paistavad silma materjali täpse ja arusaadava esitusega.

Tänu Ü. Lepiku jõupingutustele on Tartus tekkinud mehaanikute koolkond, mida tuntakse kogu Nõukogude Liidus. Tema õpilasi võib kohata kõikides vabariigi kõrgemates õppeasutustes, aga samuti TA instituutides.

Prof. Lepik on olnud juhendajaks kümnele aspirandile, kellest käesolevaks ajaks seitse on kaitsnud oma kandidaadiväitekirja.

Prof. Lepiku sulest on trükis ilmunud ligi 60 teaduslikku tööd. Tema ja dots. L. Rootsi ühise töö viljana ilmus 1971. a. esimene eesti originaalne teoreetilise mehaanika õpik.

Juubilar on väga hea pedagoog-lektor. Tema teoreetilise mehaanika, elastsus- ja plastsusteooria, plaatide ja koorikute teooria ning matemaatilise statistika loengud on kõrge teadusliku taseme ja hiilgava esitusega.

Kolleegid ja õpilased peavad eriti lugu prof. Lepikust kui suurepärasest kolleegist, juhendajast ja õpetajast.

Juubilari on autasustatud medaliga «Töövapruse eest» ja V. I. Lenini 100. sünniaastapäeva juubelimedaliga.

80 AASTAT VILLEM NANO SÜNNIST

E. Tamme, R. Kruus, U. Kaljulaid

Käesoleval aastal möödub 80 aastat teeneka matemaatikaõpetaja Villem Nano sünnist. V. Nano on lõpetanud Tartu ülikooli 1918. aastal ning seejärel andnud kaaluka panuse meie hariduselu korraldamise alal. Ta on kirjutanud ja tõlkinud eesti keelde keskkooliõpikuid, pikemat aega töötanud õpetajana ja direktorina Tartu Tehnikagümnaasiumis ja Narva Ühisgümnaasiumis ning sõjajärgsel perioodil matemaatikaõpetajana Pärnu koolides. V. Nano pedagoogipalge kujunemisel on olulisel kohal enesetäiendamine Tartu ülikooli stipendiaadina 1919—1921 kodumaal ja 1921—1923 Göttingenis ja Hamburgis. Sellel perioodil töötas ta diferentsiaalgeomeetria probleemide kallal. Tema huvideringis püsisid aga ka matemaatika õpetamise küsimused ja täppisteaduste aktuaalsed probleemid, näit. A. Einsteini ja M. Borni tööd relatiivsusteooriast, M. Borni tööd röntgenikiirte spektri kohta jm. V. Nano töö matemaatikapedagoogina, tema metoodilised tõekspidamised ja töövõtted väärivad tähelepanelikku uurimist. Järgnevas heidame pilgu V. Nano elule ja töökäigule.

Villem Nano sündis 6. juulil 1893. a. Võrumaal Vana-Nursi vallas[1] veskirentniku pojana. Veski rendi tõstmise tõttu rentis tema isa Jaan hiljem talukoha. Alghariduse sai V. Nano Nursi vallakoolis (1901—1903) ja Rõuge Kihelkonnakoolis (1903—1906). Õpinguid jätkas ta Tartu Aleksandri kroonugümnaasiumis, mille lõpetas 1913. a. kuldmedaliga. Samal aastal asus ta matemaatikat õppima Tartu (Jurjevi) ülikooli füüsika-matemaatikateaduskonnas, mille edukalt lõpetas 1918. aastal.

Villem Nano esimesed tööaastad langevad Oktoobrirevolutsiooni-järgsele perioodile, mil eesti koolidesse viidi sisse emakeelne õpetus. Sellal tunti suurt puudust õpetajatest, vajati eestikeelseid õpikuid. V. Nano lõi aktiiv-

---

[1] Asub praeguses Võru rajoonis.

selt kaasa nii otseselt koolimehena kui ka õpetajate ettevalmistamisel ja eestikeelsete õpikute kirjutamisel. Majanduslikud raskused sundisid teda juba enne ülikooli lõpetamist 1917. a. asuma tööle õpetajana Rakvere Linna Naisgümnaasiumis. Ülikooli lõpetamise järel töötas V. Nano 1918/19. õppeaastal Virumaa reaalgümnaasiumi direktorina. 1919. a. suvel luges ta aritmeetikat Tartu ülikooli juures korraldatud suvekursustel keskkooliõpetajate ettevalmistamiseks. Samal aastal organiseeris ta haridusministeeriumi ülesandel Tallinna Õpetajate Seminari ning sai selle esimeseks direktoriks.

V. Nano gümnaasiumiõpilasena

Kuid V. Nano ei rahuldunud ainult praktilise koolitööga. Ta tundis vajadust end ka teadlasena täiendada ja nii sai temast 1919. a. sügisel Tartu ülikooli teaduslik stipendiaat[2] matemaatika õppetooli juures. Kirjas ülikooli valitsusele[3] kirjutas ta 1919. a.: «Elumõtet olen alati näinud teadusliku tõe otsimises, kuid kahjuks olen olnud liig «hea», liig vastutulelik väljast tulnud soovidele, olen lasknud end rakendada võõrastel aladel; koduigatsus aga ei ole kunagi kustunud mu hinges.» Esialgu ei õnnestunud tal veel täielikult pühenduda enesetäiendamisele. Tuli tegelda Tallinna Õpetajate Seminari juhatamisega, õpetajate päevade organiseerimisega, trigonomeetria ja stereomeetria konspektide kirjutamisega keskkooli jaoks jm. ülesannetega. 1920. a. esimesel poolel loobus ta teaduslikust stipendiumist ja asus H. Treffneri Gümnaasiumi juhatajana organiseerima õppetööd sõdade tõttu roopaist väljaviidud koolis.

Sama aasta sügisel vabanes ta koolijuhataja kohustustest ning lõpetas õpiku «Tasapinnalise ja sfäärilise trigonomeetria õpperaamat keskkoolidele» (1920) kirjutamise. Selle õpiku teine ümbertöötatud trükk «Tasapinnaline trigonomeetria ja sfäärilise trigonomeetria alged» ilmus 1923. aastal. Ta tõlkis K. D. Pokrowsky «Kosmograafia kursuse keskkoolidele» (1921) ja koos E. Kilksoniga «Füüsika õpperaamatu keskkoolidele» (1921). Need nii sisuliselt kui ka keeleliselt selle aja kohta heatasemelised õpikud etendasid olulist osa eestikeelse õpetuse sisseviimisel keskkooli ja eestikeelse teadusliku terminoloogia kujunemisel. Hiljem pole V. Nano enam avaldanud õpikuid. Selle üheks põhjuseks on tema suur nõudlikkus enda vastu. V. Nano õpilane R. Jürgenson märgib: «Arvestades tema õpetamise stiili, metoodilisi kontseptsioone ja matemaatilisi võimeid, on kahju, et ta õpikute kirjutamisel liialt tagasihoidlik oli: oleksid ilmunud õpikud, mis tolleaegseid keskkoolide õpikuid kindlasti oleksid ületanud.»

Alles 1920. a. lõpus sai ta täielikult pühenduda teaduslike probleemide uurimisele. Ta süvenes diferentsiaalgeomeetria küsimustesse. G. Darboux' kolmeköitelise pinnateooriaalase monograafia läbitöötamine nõudis aega ja tõsiseid pingutusi. Ta asus uurima küsimust automorfse rühma kollineat-

---

[2] Vastab enam-vähem tänapäeva aspirandile.

[3] RAKA, fond 2100, nim. 2, s.-ü. 712.

sioone lubavate muutkondade meetrilistest omadustest, mis kuulub diferentsiaalgeomeetria raskete ülesannete kilda, nõudes H. Poincaré, F. Kleini, S. Lie, F. F. Enriques'i jt. esmaklassiliste matemaatikute ideede ja tulemuste head tundmist ning rakendamise oskust. Töötamist selle probleemi kallal jätkas ta Göttingenis, kuhu 1921. a. sügisel siirdus Tartu ülikooli stipendiaadina. Järgmise aasta sügisel sõitis ta edasi Hamburgi, kus W. Blaschke soovitusel asus uurima ühte minimaalpindade teooria probleemi.

Osa Saksamaal viibitud ajast tuli tal elada ilma ülikooli stipendiumita küllaltki rasketes majanduslikes oludes, elatudes õpikute honoraridest jm. juhuslikest sissetulekuist. Vaatamata pingelisele tööle ei õnnestunud V. Nanol peamiselt üksi raamatukogudes töötades jõuda uutele teaduslikele tulemustele, mis oleksid väärinud väitekirja. See tekitas temas kibedustunde. Aruandes Tartu ülikooli matemaatika-loodusteaduskonnale[3] kirjutab ta: «Tööde ebaõnnestumine tõi mind äratundmisele et ma Teaduskonna liikmeks ei kõlba. Saan aru, et see otsus Teaduskonna mõnes liikmes kibedustunde tekitab, kuid seda kibedustunnet võiks vähendada teadmine, et mu steriilsuse põhjuseks teadusliku produktsiooni alal polnud hää tahtmise, vaid ande puudus».

Tundub siiski, et «süüdi» pole siin ande puudumine. Vastupidi, Nano poolt läbitöötatud kirjanduse nimekirjad[3] ja neis nimistuis näidatud autorite matemaatilise loomingu kaal annavad põhjust arvata, et V. Nanos peitus kõrgesti erudeeritud ja suure vaimse töö võimega matemaatik. Kuid Nano enda poolt otsustava kriteeriumina püstitatud ajatõkked olid liig kitsad loomingulise edu saavutamiseks sellises raskesti ligipääsetavas valdkonnas. Liiatigi nõudis valitud suund tõsiseid eelteadmisi matemaatikute eliiti kuuluvate meeste tööde tundmise näol. V. Nanol tuli seda teha raamatukoguüksinduses, ilma olulise abita ja kontaktideta. See ei saanud juba omaette olla lihtne ülesanne: vaevalt keegi saab eitada «kooli» (koolkonna) ja heatasemeliste õpikute olemasolu tähtsust selliste raskuste ületamisel. Kahju, et ta ei jätkanud teaduslikku tööd, samuti tööd ülikoolis. Meil pole põhjust kahelda V. Nano aususes ning siiruses, mistõttu tema aruanded lubavad väita, et V. Nanost oleks võinud saada üks esimesi kaasaegse geomeetria ja algebra ideede toojaid Tartu ülikooli.

1923. a. suvel tuli V. Nano tagasi kodumaale. 1923/24. õppeaastal luges ta Tartu ülikoolis õppeülesandel diferentsiaal- ja integraalarvutust. Alates sellest ajast pühendas ta oma energia pedagoogitööle keskkoolides. Aastatel 1923—1928 oli ta Tartu I Kommertsgümnaasiumi[4] direktor.

1928. aastal käis V. Nano Saksamaal ja Inglismaal koolioludega tutvumas. Samal aastal abiellus ta Elfriede Urresega ning siirdus Narva. Elukoha vahetuse põhjuste kohta kirjutas V. Nano elulookirjelduses: «1. dets. 1927 korraldasin ettekirjutuse kohaselt aktuse koolis 1. dets. mälestuseks. Aktusekõnes püüdsin selgitada, miks «vend» tõstis käe «venna» vastu. Kirjeldasin tööliste masendavat olukorda ja nende õigustatust püüda oma olukorda parandada. Kutsusin õpilasi üles poetama lilli nende haudadele, kes langesid võitluses parema tuleviku eest. Paar päeva hiljem kutsuti mind koolivalitsusse, kus koolivalitsuse esindaja W. Tamman mind selle kõne asjus üle kuulas ja mõista andis, et ma ei jää direktoriks kauemaks ajaks. Püsisin siiski kevadeni.»

Aastatel 1928—1944 töötas V. Nano Narva ühisgümnaasiumis, algul inspektorina ja alates 1931. aastast direktorina. Ta oli Narva Eesti Õpetajate Seltsi esimees (1930—1933) ja Narva Eesti Akadeemilise Klubi esimees (1931 ja 1937).

---

[3] RAKA, fond 2100, nim. 2, s.-ü. 712.

[4] 1924. a. nimetati see õppeasutus Tartu Tehnikagümnaasiumiks.

1944. a. alates sai V. Nano elukohaks Pärnu. Ta töötas Pärnu I Keskkoolis, algul direktori kohustetäitjana, hiljem matemaatikaõpetajana, andes samal ajal kohakaasluse alusel tunde ka Pärnu Töölisnoorte Keskkoolis ja Pärnu II Keskkoolis. Et sõjajärgseil aastail oli kõrgema haridusega matemaatikaõpetajaist suur nappus, tuli V. Nanol aastaid töötada suure tundide koormusega, mis mõnedel aastatel ulatus 60 tunnini nädalas (üle 3 koormuse). Ta õpetas edukalt nii eesti kui ka vene keeles. Tema keelteoskus oli üldse silmapaistev. Ta valdas hästi ladina ja saksa keelt, aga ka itaalia, prantsuse, inglise ja kreeka keelt. Kord tunnis rääkis ta, kuidas ta õppis prantsuse keelt: «Ma lihtsalt tegin plaani õppida iga päev 20 sõna ja teatava teksti ning pidasin sellest plaanist kindlalt».

V. Nano Pärnus

Paljudes oma õpilasis äratas V. Nano huvi matemaatika kui elukutse, kui teaduse vastu. Vaatamata erakordsele koormusele koolitöös leidis ta aega vestelda vaheaegadel ning kodus matemaatika vastu erilist huvi tundvate õpilastega, abistades ja suunates neid ka sobiva kirjanduse valikul. Väga oodatud olid õppeveerandite lõputunnid, kui ta sundimatu vestluse vormis rääkis oma reisidest, nähtud maadest ja inimestest ning matemaatikast ja selle loojaist. Ta kõne oli alati loogiline ning õpilasile arusaadav, keel selge ning tabav. Ergas huvi reaalteaduste vastu, mida V. Nano oma tundides õpilastes äratas, on mitmeid viinud teaduse teele. Nende seas on füüsikadoktor Toomas Rebane, matemaatikakandidaadid Rein Jürgenson, Heino Koppel, Jüri Rebane, keemiakandidaat Jüri Siigur jt., kes edukalt tegutsevad teaduspõllul või kõrgema kooli õppejõududena.

Paljudele oma õpilastele on V. Nano ka inimesena olnud eeskujuks. R. Jürgenson meenutab: «Nano oli väga tagasihoidlik, huumorit armastav, silmapaistvalt aus ja otsekohene, suuresti erudeeritud (mitte ainult matemaatikas) ja üldse tark inimene, mis peegeldus juba tema silmades...»

Oleks täiesti vale arvata, et V. Nano orienteerus koolitöös ainult tulevaste reaalteadlaste kasvatamisele. Ei — ta rõhutas seda tihti ka tundides. Kõigis oma õpilasis püüdis ta arendada huvi mitmekülgsete ning väärtuslike teadmiste ning oskuste vastu, õpetas deduktiivset mõtteviisi, oskust loogiliselt ja selgelt oma töö tulemusi sõnastada ning matemaatilist täpsust ülesande lahenduse vormistamisel. Tema õpetamismeetodi ning isiksuse võlu tundsid sajad Pärnu keskkoolilõpetajad. Õpilaste ja kolleegide seas oli tal kõrge autoriteet eriti oma entsüklopeediliste teadmiste, avara silmaringi ning selge ja loogilise arutlusvõime tõttu. Paljud meenutavad teda suure soojusega.

E. Pillau, ENSV TA raamatukogu töötaja, kirjutab [5]:

«Arvuvalla vastu ei ole ma kunagi erilist sümpaatiat tundnud, kui välja arvata igapäevased arvestused, mis

---

[5] E. Pillau. Isiklikke paradokse. — «Kajakas» II. Pärnu I Keskkooli almanahh. Pärnu, 1961, lk. 63—65.

mõnikord on õigesti välja tulnud, enamasti aga elu enese poolt ümber lükatud. Õpetaja Villem Nano nägi kahtlemata ränka vaeva, et minu ellusuhtumist tänapäevale, praktilise realismi ajastule, vastuvõetavamaks muuta. Tulemused olid kasinad, kuigi ükskord juhtus ka tõeline ime: ühelt suuliselt geomeetria eksamilt lahkusin kõrgeima hindega. Enamasti aga tunnetasin oma juhmust iga kord, kui ta minult midagi küsis, ja tajusin, et temagi tunnetab sedasama. Lõpuks see tore mees siiski tüdis ja ma jäin tema silmis parandamatuks puupeaks...

Ja siiski — Villem Nanos peitub inimene ja õpetaja, kellest ma tänase päevani siiralt lugu pean ja keda ma endale keskkoolipäevilt kõige suuremaks eeskujuks sean.»

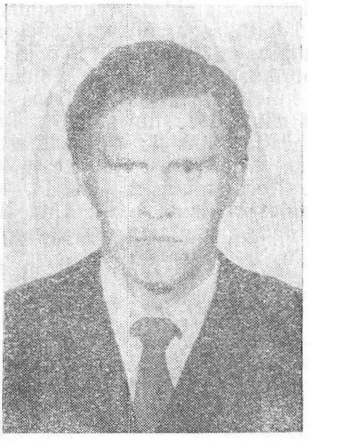
1958. a. siirdus V. Nano pensionile. Ta tundis siis uuesti erksat huvi matemaatika arengusuundade vastu, püüdes taastada ja värskendada oma teadmisi kõrgemas matemaatikas. Ta tunnistab, et aastakümneid suure koormusega peetud koolmeistriamet on need huvid ja kogutud teadmised kuhugi tagapinnale surunud. Kuid paar aastat enne oma surma ta nendib, et püstitatud ülesanne käib üle jõu — on hilja. V. Nano suri 10. veebruaril 1965. a.

V. Nano elutöö on tema arvukad õpilased, kes oma esimesed teadmised matemaatikas ja mõtlemisoskuse treeningu on saanud sellelt elukogenud ja targalt mehelt ja meisterlikult pedagoogilt.

UUSI TEADUSTE KANDIDAATE

19. märtsil 1971 kaitses oma väitekirja «Mõningad tõenäosusjaotustega seotud küsimused komplekssetes Hilberti ruumides» TRÜ matemaatilise statistika ja programmeerimise kateedri vanemõpetaja **Rein Tammeste.** Tööd juhendas füüsika-matemaatikakandidaat L. Võhandu, oponeerisid füüsika-matemaatikadoktorid professorid N. Vahania, G. Kangro ja G. Vainikko.

Väitekirjas uuritakse teist järku juhuslike suurustega seotud omadusi ja mõisteid Hilberti ruumides. Üldistatakse Gaussi jaotuste mõistet ja esitatakse mitu juhusliku vektori ortogonaalset lahutust mittekorreleeruvate liidetavate summaks. Töös saadud üldisemaid tulemusi rakendatakse lõplikudimensionaalsete juhuslike vektorite sõltuvuse uurimisel.



TRÜ Matemaatikateaduskonna nõukogu omistas R. Tammestele füüsika-matemaatikakandidaadi teadusliku kraadi.

R. Tammeste on sündinud Hiiumaal 19. jaanuaril 1939. Ta lõpetas 1955. aastal Haapsalu I Keskkooli, kus ta matemaatikaõpetajaks oli V. Sillandi. Tartu Riikliku Ülikooli matemaatikaosakonna lõpetas ta 1960. a. Aastatel 1962—1965 oli R. Tammeste TRÜ aspirant, alates 1966. aastast töötab TRÜ õppejõuna.

30. juunil 1971 kaitses Eesti Maaviljeluse ja Maaparanduse Teadusliku Uurimise Instituudi operatsioonianalüüsi sektori teaduslik töötaja **Alvar Olm** ENSV TA füüsika-matemaatika ja tehnikateaduste osakonna nõukogu ees kandidaadiväitekirja «Mõned dekompositsioonimeetodid paljumõõtmeliste juhtimisülesannete lahendamiseks». Tööd juhendas füüsika-matemaatikadoktor S. Ulm, oponeerisid tehnikadoktor professor A. Kuhtenko ja dotsent, füüsika-matemaatikakandidaat M. Levin. A. Olmile omistati tehnikakandidaadi kraad.

Väitekirjas on välja töötatud meetod separaabli sihifunktsionaaliga lineaarse dünaamilise süsteemi optimaalse programmjuhtimise arvutamiseks, kusjuures nii süsteemi asendile kui ka juhtimisele on asetatud tõkked. Teine dekompositsioonimeetod on rakendatav juhtimise suboptimaalseks sünteesiks ruutkriteeriumiga lineaarse dünaamilise süsteemi puhul. Väitekirja rakenduslikus osas formuleeritakse masina- ja traktoripargi komplekteerimisprotsessi optimiseerimise ülesanne ja analüüsitakse selle lahendamisvõimalusi väljatöötatud dekompositsioonimeetodite abil.

Alvar Olm sündis 1. aprillil 1932. a. Pärnu rajoonis talupoja perekonnas. Alates 1949. a. on ta töötanud traktoristina, mehhaanikuna, sovhoosi remonditöökoja juhatajana ning peainsenerina. 1962. a. peale töötab A. Olm Eesti Maaviljeluse Instituudis. Töö kõrvalt õppides lõpetas ta 1958. aastal kiitusega Novosibirski Põllumajanduse Instituudi Mehhaniseerimise teaduskonna ja 1966. a. Tartu Riikliku Ülikooli matemaatikaosakonna. Aastail 1967—1970 õppis A. Olm aspirantuuris.

10. detsembril 1971. a. kaitses TRÜ Matemaatikateaduskonna nõukogu ees kandidaadidissertatsiooni «Banachi algebra väärtustega funktsioonialgebrate algebralistest ja topoloogilistest omadustest» TPI arvutusmatemaatika kateedri assistent **Mati Abel.**

Töös uuritakse Banachi algebra väärtustega funktsioonialgebrate üldisi omadusi ning üldistatakse tuntud Stone-Weierstrassi teoreem nimetatud tüüpi funktsioonialgebrale. Saadud tulemusi rakendatakse lõpmatute maatriksite pööratavuse uurimiseks. Dissertanti juhendas dots. S. Baron ning oponeerisid prof. G. Vainikko ja dots. M. Timan.

Mati Abelile omistati füüsika-matemaatikakandidaadi kraad.

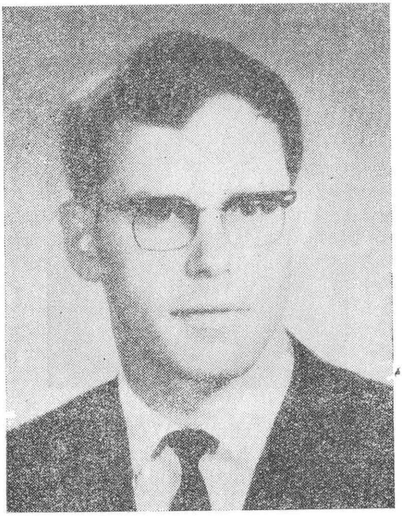
Dissertant sündis 17. dets. 1942. a. Jõhvis, õppis Kohtla-Nõmme 7-klassilises koolis ning Jõhvi I Keskkoolis (Kohtla-Järve V Keskkoolis), mille lõpetas 1961. a. Aastatel 1961—1966 oli M. Abel TRÜ Füüsika-Matemaatikateaduskonna üliõpilane ning lõpetas ülikooli ennetähtaegselt. Pärast ülikooli lõpetamist töötas M. Abel assistendina TRÜ matemaatilise analüüsi kateedris ning TPI arvutusmatemaatika kateedris. 1968. a. astus ta TRÜ matemaatilise analüüsi kateedri juurde aspirantuuri, mille lõpetas tähtaegselt.

10. detsembril 1971. a. kaitses TRÜ Õpetatud Nõukogu ees oma väitekirja «Operaatorfunktsioonide aproksimeerimisest ja ligikaudsete omaväärtuste koondumisest» TRÜ arvutusmatemaatika kateedri vanemõpetaja **Otto Karma.** Tööd juhendas prof. G. Vainikko, oponeerisid prof. G. Kangro ja prof. S. G. Krein Voronežist. Dissertandile

omistati füüsika-matemaatikakandidaadi teaduslik kraad.

Väitekirjas üldistatakse analüütiliselt parameetrist sõltuvate lineaarsete operaatorite juhule rida teoreeme lineaarsete operaatorite jada omaväärtuste käitumisest operaatorite jada koondumisel (mingiks piiroperaatoriks).

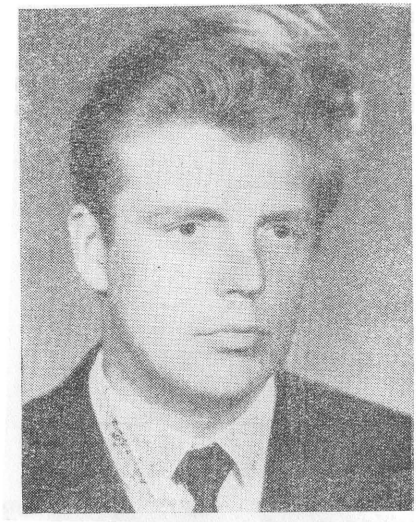
O. Karma on sündinud Tallinnas 18. mail 1941, lõpetanud Tallinna II Keskkooli 1959. a. ja TRÜ Füüsika-Matemaatikateaduskonna matemaatika-



osakonna 1964. a. Pärast lõpetamist töötas ta TRÜ Arvutuskeskuses, õppis aspirantuuris 1968.—1970. a. ning suunati sealt tööle TRÜ arvutusmatemaatika kateedrisse.

17. detsembril 1971. aastal kaitses Moskva Riiklikus Ülikoolis kandidaadiväitekirja «Monoidide homoloogilisest klassifikatsioonist» **Mati Kilp.**

M. Kilp sündis 19. aprillil 1942. a. Jõhvis. Lõpetas 1960. a. hõbemedaliga Jõhvi I Keskkooli, kus tema matemaatikaõpetajaks oli Lembit Mölder. Samal aastal asus ta matemaatikat õppima Tartu Riiklikus Ülikoolis. Siin olid temal dotsent Jaak Hioni juhendamisel esimesed kokkupuuted algebraga. 1963. aastal läks M. Kilp üle Moskva Riiklikku Ülikooli, mille lõpetas 1966. aastal kiitusega. 1966. aastast 1968. aastani töötas Tartu Riikliku Ülikooli algebra ja geomeetria kateedris, 1968. aastal astus Moskva Riikliku Ülikooli aspirantuuri, kus tema teaduslikuks juhendajaks oli professor Lev Anatoljevitš Skornjakov.



1971. aasta novembrist alates töötab M. Kilp Tartu Riiklikus Ülikoolis.

18. veebruaril 1972. a. kaitses oma väitekirja «Jääkliikmega Tauberi tüüpi teoreemid mõningate maatriksmenetluste korral» Tallinna Polütehnilise Instituudi matemaatika kateedri assistent **Ivar Tammeraid.** Tööd juhendas füüsika-matemaatikadoktor prof. G. Kangro, oponeerisid füüsika-matemaatikadoktor prof. G. Vainikko ja füüsika-matemaatikakandidaat J. Lamp.

Väitekirjas vaadeldakse kiirusega summeeruvuse probleeme Cesàro', Hölderi ja Euler-Knoppi summeerimismenetluste korral. Esitatakse meetod jääkliikmega Abeli tüüpi teoreemide pööramiseks nende summeerimismenetluste jaoks.

TRÜ Matemaatikateaduskonna nõukogu otsustas I. Tammeraidile omistada füüsika-matemaatikakandidaadi teadusliku kraadi.

Ivar Tammeraid on sündinud Tallinnas 25. septembril 1941. Ta lõpetas 1960. a. Tallinna 1. Keskkooli ja 1965. a. Tartu Riikliku Ülikooli matemaatikaosakonna. Aastail 1966—1968

töötas ta assistendina TPI matemaatika kateedris ja 1968—1971 oli sihtaspirantuuris TRÜ matemaatilise analüüsi kateedri juures, kus nimetatud väitekiri valmiski.

UUED LENNUD ÜLIKOOLI LÕPETANUD MATEMAATIKUID

1971. a. juunis lõpetas järjekordne lend matemaatikuid.

Matemaatika erialal kaitsti järgmised diplomitööd:

1. Altosaar, Olav. Markovi protsesside teoorial põhinev demograafiline mudel ENSV naisrahvastiku prognoosimiseks.
2. Bogdanov, Sergei. Об инверсных полугруппах.
3. Einsild, Ruth. Kahesooline demograafiline mudel ENSV andmetel.
4. Engel, Luule. Osaliselt rekursiivsed funktsioonid ordinaalidel.
5. Fljaišer, Aleksander. Об орбитах в A_3 и однородных пространствах ими».
6. Germonova, Ludmilla. Изгиб круглых пластин из жестко-пластического упрочняющегося материала.
7. Jaagupalu, Külli. Stohhastilistest funktsioonidest.
8. Juust, Uno. Poolringi moodulite tensorkorrutisest.
9. Kaarli, Kalle. Nullteguriteta ringoididest.
10. Kivinukk, Andi. Funktsioonide lähendamiskiirus summeeritud Fourier' reaga.
11. Kollo, Tõnu. Osaliselt normaalne tõenäosusjaotus rühmal SO(3).
12. Koppel, Evi. Üliõpilaskonna abikaasa- ja perekonnaideaal.
13. Kotta, Ülle. Ühest tõenäosusjaotusest rühmal SO(3).
14. Kressa, Indrek. Formaalne pidevus.
15. Kroon, Jaak. Ühest ülesannete klassist kontekstivabade keelte valdkonnas.
16. Kukk, Vello. Jadade järkamishüpoteesidest.
17. Kurafejeva, Jelena. Множители суммируемости интегралов.
18. Küüts, Peeter. Üldistatud korrelatsioonikordaja topoloogiline iseloomustus lõplikul juhul.
19. Maasikas, Inno. Конгруенция изотропных плоскостей в пространстве $^1R_4$.
20. Matin, Andrei. Тауберовы константы для интегральных методов суммирования.
21. Nael, Inge. Mõõtmisteooria aksiomaatikatest.
22. Netšajeva, Jevgenia. О приближений функций двух переменных двойными ортогональными рядами.
23. Pedas, Arved. Logaritmilise iseärasusega tuumaga integraalvõrrandi lahendamisest mehaaniliste kvadratuuride meetodil.
24. Rabkin, Grigori. Методика определения энерго-экономических характеристик топливо-энергетических балансов районов советского союза.

25. Roomeldi, Raul. О кольцоидах, в которых все мультипликативные подполугруппы с нулем, замкнутые относительно взятия противоположных элементов, являются подкольциодами.
26. Selberg, Kristin. Inventeerimise probleem informatsiooni otsimise süsteemides.
27. Sildos, Helju. E-poolrühmad.
28. Spesivõhh, Viktor. Орбиты гиперболического типа в аффинном и проективном трёхмерных пространствах.
29. Zeltser, Mark. О разностных схемах для параболических уравнений.
30. Zimirev, Mihhail. О распространении упруго-пластических волн в толстых пластинах.
31. Zingfeld, Larissa. Теоремы тауберова типа для произведения Коши рядов.
32. Zurova, Ludmilla. Модель пластически-упруго-вязкого материала.
33. Tamm, Ebu. Konstantsete invariantidega fokaalsetest pseudokongruentsidest neljamõõtmelises eukleidilises ruumis.
34. Tampõld, Lembit. Ühe kontekstivaba informatsioonikeele uurimisest.
35. Täht, Mihkel. Теоремы о множителях суммируемости для метода $A^{\alpha\beta}$.
36. Täht, Raivo. Ühe lineaarse planeerimisülesande lahendamisest.
37. Uri, Siiri. Informatsioonivõrkude analüüsi meetodeid.
38. Vaatmann, Vahur. Mõned Tauberi teoreemid.
39. Vernitskaja, Lidia. Множители абсолютной суммируемости для произведения методов Рисса.

Matemaatika pedagoogilises osakonnas kaitsti järgmised diplomitööd:

1. Anier, Gaida. Tõestus koolimatemaatikas.
2. Aser, Arno. Kestvuse printsiip koolimatemaatikas.
3. Avalo, Saima. Ülevaade matemaatika ja füüsika õpetajate kaadrist ENSV vene õppekeelega üldhariduslikes koolides 1971. a.
4. Keeru, Viia. Ülevaade matemaatika ja füüsika õpetajate kaadrist ENSV eesti õppekeelega üldhariduslikes koolides 1971. a.
5. Külvi, Väino. Trigonomeetria õpetamisest Eesti koolis 1920.—1970. a.
6. Lillipuu, Ene. Rahandusalaste küsimuste käsitlemisest koolimatemaatikas.
7. Mägilaid, Tiiu. ENSV keskkoolilõpetajate matemaatikaalastest oskustest.
8. Mälksoo, Toomas. Lisainformatsiooni üldiseloomustus keskkooli matemaatika õpikutes.
9. Nael, Anu. Matemaatika kontrolltööde hindamisest.
10. Preimer, Lilia. IV klassi õpilaste matemaatikaalastest teadmistest ja oskustest.
11. Päll, Tiina. Lüsioloogilise süsteemi loogilis-strukturaalne analüüs.
12. Püssa, Tiia. Mõned sirgete kaheparameetriliste parvede klassid kolme- ja neljamõõtmelises eukleidilises ruumis.

1972. a. juunis lõpetas järjekordne lend matemaatikuid.

Matemaatika erialal kaitsti järgmised diplomitööd:

1. Allik, Kaarel. Dünaamiline mälujaotus ühe andmetöötluskeele translaatoris.
2. Anissimova, Svetlana. Исследование больших прогибов в нелинейной постановке.
3. Beloussov, Jüri. Множители Ф-суммируемости для Чезаро-суммируемых и Чезаро-ограниченных двойных рядов.
4. Fljaišer, Eleonora. Двумерные минимальные поверхности $^1V_2$ в псевдоэвклидовом пространстве ^1R_n.
5. Fljaišer, Vladimir. Об эндоморфизмах свободных полигонов.

6. Groger, Lev. Множители суммируемости для Чезаро-ограниченных двойных интегралов.
7. Hark, Leevi. Kvantfüüsika formalismist.
8. Ivanova, Valentina. Вычисление плотности вероятности на компактной группе.
9. Kerge, Andres. Katete meetod matemaatilise planeerimise ülesande lahendamiseks.
10. Kerge, Rita. Täisarvuliste ruutplaneerimise ülesannete lahendamisest.
11. Kirillov, Boris. Исследование p-сходимости.
12. Lehtlaan, Ants. Sisendprogramm ja lähteandmete struktuuri lahendus projekteerimisinstituudi juhtimissüsteemi jaoks.
13. Leppik, Sirje. Üldistatud Fourier' ridade koonduvusest peaaegu kõikjal.
14. Lõhmus, Krista. Rieszi menetluste ekvivalentsusest.
15. Martin, Eve. Operaatorbaasid topoloogilistes vektorruumides.
16. Mölder, Tiina. Ühest funktorist topoloogilisel kategoorial.
17. Nazarov, Fjodor. Слабо-безусловная суммируемость.
18. Näripä, Hannes. Otsene algoritm täisarvulise kumera planeerimisülesande lahendamiseks.
19. Oja, Peeter. Projektsioonimeetodi koondumisest paraboolset tüüpi võrrandite jaoks.
20. Pedastsaar, Kalle. Merceri teoreemi üldistusi Banachi ruumi jadadele.
21. Preem, Martti. Marsruutide leidmise ülesanne.
22. Pärna, Kalev. Nominaaltunnuste analüüsi statistilisest metoodikast.
23. Riisma, Tiit. Juhtimissüsteemi optimaalse struktuuri matemaatilisi probleeme.
24. Rubanovitš, Grigori. Условия простоты для упорядоченных полугрупп.
25. Saar, Leini. Kahepoolsete tõketega täisarvulise lineaarse planeerimisülesande lahendamisest.
26. Saluäär, Tõnu. Itereeritud menetluste ekvivalentsusest.
27. Siirmann, Rein. Tunniplaani koostamise algoritm.
28. Silk, Siiri. Haldur-tüüpi süsteemide üldpõhimõtteid elektronarvutite süsteemidele.
29. Simm, Jaak. Paraboolset tüüpi võrrandi lahenduvusest.
30. Stahl, Krista. Barütsentriliste koordinaatide meetod mittelineaarsete võrrandisüsteemide lahendamiseks («Minsk-22» moodulprogrammeerimise süsteemile).
31. Talvis, Elve. Matemaatilise planeerimise meetodite rakendamine metsamajanduses.
32. Tiirmaa, Jüri. Jäigalt kinnitatud jäik-plastsest silindriliste koorikute dünaamiline koormamine suurte läbipainete puhul.
33. Täht, Toomas. Summeerimisbaasid ja nende üldistused.
34. Uba, Peep. Paigutuste tellimise ülesanne.
35. Veiderpass, Tõnu. J. Linzbabh ja tema teos «Принципы философского языка».

Matemaatika pedagoogilises osakonnas kaitsti järgmised diplomitööd:

1. Heinla, Heino. Eriainete õpetamine ülikoolis (üliõpilase aspekt).
2. Kreitzberg, Peeter. Matemaatiline statistika spordis.
3. Lepmann, Lea. Tallinna Pedagoogilise Instituudi lõpetanud matemaatikute kontingendi analüüs.
4. Lepmann, Tiit. Tartu Riikliku Ülikooli matemaatika eriala üliõpilaste edukuse analüüs.
5. Loigu, Ly. Teksti raskuse valemi reliaablus ja valiidsus.
6. Lõhmus, Larissa. Matemaatika sisseastumiseksamite tulemuste analüüs 1971. materjalide alusel.
7. Sikk, Toomas. Eesti NSV matemaatika- ja füüsikaõpetajate kaader aastatel 1965—1971.
8. Tamm, Luule. Rapla rajooni kolhooside tagavaraosade ja remondimaterjalide varude kasutamise analüüs (Raikküla ja Lenini-nimelise kolhoosi andmete baasil).
9. Varul, Hille-Made. Üliõpilaste matemaatikaalaste teadmiste püsivusest.

Bibliograafia

EESTI NSV-s ILMUNUD MATEMAATIKA-ALASE KIRJANDUSE NIMESTIK

Oktoober 1970 — detsember 1971

(Koostanud M. Suurväli)

RAAMATUD

Allik, K. **Integraalarvutus.** Tln., 1971. 71 lk. (TPI arvutusmatemaatika kateeder) — Trükitud rotaprindil.

Bagrejev, V. **Teoreetilise mehhaanika ülesannete kogu.** Tln., «Valgus», 1971. 162 lk.

Eek, R. **Elastsus- ja plastsusõpetuse ülesanded.** Tln., 1971. 78 lk. (TPI ehitusmehhaanika kateeder) — Trükitud rotaprindil.

Ellart, H., Luigelaht, V., Reima, T., Reiman, E ja Silling, H. **Elementaarmatemaatika ülesannete kogu.** Kesk-eriõppeasutustele. 2. ümbertööt. tr. Tln., «Valgus», 1971. 379 lk.

Etverk, E., Garšnek, A., Kass, A., Kass, P., Krusberg, H. ja Teeäär, M. **Harjutusi ja ülesandeid keskkooli matemaatikakursuse kordamiseks.** Tln., 1971. 64 lk. (TPI matemaatika kateeder) — Trükitud rotaprindil.

Etverk, E., Garšnek, A., Kass, A., Kass, P., Krusberg, H. ja Teeäär, M. **Materjale keskkooli matemaatikakursuse kordamiseks.** Tln., 1971. (TPI matemaatika kateeder) — Trükitud rotaprindil.

1. osa. Aritmeetika ja algebra. 112 lk.

2. osa. Geomeetria ja trigonomeetria. 128 lk.

Etverk, E., Prinits, O. ja Velsker, K. **Matemaatika õpetamisest IX klassis.** Abimaterjal õpetajatele. 2. vihik. Tln., 1971. 52 lk. (ENSV Haridusministeerium).

Etverk, E. ja Telgmaa, A. **Matemaatika õpetamisest IV klassis.** Abimaterjal õpetajaile. Tln., 1970. 56 lk. (ENSV Haridusministeerium).

Furmansky, M. ja Lepamaa, A. **Tõenäosusteooria ja matemaatilise statistika metoodiline juhend ja kontrolltööde ülesanded ökonoomika erialade kaugüliõpilastele.** Tln., 1971. 27 lk. (TPI arvutusmatemaatika kateeder) — Trükitud rotaprindil.

Gabovitš, J. **Võrratused.** (3. tr.) Trt., 1970. 13 lk. (TRÜ Matemaatika — Füüsika Kaugõppekool. 17) — Trükitud rotaprindil.

Jevtušik, L. J. **Stereomeetria.** Ülesannete kogu. Trt., 1970. 31 lk. (TRÜ Matemaatika-Füüsika Kaugõppekool. 18) — Trükitud rotaprindil.

Kaasik, Ü., Korjus, A. ja Kull, I. **Programmeerimine.** Tln., «Valgus», 1971. 356 lk.

Kaasik, Ü., Viitso, M., Iher, A., Laumets, Airi, Laumets, Ants, Veldre, S. ja Veldre, T. **Programme kõigile.** 1. Metoodiline materjal. 2. tr. Trt., 1971. 44 lk. (TRÜ Arvutuskeskus) — Trükitud rotaprindil.

Kaasik, Ü., Ääremaa, K., Jaeger, A., Kalberg, M., Ehasalu, J. ja Ermann, S. **Elektronarvuti «Minsk-32».** Õppevahend. Trt., 1970. 179 lk. (TRÜ Arvutuskeskus) — Trükitud rotaprindil.

Kolde, R. **Stereomeetria.** Ülesannete lahendused. 1. Trt., 1970. 16 lk. (TRÜ Matemaatika-Füüsika Kaugõppekool. 19) — Trükitud rotaprindil.

Kolk, E. **Absoluutväärtus.** Ülesannete lahendused. 2. Trt., 1971. 15 lk. (TRÜ Matemaatika-Füüsika Kaugõppekool. 20) — Trükitud rotaprindil.

Kraaving, M., Paluveer, N., Rünk, O. ja Vallas, E. **Kujutav geomeetria.** Tln., 1971. (TPI) — Trükitud rotaprindil.

Harjutusülesanded. 56 lk.

Lisaharjutusülesanded ehituslike erialade jaoks. 20 lk.

Krusberg, H. **Matemaatiline planeerimine.** Ülesannete kogu. Tln., 1971. 84 lk. (TPI arvutusmatemaatika kateeder) — Trükitud rotaprindil.

K u u s i k, V., S a r v, E. ja H e i n l a, L. **Automaatprogrammeerimise süsteem VELGOL.** (Käsiraamat). Tln., 1970. (ETKVL Arvutuskeskus. Aparaadiehituse, Automatiseerimisvahendite ja Juhtimissüsteemide Min. Elektronjuhtimismasinate Instituut. ENSV TA Küberneetika Instituut. ENSV Informatsiooni Instituut). — Trükitud rotaprindil.

1. 198 lk.

2. 96 lk.

L a r e t e i, A. ja R e i m a n d, J. **Elementaarmatemaatika.** (Kogumik TRÜ vastuvõtueksamite ülesandeid). 2. tr. Trt., 1971. 120 lk. (TRÜ matemaatika õpetamise metoodika kateeder) — Trükitud rotaprindil.

L e p i k, Ü. ja R o o t s, L. **Teoreetiline mehaanika.** Tln., «Valgus», 1971. 484 lk.

Matemaatika ja füüsika fakultatiivkursuste näidisprogramme. Tln., 1970. 27 lk. (ENSV Haridusministeerium).

Matemaatika ja füüsika kontrolltööde tulemustest 1970. aastal. Tln., 1971. 52 lk. (ENSV Haridusministeerium).

Matemaatika ja kaasaeg. Abimaterjale matemaatika õpetajatele ja õppijatele. XVII. Trt., 1970. 135 lk. (TRÜ).

Sisu: A. T a u t s. Üld- üksikmõistete vahekord. — U. K a l j u l a i d. Lisateadmisi rühmadest. — T. S õ r m u s. Diferentsiaalvõrrandi lahendi olemasolu ja ühesus. — G. V a i n i k k o. Mõnda funktsionaalanalüüsist. II — E. T i i t. Matemaatilise statistika areng ja teaduste matematiseerimise käigus. — A. L e i t e n, M. V i i t s o. Täisarvulised planeerimisülesanded. — L. K i v i s t i k. Lineaarsete puhttäisarvuliste planeerimisülesannete lahendamise algoritmid. — L. V ä l j a o t s, Ü. K a a s i k. Maagilised ruudud. — T. R o o s i n u p p. Arvuteooria põhiteoreem. — J. D e p m a n. Moritz Cantor — matemaatika ajaloo suurkuju. — Ü. L u m i s t e. Erhard Schmidt — Tartu ülikooli kasvandik. — M. T a m m. Boris Tamm — tehnikadoktor. — E. T a m m e. Gennadi Vainikko — füüsika-matemaatikadoktor. — M. T õ n n o v. On ilmunud matemaatilise analüüsi õpiku II osa. — NSV Liidu riiklikke preemiaid matemaatikutele. — B o r i s T i i k m a. In memoriam. — Uusi teaduste kandidaate. — Uusi ülikooli lõpetanud matemaatikuid. — Järjekordne lend keskharidusega matemaatikuid. — Bibliograafia. — Ülesandeid.

Matemaatika ja mehhaanika-alaseid töid. IX. Trt., 1970. 366 lk. (TRÜ Toimetised. Nr. 253. Vene k., resümeed eesti, saksa ja inglise keeles).

Sisu: Е. Габович, Ю. Каазик, Г. Кангро, Ю. Лумисте, Э. Тамме, Я. Хион. О развитии математики в Тартуском университете в 1964—1967 годы. — Ю. Лепик, Э. Йыги. Обзор работ по теории пластин и оболочек, выполненных в Тарту за период 1950—1968 гг. — — G. S h a p i r o. Plastsete kehade dünaamika mudelitest. — A. T a u t s. Fikseerimata valemid. — A. T a u t s. Herbrandi teoreemi analoog teist järku predikaatarvutuse jaoks. — M. K i l p. Lamedatest polügoonidest. — R. K o l d e. Isotroopsete sirgete kongruents ruumis $'R_4$ ja tema kanoonilised reeperid. — K. R i i v e s. Eukleidilise ruumi R_5 liikumiste rühma Lie alamrühmad ja nende orbiidid. I — A. R u u b e l. Üldistatud projekteerimise algebralistest uurimistest lisatingimusi arvestades. — S. G e i s b e r g, V. K o n j u k h o v s k i, Primaarsetest ideaalidest kaaluga integreeruvate funktsioonide ringis. — E. J ü r i m ä e. Konullmenetluste topoloogilised omased. II — E. T i i t. Diskreetse summadepiirkonnaga rea näide. — S. B a r o n. Teoreemid summeeruvusteguritest menetluste A jaoks. — M. A b e l. χ-koonduvusteguritest kompleksset järku Cesàro menetluste korral. — M. T õ n n o v. Fourier' kordajad ja summeeruvustegurid. — M. T õ n n o v. Täiend ja kaasruumid. — M. S k v o r t s o v a. Multiplikaatorid ja summeeruvustegurid. — S. B a r o n. Fourier' ridade ja kaasridade absoluutse summeeruvuse lokaalsuse omadusest. — L. K a g a d i. Kahemuutuja funktsiooni Fourier' kordajad ja pidevuse moodulid. — G. V a i n i k k o. Kollokatsioonimeetodi koondumisest mitmemõõtmeliste integraalvõrrandite jaoks. — E. T a m m e. Neljandat järku kvaasilineaarse rajaülesande lahendamisest võrgumeetodiga. — R. J ü r g e n s o n, H. J o k k. Teist järku diferentsiaalvõrrandisüsteemide rajaülesannete lahendamisest diferentsmeetodiga. — L. K i v i s t i k. Ühest mittelineaarsest planeerimisülesandest. — L. R õ b a k o v. Funktsionaali ekstreemumi tarvilikust tingimusest. — R. T a m m e s t e. Üks informatsiooni mõiste üldistus. — K. S o o n e t s. Ringsilindrilise kooriku telgsümmeetrilisest elastsest-plastsest paindest. — I. V a i n i k k o. Plastne-elastne-viskoosne ümmargune ribidega tugevdatud plaat jäiga südamikuga. — E. V i r m a. Ristkülikukujuliste plaatide kandevõimest. II — E. J õ g i. Elastse-plastse lameda ringkaare uurimisest.

Matemaatika- ja mehhaanika-alaseid töid. X. Trt., 1971. 272 lk. (TRÜ Toimetised. Nr. 277. Vene k., resümeed eesti, saksa ja inglise k.).

Sisu: J. G a b o v i t š. Poolrühma lineaarsete järjestuste hulga võimsusest. — O. I v a n o v a. Ringide verbaalsete summade järjestatus. — J. G a b o v i t š, M. T r e p e t i n. Nilpotentsete poolrühmade muutkondadest. — M. T r e p e t i n. Kommutatiivsete nilpotentsete poolrühmade endomorfismide poolringid. — J. H e n n o. Greeni ekvivalentsid Mengeri süsteemides. — E. R e d i. Mengeri süsteemide esitamine mitmekohaliste endomorfismidega. — M. A b e l. Pidevate tõkestatud funktsioonide algebrast, mille väärtused kuuluvad kompleksssesse kommutatiivsesse ühikuga Banachi algebrasse. — H. K i l p. Kolme esimest järku osatuletistega diferentsiaalvõrrandite süsteemi geomeetriast. — H. Espenberg, J. Gabovitš. Kolm ülesannet tetraeedri ruumala arvutamise kohta. — M. Abel. Nel'i teoreemi üldistused. — E. Jürimäe. Koonduvust säilitavate menetluste perfektsuse hulgad. — L. Loone. Eralduva lokaalselt kumera ruumi elemendi tuum. — G. Kangro. Rieszi ja Cesàro menetlusega λ — tõkestatud ridade summeeruvustegurid. — G. Kangro. Jääkliikmega Tauberi teoreem Rieszi menetluse jaoks. — I. Tammeraid. Jääkliikmega Tauberi tüüpi teoreemid Cesàro ja Hölderi summeerimismenetluste korral. — I. Tammeraid. Jääkliikmega Tauberi tüüpi teoreemid Euler-Knoppi summeerimismenetluste korral. — S. Baron. Kahekordsete jadade ühest maatriksteisendusest. — O. Karma. Operaatorfunktsioonide kompaktsest aproksimatsioonist. — I. Saarniit. Diferentsmeetodi koonduvuse hindamisest hälbiva argumendiga diferents aalvõrrandite korral. — M. Fischer, E. Tamme. Monotoonsuse kasutamisest deferentsmeetodite uurimiseks kvaasilineaarsete rajaülesannete lahendamisel. — E. Ehasalu, E. Tamme. Dirichlet' ülesande lahendamisest kolmnurksel võrgul. — Ü. Lepik. Suure amplituudiga tasapinnaliste lainete levik ja peegeldumine paksus plaadis. — J. Kirs. Jäik-plastsete silindriliste koorikute dünaamiline koormamine suurte läbipainete puhul. — J. Lellep. Jäik-plastsete varraste suurtest läbipainetest dünaamilisel koormamisel.

Matemaatika kontrolltöid IV, VII ja VIII klassile. Tln., 1971. 31 lk. (ENSV Haridusministeerium).

Matemaatiliste meetodite ja arvutustehnika kasutamine rahvamajanduses. Kursuse programm. Tln., 1971. 7 lk. (ENSV Kõrgema ja Keskerihariduse Ministeerium. TPI arvutusmatemaatika kateeder. Kvalifikatsiooni tõstmise kõrgemad kursused tööstuse (asutuste, ettevõtete) juhtivatele ja insenertehnilisele personalile. — Trükitud rotaprindil.

Mereste, U. **Statistika üldteooria.** 3. tr. Trt., 1971 (TRÜ rahanduse ja krediidi kateeder) — Trükitud rotaprindil.

1. Statistiline vaatlus. Vaatlusandmete kokkuvõtt. Suhtarvud. 120 lk.

2. Keskmised variatsiooni näitarvud. 128 lk.

Mereste, U. **Ülesandeid statistika praktikumiks.** 2. tr. Trt., 1971. 114 lk. (TRÜ rahanduse ja krediidi kateeder) — Trükitud rotaprindil.

Metoodilised materjalid kaugõppe ettevalmistuskursustel õppijaile. Matemaatika. Tln., 1971. 36 lk. (TPI Ettevalmistuskursused) — Trükitud rotaprindil.

Mitt, E., Prinits, O. ja Velsker, K. **Matemaatika olümpiaadid Eesti NSV-s.** Tln., «Valgus», 1970. 151 lk.

Määramata integraali leidmine asendusvõttega ja ositi integreerides. Programmeeritud õppevahend. Tln., 1971. 68 lk. (TPI arvutusmatemaatika kateeder) — Trükitud rotaprindil.

Reimand, J. **Matemaatiline induktsioon.** Trt., 1971. 14 lk. (TRÜ Matemaatika-Füüsika Kaugõppekool. 22) — Trükitud rotaprindil.

Riives, S. ja Ruubel, A. **Aksonomeetria.** Näidisülesannete lahendamisega. Trt., 1971. 66 lk. (EPA) — Trükitud rotaprindil.

Roots, H. TPI **Ettevalmistuskursuste kaugõppe kontrolltööde ülesanded matemaatikas 1970/71. õ.-a.** Tln., 1970. 10 lk. (TPI Ettevalmistuskursused) — Trükitud rotaprindil.

Schults, K. **Mehhaanika.** Loengukonspekt. Tln., 1970. 54 lk. (TPI füüsika kateeder) — Trükitud rotaprindil.

Sisseastumisülesannete lahendused. 1971—72. õ.-a. Trt., 1971. 9 lk. (TRÜ Matemaatika-Füüsika Kaugõppekool. 21.) — Trükitud rotaprindil.

Tamm, V. **Majandusmatemaatilised mudelid ja meetodid.** Ülesandeid praktikumideks. Trt., 1971. 111 lk. (TRÜ rahvamajandusharude ökonoomika kateeder) — Trükitud rotaprindil.

Tauts, A., Tõnnov, M. ja Türnpu, H. **Matemaatilise analüüsi praktikum.** 4. Trt., 1971. 74 lk. (TRÜ) — Trükitud rotaprindil.

Teeäär, M. ja Pungar, P. **Kõrgem matemaatika,** Programm, metoodilised juhendid ja kontrolltööde ülesanded... I kursuse kaugüliõpilastele. Tln., 1970. (TPI arvutusmatemaatika kateeder) — Trükitud rotaprindil.

...keemia ja insener-majanduse erialade... 40 lk.

...ökonoomika erialade... 24 lk.

Tiit, E. **Matemaatiline statistika.** 1. Trt., 1971. 388 lk. (TRÜ arvutusmatemaatika kateeder) — Trükitud rotaprindil.

Tiit, E. **Matemaatilise statistika tabelid.** Õppevahend. 1. Trt., 1971.

224 lk. (TRÜ matemaatilise statistika ja programmeerimise kateeder) — Trükitud rotaprindil.

Toom, E. **Konkurss. 1970.** Trt., 19 lk. (TRÜ Matemaatika-Füüsika Kaugõppekool. 16 lk.) — Trükitud rotaprindil.

Topnik, E. **Teoreetilise mehaanika ülesannetest.** 2. Kinemaatika. Tln., 1970. 110 lk. (TPI teoreetilise mehaanika kateeder) — Trükitud rotaprindil.

Tulev, I. **Programm-õpimaterjal integraali õpetamiseks keskkoolis.** Metoodiline katsematerjal. Tln., 1970. 43 lk. 2 eraldi l. teksti (TRÜ. ENSV Vabariikl. Õpetajate Täiendusinstituut) — Trükitud rotaprindil.

Tuulmets, L. **Analüütilise geomeetria praktikum.** 1. Trt., 1971. 123 lk. (TRÜ algebra ja geomeetria kateeder) — Trükitud rotaprindil.

Tööjuhendid kaugõppekeskkoolide õpilastele 1971/72. õppeaastaks. Matemaatika. Tln., 1971. (ENSV Haridusministeerium).
VIII kl. 82 lk.
X kl. 70 lk.
XI kl. 54 lk.

Tööjuhendid kaugõppekeskkoolide õpilastele 1971/72. õppeaastaks. Matemaatika. IX kl. Tln., 1971. 62 lk. (ENSV Haridusministeerium).

Vallner, H. **Koodid. Loogilised tehted.** Trt., 1971. 8 lk.

Vallner, H. **Matemaatiliste masinate aritmeetilised alused.** Trt., 1971. 8 lk.

Veiner, G. **Metoodiline juhend tõenäosusteooria ülesannete lahendamiseks.** Tln., 1971. 40 lk. (TPI arvutusmatemaatika kateeder) — Trükitud rotaprindil.

Võhandu, L. Tamme, E. ja Luht, L. **Arvutusmeetodid.** 1. Tln., «Valgus», 1971. 374 lk.

Üleliidulise täppisteaduste olümpiaadi lõppvooru ülesanded matemaatikas ja füüsikas. Tln., 1970. 15 lk. (ENSV Haridusministeerium). — Trükitud rotaprindil.

Абель, М. **Об алгебраических и топологических свойствах алгебр функций со значениями в банаховой алгебре.** (01.001, 01.002). Автореферат дисс. на соискание учен. степ. канд. физ.-мат. наук. Тарту, 1971. 16 с. (ТГУ).

«Автоматическое распознавание слуховых образов» всесоюзный семинар, 4-й. Таллин 1971. (АРСО — VI). (7—13 сент. 1971 г.) Тезисы докладов и сообщений. Таллин, 1971. 68 с. (АН ЭССР. Ин-т кибернетики).

Андреева, Л. П. **Предельные сиплетические пространства.** (01.006). Автореферат дисс. на соискание учен. степ. канд. физ.-мат. наук. Тарту, 1971. 23 с. (ТГУ).

Беккер, М. Б. **Сборник олимпиадных задач по математике.** (В помощ учителю). Таллин, 1971 (М-во просвещения ЭССР. Респ. ин-т усовершенствования учителей).
Ч. 1. 79 с.
Ч. 2. (Решения). 144 с.

Карма, О. О. **Об аппроксимации оператор-функций и сходимости приближенных собственных значений.** (01.008). Автореферат дисс. на соискание учен. степ. канд. физ.-мат. наук. Тарту, 1971. 17 с. (ТГУ).

Кильп, М. А.-Б. **О гомологической классификации моноидов.** (01.004). Автореферат дисс. на соискание учен. степ. канд. физ.-мат. наук. Тарту, 1971. 16 с. (Моск. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова мех-мат. фак.).

Крусберг, Х. **Математическое планирование.** Сборник задач. Таллин, 1971. 92 с. (ТПИ. Кафедра вычислит. математики). — Ротапринт.

Методические материалы по математике для заочников подготовительных курсов. Таллин, 1971. 36 с. (ТПИ. Подготовительные курсы). — Ротапринт.

Мяртин, К. О. и Тамм, Б. Г. **Распределение памяти в инженерных системах программирования с проблемной ориентацией.** Препринт — 2. Таллин, 1971. 40 с. (Ин-т кибернетики АН ЭССР).

Петерсен, И. Ф. **Проблемы идентификации функций многих пере-**

менных. (01.009). Автореферат дисс. на соискание учен. степ. д-ра физ.-мат. наук. Таллин, 1970. 27 с. (АН ЭССР. Совет физ.-мат. и техн. наук).

План — задание по математике для XI класса заочной средней школы на 1970/71 учебный год. К.-Ярве, 1971. 14 с.

Приск, Л. **Учебная вычислительная машина «Эльма — 2».** Таллин, 1970. 32 с. (ТПИ. Кафедра вычислительной математики). — Ротапринт.

Программы для ЭЦВМ «Минск-22». Таллин, 1970. (АН ЭССР. Ин-т кибернетики). — Ротапринт.

Вып. 9. Программы по математической статистике. 3. Под. ред. И. Петерсена. 147 с.

Вып. 10. Рейтсакас, А. Расчет зарплаты. Под ред. Т. Гречишкиной. 119 с. 5 л. табл.

Роотс, Х. **Контрольные работы по математике для заочников подготовительных курсов ТПИ 1970/71 уч. г.** Таллин, 1970. 8 с. (ППИ. Подготовительные курсы). — Ротапринт.

Соонетс, К. П. **Исследование изгиба некоторых элементов конструкций с учетом геометрической и физической нелинейностей.** (01.023). Автореферат дисс. на соискание учен. степ. канд. физ.-мат. наук. Тарту, 1971. 16 с. (ТГУ).

Тамместе, Р. А. **Некоторые вопросы вероятностных распределений в комплексных гильбертовых пространствах.** (01.001). Автореферат дисс. на соискание учен. степ. канд. физ.-мат. наук. Тарту, 1971. 13 с. (ТГУ).

Труды вычислительного центра. Тарту, 1969. (ТГУ). — Ротапринт.

Вып. 17. Муллари, Р. и Саарниит, И. Построение на заводе «машинной» системы текущего управления производством. 137 с.

Вып. 18. 105 с.

Содерж. М. Койт. О синтезе эстонского текста. — Р. Пальм. К вопросу об основаниях математической лингвистики.

Труды Вычислительного центра. Тарту, 1971. (ТГУ), — Ротапринт.

Вып. 20. 55 с.

Содерж.: Ю. Каазик, Т. Лыхмус, Э. Ээлма. Об алгоритмизации расчетов составления планов настила в швейной фабрике. — Э. Ласн. Детализация месячного плана выпуска продукции приборостроительного завода.

Вып. 21. 62 с.

Содерж.: Ю. Я. Каазик. Терминология по программированию и математической экономике.

Вып. 22. 55 с.

Содерж.: Е. Габович, А. Чиж, А. Ялас. О задаче коммивояжера на узкие места. — Л. Кивистик, У. Хийэсалу. III алгоритм Гомори в случае двухсторонних ограничений. Ю. Каазик, Р. Тяхт. Метод решения одной булевской задачи линейного программирования. — А. Лейтен. Одна задача дискретного программирования специального вида. — А. Лейтен. Почти дискретные задачи линейного программирования.

Вып. 23. 51 с.

Содерж.: Ю. Тапфер. Решенеи модели укомплектования производственной системы. — В. Аллсалу. Метод приближенного решения задачи целочисленного линейного программирования. — Ю. Каазик, Т. Ласн. Метод приближенного решения задач нелинейного программирования.

Вып. 24. 160 с.

Содерж.: О. О. Карма. Об аппроксимации оператор-функций и сходимости приближенных собственных значений. — О. О. Карма. О сходимости дискретизационных методов отыскания собственных значений интегральных и дифференциальных операторов, голоморфно зависящих от параметра.

Ярцев, Ю. П. **О сходимости и устойчивости некоторых методов интерполяционного типа.** (008). Автореферат дисс. на соискание учен. степ. канд. физ.-мат. наук. Таллин, 1970. 17 с. (АН ЭССР. Совет физ.-мат. и техн. наук).

ARTIKLID

Aben, H. Meestest, kes uurivad koorikuid. N. Alumäe, L. Ainola ja U. Nigul. — Horisont, 1971, nr. 2, lk. 2—10.

Agur, U. Märkmeid arvutus- ja informatsioonitehnika oskussõnavara kohta. — Õppemetoodika küsimusi, 8, 1971, lk. 95—105.

Agur, U. Raal igasse kodusse! Raali kasutamisest ja kättesaadavusest. — Horisont, 1971, nr. 6, lk. 11—14.

Eesti NSV Teaduste Akadeemia Toimetised. Füüsika. Matemaatika, Tln., 1970.

Nr. 3. Matemaatika-alased artiklid (vene k., resümeed eesti ja inglise k.). T. Tobias. Peatuspiirkonna leidmisest Wieneri protsessi korral. — O. Vaarmann. Üldistatud pöördoperaatorite ja nende lähendoperaatorite kasutamisest mittelineaarsete võrrandite lahendamiseks. — Ingrid Sõrmus, E. Tamme. Mittestatsionaarse ülekandevõrrandi lahendamisest diferentsmeetodiga. — T. Viik. Ülekandevõrrandi lahendamisest sfäärilisel juhul. E. Raik. Võrratuse stohhastilise planeerimise ülesannetes. — J. Kajari. Juhuslike maatriksite silumisest. V. Aladjev. Üks teoreem kärjekujuliste struktuuride teooriast. — Reet Pukk. Integrandi siledust arvestav integreerimisalgoritm. — I. Petersen. Üks regressioonkatsete plaanide seeria keradel.

Nr. 4. Matemaatika-alased artiklid (vene k., resümeed eesti ja inglise k.): L. Mõtus. Juhuslikult muutuva parameetriga objekti juhtimisest. — M. Levin. Kvadratuurvalemite ekstreemumülesanded mõnede funktsioonihulkade jaoks. — A. Lahe, L. Poverus. Silindrilise kooriku mittelineaarse telgsümmeetrilise deformatsiooni katkevustingimustest. — E. Raik. Erinevalt püstitatud stohhastilise programmeerimise ülesannete lahendite võrdlus. — N. Veksler. Macdonaldi funktsioonide ratsionaalse lähenduse kasutamisest telgsümmeetrilise laineprotsessi uurimisel ringplaatides Laplace'i teisenduse meetodil. — M. Levin. Kahekordsete integraalide arvutamisest. — R. Jürgenson. Võrkude meetodi veahinnangust mittelineaarsete elliptilist tüüpi diferentsiaalvõrrandite lahendamisel. — H. Koppel. Mõningate A. Ostrovski meetodite üldistamine mittelineaarsete operaatorvõrrandite lahendamiseks. — M. Levin. Parimatest kubatuurvalemitest.

Eesti NSV Teaduste Akadeemia Toimetised. Füüsika. Matemaatika. Tln., 1971.

Nr. 1. Matemaatika-alased artiklid (vene k., resümeed eesti ja ingl. k.): S. Ulm. Agregeerimismeetod suboptimaalsete juhtimiste sünteesimiseks. — E. Raik. Stohhastilise mittelineaarse planeerimise ülesannete kvalitatiivne uurimine. — V. Kuusik. Failide kirjeldamine VELGOL'is. — M. Levin. Üks arvulise integreerimise valemite omadus.

Nr. 2. Matemaatika-alased artiklid (vene k., resümeed eesti ja inglise k.): G. Kangro. Summeerimismenetluste λ-perfektsusest ja selle rakendustest. I — T. Tobias. Wieneri protsessi optimaalne peatamine lõpliku ajavahemiku korral. — A. Olm. Ühest dekompositsioonimeetodist suboptimaalsete juhtimiste sünteesimiseks. — V. Aladjev. Ühest strohhastiliste kärjesarnaste struktuuride asümptootilisest omadusest. — V. Aladjev, N. Jefimov. Moore'i struktuuride mõningatest omadustest. — J. Lõhmus. Mitteassotsiatiivsete algebrate lihtsamaid kontraktsioone. — Ingrid Mauer. Täieliku informatsiooniga kaheisikumängust. — M. Levin. Parimate kvadratuurvalemite vea hinnangust. — E. Raik. Kvantiilfunktsioonist strohhastilises mittelineaarses programmeerimises

Nr. 3. Matemaatika-alased artiklid (vene k., resümeed eesti ja ingl. k.): F. Vichmann. Maatriksite konservatiivsusest mõõdu järgi koonduvuse suhtes. — M. Levin. Parimad fikseeritud sõlmede ja kaalufunktsiooniga integreerimise valemid. — V. Aladjev. Mõningaid Neumann-Moore'i struktuuride hinnanguid. — A. Reitsakas. Arvutussüsteem «Minsk-22» — «Minsk-32». — T. Tobias. Difusiooniprotsessi optimaalsest peatamisest lõplikus ajavahemikus. — V. Aladjev. Kaks mudelit, mis võimaldavad lahendada probleemi «Prantsuse lipp». — Maret Tamm. Bilansimudeli järeltasakaalustamisest transpordiülesande abil.

Nr. 4. Matemaatika-alased artiklid (vene k., resümeed eesti ja ingl. k.): G. Kangro. Summeerimismenetluste perfektsusest ja selle rakendustest. II. — O. Vaarmann. Ligikaudsete pseudopöördoperaatorite kasutamine mittelineaarsete võrrandite lahendamisel. — J. Jartsev. Fejeri kollokatsioonimeetodi stabiilsusest. — Ingrid Mauer. Trahvikonstant blokkprogrammeerimisel. — A. Reitsakas. Kiire informatsioonivahetusega arvutussüsteem «Minsk-22» — «Minsk-32». — A. Siimon. Potentsiaal-impulsse elementidesüsteemi loogiliste skeemide analüütilise kirjeldamise keele laiendamisest. — K. Märtin. Programmmoodulite jaoks koostatud kolme mälujaotuse algoritmi efektiivsuse võrdlus — K. Märtin. Dünaamiliste massiivide kasutamisest insenerilistes programmeerimissüsteemides. — Ingrid Mauer. Trahvikonstandi kasutamisest matemaatilise programmeerimise ülesannete dekomponeerimisel. — R. Tavast. Tõenäosuslike tõketega planeerimisülesannete lubatava hulga hinnang. — J. Kuks, V. Olman. Regressioonikoefitsientide lineaarne minimaksihinnang. II.

Jõeveer, M. Sfääride muusikat otsimas. Saksa astronoom ja matemaatik J. Kepler. 1571—1630. — Horisont, 1971, nr. 12, lk. 29—34.

Karlov, L. Relatiivsusteooria tunnetuslikest alustest. — Horisont, 1970, nr. 11, lk. 25—31.

Karu, G. Üheksanda klassi mehaanikakursuse struktuur. — Nõukogude Kool, 1971, nr. 8, lk. 610—614.

Koppel, A. Matemaatilise mõtte jõud. — Horisont, 1971, nr. 3, lk. 34—39, nr. 5, lk. 41—46.

Kärner, O. ja Telgmaa, A. Matemaatika testide tulemusi 5. klassis. — Nõukogude Kool, 1971, nr. 10, lk. 749—754.

Lints, A. Liitmine ja lahutamine 10 piires. — Nõuk. Kool, 1970, nr. 10, lk. 770—776; nr. 11, lk. 854—859.

Lints, A. Mida 1. klassi õpilased peaksid esimesel poolaastal matemaatikas omandama? — Nõukogude Kool, 1971, nr. 7, lk. 529—532.

Lints, A. Mida 1. klassi õpilased peaksid omandama teisel poolaastal matemaatikas? — Nõukogude Kool, 1971, nr. 10, lk. 755—761.

Lints, A. Töö koolieelikute rühmadega koolis. Laste ettevalmistamisest matemaatika õppimiseks I klassis. — Nõukogude Kool, 1971, nr. 4, lk. 303—308.

Lumiste, Ü. Jaan Depman. 17. VII 1885 — 26. VII 1970. — Eesti Loodus, 1970, nr. 12, lk. 767.

Mitt, E. Funktsiooni defineerimine koolimatemaatikas. — Nõukogude Kool, 1970, nr. 10, lk. 760—765.

Oisaar, E. Jaan Depman, matemaatikaprofessor ja kultuuritegelane. 1885—1870. Nekroloog. — Keel ja Kirjandus, 1970, nr. 10, lk. 646.

Pedusaar, H. Üks-pluss-ühest elektronarvutini. — Tehnika ja Tootmine, 1971, nr. 9, lk. 500—504.

Sitnikov, L. Tõlgita elektronarvuti. — Horisont, 1971, nr. 6, lk. 7—8.

Sofia Kovalevskaja, matemaatik. 1850—1891. — Nõukogude Naine, 1971, nr. 2, lk. 21—22.

Stseglov, N., Kimmel, A. ja Papstel, I. Elektronarvutid tehnoloogiliste protsesside väljatöötamisel. — Tehnika ja Tootmine, 1971, nr. 6, lk. 302—304.

Telgmaa, A. Töövihik matemaatika õpetamisel. — Nõukogude Kool, 1971, nr. 7, lk. 518—523.

Undusk, A. Funktsioonide käsitlemine 8. klassis. — Nõukogude Kool, 1971, nr. 2, lk. 123—128.

Usai, M. Kolm kuulsat antiikaja matemaatilist probleemi. — Nõukogude Kool, 1971, nr. 2, lk. 157—159; nr. 3, lk. 236—239.

Usai, M. Lõplik ja lõpmatu matemaatikas. — Nõukogude Kool, 1971, nr. 6, lk. 436—444.

Вахер, Э. Обучение логарифмам с помощью программированного материала. — Советская педагогика и школа, 4, 1971, с. 92—99.

Иыги, Э. Об исследовании жестко заделанной упруго-пластической пологой круговой арки. — Труды Таллинского Пед. ин-та им. Вильде, вып. 1, 1971, с. 5—20.

Ольм, А. О применении теории двойственности для декомпозиции задачи оптимального управления — Сборник научных трудов (Эст. науч. исслед. ин-т земледелия и мелиорации), 22, 1971, с. 195—208.

Ольм, А. О синтезе субоптимальных управлений в частично сепарабельных задачах. — Сборник научных трудов (Эст. науч.-исслед. ин-т земледелия и мелиорации), 22, 1971, с. 182—194.

Пальм, Т. Из опыта индивидуализации учебной работы в классе по математике на тему «Простые дроби». — Советская педагогика и школа, 4, 1971, с. 42—48.

Песочина, Л. Т. Успеваемость по высшей математике как критерий общей успеваемости в техническом вузе. — Õppemetoodika küsimusi, 8, 1971, lk. 106—108.

Труды по строительной механике. Сборник статей. 3. Таллин, 1970. 84 с. (Труды Таллинского политехн. ин-та. Серия А. № 297). — Ротапринт.

Статьи по теоретической механике:
Э. М. Иеги. К вопросу о постановке задачи и построении математической модели расчета статически неопределимых рам минимального объема. — Р. Н. Ээк. Определение критической нагрузки и частот собственных колебаний упругих рам методом единичных сил. — Ю. К. Вилипыльд. Расчет ребристых методом конечных элементов. — Е. К. Трунов, Б. Н. Ясулович. К расчету систем перекрестных балон, подкреплениных с двух сторон настилом. — Л. К. Нарец. Матричный вариант метода последовательных приближений. — Ж. М. Чудинова. Приложение матричного варианта метода последовательных приближений к решению линейных и нелинейных дифференциальных уравнений и их систем. — Л. Ю. Поверус. Исследование распространения упругих волн деформации в цилиндрической оболочке вариационным методом. — О. Т. Роотс. Распространение ударной волны в круглой плите. — Хаамер, А. Попытка индивидуализации учебной работы по геометрии в 5 классе. — Советская педагогика и школа, 4, 1971, с. 34—41.

Ülesandeid elementaarmatemaatikast.

1. On antud viis täisarvu. Nende paarikaupa liitmisel saame summad, 1, 3, 3, 6, 6, 6 8, 9, 11, 11. Leida need arvud.

2. Linnast A väljus jalgrattur, et sõita linna B. Samaaegselt väljus linnast B teine jalgrattur, et sõita linna A. Kui esimene jalgrattur oli läbinud pool teed, jäi teisel veel sõita 24 km. Kui teine jalgratuur oli läbinud pool teed, jäi esimesel veel sõita 15 km. Leida linnadevaheline kaugus.

3. Olgu antud naturaalarvud m ja n $(m < n)$. Leida kõigi taandumata murdude $\frac{a}{b}$ summa, mille nimetajaks on algarv b ja mis rahuldavad võrratust $m \leqslant \frac{a}{b} \leqslant n$.

4. Kaarele ABC, kus B on kaare keskpunkt, toetub nurk AEC. Punktist B on nurga ühele haarale tõmmatud ristlõik BD. Tõestada, et punkti D kaugused selle haara otspunktidest võrduvad nurga AEC haarade poolsumma ja poolvahega.

5. On antud lõpmatu naturaalarvuliste liikmetega aritmeetiline progressioon. Tõestada, et selles progressioonis leidub liige, mille numbrite hulgas esineb null.

KOGUMIKU SEITSMETEISTKÜMNENDA VIHIKU ÜLESANNETE LAHENDUSED.

Ülesande nr. 1 lahendus. Võrratus kehtib $m = 1$ korral:

$$\frac{(1+n)!}{n!} \geqslant n+1.$$

Eeldame, et võrratus kehtib $m = k$ korral, s. o.

$$\frac{(k+n)!}{k!n!} \geqslant kn+1.$$

Näitame, et võrratus kehtib $m = k+1$ korral. Tõepoolest

$$\frac{(k+1+n)!}{(k+1)!n!} = \frac{(k+n)!}{k!n!} \cdot \frac{k+1+n}{k+1} \geqslant \frac{(kn+1)(k+1+n)}{k+1} = \frac{k^2n+kn+kn^2+k+1+n}{k+1} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{k^2n+kn+kn+k+1+n}{k+1} = \frac{(kn+n+1)(k+1)}{k+1} = (k+1)n+1.$$

Ülesande nr. 2 lahendus. Olgu kolmnurgas ABC külje BC keskpunkt M. Võrdusest $\overline{AB}\cdot\overline{BC}=\overline{BC}\cdot\overline{CA}$ järeldub, et

$$(\overline{AB}-\overline{CA})\cdot\overline{BC}=0,$$

$$(\overline{AB}+\overline{AC})\cdot\overline{BC}=0,$$

$$2\overline{AM}\cdot\overline{BC}=0,$$

$$\overline{AM}\perp\overline{BC},$$

$$AB=AC.$$

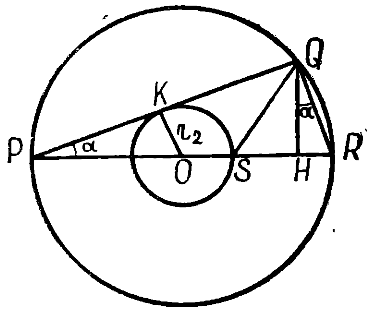
Analoogiliselt näitame, et $AB=BC$. Seega kolmnurk ABC on võrdkülgne.

Ülesande nr. 3 lahendus. Tõmbame punktist Q ristlõigu QH diameetrile PR. Kui $QS>QR$, siis $2HR<SR$.

Et $HR=RQ\sin\alpha=2r_1\sin^2\alpha$ ja $SR=r_1-r_2$, siis $2\cdot 2r_1\sin^2\alpha<r_1-r_2$. Kolmnurgast PKO leiame, et

$\sin\alpha=\frac{r_2}{r_1}$; seega

$$4r_1\cdot\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2<r_1-r_2.$$



Siit pärast lihtsaid teisendusi saame võrratuse

$$\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2-\frac{r_1}{r_2}-4>0,$$

mille lahendiks on

$$\frac{r_1}{r_2}>\frac{1+\sqrt{17}}{2}.$$

Ülesande nr. 4. lahendus. Et $\int\limits_0^t x(x-1)(x-t)dx=\int\limits_0^t[x^3-(t+1)x^2+tx]dx=$ $=\frac{t^3}{6}-\frac{t^4}{12}$, siis

$$f(t)=\frac{t^2}{6}-\frac{t^3}{12}\quad(t>0),$$

$$f'(t)=\frac{t}{12}(4-3t).$$

Siit leiame, et maksimumpunkt on $t=\frac{4}{3}$ ning funktsiooni väärtuseks maksimumpunktis on $f\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{8}{81}$.

Ülesande nr. 5 lahendus. Esimene rida koondub, kui $-2 < a < 2$ ning tema summa on $A = \frac{2}{2-a}$. Teine rida koondub, kui $a < 1$, $a > 3$ ning tema summa on $B = \frac{2-a}{3-a}$.

Mõlemad read on koonduvad, kui $-2 < a < 1$. Seega

$$A - B = \frac{2}{2-a} - \frac{2-a}{3-a} = \frac{-(a^2-2a-2)}{(a-2)(a-3)} = -\frac{(a-1-\sqrt{3})(a-1+\sqrt{3})}{(a-2)(a-3)}$$

ning $A < B$, kui $-2 < a < 1 - \sqrt{3}$;

$A = B$, kui $a = 1 - \sqrt{3}$;

$A > B$, kui $1 - \sqrt{3} < a < 1$.

Ülesande nr. 6 lahendus. Et $AU^2 = a^2 + u^2$, $AV^2 = a^2 + v^2$, siis ülesande tingimuse põhjal

$$\sqrt{a^2+u^2} + \sqrt{a^2+v^2} = c.$$

Diferentseerides seda seost t järgi saame

$$\frac{u \cdot \dot{u}}{\sqrt{a^2+u^2}} + \frac{v \cdot \dot{v}}{\sqrt{a^2+v^2}} = 0.$$

Arvestades, et

$$\cos AUO = \frac{u}{\sqrt{a^2+u^2}}, \quad \cos AVO = \frac{v}{\sqrt{a^2+v^2}},$$

saamegi otsitava seose.

SISUKORD

МАТЕМАТИКА И СОВРЕМЕННОСТЬ

Вспомогательные материалы для преподающих и изучающих математику

На эстонском языке

Тартуский государственный университет

ЭССР, г. Тарту, ул. Юликооли, 18

Vastutav toimetaja A. Tauts

Keeletoimetaja E. Oja

Korrektor L. Uba

Ladumisele antud 29. I 1973. Trükkimisele antud 21. VIII 1973. Trükipaber nr. 2. 60 × 90. 1/16. Trükipoognaid 8,75 + 1 kleebis. Arvestuspoognaid 9,13. Trükiarv 2000. MB 06172. Tell. nr. 589. Hans Heidemanni nim. trükikoda, Tartu, Ülikooli tn. 17/19. II.

Hind 55 kop.