0010010

Matemaatika ja kaasaeg

0100100

TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

MATEMAATIKA JA KAASAEG

XVIII

ABIMATERJALE MATEMAATIKA ÕPETAJATELE JA ÕPPIJATELE

TARTU 1972

SOTSIOLOOGILISE UURIMISE STATISTIKAST I

E. Koppel, E. Tiit

Sotsioloogilised uurimused on viimaste aastakümnete jooksul kogu maailmas omandanud enneolematu ulatuse. Et sotsioloogilisel uurimisel on informatsiooniallikaks sageli inimene (informatsioon tuleb anda ankeedi täitmise või intervjueerijaile vastamise teel), siis on viimaste aastate jooksul ka enamik ENSV elanikkonnast ühel või teisel viisil sotsioloogilise uurimisega kokku puutunud.

Milleks niisuguseid küsitlusi tehakse?

Mis nende andmetega peale hakatakse?

Missugused on selliste küsitluste ja edasise uurimistöö puhul «mängureeglid»?

Et nendele küsimustele, eriti teisele ja kolmandale, vastamisel on oluliselt tarvis tunda matemaatikat, eriti matemaatilist statistikat, siis on sobiv sellest ka «Matemaatika ja kaasaja» veergudel juttu teha.

Sotsioloogia uurimisobjektiks on objektiivsed ühiskondlikud suhted, mis moodustavad inimeste ja gruppide vaheliste seoste aluse. Et neid protsesse võimalikult täpselt selgitada, on tarvis kasutada mitmesuguseid matemaatilisi meetodeid, kusjuures andmete massilisuse ning teatavas mõttes juhuslikkuse tõttu on kaasajal esiplaanil statistilist laadi meetodid. Järgneva etapini — sotsiaalsete protsesside matemaatilise modelleerimiseni — on jõutud alles väga üksikutes lõikudes (demograafilised protsessid). Käesolevas artiklis vaatlemegi nimelt sotsioloogias kasutatavaid matemaatilise statistika meetodeid.

Mida uurida?

Sotsioloogi, nagu iga teisegi uurija esimene ülesanne on uurimisobjekti konkretiseerimine ning kontrollimist vajavate tööhüpoteeside või kontseptsioonide püstitamine. Siit järeldub ka töö metoodika valik.

Matemaatilist huvi pakuvad eeskätt need meetodid, mis tuginevad nn. statistilisele informatsioonile, massiliselt toimetatud samalaadsete mõõtmiste, vaatluste, katsete või intervjuude tulemustele. Nimelt niisuguseid meetodeid me järgnevas käsitlemegi.

Olgu tegemist mingi objektide (sotsioloogias on nendeks tavaliselt mingite tunnuste järgi eraldatud inimesed) hulgaga. Nimetame seda üldkogumiks. Objektide hulka üldkogumis nimetatakse üldkogumi mahuks ja tähistataske tähega N. Üldkogumiks võivad olla näiteks ENSV õpilased, Tartu linna elanikud, TRÜ Matemaatikateaduskonna 1970. aasta lõpetanud. Selle üldkogumi objektidel (indiviididel) on tarvis uurida teatavaid tunnuseid $X_1, X_2, \ldots, X_m$. Tunnuste sisu ja hulga määrab konkreetne uurimiseesmärk. Nendeks tunnusteks võivad olla näiteks õppeedukus, vanus, sugu, suhtumine pedagoogitöösse jne. Kõik need tunnused võivad erinevate objektide puhul omandada erinevaid väärtusi (üldkogumis on erineva vanusega, erineva õppeedukusega jne. indiviide). Seega on iga tunnus X_i juhuslik suurus, uuritavate tunnuste kogum aga moodustab juhusliku vektori $(X_1, X_2, \ldots, X_m)$. Siinjuures käsitletakse juhusliku suuruse (vektori) mõistet üldisemalt, kui see tõenäosusteoorias tavaks on: tunnuse väärtused ei tavatse olla arvud, vaid nendeks võivad olla erinevad mõisted, olekud, objektid. Nii on näiteks tunnusel «sugu» kaks väärtust: «mees» ja «naine».

Selleks, et üldkogumit uuritavate tunnuste $X_1, X_2, \ldots, X_m$ seisukohalt iseloomustada, on meil tarvis teada juhusliku vektori $(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ jaotust, sealhulgas seda jaotust iseloomustavaid arvulisi karakteristikuid.

Selle jaotuse täpne teadasaamine on aga väga tülikas. Selleks tuleks uurida tunnuste $X_1, X_2, \ldots, X_m$ seisukohalt iga objekti üldkogumis, mis on väga tülikas ja aega ning töökulu nõudev, sageli aga hoopis teostamatu. Osutub aga, et seda polegi tarvis.

Keda uurida?

Harilikult ei ole võimalik uurida kõiki meid huvitavaid objekte ja seetõttu kasutatakse sotsioloogilistes uurimustes põhiliselt väljavõttelist meetodit, mille idee on järgmine.

Valime üldkogumist välja teatava hulga elemente — väljavõtte, ning uurime seda vajalike tunnuste seisukohalt. Elementide hulka väljavõttes nimetatakse väljavõtte mahuks ning tähistatakse tähega n. Nii saame uurimistulemusena tabeli, mis sisaldab $n \times m$ vaatlustulemust ja mida tähistame järgmiselt:

$$\begin{array}{l}
x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1i}, \ldots, x_{1m} \\
x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2i}, \ldots, x_{2m} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_{j1}, x_{j2}, \ldots, x_{ji}, \ldots, x_{jm} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{ni}, \ldots, x_{nm}
\end{array}$$

Selles tabelis võib esialgselt olla niihästi arve kui ka sõnu ning teisi sümboleid, mis kirjeldavad uurimisobjektide tunnuseid (näiteks: «hea», «rahuldav», «mitterahuldav» jne.). Siin tabeli j-s rida $x_{j1}, x_{j2}, \ldots, x_{jm}$ sisaldab väljavõtte j-nda indiviidi kohta saadud vaatlustulemusi tunnuste $X_1, X_2, \ldots, X_m$ osas.

Väljavõtte põhjal tehtud järeldusi kasutame selleks, et neid üldistada kogu uuritavale üldkogumile. Selleks peab tunnuste vektori $X_1, X_2, \ldots, X_m$ jaotus üldkogumil ja väljavõttel võimalikult hästi ühtima, ehk, nagu öeldakse, väljavõte peab olema representatiivne. Loomulikult ei saa väljavõtte representatiivsust vahetult kontrollida (selleks tuleks uuritavate tunnuste väärtused teha kindlaks kogu üldkogumi ulatuses ning igasuguse väljavõtte analüüsimine kaotaks mõtte). Küll aga on võimalik väljavõtete tegemiseks anda mõnesuguseid teoreetilisi juhtnööre, mille järgi talitades saadakse enamasti (s. t. suure tõenäosusega) piisavalt representatiivseid väljavõtteid.

Põhiliselt kasutatakse väljavõtete tegemiseks kaht moodust: juhu- ning kvoodmeetodit.

Juhumeetodi kasutamisel teostatakse väljavõte mingis mõttes juhuslikult nii, et igal üldkogumi indiviidil oleks võrdne tõenäosus sattuda väljavõttesse. Sellise väljavõtte saame näiteks juhuslike arvude generaatori või tabeli abil.

Olgu näiteks tarvis uurida 105 000 elanikuga linna kogu elanikkonda, kasutades 1000-indiviidilist väljavõtet. Seega peaks olema igal elanikul väljavõttesse sattumise tõenäosus $1000/105\,000 = 1/105$. Võtame kogu linna elanikkonna nimekirja ja nummerdame selle suvalises järjekorras. Seejärel valime juhuslike arvude tabelist järjest 6-kohalisi juhuslikke arve ning leiame väljavõtte, paigutades sellesse kõik indiviidid, kelle järjekorranumbrid saame järjest tabelist (jättes muidugi välja korduvad indiviidid ning need arvud, millele indiviide ei vasta — s. o. arvud vahemikust 105 001 — 999 999), seni, kuni neid on nõutav arv — antud juhul 1000.

Et ülalkirjeldatud protseduur on küllaltki tülikas, kasutatakse selle asemel sageli selle mõningaid modifikatsioone — süstemaatilist juhuväljavõtet, seeriaväljavõtet ja astmelist väljavõtet. Nende puhul on tarvis kasutada mingit tunnust X_0, mis on sõltumatu kõigist tunnustest $X_1, X_2, \ldots, X_m$. Süstemaatilise väljavõtte moodustab hulk, mis vastab tunnuse X_0 teatud väärtusele või väärtuste vahemikule (näiteks vaadeldakse indiviide, kes on sündinud ühel või mitmel valitud kuupäeval), samuti kasutatakse üldkogumi alajaotamist tunnuse X_0 väärtuste abil määratletud rühmadesse, kusjuures väljavõttesse valitakse kas mõned rühmad tervikuna (seeriaväljavõte) või teostatakse edasine valik rühmadest. Selliste meetodite kasutamine nõuab suuremat eelinformatsiooni üldkogumi kohta: tuleb teada, et uuritavad tunnused $X_1, X_2, \ldots, X_m$

on abitunnusest X_0 sõltumatud (selle kindlakstegemine on sageli küllaltki raske ülesanne), samuti on tarvis ligikaudugi teada tunnuse X_0 jaotust.

Kvoodmeetod on kasutatav siis, kui uuritav üldkogumi jaotus on mingite oluliste tunnuste $X_1, X_2, \ldots, X_k$ $(k < m)$ osas varem kas või ligikaudugi teada (sageli on olukord nii näiteks demograafiliste tunnuste — vanus, rahvus, sugu, haridus, elukoht — puhul). Kvoodmeetodi puhul valitakse väljavõte selliselt, et tunnuste $X_1, X_2, \ldots, X_k$ jaotus selles vastaks teadaolevale jaotusele, kusjuures antud jaotuse piires teostatakse valik vastavalt juhuväljavõtte printsiipidele. Nii näiteks, kui on teada uuritava elanikkonna soolis-vanuseline struktuur, teostatakse väljavõte selliselt, et kõik soo-vanuserühmad elanikkonnast oleksid väljavõttes esindatud võrdeliselt oma arvukusele.

Näeme, et küsimus «keda uurida» on väga tihedalt seotud küsimusega «mida uurida», ning neid kaht uurimise aspekti saame käsitleda vaid koos. Lahutamatult on nende küsimustega seotud veel ka kolmas, millel peatume järgnevalt.

Kuidas uurida?

Olgu meil teada uurimisobjekt ja kontrollimist vajav hüpotees. On ka selge, kuidas valime väljavõtte. Tekib aga küsimus, mil viisil peaksime valima tunnused $X_1, X_2, \ldots, X_m$, et meil oleks võimalik statistiliste meetoditega kontrollida oma tööhüpoteesi. Toome näite.

Huvitagu näiteks uurijat naiste abiellumisvanuse sõltuvus haridusest. Ilmselt on uurimist vajavateks tunnusteks haridus (X_1) ning vanus abiellumisel (X_2). Tuleb vaid kõigil väljavõttesse kuuluvatel naistel teha kindlaks need kaks tunnust ning statistiliste meetoditega uurida nende seost.

Mõnevõrra keerukam on probleem, kui soovitakse uurida näiteks tööliste suhtumist muudatustesse tehases sõltuvalt tööliste haridusest. Suhtumist töösse ei saa ju mõõta (nagu on võimalik mõõta vanust või haridust abiellumisel). Selleks tuleb detailselt uurida tööliste käitumist, vestelda nendega jne. Kõige sagedasemaks uurimismeetodiks on küsitlus, mille tulemused küsitleja jäädvustab ankeedina või millele lastakse uuritaval enesel kirjalikult vastata. Et küsitlus õnnestuks, tuleb uurijal sõnastada sobivad küsimused, nn. testküsimused, millele antud vastustest järeldubki tööliste suhtumine muudatustesse.

Üks näide testküsimustest ülaltoodud ülesande lahendamiseks.

1. Kas muudatusi tuleb teha nii, et palk pidevalt tõuseks, kusjuures töö raskus pole oluline?
2. Kas muudatusi tuleb teha otsekohe, kui kellelgi tuleb hea mõte, kuigi tööd saaks teha ka vanamoodi edasi?

3. Kas tahaksite tehast puudutavate ümberkorralduste tegemisest osa võtta?
4. Kes peaks muudatusi tegema?

Seega saime meid huvitava omaduse (suhtumise) määramiseks 4 erinevat tunnust X_1, X_2, X_3, X_4 (nendeks on küsimused 1, 2, 3, 4), millest igaühele on võimalik anda terve rida erinevaid vastuseid.

Küsimustele võib anda võimalikud vastusevariandid või lubada igal küsiteldaval vastus ise sõnastada. Esimene võimalus on materjali edasiseks töötlemiseks sobivam, kuid tulemus sõltub vastusevariantide sõnastuse edukusest. Üks võimalik näide (vastusevariandid sobivad küsimustele 1—3):

1 — jah, kindlasti; 2 — võiks küll; 3 — ükskõik; 4 — parem mitte; 5 — ei, kindlasti mitte. (I)

Kahtlemata pole see ainus võimalus. Lihtsama vastusevariantide kompleksi saaksime kujul:

1 — jah; 2 — ei; 3 — ükskõik. (II)

Poleks raske mõelda välja ka 6, 7 või koguni 10 erinevat vastusevarianti, s. t. tunnustel X_1, X_2 ja X_3 võiks olla 5, 3, 6, 7 või ka 10 erinevat väärtust. Meie küsimus ei ole aga sellega veel lahendatud. Jääb järgmine probleem.

Millise mõõdupuuga saadud vastuseid mõõta?

Mõõtmise tulemusena saame mõõdetava objekti mingit omadust väljendada arvudes. Et meie ülesandeks on tunnuseid X_1, X_2, X_3 ja X_4 m õ õ t a, siis tuleb meil vastusevariandid kuidagi arvudes väljendada.

Seda on alati võimalik teha kas või vastuseid nummerdades, nagu ülal tegimegi. Näite (I) korral tähendaks vastusevariant 5 «ei, kindlasti mitte», ning meil tarvitseks vaid kirjutada, et anketeeritav inimene andis vastuse «5».

Võrreldes ülalkirjeldatud tunnuseid X_1, X_2, X_3 näiteks tunnusega «vanus» näeme, et nende mõõtmine on oluliselt erinev. Vanust võib mõõta aastates, kuudes, päevades, tundides. Ülalkirjeldatud tunnuste X_1 — X_4 jaoks aga loomulikud, üldkasutatavad mõõtmisühikud puuduvad. Nende mõõtmiseks tuleb moodustada sobivad skaalad. Vaatlemegi järgnevas skaalade põhitüüpe.

1° Nominaalskaala. Uuritavad objektid jaotatakse mõõdetava tunnuse alusel klassidesse, kusjuures nende klasside vahel ei tarvitse mingit seost olla. Igale klassile seatakse vastavusse erinev arv — nn. kood, näiteks selle klassi järjekorranumber. Et aga klasside järjestus ei ole määratud, võime need ka teises järjekorras nummerdada: *nominaalskaalal on lubatud üksühesed teisendused.* Näiteks tunnus «sugu» on esitatav nominaalskaalal, tähistades

1 — mees, 2 — naine,

või ka

1 — naine, 2 — mees,

kuid samuti on võimalik

3 — mees, 7 — naine.

Niisuguseid tunnuseid nagu rahvus, perekonnaseis, elukoht, elukutse jne. mõõdetakse tavaliselt nominaalskaalal. Siinjuures võib ka skaalasid valida sisuliselt mitmeti. Näiteks:

1 — eestlane; 2 — venelane; 3 — ukrainlane; 4 — soomlane; 5 — valgevenelane; 6 — lätlane; 7 — leedulane (III)

või

1 — eestlane, soomlane; 2 — venelane, ukrainlane, valgevenelane; 3 — lätlane, leedulane. (IV)

Siin skaala (III) on peenem, võimaldab säilitada rohkem informatsiooni kui skaala (IV). Paneme tähele, et skaalalt (III) saab skaalale (IV) üle minna, vastupidine üleminek aga ei ole võimalik.

2° **Järjestatud skaala.** Olgu uuritavad objektid mõõdetava tunnuse alusel mingil viisil sisuliselt[1] järjestatud (üldiselt pole tegemist matemaatilises mõttes täieliku, vaid osalise järjestusega). Niisugune on olukord näiteks igasuguste hinnangute mõõtmisel. Vaadeldes skaalanäidet (I) paneme tähele, et see on tõepoolest järjestatud: hinnangud muutuvad järjest negatiivsemaks. Skaala (II) seevastu ei ole järjestatud, kuid me võime selle skaala teisendada järjestatuks:

1 — ei; 2 — ükskõik; 3 — jah (V)

Järjestatud skaala ei muutu sisuliselt, kui muudame koode nii, et järjestus säilib, s. t. *järjestatud skaalal on lubatud rangelt monotoonsed teisendused.* Näiteks võime skaala (V) teisendada kujule

5 — ei; 7 — ükskõik; 8 — jah, (VI)

mis on kujuga (V) samaväärne.

Järjestatud skaalat saab alati kasutada nominaalskaalana (kuid sellega kaasneb informatsiooni kadu), vastupidine aga ei ole võimalik.

3° **Intervallskaala (vahemikskaala).** Oletame, et uuritavate objektide vahelised kaugused antud tunnuse alusel on teada. Kuna vaadeldakse korraga ainult üht tunnust (väärtused paiknevad ühemõõtmelises ruumis, s. o. sirgel), siis on nende kauguste abil ka järjestus määratav. Seega võib intervallskaalat käsitleda ka järjestatud skaalana (kaotame vaid informatsiooni kauguste kohta).

Intervallskaalale sobib paigutada näiteks andmed hariduse kohta, mõõtes haridustaset lõpetatud õpinguaastate arvuga:

---

[1] Sellise sisulise järjestuse olemasolu tunnuste hulgas saab kindlaks teha sotsioloog või psühholoog, s. o. vastava eriala spetsialist. Matemaatilisi meetodeid tunnuste järjestatuse kontrollimiseks ei ole.

4 — algharidus; 8 — 8-klassiline haridus;
11 — keskharidus; 16 — kõrgem haridus. (VII)

Näeme, et kaugus kesk- ja kõrgema hariduse vahel on suurem kui kesk- ja 8-klassilise hariduse vahel jne.

Kuid ka skaala (VII) ei ole ainus võimalus ülaltoodud tunnuse esitamiseks. Me ei kaota mingit informatsiooni kauguste kohta, kui võtame kasutusele skaala (VIII):

1 — algharidus; 5— 8-klassiline haridus;
8 — keskharidus; 13 — kõrgem haridus. (VIII)

Üldiselt on *intervallskaala puhul lubatud skaala lineaarteisendused.* Intervallskaala puhul *ei ole fikseeritud üheselt määratud nullpunkti.* Selletõttu ei saa me ka öelda, et üks inimene on kaks korda haritum kui teine.

4° **Multiplikatiivne skaala.** Juhul kui uuritaval tunnusel on fikseeritud *üheselt määratud nullpunkt* ning on teada uuritavate *objektide kaugused sellest nullpunktist,* saame kasutada multiplikatiivset skaalat. Loomulikult on multiplikatiivse skaala puhul teada objektidevahelised kaugused (seega multiplikatiivset skaalat saame, leppides informatsioonikaoga, kasutada intervallskaalana, siit aga järeldub, et ka kõigi eelnevate skaaladena).

Multiplikatiivsel skaalal saab mõõta näiteks vanust. Loomulikuks nullpunktiks on sünnimoment ning me võime öelda, et üks inimene on kaks korda vanem kui teine.

Multiplikatiivse skaala puhul on lubatud skaala korrutamine mingi nullist erineva arvuga. Nii võime vanust väljendada aastates (vt. skaala (IX)), kuudes (vt. skaala (X)), kuid kasutatavad on ka suvalised mõõtühikud — koodid (skaala (XI)).

Ükskõik milliseid mõõtühikuid me ka ei kasutaks, ikka saame öelda, et üks inimene on teisest *a* korda vanem, kui koodide suhe on *a*. Näiteks: $2:1 = 24:12 = 4:2 = 2$ (tabelist (IX)—(XI)).

Vanus aastates	0	$^1/_2$	1	$1^1/_2$	2	$2^1/_2$	3	... (IX)
Vanus kuudes	0	6	12	18	24	30	36	... (X)
Kood	0	1	2	3	4	5	6	... (XI)

Et aga aeg muutub pidevalt, kuulub ajaskaalale tegelikult palju rohkem punkte, kui tabelis märgitud. Multiplikatiivset skaalat (samuti kui intervallskaalatki) saab enamasti (lõpmatuseni) tihendada. Praktiliselt aga ei ole sageli vajadust liiga tihedate skaalade järele ning selle asemel kasutatakse nn. klassifitseeritud skaalasid (vt. XII).

Vanusevahemik aastates [2]	Kuni 5	5—10	10—15	15—20	20—25	25—30	30—35	... (XII)
Keskmine vanus	2,5	7,5	12,5	17,5	22,5	27,5	32,5	... (XIII)
Kood	1	2	3	4	5	6	7	... (XIV)
Kood	1	3	5	7	9	11	13	... (XV)

Multiplikatiivsus säilib (sõltuvalt koodi valikust) kas klasside otspunktide jaoks (skaalad (XII) ja (XIV)) või klasside keskpunktide jaoks (skaalad (XIII) ja (XV)).

5° **Absoluutne skaala.** Kui uuritava tunnuse sisuks on mingi loendamistulemus, siis on selle väärtused sageli otstarbekas esitada vahetult loendamisel saadud naturaalarvudena, ilma igasuguste teisendamisteta. Sellist skaalat nimetatakse absoluutseks skaalaks ning selle puhul *ei ole ükski teisendus lubatud.*

Näiteks on absoluutset skaalat sobiv kasutada, kui tunnuseks on laste arv perekonnas.

Leppides suurema või väiksema informatsioonikaoga, võime absoluutset skaalat vaadelda ka kõigi eelnevate skaalade erijuhuna.

Märgime siin, et kaht esimest skaalatüüpi nimetatakse kvalitatiivseteks skaaladeks, kolme viimast — kvantitatiivseteks. (Sageli kvantitatiivseid skaalasid omavahel ei eristata, vaid vaadeldakse ühiselt intervallskaaladena.)

Kõik skaalatüübid ei ole kaugeltki samaväärsed, vaid erinevad üksteisest informatsioonisisalduse poolest, millest aga järeldub, et ka edaspidi võimaliku matemaatilise töötluse poolest. Seetõttu on uurijatele alati huvipakkuv tunnuse kirjeldamiseks valida võimalikult «kõrge», s. t. võimalikult informatiivne skaala. Skaalade teisendamine moodustabki olulise osa nn. mõõtmisteooria (skaleerimisteooria) sisust.

Nominaalskaalat saab sageli asendada järjestatud skaalaga. Näiteks elukohad võime järjestada:

suurlinn, keskmine linn, väikelinn, alev, maa-asula.

Samuti on sageli võimalik järjestada elukutsed (ühiskondliku prestiiži, nõutava haridustaseme, keskmise sissetuleku jne. alusel, enamasti nõuab see aga eelnevat uurimist).

Kahe väärtusega, nn. dihhotoomilist nominaaltunnust saab alati järjestatuna käsitleda. Vajaduse korral on võimalik

[2] Tavaliselt ei loeta vahemikku kuuluvaks ülemist otspunkti, seega on näiteks esimesse vahemikku kuuluvad vanimad lapsed need, kes saavad järgmisel päeval 5-aastaseks (kui vanust loetakse ühepäevase täpsusega).

aga üht nominaaltunnust jaotada dihhotoomiliste või ka rohkemate väärtustega järjestatud tunnuste hulgaks, mis on sageli otstarbekas edasisel töötlusel. Vaatleme järgmist elukutsete nominaal skaalat (see ei pretendeeri kaugeltki täiuslikkusele):

1 — tööstustööline
2 — brigadir
3 — insener
4 — tööstusettevõtte direktor
5 — kolhoosnik, sovhoositööline
6 — põllumajanduse brigadir, mehhanisaator
7 — agronoom, põllumajanduse insener
8 — kolhoosiesimees, sovhoosidirektor
9 — lihtametnik
10 — juhtiv ametnik
11 — õpetaja (XVI)
12 — koolidirektor
13 — arst
14 — meditsiiniõde
15 — sanitar
16 — kauplusemüüja
17 — kauplusejuhataja
18 — teadlane
19 — näitleja
20 — raamatukogujuhataja

Sellise skaala kohmakus on ilmne. Liiatigi on lihtne näha, et kaugeltki kõik võimalikud elukutsed ei ole sellesse paigutatud. Püüame sama skaala jaotada mitmeks, millest vähemalt osagi oleks järjestatud. Moodustame järgmised skaalad:

A 1 — loob valdavalt materiaalseid väärtusi
2 — „ „ vaimseid väärtusi (XVII)
B 1 — töötab põllumajanduses
2 — „ tööstuses
3 — „ teenindussfääris
4 — „ meditsiini alal (XVIII)
5 — „ hariduse alal
6 — „ kultuuri alal
7 — „ teaduse alal
C 1 — on juhtiv töötaja
2 — on keskastme töötaja (XIX)
3 — on lihttööline
D 1 — on kõrgelt kvalifitseeritud töötaja
2 — on keskmiselt „ „ (XIX)
3 — on madalalt kvalifitseeritud (kvalifitseerimata) töötaja

Näeme, et tunnused *A*, *C* ja *D* on järjestatud, järjestamata on üksnes *B*. Tõepoolest, mingit sisulist järjestust on loetletud elukutsete seas raske leida.

Esialgse skaala (XVI) kõiki jaotusi saame uute skaalade (XVIII)—(XX) abil kirjeldada, näiteks:

tööline: $A1$, $B2$, $C3$, $D3$;
brigadir: $A1$, $B2$, $C2$, $D2$;
insener: $A1$, $B2$, $C2$, $D1$;
direktor: $A1$, $B2$, $C1$, $D1$ või $D2$ jne.

Näeme, et meie skaalade süsteemis tekkisid «loomulikud kohad» ka teenindusettevõtte direktorile, teenindusinsenerile, peaarstile jne.

Teiseks huvipakkuvaks küsimuseks on nominaal- või järjestatud skaala teisendamine intervallskaalaks. Selleks kasutatakse mitmeid võimalusi, milledest suur osa rajaneb nn. ekspertide kasutamisel. Ekspertideks ei ole seda liiki ülesannete puhul tavaliselt mitte spetsialistid (kuigi vahel kasutatakse ka neid), vaid sageli on nendeks enam-vähem juhuslik osaväljavõte uuritavast üldkogumist või väljavõttest. Niisugune ekspertide valik garanteerib võimalikult lähedased vastusevariandid sellele, kuidas mõistsid neid vastajad — uuritavad isikud. Loomulikult ei ühti kõigi ekspertide arvamused (välja arvatud juhud, kui järjestus on väga ilmne, nagu skaala (I) puhul). Need variantide paarid, mille puhul eksperdid järjestuses on üksmeelsed, paiknevad üksteisest kaugemal kui need, mille puhul esineb nii üht- kui ka teistpidi arvamusi. Kaugused võib arvutada, võttes aluseks näiteks arvamuste jaotuse normaalsuse.

Sama meetodit ilma kaugusi arvutamata saab kasutada ka nominaalskaala teisendamiseks järjestatud skaalaks. Tuleb aga arvestada, et enamasti ei ole see hästi võimalik, vaid, nagu ülal nägime, tuleb nominaalskaala esitamiseks kasutada mitut järjestatud skaalat.

Kui nominaalskaalal on k erinevat väärtust, saab selle skaala alati esitada k dihhotoomilise skaala kaudu. Et dihhotoomilised skaalad on alati järjestatud, järeldub siit, et nominaalskaala on alati esitatav küllaldase arvu l järjestatavate skaalade kaudu ($1 \leqslant l \leqslant k$, kus k on nominaalskaala erinevate väärtuste arv). Tõepoolest, vaatleme näiteks tunnust B skaalal (XVIII). Selle võime esitada järgmiste dihhotoomiliste skaalade kompleksina:

B_1 1 — töötab põllumajanduses,
2 — ei tööta põllumajanduses;

. . . .

B_7 1 — töötab teaduse alal,
2 — ei tööta teaduse alal.

Niisuguse esitamise mõte seisneb selles, et järjestatud tunnustega saab edasisel töötlusel teostada mitmeid statistilisi operatsioone (teha korrelatsioon-, faktor- ja regressioonanalüüsi), mida nominaaljaotusega ei ole võimalik teha.

(*Järgneb*)

MÕNDA FUNKTSIONAALANALÜÜSIST III

G. Vainikko

Võrrandi lahendid ja operaatori püsipunktid

Matemaatika mitmesugustes distsipliinides puutume sageli kokku võrranditega, mille täpne lahendamine osutub üle jõu käivaks või koguni põhimõtteliselt võimatuks antud teooria raamides. Näiteks algebra kursusest on kõigile tuttavad ruutvõrrandi lahendusvalemid. Lahendusvalemid on tuletatud ka kolmanda ja neljanda astme võrrandite jaoks. Viienda astme võrrandi

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$$

jaoks aga analoogilised lahendusvalemid puuduvad; on teada, et üldise viienda astme võrrandi lahendid üldse ei avaldu radikaalides, s. t. lahendite leidmine ei taandu algebralistele tehetele kordajatest a, b, c, d, e, f.

Teise näite toome diferentsiaalvõrrandite teooria alalt. Võrrandit, mis seob otsitavat funktsiooni $x = x(t)$ selle tuletisega $x' = x'(t)$ ja sõltumatu muutujaga t, nimetatakse *diferentsiaalvõrrandiks* (täpsemalt, esimest järku harilikuks diferentsiaalvõrrandiks). Diferentsiaalvõrranditeks on näiteks järgmised võrrandid:

$x' = p(t)$,
$x' = p(t) + q(t)x$ (nn. lineaarne diferentsiaalvõrrand),
$x' = p(t) + q(t)x + r(t)x^2$ (nn. Riccati võrrand),
$x' = f(t, x)$

($p(t)$, $q(t)$, $r(t)$, $f(t, x)$ on mingid pidevad funktsioonid; esimesed kolm toodud võrranditest on erijuhud neljandast võrrandist). Võrrandi $x' = p(t)$ lahenditeks on

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} p(s)\,ds,$$

kus t_0 ja x_0 on muutujate t ja x suvalised fikseeritud väärtused. Ka lineaarse diferentsiaalvõrrandi jaoks on tuletatud lahendusvalem, Riccati võrrandi jaoks aga lahendusvalem puudub. On tõestatud, et Riccati võrrandi lahendid üldjuhul ei avaldu kvadratuurides, s. t. lahendite leidmine ei taandu integreerimistehtele teadaolevatest funktsioonidest (võrrandi kordajatest $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ või nende teatud kombinatsioonidest elementaarfunktsioonidega).

Kui puutume kokku võrrandiga, mille täpne lahendamine on võimatu, on äärmiselt tähtis teada, kas sellel võrrandil üldse on lahendeid ja kui palju neid on. Näiteks algebras tõestatakse, et igal n-astme võrrandil

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

on olemas vähemalt üks reaalne või kompleksne lahend (parajasti n lahendit, kui arvestada lahendite kordsusi — osa nendest n lahendist võivad langeda kokku). Diferentsiaalvõrrandite teoorias antakse piisavad tingimused selleks, et diferentsiaalvõrrandil

$$x' = f(t, x)$$

oleks vähemalt üks või parajasti üks lahend, mis rahuldab nn. algtingimust $x(t_0) = x_0$ (t_0 ja x_0 on muutujate t ja x suvalised fikseeritud väärtused; diferentsiaalvõrrandit koos algtingimusega nimetatakse Cauchy ülesandeks).

Võrrandite lahendi olemasolu ja ühesuse küsimus on ka funktsionaalanalüüsi üheks uurimisobjektiks. Tüüpiline olukord on siin järgmine. Olgu E näiteks meetriline ruum[1] (või Banachi ruum[1] või mõnda muud tüüpi ruum), $A : E \to E$ aga selles ruumis tegutsev operaator.[2] Uuritakse võrrandi $x = Ax$ lahendi olemasolu ja ühesust. Lahendi olemasolu ja ühesuse tingimused formuleeritakse sellise võrrandi jaoks tavaliselt püsipunkti printsiipidena. Operaatori $A : E \to E$ püsipunktiks nimetatakse sellist elementi $x^* \in E$, mille operaator A jätab paigale: $Ax^* = x^*$. Operaatori A püsipunktid on võrrandi $x = Ax$ lahenditeks ja vastupidi. Püsipunkti printsiipideks nimetatakse väiteid, mis annavad piisavad tingimused antud operaatori püsipunkti olemasoluks või olemasoluks ja ühesuseks. Seega võib iga püsipunkti printsiipi operaatori A jaoks vaadelda kui väidet võrrandi $x = Ax$ lahendi olemasolust või olemasolust ja ühesusest.

Funktsionaalanalüüsis tõestatavad püsipunkti printsiibid on rakendatavad paljude konkreetsete võrrandite lahendi olemasolu ja ühesuse uurimisel. Näiteks on püsipunkti printsiipide abil lihtne tõestada diferentsiaalvõrrandite teooria põhiteoreeme Cauchy ülesande lahendi olemasolu ja ühesuse kohta.

Allpool tutvume kahe põhilise püsipunkti printsiibiga — Banachi printsiibiga ja Schauderi printsiibiga.

---

[1] Vt. käesoleva artikli I osa, Matemaatika ja kaasaeg, XVI, lk. 3—19.
[2] Vt. käesoleva artikli II osa, Matemaatika ja kaasaeg, XVII, lk. 35—43.

Banachi printsiip

Olgu E täielik meetriline ruum ja $\varrho(x, y)$ elementide $x, y \in E$ vaheline kaugus. Operaatorit $A: E \to E$ nimetatakse ahendavaks, kui iga elementide paari $x, y \in E$ korral on täidetud võrratus

$$\varrho(Ax, Ay) \leqslant q\varrho(x, y), \tag{1}$$

milles kordaja q on mingi ühest väiksem reaalarv:

$$0 \leqslant q < 1 \tag{2}$$

(q ei sõltu elementidest $x, y \in E$). Ahendava operaatori A rakendamisel elementidele x, y «lähenevad» nende kujutised teineteisele, elemendid «surutakse» teineteisele lähemale. Seetõttu kasutatakse nimetuse «ahendav operaator» sünonüümidena sageli ka nimetusi «lähenemisoperaator» või «surumisoperaator».

Banachi printsiip. *Täielikus meetrilises ruumis E tegutseval ahendaval operaatoril $A: E \to E$ on olemas parajasti üks püsipunkt.*

Tõestus. Võtame suvalise elemendi $x_0 \in E$ ja moodustame jada $\{x_n\}$ elementidest $x_1 = Ax_0$, $x_2 = Ax_1$, $x_3 = Ax_2, \ldots, x_n = Ax_{n-1}, \ldots$. Näitame, et jada $\{x_n\}$ koondub ruumis E. Meetrilise ruumi E täielikkuse tõttu piisab selleks näidata, et $\{x_n\}$ on Cauchy jada [1], s. t. et

$$\varrho(x_m, x_n) \to 0, \text{ kui } m, n \to \infty.$$

Olgu $m < n$ (juhtumi $m > n$ käsitlus on analoogiline). Rakendades korduvalt kolmnurga aksioomi, leiame

$$\begin{aligned}\varrho(x_m, x_n) &\leqslant \varrho(x_m, x_{m+1}) + \varrho(x_{m+1}, x_n) \leqslant \\ &\leqslant \varrho(x_m, x_{m+1}) + \varrho(x_{m+1}, x_{m+2}) + \\ &+ \varrho(x_{m+2}, x_n) \leqslant \ldots\end{aligned}$$

Selliselt jätkates saame

$$\varrho(x_m, x_n) \leqslant \sum_{k=m}^{n-1} \varrho(x_k, x_{k+1}). \tag{3}$$

Hindame viimase summa liikmeid. Kuna $x_k = Ax_{k-1}$ ($k = 1, 2, \ldots$), siis võrratuse (1) põhjal

$$\begin{aligned}\varrho(x_k, x_{k+1}) &= \varrho(Ax_{k-1}, Ax_k) \leqslant q\varrho(x_{k-1}, x_k) = \\ &= q\varrho(Ax_{k-2}, Ax_{k-1}) \leqslant q^2\varrho(x_{k-2}, x_{k-1}) = \\ &= q^2\varrho(Ax_{k-3}, Ax_{k-2}) \leqslant q^3\varrho(x_{k-3}, x_{k-2}) = \ldots\end{aligned}$$

Selliselt jätkates leiame lõpuks, et

$$\varrho(x_k, x_{k+1}) \leqslant q^k\varrho(x_0, x_1).$$

See võrratus kehtib iga $k = 1, 2, \ldots$ korral.

Võrratusest (3) saame nüüd

$$\begin{aligned}\varrho(x_m, x_n) &\leqslant \sum_{k=m}^{n-1} \varrho(x_k, x_{k+1}) \leqslant \varrho(x_0, x_1) \sum_{k=m}^{n-1} q^k < \\ &< \varrho(x_0, x_1) \sum_{k=m}^{\infty} q^k = \varrho(x_0, x_1) \frac{q^m}{1-q}.\end{aligned}$$

Viimasel sammul me võtsime arvesse võrratuse (2) ja rakendasime kahaneva geomeetrilise progressiooni summa valemit. Võrratuse (2) tõttu

$$\varrho(x_m, x_n) \leqslant \frac{\varrho(x_0, x_1)}{1-q} q^m \to 0, \quad \text{kui} \quad m \to \infty \quad (m < n).$$

Seega $\{x_n\}$ on Cauchy jada ja koondub mingiks elemendiks $x^* \in E$:

$$\varrho(x_n, x^*) \to 0, \text{ kui } n \to \infty.$$

Võrratuse (1) tõttu

$$\varrho(Ax_n, Ax^*) \leqslant q\varrho(x_n, x^*) \to 0, \text{ kui } n \to \infty,$$

s. t. $Ax_n \to Ax^*$. Kuid me teame ka, et $Ax_n = x_{n+1} \to x^*$. Kuna aga koonduval jadal ei saa olla mitut piirelementi, siis $Ax^* = x^*$, s. t. x^* on operaatori A püsipunktiks.

Niisiis on operaatoril A püsipunkt olemas. Püsipunkti ainsuse näitamiseks oletame, et operaatoril A on olemas veel teine püsipunkt x^{**}:

$$Ax^{**} = x^{**}.$$

Siis võrratuse (1) põhjal

$$\varrho(x^*, x^{**}) = \varrho(Ax^*, Ax^{**}) \leqslant q\varrho(x^*, x^{**}),$$

millest järeldub võrratuse (2) ja kauguse mittenegatiivsuse tõttu, et

$$\varrho(x^*, x^{**}) = 0 \text{ ehk } x^* = x^{**}.$$

Järelikult on operaatoril A olemas ainult üks püsipunkt.

Banachi printsiip on sellega tõestatud.

Tõestus annab ühtlasi meetodi püsipunkti ligikaudseks arvutamiseks. Me näitasime, et suvalise alglähendi $x_0 \in E$ korral koondub lähendite jada

$$x_n = Ax_{n-1} \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{4}$$

operaatori A (ainsaks) püsipunktiks x^*. Lähendite jada leidmist valemi (4) abil nimetatakse iteratsioonimeetodiks.

Ülesanne 1. Näidata, et võrratusest (1) järeldub operaatori A pidevus.

Ülesanne 2. Näidata, et lähendite jada (4) jaoks kehtib veahinnang

$$\varrho(x_n, x^*) \leqslant \varrho(x_0, x^*) \frac{q^n}{1-q} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Siin $\varrho(x_0, x^*)$ on alglähendi x_0 viga.

Ülesanne 3. Olgu teada alglähendi vea hinnang $\varrho(x_0, x^*) \leqslant \varepsilon_0$. Olgu lähendi soovitav täpsus ε $(0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0)$. Kui suur tuleb võtta iteratsioonisammude arv $N = N(\varepsilon_0, \varepsilon)$, et oleks garanteeritud täpsus $\varrho(x_N, x^*) \leqslant \varepsilon$?

Ülesanne 4. Olgu E Banachi ruum, $A: E \to E$ aga operaator, mis igale elemendile $x \in E$ seab vastavusse elemendi

$$Ax = Bx + f,$$

kus f on ruumi E mingi fikseeritud element, $B: E \to E$ aga tõkestatud lineaarne[2] operaator, mille norm[2]

$$\|B\| < 1.$$

Näidata, et operaator A rahuldab siis Banachi printsiibi nõudeid.

Banachi printsiibi lihtsamaid rakendusi

Kõigepealt anname Banachi printsiibile uue formuleeringu ühe olulise erijuhu korral.

Teoreem 1. *Olgu E Banachi ruum,*

$$\overline{S}(x_0, r) = \{x \in E : \|x - x_0\| \leqslant r\}$$

mingi kinnine kera ruumis E. Teisendagu ruumis E tegutsev operaator A kera $\overline{S}(x_0, r)$ endasse:

$$kui\ \|x - x_0\| \leqslant r,\ siis\ \|Ax - x_0\| \leqslant r. \tag{5}$$

Olgu iga $x, y \in \overline{S}(x_0, r)$ korral täidetud võrratus

$$\|Ax - Ay\| \leqslant q\,\|x - y\|, \tag{6}$$

milles $q < 1$. Siis on operaatoril A olemas keras $\overline{S}(x_0, r)$ parajasti üks püsipunkt.

Tõestus. Kinnine kera $\overline{S}(x_0, r)$ on täielikuks meetriliseks ruumiks, kui defineerime elementide x, y vahelise kauguse valemiga $\varrho(x, y) = \|x - y\|$. Tõepoolest, meetrilise ruumi aksioomid $1^\circ - 3^\circ$ on täidetud.[1] Näitame, et $\overline{S}(x_0, r)$ on täielik. Olgu $x_n \in \overline{S}(x_0, r)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ Cauchy jada, s. t.

$$\varrho(x_m, x_n) \to 0, \text{ kui } m, n \to \infty.$$

Siis võrduse $\|x_m - x_n\| = \varrho(x_n, x_m)$ tõttu ka

$$\|x_m - x_n\| \to 0, \text{ kui } m, n \to \infty,$$

s. t. $\{x_n\}$ on Cauchy jadaks Banachi ruumis E. Banachi ruumi täielikkuse tõttu jada $\{x_n\}$ koondub ruumis E mingiks piirelemendiks $x \in E$:

$$\|x_n - x\| \to 0, \text{ kui } n \to \infty.$$

Kuna aga kera $\overline{S}(x_0, r)$ on kinnine hulk[1] ruumis E ja $x_n \in \overline{S}(x_0, r)$, siis on ka piirelement x kera $\overline{S}(x_0, r)$ elemendiks. Niisiis $x \in \overline{S}(x_0, r)$, ja

$$\varrho(x_n, x) \to 0, \quad \text{kui } n \to \infty.$$

Sellega oleme näidanud, et meetrilise ruumi $\overline{S}(x_0, r)$ elementidest moodustatud Cauchy jadad koonduvad selle ruumi elementideks, s. t. meetriline ruum $\overline{S}(x_0, r)$ on tõepoolest täielik.

Teoreemi eelduste (5) ja (6) kohaselt teisendab operaator A täieliku meetrilise ruumi $\overline{S}(x_0, r)$ iseendasse ja on ahendav sellel ruumil. Banachi printsiibi põhjal on operaatoril A olemas parajasti üks püsipunkt ruumis $\overline{S}(x_0, r)$.

Sellega on teoreem 1 tõestatud.

Ülesanne 5. Olgu $\|Ax_0 - x_0\| \leqslant (1 - q)r$ ja olgu iga $x, y \in \overline{S}(x_0, r)$ korral täidetud võrratus (6). Näidata, et operaator A teisendab siis kera $\overline{S}(x_0, r)$ endasse.

Vaatleme nüüd Banachi printsiibi lihtsamaid rakendusi. Uurime võrrandi

$$x = f(x) \tag{7}$$

lahendi olemasolu ja ühesuse küsimust. Olgu $f(x)$ mingil lõigul $[a, b]$ diferentseeruv funktsioon ja

$$|f'(x)| \leqslant q < 1, \text{ kui } x \in [a, b]. \tag{8}$$

Oletame veel, et

$$f(x) \in [a, b] \text{ iga } x \in [a, b] \text{ korral.} \tag{9}$$

Sellisel juhul võime väita, et võrrandil (7) on olemas lõigul $[a, b]$ parajasti üks lahend. Tõepoolest, võtame Banachi ruumiks E reaalarvude ruumi R_1, $\|x-y\| = |x-y|$. Lõik $[a, b]$ on siis kinniseks keraks $\overline{S}(x_0, r)$, mille keskpunktiks on $\frac{b+a}{2}$ ja raadiuseks $\frac{b-a}{2}$, funktsiooni $f(x)$ aga võime vaadelda operaatorina, mis eelduse (9) tõttu teisendab kera $\overline{S}(x_0, r)$ iseendasse. Lagrange'i keskväärtuslause põhjal on iga $x, y \in [a, b]$ korral

$$f(x) - f(y) = f'(z)(x-y),$$

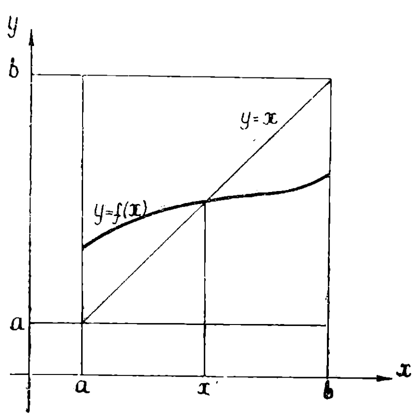
kus z on mingi väärtus x ja y vahel. Võrratuse (8) tõttu

$$|f(x) - f(y)| = |f'(z)|\,|x-y| \leqslant q\,|x-y|,$$

s.t. operaator f on lõigul $[a, b]$ ahendav (rahuldab keral $\overline{S}(x_0, r)$ võrratust (6)). Seega rahuldab operaator f kõiki teoreemi 1 eeldusi ning teoreemi 1 põhjal on tal olemas parajasti üks püsipunkt $x^* \in [a, b]$:

$$x^* = f(x^*),$$

m. o. t. t. Muide, tõestatud väide on geomeetriliselt üsna ilmne (vt. joon. 1): tingimuse (9) tõttu paikneb funktsiooni $y = f(x)$ graafik ruudus $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant y \leqslant b$ ja järelikult lõikab mingis punktis ruudu diagonaali $y = x$; võrratuse (8) tõttu on kõvera $y = f(x)$ puutuja tõus iga $x \in [a, b]$ korral ühest väiksem, seetõttu ei saa kõverad $y = f(x)$ ja $y = x$ lõikuda enam kui ühes punktis.



Joonis 1.

Uurime nüüd võrrandisüsteemi

$$\xi_1 = f(\xi_1, \xi_2),$$
$$\xi_2 = g(\xi_1, \xi_2) \tag{10}$$

lahendi olemasolu ja ühesuse küsimust. Olgu $f(\xi_1, \xi_2)$ ja $g(\xi_1, \xi_2)$ ringis $\xi_1^2 + \xi_2^2 \leqslant r^2$ määratud funktsioonid. Mainitud ring on keraks $\overline{S}(0, r)$ Banachi ruumis[1] R_2; kera keskpunktiks on $0 = (0, 0)$. Defineerime ruumis R_2 tegutseva operaatori A, mis igale elemendile $x = (\xi_1, \xi_2) \in \overline{S}(0, r)$ seab vastavusse elemendi $(f(\xi_1, \xi_2), g(\xi_1, \xi_2))$. Tingimus $x = Ax$ tähendab siis, et $x = (\xi_1, \xi_2)$ rahuldab võrrandisüsteemi (10). Seega võrrandisüsteemi (10) lahendid ühtivad operaatori A püsipunktidega. Meie eesmärgiks on rakendada püsipunkti olemasolu ja ühesuse näitamiseks teoreemi 1. Selleks peame asetama funktsioonidele $f(\xi_1, \xi_2)$ ja $g(\xi_1, \xi_2)$ selliseid tingimusi, et operaator A rahuldaks teoreemi 1 nõudeid. Kõigepealt, selleks et operaator A teisendaks kera $\overline{S}(0, r)$ iseendasse, peame nõudma järgmist:

$$f^2(\xi_1, \xi_2) + g^2(\xi_1, \xi_2) \leqslant r^2, \text{ kui } \xi_1^2 + \xi_2^2 \leqslant r^2. \tag{11}$$

Selleks, et operaator A rahuldaks ka tingimust (6), peame nõudma järgmist:

$$\{[f(\xi_1, \xi_2) - f(\eta_1, \eta_2)]^2 + [g(\xi_1, \xi_2) - g(\eta_1, \eta_2)]^2\}^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant q\{(\xi_1 - \eta_1)^2 + (\xi_2 - \eta_2)^2\}^{1/2}, \text{ kui } \xi_1^2 + \xi_2^2 \leqslant r^2, \ \eta_1^2 + \eta_2^2 \leqslant r^2. \tag{12}$$

Kui funktsioonid $f(\xi_1, \xi_2)$ ja $g(\xi_1, \xi_2)$ rahuldavad tingimusi (11) ja (12), siis operaator A rahuldab teoreemi 1 nõudeid ja tal on olemas parajasti üks püsipunkt

$$x^* = (\xi_1^*, \xi_2^*) \in \overline{S}(0, r)$$

ning see püsipunkt on võrrandisüsteemi (10) ainsaks lahendiks.

Kasutades Lagrange'i keskväärtusteoreemi, on võimalik anda mitmesuguseid lihtsamaid piisavaid tingimusi, mis garanteerivad tingimuse (12) täidetuse.

Vaadeldud näited on üsna elementaarsed ega võimalda küllalt hästi illustreerida püsipunkti printsiipide kasulikkust. Sisukaid rakendusi on püsipunkti printsiipidel integraal- ja diferentsiaalvõrrandite teoorias. Formuleerime mõningad siia puutuvad tulemused ülesannete kujul ja anname vajalikke näpunäiteid nende ülesannete lahendamiseks.

Integraalvõrrandi

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,ds \tag{13}$$

lahendiks nimetatakse funktsiooni $x = x^*(t)$, mis on pidev mingil lõigul $|t - t_0| \leqslant h$ ja muudab sellel lõigul võrrandi (13) samasuseks:

$$x^*(t) \equiv x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x^*(s))\,ds \text{ lõigul } |t - t_0| \leqslant h.$$

Ü l e s a n n e 6. Olgu funktsioon $f(t, x)$ pidev ristkülikus

$$|t - t_0| \leqslant a, \ |x - x_0| \leqslant r, \tag{14}$$

kus a ja r on mingid konstandid. Rahuldagu $f(t, x)$ ristküliku (14) iga punktipaari (t, x_1), (t, x_2) korral võrratust (nn. Lipschitzi tingimust)

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leqslant N|x_1 - x_2|, \tag{15}$$

kus N on mingi konstant. Näidata, et integraalvõrrandil (13) on olemas parajasti üks lahend $x = x^*(t)$, mis on määratud mingil küllalt väikesel lõigul $|t - t_0| \leqslant h$.

N ä p u n ä i d e. Funktsiooni $f(t, x)$ pidevusest ristkülikus (14) järeldub tema tõkestatus mainitud ristkülikus:

$$|f(t, x)| \leqslant M, \tag{16}$$

kus M on mingi konstant. Võtame arvuks h vähima suurustest a, r/M, q/N, kus $0 < q < 1$. Defineerime ruumis[1] $C[t_0 - h, t_0 + h]$ tegutseva operaatori A, mis seab funktsioonile $x = x(t)$ vastavusse funktsiooni

$$Ax = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds. \tag{17}$$

Operaatori A püsipunktid on integraalvõrrandi (13) lahenditeks ja vastupidi. Seetõttu piisab näidata (võrratusi (15) ja (16) kasutades), et operaator A rahuldab keral $\overline{S}(x_0, r)$ teoreemi 1 tingimusi. (Kera keskpunktiks on konstantne funktsioon $x \equiv x_0$.)

Cauchy ülesande

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \tag{18}$$

lahendiks nimetatakse funktsiooni $x = x^*(t)$, mis on diferentseeruv mingil lõigul $|t - t_0| \leqslant h$, rahuldab sellel lõigul diferentsiaalvõrrandit ja algtingimust:

$$x^{*\prime}(t) \equiv f(t, x^*(t)) \text{ lõigul } |t - t_0| \leqslant h, \quad x^*(t_0) = x_0.$$

Ü l e s a n n e 7. Rahuldagu funktsioon $f(t, x)$ samu tingimusi mis ülesandes 6. Näidata, et Cauchy ülesandel (18) on olemas parajasti üks lahend $x = x^*(t)$, mis on määratud mingil küllalt väikesel lõigul $|t - t_0| \leqslant h$.

N ä p u n ä i d e. Veenduda, et Cauchy ülesanne (18) on samaväärne integraalvõrrandiga (13), ja rakendada ülesande 6 väidet.

Schauderi printsiip

Toome sisse kõigepealt mõned uued mõisted ja meenutame mõningaid vanu. Olgu E Banachi ruum.

Hulka $\Omega \subset E$ nimetatakse k u m e r a k s, kui iga $x, y \in \Omega$ ja $\lambda \in [0, 1]$ korral ka $\lambda x + (1 - \lambda) y \in \Omega$. Näiteks iga kera $\overline{S}(x_0, r)$ on kumer. Tõepoolest, $x, y \in \overline{S}(x_0, r)$ tähendab, et

$$\|x - x_0\| \leqslant r, \quad \|y - x_0\| \leqslant r,$$

siis aga $\lambda \in [0, 1]$ korral

$$\begin{aligned} \|[\lambda x + (1 - \lambda) y] - x_0\| &= \|\lambda (x - x_0) + (1 - \lambda)(y - x_0)\| \leqslant \\ &\leqslant \lambda \|x - x_0\| + (1 - \lambda) \|y - x_0\| \leqslant \lambda r + (1 - \lambda) r = r, \end{aligned}$$

s. t. ka $\lambda x + (1 - \lambda) y \in \overline{S}(x_0, r)$, m. o. t. t.

Hulka $\Omega \subset E$ nimetatakse k i n n i s e k s[1], kui iga koonduva jada $x_n \in \Omega$ $(n = 1, 2, \ldots)$ piirväärtus kuulub hulka Ω. Näiteks iga kinnine kera $\overline{S}(x_0, r)$ on kinnine hulk.[1]

Hulka $\Omega \subset E$ nimetatakse t õ k e s t a t u k s, kui leidub selline (küllalt suure raadiusega) kera $\overline{S}(x_0, r)$ ruumis E, et $\Omega \subset \overline{S}(x_0, r)$. Muuhulgas, iga kera $\overline{S}(x_0, r)$ on tõkestatud.

Hulka $\Omega \subset E$ nimetatakse kompaktseks, kui igast jadast $x_n \in \Omega$ $(n = 1, 2, \ldots)$ saab eraldada koonduva osajada. Näiteks ruumis R_1 on kompaktseks hulgaks iga selle ruumi tõkestatud hulk. Tõepoolest, olgu hulk $\Omega_1 \subset R_1$ tõkestatud ja $x_n \in \Omega_1$ $(n = 1, 2, \ldots)$, s. t. $\{x_n\}$ on tõkestatud arvjada. Bolzano-Weierstrassi teoreemi põhjal aga saab igast tõkestatud arvjadast eraldada koonduva osajada, mis tähendabki, et Ω_1 on kompaktne hulk.

Ülesanne 8. Näidata, et ka ruumis R_n on iga tõkestatud hulk kompaktne.

Ülesanne 9. Näidata, et (mistahes) Banachi ruumis E on kompaktsed hulgad tõkestatud.

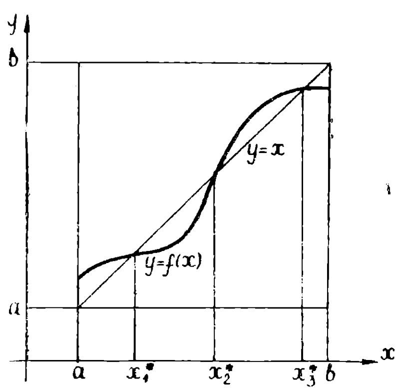
Ruumis $C[a, b]$ ei pruugi tõkestatud hulk olla kompaktne. On võimalik näidata (Arzelà teoreem), et tõkestatud hulk $\Omega \subset C[a, b]$ on kompaktne parajasti siis, kui funktsioonid $x = x(t)$ hulgast Ω on võrdpidevad lõigul $[a, b]$, s. t. iga $\varepsilon > 0$ leidub selline $\delta > 0$, et võrratus $|t_1 - t_2| < \delta$ toob kaasa võrratuse $|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon$ iga $x \in \Omega$ korral.

Formuleerime nüüd Schauderi printsiibi; selle tõestust me ei esita (tõestus on komplitseeritud).

Schauderi printsiip. *Teisendagu Banachi ruumis E tegutsev pidev operaator $A: E \to E$ kinnise tõkestatud kumera hulga $\Omega \subset E$ kompaktseks osahulgaks $A\Omega \subset \Omega$. Siis on operaatoril A hulgas Ω vähemalt üks püsipunkt.*

Kuna kinnine kera $\overline{S}(x_0, r)$ on kinnine tõkestatud kumer hulk, siis järeldub Schauderi püsipunkti printsiibist muuhulgas järgmine tulemus:

Teoreem 2. *Teisendagu Banachi ruumis E tegutsev pidev operaator A kera $\overline{S}(x_0, r)$ kompaktseks osahulgaks $A\overline{S}(x_0, r) \subset \overline{S}(x_0, r)$. Siis on operaatoril A keras $\overline{S}(x_0, r)$ vähemalt üks püsipunkt.*



Joonis 2.

Kuna ruumis R_n tõkestatud ja kompaktsete hulkade mõisted ühtivad, siis järeldub Schauderi püsipunkti printsiibist ka järgmine tulemus:

Teoreem 3 (Bohl-Brouweri teoreem). *Kui ruumis R_n tegutsev operaator A teisendab kinnise tõkestatud kumera hulga $\Omega \subset R_n$ iseendasse, siis on operaatoril A hulgas Ω vähemalt üks püsipunkt.*

Märgime, et $n = 1$ korral on teoreemi 3 väide üsna ilmne. Tõepoolest, kinnisteks tõkestatud kumerateks hulkadeks ruumis

R_1 on lõigud. Kui funktsioon (operaator) $y = f(x)$ teisendab lõigu $[a, b]$ iseendasse, siis tema graafik paikneb ruudus $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant y \leqslant b$ ja peab tingimata lõikama ruudu diagonaali $y = x$ (vt. joon. 2), s. t. funktsioonil f on lõigul $[a, b]$ olemas vähemalt üks püsipunkt. Sealjuures võib püsipunkte olla üldiselt mitu (joonisel 2 on neid kolm).

Juba $n = 2$ korral pole teoreemi 3 väide sugugi ilmne. See võib tunduda koguni uskumatuna: teoreemi põhjal me ei saa näiteks ringi $\xi_1^2 + \xi_2^2 \leqslant r^2$ punkte $x = (\xi_1, \xi_2)$ selliselt ümber paigutada, et lähedased punktid läheksid üle lähedasteks (operaatori pidevus) ja et sealjuures ükski punkt ei jääks paigast nihutamata.

Teoreemi 3 tõestas 1904. a. Riia matemaatik, Tartu ülikooli kasvandik P. Bohl; 1910. a. jõudis sama tulemuseni L. Brouwer. J. Schauder tugines oma püsipunkti printsiibi tõestustes (1927—1930) Bohl-Brouweri teoreemile.

Ü l e s a n n e 10. Olgu $f(\xi_1, \xi_2)$ ja $g(\xi_1, \xi_2)$ ringis $\xi_1^2 + \xi_2^2 \leqslant r^2$ pidevad funktsioonid, mis rahuldavad tingimust (11). Näidata, et võrrandisüsteemil (10) on siis olemas vähemalt üks lahend.

Ü l e s a n n e 11. Olgu funktsioon $f(t, x)$ pidev ristkülikus (14). Näidata, et integraalvõrrandil (13) on olemas vähemalt üks lahend $x = x^*(t)$.

N ä p u n ä i d e. Kasutada Arzelà teoreemi ja teoreemi 2.

Ü l e s a n n e 12. Olgu funktsioon $f(t, x)$ pidev ristkülikus (14). Näidata, et Cauchy ülesandel (18) on olemas vähemalt üks lahend $x = x^*(t)$.

(Lõpp)

VANA ÜLESANNE UUES VORMIS

Klassikalisteks ja üldtuntuiks võib vist lugeda selliseid ülesandeid, kus nõutakse näiteks kirjutada mistahes etteantud naturaalarv, kasutades selleks vaid kolme numbrit 2 ning tavalisi tehtemärke, funktsioonisümboleid jms.[1] F. C h e n e y esitas seda tüüpi ülesannete uue variandi: kirjutada mingi etteantud naturaalarv, kasutades selleks vaid arvu π (tavalises tähenduses), sulge, aritmeetiliste tehete märke ja ruutjuure ning täisosa võtmise sümboleid (igaühte kuitahes palju kordi). Et arvu 1 saab esitada kujul $[\sqrt{\pi}]$, siis neid avaldisi liites saab muidugi iga naturaalarvu nõutud kujul esitada. Seame aga nüüd eesmärgiks esitada antud naturaalarv äsjakirjeldatud kujuga avaldisena nii, et π esineks seal minimaalne arv kordi. Sissejuhatuseks püüdke seda eesmärki saavutada esimese kahekümne naturaalarvu puhul!

---

[1] Näiteks

$$5 = \log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}}$$

DIOFANTILISTE VÕRRANDISÜSTEEMIDE LAHENDAMINE

R. Kulmet

Diofantilised võrrandisüsteemid on täisarvuliste kordajatega algebraliste võrrandite süsteemid, millele otsitakse täisarvuliste komponentidega lahendeid.[1] Triviaalsete juhtude kõrvalejätmiseks võib eeldada, et tundmatute arv diofantilises võrrandisüsteemis ületab võrrandite arvu (s. t. tegemist on nn. määramata võrrandisüsteemiga). Erijuhul, kui võrrandite arv on üks, räägitakse diofantilisest võrrandist. Nimetus «diofantiline võrrand» tuleneb kreeka matemaatiku Diophantose (3. saj. m. a. j.) nimest, kes ühena esimestest vaatles võrrandite ratsionaaallahendite leidmist.

Lihtsaimaks diofantiliseks võrrandiks võib lugeda võrrandit

$$ax + by = 1,$$

kus a ja b on ühistegurita täisarvud. Sellel võrrandil on lõpmata palju täisarvulisi lahendeid, nimelt avaldub tema üldlahend kujul

$$x = x_0 + bt, \quad y = y_0 - at,$$

kus t on suvaline täisarv ja (x_0, y_0) mistahes erilahend.

Järgnevas vaatleme lineaarset diofantilist võrrandisüsteemi kujul

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned} \tag{1}$$

kus $m < n$. Eeldame veel, et süsteemi kõik kordajad a_{ij} ja vabaliikmed b_i on täisarvud ning et iga $1 \leqslant i \leqslant m$ korral b_i jagub $a_{i1}, \ldots, a_{in}$ suurima ühisteguriga (kui mingi i korral b_i ei jagu kordajate $a_{i1}, \ldots, a_{in}$ suurima ühisteguriga, siis ei ole süsteemil täisarvulist lahendit, sest iga täisarvude süsteemi $x_1, \ldots, x_n$ korral jagub selle võrrandi vasak pool kordajate suurima ühisteguriga, parem pool aga mitte). Jagades võrrandid vastavate suurimate ühisteguritega võime seega süsteemi alati teisendada kujule, kus $a_{i1}, \ldots, a_{in}$ on ühistegurita.

---

[1] Mõnikord mõeldakse diofantilise võrrandisüsteemi lahendamise all ka ratsionaalarvuliste komponentidega lahendite leidmist.

Lineaarsete diofantiliste võrrandisüsteemide kõigi täisarvuliste lahendite leidmine osutub oluliseks probleemiks matemaatika mitmetes valdkondades, muuhulgas näiteks nn. täisarvuliste planeerimisülesannete lahendamisel. Seetõttu ongi nende leidmiseks antud üsna mitmeid algoritme.[2] Käesolevas artiklis kirjeldame üht niisugust lahendusalgoritmi maatrikskujul. Algoritmi tuletamise idee põhineb meetodil, mida on kasutatud ühe diofantilise võrrandi lahendamisel A. K. Suškevitši arvuteooria õpikus[3].

Kirjutame välja süsteemi (1) laiendatud maatriksi, paigutades vabaliikmed esimesse veergu:

$$\begin{pmatrix} b_1 & a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1l} & & a_{1n} \\ b_2 & a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2l} & & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ b_m & a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{ml} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{2}$$

Et eesmärgiks on saada süsteemi (1) täisarvulist üldlahendit, siis püüame teisendada maatriksi (2) elementaarteisendustega niisugusele kujule, kus igas reas vähemalt ühe tundmatu kordajaks osutub arv 1 ja vastav veerg on ühikveerg, s. t. ülejäänud elemendid selles veerus võrduvad nulliga.

Kui esialgses süsteemis mõne tundmatu kordajaks mingis võrrandis on juba arv 1, siis valime selle elemendi juhtelemendiks ning teisendame vastava veeru ühikveeruks. Seda lihtsat juhtu kõrvale jättes oletame, et maatriksi (2) esimese rea elementide $a_{11}, \ldots, a_{1n}$ hulgas pole arvu 1. Valime nüüd nende seast absoluutväärtuselt minimaalse, arvestamata elemente 0. Olgu selleks a_{1l}, s. t.

$$|a_{1l}| = \min_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ a_{1j} \neq 0}} |a_{1j}|$$

(veerg l jääb edaspidi juhtveeruks). Tuues sisse abitundmatu u_1, moodustame uue võrrandi

$$a_{m+1,\,1}x_1 + a_{m+1,\,2}x_2 + \ldots + x_l + \ldots + a_{m+1,\,n}x_n - u_1 = b_{m+1},$$

kus kordajad $a_{m+1,j}$ $(j = 1, \ldots, n)$ arvutame eeskirjast[4]

$$a_{m+1,j} = \left[\frac{a_{1j}}{a_{1l}} \right] \tag{3}$$

ning analoogiliselt leiame ka vabaliikme:

$$b_{m+1} = \left[\frac{b_1}{a_{1l}} \right]. \tag{4}$$

---

[2] Vt. näit. M. S. Cheema. Integral solutions of a system of linear equations. The American Mathematical Monthly, 1966, vol. 73, No. 5, 487—490. Б. А. Зейналов. Критерий разрешимости произвольной системы линейных уравнений в целых числах. Уч. зап. Дагестанского гос. ун-та, 1959, № 5, 159—165

[3] А. К. Сушкевич. Теория чисел, Харьков, 1956, 52—53.

[4] Edaspidi $[a]$ tähistab arvu a täisosa ja $\{a\}$ murdosa; seega $a = [a] + \{a\}$, kusjuures $0 \leqslant \{a\} < 1$.

Et oleme saanud täisarvuliste kordajatega ja vabaliikmega võrrandi ning meid huvitavad ainult süsteemi täisarvulised lahendid, siis võib ka abitundmatu u_1 omandada ainult täisarvulisi väärtusi. Uue võrrandi juurdetoomine ei muuda esialgse süsteemi lahendite hulka. Tõepoolest, kui $(x_1, \ldots, x_n)$ on süsteemi (1) mistahes täisarvuline lahend, siis leidub täisarv u_1, nii et laiendatud süsteemi lahendiks osutub $(x_1, \ldots, x_n, u_1)$; kui aga $(x_1, \ldots, x_n, u_1)$ on laiendatud süsteemi lahend, siis $(x_1, \ldots, x_n)$ rahuldab esialgset süsteemi.

Laiendame nüüd maatriksit (2), kirjutades uue võrrandi kordajad ja vabaliikme viimaseks reaks ning täiendades eelmisi ridu uuele tundmatule u_1 vastavas veerus nullidega. Maatriks (2) omandab sellega kuju

$$\begin{pmatrix} b_1 & a_{11} & a_{12} & a_{1l} & a_{1n} & 0 \\ b_2 & a_{21} & a_{22} & a_{2l} & a_{2n} & 0 \\ . & . \quad . & . \quad . & . \quad . & . \quad . \quad . & . \\ b_m & a_{m1} & a_{m2} & a_{ml} & a_{mn} & 0 \\ b_{m+1} & a_{m+1,1} & a_{m+1,2} & 1 & a_{m+1,n} & -1 \end{pmatrix}$$

Valime juhtreaks selle uue juurdekirjutatud rea (juhtelemendiks seega elemendi $a_{m+1,l} = 1$) ja teisendame juhtveeru ühikveeruks, liites üldiselt i-ndale $(i = 1, 2, \ldots, m)$ reale $(-a_{il})$-kordse juhtrea. Et iga $j \neq l$ korral

$$|a'_{1j}| = |a_{1j} - a_{1l}a_{m+1,j}| = \left| a_{1j} - a_{1l}\left[\frac{a_{1j}}{a_{1l}}\right]\right| =$$

$$= \left| a_{1j} - a_{1l}\left(\frac{a_{1j}}{a_{1l}} - \left\{\frac{a_{1j}}{a_{1l}}\right\}\right)\right| = \left| a_{1l}\left\{\frac{a_{1j}}{a_{1l}}\right\}\right| < |a_{1l}|,$$

siis selle elementaarteisenduse tulemusena muutuvad maatriksi esimese rea elemendid absoluutväärtuse poolest väiksemaks kui $|a_{1l}|$ (välja arvatud vabaliige ja uuele tundmatule vastavas veerus paiknev element — viimase uueks väärtuseks tuleb a_{1l}).

Kui me kirjeldatud teisendusega ei saanud maatriksi esimesse ritta veel elementi $+1$ või -1, siis moodustame jälle uue võrrandi ja toome sisse täisarvulise abitundmatu u_2. Selleks leiame teisendatud maatriksi esimese rea elementide seast (vabaliige ja nullid välja arvatud) absoluutväärtuselt minimaalse, arvutame kordajad $a_{m+2,j}$ $(j = 1, \ldots, n+1)$ ja vabaliikme b_{m+2} analoogiliselt nagu $a_{m+1,j}$ ja b_{m+1} valemitest (3) ja (4) ning teisendame juhtveeru ühikveeruks.

Kordame seda protsessi, kuni esineb üks järgmisest kolmest võimalusest:

1) elementaarteisenduste tulemusena saame esimesse ritta kõik nullid, välja arvatud äsja juurdetoodud tundmatule vastavas veerus paiknev element; sel juhul võime esimese rea ja uuele

tundmatule vastava veeru jätta edasisest vaatlusest välja, sest see tundmatu võrdub samaselt nulliga;

2) võrrand tuleb vastuoluline, s. t. osutub, et vabaliige ei jagu tundmatute kordajate suurima ühisteguriga; sel juhul puudub süsteemil täisarvuline lahend;

3) oleme saanud esimesse ritta mingi tundmatu kordajaks 1 või -1.

Kui ei esine juhtu 1 ega 2, siis mingil sammul esineb kindlasti juht 3, sest igal sammul on esimese rea absoluutväärtuselt minimaalne nullist erinev element väiksem kui eelmisel sammul. Ühtlasi märgime, et kui ühikveeruks teisendatud veerg vastab mingile abitundmatule, siis jätame pärast elementaarteisendusi ära selle veeru ja vastava rea, kus paikneb ühikelement, sest meil pole vaja avaldada abitundmatut teiste tundmatute kaudu.

Eeldame, et leiab aset juht 3, s. t. et oleme saanud esimesse ritta mingi tundmatu kordajaks 1 või -1 (viimasel juhul korrutame rida (-1)-ga). Tähistame saadud maatriksi elemente a'_{ij}. Oletame, et selleks oleme pidanud lõppkokkuvõttes juurde tooma s_1 abitundmatut ja seega ka s_1 võrrandit, arvestamata neid tundmatuid, millele vastavad read ja veerud on pärast elementaarteisenduste teostamist vaatlusest välja jäetud. Juhtreaks valime nüüd esimese rea, juhtelemendiks saadud elemendi $a'_{1k} = 1$ ja teisendame k-nda veeru ühikveeruks, liites i-ndale $(i = 2, \ldots, m + s_1)$ reale $(-a'_{ik})$-kordse esimese rea. Juhul kui k-s veerg vastab mingile abitundmatule, võime pärast teisendust muidugi esimese rea ja k-nda veeru maatriksist kõrvaldada.

Edasi lähtume juba teisendatud maatriksi teisest reast. Kui eelnevate teisenduste käigus oleme saanud seal mõne elemendi väärtuseks ± 1, siis teisendame vastava veeru ühikveeruks. Vastasel korral valime selles reas absoluutväärtuselt minimaalse elemendi (arvestamata nulliga võrduvaid elemente ja vabaliiget), moodustame uue võrrandi, tuues sisse uue abitundmatu, teostame maatriksiga vastavad elementaarteisendused jne. Protsessi jätkame, kuni kõigis ridades on olemas ühikelement ja vastav veerg on teisendatud ühikveeruks. See osutub võimalikuks alati, kui meil on tegemist süsteemiga, millel eksisteerib täisarvuline lahend.

Lõppkokkuvõttes oleme saanud ülimalt $(r + s) \times (n + 1 + s)$-maatriksi, milles on $r + s$ ühikveergu, kusjuures $s = s_1 + s_2 + \ldots$ $\ldots + s_m \leqslant n - r$, s_i on i-nda võrrandi puhul juurdetoodud abitundmatute arv (arvestamata on jäetud need tundmatud, mida on kasutatud ainult maatriksteisenduste teostamiseks ja mis on hiljem ära jäetud) ja r on esialgse süsteemi laiendatud maatriksi (2) astak. Juhul kui mõnele põhitundmatule vastavat veergu pole õnnestunud teisendada ühikveeruks, kuid igas reas on ometi ühikelement olemas, võib need tundmatud samastada abitundmatutega ja omistada neile mistahes täisarvulisi väärtusi.

Lõpptulemuseks saadud maatriksist, millel on näiteks kuju

$$\begin{array}{c} \qquad x_1 \quad x_2 \ \ldots \ x_k \ \ldots \ x_n \quad u_1 \qquad\qquad \ldots \ u_s \\ \left(\begin{array}{cccccccccc} b''_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & a''_{1,n+1} & \ldots & a''_{1,n+s} \\ b''_2 & 0 & 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 & a''_{2,n+1} & \ldots & a''_{2,n+s} \\ \ldots & & & & & & & & & \ldots \\ b''_l & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 & a''_{l,n+1} & \ldots & a''_{l,n+s} \\ \ldots & & & & & & & & & \ldots \\ b''_{m+s} & 0 & 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & a''_{m+s,\, n+1} & \ldots & a''_{m+s,\, n+s} \end{array}\right) \end{array}$$

võime kohe välja kirjutada võrrandisüsteemi (1) üldlahendi:

$$\begin{aligned} x_1 &= b''_1 - a''_{1,n+1}u_1 - a''_{1,n+2}u_2 - \ldots - a''_{1,n+s}u_s, \\ x_2 &= b''_{m+s} - a''_{m+s,\, n+1}u_1 - a''_{m+s,\, n+2}u_2 - \ldots - a''_{m+s,\, n+s}u_s, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_k &= b''_2 - a''_{2,n+1}u_1 - a''_{2,n+2}u_2 - \ldots - a''_{2,n+s}u_s, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= b''_l - a''_{l,n+1}u_1 - a''_{l,n+2}u_2 - \ldots - a''_{l,n+s}u_s. \end{aligned}$$

Et maatriksi elementide täisarvulisus on teisenduste käigus säilinud, siis andes abitundmatutele $u_1, \ldots, u_s$ mistahes täisarvulised väärtused, saame ikka lähtesüsteemi rahuldava täisarvulise lahendi $(x_1, \ldots, x_n)$. Juhul kui ühelgi sammul ei esine juht 2, oleme sellega ühtlasi tõestanud lineaarse diofantilise võrrandisüsteemi täisarvulise lahendi olemasolu.

Selleks, et kiiremini jõuda olukorrani, kus vaadeldavas võrrandis on mingi tundmatu kordajaks arv 1, võib uute võrrandite kordajate ja vabaliikmete arvutamiseks võtta kasutusele järgmised eeskirjad (eeldusel, et a_{ij} ja b_i tähistavad maatriksi elemente uue võrrandi juurdetoomise momendiks ning a_{il} on vastava rea absoluutväärtuselt minimaalne nullist erinev element):

$$a_{m+k,j} = \begin{cases} \left[\dfrac{a_{ij}}{a_{il}}\right], & \text{kui } \left\{\dfrac{a_{ij}}{a_{il}}\right\} \leqslant \dfrac{1}{2}, \\ \left[\dfrac{a_{ij}}{a_{il}}\right] + 1, & \text{kui } \left\{\dfrac{a_{ij}}{a_{il}}\right\} > \dfrac{1}{2}, \end{cases} \tag{5}$$

$$b_{m+k} = \begin{cases} \left[\dfrac{b_i}{a_{il}}\right], & \text{kui } \left\{\dfrac{b_i}{a_{il}}\right\} \leqslant \dfrac{1}{2}, \\ \left[\dfrac{b_i}{a_{il}}\right] + 1, & \text{kui } \left\{\dfrac{b_i}{a_{il}}\right\} > \dfrac{1}{2}, \end{cases} \tag{6}$$

kus $k = 1, \ldots, s$; $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n + k - 1$.

Tõepoolest, kui $\{a_{ij}/a_{il}\} \leqslant 1/2$, siis

$$\left| a_{ij} - a_{il}\left[\frac{a_{ij}}{a_{il}}\right]\right| = |a_{il}|\left|\frac{a_{ij}}{a_{il}} - \left[\frac{a_{ij}}{a_{il}}\right]\right| = |a_{il}|\left\{\frac{a_{ij}}{a_{il}}\right\} \leqslant \frac{1}{2}|a_{il}|,$$

kui aga $\{a_{ij}/a_{il}\} > 1/2$, siis

$$\left| a_{ij} - a_{il}\left(\left[\frac{a_{ij}}{a_{il}}\right] + 1\right)\right| = |a_{il}|\left|\left\{\frac{a_{ij}}{a_{il}}\right\} - 1\right| < \frac{1}{2}|a_{il}|.$$

Seega nendes veergudes, kus valemi (5) kohaselt tuleb võtta $a_{m+k,j} = [a_{ij}/a_{il}] + 1$, saame pärast elementaarteisendusi i-ndasse ritta absoluutväärtuselt väiksemad elemendid kui valemi (3) kasutamise korral. Valemite niisuguse täpsustamisega saame vähendada nende abitundmatute arvu, mis on vajalikud üksnes sobivateks elementaarteisendusteks. Abitundmatute arvu vähendamine lühendab muidugi ka lahenduskäiku.

Näide 1. Leiame võrrandisüsteemi

$$25x - 13y + 7z = 4,$$
$$x + 7y + 3z = 4$$

kõik täisarvulised lahendid. Et antud juhul vabaliige jagub vasaku poole kordajate suurima ühisteguriga, siis hakkame teisendama süsteemi laiendatud maatriksit

$$\begin{pmatrix} 4 & 25 & -13 & 7 \\ 4 & \boxed{1} & 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

Maatriksi teises reas on juba arv 1 — valime selle juhtelemendiks (maatriksis kastiga ümbritsetud) ja teisendame tundmatule x vastava veeru ühikveeruks:

$$\begin{pmatrix} -96 & 0 & -188 & -68^* \\ 4 & 1 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

Esimese rea elementide hulgas on nüüd absoluutväärtuselt minimaalne $a_{13} = -68$ (maatriksis tärniga märgitud). Toome sisse abitundmatu u_1 ning arvutame uue võrrandi kordajad ja vabaliikme eeskirjadest (5) — (6):

$$b_3 = \left[\frac{-96}{-68}\right] = 1, \qquad \text{sest} \quad \frac{28}{68} < \frac{1}{2};$$

$$a_{31} = 0;$$

$$a_{32} = \left[\frac{-188}{-68}\right] + 1 = 3, \qquad \text{sest} \quad \frac{52}{68} > \frac{1}{2};$$

$$a_{33} = 1.$$

Uus võrrand on seega: $3y + z - u_1 = 1$. Täiendades maatriksit selle uue võrrandiga, saame

$$\begin{pmatrix} -96 & 0 & -188 & -68 & 0 \\ 4 & 1 & 7 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \boxed{1} & -1 \end{pmatrix}.$$

Edasi toimime analoogiliselt, koondades arvutustulemused tabelisse 1. Kolme sammu järel jõuame maatriksini, milles abitundmatule u_1 vastab ühikveerg. Seetõttu võime ära jätta 5. rea ja 5. veeru. Juhu 1 esinemise tõttu võime ära jätta ka 1. rea ja 7. veeru. Peale neid lihtsustusi saame tabelis 1 viimasena kirjutatud maatriksi, mille põhjal võime välja kirjutada võrrandisüsteemi üldlahendi:

$$x = -8 + 22u,$$
$$y = -6 + 17u,$$
$$z = 18 - 47u,$$

kus u_2 asemele on kirjutatud u.

Tabel 1

Vabaliige	x	y	z	u_1	u_2	u_3
—28	0	16*	0	—68	0	
1	1	—2	0	3	0	
1	0	3	1	—1	0	
—2	0	$\boxed{1}$	0	—4	—1	
4	0	0	0	—4*	16	0
—3	1	0	0	—5	—2	0
7	0	0	1	11	3	0
—2	0	1	0	—4	—1	0
—1	0	0	0	$\boxed{1}$	—4	—1
0	0	0	0	0	0	—4
—8	1	0	0	0	—22	—5
18	0	0	1	0	47	11
—6	0	1	0	0	—17	—4
—1	0	0	0	1	—4	—1
—8	1	0	0		—22	
18	0	0	1		47	
—6	0	1	0		—17	

Näide 2. Diofantilise võrrandisüsteemi

$$2x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 + 6x_5 = 7,$$
$$7x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 9x_4 + 12x_5 = 20,$$
$$6x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 7x_4 + 4x_5 = 4$$

lahenduskäik on koondatud tabelisse 2. Jättes selle tabeli viimases maatriksis ära 3. rea ja abitundmatule u_2 vastava veeru näeme, et x_4-le vastavat veergu ei saa teisendada ühikveeruks ja seega võime x_4 samastada abitundmatuga (tähistades teda u_1-ga). Kui veel u_3 asemel kirjutada u_2, siis süsteemi üldlahendiks saame

$$x_1 = 129 - 60u_1 - 314u_2,$$
$$x_2 = 140 - 63u_1 - 340u_2,$$
$$x_3 = 137 - 61u_1 - 334u_2,$$
$$x_4 = u_1,$$
$$x_5 = -86 + 40u_1 + 213u_2.$$

Tabel 2

Vaba-liige	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	u_1	u_2	u_3
7	2*	—3	5	—4	6	0		
20	7	4	—3	9	12	0		
4	6	—5	2	7	4	0		
3	$\boxed{1}$	—2	2	—2	3	—1		
1	0	$\boxed{1}$	1	0	0	2		
—1	0	18	—17	23	—9	7		
—14	0	7	—10	19	—14	6		
3	1	—2	2	—2	3	—1		
1	0	1	1	0	0	2	0	
—19	0	0	—35	23	—9*	—29	0	
—21	0	0	—17	19	—14	—8	0	
5	1	0	4	—2	3	3	0	
2	0	0	4	—3	$\boxed{1}$	3	—1	
1	0	1	1	0	0	2	0	
—1	0	0	$\boxed{1}$	—4	0	—2	—9	
7	0	0	39	—23	0	34	—14	
—1	1	0	—8	7	0	—6	3	
2	0	0	4	—3	1	3	—1	
2	0	1	0	4	0	4	9	0
—1	0	0	1	—4	0	—2	—9	0
46	0	0	0	133	0	112*	337	0
—9	1	0	0	—25	0	—22	—69	0
6	0	0	0	13	1	11	35	0
0	0	0	0	1	0	$\boxed{1}$	3	—1
2	0	1	0	0	0	0	—3	4
—1	0	0	1	—2	0	0	—3	—2
46	0	0	0	21	0	0	$\boxed{1}$	112
—9	1	0	0	—3	0	0	—3	—22
6	0	0	0	2	1	0	2	11
0	0	0	0	1	0	1	3	—1

(siinkohal võib ära jätta 7. veeru ja 6. rea)

140	0	1	0	63	0		0	340
137	0	0	1	61	0		0	334
46	0	0	0	21	0		1	112
129	1	0	0	60	0		0	314
—86	0	0	0	—40	1		0	—213

GRAAFID JA LAUSEÕPETUS II

M. Koit

Graafiteooria rakenduste raamides oleme tutvunud kahe viisiga lause süntaktilise struktuuri kirjeldamiseks — need on moodustajate puu ja sõltuvuste puu.[1] Teatavasti on kummalgi meetodil omad eelised ja puudused. Näiteks sõltuvuste puu võimaldab väljendada mitte üksnes süntaktiliste seoste olemasolu sõnade vahel, vaid ka nende orientatsiooni. Paraku ei ole aga sõltuvuste puu kasutamine loomulik siis, kui süntaktiliste seoste orientatsioon ei ole obligatoorne, eriti sel juhul, kui omavahel on seotud mitte üksikud sõnad, vaid sõnarühmad (näiteks «ei ole tulnud», «näib kohal olevat», «otsekui kinni naelutatud» jne.). Selliste juhtude kirjeldamiseks sobivad enam moodustajate puud. Et erinevad süntaktiliste seoste tüübid esinevad kõrvuti isegi samas lauses, siis on otstarbekas luua niisugune lause süntaktilise struktuuri kirjeldamise süsteem, mis ühendaks mõlema juba käsitletud viisi head küljed. Vaatleme siin üht sellist süsteemi, mille on välja töötanud A. Gladki.[2]

Olgu X lõplik mittetühi lineaarselt järjestatud hulk, mille elemente nimetame p u n k t i d e k s. Hulka X võime tõlgendada lausena, punkte aga lausesse kuuluvate sõnadena.

Defineerime v a h e m i k u (a, b):

$$(a, b) = \{x : a < x < b\}$$

ja l õ i g u $[a, b]$:

$$[a, b] = \{x : a \leqslant x \leqslant b\}, \quad a, b, x \in X.$$

Vahemik on lõik parajasti siis, kui ta on mittetühi; lõik on vahemik parajasti siis, kui ta ei sisalda hulga X suurimat ja vähimat elementi (mida tähistame vastavalt $\sup X$ ja $\inf X$). Näiteks kui hulk X koosneb elementidest a, b, c ja d, kus $a < b < c < d$, siis lõik $[b, c]$ ühtib vahemikuga (a, d).

---

[1] Vt. M. K o i t. Graafid ja lauseõpetus. — Matemaatika ja kaasaeg, XV, lk. 27—34.

[2] А. В. Г л а д к и й. Об описании синтаксической структуры предложения. Институт математики СОАН СССР, 1968.

Iga mittetühja hulga $E \subseteq X$ saab ühesel viisil esitada kujul

$$E = \bigcup_{i=1}^{m} [a_i, b_i],$$

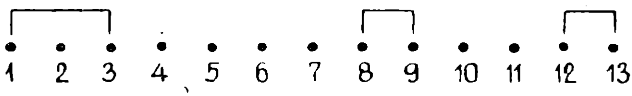
kus $m \geqslant 1$ ja iga $i = 1, 2, \ldots, m-1$ korral[3] $(b_i, a_{i+1}) \neq \varnothing$.

N ä i d e 1. Vaatleme hulka (lauset)

$X =$	*Ta*	*kavatses*	*jätta*	*eile*	*ostetud*	*huvitavana*	*tunduva*
	1	2	3	4	5	6	7
	ajakirja	*lugemise*	*lähemaks*	*tööst*	*vabaks*	*õhtupoolikuks.*	
	8	9	10	11	12	13	

Olgu $E = \{1, 2, 3, 8, 9, 12, 13\}$ (elementide tähisteks on nende järjekorranumbrid). Selle hulga võib esitada kujul (vt. joonis 1):

$$E = \{1, 2, 3\} \cup \{8, 9\} \cup \{12, 13\} = [1, 3] \cup [8, 9] \cup [12, 13].$$



Joonis 1.

Lõigud $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots, [a_m, b_m]$ on hulga E nn. k o m p o n e n d i d. Kui $\inf X \notin E$ või $\sup X \notin E$, siis nimetame hulga E komponente t s ü k l i l i s t e k s k o m p o n e n t i d e k s. Kui aga $a_1 = \inf X$ ja $b_m = \sup X$, siis nimetame hulga E tsüklilisteks komponentideks hulki $[a_2, b_2], \ldots, [a_{m-1}, b_{m-1}]$ ja $[a_m, b_m] \cup [a_1, b_1]$.

N ä i d e 2. Näites 1 vaadeldud hulga E komponentideks on lõigud $[1, 3]$, $[8, 9]$ ja $[12, 13]$, tsüklilisteks komponentideks aga hulgad $[8, 9]$ ja $[1, 3] \cup [12, 13]$.

Olgu $E_1, E_2 \subseteq X$. Hulk E_1 sisaldub hulga $X \setminus E_2$ mingis tsüklilises komponendis parajasti siis, kui E_2 sisaldub hulga $X \setminus E_1$ mingis tsüklilises komponendis. Kui $E_1 \cap E_2 = \varnothing$ ja E_1 ei sisaldu hulga $X \setminus E_2$ üheski tsüklilises komponendis, siis ütleme, et hulgad E_1 ja E_2 a h e l d u v a d (või teisiti: hulk E_2 aheldab hulka E_1).

N ä i d e 3. Olgu X ja E näites 1 vaadeldud hulgad, $E_1 = \{10, 11\}$. Siis $X \setminus E_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 13\} = [1, 9] \cup [12, 13]$. Hulk $X \setminus E_1$ ühtib oma ainsa tsüklilise komponendiga, $E \subset X \setminus E_1$, järelikult hulgad E ja E_1 ei aheldu.

N ä i d e 4. Olgu $E_2 = \{6, 7\} \cup E_1$ (X, E_1 ja E on eelmises näites vaadeldud hulgad). Siis $X \setminus E_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 12, 13\} = [1, 5] \cup [8, 9] \cup [12, 13]$. Hulga $X \setminus E_2$ tsüklilised komponendid on $[8, 9]$ ja $[1, 5] \cup [12, 13]$. Hulk E ei sisaldu tervikuna hulga $X \setminus E_2$ kummaski tsüklilises komponendis. Järelikult hulk E_2 aheldab hulka E.

---

[3] Sümboliga $\varnothing$ tähistame tühja hulka.

Võib leida lihtsa seaduspärasuse hulkade aheldumise väljaselgitamiseks. Ütleme, et punktipaarid $\langle a, b\rangle$ ja $\langle c, d\rangle$ eraldavad teineteist, kui punktid a, b, c ja d on kõik erinevad ning üks punktidest c ja d asub, kuid teine ei asu punktide a ja b vahel (näiteks punktipaarid $\langle 1, 8\rangle$ ja $\langle 6, 10\rangle$; vt. joonis 1). Hulgad $E_1, E_2 \subseteq X$ $(E_1 \neq \varnothing,\ E_2 \neq \varnothing,\ E_1 \cap E_2 = \varnothing)$ ahelduvad parajasti siis, kui leiduvad punktid $a, b \in E_1$ ja $c, d \in E_2$ nii, et paarid $\langle a, b\rangle$ ja $\langle c, d\rangle$ eraldavad teineteist. Ühepunktilised hulgad ei aheldu kunagi.

Näide 5. Näites 4 vaadeldud hulgast E võime valida punktid 1 ja 8, hulgast E_2 punktid 6 ja 10. Valitud punktipaarid eraldavad teineteist, järelikult hulgad E ja E_2 ahelduvad.

Olgu nüüd antud hulga X mittetühjade alamhulkade mingi hulk $\mathfrak{C}$ ja sellel hulgal defineeritud binaarne suhe $\rightarrow$. Paar $\langle \mathfrak{C}, \rightarrow\rangle$ moodustab graafi.

Näide 6. Olgu

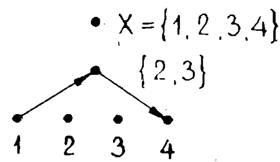
$X =$ *Ta peaks tulema otsekohe,*

1 2 3 4

$$\mathfrak{C} = \{X, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{2, 3\}\}.$$

Suhte $\rightarrow$ defineerime järgmiselt:

$$\{1\} \rightarrow \{2, 3\},\ \{2, 3\} \rightarrow \{4\}.$$



Joonis 2.

Vastav graaf on kujutatud joonisel 2.

Nimetame kaareks hulkade $E, F \in \mathfrak{C}$ paari $\langle E, F\rangle$, mille korral $E \rightarrow F$, ja teeks hulkade $E_1, E_2, \ldots, E_k \in \mathfrak{C}$ $(k > 1)$ jada, milles iga paar $\langle E_i, E_{i+1}\rangle$ $(i = 1, 2, \ldots, k-1)$ on kaar. Kui $E_1, E_2, \ldots, E_k$ on tee, siis kirjutame $E_1 \Rightarrow E_k$.

Kui $E_1, E_2 \in \mathfrak{C}$, kus $E_1 \subset E_2$, ja ei leidu niisugust hulka $E \in \mathfrak{C}$, et kehtiks $E_1 \subset E \subset E_2$, siis ütleme, et E_1 on vahetult sisestatud hulka E_2.

Näide 7. Eelmises näites on hulk $\{2\}$ vahetult sisestatud hulka $\{2, 3\}$, kuid mitte hulka X. Küll aga on hulk $\{2, 3\}$ vahetult sisestatud hulka X.

Graafi $\langle \mathfrak{C}, \rightarrow\rangle$ nimetame süntaktiliste rühmade süsteemiks (srs) ja tema tippe (hulga $\mathfrak{C}$ elemente) süntaktilisteks rühmadeks (sr) hulgal X, kui kehtivad järgmised aksioomid:

1°. $\mathfrak{C}$ sisaldab hulka X ja kõiki tema ühepunktilisi alamhulki.

2° Kui $E_1, E_2 \in \mathfrak{C}$, siis kas $E_1 \cap E_2 = \varnothing$ või $E_1 \subseteq E_2$ või $E_2 \subseteq E_1$.

3° Kui $E_1, E_2 \in \mathfrak{C}$ ja $E_1 \cap E_2 = \varnothing$, siis E_1 ja E_2 ei aheldu (s. t. ei leidu punktipaare $\langle a_1, b_1\rangle$ ja $\langle a_2, b_2\rangle$, $a_1, b_1 \in E_1$, $a_2, b_2 \in E_2$, mis eraldaksid teineteist).

4° Kui $E_1 \rightarrow E_2$, siis E_1 ja E_2 on vahetult sisestatud ühte ja samasse sr-sse.

5° Ühegi $E \in \mathfrak{E}$ korral ei kehti $E \Rightarrow E$ (s. t. graaf $\langle \mathfrak{E}, \rightarrow \rangle$ ‹ sisalda kontuure).

6° Kui $E_1 \rightarrow E$ ja $E_2 \rightarrow E$, siis $E_1 = E_2$ (graafi igasse tippu sis‹ neb üksainus kaar).

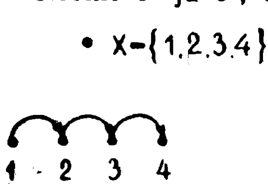
7° Kui E, E_1 ja E_2 on paarikaupa mittelõikuvad sr-d ning $E_1 \rightarrow E_2$, siis hulgad E ja $E_1 \cup E_2$ ei aheldu.

8° Kui E_1, E_2, E_3 ja E_4 on paarikaupa mittelõikuvad sr-d nin $E_1 \rightarrow E_2$ ja $E_3 \rightarrow E_4$, siis hulgad $E_1 \cup E_2$ ja $E_3 \cup E_4$ ei aheldu.

Aksioomid 5° ja 6° tähendavad, et graafi $\langle \mathfrak{E}, \rightarrow \rangle$ iga sidus kom ponent on puu. Aksioomi 4° põhjal on kõik sr-d, mis kuuluvad üht niisugusesse alampuusse (kui see puu ei koosne ühestainsas sr-st X), vahetult sisestatud ühte ja samasse sr-sse. 1° ja 2° o tavalised moodustajate süsteemi aksioomid. Aksioome 3°, 7°, 8 võib tõlgendada kui teatavaid projektiivsuse tingimusi.

Veendume, et näites 6 esitatud lause graaf (joonis 2) on sr: Aksioomid 1°, 2°, 3°, 5° ja 6° on ilmselt rahuldatud. Alamhulga $\{1\}$ ja $\{2, 3\}$, kus $\{1\} \rightarrow \{2, 3\}$, ning $\{2, 3\}$ ja $\{4\}$, kus $\{2, 3\} \rightarrow \{4\}$, on vahetult sisestatud hulka (lausesse) X, mistõttu kehti aksioom 4°. Ka aksioom 7° on rahuldatud: hulkadeks E, E_1 ja E võib võtta vastavalt kas hulgad $\{1\}$, $\{2, 3\}$ ja $\{4\}$ või $\{4\}$, $\{1$ ja $\{2, 3\}$. Esimesel juhul ei aheldu hulgad $\{1\}$ ja $\{2, 3, 4\}$, teis‹ juhul aga hulgad $\{1, 2, 3\}$ ja $\{4\}$. Aksioom 8° kehtib triviaalsel

Lause moodustajate süsteemid ja projektiivsed sõltuvuste sü: teemid kujutavad endast srs-de «kõdunud» erijuhte. Nimelt või lause mittekatkestatud moodustajate süsteemi — s. t. hulg (lause) X alamhulkade (nn. moodustajate) hulka, mille korra 1) kehtivad aksioomid 1° ja 2° ning 2) iga moodustaja on hulg X lõik — vaadelda srs-na, kus sr-deks on kõik moodustajad j suhe $\rightarrow$ on tühi (s. t. mitte ühegi sr-de paari E_1 ja E_2 korral ‹ kehti $E_1 \rightarrow E_2$). Srs aksioomide 4° kuni 8° kehtivuse kontroll ‹ tule siis kõne alla, aksioom 3° on rahuldatud tingimuse 2) täid‹ tuse tõttu. Iga projektiivne sõltuvuste süsteem on samuti srs, mi koosneb (kui graaf) kahest sidusast komponendist: üks neist o lause tavaline sõltuvuste puu, mille tippudeks on hulga (lause X ühepunktilised alamhulgad, teine alamgraaf sisaldab üheains tipu, mis vastab hulgale X. Srs aksioomid 1°, 2°, 3° ja 4° on sii rahuldatud, sest süsteem ei sisalda muid alamhulki peale hulga enda ja tema ühepunktiliste alamhulkade; sõltuvuste puu rahulda aksioome 5° ja 6°; aksioom 7° kehtib sellepärast, et alamhulk on alati ühepunktiline; aksioom 8° kehti sõltuvuste puu projektiivsuse tõttu (mis tahes tipust algav tee on hulga X lõik)



Joonis 3.

Niisiis võib ühel ja samal lausel oll enam kui üks srs.

N ä i d e 8. Näites 6 antud lause moodustajateks on järgmised hulgad

X, $\{2, 3, 4\}$, $\{2, 3\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$. Sõltuvuste süsteemiga määratud graaf aga on kujutatud joonisel 3.

Kuna mingi keele lausete struktuuri kirjeldamisel tuleb arvestada nii süntaktiliselt terviklike sõnarühmade olemasolu (mida kajastab lause moodustajate puu, mitte aga sõltuvuste puu) kui ka orienteeritud süntaktilisi seoseid (mis kajastuvad lause sõltuvuste puus, mitte aga moodustajate puus), siis ongi otstarbekohane rakendada äsja vaadeldud meetodit.

Eesti keeles tekib selline vajadus muuhulgas järgmistel juhtudel.

1) Laused, mis sisaldavad verbi liitvorme või verbi «tuleb» ja da-infinitiivi ühendit.

(1) $X =$ *Ta on juba siia jõudnud.*

1 2 3 4 5

$$\{2, 5\} = A;$$
$$\{1\} \rightarrow A,\ A \rightarrow \{3\},\ A \rightarrow \{4\}.$$

Selles ja kõigis järgnevates näidetes märgime eraldi ainult need sr-d, mis ei ühti hulgaga X (lause endaga) või tema üheelemendiliste alamhulkadega. Ühtlasi näitame suhte $\rightarrow$. Allakriipsutatud sõnad moodustavad süntaktilise terviku.

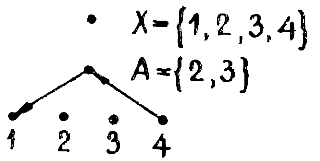
(2) $X =$ *Ajakirja tuleks lugeda sinulgi.*

1 2 3 4

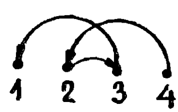
$$\{2, 3\} = A;$$
$$A \rightarrow \{1\},\ \{4\} \rightarrow A.$$

Vastav graaf on kujutatud joonisel 4.

Lause (2) sõltuvuste puu osutub mitteprojektiivseks (joonis 5). Tähendame, et see sõltuvuste süsteem ei määra srs-i (aksioom 5' ei kehti). Srs-de oluline omadus ongi see, et nad võimaldavad vähendada mitteprojektiivsuse juhte.



Joonis. 4.



Joonis 5.

2) Laused, mis sisaldavad verbi koos abimäärsõnaga või nimisõna koos kaassõnaga.

(3) $X =$ *Liiguti läbi pimeda metsa.*

1 2 3 4

$$\{2, 4\} = A;$$
$$A \rightarrow \{3\},\ \{1\} \rightarrow A.$$

(4) *X = Lugesin raamatu läbi.*

1 2 3

$\{1, 3\} = A;$

$A \to \{2\}.$

3) Eitusega laused.

(5) *Sa ju ei kardagi.*

1 2 3 4

$\{2, 3, 4\} = A, \quad \{3, 4\} = B;$

$\{1\} \to A, \quad B \to \{2\}, \quad \{4\} \to \{3\}.$

4) Korduvate liikmetega laused.

(6) *Arvesta ennast ja teda.*

1 2 3 4

$\{2, 3, 4\} = A;$

$\{1\} \to A.$

(7) *Sa ei tee seda ega teist.*

1 2 3 4 5 6

$\{2, 3\} = A, \quad \{4, 5, 6\} = B;$

$\{1\} \to A, \quad A \to B, \quad \{3\} \to \{2\}.$

5) Liitlaused.

(8) *Külaline, kes eile saabus, on juba läinud.*

1 2 3 4 5 6 7

$\{2, 3, 4\} = A, \quad \{5, 7\} = B;$

$\{1\} \to A, \quad \{1\} \to B, \quad B \to \{6\}, \quad \{2\} \to \{4\}, \quad \{4\} \to \{3\}.$

(9) *Kui me ootasime, siis ta tuligi.*

1 2 3 4 5 6

$\{2, 3\} = A, \quad \{5, 6\} = B, \quad \{1, 4\} = C;$

$\{2\} \to \{3\}, \quad \{5\} \to \{6\}.$

EULERI HÜPOTEES ON ÜMBER LÜKATUD

Teatavasti arvas Leonard Euler, et võrrandil

$$x_1^n + x_2^n + \ldots + x_k^n = y^n$$

on naturaalarvulisi lahendeid ainult $k \geqslant n$ korral.[1] 1966. aastal aga leidsid L. J. Lander ja T. R. Parkin elektronarvuti abil selle diofantilise võrrandi lahendi $k = 4$ ja $n = 5$ korral:

$$27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5 = 144^5.$$

Seega ei kehti Euleri hüpotees vähemalt $n = 5$ puhul.

---

[1] Vt. J. G a b o v i t š. Euleri probleem. — Matemaatika ja kaasaeg, VIII, lk. 77—81.

VÕRKGRAAFIKUD

Ü. Kaasik, M. Preem

V õ r k p l a n e e r i m i n e ehk PERT[1] kujutab endast komplekssete tööde (projektide) planeerimisel ning juhtimisel kasutatavate meetodite kogu. Selle nimetuse alla kuuluvaid meetodeid ühendavaks põhimõisteks on v õ r k g r a a f i k, mida kasutatakse nii projektide eneste kui ka nende uurimise käigu näitlikustamiseks.

Projekti kujutamine võrkgraafikuna tähendab niisuguse suunatud graafi konstrueerimist, mille tipud iseloomustavad olulisi sündmusi projekti teostamise käigus, kaared aga operatsioone (töid), millest projekt koosneb. Vaatlemegi järgnevas just võrkgraafikute konstrueerimist ning nende mõningaid kõige lihtsamaid rakendusi.

S ü n d m u s e k s nimetatakse sellist olukorda projekti realiseerimises, mil osa töid on lõpetatud ning osutub võimalikuks alustada teatud arvu teisi töid. Graafiliselt tähistatakse sündmust ringiga, mille sisse kirjutatakse sündmuse järjekorranumber (kusjuures erinevatel sündmustel peavad olema erinevad numbrid).

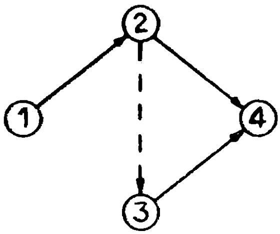
Kahte sündmust ühendav o p e r a t s i o o n vastab nende sündmuste vahel toimuvale tööprotsessile. Operatsiooni juurde kuuluvatest parameetritest on põhiliseks töö teostamisele kuluv (keskmine) aeg, tarbekorral aga ka materjalide või tööjõu vajadus jms. Graafiliselt kujutatakse operatsiooni noolega, mille juurde vajaduse järgi kirjutatakse vastavad parameetrid. Tekstis on aga operatsiooni mugavam märkida tema abil ühendatud sündmuste järjekorranumbrite paariga (näit. operatsioon 3—5 viib sündmusest 3 sündmusesse 5).

Võrkgraafikute unifitseerimise huvides on mõnikord otstarbekohane kasutada nn. f i k t i i v s e i d o p e r a t s i o o n e, mille kestus on null ja mis ei kasuta mingeid ressursse. Graafiliselt tähistatakse selliseid operatsioone punktiirnooltega. Fiktiivse operatsiooni sissetoomise peamisteks põhjusteks on mitme üheaegselt teostatava operatsiooni olemasolu kahe sündmuse vahel või täiendavad nõuded sündmuste ajalise järgnevuse kohta. Illustreerime neid juhte näidetega.

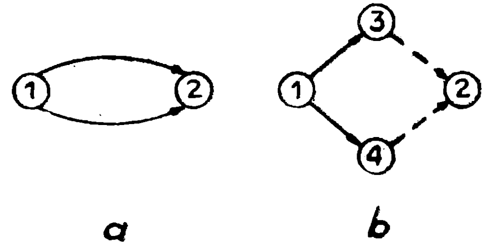
---

[1] PERT — lühend ingliskeelsest nimetusest *Program Evaluation and Review Technique* (plaanide hindamise ja läbivaatamise metoodika).

Näide 1. Sisaldagu võrkgraafik sündmused 1, 2, 3 ja 4 ning operatsioonid 1—2, 2—4 ja 3—4, kusjuures sündmus 3 ei saa toimuda varem kui sündmus 2. Viimast nõuet kajastamegi võrkgraafikul fiktiivse operatsiooniga 2—3 (joonis 1).



Joonis 1.



Joonis 2.

Näide 2. Sisaldagu võrkgraafik sündmused 1 ja 2, kusjuures sündmusest 1 läheb sündmusesse 2 kaks üheaegselt toimuda võivat operatsiooni (joonis 2a). Et nende operatsioonide lõppemised on sündmuse 2 alamsündmused, siis võime sisse tuua vastavad omaette sündmused 3 ja 4. Sündmuse 2 tähenduseks jääb nüüd: «on toimunud nii sündmus 3 kui ka sündmus 4» (vt. joonis 2b).

Nagu toodud näidetestki selgub, annab võrkgraafik teatud ülevaate ka sündmuste ajalise järgnevuse kohta. Nimelt on võrkgraafiku sündmuste hulgas loomulikul viisil määratud osaline järjestus: kui sündmusest i läheb sündmusesse j operatsiooni (või fiktiivset operatsiooni) tähistav nool, siis loetakse sündmust i sündmusele j *vahetult eelnevaks*, sündmust j aga sündmusele i *vahetult järgnevaks*. Sündmust k loetakse sündmusele i *järgnevaks*, kui leidub suunatud tee[2] sündmusest i sündmusesse k (näiteks joonisel 1 on sündmus 4 sündmuse 1 suhtes järgnev, sündmuste 2 ja 3 suhtes aga koguni vahetult järgnev).

Sündmust, mis ei järgne ühelegi sündmusele, nimetatakse võrkgraafiku *algsündmuseks* (minimaalne element kirjeldatud järgnevuse mõttes); sündmust, millele ei järgne ühtki sündmust, nimetatakse võrkgraafiku *lõppsündmuseks* (järjestuse mõttes maksimaalne element). Sündmusi, mida antud operatsioon ühendab, nimetatakse selle operatsiooni *alguseks* ja *lõpuks*.

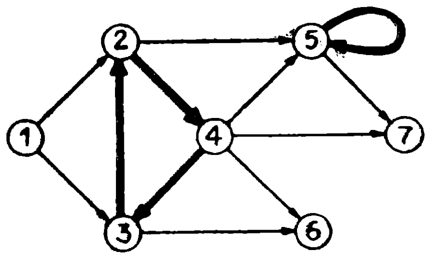
Projekti võrkgraafiku koostamisel tuleb arvestada järgmisi järjestusse puutuvaid reegleid (lisades nende reeglite rahuldamiseks tarbe korral uusi sündmusi või fiktiivseid operatsioone):

1. Ükski sündmus ei tohi järgneda iseendale (s. t. graafik ei tohi sisaldada kinnisi suunatud teid; näit. joonisel 3 kujutatu ei ole jämedalt joonistatud teede tõttu seega üldse võrkgraafik).

[2] Suunatud tee on selline operatsioonide jada, milles iga järgmine operatsioon algab samast sündmusest, kus eelmine lõppes.

2. Iga sündmus järgneb või eelneb vähemalt ühele sündmusele (s. t. graafikus ei leidu isoleeritud sündmusi: joonisel 3 on see nõue rahuldatud).

3. Leidub täpselt üks algsündmus ja üks lõppsündmus [3] (seega igal ülejäänul peab olema nii eelnev kui ka järgnev sündmus; joonisel 3 pole see reegel rahuldatud — lõppsündmusteks on nii 6 kui 7; joonisel 1 likvideerib lisatud fiktiivne operatsoon teise algsündmuse).



Joonis 3.

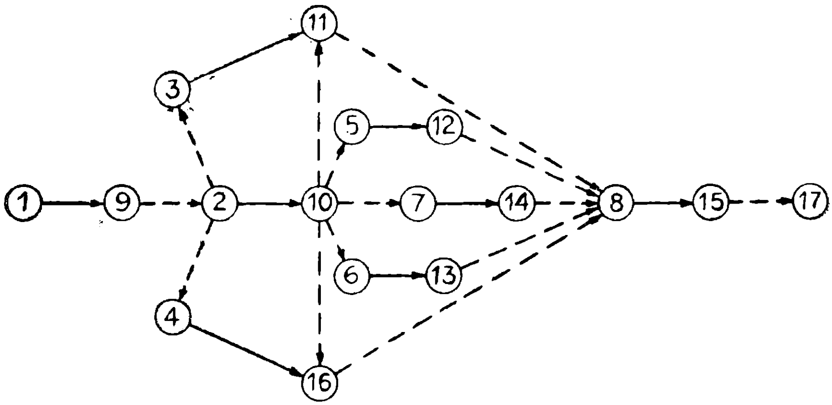
Nende reeglite otstarve selgub võrkgraafiku interpretatsioonist. Nimelt tõlgendatakse projekti realiseerimist kui liikumist mööda võrkgraafikut algsündmusest lõppsündmuseni, kusjuures iga operatsioon tuleb läbida (noole suunas) täpselt üks kord. Liikumine mööda mingit operatsiooni tähendab vastava töö teostamist. Et erinevaid töid saab tihti teostada samaaegselt, siis toimub liikumine tavaliselt muidugi mööda mitut teed korraga. Liikumisel peab arvestama, et mingi operatsiooni läbimist ei saa alustada enne, kui on toimunud tema alguseks olev sündmus; s ü n d m u s e t o i m u m i n e aga tähendab, et on läbitud kõik operatsioonid (ka fiktiivsed), mille lõpuks see sündmus osutub.

Sellist interpretatsiooni tuleb muidugi arvestada võrkgraafiku koostamisel. Illustreerimegi seda etappi järgmise lihtsa näite varal.

N ä i d e 3. Olgu vaadeldavaks projektiks ühekorruselise maja ehitamine. Peensustesse laskumata piirdume siin vaid keskmiselt asjatundmatu kodaniku arusaamade kohaselt oluliste sündmustega selle ehituse käigus:

sündmus 1 — võib alustada vundamendi tegemist,
sündmus 2 — võib alustada müüride ladumist,
sündmus 3 — võib alustada uste paigaldamist,
sündmus 4 — võib alustada akende paigaldamist,
sündmus 5 — võib alustada veevärgi monteerimist,
sündmus 6 — võib alustada elektriseadmete monteerimist,
sündmus 7 — võib alustada katuse tegemist,
sündmus 8 — võib alustada viimistlustöid,
sündmus 9 — vundament on lõpetatud,
sündmus 10 — müürid on laotud,
sündmus 11 — uksed on paigaldatud,
sündmus 12 — veevärk on monteeritud,
sündmus 13 — elektriseadmed on monteeritud,
sündmus 14 — katus on valmis,

[3] See reegel jäetakse vahel ka ära, kuid niisuguseid graafikuid me siin ei vaatle.



Joonis. 4.

sündmus 15 — viimistlustööd on lõpetatud,
sündmus 16 — aknad on paigaldatud,
sündmus 17 — maja on valmis.

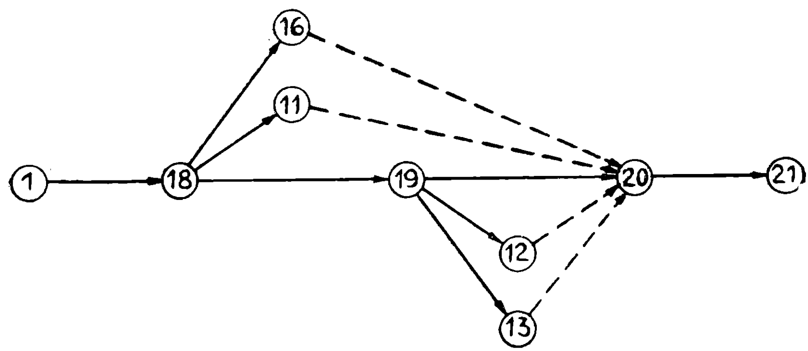
Loetletud sündmusi ja mõningaid ilmseid tingimusi nende järgnevuse osas aluseks võttes saame maja ehitamise (tugevasti lihtsustatud) võrkgraafiku joonisel 4 esitatud kujul.

Torkab muidugi silma fiktiivsete operatsioonide suur arv saadud graafikus. Selle põhjuseks on valitud sündmuste tarbetu detailiseeritus: näiteks pole ju mõtet lugeda vundamendi valmimisest erinevateks sündmusteks müüride ladumise ja akende ning uste paigaldamise alustamise võimalikkust, kui me lubame viimati nimetatud töid alustada praktiliselt samaaegselt. Ühendades sündmused 2, 3, 4 ja 9 uueks sündmuseks 18, samuti sündmused 5, 6, 7 ja 10 sündmuseks 19, sündmused 8 ja 14 sündmuseks 20 ning sündmused 15 ja 17 sündmuseks 21 saame oma võrkgraafiku esitada joonisel 5 näidatud kujul (seal on ühtlasi ära jäetud nüüd juba tarbetuks osutunud fiktiivsed operatsioonid 19—11 ja 19—16).

Samastades projekti realiseerimise liikumisega mööda vastavat võrkgraafikut piirdusime me seni vaid kvalitatiivse külje vaatlemisega. Kvantitatiivsete vahekordade arvestamiseks tuleb kõigepealt vaatlusele võtta o p e r a t s i o o n i d e k e s t u s e d — vastavate tööde sooritamiseks kuluvad ajad. Need ajad määravadki liikumise kiiruse operatsioonide läbimisel.

Operatsioonide kestused pole reaalsete projektide korral täpselt ette määratavad. Seetõttu tuleb paratamatult kasutada nende kestuste teatavaid, ekspertide poolt antavaid hinnanguid. Tavaliselt annab ekspert iga operatsiooni kestuse kohta kolm hinnangut:

a — optimistlik hinnang, minimaalne ajakulu antud töö tegemiseks, kui kõik laabub hästi;



Joonis 5.

b — pessimistlik hinnang, maksimaalne ajakulu antud töö tegemiseks kõige ebasoodsamates tingimustes (arvestamata siiski äärmuslikke olukordi — katastroofe jms.);

m — kõige tõenäosem ajakulu antud töö tegemiseks (eksperdi arvates «keskmistes» tingimustes).

Nende hinnangute põhjal määratakse edasistes arvutustes kasutatav operatsiooni kestus t tavaliselt valemiga [4]

$$t = \frac{a + 4m + b}{6}.$$

Kui aga käepärast on vaid optimistlik ja pessimistlik hinnang, siis leitakse t valemist

$$t = \frac{2a + b}{3},$$

mis annab üldiselt suurema (ja tegelikkusega halvemini kooskõlas oleva) kestuse.

Kui kõikide operatsioonide kestused on leitud (ja võrkgraafikul vastavate noolte juurde kirjutatud), siis saab juba võrkgraafiku läbimist vaadelda kui ajas kulgevat protsessi. Seda arvestades mõõdamegi võrkgraafikus edaspidi kõike ajaga, mõistes näiteks t e e p i k k u s e all selle tee läbimiseks kuluvat aega.

Võrkgraafiku läbimise (projekti teostamise) uurimisel on üheks esimeseks ülesandeks määrata iga sündmuse toimumise v a r a j a s i m võimalik aeg, eeldusel, et algsündmus toimub ajamomendil 0. Et sündmuse toimumiseks peavad olema läbitud kõik operatsioonid, mille lõpuks see sündmus osutub, siis sündmuse i toimumise varajasim aeg $T_E(i)$ pole ilmselt midagi muud kui algsündmusest sündmusesse i viiva pikima tee läbimiseks kuluv aeg.

[4] See valem on saadud eeldusel, et operatsiooni kestuse kui juhusliku suuruse tõenäosuste tihedust kirjeldab teatav beeta-jaotus. Standardhälve σ saadakse sealjuures kujul $\sigma = (b - a)/6$.

N ä i d e 4. Joonisel 6 kujutatud võrkgraafiku[5] sündmuste toimumise varajasimad ajad võib leida järgmiselt:

$T_E(0) = 0$; $T_E(1) = 3$; $T_E(2) = 4$; $T_E(3) = \max(2, 4+2) = 6$;

$T_E(4) = \max(3+4, 2+4, 4+2+4) = 10$;

$T_E(5) = \max(2+3, 4+2+3, 4+4) = 9$;

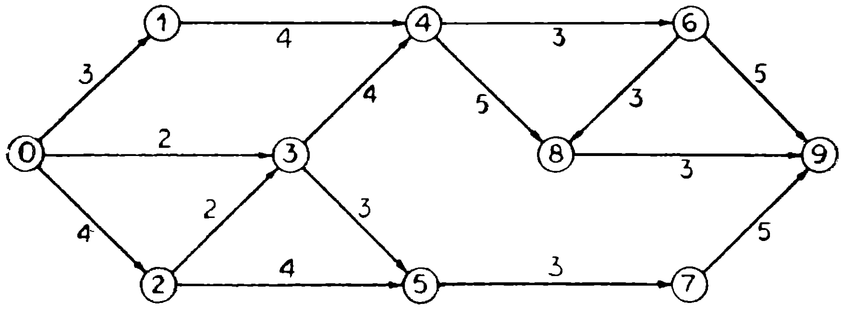
$T_E(6) = \max(3+4+3, 2+4+3, 4+2+4+3) = 13$;

$T_E(7) = \max(2+3+3, 4+2+3+3, 4+4+3) = 12$;

$T_E(8) = \max(3+4+3+3, 2+4+3+3, 4+2+4+3+3, 3+4+5, 2+4+5, 4+2+4+5) = 16$;

$T_E(9) = \max(3+4+3+5, 2+4+3+5, 4+2+4+3+5, 2+3+3+5, 4+2+3+3+5, 4+4+3+5, 3+4+3+3+3, 2+4+3+3+3, 4+2+4+3+3+3, 3+4+5+3, 2+4+5+3, 4+2+4+5+3) = 19$.

Suuremate võrkgraafikute korral osutub kõikide antud sündmuses lõppevate teede niisugune läbivaatamine muidugi üsna tülikaks ja aeganõudvaks. Seetõttu ongi suuruste T_E leidmiseks välja töötatud mõningaid lihtsamaid algoritme, kuid selliste puhtarvutuslike võtete kirjeldamisel me käesolevas ülevaates ei peatu.



Joonis 6.

Võrkgraafiku lõppsündmuse toimumise varajasim aeg on ühtlasi minimaalne aeg, mille vältel vaadeldavat projekti üldse osutub võimalikuks realiseerida (näit. kogu joonisel 6 kujutatud võrkgraafiku läbimine ei saa toimuda rutem kui 19 ajaühiku jooksul). Praktikas antakse aga projekti realiseerimiseks enamasti teatav d i r e k t i i v n e a e g, mis kujutab endast just lõppsündmuse toi-

[5] Selles näites on võrkgraafiku sündmused nummerdatud nii, et iga operatsiooni alguse number osutub väiksemaks tema lõpu numbrist (ülalnimetatud reeglite järgi koostatud võrkgraafikus on selline nummerdamine alati võimalik). Algsündmuse numbriks on loomulik panna 0.

mumise hilisemat lubatavat aega T_S (vahel lisatakse veel mõne teise sündmuse toimumise hilisemad lubatavad ajad, kuid selle vähem olulise juhu jätame siin kõrvale). Direktiivsest ajast T_S lähtudes saab nüüd leida iga sündmuse i hiliseima lubatava toimumisaja[6] $T_L(i)$, mis veel ei takista projekti realiseerimist etteantud tähtajaks T_S.

Hiliseima lubatava toimumisaja määramist alustatakse graafiku lõppsündmusest n, kusjuures loomulikult $T_L(n) = T_S$.

Teiste sündmuste hiliseimate toimumisaegade määramiseks tuleb lõppsündmusest ettepoole liikudes lahutada vastavate operatsioonide kestused. Täpsemalt, mingi sündmuse i hiliseima lubatava toimumisaja saamiseks tuleb direktiivajast T_S lahutada sündmusest i lõppsündmusesse viiva pikima tee läbimiseks kuluv aeg.

Näide 5. Joonisel 6 kujutatud võrkgraafiku korral leiame:

$$T_L(9) = T_S;\ T_L(8) = T_S - 3;\ T_L(7) = T_S - 5;$$

$$T_L(6) = T_S - \max(5,\ 3+3) = T_S - 6;$$

$$T_L(5) = T_S - (3+5) = T_S - 8;$$

$$T_L(4) = T_S - \max(3+5,\ 3+3+3,\ 5+3) = T_S - 9;$$

$$T_L(3) = T_S - \max(4+3+5,\ 4+3+3+3,\ 4+5+3,\ 3+3+5) = T_S - 13;$$

$$T_L(2) = T_S - \max(2+4+3+5,\ 2+4+3+3+3,\ 2+4+5+3,\ 2+3+3+5,\ 4+3+5) = T_S - 15;$$

$$T_L(1) = T_S - \max(4+3+5,\ 4+3+3+3,\ 4+5+3) = T_S - 13$$

ja lõpuks muidugi $T_L(0) = T_S - 19$. Võttes nüüd näiteks $T_S = 19$ saame:

$$T_L(9) = 19;\ T_L(8) = 16;\ T_L(7) = 14;\ T_L(6) = 13;\ T_L(5) = 11;$$
$$T_L(4) = 10;\ T_L(3) = 6;\ T_L(2) = 4;\ T_L(1) = 6;\ T_L(0) = 0.$$

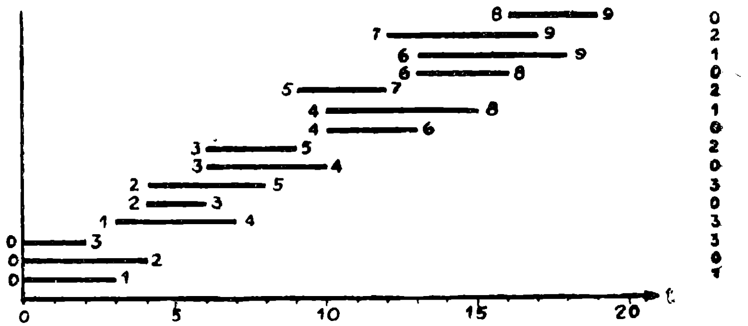
Vahet $T_L(i) - T_E(i)$ on loomulik nimetada sündmuse i toimumise ajareserviks, sest ta näitab, kui palju võib sündmusele i eelnevate operatsioonide läbimisega viivitada, ilma et sellega kaasneks viivitusi järgnevate sündmuste toimumises. Seetõttu nimetataksegi sündmuse i ajareservi vahel ka nende operatsioonide täisreserviks, mille lõpuks on sündmus i. Kõrvuti sellega kasutatakse veel operatsiooni vabareservi mõistet, mis tähendab vahet operatsiooni lõpu hiliseima toimumisaja ning operatsiooni planeeritud lõppmomendi vahel.

Loomulikult saab vabareservist rääkida vaid siis, kui on koostatud projekti kuuluvate tööde ajaline graafik. Eriti ülevaatlikult võib sellist graafikut esitada nn. lineaarse diagrammi

[6] Kasutatav sümboolika pärineb inglise keelest: T = *time* (aeg), E = *earliest* (varajasim), L = *latest* (hiliseim), S = *subordinative* (alistav).

kujul, kus iga operatsioon kujutatakse tema kestusega võrdelise pikkusega sirglõiguna, mille alguspunkti abstsiss näitab vastava töö alustamise momenti.

N ä i d e 6. Kasutame joonisel 6 toodud võrkgraafiku lineaarse diagrammi koostamiseks kõige lihtsamat mõeldavat meetodit: iga operatsiooni alustame nii vara kui võimalik (s. t. tema alguseks oleva sündmuse toimumise momendil). Tulemus on esitatud joonisel 7, kus operatsioonidele vastavate sirglõikude otspunktide juurde on kirjutatud alg- ja lõppsündmuse numbrid. Joonise paremale servale on kirjutatud veel operatsioonide vabareservid. Paneme siinjuures tähele, et näiteks operatsiooni 2—5 (mis selle plaani kohaselt lõpeb ajamomendil 8) vabareserv leitakse kui vahe $T_L(5) - 8 = 3$, täisreserv aga kui vahe $T_L(5) - T_E(5) = 2$, mis on ühtlasi sündmuse 5 ajareserv.



Joonis 7.

Sündmuse ajareserv iseloomustab selle sündmuse potentsiaalset kriitilisust projektis. Nimelt loeme sündmust seda kriitilisemaks, mida enam tema toimumise hilinemine mõjustab projekti realiseerimise lõpptähtaega. Ilmselt on aga projekt kõige tundlikum just nende sündmuste suhtes, kus ajareserv on kõige väiksem. Et niisuguste sündmuste toimumise väike hilinemine lükkab juba edasi kogu projekti realiseerimise tähtaja, siis nimetatakse neid sündmusi k r i i t i l i s t e k s. Sündmus i on seega kriitiline parajasti siis, kui

$$T_L(i) - T_E(i) = \min_j [T_L(j) - T_E(j)].$$

Kriitiliste sündmuste ajareservi konkreetne väärtus (see on antud graafiku kõigil kriitilistel sündmustel muidugi ühesugune) sõltub etteantud direktiivsest ajast T_S, kuid sellest ajast ei sõltu sündmuste kriitilisus. Nii näiteks on joonisel 6 kujutatud võrkgraafiku kriitilisteks sündmusteks iga T_S korral 0, 2, 3, 4, 6, 8 ja 9, nende ajareserv võrdub aga nulliga üksnes siis, kui $T_S = 19$.

Graafiku algsündmusest lõppsündmusesse viivate teede hulgas pikimat nimetatakse antud projekti **kriitiliseks teeks**. Selle tee (või mitme kriitilise tee olemasolu korral ühe neist) leidsime tegelikult juba lõppsündmuse toimumise varajasima aja $T_E(n)$ määramisel, sest see aeg ongi ju kriitilise tee pikkus (näit. joonisel 6 toodud võrkgraafiku ainsaks kriitiliseks teeks on 0—2—3—4—6—8—9). Kriitilise tee nimetust õigustab asjaolu, et igasugune viivitus tema läbimisel kutsub esile lõppsündmuse toimumise sama suure edasilükkumise. Ühtlasi osutub, et kriitiline tee läbib ainult kriitilisi sündmusi ja iga kriitiline sündmus paikneb vähemalt ühel kriitilisel teel.

Kriitilise tee koosseisu kuuluvad operatsioonid on projekti suhtes kriitilised selles mõttes, et nende tegelik kestus ei tohi osutuda suuremaks võrkgraafikus kasutatud hinnangust. Operatsiooni kestuse juhuslikkust arvestades kerkib siin terve rida tõenäosustega seotud probleeme. Näiteks saab kriitilisel teel paiknevate operatsioonide standardhälbeid kasutades suhteliselt lihtsalt hinnata projekti tähtajalise täitmise tõenäosust.[7] Kui see osutub liialt väikeseks, siis pole projekt etteantud direktiivseks ajaks realiseeritav ning seda tuleb muuta (märgime, et nimetatud tõenäosus tuleb isegi juhul $T_S < T_E(n)$ positiivne, sest operatsioonide tegelikud kestused võivad ju hinnangutest väiksemaks osutuda; teiselt poolt ei tarvitse see tõenäosus aga ka juhul $T_S > T_E(n)$ tingimata eriti suur olla).

Väikese realiseerimistõenäosusega projekti muutmiseks püütakse vähendada kriitilisel teel olevate suurte standardhälvetega operatsioonide kestusi. See toimub peamiselt mõningate ressurssside üleandmise teel suure täisreserviga (mittekriitilistelt) operatsioonidelt. Niisugune ressursside üleandmine tugineb muidugi vastavate tööde tehnoloogiasse puutuvatele küsimustele. Seetõttu jätame projekti muutmise lähema vaatlemise kõrvale, peatudes siiski ühel teisel ressurssidega seotud probleemil, mida vähemalt lihtsamal juhul saab võrkgraafikust lähtudes lahendada.

Võrkgraafikusse kuuluvaid operatsioone iseloomustab üldjuhul mitte ainult nende kestus, vaid ka mitmesuguste ressursside (materjalide jms.) vajadus. Piirdume järgnevas lihtsaima juhuga, mil kõikides operatsioonides on tegemist vaid üheainsa ressursi vajadusega. Olgugi r_{ij} operatsiooni $i-j$ vajadus selle ressursi järele ajaühikus.

---

[7] See tõenäosus leitakse tavaliselt näiteks normaaljaotuse tabelist vastavalt argumendile

$$z = \frac{T_S - T_E(n)}{\sqrt{\sum_{i,j} \sigma_{ij}^2}},$$

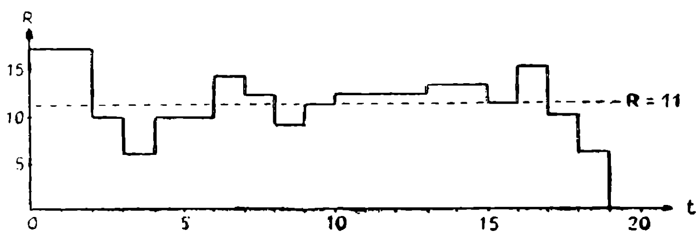
kus nimetajas on kõigi kriitilist teed moodustavate operatsioonide $i-j$ dispersioonide σ_{ij}^2 summa.

Kasutatava ressursi kogused on praktikas peaaegu alati piiratud, üldiselt teatava funktsiooniga $R(t)$, kuid lihtsamal erijuhul konstandiga R. Seega ei tohi üheski ajavahemikus käsilolevate tööde ressursivajaduste summa ületada piirkogust R. Niipea kui see tingimus pole täidetud, tuleb tööde ajaline graafik ümber teha. Suhteliselt lihtne on graafikut selliselt parandada lineaarsel diagrammil. Selgitamegi üht sellist algoritmi järgmise veidi ulatuslikuma näite varal.

N ä i d e 7. Olgu joonisel 6 kujutatud võrkgraafiku operatsioonide ressursivajadused määratud järgmiselt:

$i-j$	0—1	0—2	0—3	1—4	2—3	2—5	3—4	3—5
r_{ji}	6	4	7	2	5	3	6	3
$i-j$	4—6	4—8	5—7	6—8	6—9	7—9	8—9	
r_{ji}	5	2	5	2	4	5	6	

Projekteerime vastavas lineaarses diagrammis (joonis 7) tööde alg- ja lõpp-punktid ajateljele ning arvutame igas sellises vahemikus ressursivajaduste summa. Seda summat graafiliselt kujutades saame joonisel 8 toodud pildi.



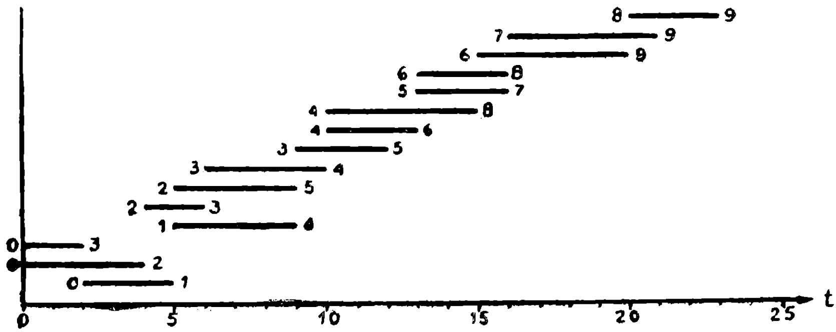
Joonis 8.

Kui ressursside kasutamise ülempiir on $R = 11$, siis ajavahemikes [0, 2], [6, 8], [10, 15] ja [16, 17] ületab vajadus selle piiri (joonisel punktiiriga märgitud). Seega ei ole joonisel 7 esitatud ajaline graafik antud tingimustes realiseeritav.

Graafiku muutmine saab toimuda vaid tööde paremale nihutamise (s. t. hiljem täitmisele võtmise) teel, sest joonisel 7 paiknevad nad kõik oma vasakpoolsetes piirseisudes. Alustame selliste nihutamiste vajalikkuse ning võimaluste selgitamist vasakult, liikudes aja kasvamise suunas.

Kõige vasakpoolsemas ajavahemikus [0, 2] on ressursivajadus 17, seega tuleks sellest vahemikust välja (s. t. vähemalt kahe ühiku võrra paremale) nihutada kas operatsioon 0—1 või 0—3. Niisuguse valikuvõimaluse korral osutub otstarbekohaseks nihutada seda tööd, kus vabareservi ja nihutamisele kuuluvate ajaühikute vahe on maksimaalne. Mõlema vaadeldava operatsiooni vabareserv on 3 (vt. joonis 7), kuid nihutada tuleks neid erinevalt. Nimelt operatsiooni 0—1 korral näib piisavat kaheühikulisest nihutamisest, operatsiooni 0—3 nihutamine kahe ühiku võrra tekitab aga kohe uue ressursivajaduste piiri ületamise ajavahemikus [2, 3]. Seega ülalnimetatud vahe on operatsiooni 0—1 korral suurem ja esimese sammuna nihutamegi seda operatsiooni kahe ühiku võrra paremale. Et nüüd sündmuse 1 toimumine edasi lükkub, siis tuleb ühtlasi sama palju nihutada ka kõiki seal algavaid operatsioone — antud juhul vaid operatsiooni 1—4.

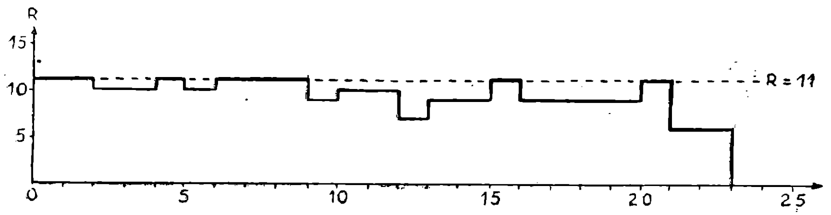
Lõpuks tuleb veel parandada kõigi nihutatud operatsioonide vabareserve (nimelt operatsioonide 0—1 ja 1—4 uueks vabareserviks saame 1) ning vaadeldava algoritmi üks samm on sooritatud. Edasi võtame vaatlusele ajavahemiku [2, 4] (kus reservivajadus ei ületa piirkogust ja mingit nihutamist seega pole vaja sooritada), seejärel ajavahemiku [4, 5] (kust tuleb välja nihutada operatsioon 2—5) jne.



Joonis 9.

Kirjeldatud algoritmi lõpptulemuseks saadav lineaarne diagramm on esitatud joonisel 9 ning vastav ressursivajaduste summa joonisel 10. Paneme tähele, et projekti lõpptähtaeg on lähteplaaniga võrreldes nelja ajaühiku võrra edasi lükkunud. See tähendab, et niisuguse ressursikitsenduse korral pole projekti lõpetamine direktiivseks ajaks võimalik.

Jooniseni 9 viiva algoritmi kirjeldamisel oli (ilma seda eraldi rõhutamata) eeldatud, et operatsiooni ei tohi katkestada. Praktikas on aga selline katkestamine sageli lubatav ning enamasti või-



Joonis 10.

maldab see ressursse tunduvalt ratsionaalsemalt kasutada. Antud juhul näiteks saaks projekti kahe ajaühiku võrra varem lõpetada ainult ühe operatsiooni katkestamise hinnaga. Nimelt kui operatsiooni 4—8 sooritada kahes eraldi ajavahemikus [10, 13] ja [16, 18], siis võib operatsioone 6—9 ning 8—9 kahe ühiku võrra tagasi vasakule nihutada, millega projekti lõpptähtajaks kujunebki 21.

* * *

Piirdudes vaid sellise põgusa ülevaatega võrkplaneerimise mõningatest põhimõistetest soovitame asjaga lähemaks tutvumiseks kasutada näiteks raamatuid (kahjuks eesti keeles seni midagi trükis ilmunud ei ole):

1. Системы сетевого планирования и управления. Изд. «Мир», М., 1965.
2. Р. Миллер. ПЕРТ — система управления. Изд. «Экономика», М., 1965.
3. С. И. Зуховицкий, И. А. Радчик. Математические методы сетевого планирования. Изд. «Наука», М., 1965.
4. Дж. Модер, С. Филлипс. Метод сетевого планирования в организации работ (ПЕРТ). Изд. «Энергия», М—Л., 1966.
5. Д. И. Голенко. Статистические методы сетевого планирования и управления. Изд. «Наука», М., 1968.

MITTEMATEMAATIKUD MATEMAATIKAST

Archimedese peas oli rohkem mõttelendu kui Homerose peas.

Voltaire

Matemaatika õitseng ja täiuslikkus on tihedalt seotud riigi jõukusega.

Napoleon

Milline teadus võiks olla õilsam, kütkestavam ja inimkonnale kasulikum kui matemaatika?

Franklin

Täiendusi koolimatemaatikale

MATEMAATIKA ÕPETAMISE ÜLESANDED JA EESMÄRGID [1]

G. Rägo, O. Prinits

Kaasajal läbiviidava koolimatemaatika reformi käigus on teravalt üles kerkinud aine sisu ja mahu probleem. Sisu uuenemine on tihedalt seotud matemaatikateaduse ja tema rakenduste arenguga. Sellega kaasneb aga aine mahu suurenemine, sest senikehtinud programmide teemadest ei peeta võimalikuks ühtegi kustutada. Siinjuures jääb aga sageli arvestamata, et nii matemaatika kui ka mistahes teise õppeaine sisu ja maht, aga samuti õpetamise meetodid sõltuvalt sellest, mis on seatud õpetamise ülesanneteks ja eesmärkideks. Ka koolimatemaatika reformitaotluste esitamisel on viimastele liialt vähe tähelepanu omistatud. Koolimatemaatika sisu ja mahu määramise kohta peetud diskussioonide argumendid tuginevad eelkõige traditsioonile, rutiinile, autoriteedi arvamusele, suhteliselt harva aga neile põhiteesidele, mis on fikseeritud õpetamise ülesannetena ja eesmärkidena.

Iga aine õpetamise ülesandeks on õpilase vaimsete võimete arendamine, et varustada teda ümbritseva reaalsuse mõistmiseks ja igapäevase elu vajadusteks tarvisminevate teadmiste ja oskustega. Matemaatika õpetamisel täidetakse seda ülesannet

1° mõtlemisoskuse arendamisega;

2° õpilaste viimisega käsitletava aine tunnetamisele;

3° üldhariduseks vajalike matemaatikaalaste teadmiste ja oskuste omandamise kindlustamisega.

Kõrvuti nende oluliste ehk nn. põhiülesannetega täidab matemaatika õpetamine veel mitmeid väiksemaid ülesandeid. Nimetagem korralikkuse ja vastutustunde kasvatamist, töödistipliini juurutamist ning keele ja kirjaoskuse arendamist.

Peatume lähemalt põhiülesannetel.

[1] Prof. G. Rägo käsikirja alusel koostanud O. Prinits.

1. Mõtlemisoskuse arendamine

Liikumisis ja muis toiminguis juhinduvad loomad instinktist. Sellest juhindub ka inimene, kuid tal on ainsana bioloogiliste olevuste hulgast ka mõistus. Tänu mõistusele ja sellega kaasnevale mõtlemisele ongi inimene tõusnud reaalseks käskijaks. See tõsiasi viitab kategoorilisele nõudmisele, et **kool peab arendama õpilaste mõtlemisoskust.**

Õigete otsuste tegemine kõigile selleks kasutada olevatele andmetele tuginedes on inimmõistuse kõige tähtsam toiming. Nendest otsustest sõltub, kuidas arenevad edaspidised sündmused, olgu need poliitilises elus, majanduse arendamisel, looduse ümberkujundamisel või mõnel muul alal. Olulised on otsused, mille langetavad arst patsiendi, õpetaja õpilase, kohtunik kohtualuse ja vanemad oma laste suhtes.

Otsused peavad järelduma andmeist. Nii nagu muusikalist kuulmist, värvide eristamist jne. saab teadlikult arendada, nii saab arendada ka mõtlemisoskust süsteemikindla harjutamise abil.

Mõtlemisoskuse arendamine matemaatika õpetamisel põrkub mõnikord psühholoogilistele raskustele. Näiteks on õpetajal märksa lihtsam õpetada lapsi formaalselt arvutama ja avaldisi teisendama kui näiteks tõestuste käigus õigeid järeldusi tegema. On küllalt levinud ka arvamus, et olulised on ainult valmis tulemused, retseptid, valemite tuletamist peetakse ülearuseks targutamiseks, sest otseselt vajatakse ju praktikas ainult lõpptulemust.

Matemaatikaõpetaja ei tohi oma töös kaasa minna nende väärarvamustega. Tõsist kaalumist vajavad ka nõudmised niisuguste tulemuste, s. o. valemite meeldejätmise kohta, mida edaspidises elus saab vajaduse korral leida vastavatest valemite kogudest ja mis juhul, kui neid harva kasutatakse, ununevad.

Ülesannete koostamise ja lahendamise teel õpetame õpilast **konkreetselt mõtlema.**

Senisest märksa suuremat tähelepanu on mõtlemisoskuse arendamise huvides tarvis osutada ülesannete koostamisele. Kui algklassides seda üldreeglina tehakse, siis juba keskastme klassides see töövorm peaaegu täielikult puudub. Ülesannete koostamisel on teada, missugust suurust on vaja leida, õpilase ülesandeks jääb aga kindlaks teha, missuguseid suurusi ta vajab otsitava suuruse leidmiseks ja kuidas ta vastavad arvulised väärtused teada saab. Tegelikkus ei esita ülesannet täielikult, s. t. niisuguse andmete hulgaga, mis on tarvilik ja piisav vastuse saamiseks. Selle andmete hulga kindlakstegemine nõuab intensiivset mõttetegevust. Seepärast tulebki mõtlemise arendamise huvides **anda väärikas koht ülesannete koostamisele.**

Ka **ülesannete lahendamine** arendab mõtlemisoskust. Eriti väärtuslik on lahendusskeemide koostamine. Siin selgitatakse, missuguses järjekorras tuleb otsitavaid suurusi leida ja missuguste andmete abil. Kiire lahendusskeemi leidmine on arenenud mõtlemisoskuse tunnuseks.

Ka leitud lahendi kontrolli ei tohi suruda puhtformaalsetesse raamidesse. Väga sageli teostatakse kontrolli kontrolli pärast, mis seisneb näiteks võrrandi ümberkirjutamises, kus tundmatu asendatakse leitud lahendiga. Niisugune kontroll ei arenda mõtlemisoskust. Kui ollakse teadlik kontrollimise vajadusest ja leitakse selleks sobivaim tee, siis on ka kontroll mõtlemisoskuse arendajaks.

Tegelik elu nõuab meilt konkreetse mõtlemise valdamist, kuid vaimsete rikkuste omandamine, eriti kõrgemas koolis, nõuab ka abstraktse mõtlemise oskust. Seda ei omandata konkreetse mõtlemise kõrvalproduktina, nagu mõnikord arvatakse. Igapäevane elu, aga samuti enamik kooliaineid, nagu ajalugu, geograafia, bioloogia jt. ei arenda oluliselt abstraktset mõtlemist. See ülesanne jääb peamiselt matemaatikale.

Abstraktse mõtlemise oskuse arendamiseks on matemaatilise lause tõestus kõige tõhusam vahend.

On üldtuntud tõsiasi, et koolimatemaatika raskemateks kohtadeks on need, kus minnakse üle konkreetselt käsitlusviisilt abstraktsele, s. t. konkreetselt mõtlemiselt abstraktsele ehk formaalloogilisele mõtlemisele. Algebra elementide sissetoomisega asenduvad konkreetsed arvud, nagu 1, 2, 3, 1/5, 0,72 jne. mingite arvudega a, b, c jt., üleminek konkreetselt abstraktsele toimub näiteks ka positiivsete ja negatiivsete arvudega tehete sooritamise juurde minnes. Koolimatemaatikas tutvustatakse ka aksioome ja neile järgnevaid teoreeme, aga samuti põhimõisteid ja definitsioone. Sellel kohal algab koolimatemaatikas formaalne käsitlus, kus konkreetne materjal peab taanduma ideede ees. Nii asendub hulk konkreetseid objekte nimeta arvuga, kepp lõiguga, aken või pildiraam ristkülikuga. Algab üleminek mõtlemiselt erijuhtude varal mõtlemisele üldjuhtu silmas pidades ehk, teisiti öeldes, indutseerimise asemele astub dedutseerimine, konstateerimise asemele põhjendamine.

Tõestuste väärtus ei piirdu kaugeltki ainult teatud tõdede tundmaõppimisega, vaid tema suur väärtus on mõtlemisoskuse arendamises. Seda arvestades vajab meie koolimatemaatika sisu hindamist, kas seal esitatavate tõestuste hulgas ei leidu puudulikke või koguni vääri tõestusi. Eriti väärtuslikud on ülesanded tõestuskäigu leidmise kohta, kus arendatakse analüüsimisoskust, mida vajatakse ka tegelikus elus. Tõestuste käsitlemisel peab saama juhtsõnaks — miks?, s. t. peab saama selgeks, et iga samm nõuab siin põhjendamist. Suur väärtus on ka tõestuskäigu kordamisel, mis aitab selgitada, kas iga samm on astutud täie teadlikkusega, kas on mõistetud tõestuse eesmärki.

2. Käsitletava aine tunnetamine

Kooli üheks ülesandeks on selgitada õpilastele, kuidas inimesed on jõudnud ja jõuavad tõeni. Seda ei saa teha mõne päevaga. Sellesse küsimusse tuleb sisse elada, tulles tema juurde ikka ja jälle tagasi. Õpilasi tuleb õpetada kahtlema ja veenduma, kasutades siinjuures leninlikku tunnetusteed — elavalt kaemuselt mõtlemisele ja sealt praktikasse.

Täppisteaduste arengule ongi iseloomulik niisugune tunnetuskäik. Vaatlusele, võimaluse korral katsele tuginedes inventeeritakse saadud faktiline materjal, klassifitseeritakse, süstematiseeritakse ning avastatakse seoseid, mis võimaldavad luua seesmiselt seotud faktide süsteemi. Võimaluse korral taandatakse need seosed vähestele, kokkuleppe korras aksioomideks tõstetud tõsiasjadele. Aksioomidele tuginedes ehitatakse üles loogiline süsteem ning võrreldakse selle vastavust reaalsusega.

Et matemaatika õpetamisel on vaatlus ja katse teostatavad kõige väiksema vaevaga, faktiline materjal on silmanähtav, seosed lihtsad, indutseerimine suhteliselt lihtne, üldistamisel saadud tulemuste kontroll raskusteta teostatav ja leitud tõdede rakendamiseks praktikas on avarad võimalused, siis ongi matemaatika sobivaimaks õppeaineks, milles õpilased jõuavad tõe tunnetamisele.

Võrdlemine teiste kooliainetega kinnitab neid väiteid. Seega, mitte ainult mõtlemise arendamiseks, vaid ka tõe tunnetamiseks on matemaatika kooliainetest sobivaim.

Arvestades vajadust kujundada õpilastel materialistlikku maailmavaadet ja viia nad tunnetamise materialistlikule mõistmisele, tuleb matemaatika õppeprotsess läbi viia täislüliliselt.

Selle all mõistab prof. G. Rägo niisugust õpetamist, mis hõlmab empiiriliste faktide kogumise, selle materjali üldistamise, tulemuse formuleerimise hüpoteetilise väitena, väite tõestuse ja tõestatud väite rakendamise tegelikkuses. Neile lisandub õppeprotsessis veel teadmiste ja oskuste pidev kontroll ja kinnistamine. Aine lihtsuse ja teemade valiku võimaluste laiusega on matemaatika eriti sobivaks aineks tunnetusküsimuste käsitlemisel. Siin saab näidata veel kahtluse väärtust teadust edasiviiva tegurina, arvamiste kontrollimise vajadust, meelte ja teiste uurimisvahendite puudulikkust, vaatlustulemuste ja indutseeritud tõdede usaldamatust, deduktiivse meetodi tähtsust jne.

Koolitöös küllalt sageli esinevaks puuduseks on tõsiasi, et õpilased õpivad tõestuskäigu pähe. On kahetsusväärne, et selliseid «tõestusi» kõrgelt hinnatakse ja nii seda väära teed käimist soositakse. Õpetaja ülesanne on viia õpilased selgele vahetegemisele tõestuskäigu mõistmise ja päheõppimise vahel.

3. Üldhariduseks vajalike matemaatikaalaste teadmiste ja oskuste omandamine

Ühiskonna arengu varasematel etappidel polnud matemaatika tundmine paljudele vajalik. Arvutustööd usaldati nn. «arvutusmeistritele» veel uue aja algperioodil. Eukleidese «Elementide» tundmaõppimisega tegelesid üksikud ja põhjusteks olid siin ainult huvi ja soov arendada mõtlemisoskust. Kui kool muutus masse haaravaks asutuseks, kerkisid päevakorrale küsimused õpetamise ülesannetest ja eesmärkidest. Matemaatikaalaste teadmiste ja oskuste hulk, mida on loetud vajalikuks õpetada üldhariduslikus koolis, on aja jooksul muutunud koos üldhariduslikku kooli endaga. Kui möödunud sajandil piisas selleks peamiselt igapäevase elu vajadusi rahuldavate aritmeetiliste tehete oskusest ja geomeetriliste kujundite tundmisest, siis sajandivahetusel lisandus siia muutuv suurus ja käesoleval ajal nõutakse üldhariduse raames antavate teadmiste ja oskuste hulgas just nende matemaatikateemade õpetamist, mis aitaksid kaasa õpilaste mõtlemise arendamisele. Seega nõuab kaasaegne üldharidus selliseid matemaatikaalaseid teadmisi ja oskusi, mis võimaldavad lahendada igapäevases elus üleskerkivaid probleeme, kuid teiselt poolt loeb väga oluliseks, et nende ülesannete lahendamine kulgeks teadlikult ja mitte formaalselt. Teadmiste ja oskuste hulk on fikseeritud aine programmis ja see kujutab endast riiklikku dokumenti, mille täitmine on kohustuslik igale õpetajale.

Matemaatika õpetamise eesmärgid on kitsamad kui ülesanded. Eesmärgile lähenetakse kindlas sihis ja suunas, ülesanne on aga lai ja ta võib nõuda paljude sihtide ja suundade arvestamist.

Matemaatika õpetamise eesmärkidena toob prof. G. Rägo esile praktilise ja haridusliku eesmärgi. Praktiline eesmärk nõuab esmajärjekorras selliste matemaatikaalaste teadmiste ja oskuste õpetamist, mida on vaja kõigile, hoolimata elukutsest. Hariduslik eesmärk teenib aga peamiselt neid, kes jätkavad õpinguid pärast keskkooli lõpetamist. Siin on eriline rõhk seatud teoreetilistele küsimustele ja abstraktsele mõtlemisele. Hariduslik eesmärk jaotatakse formaalloogiliseks, tunnetuslikuks ja rakenduslikuks.

TÜKELDAMISÜLESANDED

A. Leiten

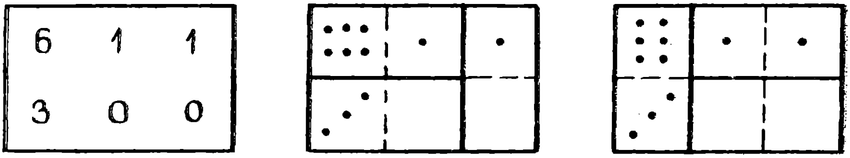
Tükeldamisega seotud probleeme esineb igapäevases elus küllalt palju. Üsna sageli aga annavad tükeldamisülesanded huvitavat materjali mitmesuguste peamurdmisülesannete jaoks, mis rakenduslikust küljest võib-olla erilist huvi ei pakugi. Niisuguste ülesannete matemaatiline formuleerimine ja lahendamine ei nõua lugejalt üldreeglina erilist matemaatilist ettevalmistust, kuna lahendusi saab enamasti esitada piltliku või skemaatilise materjali abil, sellele vaatamata peaksid nad pakkuma mõnusat ajaviidet igale matemaatikahuvilisele.

Vaatleme näiteks järgmist ülesannet. Tasandil soovitakse eristada teatav küllalt suur arv ühesuguse etteantud pindalaga korrapärase hulknurga kujulisi maatükke, mis külgepidi võivad ka kokku puutuda. Millised hulknurgad tuleks valida, kui maatükkide tarastamiseks soovitakse kulutada võimalikult vähe materjali? Kui antud ülesande lahendamisel joonistada tasandi kõikvõimalikud tükeldamised korrapärasteks hulknurkadeks, siis on lihtne näha, et maatükkidel peab olema korrapärase kuusnurga kuju.[1]

Tükeldamisprobleeme võib püstitada ka järgmisel viisil. *Jaotage antud kujund etteantud kujuga tükkideks nii, et jaotus oleks mingis mõttes parim.* Kui maatüki jaotamine toimub vastava teedevõrgu väljaehitamise teel (maatüki kuivendamisel võib olla tegemist kraavide võrguga jne.), siis võib antud ülesande parimaks lahendiks lugeda lahendit, mille puhul tükeldamine on seotud minimaalsete kulutustega.

Doominomaatriksi jaotamisel doominokivideks võivad huvi pakkuda ainult tükeldamised, mille puhul saadakse erinevad doominokivid (vt. joon. 1; selgituseks olgu märgitud, et doominomaatriks on ristkülikukujuline maatriks, mis sisaldab vaid doominosilmadele vastavaid täisarve 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6). Tükeldamine on üsna väikese vaevaga selgeksõpetatav ka elektronarvutitele. Nii on TRÜ Arvutuskeskuses koostatud arvutile «Ural-4» prog-

[1] Ülesanne kuulub nn. parketiga katmise ülesannete hulka, selle lahendamist on vaadeldud näiteks raamatus H. Steinhaus. Kaleidoskop der Mathematik. Berlin, 1959.



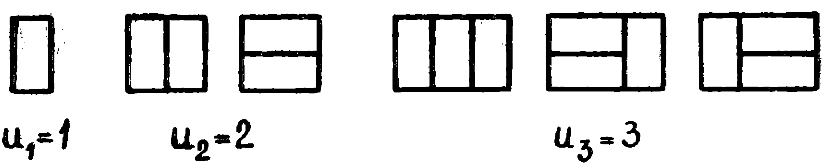
Joonis 1.

ramm, mille abil saab leida doominomaatriksite $2 \times k$ $(k = 1, 2, \ldots$ $\ldots, 28)$ kõik tükeldamised erinevateks doominokivideks.

Parima tükeldamise otsimisel ülalformuleeritud tükeldamisprobleemide jaoks on sageli kasulik teada võimalike tükeldamiste arvu. See annab näiteks võimaluse hinnata ülesande lahendamise aega elektronarvutil. Ühtlasi tuleb märkida, et praktilise võimaluse tegelikeks tükeldamisteks (probleemi lahendamise loogilise skeemi) annavad enamasti just võimalike tükeldamiste arvu valemite tõestused. Muidugi võib mistahes kujuga kujundite tükeldamine etteantud kujundeiks põhineda ka iga tüki võimalike asendite loetlemisel ja saadud asendite kombineerimisel ülesande mõneks lahendiks, kuid see tee on ikkagi liialt pikk ja töömahukas.

Järgnevalt tuletame arvutusvalemid võimalike tükeldamiste arvu leidmiseks mõnede tükeldamisülesannete jaoks. Ülesannete formuleerimisel tuleb ikka silmas pidada tükeldamise võimalikkust (tükeldatava kujundi pindala peab jaguma tüki pindalaga).

Näide 1. *Mitmel viisil saab ristküliku* $2 \times k$, $k = 1, 2, \ldots$ *jaotada ristkülikuteks* 2×1?



Joonis 2.

Olgu u_k võimalike tükeldamiste arv. Jada u_k esimesed liikmed on $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_3 = 3$ (vt. joon. 2). Defineerime ka jada nullinda liikme $u_0 = 1$. Näitame nüüd, et jada liikmeid alates teisest võib arvutada järgmise rekurrentse seose abil:

$$u_k = u_{k-1} + u_{k-2}, \quad k = 2, 3, \ldots \qquad (1)$$

Tõepoolest, olgu teada tükeldamiste arvud u_{k-1} ja u_{k-2} vastavalt ristkülikute $2 \times (k-1)$ ja $2 \times (k-2)$ jaotamisel. Ristküliku $2 \times k$ tükeldamisel võib seejuures paremalt esimene ristkülik 2×1 asetseda kas vertikaalselt või horisontaalselt, rohkem või-

$$u_k = u_{k-1} + u_{k-2}$$

Joonis 3.

malusi ei ole (vt. joon. 3). Esimesel juhul tekib ülejäänud ristkülikute paigutamiseks u_{k-1} võimalust ning teisel juhul u_{k-2} võimalust ($k \geqslant 2$). Neid võimalusi summeerides jõuamegi võrduseni (1).

Valemi (1) järgi saab nüüd arvutada doominomaatriksi 2×28 erinevateks kivideks jaotamiste arvu ülemise tõkke, selleks on $u_{28} = 514\,229$. Jada u_k esimesed liikmed on

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots$$

Saadud jada nimetatakse Fibonacci jadaks. Seda tunti juba 750 aastat tagasi. Nimelt vaatles itaalia matemaatik Fibonacci (Leonardo Pisast, umb. 1170—1250) järgmist ülesannet. Paar küülikuid asetati igast küljest piiratud ruumi, et teada saada, kui palju küülikupaare sünnib aasta jooksul, kui iga paar toob igal kuul ilmale ühe paari ning küülikud paljunevad alates teisest kuust pärast sündimist. Eeldades, et esimene paar annab esimesel kuul järeltulijaid, saame k-nda kuu alguseks kokku u_k paari küülikuid, kusjuures arvud u_k on parajasti Fibonacci jada liikmed. Võib veel märkida, et Fibonacci jada arvudel on terve rida huvitavaid omadusi, näiteks *u_n jagub arvuga u_m parajasti siis, kui $n+1$ jagub $(m+1)$-ga, kehtivad võrdused*

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u_{n+2} - 2,$$
$$u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2 = u_n u_{n+1} - 1$$

jne. Fibonacci jada on tuntud mitte ainult matemaatikutele, vaid ka looduseuurijatele. Fibonacci arvudega on kirjeldatavad puulehtede asetus, käbide ehitus jm.

Tuletame Fibonacci jada elementide u_k arvutamiseks veel otsese valemi.[2]

Selleks otsime võrrandi (1) lahendit geomeetrilise progressiooni $u_k = q^k$ kujul. Asendades selle võrrandisse (1), saame q jaoks tingimuse

$$q^k = q^{k-1} + q^{k-2}$$

ehk pärast taandamist teguriga q^{k-2}

$$q^2 = q + 1.$$

---

[2] Fibonacci arvudest ja nende omadustest on pikemalt juttu brošüüris: Н. Н. Воробьев. Числа Фибоначчи. М., 1969. Lugeja võib sealt leida ka järgneva tuletuskäigu täieliku esituse.

Viimase võrrandi lahenditeks on

$$q_1 = \alpha = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \quad \text{ja} \quad q_2 = \beta = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}).$$

Seega saime võrrandi (1) kaks lahendit α^k ja β^k. Ilmselt on võrrandi (1) lahendiks ka

$$u_k = c_1\alpha^k + c_2\beta^k,$$

kus c_1 ja c_2 on suvalised konstandid. Püüame neid konstante leida nii, et oleksid rahuldatud algtingimused

$$u_0 = c_1 + c_2 = 1, \quad u_1 = c_1\alpha + c_2\beta = 1$$

ehk

$$c_1 + c_2 = 1, \quad \frac{1}{2}c_1(1 + \sqrt{5}) + \frac{1}{2}c_2(1 - \sqrt{5}) = 1.$$

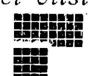
Siit saame

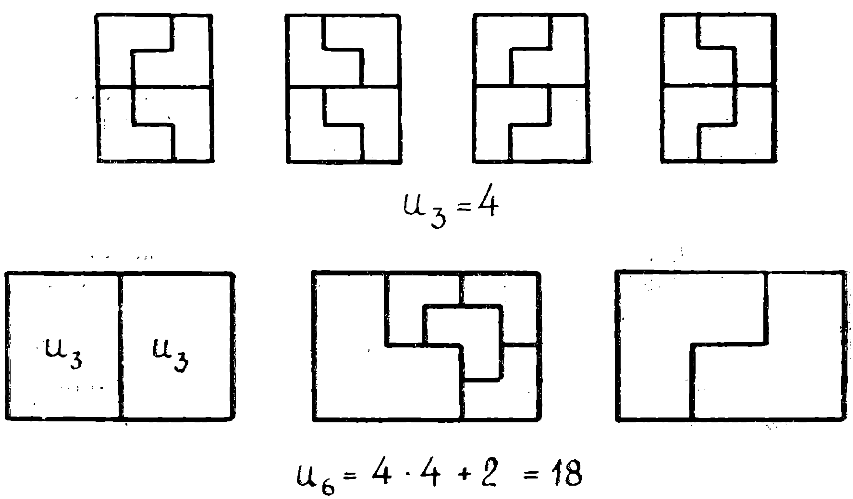
$$c_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}, \quad c_2 = -\frac{1 - \sqrt{5}}{2\sqrt{5}},$$

järelikult

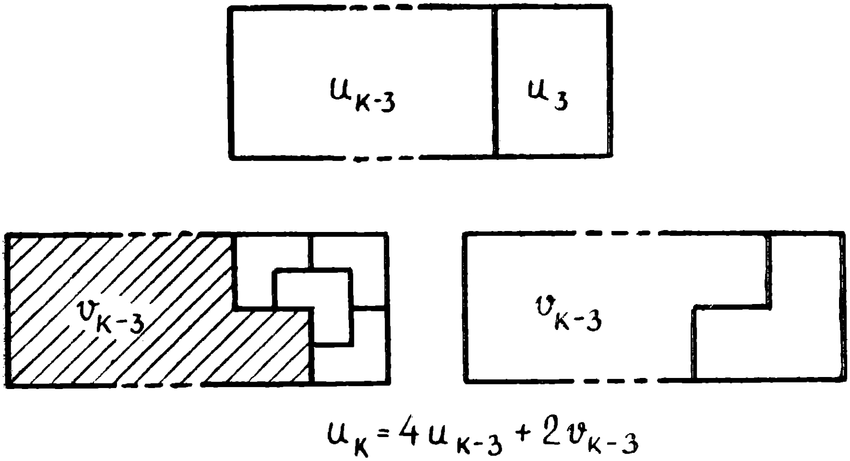
$$u_k = c_1\alpha^k + c_2\beta^k = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right],$$

$$k = 0, 1, \ldots$$

Näide 2. *Mitmel viisil saab ristküliku $4 \times k$, $k = 3, 6, \ldots$ jaotada kujunditeks*  *?*



Joonis 4.



Joonis 5.

Olgu u_k võimalike tükeldamiste arv. Jada u_k esimesed liikmed on $u_3 = 4$, $u_6 = 18$ (vt. joon. 4). Defineerime $u_0 = 1$. Näitame nüüd, et jada u_k järgmisi liikmeid saab arvutada järgmise rekurrentse seose abil:

$$u_k = 10u_{k-3} - 22u_{k-6} - 4u_{k-9}, \quad k = 9,\ 12,\ \ldots \tag{2}$$

Tõepoolest, olgu teada tükeldamiste arvud u_{k-3}, u_{k-6}, u_{k-9} vastavalt ristkülikute $4\times(k-3)$, $4\times(k-6)$ ja $4\times(k-9)$ jaotamisel. Osutub, et ristküliku $4\times k$ tükeldamisvõimalused on ammendatud joonisel 5 esitatud jaotusjoonte vaatlemisega (ära on lõigatud kujund pindalaga 4×3), kusjuures kehtib võrdus

$$u_k = 4u_{k-3} + 2v_{k-3}, \tag{3}$$

milles v_{k-3} tähistab joonisel 5 viirutatud kujundi tükeldamiste arvu. Viimase kujundi tükeldamised on omakorda ammendatud joonisel 6 kujutatud jaotusjoonte vaatlemisega (jälle on ära lõigatud kujund pindalaga 4×3), kusjuures leiab aset seos

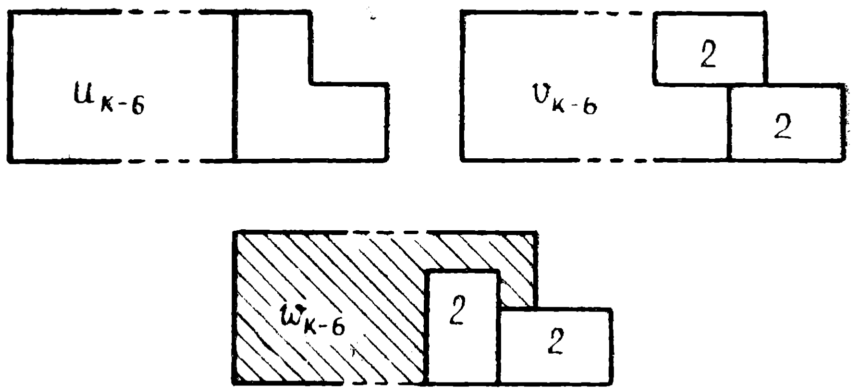
$$v_{k-3} = u_{k-6} + 4v_{k-6} + 4w_{k-6}, \tag{4}$$

milles w_{k-6} tähistab joonisel 6 viirutatud kujundi tükeldamiste arvu. Viimati nimetatud kujundi jaotamisel osutub, et uusi kujundeid enam ei teki (vt. joon. 7), kehtib aga võrdus

$$w_{k-6} = 2v_{k-9} + 2w_{k-9}. \tag{5}$$

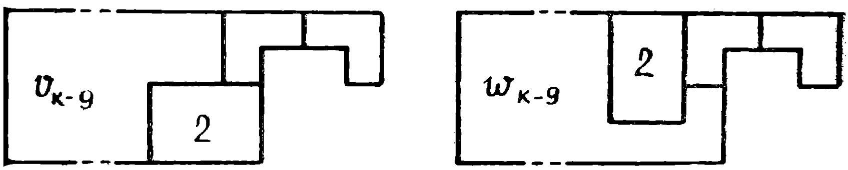
Avaldame nüüd seosest (4) w_{k-6} ja w_{k-9} (viimasel juhul lähtume võrdusega (4) ekvivalentsest avaldisest $v_{k-6} = u_{k-9} + 4v_{k-9} + 4w_{k-9}$) ning asendame võrdusesse (5). Tulemusena saame seose

$$v_{k-3} = u_{k-6} - 2u_{k-9} + 6v_{k-6}.$$



$$v_{k-3} = u_{k-6} + 4v_{k-6} + 4w_{k-6}$$

Joonis 6.



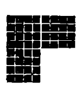
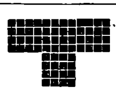
$$w_{k-6} = 2v_{k-9} + 2u_{k-9}$$

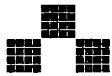
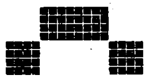
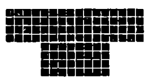
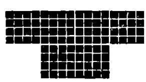
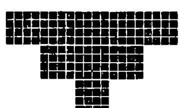
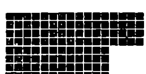
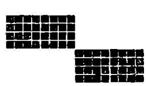
Joonis 7.

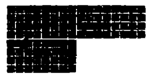
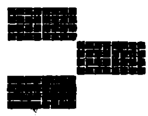
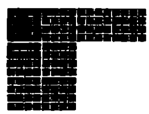
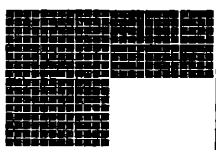
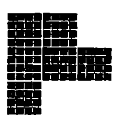
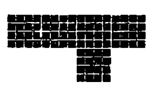
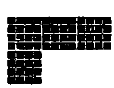
Edasi avaldame seosest (3) v_{k-3} ja v_{k-6} ning asendame need viimati saadud võrdusesse, mis annabki rekurrentse valemi (2).

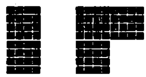
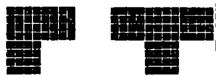
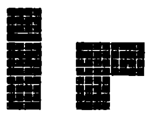
Ülalkirjeldatud arutluskäik on üsna sobiv ka teiste analoogiliselt formuleeritud tükeldamisülesannete lahendamiseks, viimaste väikese loetelu võib leida koondtabelis. Selgituseks olgu märgitud, et valemite mitterekurrentne kuju on seal ära toodud vaid juhul, kui see on lihtsalt avaldatav. Tabeli lõpuosas on mõned näited ka ruumiliste kujundite tükeldamisest, samuti on vaadeldud ülesandeid, kus tükkidel võib olla rohkem kui üks kuju.

Lugeja võiks veel jõudu proovida järgmiste probleemide kallal, mis käesoleva kirjutise raamidesse ei mahtunud. Kui näiteks nõuda, et tükid ei tohi olla ligemal kui $d > 0$, saame tükeldamisülesande teatava üldistuse, nn. mahutamisülesande. On võimalik vaadelda ka esialgse ülesande pöördülesannet — võimalike tükeldamiste arvu valemi järgi tükeldamisprobleemi enda konstrueerimist.

Jrk. nr.	Tükeldatav kujund	Tükkide kuju	Võimalike tükeldamiste arv
1	Ristkülik $2 \times k$ $k = 1, 2, \ldots$	Ristkülik 2×1	$u_k = u_{k-1} + u_{k-2}$, $k = 2, 3, \ldots$ $u_0 = u_1 = 1$, $u_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right]$, $k = 0, 1, \ldots$
2	Ristkülik $p \times k$ $k = 1, 2, \ldots;$ $p \geqslant 2$	Ristkülik $p \times 1$	$u_k = u_{k-1} + u_{k-p}$, $k = p, p+1, \ldots$ $u_0 = u_1 = \ldots = u_{p-1} = 1$
3	Ristkülik $(ab) \times k$ $k = 1, 2, \ldots$	Ristkülik $a \times b$ $(a < b, (a, b) = 1)$	$u_k = u_{k-a} + u_{k-b}$, $k > b$ $u_a = u_{2a} = \ldots = u_{[b/a]a} = u_b = 1$, ülejäänud $u_i = 0$ $(i < b)$ (nurksulud indeksis tähistavad siin arvu täisosa)
4	Ristkülik $3 \times k$ $k = 2, 4, \ldots$	Ristkülik 2×1	$u_k = 4u_{k-2} - u_{k-4}$, $k = 4, 6, \ldots$ $u_0 = 1, u_2 = 3$, $u_k = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(2+\sqrt{3})^{k/2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}(2-\sqrt{3})^{k/2}$, $k = 0, 2, \ldots$
5	Ristkülik $4 \times k$ $k = 1, 2, \ldots$	Ristkülik 2×1	$u_k = u_{k-1} + 5u_{k-2} + u_{k-3} - u_{k-4}$, $k = 3, 4, \ldots$ $u_{-1} = 0,\ u_0 = u_1 = 1,\ u_2 = 5$
6	Ristkülik $4 \times k$ $k = 3, 6, \ldots$		$u_k = 10u_{k-3} - 22u_{k-6} - 4u_{k-9}$, $k = 9, 12, \ldots$ $u_0 = 1,\ u_3 = 4,\ u_6 = 18$
7	Ristkülik $4 \times k$ $k = 4, 8, \ldots$		$u_k = 3u_{k-4}$, $k = 8, 12, \ldots$ $u_4 = 2$, $u_k = 2 \cdot 3^{k/4-1}$, $k = 4, 8, \ldots$

Jrk. nr.	Tükeldatav kujund	Tükkide kuju	Võimalike tükeldamiste arv
8	Ristkülik $4 \times k$ $k = 3, 6, \ldots$		$\sqrt{u_k} = \sqrt{u_{k-3}} + 2\sqrt{u_{k-6}} - \sqrt{u_{k-9}}$, $k = 9, 12, \ldots$ $\sqrt{u_0} = \sqrt{u_3} = 1, \sqrt{u_6} = 2$
9	Ristkülik $4 \times k$ $k = 2, 4, \ldots$		$u_k = 2u_{k-2} + 2u_{k-4} - u_{k-6}$, $k = 6, 8, \ldots$ $u_0 = u_2 = 1, u_4 = 4$, $u_k = \frac{1}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k/2+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k/2+1}\right]^2$, $k = 0, 2, \ldots$
10	Ristkülik $4 \times k$ $k = 6, 12, \ldots$		$u_k = 2u_{k-6}$, $k = 12, 18, \ldots$ $u_6 = 1$, $u_k = 2^{k/6}$, $k = 6, 12, \ldots$
11	Ristkülik $8 \times k$ $k = 6, 12, \ldots$		$u_k = 8u_{k-6}$, $k = 12, 18, \ldots$ $u_6 = 2$, $u_k = 2 \cdot 8^{k/6-1}$, $k = 6, 12, \ldots$
12	Ristkülik $6 \times k$ $k = 6, 12, \ldots$		$u_k = 3u_{k-6}$, $k = 12, 18, \ldots$ $u_6 = 2$, $u_k = 2 \cdot 3^{k/6-1}$, $k = 6, 12, \ldots$
13	Ristkülik $4 \times k$ $k = 7, 14, \ldots$		$u_k = 10u_{k-7} - 16u_{k-14}$, $k = 14, 21, \ldots$ $u_0 = 1, u_7 = 6$, $u_k = \frac{2}{3} \cdot 8^{k/7} + \frac{1}{3} \cdot 2^{k/7}$, $k = 0, 7, \ldots$
14	Ristkülik $4 \times k$ $k = 2, 4, \ldots$		$u_k = u_{k-2} + u_{k-4}$, $k = 4, 6, \ldots$ $u_0 = u_2 = 1$, $u_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k/2+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k/2+1}\right]$, $k = 0, 2, \ldots$

Jrk. nr.	Tükeldatav kujund	Tükkide kuju	Võimalike tükeldamiste arv
15	Ristkülik $4 \times k$ $k = 3, 6, \ldots$		$u_k = 2u_{k-3} + 8u_{k-6} - 14u_{k-12}$, $k = 12, 15, \ldots$ $u_0 = 1,\ u_3 = 2,\ u_6 = 8,\ u_9 = 32$
16	Ristkülik $12 \times k$ $k = 1, 2, \ldots$		$u_k = u_{k-3} + u_{k-4}$, $k = 4, 5, \ldots$ $u_0 = 1,\ u_1 = u_2 = 0,\ u_3 = 1$
17	Ristkülik $5 \times k$ $k = 16, 32, \ldots$		$u_k = 8u_{k-16}$, $k = 16, 32, \ldots$ $u_0 = 1$, $u_k = 8^{k/16}$, $k = 0, 16, \ldots$
18	Ristkülik $8 \times k$ $k = 9, 18, \ldots$		$u_k = 8u_{k-9} - 14u_{k-18}$, $k = 18, 27, \ldots$ $u_0 = 1,\ u_9 = 4$, $u_k = \frac{1}{2}\left[(4+\sqrt{2})^{k/9} + (4-\sqrt{2})^{k/9}\right]$, $k = 0, 9, \ldots$
19	Ristkülik $6 \times k$ $k = 3, 6, \ldots$		$u_k = 2u_{k-3} + 2u_{k-6} - 4u_{k-9} +$ $+ 2u_{k-15}$, $k = 15, 18, \ldots$ $u_0 = 1,\ u_3 = 0,\ u_6 = 2,\ u_9 = 0$, $u_{12} = 4$
20	Ristkülik $9 \times k$ $k = 12, 24, \ldots$		$u_k = 2u_{k-12}$, $k = 12, 24, \ldots$ $u_0 = 1$, $u_k = 2^{k/12}$, $k = 0, 12, \ldots$
21	Ristkülik $5 \times k$ $k = 10, 20, \ldots$		$u_k = 10u_{k-10}$, $k = 10, 20, \ldots$ $u_0 = 1$, $u_k = 10^{k/10}$, $k = 0, 10, \ldots$
22	Ristkülik $4 \times k$ $k = 2, 4, \ldots$		$u_k = 3u_{k-2} + 7u_{k-4} - 3u_{k-6} -$ $- 7u_{k-8} - 7u_{k-10} - 2u_{k-12} +$ $+ 2u_{k-14} + 2u_{k-16}$, $k = 16, 18, \ldots$ $u_0 = 1,\ u_2 = 2,\ u_4 = 10,\ u_6 = 42$, $u_8 = 184,\ u_{10} = 800,\ u_{12} = 3476$, $u_{14} = 15108$

Jrk. nr.	Tükeldatav kujund	Tükkide kuju	Võimalike tükeldamiste arv
23	Ristkülik $2 \times k$ $k = 1, 2, \ldots$		$u_k = 2u_{k-1} + u_{k-3}$, $k = 3, 4, \ldots$ $u_0 = u_1 = 1,\ u_2 = 2$
24	Ristkülik $2 \times k$ $k = 1, 2, \ldots$		$u_k = u_{k-2} + 2u_{k-3}$, $k = 3, 4, \ldots$ $u_0 = 1,\ u_1 = u_2 = 0$
25	Ristkülik $2 \times k$ $k = 3, 6, \ldots$		$u_k = 4u_{k-3} - u_{k-6}$, $k = 6, 9, \ldots$ $u_0 = 1,\ u_3 = 3$, $u_k = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}} (2+\sqrt{3})^{k/3} +$ $+ \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}} (2-\sqrt{3})^{k/3}$, $k = 0, 3, \ldots$
26	Risttahukas $2 \times 2 \times k$ $k = 1, 2, \ldots$	Risttahukas $2 \times 2 \times 1$	$u_k = u_{k-1} + 2u_{k-2}$, $k = 2, 3, \ldots$ $u_0 = u_1 = 1$ $u_k = \frac{1}{3} (2^{k+1} - (-1)^{k-1})$, $k = 0, 1, \ldots$
27	Risttahukas $p \times p \times k$ $k = 1, 2, \ldots$ $p \geqslant 2$	Risttahukas $p \times p \times 1$	$u_k = u_{k-1} + 2u_{k-p}$, $k = p, p+1, \ldots$ $u_0 = u_1 = \ldots = u_{p-1} = 1$
28	n-mõõtmeline risttahukas $p \times p \times \ldots$ $\ldots \times p \times k$ $k = 1, 2, \ldots$ $p \geqslant 2$	n-mõõtmeline risttahukas $p \times p \times \ldots$ $\ldots \times p \times 1$	$u_k = u_{k-1} + (n-1)u_{k-p}$, $k = p, p+1, \ldots$ $u_0 = u_1 = \ldots = u_{p-1} = 1$.

LOBATŠEVSKI GEOMEETRIA

K. Ariva

IV. MUDEL

Käesoleva artiklite seeria üle-eelmises osas[1] näitasime, et Lobatševski tasandil on kahe erineva sirge võimalikke vastastikuseid asendeid kolm: sirged kas lõikuvad või on teatud suunas paralleelsed või hajuvad. Seejuures selgus, et paralleelsete või hajuvate sirgete paari kujutamiseks joonisel oleme sunnitud kasutama kõverjooni. Olukorda, mis Lobatševski geomeetrias esineb lõikuvate sirgete puhul, ei saa aga joonisel näidata isegi mitte kõverjoonte abil, sest igaühes neljast nurgast, mille määravad lõikuvad sirged, peavad haarad painduma teineteisest eemale. Seepärast ei ole sirgete asendamine kõverjoontega õige meetod Lobatševski geomeetrias kehtivate vahekordade piltlikuks selgitamiseks tasandilisel joonisel. Pealegi me ju ei loe Lobatševski tasandi sirgeid kõverjoonteks, mistõttu eelnevate joonistega tekitatud kujutlus, nagu oleksid sirged tõepoolest mingil salapärasel viisil kõveraiks painutatud, on igati mittesobiv.

Näitame nüüd Lobatševski geomeetria joonistega varustamiseks loomulikuma meetodi, mille kohta on teada, et see ei tekita edaspidi mingeid vastuolusid.

Raskused, mis tekivad Lobatševski maailma kaardistamisel

Nagu eespool märkisime, võib arvata, et Lobatševski geomeetria erinevus Eukleidese geomeetriast ilmneb alles tasandi väga suurte piirkondade uurimisel. Nimelt selles seisnebki probleemi kogu raskus. Eukleidese tasandi[2] suurte piirkondade joonisel kujutamist põhimõtteliselt miski ei takista, sest kõigil piirkondadel on siin ühesugune struktuur. Näiteks väga suure hulknurga omaduste selgitamisel võime siin vaadelda väikest, joonisele mahtuvat sarnast hulknurka. Lobatševski geomeetrias on olukord hoopis

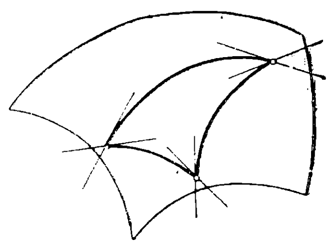
[1] Matemaatika ja kaasaeg, XV, lk. 67—80.

[2] S. t. tasandi, mille puhul kehtivad kõik Eukleidese aksioomid, sealhulgas V postulaat.

teine. Teatavasti selles geomeetrias sarnaseid kujundeid ei leidu: erinevate mõõtmetega piirkondadel on siin erinev struktuur. Nimelt see asjaolu tingibki moonutused ja vastuolud meie joonistel.

Erinevust kahe geomeetria vahel võib piltlikult kirjeldada ka nii. Uurides suurt kujundit Eukleidese tasandil mõõdame sellele kujundile iseloomulikud nurgad ja lõigud, kusjuures lõikude mõõtmisel kasutame õige pikka mõõdulatti. Seejärel kanname tulemused joonisele, säilitades küll kõik mõõtarvud, kuid kasutades väiksemat, nimelt joonise jaoks küllalt väikest «mõõdulatti». Kasutatud mõõdulattide pikkuste suhte lisamine joonisele annab siis suure kujundi kohta kogu informatsiooni, mida joonis üksi — suure kujundi plaan — otseselt ei sisalda. Lobatševski tasandi kujundeid sel viisil plaanistada ei saa, sest joonestatud kujund erineb siin omadustelt suurest kujundist ja kahe mõõdulati suhte lisamine eesmärgile ei vii. Õige plaani valmistamist takistab siin asjaolu, et kõiki leitud mõõtarvudega nurki üldiselt ei ole võimalik vajalikul viisil seotult joonisel kujutada.

Viimast väidet on kerge mõista, kui meenutada, et mittekongruentsetel kolmnurkadel on Lobatševski geomeetrias erinevad sisenurkade summad. Seepärast antud kolmnurga kõigi külgede ühes ja sellessamas suhtes vähendamisel tekib uus kolmnurk, mille nurgad erinevad esialgse kolmnurga vastavaist nurkadest. Selline omadus on kolmnurkadel igal kõverpinnal (joon. 1). Tõsi küll, tegemist on ainult teatava analoogiaga, sest kõverpinnal asetseva kolmnurga küljed on kõverjoonelised. Kolmnurga nurkadeks nimetatakse siin nurki nende kõverjoonte puutujate vahel, mis on tõmmatud kolmnurga tippudest.



Joonis 1.

Kõige lihtsam on kolmnurga nurkade ja külgede vahelist sõltuvust märgata lihtsaima kõverpinna — sfääri korral. Sfääri kahe punkti vahelise kauguse määrab siin neid punkte läbiva suurringjoone kaar. Sirgeid asendavad suurringjooned — neid võib lugeda «sirgeteks» sfäärilises geomeetrias [3]. Suurringjoonte abil moodustatud kolmnurkade hulgas ei ole sarnaseid. Näiteks ekvaator ja kaks meridiaani gloobusel moodustavad neli kongruentset kolmnurka, millest igaüks sisaldab kaht täisnurka. Vähendades sellise kolmnurga külgedeks olevaid kaari mingi arv korda saame aga kolmnurga, milles ei ole ühtki täisnurka. Seepärast tekib täpsete geograafiliste kaartide koostamisel samasugune ületamatu takistus, nagu eespool märkasime Lobatševski tasandi kujutamisel.

[3] S. t. geomeetrias, mis käsitleb sfäärile kuuluvate kujundite omadusi sõltumatult ümbritsevast ruumist, samuti nagu planimeetria uurib tasandit.

Iga geograafiline kaart on ebatäpne ja nimelt seda ebatäpsem, mida suuremat Maa piirkonda ta kujutab. Ometi ei ole nende kaartide koostamisel nähtud vaev asjatu, sest abi, mida nad pakuvad geograafia õppijale ja rändurile, ei saa millegagi asendada. Seame eesmärgiks kaardistada ka Lobatševski kahemõõtmelist maailma, teisiti öeldes, Lobatševski tasandit.

Õpime joonestama kogu sirget

Niisiis kahe lõigu suhte abil Lobatševski tasandit kaardistada ei saa. Osutub, et seda on võimalik teha nelja lõigu ja nende teatavate suhete abil. Me ei põhjenda siin seda võimalust täiesti rangelt, sest vastavad arutlused nõuaksid kõrgema geomeetria tundmist. Esitame vaid mõned näitlikud kaalutlused.

Kujutleme, et seisame künkal, millest mööda viib horisondini sirge maantee, ja jälgime selle maantee mõõtmist mõõdulati või -lindiga. Mida kaugemale meist jõuavad mõõtjad, seda lühemana paistab meile mõõdulatt. Tõsi küll — ainult paistab. Aga kui latt meist kaugenedes tõepoolest järjest lüheneks? Siis ei saaks ju üldse mõõta, kipub keelele vastus. Veidi järele mõeldes veendume siiski, et teataval tingimusel on võimalik ka sellise muutuva pikkusega lati abil määrata kahe punkti vahelist kaugust. Tõepoolest, kui on teada mõõtmise tulemus — teatav «mõõtarv» — ja lati muutumise seaduspärasus, näiteks valem, mis väljendab lati pikkuse tema asendi kaudu mõõdetaval lõigul, siis saab arvutada selle lõigu tegeliku pikkuse.

Meie arutluste eesmärki silmas pidades on oluline märkida, et kahaneva latiga mõõtmisel võib tõepoolest tekkida olukord, et iga lõiku ei saa mõõta. Jätame tähele panemata asjaolu, et mõõdulati kahanemine aeglustab mõõtmisprotsessi, sest teatava punktini jõudmiseks tuleb nüüd latti paigutada mõõdetavale lõigule suurem arv kordi. Lepime kokku, et meie mõõtjad on väsimatud ja võivad oma tööd jätkata kuitahes kaua. Ka sellisel eeldusel võib lati kahanemine tingida, et mõõtjad ei jõua teatava punktini isegi siis, kui nad igavesti mõõdaksid. Nii võib juhtuda siis, kui lati pikkus kahaneb tõkestamatult ehk — nagu matemaatikas öeldakse — kui lati pikkuse piirväärtus on null.

Kui kaugel esimene kättesaamatu punkt asub, sõltub siis lati kahanemise kiirusest. Võib välja mõelda olukorra, kus kättesaamatuks osutub juba sellise lõigu teine otspunkt, mille tegelik mõõtarv on 2, s. t. mis on latist kaks korda pikem. Tõepoolest, kui lati kahanemise seaduseks on nõue, et iga kord, kui ta asetada mõõtmiseks vajalikku asendisse, väheneb tema pikkus poolele eelnevast pikkusest, siis tekib tegelike mõõtarvude jada

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$$

mille summa — lõigu mõõdetud osa pikkus — on mõõtmise igal hetkel väiksem kui 2. Alles piirväärtusena, kui latti paigutatakse lõigule lõpmatu arv korda, s. t. kui mõõtmine on kestnud terve igaviku, saadakse tulemuseks arv 2:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots\right)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2.$$

Ka meie väsimatud mõõtjad ei jõua siis mõõtmisega kunagi lõpule, sest igavikul pole lõppu.

Huvitav on aga tähele panna, et «mõõtarv» n, mis vaadeldud juhul saadakse siis, kui lati kahanemist mitte arvestada, võib meie eeldustel olla kuitahes suur. Seepärast meie mõõtjate jaoks, kes seisavad niisuguse lõigu keskpunktis, mille pikkus on neli korda suurem kasutatava mõõdulati kahanevast pikkusest, on ülesanne — mõõta selle lõigu pikkus — analoogiline katsele mõõta kogu sirge pikkus hariliku jäiga mõõdulatiga. Analoogia on täielik, kui eeldada, et mõõtjad ei ole oma mõõdulati muutumisest teadlikud (muidugi peavad nad siis ise muutuma samal viisil nagu nende latt). Mõõdetava lõigu otspunktid näivad neile siis punktidena, kus sirge lõikub horisondiga. Kuidas nad ka ei kiirustaks oma tööga, jäävad need punktid mõõtjaile ikka kättesaamatuiks.

Teisest küljest osutub nüüd võimatuks mõõtmistulemusi joonisel kujutada, kui säilitada «mõõtarvud» ja kasutada joonise valmistamisel muutumatut, seejuures kuitahes väikest «latti». Tõepoolest, sellise mõõtmisprotsessi kujutisena peaks joonisele mahtuma nüüd terve sirge.

Tehtud tähelepanekud näitavadki tee terve sirge kujutamiseks joonisel, kusjuures joonise mõõtmed on valitavad täiesti vabalt. Selleks tarvitseb vaid vahetada mõõdulattide osad. Olgu pealegi tegelikkude kauguste mõõtmisel kasutatava lati pikkus muutumatu — meie tahame ju selle latiga mõõta kogu sirge. Loeme aga muutuvaks teise «lati» pikkuse — selle, mille abil me kanname mõõtmistulemused joonisele. Sõltugu selle «lati» pikkus tema asendist lõigul, millele me mõõtmistulemused kanname. Kui nüüd lisaks nõuda, et «lati» lähenemisel lõigu otspunktile tema pikkus küllalt kiiresti piiramatult kahaneb, siis saabki antud lõigul kujutada kuitahes suuri kaugusi.

Küsimus on õigupoolest ainult sobiva valemi koostamises, mis kirjeldab «lati» pikkuse muutumist. Sellise valemi koostamisel ei sobi eelneva näitena esitatud võte, mille kohaselt lati pikkust tuli muuta n.-ö. hüppeliselt — jagada kahega igal ümberpaigutamisel. Vajalik on lati pikkuse pidev muutumine, nii et seda pikkust oleks võimalik arvutada lati iga asendi korral mõõdetaval lõigul. Selleks tuleb valemis arvesse võtta lati kummagi otspunkti asend mõõdetava lõigu otspunktide suhtes, s. t. kasutada lati otspunktide kaugusi lõigu otspunktidest.

Koostamegi pärast neid ettevalmistavaid kaalutlusi valemi, mis laseb meil vaadelda vabalt valitud lõigu AB sisepunktide hulka Lobatševski tasandi või ruumi sirge punktide hulgana.

Olgu X ja Y lõigu AB mingid sisepunktid (joon. 2). Lõigu XY asendit lõigus AB kirjeldavad nende lõikude otspunktidega määratud lõikude suhted $\frac{XA}{XB}$ ja $\frac{YA}{YB}$. Uurime suhet

Joonis 2.

$$\frac{XA}{XB}:\frac{YA}{YB}=(XA\cdot YB):(XB\cdot YA).$$

Kui punkt Y läheneb mööda lõiku AB punktile B (kirjutame sel puhul: $Y\to B$), siis lõik $YA=AY$ kasvab lõiguks AB ja lõik YB kahaneb punktiks B (lühidalt: $AY\to AB$ ja $BY\to 0$). Kui seejuures punkt X on fikseeritud, siis on selge, et uuritav suhe kahaneb piiramatult. Seega

$$\lim_{Y\to B}\left(\frac{XA}{XB}:\frac{YA}{YB}\right)=0. \tag{1}$$

Analoogiliselt veendume, et kui fikseeritud X korral $Y\to A$, s. t. $YA\to 0$ ja $YB\to AB$, siis kasvab uuritav suhe tõkestamatult:

$$\lim_{Y\to A}\left(\frac{XA}{XB}:\frac{YA}{YB}\right)=\infty. \tag{2}$$

Lõpuks, kui $Y\to X$, siis $YA\to XA$ ja $YB\to XB$, mistõttu

$$\lim_{Y\to X}\left(\frac{XA}{XB}:\frac{YA}{YB}\right)=1. \tag{3}$$

Lõigul XY on Eukleidese geomeetrias teatav kindel pikkus, mida saab mõõta näiteks mõõtejoonlaua abil. Jätame selle pikkuse vaatlusest kõrvale ja nimetame lõigu XY **pikkuseks** Lobatševski geomeetrias arvu

$$|XY|=k\log_a\left(\frac{XA}{XB}:\frac{YA}{YB}\right); \tag{4}$$

kus a ja k on teatavad, kõigi lõikude jaoks samad arvud ning $a>1$ ja $k>0$. Seejuures valime esimese vaadeldavast neljast lõigust (valemis (4) lõigu XA) alati nii, et ta sisaldab lõiku, mille pikkus defineeritakse. Niisiis joonisel 2 kujutatud lõikude korral

$$|YX|=k\log_a\left(\frac{YB}{YA}:\frac{XB}{XA}\right).$$

Et $\frac{YB}{YA}:\frac{XB}{XA}=\frac{XA}{XB}:\frac{YA}{YB}$ siis $|YX|=|XY|$.

Niisuguse definitsiooni õigustuseks märgime, et lõigu AB iga kahe sisepunkti X ja Y korral $|XY| \geqslant 0$, sest kui esimeseks tehtud kokkuleppe põhjal valitud lõiguks on XA, siis $XA \geqslant YA$ ja $XB \leqslant YB$, järelikult

$$\frac{XA}{XB} : \frac{YA}{YB} \geqslant 1.$$

Seejuures $|XY| = 0$ parajasti siis, kui $X = Y$, s. t. kui punktid X ja Y ühtivad. Kui Z on lõigu XY sisepunkt, siis — nagu on kerge kontrollida valemi (4) abil — kehtib võrdus[4]

$$|XY| = |XZ| + |ZY|.$$

Niisugused omadused on lõigu pikkusel ka eukleidilises geomeetrias.

Kõige olulisem antud definitsioonis on see, et punkti Y kaugenemisel lõigu AB fikseeritud punktist X mööda lõiku AB kasvab suurus $|XY|$ tõkestamatult. Tõepoolest, võrduste (1), (2) ja (4) põhjal

$$\lim_{Y \to B} |XY| = \lim_{Y \to A} |XY| = \infty. \tag{5}$$

Seega liikudes mööda lõiku AB ja jäädes selle lõigu piiridesse, s. t. punktide A ja B vahele, saab punkt eemalduda igast A ja B vahel fikseeritud punktist kuitahes kaugele, kui vaid kauguse all mõista valemiga (4) määratud arvu. Seejuures võib võrduste (5) põhjal selline tõkestamatu kaugenemine toimuda mõlemas suunas. Siit ilmneb, et antud definitsiooni mõttes sisaldab lõik AB kuitahes pikki lõike ja lõigu AB iga sisepunkt X jaotab ülejäänud sisepunktide hulga kaheks osaks, kusjuures kumbagi osa koos punktiga X võib vaadelda tervenisti lõigus AB sisalduva kiirena, mille alguspunkt on X.

Punktide A ja B vahel olevate punktide hulga sellised omadused on kooskõlas meie kujutlusega sirgest. Nimetamegi lõigu AB sisepunktide hulka — ehk nagu ka öeldakse, vahemikku (AB) — millesse kuuluvate lõikude pikkused on määratud valemiga (4), sirgeks Lobatševski mõttes. Punktid A ja B sellele sirgele ei kuulu, s. t. defineeritud «sirge» on ilma otspunktideta, mis jällegi on heas kooskõlas meie kujutlusega.

Niiviisi oleme õppinud kujutama igal kuitahes väiksel joonisel kogu sirget. Sirge sellist kujutist nimetatakse Lobatševski sirge mudeliks Eukleidese tasandil. Enne, kui siit edasi minna kogu Lobatševski tasandi «kaardi» või, nagu ütleme — **mudeli** — koostamisele, peatume veidi geomeetria mudeli mõistel.

---

[4] Selle võrduse kontrolli vt. Matemaatika ja kaasaeg, XII, lk. 27.

Geomeetria ainult arvude ja võrrandite abil

Geomeetria põhimõistetega «punkt», «sirge» ja «tasand» samuti nendest tuletatud mõistetega (nagu lõik, nurk, hulknurk hulktahukas jne.) ei ole ilmtingimata tarvis siduda neid kujutlusi, mis on omandatud koolis. Geomeetria uurib teatava struktuuriga hulki, kusjuures oluline geomeetria jaoks on ainult nende hulkade struktuur, mitte aga see, missugustest konkreetsetest objektidest vaadeldavad hulgad koosnevad.[5] See on, muide, üks põhjustest miks geomeetriat (nagu teisigi matemaatilisi distsipliine) ei saa rajada kujutlustele.

Sellise abstraktse lähenemisviisi õigustamiseks on piisav veenduda, et üks ja seesama geomeetriliste lausete süsteem võib kehtida hulkade puhul, mis oma elementide konkreetselt tähenduselt võivad olla õige erinevad. Sellisel juhul öeldaksegi, et nendel hulkadel on ühine geomeetriline struktuur. Toome paar lihtsat näidet hulkade kohta, milles kehtib Eukleidese geomeetria.

Lähtume esmalt koolistereomeetriast. Olgu r mingi positiivne arv. Nimetame «punktiks» iga kera raadiusega r, s. t. ruumi iga punkti X korral kõigi niisuguste punktide hulka, mille kaugused (Eukleidese mõttes) punktist X ei ületa arvu r. «Sirgeks» nimetame iga lõpmatut pöördsilindrit raadiusega r, s. t. ruumi iga sirge a korral kõigi punktide hulka, mille kaugused sirgest a ei ületa arvu r. Analoogiliselt nimetame «tasandiks» ruumi iga tasandi α korral kõigi punktide hulka, mille kaugused tasandist α ei ületa arvu r. Kaht «punkti» loeme ühtivaiks parajasti siis, kui neil on ühine keskpunkt, kaht «sirget» või kaht «tasandit» aga parajasti siis, kui kõik nende «punktid» on ühised. Seejuures ütleme, et «punkt» kuulub «sirgele», kui «punkti» keskpunkt asetseb «sirge» teljel, ja «tasandile», kui «punkti» keskpunkt asetseb «tasandit» määraval tasandil.

Ei ole raske kontrollida, et nii defineeritud «punktide», «sirgete» ja «tasandite» hulgas saab üles ehitada Eukleidese geomeetria. Õigupoolest on see vahetult selge, sest kõik defineeritud objektide vahelised vahekorrad taanduvad samasugustele vahekordadele harilike punktide, sirgete ja tasandite vahel. Ometi on defineeritud hulk oma elementide konkreetse tähenduse poolest erinev Eukleidese ruumist kooligeomeetria mõttes. Seepärast ütleme, et oleme kooligeomeetria vahenditega ehitanud selle geomeetria mudeli.

Eukleidese geomeetria jaoks saab ehitada veel teisigi mudeleid selle geomeetria enda objektide abil. Huvipakkuvam on aga vaadelda selliseid mudeleid, milles «ehituskivid» on võetud mõnest teisest matemaatilisest teooriast.

---

[5] Vt. Ü. Lumiste. Ruumi mõiste geomeetrias. — Matemaatika ja kaasaeg, XI—XIV.

Esitamegi nüüd teise, rakendustes palju olulisema näite. Piirdume siin lihtsuse mõttes ainult planimeetriaga.

Nimetame punktiks iga kindlas järjekorras võetud (ütleme lühidalt: järjestatud) reaalarvupaari (p, q) ja sirgeks iga sellist järjestatud reaalarvukolmikut (a, b, c), milles vähemalt üks arvudest a ja b erineb nullist.

Loeme punkte (p, q) ja (r, s) ühtivaiks parajasti siis, kui $p = r$ ja $q = s$. Sirgeid (a, b, c) ja (d, e, f) loeme ühtivaiks aga parajasti siis, kui $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$, kusjuures juhul, kui ühes kolmikus mõni arv on null, on ka teises kolmikus vastav arv null. Siit on selge, et sirged (a, b, c) ja (ka, kb, kc) ühtivad iga reaalarvu $k \neq 0$ korral. Samuti ühtivad näiteks sirged $(0, b, 0)$ ja $(0, e, 0)$ mistahes reaalarvude $b \neq 0$ ja $e \neq 0$ korral.

Ütleme, et punkt (p, q) asetseb sirgel (a, b, c) või et sirge (a, b, c) läbib punkti (p, q), kui arvud p ja q rahuldavad lineaarset võrrandit

$$ax + by + c = 0.$$

Saab kontrollida, et selliselt defineeritud punktide ja sirgete hulgas kehtib koolis õpitav planimeetria. See väide tähendab, et defineeritud hulgas saab kasutusele võtta kõik mõisted ja tõestada kõik teoreemid, mida vaadeldakse kooliplanimeetrias.

Toome siin ühe näite. Veendume, et läbi iga kahe erineva punkti läheb parajasti üks sirge.

Olgu (p, q) ja (r, s) vabalt valitud erinevad punktid, s. t. kehtigu vähemalt üks võrratustest $p \neq r$ ja $q \neq s$. Otsime reaalarve a, b ja c, millest vähemalt üks ei ole null ja mille puhul kehtivad võrdused

$$ap + bq + c = 0,$$
$$ar + bs + c = 0.$$

Seega otsime võrrandisüsteemile

$$\begin{cases} px + qy + z = 0, \\ rx + sy + z = 0 \end{cases} \tag{6}$$

lahendit (a, b, c), mis ei koosne ainult nullidest (nullidest koosnev lahend muidugi leidub).

Lahutades süsteemi (6) esimesest võrrandist teise saame võrrandi

$$(p - r)x + (q - s)y = 0. \tag{7}$$

Olgu näiteks $p \neq r$ (kui $q \neq s$, võib arutleda analoogiliselt), siis tuleb lugeda $y \neq 0$, sest vastupidisel juhul $x = 0$ ning süsteemi (6) põhjal ka $z = 0$, kuid lahendit $(0, 0, 0)$ me ei vaja. Seega

$$x : y = -(q - s) : (p - r), \tag{8}$$

mistõttu võib võtta

$$x = s - q,$$
$$y = p - r,$$

kusjuures nendest arvudest vähemalt üks erineb nullist. Asendus ükskõik kumba võrrandisse süsteemis (6) annab väärtuse ka kolmandale tundmatule:

$$z = qr - ps.$$

Süsteemi (6) leitud lahend $(s - q,\ p - r,\ qr - ps)$ ongi sirge, mis läbib vaadeldavaid punkte.

Leitud sirge on ainus, mille vaadeldavad punktid määravad. Tõepoolest tingimuse (8) põhjal sisalduvad võrrandi (7) kõik lubatavad lahendid arvupaaride

$$(x, y) = (t(s - q),\ t(p - r))$$

hulgas, kus t on vabalt valitav nullist erinev reaalarv. Süsteemi (6) esimesest (või teisest) võrrandist saame nüüd kolmanda tundmatu lubatava väärtuse:

$$z = t(qr - ps).$$

Et saadud arvud on iga $t \neq 0$ korral võrdelised arvudega kolmikus $(q - s,\ p - r,\ qr - ps)$, siis osutuvad süsteemi (6) kõik lubatavad lahendid üheks ja sellekssamaks sirgeks.

Oluline on märkida, et vaadeldavate punktide ja sirgete hulgas kehtib ka Eukleidese V postulaat. Tõestame sellega ekvivalentse paralleelide aksioomi: läbi antud sirgele mittekuuluva punkti saab (punkti ja sirgega samal tasandil) tõmmata ainult ühe sirge, mis ei lõika antud sirget.

Olgu antud sirge (a, b, c) ja punkt (p, q), mis ei kuulu sellele sirgele, s. t. mille puhul

$$ap + bq + c \neq 0. \tag{9}$$

Leidub sirge, mis läbib antud punkti ja on antud sirgega paralleelne; selliseks sirgeks on $(a, b, -(ap + bq))$. Tõepoolest, ühelt poolt

$$ap + bq - (ap + bq) = 0,$$

teiselt poolt aga võrrandisüsteemil

$$\begin{cases} ax + bx + c = 0, \\ ax + bx - (ap + bq) = 0 \end{cases}$$

ei ole ühtki lahendit, sest selles on tundmatute vastavad kordajad võrdsed, vabaliikmed aga tingimuse (9) tõttu seda ei ole.

Oletame, et leidub veel teine sirge (d, e, f), mis läbib punkti (p, q) ja on paralleelne sirgega (a, b, c). Sellise sirge korral kehtib võrdus

$$dp + eq + f = 0, \tag{10}$$

kuid puudub lahend võrrandisüsteemil

$$\begin{cases} ax + bx + c = 0, \\ dx + ey + f = 0. \end{cases}$$

(Teine tingimustest tähendab, et sirgetel (a, b, c) ja (d, e, f) ei ole ühist punkti.) Teatavasti saab sellisel süsteemil lahend puududa ainult siis, kui $ae - bd = 0$, s. t.

$$\frac{d}{a} = \frac{e}{b} = t \neq 0.$$

Sel juhul $d = ta$ ja $e = tb$ ning (10) põhjal $f = -t(ap + bq)$. Niisiis saab esitatud tingimusi rahuldada ainult sirge $(ta, tb, -t(ap + bq))$. Kuid see sirge ühtib eespool leitud sirgega $(a, b, -(ap + bq))$. Siit nähtub, et paralleelide aksioom on defineeritud sirgete hulgas tõene.[6]

Samal viisil saab kontrollida Eukleidese planimeetria iga aksioomi ja teoreemi tõesuse vaadeldavate punktide ja sirgete hulgas. Niisiis moodustab see hulk Eukleidese tasandi teatava mudeli — nn. aritmeetilise mudeli.[7]

Mudelid — milleks?

Antud geomeetria mudelite ehitamisel ja uurimisel on kahesugune eesmärk.

Ühelt poolt võimaldab mingi teise teooria objektide abil ehitatud mudel veenduda, et geomeetria, mille jaoks see mudel ehitati, ei sisalda loogilist vasturääkivust. Oht, et selline vasturääkivus esineb, s. t. et antud geomeetrias saab edaspidi tõestada kaks teineteisele vasturääkivat lauset, ei ole ju selle geomeetria enda abil kuidagi välistatav. Tõepoolest, lausete hulk, mida saab sõnastada antud geomeetria objektide kohta, on lõpmatu. Kontrollida nende kõigi tõesust või väärust ei ole muidugi võimalik. Kontrollitud lausete hulk geomeetria igal uurimisetapil on lõplik, seepärast ei saagi olla kindel, et ees ei oota mõni vasturääkivus. Vasturääkivus mingi kahe tõestatud lause vahel tähendab aga vasturääkivust aluseks võetud aksioomide süsteemis. Selline vasturääkivus — kui ta avastatakse — tühistab kõigi juba tõestatud teoreemide kehtivuse. Väljapääsuks sellisest kriitilisest olukorrast

[6] See arutlus näitab veel kord, et aksioom ei ole põrmugi lause, mida kas 1) ei ole tarvis tõestada, sest ta on «ilmne tõde», või 2) ei saa tõestada. Sissejuhatuses (vt. Matemaatika ja kaasaeg, XII—XIII) näitasime, et antud teooria raamides saab iga aksioomi tõestada, kui vaid lugeda aksioomiks mõni teine sobivalt valitud lause. Korrektselt koostatud mudelis aga osutub tõestatavaks või ümberlükatavaks iga mittedefineeriv lause.

[7] Lugeja jaoks, kes on tuttav Eukleidese tasandi analüütilise geomeetriaga, lisame, et hoolimata näilisest sarnasusest ei ole vaadeldud mudeli puhul tegemist analüütilise geomeetria ülesehitamisega. Põhimõtteline erinevus on lähtekohtades. Analüütilises geomeetrias eeldatakse punktide ja sirgete kui lähteobjektide olemasolu ja esitatakse nad — nende omadustele toginedes — reaalarvupaaride ja lineaarvõrranditega. Võrrandisüsteemide uurimisega ei saa siis tõestada sirgete paralleelsust, vaid ainult leida analüütilised tingimused, mis iseloomustavad sirgete vastastikuseid asendeid, sealhulgas paralleelsust.

ongi mudeli ehitamine mõne teise matemaatilise teooria abil, mis kas loetakse või teatakse olevat vasturääkivusetu.

Näiteks Eukleidese planimeetria vasturääkivusetuse kontrolli võimaldab tema aritmeetiline mudel. Kontrolli sisu on siin järgmine. Kui Eukleidese planimeetrias esineks vasturääkivus, siis peaks see sisalduma ka tema aritmeetilises mudelis. Et aga see mudel on moodustatud reaalarvude ja nende omaduste abil, siis peaks leiduma vasturääkivus ka reaalarvude teoorias. Reaalarvude teooria aluseks aga on naturaalarvude teooria, mille me loeme vabaks vasturääkivustest. Seega lubab aritmeetiline mudel meid usaldada ka Eukleidese planimeetria tõdesid.

Teisest küljest tähendab antud geomeetria uue mudeli avastamine selle geomeetria rakendusvälja avardumist. Lugu on selles, et mudeli koostamisel ei ole kunagi tarvis kontrollida muud kui ainult aksioomide kehtivust mudelis. Ülejäänud laused tulenevad siis aksioomidest loogilise paratamatusega. Seetõttu saab kogu tõestatud geomeetriliste lausete süsteemi rakendada automaatselt ka mudelile.

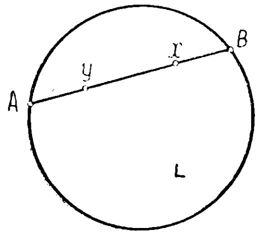
Lisame veel, et ka koolis õpitav geomeetria tuleb õigupoolest lugeda Eukleidese geomeetria teatavaks mudeliks. Omistatakse ju matemaatikatunnis vaadeldavatele geomeetrilistele objektidele teatav konkreetne tähendus, mida saab kujutleda ja joonisel kujutada. Aluseks on siin võetud meid ümbritsevate esemete vaatlusest tekkinud kujutlused. Näiteks sirge mõiste tekitamiseks vaadeldakse joonlaua abil tõmmatud joont, pinguli venitatud niiti või tolmuses õhus peegelduvat päikesekiirt. Niisiis ehitatakse siin mudel füüsikaliste objektide omaduste abil. Selline mudel muutub rangeks geomeetriliseks süsteemiks alles siis, kui on eristatud tõesteks loetavad aksioomid ja edaspidistes arutlustes toetutakse ainult nendele aksioomidele. Kujutlused ja joonised ei tohi siis enam olla tõestamisvahenditeks, vaid ainult näitlikeks abivahenditeks, kaalutlusteks, mis aitavad sõltumatut loogilist arutlemist eesmärgi poole suunata. On selge, et koolis sellist ranget geomeetriat veel arendada ei saa.

Veepiiska mahutatud kosmos

Tuleme nüüd tagasi Lobatševski geomeetria juurde. Ehitame Eukleidese tasandil Lobatševski tasandi mudeli.

Tõmbame vabalt valitud raadiusega ringjoone ja nimetame sellega määratud ringi sisepunktide hulga Lobatševski tasandiks, ütleme lühidalt — tasandiks L. Ringi iga kõõlu (täpsemalt: iga sellise kõõlu sisepunktide hulga) nimetame sirgeks tasandil L. Nii defineeritud Lobatševski tasandi mistahes kahe punkti X ja Y vaheliseks kauguseks nimetame reaalarvu $|XY|$, mille määrab valem (4) kõõlu XY otspunktide A ja B abil (joon. 3).

Ringjoone punktid ei kuulu tasandile L, seega see tasand on tõepoolest ilma ääreta. Valemite (5) põhjal on ringjoone punktid tasandi L igast punktist lõpmata kaugel. Järelikult saab mööda tasandi L iga sirget liikuda selle sirge igast fikseeritud punktist kuitahes kaugele ilma seejuures tasandilt L lahkumata (muidugi eeldusel, et kaugusi arvutatakse valemiga (4)). Niisiis käitub tasandit L piirav ringjoon samal viisil nagu horisont, millele püüab läheneda matkaja.



Joonis 3.

Et mudelina kasutatava ringi raadius on valitav täiesti vabalt, siis — piltlikult öeldes — oleme kogu Lobatševski kahemõõtmelise maailma kokku surunud Eukleidese tasandi kuitahes väiksesse piirkonda. Pole raske mõista, et samal viisil saab talitada Lobatševski ruumiga, nimelt mahutada ta meelevaldselt väikse sfääri sisepiirkonda.

Tasandi L kahe punkti vaheline kaugus on arvutatav jooniselt mõõdetavate eukleidiliste kauguste, nimelt nelja lõigu pikkuste kaudu. Ka tasandi L sirgete vahelisi nurki saab arvutada mudelilt mõõdetavate eukleidiliste nurkade kaudu. Vastavat valemit käesolevas ülevaates ei esitata, sest selle puhul tuleks kasutada nn. hüperboolseid funktsioone, mida koolimatemaatikas ei vaadelda. Märgime vaid, et need funktsioonid on mitmeti analoogilised trigonomeetriliste funktsioonidega. Koolis õpitav trigonomeetria ei ole Lobatševski geomeetrias rakendatav, sest selle trigonomeetria aluseks on sarnaste kolmnurkade olemasolu. Osutub aga, et Lobatševski tasandil on võimalik teistsugune trigonomeetria ja hüperboolsetel funktsioonidel on selles sama osa, mis trigonomeetrilistel funktsioonidel koolitrigonomeetrias. Trigonomeetriat Lobatševski tasandil nimetataksegi hüperboolseks trigonomeetriaks. Sageli nimetatakse koguni Lobatševski geomeetriat ennast h ü p e r b o o l s e k s g e o m e e t r i a k s.

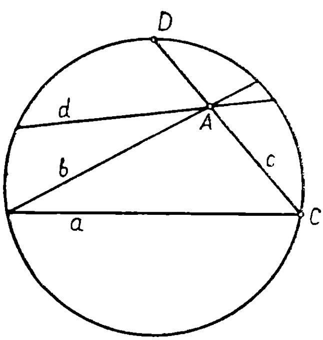
Nurkade puhul tasandil L piirdume märkusega, et mudelil mõõdetav nurk üldiselt on erinev vastavast tegelikust nurgast Lobatševski tasandil.[8]

Kasutame ehitatud mudelit nende Lobatševski tasandil kehtivate vahekordade selgitamiseks, mis eespool on tundma õpitud.

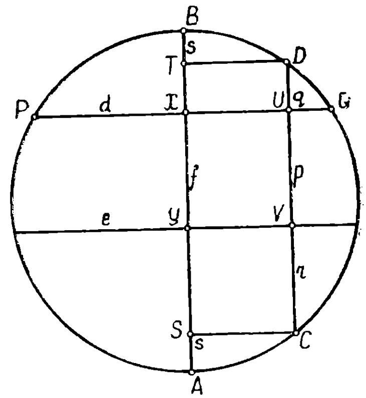
Alustame Lobatševski aksioomist. Olgu tasandil L valitud vabalt sirge a ja väljaspool seda punkt A (joon. 4). Sirged b, c ja d, mis läbivad punkti A, ei lõika sirget a, sest punktid ringjoonel ja väljaspool ringi ei kuulu tasandile L. On selge, et läbi

---

[8] Nurga tegeliku suuruse määramist mudeli andmetel on kirjeldatud Ü. L u m i s t e artiklis «Ruumi mõiste geomeetrias». — Matemaatika ja kaasaeg, XII, lk. 28.



Joonis 4.



Joonis 5.

punkti A saab tasandil L tõmmata lõpmata palju sirgeid, mis ei lõika sirget a.

Sirged b ja c on need sirged, mis Lobatševski definitsiooni kohaselt on paralleelsed sirgega a. Nad on paralleelsed sirgega a vastassuundades — paralleelsuse suuna määrab sirgeid sisaldavate kõõlude lõikepunkt ringjoonel. Võib ütelda, et paralleelsed sirged a ja c lõikuvad lõpmata kauges punktis C. Paralleelsuse suunas sirged lähenevad teineteisele tõkestamatult, vastassuunas aga eemalduvad samal viisil, sest näiteks punkt D on lõpmata kaugel sirge a igast punktist. Niisiis esineb teoreemis 5 näidatud olukord [9].

Mudelilt nähtub vahetult sirgete paralleelsuse sümmeetria (teoreem 1), samuti transitiivsus (teoreem 2). Viimane omadus väljendub mudelil asjaolus, et vastavad kõõlud peavad lõikuma ringjoone ühes ja samas punktis. Kasutades sama põhjendust saab mudelilt järeldada ka seda, et kahe teatavas suunas paralleelse sirge vahel asetsev sirge peab olema nendega paralleelne samas suunas (teoreem 3).

Sirged a ja d joonisel 4 on hajuvad. Tasandi L sirgete hajuvust iseloomustab vastavate (s. o. neid sisaldavate) Eukleidese sirgete paralleelsus või lõikumine väljaspool ringi.

Vaatleme näiteks kaht Eukleidese mõttes paralleelset sirget d ja e tasandil L (joon. 5). Et punktid P ja Q on lõpmata kauged punktid sirge e punktide suhtes, siis sirged d ja e tõepoolest kaugenevad teineteisest mõlemas suunas tõkestamatult. Tõmbame ringi diameetri AB risti kõõludega d ja e. Näitame, et vaadeldavate kõõlude sisepunkte ühendavate ristlõikude hulgas minimaalne pikkus Lobatševski mõttes on lõigul XY, mille määrab diameeter AB.

[9] Teoreemide 1—6 sõnastused ja tõestused vt. Matemaatika ja kaasaeg, XV, lk. 67—80.

Tõmbame mingi kõõlu $CD \| AB$ ja võrdleme sellega määratud lõigu UV pikkust lõigu XY pikkusega. Teisendame:

$$\frac{XA}{XB}:\frac{YA}{YB}-\frac{UC}{UD}:\frac{VC}{VD}=\frac{XA\cdot YB\cdot UD\cdot VC-XB\cdot YA\cdot UC\cdot VD}{XB\cdot YA\cdot UD\cdot VC}.$$

Kasutame lõikude eukleidiliste pikkuste jaoks tähistusi $UV = p$, $UD = q$, $VC = r$, $AS = BT = s$. Et

$$XA\cdot YB\cdot UD\cdot VC-XB\cdot YA\cdot UC\cdot VD=$$
$$=(p+r+s)(p+q+s)qr-(q+s)(r+s)(p+r)(p+q)=$$
$$=-sp(pq+q^2+pr+r^2)-s^2p(p+q+r)<0,$$

siis

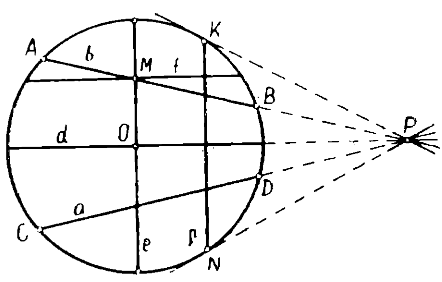
$$\frac{XA}{XB}:\frac{YA}{YB}<\frac{UC}{UD}:\frac{VC}{VD}$$

ning seega $a > 1$ tõttu

$$\log_a\left(\frac{XA}{XB}:\frac{YA}{YB}\right)<\log_a\left(\frac{UC}{UD}:\frac{VC}{VD}\right).$$

Järelikult tõepoolest $|XY| < |UV|$.

Kontroll näitab, et hajuvate sirgete d ja e korral esineb teoreemis 6 kirjeldatud olukord. Toetudes sellele teoreemile võime nüüd ütelda, et ringi keskpunkti läbiv sirge f on sirgete d ja e ainus ühine ristsirge. Siit omakorda ilmneb, et täisnurgad ringi diameetri ja kõõlude vahel on täisnurgad [10] ka tasandil L.



Joonis 6.

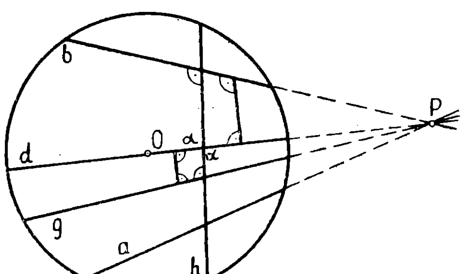
Joonisel 6 kujutatud tasandi L sirged a ja b hajuvad, sest punktid A, B, C ja D on lõpmata kaugel tasandi L igast punktist. Kui a ja b asetsevad sümmeetriliselt sirge d suhtes, siis nende ühine ristsirge on risti ka sirgega d. Seejuures ei läbi ühine rist-

[10] Selle väite teistsugust põhjendust vt. Matemaatika ja kaasaeg, XII, lk. 28.

sirge ringjoone keskpunkti O, sest sirgele e, mis läbib punkti O ja on risti sirgega d, saab läbi punkti M tõmmata ristsirge f, millele vastav Eukleidese sirge ei läbi punkti P; seega $\angle OMB < < 90°$.

Osutub, et tasandi L kõigil sirgetel, mis ringi kõõludena kuuluvad väljaspool ringi asetsevat punkti P läbivatele Eukleidese sirgetele, on ühine ristsirge. Tõepoolest, kui oletada, et näiteks sirgete b ja g korral, mis asetsevad ebasümmeetriliselt sirge d suhtes, ühine ristsirge h ei ole risti sirgega d, siis võib lugeda näiteks α nürinurgaks (joon. 7). Sel juhul peavad sirgepaaride (g, d) ja (b, d) ühised ristsirged asetsema teine teisel pool sirget h, nii et ei teki kolmnurka ega nelinurka, mille sisenurkade summa on lubamatult suur. Nüüd on aga kerge kontrollida, et sümmeetrilise sirgepaari (a, b) ühist ristsirget ei saa enam tõmmata — sellise sirge igas mõeldavas asendis tekib kas lubamatu kolmnurk või nelinurk.

Niisiis peab vaadeldava sirgete hulga iga kahe esindaja ühine ristsirge olema risti sirgega d. See aga tähendab kõigi selliste ristsirgete ühtimist, sest erinevate ristsirgete puhul tekivad jälle lubamatud nelinurgad.



Joonis 7.

Kui sirge AB pöörleb ümber punkti P (joon. 6), siis on sirge b piirasenditeks lõpmata kauged punktid K ja N. Siit järeldub, et punktiga P määratud sirgete ühiseks ristsirgeks tasandil L on sirge p, mille määravad ringjoonele punktist P tõmmatud puutujate puutepunktid K ja N.

Toodud näidetest ilmneb, et Lobatševski tasandi mudel [11] võimaldab tõlgendada juba tõestatud fakte ja samal ajal avastada uusi vahekordi selle tasandi objektide vahel.

[11] Vaadeldud mudelit nimetatakse Lobatševski tasandi Beltrami-Kleini mudeliks. Beltrami, Eugenio (1835—1900) — itaalia geomeeter, avaldas 1868. a. Lobatševski geomeetria üldisele tunnustamisele viiva töö «Mitteeukleidilise geomeetria interpretatsioon». Klein, Felix (1849—1925) — saksa matemaatik.

Eriline tähtsus on vaadeldud mudelil Lobatševski geomeetria ajaloos. Et mudel on ehitatud Eukleidese geomeetriasse kuuluvate objektide ja vahekordade abil, siis osutuks iga loogiline vasturääkivus Lobatševski geomeetrias ühtlasi vasturääkivuseks ka Eukleidese geomeetrias. Siit järeldub, et kui me loeme kõiki Eukleidese geomeetriasse kuuluvaid tõdesid loogiliselt korrektseteks, siis peame me täpselt sama hinnangu andma ka kõigele, mis on tõestatud või veel tõestatakse Lobatševski geomeetrias. Sellise vahekorra mõistmine tingib paratamatult Lobatševski geomeetria täieliku tunnustamise.

Probleemi, kumb kahest geomeetriast peegeldab täpsemalt reaalset ruumi, see tulemus ei lahenda.

(Järgneb)

PALINDROOMID

Tõeleid Roosinupp

Õigekeelsuse sõnaraamatu kohaselt nimetatakse p a l i n d r o o m i k s sõna või lauset, mis nii päri- kui ka tagurpidi loetuna on sama tähendusega. Minu uurimustest aga selgus, et seda terminit kasutatakse ka mitmesuguste teiste sümmeetrilise struktuuriga objektide korral. Nii näiteks nimetatakse palindroomideks veel tagurpidi esitatuna iseendaks jäävaid meloodiaid, samuti sümmeetrilise kirjapildiga naturaalarve (näit. 22, 171, 56365 jne.). Järgnevas ongi silmas peetud ainult seda viimast, roosinupulikku palindroomi tähendust.

Definitsioonid. Tähendagu a r v edaspidi naturaalarvu ja v r a arvu tagurpidi lugemise tulemust (näit. arvu 4831 vra on 1384). Seega siis — p a l i n d r o o m on arv, mis võrdub oma vraga. Arvu liitmist tema vraga nimetame selle arvu v r a e e r i m i s e k s (näit. arvu 4831 vraeerides saame $4831 + 1384 = 6215$).

Eksperiment. Vraeerime juhuslikult valitud arvu. Kui tulemus pole palindroom, siis vraeerime saadud summat veel kord jne. Näiteks kolme juhuslikult valitud arvu (68, 382 ja 4831) korral saame

$$\begin{array}{r} 68 \\ +\ 86 \\ \hline 154 \\ +\ 451 \\ \hline 605 \\ +\ 506 \\ \hline 1111 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 382 \\ +\ 283 \\ \hline 665 \\ +\ 566 \\ \hline 1231 \\ +\ 1321 \\ \hline 2552 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4831 \\ +\ 1384 \\ \hline 6215 \\ +\ 5126 \\ \hline 11341 \\ +\ 14311 \\ \hline 25652 \end{array}$$

Sellest eksperimendist võib kujuneda mulje, nagu annaks kolmekordne vraeerimine alati palindroomi. Asi pole aga kahjuks nii (selles veendumiseks valige näiteks lähtearv 89), ning näib isegi olevat alust väita, et ei kehti

Roosinupu 1. teoreem. *Mistahes arvu lõplik arv kordi vraeerides saame palindroomi.*

Selle teoreemi ümberlükkamise käigus õnnestus nimelt tõestada, et esimese kümne tuhande arvu hulgas leidub täpselt 249 sellist, mille sajakordne vraeerimine ei anna veel palindroomi (vähim niisugustest arvudest on 196, mille korral ei piisanud isegi 4147-kordsest vraeerimisest). Kõigi ülejäänud arvude puhul tuleb seevastu sooritada ülimalt 24 vraeerimist (kui jätta välja erandarvud 89 ja tema vra 98, siis veelgi vähem). Olgu veel märgitud, et suurim nende arvutuste käigus leitud palindroom on 16 668 488 486 661, mis saadakse arvude 6999, 7998 ja nende vrade 20-kordsel vraeerimisel.

Hoopis lihtne on Roosinupu 1. teoreemi ümber lükata kahendsüsteemis. Nimelt osutub, et kahendarvu 10110 (võrdub kümnendarvuga 22) neljakordne vraeerimine annab 10110100, kaheksakordne 1011101000, kaheteistkordne 101111010000 ja iga järgmine neljakordne vraeerimine lihtsalt lisab kolmandale kohale ühe ning lõppu nulli.

Erilist huvi pakuvad niisugused palindroomid, mis osutuvad algarvudeks (lühidalt a l g p a l i n d r o o m i d). Fundamentaalseks näib vastavas teoorias kujunevat

Roosinupu 2. teoreem. *Leidub lõpmata palju algpalindroome.*

Selle esialgu veel tõestamata teoreemi tõestamisel kujuneb omakorda oluliseks

Roosinupu 3. teoreem. *Leidub vaid üks paariskohaline algpalindroom (ja nimelt* 11).

Jätan selle lihtsa teoreemi tõestamise lugejale harjutusülesandeks (lahendus vt. lk. 149), ühtlasi aga nimetan veel ühe algpalindroomide teooriasse kuuluva tulemuse, mida ma ise tõestama kavatsen asuda:

Roosinupu 4. teoreem. *Leidub lõpmata palju niisuguste algpalindroomide paare, mis erinevad teineteisest vaid keskmise numbri poolest (nagu näit.* 30103 *ja* 30203, 9931399 *ja* 9932399).

Lihtne arvutus näitab, et leidub $9 \cdot 10^{n-1}$ erinevat $(2n)$-kohalist palindroomi (täpselt sama palju on $(2n-1)$-kohalisi palindroome), samal ajal kui $(2n)$-kohalisi arve leidub kokku $9 \cdot 10^{2n-1}$. Seega palindroomide tihedus arvude reas järjest kahaneb, täpsemalt, kehtib

Roosinupu 5. teoreem. *Tõenäosus selleks, et juhuslikult valitud arv osutuks palindroomiks, läheneb numbrikohtade arvu kasvades nullile.*

Hoopis rohkem leidub aga palindroome täisruutude reas, kusjuures enamik neist on koguni palindroomide ruudud (näit. $121 = 11^2$, $484 = 22^2$, kuid esimese erandina $676 = 26^2$). Samuti suhteliselt rikkaks palindroomide poolest osutuvad täiskuubid, kusjuures nad peaaegu alati osutuvad just palindroomi kuupideks (näit. $343 = 7^3$, $1331 = 11^3$). Täpsemalt, arvust $28 \cdot 10^{13}$ väiksemate täiskuupide hulgas leidub üks palindroom, mis pole palindroomi kuup (selleks on $10\,662\,526\,601 = 2201^3$). Neljandate astmete kontrollimine (samades piirides) näitab, et eranditult kõik nende hulgas leiduvad palindroomid on ühtlasi just palindroomi neljandad astmed.

Astme edasisel suurendamisel selgub aga üllatuseks, et näib kehtivat

Roosinupu 6. teoreem. *Ülesandel «leida arv, mille k-s aste osutub palindroomiks», on $k > 4$ korral vaid triviaalne lahend (see arv võrdub ühega).*

Lõpetuseks veel üks täisruut-palindroomide uurimisel avastatud fakt. Nimelt on nad peaaegu kõik paaritukohalised. Väikseimaks erandiks osutub $698896 = 836^2$, järgmine selline on $637\,832\,238\,736 = 798\,644^2$.

MURDJOONED

H. Espenberg, J. Gabovitš

Sageli tekib vajadus analüütiliselt esitatud funktsiooni graafiku joonestamiseks. Teinekord seisame aga vastupidise ülesande ees — leida etteantud graafiku põhjal funktsiooni valem (või, teisiti, leida etteantud joone võrrand).

Käesolevas artiklis vaatleme mõlemaid nimetatud ülesandeid. Esmalt selgitame, kuidas joonestada funktsiooni graafikut, mille valem sisaldab absoluutväärtusi. Seejärel käsitleme murdjoone võrrandi leidmise küsimust.

Absoluutväärtusi sisaldava valemiga funktsioonid

Kui funktsiooni valem sisaldab asboluutväärtusi, siis on tema graafik joonestatav järgnevas näites kirjeldatud mõttekäigu varal.

N ä i d e 1. Joonestada funktsiooni

$$y=\frac{|x+1|+|x-1|}{2}$$

graafik.[1]

Et

$$|x+1|=\begin{cases} x+1, & \text{kui} \quad x\geqslant -1, \\ -x-1, & \text{kui} \quad x<-1, \end{cases}$$

$$|x-1|=\begin{cases} x-1, & \text{kui} \quad x\geqslant 1, \\ -x+1, & \text{kui} \quad x<1, \end{cases}$$

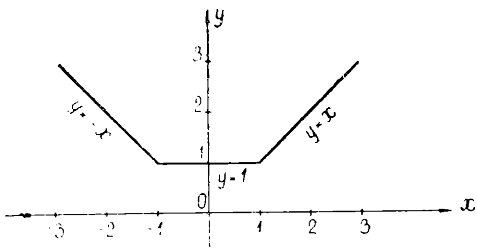
siis

$$y=\frac{-x-1-(x-1)}{2}=-x, \quad \text{kui} \quad x<-1,$$

$$y=\frac{x+1-(x-1)}{2}=1, \quad \text{kui} \quad -1\leqslant x<1,$$

$$y=\frac{x+1+(x-1)}{2}=x, \quad \text{kui} \quad x\geqslant 1,$$

[1] Näide on võetud ülesannete kogust A. L e v i n, M. L e v i n. Matemaatika ülesannete kogu keskkoolile. Tln., 1969, lk. 13.



Joonis 1.

ehk lühemalt

$$y = \begin{cases} -x, \text{ kui } x < -1, \\ 1, \text{ kui } -1 \leqslant x < 1, \\ x, \text{ kui } x \geqslant 1. \end{cases}$$

Selle funktsiooni graafik on toodud joonisel 1.

Näitest 1 näeme, et funktsiooni graafik murdub määramispiirkonna neis punktides, kus muutub funktsiooni defineeriv võrdus. Need punktid on aga ühtlasi absoluutväärtustes antud avaldiste nullkohad. Seda tähelepanekut kasutame järgmise näite puhul.

N ä i d e 2. Joonestada funktsiooni

$$y = |3 - x| + |x^2 - 1| - x^2 + 2 \text{ graafik.}$$

Et esimeses absoluutväärtuses esineva avaldise nullkohaks on $x = 3$ ning teises absoluutväärtuses esineva avaldise nullkohad on $x = \pm 1$, siis leiame kõigepealt funktsiooni valemi lihtsustatud kuju piirkondades $x < -1$, $-1 \leqslant x < 1$, $1 \leqslant x < 3$ ja $x \geqslant 3$. Tulemuseks saame

$$y = \begin{cases} -x + 4, & \text{kui } x < -1, \\ -2x^2 - x + 6, & \text{kui } -1 \leqslant x < 1, \\ -x + 4, & \text{kui } 1 \leqslant x < 3, \\ x - 2, & \text{kui } x \geqslant 3. \end{cases}$$

Selle funktsiooni graafik on skitseeritud joonisel 2.

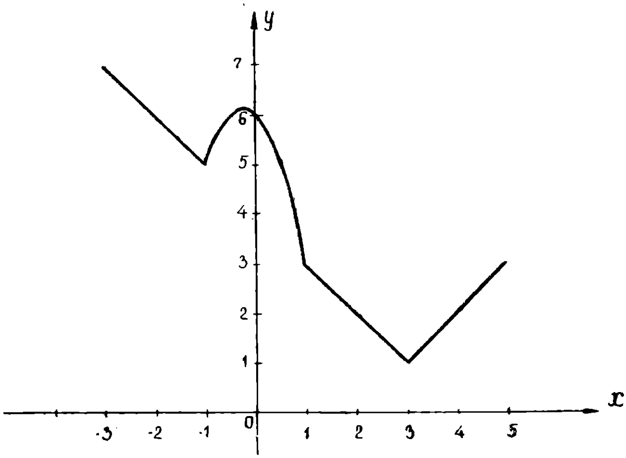
Funktsiooni graafiku joonestamine lihtsustub, kui valemis esinevad liidetavatena (kas absoluutväärtuse märgi all või mitte) ainult lineaaravaldised. Selliste funktsioonide graafikuks on murdjoon, mille skitseerimiseks piisab murdjoone tippude määramisest ning ühe punkti leidmisest nii murdjoone kõige vasakpoolsemal kui ka kõige parempoolsemal lülil.

N ä i d e 3. Joonestada funktsiooni

$$y = 2x - 8 + 2|x + 4| - |2x + 3| + |2x - 1| + 2|x - 2|$$

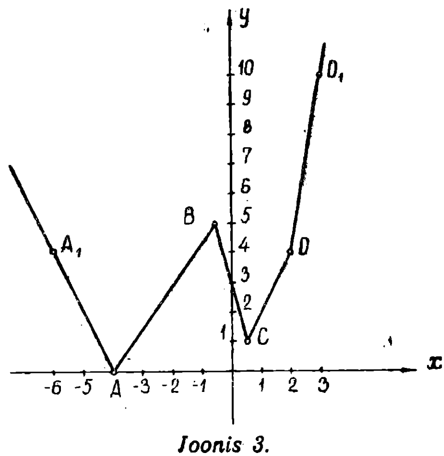
graafik.

Graafikuks on murdjoon, mille tipud on abstsissidega $x = -4$, $x = -3/2$, $x = 1/2$ ja $x = 2$. Funktsiooni valemist leiame, et $y(-4) = 0$, $y(-3/2) = 5$, $y(1/2) = 1$ ja $y(2) = 4$. Seega on murd-



Joonis 2.

joone tippudeks punktid $A(-4, 0)$, $B(-3/2, 5)$, $C(1/2, 1)$ ja $D(2, 4)$. Täiendavalt leiame punktid murdjoone äärmistel lülidel, näiteks $A_1(-6, 4)$ ja $D_1(3, 10)$. Leitud andmetest piisab graafiku joonestamiseks (vt. joon. 3).



Joonis 3.

Murdjoone võrrand

Olgu p i d e v funktsioon defineeritud arvtelje erinevates piirkondades erinevate valemitega. Tekib küsimus, kas sel juhul on võimalik esitada funktsiooni ühe analüütilise avaldise abil. Vastuse küsimusele annab järgmine teoreem:[2] *pidev funktsioon*

$$y=\begin{cases}\varphi(x), & kui \quad x<x_1,\\ \psi(x), & kui \quad x\geqslant x_1,\end{cases}$$

on esitatav valemiga

$$y=\varphi\left(\frac{1}{2}(x+x_1-|x-x_1|)\right)+\psi\left(\frac{1}{2}(x+x_1+|x-x_1|)\right)-\psi(x_1).$$

[2] Vt. B a r o n, S. Elementaarfunktsioonidest. — Matemaatika ja kaasaeg, VIII, lk. 12—17.

Sõnastatud teoreemis on juttu funktsioonist, mille määramispiirkond on punktiga x_1 jaotatud kahte ossa. Kuid sama teoreemi järkjärguline rakendamine viib sihile ka siis, kui funktsioon on defineeritud erinevalt arvtelje mistahes lõplikus arvus osades.

N ä i d e 4. Esitada funktsioon

$$y = \begin{cases} x^2 + x, & \text{kui} \quad x < 1, \\ 3 - x, & \text{kui} \quad x \geqslant 1, \end{cases}$$

ühtse valemiga.

Siin $\varphi(x) = x^2 + x$, $\psi(x) = 3 - x$ ja et $x_1 = 1$, siis $\psi(x_1) = 2$. Seega

$$\varphi\left(\frac{1}{2}(x + x_1 - |x - x_1|)\right) = \frac{1}{4}(x + 1 - |x - 1|)^2 + \frac{1}{2}(x + 1 - |x - 1|),$$

$$\psi\left(\frac{1}{2}(x + x_1 + |x - x_1|)\right) = 3 - \frac{1}{2}(x + 1 + |x - 1|)$$

ja

$$y = \frac{1}{4}(x + 1 - |x - 1|)^2 + \frac{1}{2}(x + 1 - |x - 1|) + 3 - \frac{1}{2}(x + 1 + |x - 1|) - 2$$

ehk

$$y = \frac{1}{4}(x + 1 - |x - 1|)^2 - |x - 1| + 1.$$

Juhul kui pidev funktsioon on määramispiirkonna osapiirkondades esitatav lineaarfunktsioonina (s. o. kui ta graafikuks on murdjoon), siis eeskiri tema esitamiseks ühtse valemiga lihtsustub.

Vaatleme pidevat funktsiooni

$$y = \begin{cases} a_1 x + b_1, & \text{kui} \quad x < x_1, \\ a_2 x + b_2, & \text{kui} \quad x \geqslant x_1 \end{cases}$$

(pidevuse tõttu $a_1 x_1 + b_1 = a_2 x_1 + b_2$). Esitame selle funktsiooni ühtse valemiga

$$y = \alpha x + \beta + \alpha_1 |x - x_1|,$$

kus α, β ja α_1 on esialgu määramata kordajad. Need kordajad määrame järgmiselt. Kui $x < x_1$, siis

$$y = \alpha x + \beta - \alpha_1 (x - x_1),$$

aga samuti

$$y = a_1 x + b_1,$$

s. t.

$$\alpha x + \beta - \alpha_1 x + \alpha_1 x_1 = a_1 x + b_1.$$

Kui aga $x \geqslant x_1$, siis
$$\alpha x + \beta + \alpha_1 x - \alpha_1 x_1 = a_2 x + b_2.$$
Neist kahest võrrandist järeldub, et
$$\begin{aligned} \alpha - \alpha_1 &= a_1, \\ \alpha + \alpha_1 &= a_2, \\ \beta + \alpha_1 x_1 &= b_1, \\ \beta - \alpha_1 x_1 &= b_2. \end{aligned}$$
Kahest esimesest võrrandist saame, et
$$\alpha = \frac{1}{2}(a_1 + a_2), \qquad \alpha_1 = \frac{1}{2}(a_2 - a_1).$$
Süsteemi 3. ja 4. võrrand on samaväärsed. Tõepoolest, 3. võrrandi põhjal (arvestades pidevuse tingimust $a_1 x_1 + b_1 = a_2 x_1 + b_2$)
$$\beta = b_1 - \alpha_1 x_1 = b_1 - \frac{1}{2}(a_2 - a_1) \cdot \frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2} = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)$$
ja 4. võrrandi põhjal
$$\beta = b_2 + \alpha_1 x_1 = b_2 + \frac{1}{2}(a_2 - a_1) \cdot \frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2} = \frac{1}{2}(b_1 + b_2).$$
N ä i d e 5. Esitada funktsioon
$$y = \begin{cases} x, & \text{kui } x < 1, \\ 1, & \text{kui } x \geqslant 1, \end{cases}$$
ühtse valemiga.

Siin $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $b_1 = 0$, $b_2 = 1$ ning $\alpha = 1/2$, $\beta = 1/2$, $\alpha_1 = -1/2$. Seega
$$y = \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}|x - 1|.$$
N ä i d e 6. Esitada funktsioon
$$y = \begin{cases} 2 - x, & \text{kui } x < -1, \\ x + 4, & \text{kui } x \geqslant -1, \end{cases}$$
ühtse valemiga.

Siin $a_1 = -1$, $a_2 = 1$, $b_1 = 2$, $b_2 = 4$ ning $\alpha = 0$, $\beta = 3$, $\alpha_1 = 1$. Seega
$$y = 3 + |x + 1|.$$
Vaatleme nüüd pidevat funktsiooni
$$y = \begin{cases} a_1 x + b_1, & \text{kui } x < x_1, \\ a_2 x + b_2, & \text{kui } x_1 \leqslant x < x_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_n x + b_n, & \text{kui } x \geqslant x_{n-1}, \end{cases}$$
mille graafikuks on n lülist koosnev murdjoon. Pidevuse tõttu
$$a_i x_i + b_i = a_{i+1} x_i + b_{i+1} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1).$$

Antud funktsioon on esitatav ühtse valemiga

$$y = \alpha x + \beta + \alpha_1 |x - x_1| + \alpha_2 |x - x_2| + \ldots + \alpha_{n-1} |x - x_{n-1}|, \quad (1)$$

kus

$$\alpha = \frac{1}{2}(a_1 + a_n), \quad \beta = \frac{1}{2}(b_1 + b_n),$$

$$\alpha_i = \frac{1}{2}(a_{i+1} - a_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Näide 7. Esitada funktsioon

$$y = \begin{cases} 2 \quad, \text{ kui } & x < -3, \\ -x - 1, \text{ kui } & -3 \leqslant x < 1, \\ 3x - 5, \text{ kui } & 1 \leqslant x < 2, \\ 2x - 3, \text{ kui } & x \geqslant 2, \end{cases}$$

ühtse valemiga.

Siin $a_1 = 0$, $a_2 = -1$, $a_3 = 3$, $a_4 = 2$, $b_1 = 2$, $b_2 = -1$, $b_3 = -5$, $b_4 = -3$. Seega $\alpha = 1$, $\beta = -1/2$, $\alpha_1 = -1/2$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = -1/2$ ja antud funktsioon on esitatav valemiga

$$y = x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}|x + 3| + 2|x - 1| - \frac{1}{2}|x - 2|.$$

Rakendame valemit (1) järgmise ülesande lahendamisel. Olgu antud n lüliga murdjoon tippudega $P_1(1, y_1)$, $P_2(2, y_2)$, ..., $P_{n-1}(n-1, y_{n-1})$ ning läbigu ta veel punkte $P_0(0, y_0)$ ja $P_n(n, y_n)$. Leida murdjoone $P_0P_1 \ldots P_n$ võrrand. Ta i-nda lüli $P_{i-1}P_i$ võrrand on

$$y = (y_i - y_{i-1})x + iy_{i-1} - (i-1)y_i$$

ja seega

$$a_i = y_i - y_{i-1}, \quad b_i = iy_{i-1} - (i-1)y_i.$$

Kordajate α, β ja α_i arvutamiseks saame järgmised valemid:

$$\begin{aligned} 2\alpha &= y_n - y_{n-1} + y_1 - y_0, \\ 2\beta &= y_0 + ny_{n-1} - (n-1)y_n, \\ 2\alpha_i &= y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1). \end{aligned}$$

Neid valemeid saame lihtsustada, kui võtame kasutusele järgmised tähistused:

$$\begin{aligned} \Delta y_i &= y_{i+1} - y_i \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1), \\ \Delta^2 y_i &= (y_{i+2} - y_{i+1}) - (y_{i+1} - y_i) = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i \\ & \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-2). \end{aligned}$$

Saame

$$\begin{aligned} 2\alpha &= \Delta y_0 + \Delta y_{n-1}, \\ 2\beta &= y_0 + y_n - n\Delta y_{n-1}, \\ 2\alpha_i &= \Delta^2 y_{i-1} \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1). \end{aligned}$$

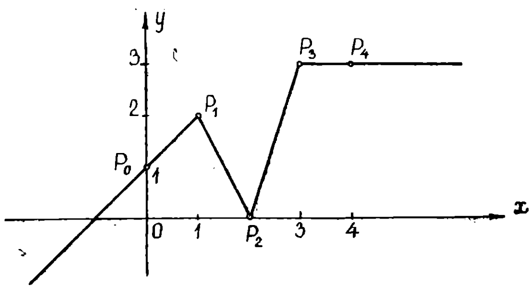
Murdjoone $P_0P_1 \ldots P_n$ võrrand on nüüd avaldatav kujul:

$$\begin{aligned} 2y = (\Delta y_0 + \Delta y_{n-1})x + y_0 + y_n - n\Delta y_{n-1} + \Delta^2 y_0 |x - 1| + \\ + \Delta^2 y_1 |x - 2| + \ldots + \Delta^2 y_{n-2} |x - (n-1)|. \quad (2) \end{aligned}$$

Suuruste Δy_i ja $\Delta^2 y_i$ arvutamiseks on otstarbekohane kasutada järgmist lihtsat skeemi: kirjutatakse välja ordinaatide jada y_0, $y_1 \ldots, y_n$ ning lahutatakse selle jada igast liikmest (alates teisest) eelnev liige ja vahe kirjutatakse järgmisse ritta kõnesolevate liikmete vahekohta. Sel viisil saadud jada nimetatakse lähtejada esimeseks diferentsjadaks, mille liikmeteks ongi suurused Δy_i. Lähtudes esimesest diferentsjadast, moodustatakse analoogiliselt uus diferentsjada liikmetega $\Delta^2 y_i$ (nn. teine diferentsjada lähtejada suhtes). Esitame selle mõttekäigu skeemina:

$$\begin{array}{ccccccccccc} y_0 & & y_1 & & y_2 & \ldots & y_{n-2} & & y_{n-1} & & y_n \\ & \Delta y_0 & & \Delta y_1 & & \Delta y_2 \quad \ldots & & \Delta y_{n-2} & & \Delta y_{n-1} & \\ & & \Delta^2 y_0 & & \Delta^2 y_1 \quad \Delta^2 y_2 & & & & \Delta^2 y_{n-2} & & \end{array}$$

N ä i d e 8. Leida murdjoone $P_0 \ldots P_4$ võrrand, kui $P_0(0, 1)$, $P_1(1, 2)$, $P_2(2, 0)$, $P_3(3, 3)$, $P_4(4, 3)$ (joon. 4).



Joonis 4.

Koostame arvutusskeemi:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & & 2 & & 0 & & 3 & & 3 \\ & 1 & & -2 & & 3 & & 0 & \\ & & -3 & & 5 & & -3 & & \end{array}$$

Asendades vajalikud suurused valemisse (2), saame murdjoone võrrandi kujul

$$2y = x + 4 - 3|x-1| + 5|x-2| - 3|x-3|.$$

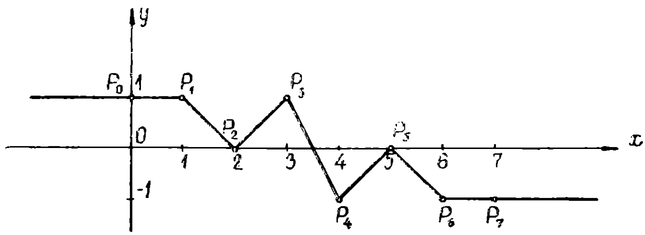
N ä i d e 9. Leida joonisel 5 kujutatud murdjoone võrrand.

Arvutusskeem:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} 1 & & 1 & & 0 & & 1 & & -1 & & 0 & & -1 & & -1 \\ & 0 & & -1 & & 1 & & -2 & & 1 & & -1 & & 0 & \\ & & -1 & & 2 & & -3 & & 3 & & -2 & & 1 & & \end{array}$$

Vastus:

$$2y = |x-6| - 2|x-5| + 3|x-4| - 3|x-3| + 2|x-2| - |x-1|.$$



Joonis 5.

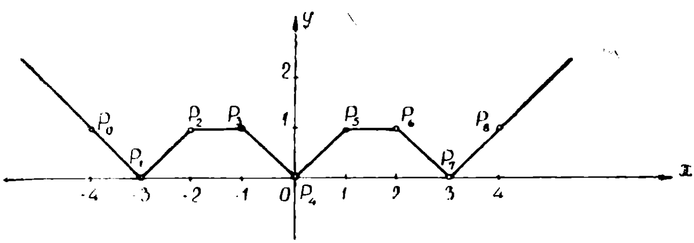
Viimases näites on $\Delta y_0 + \Delta y_6 = 0$ ja lisaks sellele on teise diferentsjada kõikide liikmete summa null. Seega on vaadeldud näite korral rahuldatud järgmise teoreemi eeldused, mille anname ilma tõestuseta: *kui on täidetud tingimused*

$$\Delta y_0 + \Delta y_{n-1} = 0, \ \Delta^2 y_0 + \Delta^2 y_1 + \ldots + \Delta^2 y_{n-2} = 0, \tag{3}$$

siis on murdjoone äärmised lülid P_0P_1 ja $P_{n-1}P_n$ paralleelsed x-teljega.

Kui murdjoone tipud on punktides $P_k(a+k, y_k)$, kus $k = 1, 2, \ldots, n-1$ ja kui murdjoone äärmised lülid läbivad veel punkte $P_0(a, y_0)$ ning $P_n(a+n, y_n)$, siis saame murdjoone võrrandi leida valemi (2) abil, asendades argumendi x vahega $x-a$.

Näide 10. Leida joonisel 6 esitatud murdjoone võrrand.



Joonis 6.

Siin on $a = -4$, nii et võrrandis (2) asendame x suurusega $x+4$. Arvutusskeem on sama mis varemgi:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
1 & & 0 & & 1 & & 1 & & 0 & & 1 & & 1 & & 0 & & 1 \\
 & -1 & & 1 & & 0 & & -1 & & 1 & & 0 & & -1 & & 1 & \\
 & & 2 & & -1 & & -1 & & 2 & & -1 & & -1 & & 2 & &
\end{array}$$

ja murdjoone võrrand on

$$2y = -6 + 2|x+3| - |x+2| - |x+1| + 2|x| - |x-1| - \\ - |x-2| + 2|x-3|.$$

Hulknurga võrrand

Võrrandiga (1) määratud pidev funktsioon on esitatud ilmutatud kujul. Sellisel funktsioonil võib iga x väärtuse puhul olla vaid üks väärtus. Geomeetriliselt tähendab see, et võrrandiga (1) võib analüütiliselt esitada ainult neid murdjooni, mis lõikuvad iga püstsirgega vaid ühes punktis. Tekib küsimus, kuidas analüütiliselt esitada suvalist murdjoont, s. t. niisugust murdjoont, millel võib olla mõne püstsirgega mitu lõikepunkti, või isegi niisugust murdjoont, mille üksikud lülid on vertikaalsed.

Suvalist n lülist koosnevat murdjoont saab esitada parameetriliste võrranditega

$$\begin{aligned} x &= at + \beta + \alpha_1|t - t_1| + \alpha_2|t - t_2| + \ldots + \alpha_{n-1}|t - t_{n-1}|, \\ y &= \gamma t + \delta + \beta_1|t - t_1| + \beta_2|t - t_2| + \ldots + \beta_{n-1}|t - t_{n-1}|, \end{aligned} \tag{4}$$

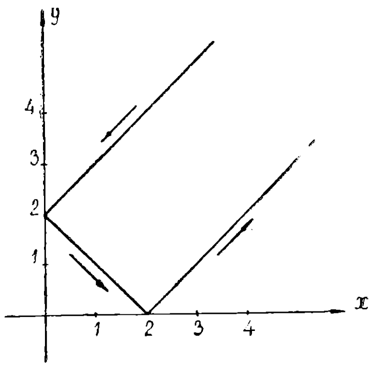
kusjuures eeldame, et $t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1}$. Tõepoolest, igas järgmistest piirkondadest

$$t \leqslant t_1, \quad t_1 \leqslant t \leqslant t_2, \ldots, t_{n-2} \leqslant t \leqslant t_{n-1}, \quad t \geqslant t_{n-1}$$

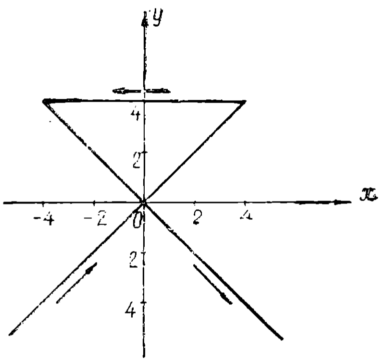
taanduvad võrrandid (4) lineaarseteks võrranditeks

$$x = a_i t + b_i, \quad y = c_i t + d_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{5}$$

ja neile vastavad teatavasti sirged (meie murdjoone üksikud lülid).



Joonis 7.



Joonis 8.

Nii vastab võrrandeile

$$x = |t + 1|, \quad y = |t - 1|$$

joonisel 7 kujutatud murdjoon (nooled näitavad liikumissuunda parameetri t muutumisel $-\infty$ kuni $+\infty$); võrrandeile $x = |t| + t$, $y = |t| - t$ vastab y-telje ning x-telje positiivsest osast koosnev murdjoon; joonisel 8 antud murdjoone parameetrilised võrrandid on aga

$$x = 2t - 3|t+1| + 3|t-1|,$$
$$y = 6 - |t+1| - |t-1|. \tag{6}$$

Olgu n lüliga murdjoone tipud $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, ..., $P_{n-1}(x_{n-1}, y_{n-1})$. Peale selle olgu antud punkt $P_0(x_0, y_0)$ murdjoone ühel äärmisel lülil ja punkt $P_n(x_n, y_n)$ teisel äärmisel lülil. Kui murdjoone $P_0P_1 \ldots P_n$ parameetrilised võrrandid on kujul (4), siis on kerge veenduda, et tippudele P_1, P_2, ..., P_{n-1} vastavad parameetri väärtused t_1, t_2, ..., t_{n-1}.

Et aga parameetri valik on suvaline, siis võime eeldada, et $t_1 = 1$, $t_2 = 2$, ..., $t_{n-1} = n-1$.

Samuti võime eeldada, et punktidele P_0 ja P_n vastavad parameetri väärtused $t_0 = 0$ ning $t_n = n$.

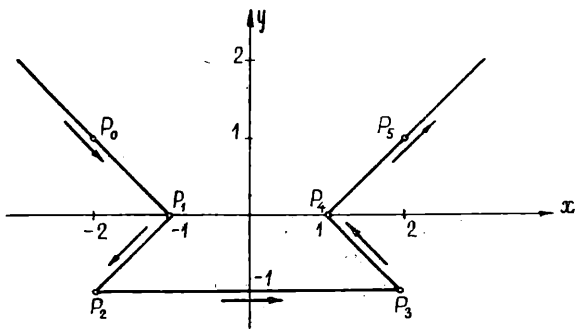
Sellega aga taandub antud ülesanne eespool lahendatud ülesandele järgmises sõnastuses: *leida kaks lineaarset funktsiooni* x *ja* y, *millel on vastavalt väärtused* $x_0, x_1, \ldots, x_n$ *ning* $y_0, y_1, \ldots, y_n$ *argumendi* t *väärtuste* 0, 1, ..., n *puhul.*

Kui analoogiliselt suurustele Δy_i, $\Delta^2 y_i$ defineerida suurused Δx_i, $\Delta^2 x_i$, siis saame suvalise murdjoone $P_0P_1 \ldots P_n$ parameetrilised võrrandid kujul (vrd. võrrand (2))

$$\begin{aligned} 2x = {} & (\Delta x_0 + \Delta x_{n-1})t + x_0 + x_n - n\Delta x_{n-1} + \Delta^2 x_0|t-1| + \\ & + \Delta^2 x_1|t-2| + \ldots + \Delta^2 x_{n-2}|t-(n-1)|, \\ 2y = {} & (\Delta y_0 + \Delta y_{n-1})t + y_0 + y_n - n\Delta y_{n-1} + \\ & + \Delta^2 y_0|t-1| + \Delta^2 y_1|t-2| + \ldots + \Delta^2 y_{n-2}|t-(n-1)|. \end{aligned} \tag{7}$$

Lahenduskäigus peab nüüd koostama kaks arvutusskeemi (diferentside $\Delta^2 x_i$ ja $\Delta^2 y_i$ leidmiseks). Märgime veel, et lõppvastuses võime teostada (kui see otstarbekaks osutub) lineaarse teisenduse $t = as + b$, kus s on uus parameeter ning a ja b sobivalt valitud konstandid.

N ä i d e 11. Leida joonisel 9 antud murdjoone parameetrilised võrrandid.



Joonis 9.

Arvutusskeemid

x jaoks:	—2		—1		—2		2		1		2
		1		—1		4		—1		1	
			—2		5		—5		2		
y jaoks:	1		0		—1		—1		0		1
		—1		—1		0		1		1	
			0		1		1		0		

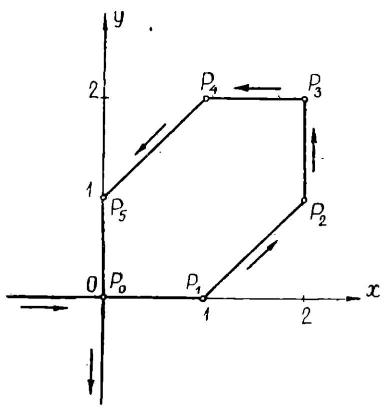
Asendades vajalikud arvud süsteemi (7) saame:

$$2x = 2t - 5 - 2|t-1| + 5|t-2| - 5|t-3| + 2|t-4|,$$
$$2y = -3 + |t-2| + |t-3|.$$

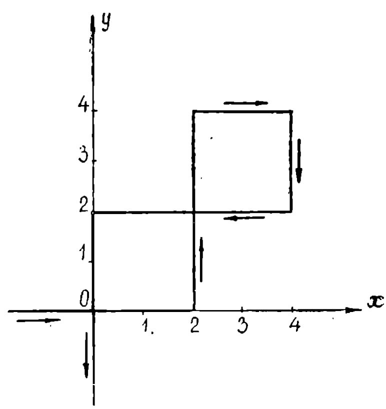
Teisenduse $2t = s + 5$ abil saame vastuse sümmeetrilisemal kujul:

$$4x = 2s - 2|s+3| + 5|s+1| - 5|s-1| + 2|s-3|,$$
$$4y = -6 + |s+1| + |s-1|.$$

N ä i d e 12. Joonisel 10 kujutatud murdjoone puhul võtame punktideks P_0 ja P_6 koordinaadistiku alguspunkti (punktid P_0 ja P_n on ju suvalised punktid murdjoone esimesel ja n-ndal lülil; praegu on $n = 6$).



Joonis 10.



Joonis 11.

Arvutusskeemid

x jaoks:	0		1		2		2		1		0		0
		1		1		0		—1		—1		0	
			0		—1		—1		0		1		
y jaoks:	0		0		1		2		2		1		0
		0		1		1		0		—1		—1	
			1		0		—1		—1		0		

ja murdjoone parameetrilised võrrandid on

$$\begin{aligned} 2x &= t - |t-2| - |t-3| + |t-5|, \\ 2y &= -t + 6 + |t-1| - |t-3| - |t-4|. \end{aligned} \tag{8}$$

Näide 13. Leida joonisel 11 esitatud murdjoone parameetrilised võrrandid.

Vastus:

$$\begin{aligned} x &= t - |t-1| + |t-2| - |t-3| - 2|t-4| + 2|t-5|, \\ y &= 6 - t + 2|t-1| - 2|t-2| - |t-3| + |t-4| - |t-5|. \end{aligned}$$

Seni vaatlesime eranditult lõpmatusse ulatuvaid murdjooni (täpsemini: murdjooni lõpmata pikkade äärmiste lülidega). Praktikas esinevate murdjoonte lülid on aga kõik lõpliku pikkusega. Siin esitatud meetod võimaldab ka selliseid murdjooni analüütiliselt avaldada.

Olgu $n-2$ lüliga lõpliku murdjoone alguspunkt $P_1(x_1, y_1)$, lõpp-punkt $P_{n-1}(x_{n-1}, y_{n-1})$ ning vahetipud $P_i(x_i, y_i)$, kus $i = 2, 3, \ldots, n-2$.

Et parameetriliste võrranditega (7) defineeritud funktsiooni graafikuks oleks parajasti lõplik murdjoon $P_1P_2\ldots P_{n-1}$ (parameetri t muutumisel $-\infty$ kuni $+\infty$!), peame me saavutama olukorra, kus piirkonnas $t \leqslant 1$ oleks kogu aeg $x = x_1$, $y = y_1$ ja piirkonnas $t \geqslant n-1$ oleks kogu aeg $x = x_{n-1}$, $y = y_{n-1}$.

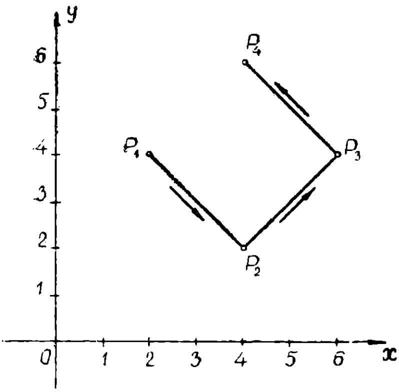
See tähendab, et tx-tasandil argumendi t funktsiooni x graafikuks on n lüliga murdjoon $A_0A_1\ldots A_n$, mille tipud on $A\ (1, x_1)$, $A_2(2, x_2), \ldots, A_{n-1}(n-1, x_{n-1})$ ja mis läbib veel punkte $A_0(0, x_1)$ ning $A_n(n, x_{n-1})$. Seega on murdjoone äärmised lülid A_0A_1 ja $A_{n-1}A_n$ paralleelsed t-teljega. Siit muide järeldub (vt. ülalpool mainitud teoreemi), et on täidetud tingimused

$$\Delta x_0 + \Delta x_{n-1} = 0,\ \Delta^2 x_0 + \Delta^2 x_1 + \ldots + \Delta^2 x_{n-1} = 0.$$

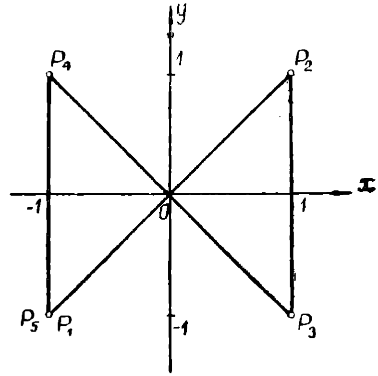
Analoogiline olukord on ty-tasandil funktsiooni y graafikuga, nii et on täidetud ka tingimused

$$\Delta y_0 + \Delta y_{n-1} = 0, \quad \Delta^2 y_0 + \Delta^2 y_1 + \ldots + \Delta^2 y_{n-2} = 0.$$

Lahenduskäik on seega järgmine. Vaatleme $n-2$ lüliga murdjoone $P_1P_2\ldots P_{n-1}$ asemel n lüliga murdjoont $P_0P_1P_2\ldots P_{n-1}P_n$, kus $P_0(x_1, y_1)$ langeb ühte punktiga P_1 ning $P_n(x_{n-1}, y_{n-1})$ punktiga P_{n-1} (äärmised lülid P_0P_1 ja $P_{n-1}P_n$ kõdunevad punktideks!). Edasi koostame kaks arvutusskeemi nagu varemgi ja asendame vajalikud arvud võrrandeisse (7). Sellega ongi saadud $n-2$ lüliga murdjoone $P_1P_2\ldots P_{n-1}$ parameetrilised võrrandid. Iga t puhul piirkonnast $t \leqslant 1$ me asume alguspunktis P_1; kui parameeter t kasvab piirkonnas $1 < t < n-1$, siis liigub punkt murdjoont mööda P_{n-1} suunas; lõpuks iga $t \geqslant n-1$ puhul asume lõpp-punktis P_{n-1}.



Joonis 12.



Joonis 13.

Toome mõningad illustreerivad näited.

N ä i d e 1 4. Joonisel 12 on antud kolme lüliga murdjoon. Me vaatleme aga teda viie lüliga murdjoonena (seega $n=5$), mis on määratud kuue punktiga $P_0(2,4)$, $P_1(2,4)$, $P_2(4,2)$, $P_3(6,4)$, $P_4(4,6)$, $P_5(4,6)$.

Seega on arvutusskeemid

x jaoks:	2		2		4		6		4		4
		0		2		2		—2		0	
			2		0		—4		2		
y jaoks:	4		4		2		4		6		6
		0		—2		2		2		0	
			—2		4		0		—2		

Murdjoone $P_1P_2P_3P_4$ parameetrilised võrrandid on seega

$$x=3+|t-1|-2|t-3|+|t-4|,$$
$$y=5-|t-1|+2|t-2|-|t-4|.$$

N ä i d e 1 5. Leida joonisel 13 kujutatud kinnise murdjoone parameetrilised võrrandid.

Vastavaid arvutusi teostades saame vastuseks

$$x=-1+|t-1|-|t-2|-|t-3|+|t-4|,$$
$$y=-1+|t-1|-2|t-2|+2|t-3|-2|t-4|+|t-5|.$$

N ä i d e 16. Leida punkte $P_1(1, 2)$ ja $P_2(3, 0)$ ühendava sirglõigu parameetrilised võrrandid.

Arvutused annavad vastuseks

$$x=2+|t-1|-|t-2|,$$
$$y=1-|t-1|+|t-2|.$$

Et iga hulknurga rajajoon on samuti lõplik murdjoon, siis võimaldab siin esitatud menetlus leida suvalise hulknurga rajajoone parameetrilised võrrandid.

Juba eespool esines meil murdjooni, mis moodustavad hulknurki (näiteks joonistel 8 ja 10). Kuid seal me peame ette andma parameetri muutumispiirkonna, mille puhul saame hulknurga rajajoone kõik punktid. Teised parameetri väärtused viivad meid tasandi punktide juurde, millel pole midagi ühist antud hulknurgaga. Nii näiteks annavad võrrandid (6) tippudega (0, 0), (4, 4), (—4, 4) kolmnurga rajajoone vaid siis, kui $-3 \leqslant t \leqslant 3$; joonisel 10 kujutatud kuusnurga parameetrilised võrrandid on antud süsteemiga (8) lisatingimusel $0 \leqslant t \leqslant 6$.

Nüüd aga rakendades esitatud võtet lõplike murdjoonte parameetriliste võrrandite saamiseks võime tuletada niisuguseid võrrandeid, mis ühegi parameetri väärtuse puhul ei vii meid välja hulknurga rajajoonelt.

Näiteks tippudega (0, 0), (2, 0), (0, 2) kolmnurga parameetrilised võrrandid on

$$x = |t-1| - 2|t-2| + |t-3|,$$
$$y = |t-2| - 2|t-3| + |t-4|;$$

tippudega (0, 0), (2, 0), (2, 2), (0, 2) ruudu parameetrilised võrrandid on

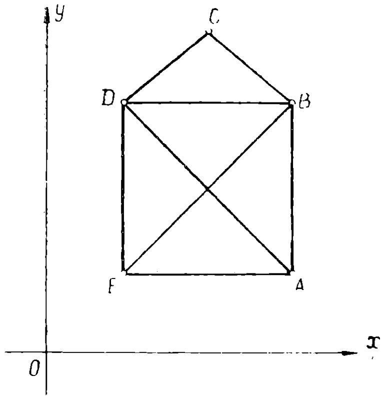
$$x = |t-1| - |t-2| - |t-3| + |t-4|,$$
$$y = |t-2| - |t-3| - |t-4| + |t-5|.$$

Lõplikku murdjoont saab defineerida kui niisugust sirglõikudest koosnevat kujundit, mille joonestamisel iga selle kujundi sirglõik läbitakse vaid üks kord. Selle definitsiooni kohaselt on näiteks joonisel 14 antud kujund 8 lüliga murdjoon *ABCDBEDAE*, mille alguspunkt on *A* ja lõpp-punkt *E* ning selle parameetrilised võrrandid saab leida äsja vaadeldud menetluse abil.

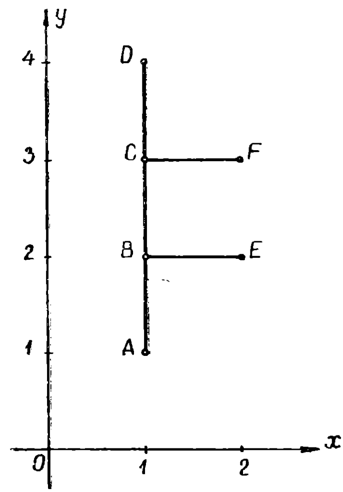
Nüüd aga vaatleme suvalist (kuitahes keerulist!) sirglõikudest koosnevat tasandilist[3] kujundit. Selgub, et ülalpool kirjeldatud menetlus võimaldab tuletada ka niisuguste kujundite parameetrilisi võrrandeid. Vahe on vaid selles, et nüüd läbitakse parameetri t kasvamisega mõni kujundi sirglõikudest enam kui üks kord. Ühtlasi tekib uus probleem: valida niisugune liikumisplaan, et kogu kujundi läbimiseks kuluks minimaalne arv samme.

Olukorra illustreerimiseks vaatleme joonisel 15 antud kujundit. Üks võimalikest liikumisplaanidest on järgmine: *ABEBCFCD*. See annaks meile seitsme lüliga murdjoone. Säästlikum oleks aga liikumisplaan *ADBEBCF*, sest see annaks kuue lüliga murdjoone. Ent kõige kokkuhoidlikumaks osutub liikumisplaan *FCDABE*, mille puhul kujundit vaadeldakse viielülilise murdjoonena. Peatumegi

[3] Tegelikult võimaldab kirjeldatud meetod käsitleda ka ruumilisi kujundeid, ent käesolevas artiklis me piirdume tasandilise juhuga.



Joonis 14.



Joonis 15.

viimase juures. Et $n-2=5$, siis $n=7$ ja lähteandmed on järgmised: $P_0(2, 3)$, $P_1(2, 3)$, $P_2(1, 3)$, $P_3(1, 4)$, $P_4(1, 1)$, $P_5(1, 2)$, $P_6(2, 2)$, $P_7(2, 2)$.

Seega saame arvutusskeemid

x jaoks:	2		2		1		1		1		1		2		2
		0		—1		0		0		0		1		0	
			—1		1		0		0		1		—1		
y jaoks:	3		3		3		4		1		2		2		2
		0		0		1		—3		1		0		0	
			0		1		—4		4		—1		0		

ja meie kujundi parameetrilised võrrandid on

$$2x = 4 - |t-1| + |t-2| + |t-5| - |t-6|,$$
$$2y = 5 + |t-2| - 4|t-3| + 4|t-4| - |t-5|.$$

PROBLEEM ARITMEETILISTEST PROGRESSIOONIDEST

Kolmeliikmelistel aritmeetilistel progressioonidel

$$4,\ 5,\ 6 \text{ ja } 2,\ 6,\ 10$$

on liikmete korrutised võrdsed

$$4\cdot 5\cdot 6 = 2\cdot 6\cdot 10.$$

Võib leida ka sama omadusega neljaliikmelisi progressioone, näiteks

$$5\cdot 7\cdot 9\cdot 11 = 3\cdot 7\cdot 11\cdot 15.$$

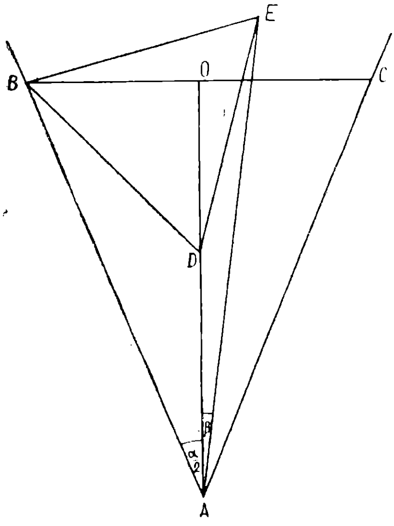
Kas leidub kaks sama omadusega viieliikmelist (n-liikmelist, $n>5$) aritmeetilist progressiooni?

J. Gabovitš

NURGA LIGIKAUDNE TRISEKTSIOON

A. Napolski

Teatavasti on suvalise nurga jaotamine kolmeks võrdseks osaks sirkli ja joonlaua abil võimatu.[1] Ent arvestades probleemi kuulsust ning ajaloolist tähtsust pakub huvi leida võimalikult lihtne konstruktsioon, mis lubaks teostada nurga ligikaudse trisektsiooni nii, et tekkinud viga oleks küllalt väike. Käesolev artikkel ongi pühendatud ühe säärase konstruktsiooni kirjeldamisele ja analüüsimisele.



Joonis 1.

Olgu antud suvaline teravnurk α tipuga A (vt. joonis 1). Paigutame nurga haaradele võrdsed lõigud $AB = AC$. Jaotame lõigu BC pooleks ning olgu ta keskpunktiks O. Sirgel AO leiame punkti D nii, et $BO = DO$. Nüüd konstrueerime nurga α seesmises osas punkti E sääraselt, et kolmnurk BDE oleks võrdkülgne (juhime lugeja tähelepanu asjaolule, et kõik kirjeldatud operatsioonid on lihtsalt teostatavad sirkli ja joonlaua abil). Saadud nurga BAE jaotame pooleks. Me väidame, et sel teel konstrueeritud nurk praktiliselt võrdubki lähtenurga α ühe kolmandikuga.

Olgu $\beta = \angle OAE$. Et $\alpha/2 = \angle BAO$, siis $\alpha/2 + \beta = \angle BAE$. Seega me väidame, et kehtib ligikaudne võrdsus

$$\frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{2} \approx \frac{\alpha}{3}.$$

[1] Vt. K. Ariva ja M. Rahula artikleid käesoleva kogumiku kuuendas vihikus.

Et hinnata, kuivõrd täpselt konstrueeritud nurk kujutab nurga α üht kolmandikku, peame uurima funktsiooni

$$Z(\alpha)=\left(\frac{\alpha}{4}+\frac{\beta}{2}\right)-\frac{\alpha}{3}=\frac{\beta}{2}-\frac{\alpha}{12} \tag{1}$$

kulgemist argumendi α muutumisel 0° kuni 90° (Z sõltub veel nurgast β, kuid nagu varsti näeme, on β ise nurga α funktsioon).

Pöördume tagasi joonise 1 juurde. Et ühiku valik on meie käsutuses, võime ühikuks võtta lõigu AB. Kolmnurgast ABO leiame siis, et

$$BO=\sin\frac{\alpha}{2}. \tag{2}$$

Konstruktsiooni põhjal on kolmnurk BDO võrdhaarne ja täisnurkne, millest järeldub, et $BD=BO\cdot\sqrt{2}$. Kuid $BD=BE$, nii et võrdust (2) arvestades saame

$$BE=\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}. \tag{3}$$

Edasi huvitab meid tipu E juures asuv kolmnurga ABE nurk. Kõigepealt paneme tähele, et

$$\angle ODE=\angle BDE-\angle BDO=60^\circ-45^\circ=15^\circ$$

ja järelikult

$$\angle ADE=180^\circ-\angle ODE=180^\circ-15^\circ=165^\circ.$$

Seega

$$\angle AED=180^\circ-165^\circ-\beta=15^\circ-\beta$$

ja lõplikult

$$\angle AEB=75^\circ-\beta. \tag{4}$$

Rakendades nüüd kolmnurgale ABE siinuslauset ning arvestades tulemusi (3) ja (4), saame

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)=\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin(75^\circ-\beta).$$

Elementaarsete teisenduste abil saab anda leitud seosele nurkade α ja β vahel lihtsama kuju

$$\cot\beta=1+(1+\sqrt{3})\cot\frac{\alpha}{2}. \tag{5}$$

Arvutame esialgu funktsiooni $Z(\alpha)$ argumendi väärtuste puhul 0°, 45°, 90°. On selge, et $Z(0^\circ)=0$. Kui $\alpha=45^\circ$, siis seosest (5) järeldub, et [2]

$$\cot\beta=1+(1+\sqrt{3})(1+\sqrt{2})=2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}=\cot 7^\circ30'.$$

---

[2] Vt. J. Gabovitš. Trigonomeetriliste funktsioonide täpsete väärtuste arvutamisest. — Matemaatika ja kaasaeg, II, lk. 59.

Seega on $\beta = 7°30'$ ja valemist (1) saame $Z(45°) = 0$. Olgu nüüd $\alpha = 90°$, siis $\cot\beta = 2 + \sqrt{3}$, $\beta = 15°$ ning $Z(90°) = 0$. Kokkuvõttes saime

$$Z(0°) = Z(45°) = Z(90°) = 0.$$

Et funktsioon $Z(\alpha)$ on pidev piirkonnas $0° \leqslant \alpha \leqslant 90°$, siis näitab saadud tulemus, et tal peab olema selles piirkonnas vähemalt kaks ekstreemumit. Viimased meid huvitavadki, sest nad näitavad, milline võib olla konstrueeritud nurga maksimaalne kõrvalekaldumine nurga α ühest kolmandikust.

Funktsiooni $Z(\alpha)$ ekstreemumites peab ta tuletis võrduma nulliga:

$$\frac{dz}{d\alpha} = \frac{1}{2}\frac{d\beta}{d\alpha} - \frac{1}{12} = 0.$$

Siit saame

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{1}{6}. \tag{6}$$

Diferentseerides nüüd seost (5) ja arvestades tulemust (6) jõuame funktsiooni $Z(\alpha)$ ekstreemumites kehtiva võrduse juurde

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = (3 + 3\sqrt{3})\sin^2\beta. \tag{7}$$

Võrrandid (5) ja (7) moodustavad süsteemi, mille lahendamisel saame

$$\cot\frac{\alpha}{2} = 2 + \sqrt{3} \pm \sqrt{2 + 2\sqrt{3}},$$

$$\cot\beta = 6 + 3\sqrt{3} \pm 2\sqrt{5 + 3\sqrt{3}}.$$

Siit järeldub funktsiooni $Z(\alpha)$ maksimumi jaoks $\alpha_1 = 18°42'42''$; $\beta_1 = 3°15'19''$ ja seega $Z(\alpha_1) = 4'6''$. Analoogiliselt $Z(\alpha)$ miinimumi jaoks $\alpha_2 = 71°17'18''$; $\beta_2 = 11°44'41''$ ning $Z(\alpha_2) = -4'6''$.

Niisiis erineb meie poolt konstrueeritud nurk nurgast $\alpha/3$ maksimaalselt $4'6''$ võrra, millist tulemust võib lugeda enam kui rahuldavaks. Kui lähtenurk α ei ühti nurgaga α_1 või α_2, siis on konstrueeritud nurga kõrvalekaldumine nurgast $\beta/3$ veel väiksem.

Lõpuks märgime, et kuigi siiani oli juttu teravnurga trisektsioonist, lubab esitatud võte tegelikult jaotada suvalise nurga kolmeks osaks. Nimelt on täisnurga ja iga selle kordse trisektsioon teatavasti teostatav sirkli ja joonlaua abil; iga nurk aga on esitatav teravnurga ja täisnurga mingi kordse summana.

ÜHE KOLMNURKADE PERE OMADUSED[1]

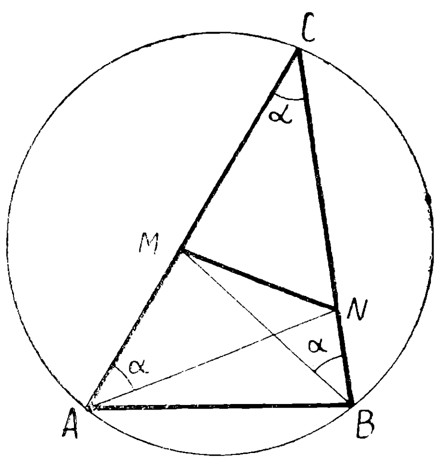
M. Levin, L. Portjanski

Käesolevas artiklis vaatleme kolmnurkade peret $T(c, R)$, mis koosneb kõigist ringi (raadiusega R) sisse joonestatud kolmnurkadest, millel on ühine alus $AB = 2c$.

D e f i n i t s i o o n. Olgu kolmnurgas ABC küljel CA (või tema pikendusel) ja küljel CB (või tema pikendusel) võetud vastavalt punktid M ja N nii, et (vt. joon. 1)

$$\angle MBC = \angle NAC = \angle ACB.$$

Lõiku MN nimetame kolmnurgas ABC külje AB k a a s l õ i g u k s.



Joonis 1.

Teoreem 1. *Lõigud MN, mis on kaaslõigud küljele AB, on kõigis kolmnurkades hulgast T(c, R) ühepikkused ja rahuldavad võrdust*

$$\frac{1}{MN^2} + \frac{1}{R^2} = \frac{1}{c^2}. \tag{1}$$

T õ e s t u s. Olgu $\triangle ABC$ külg AB lühim ning $\angle ACB = \angle MBC = \angle NAC = \alpha$. Võrdhaarsetest kolmnurkadest MBC ja ANC leiame

$$MC = \frac{BC}{2\cos\alpha}, \quad NC = \frac{AC}{2\cos\alpha}. \tag{2}$$

Et $\angle ACB = \angle MCN$, siis (2) põhjal $\triangle ABC \sim \triangle NMC$. Seega

$$MN = \frac{AB}{2\cos\alpha}. \tag{3}$$

Seosest $AB = 2R \cdot \sin\alpha$ avaldame $\cos\alpha$ ning asetame selle seosesse (3). Tulemusena saame võrduse (1).

[1] Venekeelsest käsikirjast tõlkinud **E. Lootus.**

Analoogiliselt näidatakse võrduse (1) kehtivust ka juhul, kui AB ei ole $\triangle ABC$ kõige lühem külg.

Teoreem on tõestatud.

Teoreem 2. *Olgu lõik MN kolmnurgas ABC hulgast $T(c, R)$ kaaslõik küljele AB. Nelinurga $MNBA$ ümber saab joonestada ringjoone raadiusega*

$$R_1 = \frac{R}{2|\cos\alpha|}, \tag{4}$$

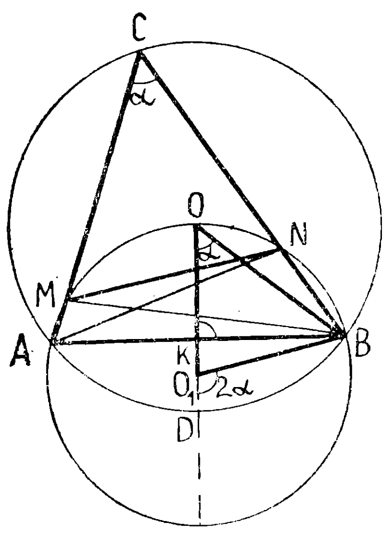
kus $\alpha = \angle ACB$.

Tõestus. Olgu kolmnurga ABC lühim külg AB. Võrduste (2) ja (3) põhjal on kolmnurgad ABC ja NMC sarnased. Siis $\angle NMC = \angle ABC$, seega ka $\angle ABN + \angle NMA = \angle ABC + 180° - \angle NMC = 180°$. Kuid siis saab nelinurga $MNBA$ ümber joonestada ringjoone. Kolmnurgast ABM leiame

$$2R_1 = \frac{AB}{\sin 2\alpha} = \frac{R}{\cos\alpha},$$

kust järeldubki seos (4).

Analoogiliselt saab tõestada teoreemi ka ülejäänud juhtudel.



Joonis 2.

Teoreem 3. *Kõigi kolmnurkade korral hulgast $T(c, R)$ saab ümber nelinurkade $MNBA$ joonestada ühe ja sama ringjoone.*

Tõestus. Olgu O kolmnurga ABC ümber joonestatud ringjoone keskpunkt, O_1 nelinurga $MNBA$ ümber joonestatud ringjoone (raadiusega R_1) keskpunkt ja $\alpha = \angle ACB$.

Olgu D keskpunkte O ja O_1 läbiva sirge ning $\triangle ABC$ ümberringjoone lõikepunkt, K sama sirge ja külje AB lõikepunkt. Et $OK \perp AB$, siis on kaared AD ja DB võrdsed. Kuid siis $\angle O_1OB = 1/2\angle AOB = \alpha$. Et ka $\angle DO_1B = \angle ANB = 2\alpha$, siis $\angle O_1BO = \alpha$. Järelikult $\triangle O_1OB$ on võrdhaarne, seega $O_1O = O_1B = R_1$.

Seega läbib hulga $T(c, R)$ mistahes kolmnurga korral nelinurga $MNBA$ ümber joonestatud ringjoon kolm kindlat punkti A, B ja O. See ringjoon on seega ühene, mida oligi tarvis tõestada.

Sama lihtne on tõestada ka järgmisi teoreeme.

Teoreem 4. *Kuulugu kolmnurk ABC hulka T(c, R). Ümber nelinurga MNBA joonestatud ringjoone raadius võrdub kolmnurga MNC ümberringjoone raadiusega ja nende ringjoonte keskpunktid on sümmeetrilised lõigu MN suhtes.*

Teoreem 5. *Kolmnurkade MNC ümberringjoonte keskpunktid (konstrueeritud kõigile kolmnurkadele hulgast T(c, R)) asuvad ringjoonel, mille keskpunkt on O_1 (see on ümber nelinurga MNBA joonestatud ringjoone keskpunkt) ja raadius on R.*

POPULAARTEADUSLIK MATEMAATIKA- JA FÜÜSIKAAJAKIRI «КВАНТ»

1970. aastal hakkas ilmuma eeskätt koolinoortele mõeldud populaarteaduslik matemaatika- ja füüsikaajakiri «Квант». Ajakirja esimeses numbris kirjutab selle redaktsioonikolleegium: «Meie maal ilmub palju teaduslikke ajakirju . . . Kuid o m a teaduslikku ajakirja kooliõpilastel senini ei olnud. On saabunud aeg see lünk täita. Meie tahaksime, et matemaatikast ja füüsikast huvitatud kooliõpilastele saaks «Квант» nende esimeseks teaduslikuks ajakirjaks.»

Samas numbris kirjutab NSVL Teaduste Akadeemia president M. V. Keldõš: «Teaduse horisondid on meie ajal muutunud tõeliselt ääretuteks, teaduse osa inimkonna elus pole kunagi olnud nii suur. Kaasaja teaduse üheks iseloomulikuks jooneks on matemaatiliste ja füüsikaliste uurimismeetodite üha suurem sissetungimine kõige erinevamatesse teadmiste aladesse. Matemaatika ja füüsika koos teiste loodusteadustega on tehnilise progressi aluseks... Et edukalt orienteeruda tänapäeva teaduse ja tehnika kõige keerulisemates probleemides, on vaja juba noores eas väsimatult omandada teadmisi ning uus ajakiri osutab selles suurt abi meie noorsoole.»

«Квант» on rikkalikult illustreeritud ajakiri, mille igast numbrist leiame huvipakkuvaid populaarteaduslikke artikleid ja originaalseid ülesandeid nii matemaatika kui ka füüsika alalt. Siin on avaldatud materjale matemaatikaringide jaoks, kirjutisi matemaatika ja füüsika olümpiaadidest ning sisseastumiseksamitest meie maa kõrgematesse koolidesse koos nendel esitatud ülesannetega.

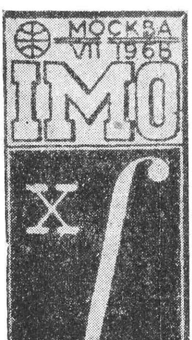
Ajakirjal «Квант», mille tiraaž on tõusnud juba üle 300 000 eksemplari, peaks olema kindel koht matemaatika- ja füüsikaõpetajate raamaturiiulitel. Sellest leiavad huvipakkuvaid materjale kõik matemaatika- ja füüsikahuvilised.

RAHVUSVAHELISED MATEMAATIKAOLÜMPIAADID MOSKVAS, BUKARESTIS JA KESZTHELYS

O. Prinits

Koolinoorte matemaatikaalase ettevalmistuse tõhustamiseks hakati 1959. aastal korraldama rahvusvahelisi matemaatikaolümpiaade. Esialgu ainult sotsialismimaid hõlmanud üritus on võitnud järjest enam populaarsust ka teiste riikide koolinoorte hulgas. Kui esimestel olümpiaadidel [1] olid tugevamad peamiselt Ungari ja Nõukogude Liidu kooliõpilased, siis viimastel olümpiaadidel on kindlateks esikohapretendentideks ka Saksa Demokraatliku Vabariigi noored. Individuaalses arvestuses aga pürivad esikohtadele siin vaadeldavatel olümpiaadidel ka noored inglased.

Käesolevas artiklis tutvustame X, XI ja XII rahvusvahelist matemaatikaolümpiaadi.



X matemaatikaolümpiaad toimus Moskvas 5.—18. juulini 1968. Osavõtvate riikide arv oli rekordiline — 12. Esmakordselt olid sellesse konkurssi lülitunud õpilased Inglismaalt, Itaaliast ja Rootsist. Ka Prantsusmaa võistkond oli esialgu üles antud, kuid enne olümpiaadi algust teatas oma loobumisest. Nõukogude Liidu võistkonda kuulusid õpilased ülikoolide juures töötavaist matemaatikakoolidest: Gennadi B e l õ i (Kiiev), Mihhail B l j u d z e (Leningrad), Viktor K u m a r i n (Leningrad), Pavel K u r t š a n o v (Moskva), Vladimir P o n o m a r e n k o (Moskva), Sergei S o b o l e v (Novosibirsk) ning Leningradi 239. Keskkoolist Vladimir M a k a r õ t š e v ja Valeri F e d o t o v. Rahvusvaheline žürii valis delegatsioonide poolt esitatud ülesannetest lahendamiseks järgmised:[2]

---

[1] Lähemalt vt. Matemaatika ja kaasaeg, II, lk. 51—59; IV, lk. 68—69 XIV; lk. 84—86 ja XV, lk. 144—146.

[2] Ülesannete lahendused on toodud raamatus J. M o r o z o v a, I. P e t r a k o v. Rahvusvahelised matemaatika olümpiaadid. Tln., 1972.

1. Tõestada, et leidub ainult üks niisugune kolmnurk, mille külgede pikkusteks on 3 üksteisele järgnevat naturaalarvu ja mille üks nurk on teisest 2 korda suurem.

(Rumeenia; 6 punkti)

2. Leida kõik kümnendsüsteemi positiivsed täisarvud x, mille numbrite korrutis on $x^2 - 10x - 22$.

(Tšehhoslovakkia; 7 punkti)

3. Tõestada, et n tundmatuga $x_1, x_2, \ldots, x_n$ võrrandisüsteemil

$$\begin{aligned} ax_1^2 + bx_1 + c &= x_2 \\ ax_2^2 + bx_2 + c &= x_3 \\ &\cdots \\ ax_n^2 + bx_n + c &= x_1 \end{aligned}$$

a) puudub lahend, kui $(b-1)^2 - 4ac < 0$,

b) on üks lahend, kui $(b-1)^2 - 4ac = 0$,

c) on rohkem kui üks lahend, kui $(b-1)^2 - 4ac > 0$.

Kõik vaadeldavad arvud on reaalarvud ja $a \neq 0$.

(Bulgaaria; 7 punkti)

4. Tõestada, et igal tetraeedril leidub niisugune tipp, millest lähtuvatest servadest on võimalik konstrueerida kolmnurk.

(Poola; 5 punkti)

5. Funktsioon f, mille määramispiirkonnaks on kogu reaalarvude hulk ja mille väärtuste hulk koosneb ainult reaalarvudest, rahuldab argumendi x iga väärtuse korral tingimust

$$f(x+a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - (f(x))^2},$$

kus a on mingi nullist erinev arv.

a) Tõestada, et funktsioon f on perioodiline (s. t. leidub $b \neq 0$ nii, et $f(x+b) = f(x)$ iga x korral);

b) tuua näide funktsiooni f kohta juhul, kui $a = 1$, kusjuures f ei tohi olla konstant.

(Saksa DV; 7 punkti)

6. Leida summa

$$\left[\frac{n+1}{2}\right] + \left[\frac{n+2}{2^2}\right] + \ldots + \left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right] + \ldots,$$

kus n on naturaalarv, ja tõestada saadud valemi õigsus. Kirjutis $[z]$ tähistab arvu z täisosa, s. t. suurimat täisarvu, mis ei ületa arvu z.

(Inglismaa; 8 punkti)

Valitud ülesanded osutusid kergemateks, kui olid eelmistel olümpiaadidel, ja seetõttu oli ka häid tulemusi rohkesti. Maksimaalse punktide arvu — 40 said 16 osavõtjat 96-st, s. o. umbes 17%. I järgu diplomi vääriliseks tunnistati ka 39 punkti saanud tööd. Neid oli 6. II järgu diplomi saamiseks oli vaja 33 kuni 38 punkti ja III järgu diplomi saamiseks 25 kuni 32 punkti. I ja II järgu diplomeid jagati välja mõlemaid 22 ja III järgu diplomeid 20.

Siinkohal on huvitav veel märkida, et täiesti korrektselt lahendasid

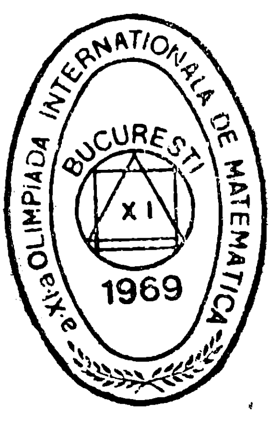
1. ülesande 39 osavõtjat,
2. „ 62 „ ,
3. „ 41 „ ,
4. „ 62 „ ,
5. „ 42 „ ,
6. „ 46 „ .

Tütarlapsi oli sellest olümpiaadist osavõtjate hulgas ainult 1, kes osutus parimaks osavõtjaks Mongoolia võistkonnas.

Olümpiaadi võitjaks võistkondlikus arvestuses tulid Saksa DV koolinoored, jättes teiseks Nõukogude Liidu ja kolmandaks Ungari noored matemaatikud. Et võistkondadevaheline võistlus oli küllalt pingeline, seda iseloomustab ka tabel 1.

Tabel 1

Riik	Saadud diplomite arv			Diplomita	Punktide kogusumma
	I järk	II järk	III järk		
1. SDV	5	3	—	—	304
2. NSVL	5	2	1	—	298
3. Ungari	3	3	2	—	291
4. Inglismaa	3	2	2	1	263
5. Poola	2	3	2	1	260
6. Rootsi	1	2	5	—	256
7. Tšehhoslovakkia	2	4	—	2	248
8. Rumeenia	1	1	2	4	208
9. Bulgaaria	—	2	2	4	206
10. Jugoslaavia	—	—	3	5	179
11. Itaalia	—	—	1	7	132
12. Mongoolia	—	—	—	8	74



XI matemaatikaolümpiaad toimus 5.—20. juulini 1969 Bukarestis. Esmakordselt saabusid matemaatikaolümpiaadile võistkonnad Belgiast ja Hollandist. Ka Prantsusmaa oli esmakordselt esindatud täisarvulise võistkonnaga (1967. a. olümpiaadist võttis Prantsusmaa osa mittetäielikus koosseisus). Võistlema ei tulnud aga eelmise olümpiaadi üks viimaseid — Itaalia. Nõukogude Liidu koolinoorte esindusse arvati Moskva kooliõpilased Andrei Zelevinski, Arkadi Klimov, Jelena Nekljudova, Andrei Prasolov, ja Andrei Hoduljev ning Vladimir Drinfeld Harkovist, Valeri Solovjov

Kaasanist ja Pavel Suvorov Leningradist. Enne väljasõitu korraldati olümpiaadist osavõtjatele 10-päevane treeningulaager Moskva Riikliku Ülikooli juures.

Olümpiaadi žürii valis lahendamiseks järgmised ülesanded:[3]

1. Tõestada, et leidub lõpmatu hulk naturaalarve a järgmise omadusega: arv $z = n^4 + a$ ei ole ühegi naturaalarvu n korral algarv.
(Saksa DV; 5 punkti)

2. Olgu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ reaalarvulised konstandid, x — reaalmuutuja ja
$$f(x) = \cos(a_1 + x) + \frac{\cos(a_2 + x)}{2} + \frac{\cos(a_3 + x)}{2^2} + \ldots + \frac{\cos(a_n + x)}{2^{n-1}}.$$
Tõestada, et kui $f(x_1) = f(x_2) = 0$, siis $x_1 - x_2 = m\pi$, kus m on täisarv.
(Ungari; 7 punkti)

3. Iga k väärtuse korral, $k = 1, 2, 3, 4, 5$, leida tarvilikud ja piisavad tingimused arvu $a > 0$ jaoks selleks, et eksisteeriks tetraeeder, mille k serva oleksid pikkusega a, ülejäänud $6 - k$ serva aga pikkusega 1.
(Poola; 7 punkti).

4. Diameetrile AB on joonestatud poolringjoon γ. Punkt C asub poolringjoonel γ ning ei ühti punktidega A ja B. Punkti C ristprojektsioon diameetrile AB on D. Diameeter AB on ühiseks puutujaks kolmele ringjoonele $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, kusjuures γ_1 on kolmnurga ABC siseringjoon, γ_2 ja γ_3 puutuvad lõiguga CD ja poolringjoonega γ. Tõestada, et $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ omavad veel ühe ühise puutuja.
(Hollandi; 6 punkti)

5. Tasapinnal on antud $n > 4$ punkti, kusjuures ükski 3 neist ei asu ühel sirgel. Tõestada, et võib leida mitte vähem kui C_{n-3} kumerat nelinurka tippudega neljas antud punktis.
(Mongoolia; 7 punkti)

6. Tõestada, et kui $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ ja $x_1y_1 - z_1^2 > 0$, $x_2y_2 - z_2^2 > 0$, siis
$$\frac{8}{(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)^2} \leqslant \frac{1}{x_1y_1 - z_1^2} + \frac{1}{x_2y_2 - z_2^2}.$$
Leida tarvilikud ja piisavad tingimused selleks, et antud võrratuse korral kehtiks võrdus.
(NSVL; 8 punkti)

Et seekordsed ülesanded olid raskemad kui X olümpiaadil, peegeldub tulemustest. Esimese järgu diplomi vääriliseks tunnistati ainult 3 võistlejat, nende hulgas Vladimir Drinfeld. Et XI olümpiaadist võttis osa 14 võistkonda 112 võistlejaga, siis on seekordne I järgu diplomi saanud õpilaste protsent ainult umbes 3. II järgu diplom anti 20 õpilasele ning III järgu diplom 21 õpilasele.

Täiesti korrektseid lahendusi andsid:

1. ülesandele 46 õpilast,
2. „ 34 „ ,
3. „ 31 „ ,
4. „ 21 „ ,
5. „ 37 „ ,
6. „ 7 „ .

[3] Ülesannete lahendused on toodud ajakirjas «Математика в школе», 1970, № 1, 68—71.

Võistkondlikus arvestuses osutusid XI matemaatikaolümpiaadil parimaiks Ungari koolinoored Saksa DV ja NSV Liidu ees. Ülevaate võistkondlikest tulemustest annab tabel 2.

Tabel 2

Riik	Saadud diplomite arv			Diplomita	Punktide kogusumma
	I järk	II järk	III järk		
1. Ungari	1	4	2	1	247
2. Saksa DV	—	4	4	—	240
3. NSVL	1	3	3	1	231
4. Rumeenia	—	4	2	2	219
5. Inglismaa	1	1	1	5	193
6. Bulgaaria	—	—	3	5	189
7. Jugoslaavia	—	2	2	4	181
8. Tšehhoslovakkia	—	—	3	5	170
9. Mongoolia	—	—	1	7	120
10.—11. Poola	—	1	—	7	119
10.—11. Prantsusmaa	—	1	—	7	119
12. Rootsi	—	—	—	8	104
13. Belgia	—	—	—	8	57
14. Hollandi	—	—	—	8	51

XII matemaatikaolümpiaad toimus Ungari Rahvavabariigis 8.—22. juulini 1970. Ülesanded lahendati Keszthely Kaubanduskoolis Balatoni järve ääres, olümpiaadi pidulik lõpetamine oli aga Budapesti Ülikoolis. Olümpiaadist osavõtvate riikide arv oli 14, nii nagu XI olümpiaadilgi, ainult Belgia asemel olid kohal Austria kooliõpilased.

Seekord olid Nõukogude Liidu koolinoorte võistkonnas Moskva Riikliku Ülikooli juures töötavast internaatkoolist Arkadi Klimov, Aleksander Korljukov ja Andrei Hoduljev; Leningradi Riikliku Ülikooli juures töötavast internaatkoolist Aleksei Aleksandrov, ja Sergei Semenkov, Voronežist Pavel Kopõlov, Harkovist Aleksander Linetski, ja esmakordselt oli NSV Liidu koolinoorte võistkonnas ka esindaja Eesti NSV-st, Nõo Keskkooli õpilane Vello Altleis.

On märkimisväärne, et olümpiaadi korraldajate-koordinaatorite hulgas oli viis eelmiste rahvusvaheliste matemaatikaolümpiaadide laureaati.

Žürii valis lahendamiseks järgmised ülesanded:[4]

1. Punkt M on kolmnurga ABC külje AB mistahes sisepunkt. Olgu r_1, r_2, r vastavalt kolmnurkade AMC, BMC ja ABC siseringjoonte raadiused; ϱ_1, ϱ_2, ϱ aga raadiused samade kolmnurkade välisringjoontele, mis asuvad nurgas ABC. Tõestada, et
$$\frac{r_1 r_2}{\varrho_1 \varrho_2} = \frac{r}{\varrho}$$
(Poola; 5 punkti)

2. Olgu antud naturaalarvud a, b, n, kusjuures $a > 1$, $b > 1$ ja $n > 1$. A_{n-1} ja A_n olgu a-süsteemi arvud, B_{n-1} ja B_n olgu b-süsteemi arvud. A_n ja B_n numbrid on x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, $\ldots$, x_0, A_{n-1} ja B_{n-1} numbrid on x_{n-1}, x_{n-2}, $\ldots$, x_0 (kusjuures $x_n \neq 0$ ja $x_{n-1} \neq 0$). Seega a-süsteemis
$$A_{n-1} = x_{n-1}x_{n-2}\ldots x_0, \quad A_n = x_n x_{n-1} x_{n-2} \ldots x_0$$
ja b-süsteemis
$$B_{n-1} = x_{n-1}x_{n-2}\ldots x_0, \quad B_n = x_n x_{n-1} x_{n-2} \ldots x_0.$$
Näidata, et võrratus
$$\frac{A_{n-1}}{A_n} < \frac{B_{n-1}}{B_n}$$ kehtib siis ja ainult siis, kui $a > b$.
(Rumeenia; 7 punkti)

3. Olgu a_0, a_1, $\ldots$, a_n, $\ldots$ reaalarvude jada, kusjuures
$$1 = a_0 \leqslant a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant \ldots \qquad (1)$$
Jada b_1, b_2, $\ldots$, b_n, $\ldots$ on defineeritud võrdusega
$$b_n = \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k} \right) \frac{1}{\sqrt{a_k}}.$$
Tõestada:
1) kõigi naturaalarvude $n \geqslant 1$ korral
$$0 \leqslant b_n < 2,$$
2) mistahes c jaoks poolkinnisest vahemikust $0 \leqslant c < 2$ leiduvad sellised arvud a_0, a_1, $\ldots$ a_n, $\ldots$ omadusega (1), et võrratus $b_n > c$ on rahuldatud lõpmata paljude naturaalarvuliste indeksite n korral.
(Rootsi, 8 punkti)

4. Määrata kõik positiivsed täisarvud n, millel on järgmine omadus.
Hulk $\{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$ on jaotatav kaheks osahulgaks nii, et ühes osahulgas on kõikide elementide korrutis võrdne teise osahulga lõikude elementide korrutisega.
(Tšehhoslovakkia; 6 punkti)

5. Tetraeedris $ABCD$ on $DB \perp DC$ ja punkti D ristprojektsioon tasandile ABC ühtib kolmnurga ABC kõrguste lõikepunktiga. Tõestada, et
$$(AB + BC + AC)^2 \leqslant 6 \cdot (AD^2 + BD^2 + CD^2).$$
Missuguste tetraeedrite korral kehtib võrdusmärk?
(Bulgaaria; 6 punkti)

6. Tasandil on antud 100 punkti, kusjuures ükski kolm nendest ei asu ühel sirgel. Vaatleme kõikvõimalikke kolmnurki, mille tipud asuvad etteantud punktides. Tõestada, et nende kolmnurkade hulgas ei ole teravnurkseid rohkem kui 70%.
(NSVL; 8 punkti)

---

[4] Ülesannete lahendused on toodud ajakirjas «Математика в школе», 1970, № 6, 60—64.

Maksimaalse punktide arvu — 40 saavutasid neljakordne olümpiaadide laureaat Wolfgang Burmeister Dresdenist, Imre Ruzsa Budapestist ja kahekordne olümpiaadide laureaat Andrei Hoduljev. I järgu diplomi vääriliseks tunnistati kokku 7 osavõtjat, II järgu diplomiga autasustati 11 õpilast ja III järgu diplomiga 39 õpilast. Viimaste hulgas oli ka Vello Altleis.

Täiesti korrektselt lahendasid
1. ülesande 61 õpilast,
2. „ 52 „ ,
3. „ 6 „ ,
4. „ 43 „ ,
5. „ 42 „ ,
6. „ 14 „ .

Võistkondadest suutsid olümpiaadi korraldajad ungarlased teistest rohkem punkte saada, neile järgnesid NSV Liidu ja Saksa DV koolinoored võrdse punktide arvuga, et aga SDV õpilastele anti veel kaks eriauhinda silmapaistvate lahenduste eest, siis tuleb võistkondlikku tulemust paremaks lugeda. Sealjuures hinnatakse Wolfgang Burmeistri 3. ülesandele antud lahendust teaduslikuks uurimuseks matemaatikas. Võistkondlik paremusjärjestus on toodud tabelis 3.

Tabel 3.

Riik	Saadud diplomite arv			Diplomita	Punktide kogusumma
	I järk	II järk	III järk		
1. Ungari	3	1	3	1	233
2. Saksa DV	1	2	4	1	221
3. NSVL	2	1	3	2	221
4. Jugoslaavia	—	3	3	2	209
5. Rumeenia	—	3	4	1	208
6. Inglismaa	1	—	6	1	180
7. Tšehhoslovakkia	—	—	4	4	150
8. Bulgaaria	—	—	3	5	145
9. Prantsusmaa	—	1	4	3	141
10. Rootsi	—	—	2	6	110
11. Poola	—	—	1	7	105
12. Austria	—	—	1	7	104
13. Hollandi	—	—	1	7	87
14. Mongoolia	—	—	1	7	78

Matemaatika ajaloost

HERMANN WEYL

9. novembril 1970. a. möödus 85 aastat XX sajandi esimese poole ühe juhtiva matemaatiku Hermann Weyli sünnist ja sama aasta 8. detsembril 15 aastat tema surmast. Avaldame alljärgnevalt J. Einpauli ja Ü. Lumiste tõlkes ning töötluses katkendeid I. Jaglomi ja B. Birjukovi sisukatest kirjutistest, mis on avaldatud lisadena H. Weyli viimase raamatu "Symmetry" (Princeton, 1952) venekeelsele tõlkele[1].

Hermann Weyl sündis 9. novembril 1885. a. Saksamaal Hamburgi lähedal Elmshorni linnakeses. Pärast keskkooli lõpetamist 1904. aastal astus ta Göttingeni kuulsasse ülikooli, mis tol ajal oli maailma matemaatilise mõtlemise keskuseks. Göttingenis möödusid H. Weylil aastad, mis olid määravaks tema kujunemisel teadlaseks. Tema arengut mõjutasid selle aja kuulsaimad matemaatikud, Göttingeni ülikooli professorid David Hilbert ja Felix Klein. 1908. a. lõpetas Weyl ülikooli ning samal aastal kaitses dissertatsiooni, mille järel talle omistati filosoofiadoktori kraad.

Aastatel 1908—1913 pidas Weyl loenguid Göttingeni ülikoolis privaatdotsendina; ainult ühe nendest aastatest veetis ta Münchenis, kus töötas Felix Kleini armastatuim õpilane füüsik ja matemaatik Arnold Sommerfeld. Viimase teaduslikel huvidel oli palju ühiseid kokkupuutekohti Weyli omadega. Alles 1913. aastal lahkus Weyl kauaks Göttingenist, võttes vastu professorikoha kuulsas Zürichi Kõrgemas Tehnikakoolis.

Võib arvata, et Weyli siirdumine Zürichisse ei olnud seotud mitte ainult ahvatlusega saada professuur ja kõrgemat palka (kuigi see polnud liigne noorele inimesele, kes alles hiljuti oli soetanud perekonna), vaid ka huviga, mida kutsus esile mõne (vähemalt ühe!) tulevase kolleegi teaduslik ja inimlik loomus. Tundes Weyli, ei ole raske taibata, et talle ei olnud sugugi vastumeelne mõte saada Albert Einsteini kolleegiks.

Tõsi küll, Weyli ja Einsteini koostöö ei kestnud kuigi kaua, kuid kandis rikkalikku vilja. Just neil aastail töötas Einstein välja

---

[1] Герман Вейль. Симметрия. Изд. «Наука». М., 1968. See laiale lugejaskonnale määratud raamat peaks olema huvipakkuv ka eesti matemaatikahuvilistele.

üldise relatiivsusteooria alused ning see ideedering haaras kohe ka Weyli. Võib arvata, et Riemanni geomeetriliste ideede visand, mis moodustab Einsteini kuulsa memuaari «Relatiivsusteooria üldised alused» (1916) sissejuhatava «matemaatilise» osa ning mis üllatab oma selge ülesehitusega, kannab endas jutuajamiste jälgi sellise suure Riemanni geomeetria tundjaga, nagu seda oli H. Weyl.

Võrreldamatult suurem oli A. Einsteini mõju H. Weylile. Einsteini memuaar ilmus 1916. aastal ja juba 1917. aastal pidas Weyl loenguid üldrelatiivsusteooriast. Need loengud moodustasid sisu Weyli raamatule, mis ilmus 1918. aastal pealkirjaga «Ruum, aeg, mateeria» (Raum, Zeit, Materie).

H. Weylil ei tulnud kunagi kaevata tähelepanu puudumise üle oma loomingu vastu, kuid ühelgi tema teosel ei olnud nii suurt menu kui viimati mainitul. Selle raamatu teine väljaanne ilmus 1919. aastal, kolmas 1920. a., neljas 1921. a., esimesed inglise- ja prantsuskeelsed väljaanded 1922. a. Iga oma selle raamatu uut trükki täiendas H. Weyl ja töötas ümber, nii et viienda trüki erinevus esimesest nii mahult kui ka sisult on juba väga suur. Kuid muutes palju detailides, ei muutnud ta oma teose üldist ideed; muutumatuks jäid ka väljendusrikas keel, kujundlike näidete küllus, matemaatiliste konstruktsioonide sügavus ja läbimõeldus ning tähelepanu üldfilosoofiliste küsimuste vastu.

Me ei peatu siin ei Weyli filosoofilistel seisukohtadel ega ka tema vaadetel füüsikale. Küll tahaks lähemalt iseloomustada kõnesoleva raamatu matemaatilisi iseärasusi. Raamat algab eukleidilise ruumi mõiste üldise selgitusega. Seejuures ütleb Weyl järsult lahti traditsioonilisest esitusviisist, milles reeglipäraselt võeti aluseks aksioomide see süsteem, millele lõpliku kuju andis Weyli õpetaja David Hilbert. Weyl lähtub hoopis teistest kontseptsioonidest, mille on sünnitanud ennem algebra kui geomeetria. Nimelt paneb ta nurgakiviks vektori mõiste. Tema geomeetria mittedefineeritavateks algmõisteteks saavad «vektor» ja «punkt» ja mittedefineeritavateks algvahekordadeks nende vahel vektoralgebra tehted ja vektori antud punktist rakendamise operatsioon. Tänapäeval ei ole enam vajadust tõestada geomeetria sellise käsitluse suuri teaduslikke ja metodoloogilisi väärtusi, kuid esimest katset panna geomeetriliste konstruktsioonide aluseks vektori mõiste on tähtsuselt raske ülehinnata.

Kuid suhteliselt lihtne eukleidilise ruumi skeem on kasutatav ainult erirelatiivsusteoorias, üldrelatiivsusteooria nõuab rohkemat.

Relatiivsusteoorias tugines A. Einstein oluliselt B. Riemanni tähelepanuväärsetele konstruktsioonidele, mis on esitatud tema kõnes «Hüpoteesidest, mis on geomeetriale aluseks» [2] ja mille 1818. a. väljaandele H. Weyl lisas oma sügavad kommentaarid.

---

[2] Vt. Matemaatika ja kaasaeg, XI, 1966, 57—76.

Raamatus «Ruum, aeg, mateeria» arendas H. Weyl edasi Riemanni kontseptsiooni. Ajendatud soovist teha reaalse neljamõõtmelise aeg-ruumi geomeetria võimalikult paindlikuks, esitas ta idee konstrueerida «kõverad» ruumid selliste «tasaste» ruumide «tükkidest», mis on ehitatud mitte kui eukleidiline ruum, vaid kui ilma meetrikata afiinne ruum. Selliseid ruume nimetas Weyl «afiinse seostusega ruumideks», nende tähtis erijuht, mida põhjalikult uuritakse tema mainitud raamatus, säilitas alatiseks nimetuse «Weyli ruum».

Weyli kõnealune raamat on klassikaliseks teoseks kirjanduses, mis käsitleb nii füüsikat kui ka geomeetriat. Varsti, 1925. a., autasustati seda raamatut ühe kõige väärtuslikuma tolle aja rahvusvahelise matemaatilise preemiaga — N. I. Lobatševski nimelise preemiaga, mis nendel aastatel määrati Kaasani Füüsika-Matemaatika Ühingu poolt silmapaitsvate tööde eest geomeetrias.

Üllatav on Weyli produktiivsus tema elu esimesel Zürichi perioodil. Aastatel 1913 kuni 1923 ilmus 5 raamatut ja 40 artiklit, milles käsitleti kõige erinevamaid matemaatika harusid: diferentsiaalvõrrandite teooria rajaülesandeid, elektromagnetiliste lainete levimise küsimusi, tänapäeval funktsionaalanalüüsi kuuluvaid probleeme, üldistatud ruume seoses Einsteini teooriaga, kombinatoorset analüüsi, kumerate pindade geomeetriat, trigonomeetriliste summade rakendamist arvuteoorias, matemaatika aluseid jm.

Uus matemaatilise loomingu ulatuslik suund, mis jäi Weylile pikema aja jooksul põhiliseks, sai alguse 1924. aastal. Selleks sai teisenduste rühmade esituste ja nende invariantide teooria, samuti selle teooria füüsikalised rakendused. Rühmade esituse puhtmatemaatilises teoorias kuulub Weylile vaieldamatult üks esikoht: on küllalt meenutada siin klassikalist Peter-Weyli teoreemi. Selle teooria füüsikaline aspekt seisneb mitmesuguste füüsikaliste protsessidega seotud sümmeetriakaalutluste arvestamises ja kasutamises. Meie sajandi 20-ndail aastail oli see aspekt veel uudiseks. XX sajandi teaduse ajaloos on vähe leida teoseid, mille mõju füüsika järgnevale arengule on võrreldav Weyli silmapaistva raamatu «Rühmateooria ja kvantmehhaanika» (Gruppentheorie und Quantenmechanik, 1928) omaga.

Elades Zürichis ei katkestanud H. Weyl sidemeid temale koduseks saanud Göttingeni ülikooliga. Nii näiteks avaldas ta oma töid meelsasti «Göttingeni Teadusliku Ühingu Toimetistes» (Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen).

1923. aastal pidas Weyl F. Kleini kutsel Göttingenis loenguid, mis pakkusid talle suurt rahuldust. Kahjuks osutus järgmine sõit Göttingeni hoopis vähem õnnestunuks. 1930. aastal tehti D. Hilbertile ettepanek üle kolida Berliini; ta nõustus tingimusel, et tema juhatatud kateeder (mis kunagi kuulus K. F. Gaussile) antakse üle H. Weylile. Weyli kandidatuur Hilberti järel kateedri juhataja kohale näis loomulik kõikidele matemaatikutele, kuid elu Saksamaal ei määranud neil aastail matemaatikud. 30-ndate aastate algul tulid Saksamaal võimule fašistid; Weyli nii inimese kui ka teadlase loomus ei võinud imponeerida Hitleri poolehoidjatele. Weyli sügavad üldkultuurilised huvid, tema tähelepanu ajaloo ja filosoofia, erinevate rahvuste kujutava kunsti ja kirjanduse vastu, austus inimkonna kultuuripärandi vastu — kõik see tegi Weylist saksa intelligentsi silmapaistva esindaja, kellele fašism kohe algusest peale kuulutas sõja. Weylile ei võinud meeldida fašismi totalitaarsed, antidemokraatlikud, antisemistlikud doktriinid — Albert Einsteini sõber ei saanud kuidagi olla Adolf Hitleri kuulekas alam! Weyl ei varjanud oma suhtumist fašismisse ja fašistid ei varjanud oma suhtumist Weylisse. Ainult jõud olid liiga ebavõrdsed! Hiljem Weyl rääkis, et hullemat aega kui kolm aastat (1930—1933), mis ta veetis Göttingenis fašismi võimuletuleku algul, pole tema elus olnud. 1933. aasta, kui Saksamaal tuli võimule Hitler, oli ainuke aasta, mil Weyl ei kirjutanud ühtegi raamatut ega ühtegi artiklit: sel ajal tal ilmselt ei olnud mahti tegelda ei matemaatikaga ega füüsikaga.

Fašistide võimuletulekut tähistati juudisoost õpetlaste massilise vallandamisega Göttingeni ülikoolist; koos juutidega lahkus Göttingenist ka sakslane H. Weyl. Ta kolis väiksesse Ameerika linna Princetoni, mis on kuulus oma Kõrgemate Uurimuste Instituudiga (Institute for Advanced Study) — suurepärase füüsika-matemaatika uurimisinstituudiga, kus leidsid peavarju ka A. Einstein ja E. Wigner. Viimane on kuulus saksa füüsik, kes sõltumatult Weylist tuli mõttele võimalusest kasutada füüsikas sümmeetria ideed.

Weylile, kes oli armunud saksa kultuurisse ja keelesse, ei olnud ülesõit Ameerikasse kerge, kuid kolme aasta kogemuste põhjal Göttingenis ta eelistas olla eraldatud Hitlerist ookeaniga.

Järgmised aastad Weyli elus olid suhteliselt rahulikud. Ta elas Princetonis, ümbritsetud üldise lugupidamisega, ja jätkas kõikide teaduslike suundade arendamist, mida ta oli alustanud eelnevates töödes.

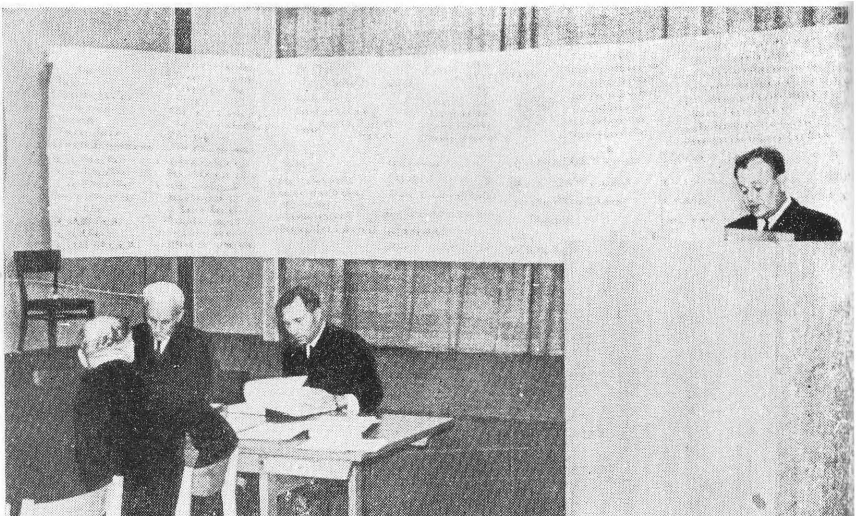
1938/39. aastal luges H. Weyl Princetonis loengute sarja algebralisest arvuteooriast; need loengud moodustasid sisu tema raamatule «Algebraic theory of numbers».

1939. aastal ilmus Weyli üks tähelepanuväärsemaid raamatuid «Klassikalised rühmad, nende invariandid ja esitused» (The Classical Groups, their Invariants and Representations), milles ta võttis kokku oma aastatepikkused uurimused rühmade ja nende esituse alal.

1943. aastal avaldati H. Weyli raamat «Meromorfsed funktsioonid ja analüütilised kõverad» (Meromorphic functions and analytic curves), kirjutatud koostöös poeg Joachimiga; see ilmus 30 aastat pärast Weyli esimest kompleksmuutuja funktsiooni-

Hermann Weyl
9. XI 1885—8. XII 1955

ENSV TA Küberneetika Instituudi direktor Boris Tamm (vasakul) ning teadus- ala asedirektorid Hillar Aben (keskel) ja Ivar Petersen.



Sulev Ulm doktoritööd kaitsmas.

teooriale pühendatud raamatut «Riemanni pinna idee» (Die Idee der Riemannschen Fläche, 1913).

Töö raamatutega vaheldus tööga originaalsete artiklite kallal, mis olid pühendatud nii vanadele uurimisaladele (rühmateooria, algebra, sümmeetria printsiipide füüsikalised rakendused) kui ka uutele teemadele. 1951. aastal tegi Weyl ühes suures artiklis «A half-century of mathematics» kokkuvõtte «matemaatilisest poolsajandist». Raske oleks leida teist autorit, kellel oleks olnud rohkem õigust selliseks esinemiseks ja kes oleks võinud seda teha paremini.

Samal aastal kolis Weyl USA-st Zürichisse, kuid endistviisi külastas aeg-ajalt Princetoni, säilitades tihedad sidemed selle linnakese matemaatikutega.

Tagasipöördumine armastatud linna, kust ta lahkus rohkem kui 20 aastat tagasi, kus möödus ta noorus ja kus ta saavutas esimese hiilgava edu, tegi Weyli õnnelikuks ka veel sellepärast, et ta kuulis uuesti tänavatel saksa keelt, millesse ta oli kirglikult kiindunud — isegi USA-s tundis Weyl ennast sakslasena. Kuid elada Šveitsis ei olnud antud tal enam kaua. Tal õnnestus veel avaldada rida huvitavaid artikleid, raamat «Sümmeetria» (Symmetry, 1952) ja kirjutada oma elulugu, millele ta andis pealkirja «Tunnetus ja teadvus» (Erkenntnis und Besinnung). Viimases jutustas ta oma filosoofilistest ja üldteaduslikest kiindumustest.

Weyli viimane avalik esinemine oli 1954. aastal rahvusvahelisel matemaatikute kongressil Amsterdamis, kus ta tervitas noori matemaatikuid teadlaste vanema põlvkonna poolt.

1955. aasta novembris toimus Zürichis suur bankett Weyli 70. sünnipäeva tähistamiseks. Otsustati välja anda Weyli «Kogutud teosed», mida aga juubilaril ei õnnestunud enam kätte võtta — ta suri 8. detsembril 1955 Zürichis, vähem kui kuu aega pärast juubelit.

H. Weyl mõtles palju ja kirjutas palju matemaatikast, tema kohast inimeste teadmiste ja tegevuse süsteemis. H. Weyl ei olnud ainult matemaatik, ta oli ka filosoof. Ta reageeris elavalt teaduse arengus esilekerkivatele probleemidele. Veendumus teaduse objektiivsusest, resultaatide väärtusest ja usaldatavusest iseloomustavad iga tõelise teadlase, ka Weyli loomingut, mille keskne suund koondub sümmeetria üldise mõiste ümber. Kui meil tänapäeval on ülevaade sümmeetria tähtsusest matemaatikas ja füüsikas, siis selles on vaieldamatult suur teene H. Weylil. Nähtust, mida käsitletakse sümmeetriana, uurib ta mitte kui inimmõtte suvalist loomingut, vaid kui reaalse tegelikkuse avaldusvormi, mis esineb elavas looduses, keemia valdkonnas, füüsikaliste protsesside sfääris, kristallide maailmas, kunstis. Matemaatilised teooriad on tegelikkuse fakte peegeldava sümmeetria mõiste täpsustamise vahendiks.

JAAN DEPMAN

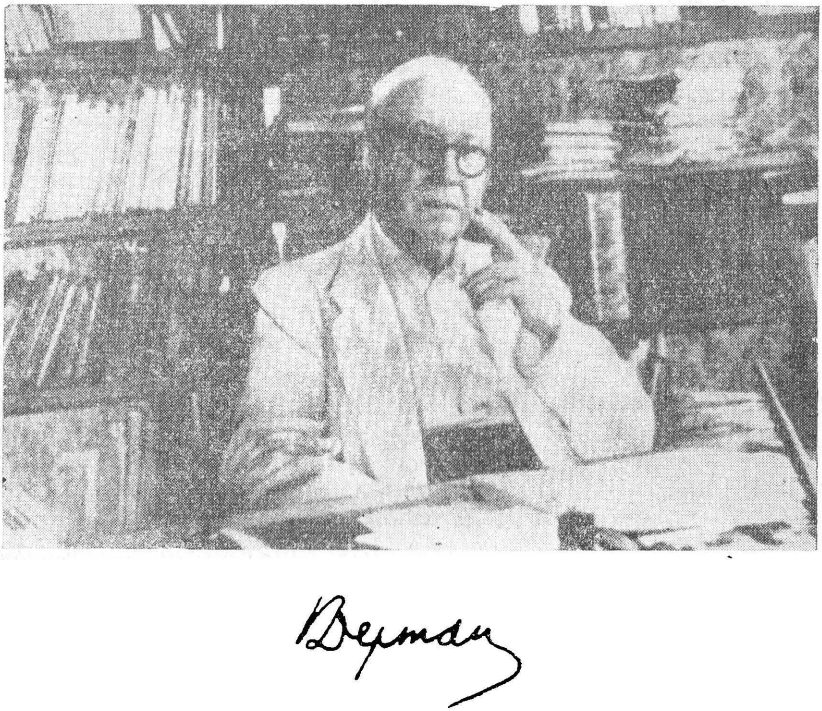
17. VII 1885 — 26. VII 1970

Leningradis suri oma kaheksakümne kuuendal eluaastal Eestist sirgunud silmapaistev teaduse ja kultuuri ajaloo uurija, teenekas matemaatikaprofessor Jaan Depman.

Peatumata siin pikemalt J. Depmani elu ja tegevuse üksikasjadel, mida on juba tutvustatud käesoleva sariväljaande varasemas numbris (Matemaatika ja kaasaeg, VIII, 1965, lk. 97—99) ja ka mujal (Eesti Loodus, 1970, nr. 12, lk. 767), iseloomustame siin lähemalt kaht suunda tema loomingus: 1) uurimusi matemaatika ajaloost Eestis, 2) metoodilisi ja populariseerivaid abimaterjale matemaatika õpetajale ja õppijale. Eeskätt need suunad pakuvad huvi Eesti NSV lugejale, olles ühtlasi põhilisemateks J. Depmani mitmepalgelises pärandis.

Enne J. Depmani töid oli matemaatika ajaloost Eestis teada vaid katkendlikke andmeid. Need puudutasid üksikute XIX sajandil Tartus tegutsenud matemaatikute elu ja tegevust. Üldkäsitlused aga puudusid, samuti ei olnud midagi teada matemaatika ajaloost Eestis enne XIX sajandit. Viimast lünka asuski esimesena täitma J. Depman. Oma raamatu «Jutustusi matemaatikast» eestikeelse tõlke (Tallinn, 1956) jaoks spetsiaalselt kirjutatud lisas «Matemaatika Eesti NSV territooriumil» tutvustas ta Tallinna «arvutusmeistrite» tegevust XVIII sajandil ja nende koostatud «rehkendusraamatuid». Esitatud andmeid täiendas ta oma raamatus «История арифметики» (ilmunud kahes väljaandes 1959 ja 1965).

Suurt tähelepanu osutas J. Depman matemaatika ajaloole Tartu ülikoolis XIX sajandil. Eriti põhjalikult on ta käsitlenud perioodi 1802—1820 koguteose «История отечественной математики» II köites (Kiiev, 1967). Sel perioodil oli matemaatika õpetamine Tartu ülikoolis veel põhiliselt astronoomiliste huvidega isikute käes ja piirdus enamasti elementaarmatemaatikaga. Kahes oma artiklis (1955, 1956) käsitles J. Depman materjale seoses ühe tähelepanuväärse episoodiga: C. Fr. Gaussi kutsumisega 1809. a. Tartu ülikooli matemaatika- ja astronoomiaprofessoriks (seda kutset Gauss kahjuks ei kasutanud). Tollal ülikooli lõpetanuist köitis J. Depmani tähelepanu eriti K. Kupffer, kes aastatel 1833—1834 andis Tallinnas välja esimest venekeelset elemen-



taarmatemaatika ajakirja. Seda ajakirja ja selle koostajat on ta tutvustanud ühes oma artiklis (1951). 1821. a. Tartusse tulnud prof. M. Bartelsile on J. Depman pühendanud artikli (1950), kirjutades temast esmajoones kui N. I. Lobatševski õpetajast Kaasanis. Väärtuslikku andmestikku matemaatika ajaloo kohta Tartus XIX sajandi keskel lisas J. Depmani uurimus ülikooli silmapaistva kasvandiku, läti rahvusest K. Petersoni õpinguaastatest ja eriti tema kandidaadiväitekirjast, mis valmis 1853. aastal. J. Depmani teeneks on ka, et ta koos prof. J. Sarvega dešifreeris peene gooti kirjaga täiskirjutatud vihiku sisu ja tõlkis selle vene keelde. Nimetatud väitekirjas anti esmakordselt pinnateooria kaks põhivõrrandit (praegu tuntud Peterson-Codazzi võrranditena).

Matemaatika arengust Tartu ülikoolis XIX sajandi teisel poolel on J. Depman andnud episoodilisi, kuid väärtuslikke uurimusi. Erilise väärtuse annab neile uute allikmaterjalide kasutamine, mida J. Depmanil õnnestus leida Leningradis tsaarivalitsuse haridusministeeriumi fondides. Selliseid materjale on kasutatud 1970. a. «Eesti Looduses» ilmunud ülevaates Tartu füüsikaprofessori A. Oettingeni elu ja tegevuse kohta, eriti seoses Oettingeni errulaskmisega venestusajal. Tartu ülikooli ajaloo seisukohalt on huvitav ka samast ajast pärit kirjavahetus siinse matemaatikaprofessori L. K. Lahtini ja haridusministri vahel, mida J. Depman tutvustab koguteose «Teaduse ajaloo lehekülgi Eestist I» veergudel. See töö, samuti nagu 1955. a. Leningradi A. I. Herzeni nim. Pedagoogikainstituudi toimetistes ilmunud artikkel, sisaldab põgusa ülevaate ka matemaatika arengust Tartus enne Suurt Oktoobrirevolutsiooni.

Matemaatika õpetamise metoodika valdkonnas on prof. J. Depmani eriliseks teeneks matemaatika ajalukku kuuluva aine esiletõstmine matemaatika õpetamisel. Otseselt on ta ajaloolise elemendi vajalikkust rõhutanud 1948. a. Leningradi Õpetajate Täiendusinstituudi väljaandel ilmunud töös «Исторический элемент в преподавании математики». Sama idee läbib aga ka tema mitmeid teisi artikleid ja raamatuid, milledest olgu märgitud näiteks «Воспитательное значение математики», «Меры и метрическая система», «Рассказы о математике», «Рассказы о решении задач». Viimased oma populaarteadusliku sisuga köitsid laia lugejaskonda, mistõttu neid on tõlgitud ka mitmesse väliskeelde, nagu hiina, tšehhi ja rumeenia keelde. Lastele kirjutas J. Depman rohkesti illustreeritud raamatu «Мир чисел».

Matemaatika õpetamise metoodika alalt köitsid J. Depmanit ka mitmed üksikprobleemid. Ajakirja «Математика в школе» veergudel on ta puudutanud neist kordamise ja juuravaldiste teisendamise küsimust. Kordamisel rõhutab ta viimase sajandivahetuse nimeka vene matemaatika õpetamise metoodiku S. I. Šohhor-Trotski ideed kasutada kordamiseks sobivalt valitud ülesandeid. Juuravaldiste teisendamises ja juurvõrrandite lahendamises häirivad teda aga mitmed vead, mis esinevad nii meie kui ka välismaa raamatutes ja ajakirjades.

J. Depman tundis suurt huvi koolimatemaatika uuendamise vastu. Näiteks tutvustas ta ajakirjas «Математика в школе» 1963. a. Ateenas toimunud rahvusvahelist konverentsi, tõstes sealjuures eriti esile rootslaste ettepanekuid. Koolimatemaatikasse toodavaid uusi teemasid tutvustas ta brošüürides «Первое знакомство с математической логикой» ja «Рассказы о старой и новой алгебре».

Prof. J. Depman oli seotud ka koolimatemaatika arenguga Eesti koolis. 1917. a. Tartus esimesel eesti matemaatika kongressil oli ta üks kongressi aktiviste. Sõjajärgsel perioodil esines ta matemaatika ajaloo ja matemaatika õpetamise metoodika alastel konverentsidel Eesti NSV-s. Ta on juhendanud ja oponeerinud matemaatika õpetamise metoodika valdkonda kuuluvaid väitekirju, nende hulgas on mitmed väitekirjad, mis on kirjutatud Eesti NSV-s.

Prof. J. Depmani uurimused matemaatika ajaloost ja tema populaarteaduslikud raamatud on äratanud tähelepanu nii Nõukogude Liidus kui ka välismaal. Seetõttu mälestataksegi suurt töömeest austuse ja lugupidamisega mitte ainult Eesti NSV-s ja Leningradis, vaid maailma paljudes kohtades.

Ü. Lumiste, O. Prinits

J. DEPMANI TÖÖD MATEMAATIKAST, SELLE AJALOOST JA METOODIKAST[1]

Raamatud

1. Matemaatika sõnad ... Leningrad, «Külvaja», 1926.
2. Русско-эстонский математический словарь. Изд-во Наркомпроса, 1928.
3. Учебник математики для коммунистического университета нацменьшинств Запада. Изд-во «Кюльвая», 1930.
4. Из истории математики. Детгиз, 1950.
5. Меры и метрическая система. Детгиз, 1953.
6. Меры и метрическая система. Пособие для учителя. Учпедгиз, 1954.
7. Рассказы о математике. Детгиз, 1954.
8. О мерах и метрической системе. Изд-во «Знание», 1955.
9. Возникновение системы мер и способов измерения величин. Учпедгиз, 1956.
10. Jutustusi matemaatikast. Eesti Riiklik Kirjastus, 1956.
11. Рассказы о решении задач. Детгиз, 1957.
12. Метод математической индукции. Учпедгиз, 1957.
13. История арифметики. Учпедгиз, 1959.
14. Мир чисел. Детгиз, 1963.
15. Первое знакомство с математической логикой. Изд-во «Знание», 1963.
16. Рассказы о решении задач. 2-е дополн. изд. Детгиз, 1964.
17. История арифметики. Изд-во «Просвещение», 1965.
18. Первое знакомство с математической логикой. (2-е испр. изд.) Изд-во «Знание», 1965.
19. Мир чисел. Изд-во «Детская литература», 1966.
20. Рассказы о старой и новой алгебре. Изд-во «Детская литература», 1967.

Artiklid

1. Л. Ф. Магницкий. — Математика в школе, 1939, № 3.
2. Леонтий Магницкий. — Морской сборник, 1940, № 1.
3. Иоганнес Тропфке. — Математика в школе, 1940, № 6.
4. Недавно найденное сочинение Архимеда. — Математика в школе, 1940, № 6.
5. Новое о Птолемее. «Проблемы физической географии», изд-во АН СССР, 1941.
6. Прообраз «бессмертного» в романе А. Доде (математик М. Шаль). Уч. зап. Пед. ин-та им. Герцена, 1941, № 41.
7. Интеграл вероятности. «Природа», 1940, № 11.
8. Древнейший вывод формулы половинного угла. — Математика в школе, 1941, № 3.
9. Задачи на деление площадей. — Математика в школе, 1946, № 2.
10. Воспитательное значение математики. Сборник «Обучение и воспитание в школе», Л., 1946.
11. Федериго Энриквес. «Успехи математических наук», 1947, вып. 4 (20), стр. 207—208.
12. Новое о Н. И. Лобачевском. К вопросу о рецензии в «Сыне отечества». Труды Ин-та истории естеств., 1948, № 2, стр. 561—563.

---

[1] Käesolevasse nimestikku ei ole võetud J. Depmani populaarteaduslikke kirjutisi, mis ilmusid sajandi algul Peterburi Eesti Üliõpilaste Seltsi toimetusel, 1920-ndail aastail Leningradis avaldatud ülevaateid eesti töölisajakirjanduse ja revolutsioonivõitluse ajaloost ning viimastel aastakümnetel ENSV väljaannetes ilmunud materjale mitmetest eesti kultuuri- ja ühiskonnategelastest (C. R. Jakobson, E. Vilde, M. Veske, J. Anvelt jt.).

13. Переписка министра Уварова о Лобачевском. В кн. «Материалы для биографии Лобачевского». Изд-во АН СССР, 1948.
14. Исторический элемент в преподавании математики. Сборник «Идейное воспитание учащихся». Л., 1948.
15. Русские ученые в Парижской академии. «Вестник Высшей школы», 1948, № 11.
16. Георг Петр Домкино. О 1-м изд. «Начал» Эвклида на русском языке. Труды Ин-та истории естеств., 1948, № 2, стр. 573—574.
17. О первом печатном руководстве по геометрии на русском языке. Труды Ин-та истории естеств., 1949, № 3, стр. 378—380.
18. Забытое издание «Начал» Евклида на русском языке. Ист.-матем. исследования, 1950, № 3, стр. 467—474.
19. М. Ф. Бартельс — учитель Н. И. Лобачевского. Ист.-матем. исследования, 1950, № 3, стр. 475—485.
20. Vene ja nõukogude matemaatikute hiilgavad saavutused arvuteoorias. — Nõukogude Kool, 1951, nr. 5, lk. 274—280.
21. Vene ja nõukogude matemaatikute hiilgavad saavutused arvuteoorias. — Nõukogude Kool, 1951, nr. 7, lk. 402—408.
22. Дополнительные сведения о педагогической деятельности М. В. Остроградского. Ист.-матем. исследования, 1951, № 4, стр. 160—170.
23. Русские математические журналы для учителя. — Математика в школе, 1951, № 6, стр. 9—22.
24. Карл Михайлович Петерсон и его кандидатская диссертация. Ист.-матем. исследования, 1952, № 5, стр. 134—164.
25. В. А. Стеклов в Петербургском университете. Ист.-матем. исследования, 1953, № 6, стр. 509—528.
26. Замечательные славянские вычислители Г. Вега и Я. Ф. Кулик. Ист.-матем. исследования, 1953, № 6, стр. 573—608.
27. К биографии С. В. Ковалевской. Ист.-матем. исследования, 1954, № 7, стр. 713—715.
28. Иван Козьмич Андронов (Математик-методист. К 60-летию со дня рождения). — Математика в школе, 1954, № 5, стр. 71—73.
29. «Геометрия практика». Ист.-матем. исследования, 1955, № 8, стр. 620—629.
30. Первый русский доктор математических наук Парижского университета. Ист-матем. исследования, 1955, № 8, стр. 630—635.
31. Из истории математики в Дерптском (Юрьевском) университете. Л., Уч. зап. Пед. ин-та, 14, Физ.-матем. Ф-т, 1955, № 1, стр. 128—137.
32. О фактических ошибках в книгах Клейна. Л., Уч. зап. Пед. ин-та, 14, Физ.-матем. ф-т, 1955, № 1, стр. 138—142.
33. К. Ф. Гаусс и Дерптско-Юрьевский университет. Вопросы истории естеств. и техн., 1956, № 1, стр. 241—245.
34. И. А. Литтров — учитель Н. И. Лобачевского. Ист.-матем. исследования, 1956, № 9, стр. 111—122.
35. Первое математическое общество в России. Труды 3-го Всесоюзного матем. съезда, 1956, т. I., М., 230 (совм. с Молодшим В. Н.).
36. Восстановление приоритета Б. Больцано. Л., Учен. зап. Пед. ин-та, 17, Физ.-матем. ф-т, 1957, № 2, стр. 111—118.
37. Победитель числа π—Фердинанд Линдеман. Л., Учен. зап. Пед. ин-та, 17, Физ.-матем. ф-т, 1957, № 2, стр. 119—123.
38. Вопросы преподавания элементарной математики на последнем международном конгрессе математиков. — Математика в школе, 1958, № 3, стр. 77—80.
39. Учители Н. И. Лобачевского. Л., Уч. зап. Пед. ин-та им. Герцена, 1958, № 197, стр. 195—211.
40. Вопросы истории математики в научно-атеистической работе учителя. — Математика в школе, 1960, № 2, стр. 17—28.

41. С.-Петербургское математическое общество. Истор.-матем. исследования, 1960, № 13, стр. 11—106.
42. Подготовка учителей математики для средней школы в Норвегии. «Математическое просвещение», 1961, вып. 6, стр. 297—300.
43. Применение электронных машин для отыскания совершенных чисел. — Математическое просвещение, 1961, вып. 6, стр. 324—327.
44. Новости науки о мерах. — Математика в школе, 1961, № 3, стр. 87—88.
45. Международный конгресс математики и вопросы преподавания математики, Эдинбург, 14—21 авг. 1958 г. — Математика в школе, 1961, № 4, стр. 83.
46. Meeter ja sekund said uue definitsiooni. — Nõukogude Õpetaja, 1961, 4. veebr. (Lisa: Abiks õpetajale nr. 4).
47. К вопросу о повторении при преподавании математики. — Математика в школе, 1962, № 1.
48. Loogiliste võrrandite lahendamine. — Nõukogude Kool, 1963, nr. 8, lk. 611—616, nr. 9, lk. 678—681, nr. 10, lk. 749—751.
49. Илья Самуилович Соминский. (Некролог). — Математика в школе, 1963, № 2, стр. 85.
50. Решение логических уравнений. — Математика в школе, 1963, № 5, стр. 65—71, 82.
51. Проблемы преподавания истории математики в университетах и педагогических институтах. «Труды 4-го Всесоюзного математического съезда, 1961». Т. II, Л., 1964, стр. 104 (совм. с Андроновым И. К. и Рыбниковым К. А.).
52. Последний противник гелиоцентрического мировоззрения в России и отклики на его книгу. Л., Уч. зап. Пед. ин-та им. Герцена, 1965, № 260, стр. 115—120.
53. К биографии Эйлера. Математик (1707—1783). Л., Уч. зап. Пед. ин-та, 1965, № 260, стр. 121—123.
54. К ранней истории математического просвещения в России. Л., Уч. зап. Пед. ин-та, 1965, № 260, стр. 108—114.
55. Международная сессия, посвященная новым методам преподавания математики. — Математика в школе, 1965, № 3.
56. О хорошей книге. — Математика в школе, 1965, № 5, стр. 92—93.
57. Об изданиях для учителей математики Эстонии. — Математика в школе, 1965, № 6, стр. 91—92.
58. Ühest matemaatika ajaloo populariseerimise katsest Eestis. — Matemaatika ja kaasaeg, VIII, 1965, lk. 82—83.
59. Esimene teada olev matemaatikaõpetaja Tallinnas. — Nõukogude Õpetaja, 1966, 9. juuli.
60. Знаменитнейшие историки математики (Первая серия обзоров). Л., Уч. зап. Пед. ин-та. им. Герцена, 1967, № 301, стр. 322—344.
61. Математика в Дерптском университете. В сб. «История отечеств. математики», т. 2, Киев, 1967, стр. 40—44.
62. Математика в Дерптском университете. В сб. «История отечеств математики» т. 2, Киев, 1967, стр. 138—145 (совм. с Лумисте Ю. Г.).
63. Montucla — matemaatika ajaloo pioneer. — Matemaatika ja kaasaeg, 12, 1967, lk. 108—115.
64. Täiendusi matemaatika ajaloole Tartu Ülikoolis. Teaduse ajaloo lehekülgi Eestis, 1, Tln., 1968, lk. 249—260.
65. Moritz Cantor — matemaatika ajaloo suurkuju. — Matemaatika ja kaasaeg, XVII, 1970, lk. 100—103.
66. Arthur Oettingen — Tartu ülikooli füüsikaprofessor. — Eesti Loodus, 1970, nr. 9, lk. 551—554.

IVAR PETERSEN TEOREETILISE KÜBERNEETIKA DOKTORIKS

Küberneetika Instituudi teadusala asedirektor Ivar Petersen kaitses 17. detsembril 1970 Tallinnas teoreetilise küberneetika erialal edukalt füüsika-matemaatikadoktori väitekirja «Mitmemuutuja funktsiooni identifitseerimise probleemid». Oponentidena jagasid oma retsensioonides kiitust tehtud tööle professorid V. V. Nalimov ja J. I. Hurgin Moskvast, Ukraina TA korrespondeeriv liige V. S. Mihhalevitš ja füüsika-matemaatikadoktor B. N. Pšenitšnõi Kiievist.

Selle rõõmsa sündmuse puhul eesti matemaatikas on igati sobiv teha tutvust päevakangelase endaga.

Ivar Petersen sündis 26. juulil 1929 Tallinnas haritlaste perekonnas. Isa oli insener ja ema õpetaja. Tallinnas möödus ka I. Peterseni kooliaeg. Ta alustas õpinguid 1936. a. Tallinna Õpetajate Seminari Harjutuskoolis ja jätkas 1942. a. Tallinna II Keskkoolis, mille lõpetas 1947. a. kuldmedaliga. Sama aasta sügisel algas I. Peterseni matemaatikastuudium Tartu Riiklikus Ülikoolis, kus ta lisaks põhikursusele õppis fakultatiivselt ka astronoomiat ning teoreetilist mehaanikat. Hiljem spetsialiseerus algebrale. 1952. a. lõpetas I. Petersen TRÜ — jällegi kiitusega.

Juba üliõpilaspõlve lõppjärgus — 1951. a. — algas I. Peterseni töö TPI matemaatikakateedris, kus ta 10 aasta jooksul läbis astmed vanemlaborant — assistent — vanemõpetaja — dotsent. Küllap oleks edasigi astunud, kui 1960. aastal poleks asutatud (esimesena Nõukogude Liidus) meie Teaduste Akadeemia juurde Küberneetika Instituut.

I. Peterseni pedagoogitööd, nagu ka teisi tema tegemisi iseloomustab asjalik, eesmärgikindel ja selgesihiline suhtumine oma ülesannetesse. Tema poolt neil aastatel esitatud loengukursus oli üles ehitatud süstemaatiliselt ja vajaliku rangusega. Samal ajal oli see täielikus vastavuses tehnikateaduste nõudmistega. Sellistena olid ta loengud eeskujuks noorematele ja ka vanematele kolleegidele. Tulevase doktori pedagoogitegevust iseloomustas loov suhtumine mitmesugustesse õppetööga seotud organisatsioonilistesse küsimustesse. Nii näiteks korraldati tema initsiatiivil põhjalikult ümber kõrgema matemaatika õpetamine instituudi kaugõppijatele, kasutati individuaalseid suuremamahulisi koduülesandeid jne. Vist ükski tulevane insener ei pääse mööda populaarsest Petersen-Roosist, TPI õppejõu H. Roosiga kahasse kirjutatud kaheosalisest «Kõrgema matemaatika ülesannete kogust», millest nüüd on ilmunud juba kolm trükki.

Kõige eelnimetatu ja ka mitmete muude tegemiste kõrval kirjutas I. Petersen kandidaadidissertatsiooni «Vahetatavate rühmade poolt moodustatud rühmade konstruktsioonist», mida kaitses Tartus 1955. aasta juunis. Selles algebraalases töös uuris I. Petersen n rühma kaldkorrutist ning tuletas selle abil meetodi ühe lõplike rühmade klassi konstrueerimiseks. Üksikasjalikumalt uuris ta kahe rühma kaldkorrutist kujutise translatsiooni mõiste abil.

*

1960. aasta sügisel võttis I. Petersen vastloodud TA Küberneetika Instituudis enda kanda ühe raskemaist ülesannetest — asus juhtima instituudi arvutuskeskust. Et teadusliku kaadri põhiosa moodustasid äsja ülikooli lõpetanud noored ja nii lähemast kui ka kaugemast ümbruskonnast polnud võtta kogemusi, tuli alustada algusest. I. Petersen organiseeris matemaatikute-programmeerijate tööd ja rajas ühe esimestest programmeerijate gruppidest meie vabariigis; pani aluse automaatprogrammeerimise-alastele uurimistöödele. Praegu Nõukogude Liidus ja ka raja taga hästi tuntud programmeerimiskeelte MALGOL ja VELGOL autorid Malle Kotli ja Vello Kuusik võivad end lugeda I. Peterseni õpilasteks. 1961. aastal organiseeriti I. Peterseni initsiatiivil Tallinnas elektronarvuti M-3 ekspluatatsiooni ja täiustamise alane üleliiduline nõupidamine.

Teaduse ja praktika vaheliste sidemete arendamiseks juhatas I. Petersen ülelinnalist matemaatikute seminari, lõi kontakte tööstusettevõtetega, aitas leida ja lahendada praktikaga seotud ülesandeid, propageeris kaasaegset arvutustehnikat ja matemaatilisi meetodeid — korraldas 1963. aastal loengutsükli «Elektronarvutid ja programmeerimine», 1966. aastal «Katsete planeerimine» jne. Tema sulest on ilmunud hästi loetavad brošüürid «Elektronarvutustehnika rahvamajandust abistamas» (kaasautorid M. Kotli ja M. Oper) ning «Katsete planeerimine».

Võime sügavalt analüüsida kaasaegse matemaatika keerukaid probleeme on I. Petersenis õnnelikult ühendatud oskusega kiiresti mõista väga eripäraste praktikaülesannete olemust ning leida nende lahendamiseks adekvaatseid matemaatilisi võtteid. Tema käe all koostatud matemaatilise statistika programmid on leidnud laialdast rakendamist paljudes Nõukogude Liidu asutustes ja ettevõtetes. Tema poolt väljatöötatud pooljuhtdetailide optimaalse klassifitseerimise meetod on originaalne, annab juba praegu märgatavat majanduslikku efekti ning omab eeldusi muutuda laialdaselt kasutatavaks meetodiks mitmetes tööstusharudes.

*

Kuigi organisatoorsed küsimused nõudsid suure osa ajast, jätkus I. Peterseni edukas teaduslik töö.

Aastatel 1961—1963 avaldas I. Petersen mitu artiklit arvutusmatemaatika valdkonnast.

Algul uuris ta harilike lineaarsete diferentsiaalvõrrandite rajaülesannete lahendamist nn. interpolatsioonitüüpi meetoditega. Ta konstrueeris kolm uut meetodit, andis nende koondumistingimused ja koondumiskiiruse hinnangud Tšebõšovi sõlmede puhul.

Edasi käsitles I. Petersen ühemuutuja funktsiooni interpoleerimist tükiti kuuppolünomiaalsete funktsioonidega. Selle interpolatsioonmenetluse alusel töötas I. Petersen välja harilike teist järku diferentsiaalvõrrandite rajaülesannete ligikaudse lahendamise uue meetodi ja tõestas selle koonduvuse.

I. Petersen on vaadelnud ka üldiste mittelineaarsete operaatorvõrrandite ligikaudse lahendamise probleeme. Ta andis lahendusalgoritmid, mis üldistavad diferentsiaalvõrrandite lahendamisel kasutatavat Runge-Kutta meetodit, ning rakendas neid mittelineaarsete funktsionaalide miinimumpunktide leidmiseks.

Hilisematel aastatel uuris I. Petersen koos E. Raigiga nn. kujutiste meetodit kitsendustega ekstreemumülesannete taandamiseks kitsendusteta ülesanneteks. Nad andsid meetodi teoreetilise põhjenduse ja konstrueerisid rea sobivaid teisendusi mõnda tüüpi kitsenduste jaoks.

*

Eriti viljakaks ja tulemusterikkaks kujunes aga I. Peterseni töö matemaatilise statistika valdkonnas. Peamisteks huviobjektideks said regressioonanalüüsiga seotud identifitseerimisprobleemid ja katsete planeerimine. Nende küsimustega hakkas I. Petersen tegelema aastatel 1964—1965. Tema esimesed tööd olid seotud klassikalise regressioonanalüüsi mudelitega ja nendel põhinevate optimiseerimismeetoditega.

Praktikas kulgevatel nähtustel, näiteks tehnoloogilistel protsessidel on komponendid (sisendandmed) tihti tugevasti korreleeritud. Selleks, et tuua välja andmetes sisalduvat informatsiooni lineaarse mudeli ehitamiseks, kasutas I. Petersen argumentidena sisendite peakomponente ja töötas välja vastava meetodi.

Edasi huvitus tulevane doktor identifitseeritava mitmemuutuja funktsiooni maksimumi leidmisest. Kuna maksimumpunktidele usaldusväärse hinnangu leidmiseks pole tihti piisavalt andmeid, siis pakub suurt huvi ka lihtsalt selle suuna määramine, kus funktsiooni väärtused suurenevad. Tavaliselt koostatakse tundmatu funktsiooni jaoks lineaarne regressioonimudel ja loetakse, et funktsiooni maksimumpunkt asub mudeli gradiendi suunas. I. Petersen näitas, et selliselt talitades saame liiga optimistlikud hinnangud: funktsiooni tegelikel väärtustel on tendents olla väiksem mudeli väärtustest mudeli gradiendi suunas. Gradientsuuna asemel näitas I. Petersen suuna, mis arvestab mudeli erinevat täpsust. Muude huvitavate omaduste kõrval on funktsiooni tegelike väärtuste kasvamise tõenäosus selles suunas maksimaalne.

Selle järel asus I. Petersen laiendama klassikalise regressioonanalüüsi mudelit. Regressioonanalüüsi üheks raskeks momendiks on asjaolu, et ainult erandjuhtudel võib enne täpselt määrata funktsioonide klassi, mille lineaarse kombinatsioonina on kirjeldatav funktsioon ligilähedaselt esitatav. Sageli võetakse Weierstrassi teoreemile toetudes ette polünoomide klass. Kui ühemuutuja funktsioonide korral on tavaliselt küllaldaselt vaatlusandmeid polünoomi kõigi kordajate usaldatavaks määramiseks, siis mitmedimensionaalsel juhul on olukord halvem. Koos polünoomi astmega kasvab järsult määratavate kordajate arv. Funktsiooni kohta pole küllaldaselt informatsiooni, et piirduda mõne mittetäieliku polünoomiga. Nende raskuste ületamiseks on I. Petersen töötanud kahes suunas.

Esimene regressioonanalüüsi üldistus seisneb selles, et nõutakse lineaarse lähenduse adekvaatsust ainult lokaalses mõttes, s. o. et identifitseeritav funktsioon oleks iga punkti ümbruses aproksimeeritav tuntud funktsionaalide lineaarse kombinatsiooniga. Sellise lähenemisviisi korral on mudeli kordajad valitud aproksimeerimispunkti funktsioonid. Leitakse nihutamata ja väikseima ruutkeskmise veaga hinnang, mis on lineaarne funktsioon vaatlustulemustest. Vabaks jääb aproksimeerimispunkti valik ja seda asjaolu saab erinevatel eesmärkidel kasutada. Toodud mudelit kasutades andis I. Petersen näiteks meetodi mittelineaarse programmeerimisülesande lahendamiseks, kui maksimiseeritava funktsiooni kohta on teada vaid tema ligikaudsed väärtused vaatlustulemustena.

Teine suund regressioonanalüüsi üldistamisel seisneb selles, et eeldatakse identifitseeritava funktsiooni kuulumist nn. taastava tuumaga funktsioonide klassi. See lähenemisviis võimaldas I. Petersenil saada kvadratuurvalemite teooriale toetudes terve rea huvitavaid identifitseerimisvalemeid. Näiteks vaatles I. Petersen ühemuutuja funktsioonide identifitseerimist juhul, kui vaatluspunktideks on Tšebõšovi polünoomide nullkohad. Saadakse seos funktsioonide diferentsiaalomaduste ja nende lähenemisel tekkiva ruutkeskmise vea vahel. Selline lähenemisviis võimaldab funktsioonide diferentsiaalomadustest lähtudes saada aprioorset hinnangut vajalike mõõtmiste arvu kohta.

Eriti tulemusrikkaks osutus taastuva tuumaga funktsioonide klasside uurimine mitmemuutuja polünoomide identifitseerimiseks sobivate katseplaanide leidmisel. Optimaalsete diskreetsete katseplaanide täpne leidmine on mitmedimensionaalsel juhul lootusetult raske ülesanne. Nn. pidevate katseplaanide teooria annab diskreetsete katsepunktide asemel mõõdu, mille järgi katsepunktid jaotuvad. Kuid dispersiooni minimaksi mõttes optimaalne pidev katseplaan sõltub identifitseeritava polünoomi astmest ja peale üksikute erandjuhtude pole teada meetodeid tema leidmiseks. I. Petersen leidis, et kui identifitseerimispiirkonnaks on n-dimensionaalne ühiksfäär, siis on heade omadustega mõõduks Tšebõšovi mõõt. Kõrgete astmetega polünoomide korral on vastav katseplaan ligilähedaselt sama hea kui optimaalne plaan. Sellega lahendas I. Petersen väga tähtsa probleemi katsete planeerimise teoorias. Real konkreetsetel juhtudel on I. Petersen leidnud ka Tšebõšovi mõõdule vastavad diskreetsed katseplaanid. Võrdlemine pidevate optimaalsete plaanidega näitab, et leitud katseplaanide viga ei erine oluliselt vea teoreetilisest alampiirist. I. Petersen on töötanud välja ka meetodi uute katseplaanide leidmiseks tuntud katseplaanide otsekorrutisena.

Kõikidel juhtudel pöörab I. Petersen suurt tähelepanu teoreetiliste tulemuste rakendamisele praktikas ja saadud algoritmide realiseerimisele arvutil.

Matemaatilise statistika vallas saadud põhitulemused moodustavadki Ivar Peterseni doktoriväitekirja sisu.

*

Möödunud aastate jooksul on mitmed I. Peterseni aspirandid kaitsnud oma kandidaadiväitekirju: T. Tobias arvutusmatemaatikast, Ü. Jaaksoo adaptiivse juhtimise probleemidest, I. Mauer mittelineaarsest planeerimisest jt. Ka praegu juhendab ta mitme noore inimese ponnistusi.

*

Jah, aga Ivar Petersen kui inimene?
Väga tore inimene!

*

Möödunud aasta detsembris omistati Küberneetika Instituudi teadusala asedirektorile Ivar Petersenile doktorikraad. Soovime teenekale matemaatikule ja ühele Küberneetika Instituudi palge kujundajale palju õnne ja ootame uusi mehetegusid.

Töökaaslased

SULEV ULM ARVUTUSMATEMAATIKA DOKTORIKS

29. oktoobril 1970 kaitses Tallinnas ENSV Teaduste Akadeemia füüsika-matemaatika- ja tehnikateaduste osakonna nõukogu ees edukalt oma doktoriväitekirja «Uurimusi mittelineaarsete operaatorvõrrandite ja ekstreemumülesannete lahendusmeetodite alalt» ENSV TA Küberneetika Instituudi matemaatiliste meetodite sektori vanem teaduslik töötaja Sulev Ulm. Väitekirja oponeerisid füüsika-matemaatikadoktorid M. K. Gavurin Leningradist, D. E. Allahverdijev Bakuust ja G. A. Medvedjev Tomskist.

Sulev Ulm sündis 26. juulil 1930 Läänemaal Oru vallas Jalukse külas (praeguses Haapsalu rajoonis) kooliõpetaja perekonnas. Ta lõpetas 1944. aastal Suure-Lähtru algkooli ja 1949. aastal kuldmedaliga Haapsalu I Keskkooli, kus tema matemaatikaõpetajateks olid G. Tooming ja V. Sillandi. Aastatel 1950—1955 õppis ta TRÜ Matemaatika-Loodusteaduskonna matemaatikaosakonnas, mille lõpetas kiitusega.

S. Ulmi teadusliku uurimistöö põhisuund sai alguse juba ülikoolipäevilt. Selle kujunemisel etendas olulist osa matemaatikaringi väike töörühm, mille 1953. aasta sügisel organiseeris matemaatikaosakonna IV kursuse üliõpilastest tollal esimest aastat õppejõuna töötav Ülo Kaasik ning mille üheks aktiivseks liikmeks oli S. Ulm. Selles rühmas hakati uurima Newtoni meetodile lähedasi iteratsioonimeetodeid mittelineaarsete võrrandite lahendamiseks. Tuginedes prof. G. Kangro loetud suurepärasele funktsionaalanalüüsi erikursusele ja Ü. Kaasiku loetud funktsionaalanalüüsi lähendusmeetodite erikursusele üldistati need iteratsioonimeetodid operaatorvõrrandite lahendamiseks ning uuriti nende koondumist funktsionaalanalüüsi vahenditega. Üldistamine võimaldas neid meetodeid kasutada ka mittelineaarsete võrrandisüsteemide ning integraal- ja diferentsiaalvõrrandite lahendamiseks.

Ü. Kaasiku juhendamisel valminud diplomitöös «Mõnede iteratsioonimeetodite koonduvusest Banachi ruumis» konstrueeris S. Ulm operaatorvõrrandite lahendamiseks neljandat järku täpsusega iteratsioonimeetodi, mis sisaldab operaatori tuletisi kuni kolmanda järguni, ning tõestas selle koonduvuse. Kasutatud metoodika võimaldas täpsustada ka Newtoni meetodi ja kolmandat järku täpsusega iteratsioonimeetodite koonduvusteoreeme. Diplomitöö tulemused on ilmunud trükis TRÜ Toimetiste 42. vihikus (1956). Märgime, et samas Ü. Kaasiku uurimisrühmas valmisid ka L. Kivistiku ja allakirjutanu diplomitööd, mis hiljem on edasi arendatud kandidaadiväitekirjadeks.

Newtoni meetodile lähedaste iteratsioonimeetodite uurimist jätkas S. Ulm aastatel 1956—1959 aspirantuuris TPI matemaatikakateedri juures, kus tema juhendajaks oli akad. A. Humal. Kandidaadiväitekirja «Iteratsioonimeetodite koonduvusküsimuste käsitlemisest majorantide printsiibil» kaitses ta Tallinnas 1960. aastal. Väitekirjas on välja töötatud metoodika majorantide printsiibi abil iteratsioonimeetodite koonduvusteoreemide tõestamiseks, mille korral eeldatakse võrrandi lahendi olemasolu. Selle metoodika abil on väitekirjas tõestatud rida teoreeme Newtoni meetodi modifikatsioonide ja analoogide koonduvuse kohta. Tavaliselt antavate iteratsioonimeetodite koonduvusteoreemide eeldustest järeldub ka võrrandi lahendi olemasolu. Kui aga on teada võrrandi lahendi olemasolu ja piirkond, kus lahend asub, siis S. Ulmi tulemused võimaldavad sageli näidata iteratsioonimeetodite koondumist nõrgematel eeldustel ning täpsustada veahinnanguid.

Pärast aspirantuuri lõpetamist asus S. Ulm 1959. aastal tööle noorema teadusliku töötajana ENSV TA Energeetika Instituudis. ENSV TA Küberneetika Instituudi loomisel 1960. aastal siirdus ta koos mehaanika ja rakendusmatemaatika sektoriga sinna. Alates 1963. aastast on ta Küberneetika Instituudi (algul arvutuskeskuse, hiljem matemaatiliste meetodite sektori) vanem teaduslik töötaja. Vanema teadusliku töötaja kutse anti talle 1970. aastal.

S. Ulm on Küberneetika Instituudi arvutusmeetodite töörühma juhiks. Tema juhendamisel on kaitsnud kandidaadiväitekirja praegune TPI õppejõud Heino Koppel (1968), tema praegused töökaaslased Küberneetika Instituudis Valdur Poll (1969) ja Otu Vaarmann (1970) ning Eesti Maaviljeluse ja Maaparanduse Teadusliku Uurimise Instituudi teaduslik töötaja Alvar Olm (1971). S. Ulm on pidevalt andnud konsultatsioone teaduslikele ja insenertehnilistele töötajatele matemaatikaalastes küsimustes. Tihedamaid väliskontakte on tal Saksa DV matemaatikutega.

S. Ulm on töötanud Küberneetika Instituudi ametiühingukomitee abiesimehena ja esimehena. Alates 1967. aastast on ta ENSV TA füüsika-matemaatika- ja tehnikateaduste osakonna väitekirjade kaitsmise nõukogu liige.

Rea aastate vältel on S. Ulm lugenud TPI-s tunnitasu alusel kõrgema matemaatika kursust ja arvutusmeetodite erikursust. Koos TPI matemaatikakateedri õppejõu M. Leviniga on S. Ulm kirjutanud «Arvutusmeetodite käsiraamatu» (1966) ja «Masinaehitaja käsiraamatu» peatüki «Matemaatika» (1968).

Küberneetika Instituudis töötamise ajal on S. Ulm järjekindlalt jätkanud teaduslikku uurimistööd, mille tulemused ongi kokku võetud doktoriväitekirjas. Uurimistöö tulemused on avaldatud aastatel 1963—1970 ENSV TA Toimetistes ilmunud 21 teaduslikus artiklis ning lisaks veel mõnedes artiklites, mis on ilmunud üleliidulistes ajakirjades ja kogumikes.

Tõuke uuele uurimissuunale S. Ulmi teaduslikus loomingus andsid 1961. aastal ilmunud nõukogude matemaatiku A. S. Sergejevi ja saksa matemaatiku J. W. Schmidti suhteliselt väikesed artiklid, milles üldistati kõõlude meetod operaatorvõrrandite lahendamiseks Banachi ruumides. S. Ulm konstrueeris ka kõrgemat järku täpsusega iteratsioonimeetodite ja gradientmeetodite interpolatsioonanaloogе, mille arvutuseeskirjades on operaatori tuletised asendatud vastavate üldistatud diferentssuhetega, ning tõestas nende meetodite koonduvuse tema poolt juba varem kasutatud majorantide printsiibil. See tõestusmetoodika võimaldas S. Ulmil täpsustada ka Sergejevi ja Schmidti tulemusi kõõlude meetodi koondumise kohta.

Sammuks edasi S. Ulmi uurimustes on Steffenseni meetodi üldistamine operaatorvõrrandite lahendamiseks 1964. aastal. Steffenseni meetod on samuti ruutkoonduvusega nagu Newtoni meetodki, kuid tema oluliseks eeliseks Newtoni meetodi ees on asjaolu, et temaga arvutamisel pole vaja leida operaatori tuletiste väärtusi, vaid ainult operaatori ja selle diferentssuhte väärtusi. Näiteks võrrandisüsteemi

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

lahendamisel Newtoni meetodiga tuleb igal sammul lisaks funktsioonide f_i väärtustele arvutada veel osatuletiste $\partial f_i/\partial x_j$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ väärtused. Sama võrrandisüsteemi lahendamisel Steffenseni meetodiga tuleb aga igal sammul arvutada ainult $n(n+1)$ funktsioonide f_i väärtust. See toob kaasa olulisi lihtsustusi võrrandisüsteemide lahendamisel elektronarvutis, sest langeb ära vajadus programmide koostamiseks n^2 osatuletise väärtuste arvutamiseks. S. Ulm on konstrueerinud mitmeid Steffenseni meetodi modifikatsioone ja analooge ning uurinud nende koondumist. Steffenseni meetodi koonduvusteooriat on oma väitekirjas edasi arendanud S. Ulmi aspirant H. Koppel, kes üldistas operaatorvõrrandite lahendamiseks Aitkeni meetodi, mis erijuhuna sisaldab Steffenseni meetodi.

Mittelineaarsete operaatorvõrrandite lahendamisel kõõlude, Newtoni, Steffenseni jt. seda liiki meetodite abil tuleb igal iteratsioonisammul lahendada lineaarne operaatorvõrrand või leida vastava pöördoperaatori väärtus. S. Ulm konstrueeris 1967. aastal Newtoni ja Steffenseni meetodile lähedasi iteratsioonimeetodeid, mille korral kasutatakse p ö ö r d o p e r a a t o r i j ä r k j ä r g u l i s t a p r o k s i m e e r i m i s t. Doktoritöö kaitsmisel ütles M. K. Gavurin end varem olnud arvamusel, nagu võiks konstrueerida ainult selliseid ruutkoonduvusega iteratsioonimeetodeid, mille igal sammul tuleb lahendada lineaarseid operaatorvõrrandeid. S. Ulmi konstrueeritud meetodid lükkasid selle arvamuse ümber. Põhjalikumalt on uurinud pöördoperaatori järkjärgulisele lähendamisele tuginevaid iteratsioonimeetodeid S. Ulmi aspirant O. Vaarmann.

Diferentssuhteid sisaldavate iteratsioonimeetodite konstrueerimise, uurimise ja rakendamise käigus töötas S. Ulm välja ü l d i s t a t u d d i f e r e n t s s u h e t e t e o o r i a a l u s e d Banachi ruumis. See teooria on tema doktoriväitekirja tugisambaks. Põhilised tulemused üldistatud diferentssuhete teoorias sai S. Ulm 1966. aastal ning samal aastal ta tutvustas seda teooriat ja selle rakendusi oma ettekandes rahvusvahelisel matemaatikute kongressil Moskvas.

S. Ulm analüüsis esimest järku üldistatud diferentssuhte varem kasutatud definitsioonide puudusi ja voorusi ning defineeris selle mõiste nii, et ühelt poolt oli suhteliselt lihtne arendada iteratsioonimeetodite teooriaid ning teiselt poolt nende meetodite rakendamisel konkreetsete võrrandisüsteemide lahendamiseks saada sobivaid arvutusalgoritme. Edasi defineeris S. Ulm sobival viisil ka kõrgemat järku üldistatud diferentssuhted ning andis Banachi ruumides Newtoni interpolatsioonivalemi mitmeid üldistusi, mis on põhivalemiteks iteratsiooniprotsesside konstrueerimisel ja uurimisel. Ta näitas võimalusi diferentssuhete konstrueerimiseks konkreetsete operaatorite ja funktsionaalide jaoks, mis sageli esinevad rakendustes.

Alates 1966. aastast on S. Ulmi tähelepanu köitnud iteratsioonimeetodid funktsionaalide lokaalsete ekstreemumite leidmiseks, eriti optimaalse juhtimise ülesannete lahendamiseks. Diferentseeruva funktsionaali $f(x)$ ekstreemumkohad on teatavasti operaatorvõrrandi $G(x)=0$ lahenditeks, kus $G(x)=\operatorname{grad} f(x)$. Seetõttu saab ekstreemumülesande lahendamisel kasutada näiteks kõõlude ja Steffenseni meetodit. Seejuures tuleb aga arvutada funktsionaali gradiendi (tuletise) väärtusi. Üldistades S c h m i d t i m e e t o d i t ühe muutuja funktsioonide ekstreemumite leidmiseks, konstrueeris S. Ulm 1968. aastal funktsionaalide ekstreemumite leidmiseks selliseid iteratsioonimeetodeid, mille rakendamisel ei tule arvutada funktsionaali gradiendi väärtusi, vaid ainult selle esimest ja teist järku üldistatud diferentssuhete väärtusi. Lähemalt uuris ta nende meetodite rakendamist optimaalse juhtimise ülesannete lahendamisel, kusjuures tõsiseid raskusi tuli ületada sobivate diferentssuhete konstrueerimisel. S. Ulmi aspirant V. Poll vaatles põhjalikumalt seda tüüpi meetodite rakendamist mitme muutuja funktsioonide ekstreemumite leidmisel.

Praktikast kerkinud mittelineaarse planeerimise ja diskreetse optimaalse juhtimise ülesannetes tuleb minimiseerida või maksimiseerida paljude argumentide funktsioone. Argumentide suure arvu korral on selliste ülesannete lahendamine väga raske. R. Bellmanni väljendi järgi tuleb siin võidelda «mitmedimensionaalsuse needusega». Viimasel paaril aastal on S. Ulm peatähelepanu koondanud meetoditele, mis aitavad võidelda selle «mitmedimensionaalsuse needusega» ning ka siin saanud mitmeid olulisi tulemusi.

S. Ulm on aastatel 1969—1970 välja töötanud uusi meetodeid ja skeeme nn. h i e r a r h i l i s e k s ehk m i t m e n i v o o l i s e k s o p t i m i s e e r i m i s e k s. Kahenivoolise optimiseerimise korral jaotatakse lähteülesanne reaks väiksemateks osaülesanneteks, mis sõltuvad teatavatest parameetritest. Parameetrid tuleb leida nii, et saame lähteülesande optimaalse lahendi. Parameetrite leidmiseks moodustatakse iteratsiooniprotsess, mille käigus lahendatakse osaülesandeid. S. Ulm näitas, et iteratsiooniprotsessi moodustamisel saab edukalt kasutada kõõlude, Steffenseni jt. sellelaadilisi meetodeid. Kui ka osaülesanded on küllaltki suured, siis võib neid omakorda jaotada veel väiksemateks ülesanneteks, mis annab juba kolmenivoolise optimiseerimise jne.

1970. aastal on S. Ulm välja töötanud a g r e g e e r i m i s m e e t o d i j u h t i m i s t e s u b o p t i m a a l s e k s s ü n t e e s i k s. Agregeerimismeetodi korral asendatakse suuremõõtmeline otsitavate vektor väiksemamõõtmelise vektoriga, mis on moodustatud lähtevektori lineaarkombinatsioonidest. Väiksemamõõtmelise optimaalse juhtimise ülesande lahendamise teel leitakse lähteülesande suboptimaalne juhtimine. S. Ulm on andnud algoritme sobivate lineaarkombinatsioonide moodustamiseks.

Need on mõned suletõmbed S. Ulmi uurimistööst, mis jätkub suure intensiivsusega eriti optimaalse juhtimise ja mittelineaarse planeerimise lahendusmeetodite väljatöötamise alal.

E. Tamme

RAHVUSVAHELINE MATEMAATIKUTE KONGRESS *ICM NIZZA 1970*

Ü. Lumiste

Järjekordne Rahvusvaheline Matemaatikute Kongress (International Congress of Mathematicians), seekord juba kuueteistkümnes[1], peeti 1.—10. septembrini 1970 prantsuse kuurordija ülikoolilinnas Nizzas. Kongressist võtsid osa ligikaudu 3000 matemaatikut maailma paljudest maadest. NSV Liidu delegatsiooni koosseisus oli 107 matemaatikut, eesotsas akadeemikud M. A. Lavrentjev, L. S. Pontrjagin, S. L. Sobolev jt. Eesti NSV matemaatikuid seekord kongressil ei olnud.

Kongress avati Nizza Näitusepalees (Palais d'Exposition) 1. septembril. Kongressi presidendi Jean Leray avasõnale järgnes organiseeriva komitee presidendi Jean Dieudonné sõnavõtt. Prantsuse valitsuse esindaja Olivier Guichard'i ja Nizza linnapea tervitustele järgnes Fieldsi preemia värskete laureaatide autasustamine. Senisele 14 laureaadile[2] lisandusid: S. P. Novikov[3] (NSVL), J. Thompson (USA), A. Baker (Inglismaa) ja H. Hironaka (USA).

Kongressi töö oli korraldatud järgmiselt. Hommikupooliti olid Näitusepalees plenaaristungid, millel esitati tavaliselt kaks ühetunnilist ettekannet. Pärastlõunatel oli töö sektsioonides, kus peeti 15-minutilisi ettekandeid avaldatud programmi ja teeside kohaselt, ning seminarides, kus väljakuulutatud ainevaldkonnas oli igaühel sõnavõtuõigus.

---

[1] Eelmiste kohta vt. Matemaatika ja kaasaeg, XII, 3—15.

[2] Vt. Eesti Nõukogude Entsüklopeedia, 2. kd., 1970, lk. 313.

[3] Vt. Matemaatika ja kaasaeg, XIV, 106—107.

Kongressi programmis olid järgmised plenaarettekanded (loetelu on antud esitamise järjekorras):

S. S. Chern. Diferentsiaalgeomeetria: tema möödunu ja tulevik.
T. Kato. Kiirguse teooria ja pideva spektri häiritus.
E. M. Stein. Harmoonilise analüüsi mõningad probleemid seoses sümmeetriliste ruumidega ja poollihtsate rühmadega.
R. Bott. Integreeruvuse topoloogilised obstruktsioonid.
H. J. Keisler. Mudelite teooria.
C. T. C. Wall. Geomeetriline topoloogia: muutkonnad ja struktuurid.
L. S. Pontrjagin. Diferentsiaalmängud.
P. A. Griffiths. Transtsendentsed meetodid algebralises geomeetrias.
G. I. Martšuk. Arvutusmatemaatika meetodid ja probleemid.
W. Feit. Praegune olukord lõplike lihtsate rühmade teoorias.
A. Baker. Efektiivsed meetodid arvuteoorias.
I. M. Gelfand. Lõpmatute Lie algebrate kohomoloogiad: uued vaatekohad integraalgeomeetrias.
R. W. Floyd. Algoritmide korrektsuse kontrollimine.
O. B. Lupanov. Kontrollisüsteemide keerukuse asümptootilised hinnangud.
R. G. Swan. Algebraline K-teooria.
W. Browder. Muutkonnad ja homotoopiateooria.
L. Hörmander. Lineaarsed diferentsiaaloperaatorid.
J. Tate. Sümbolid aritmeetikas.

Sektsioone töötas kongressil kuus, kuid nad olid väga ebavõrdsed oma ulatuselt. Seda näitab kasvõi alasektsiooni de hulkade võrdlemine. Kuigi sektsioonidele A, B, C, D, E ja F ei olnud programmis antud nimetusi ja viimased olid vaid alasektsioonidel (näit. C3. Diferentsiaalgeomeetria), siiski võib antud kuuele tähele anda tingliku sisu järgmiselt:

A. Matemaatiline loogika.

B. Algebra ja arvuteooria (6 alasektsiooni).

C. Topoloogia ja diferentsiaalgeomeetria (5 alasektsiooni).

D. Analüüs ja funktsiooniteooria (12 alasektsiooni).

E. Rakendused füüsikas, mehaanikas, statistikas jm., arvutusmatemaatika (8 alasektsiooni).

F. Matemaatika ajalugu ja õpetamine (2 alasektsiooni).

Kongressi lõpuistungil Näitusepalees tehti teatavaks Rahvusvahelise Matemaatika Assotsiatsiooni juhatuse valimise tulemused. Assotsiatsiooni uueks presidendiks on Šveitsis töötav india päritoluga matemaatik K. Chandrasekharan, asepresidentideks L. S. Pontrjagin (NSVL) ja H. Cartan (Prantsusmaa). Rahvusvahelise Matemaatika Õpetamise Komisjoni presidendiks valiti H. Freudental (Hollandi).

Kongressi tööst vabal ajal korraldati delegaatidele ekskursioon Nizza lähedal asuvasse IBM-i moodsasse arvutuskeskusesse ning Vahemere rannikul Cannes'isse ja Monte-Carlosse. Tuntuimad kongressist osavõtjad viidi ühel konverentsipäevadest erilennukeil valitsuse pidulikule vastuvõtule Pariisi. Nõukogude Liitu esindasid sellel M. A. Lavrentjev ja L. S. Pontrjagin.

Järgmine rahvusvaheline matemaatikute kongress otsustati kokku kutsuda 1974. aastal Kanadas.

KUJUNDITE ERISTAMISE SEMINAR SANGASTES

E. Tiit

26.—29. novembrini 1970 toimus Sangaste lossi ruumes asutustevaheline teaduslik seminar «Kujundite eristamine». Selle organiseerijateks olid TRÜ matemaatikud (matemaatilise statistika ja programmeerimise kateeder ning arvutuskeskus) ja sotsioloogid.

Kujundite eristamisena[1] tuntakse arvukaid matemaatilis-küberneetilisi meetodeid, mida kasutatakse niihästi trüki- kui ka käsikirjalise teksti lugemiseks mingi masina poolt, hääle (kõne) eristamiseks, meditsiiniliste, tehnoloogiliste või ka geofüüsikaliste kõverate «lugemiseks», aga samuti ka meditsiiniliseks diagnostikaks arvuti abil. Samasse valdkonda kuuluvad sisuliselt ka arvukad rühmitamise, klassifitseerimise ja taksonoomia meetodid, mida sageli rakendatakse õige mitmes teadusharus — bioloogias, geoloogias, majandusteaduses, pedagoogikas, sotsioloogias. Tuleb märkida, et kaasajal väga paljude suuremõõtmeliste statistikaülesannete eesmärgiks on leida mingi eeskiri materjali klassifitseerimiseks või rühmitamiseks. Erilist huvi pakub sotsioloogiliste küsitluste tulemusena saadud materjali rühmitamine teatud mõttes ühtsetesse rühmadesse. Selletõttu ongi mitmes meie vabariigi arvutuskeskuses ning uurimisasutuses välja töötatud rühmitamismeetodeid, mille realiseerimine on töö mahukuse tõttu mõeldav vaid elektronarvutitel.

Kuigi seminar oli mõeldud eeskätt vabariigi matemaatikutele ning mõningate teiste erialade (eriti sotsioloogide) esindajatele, kes puutuvad kokku rühmitamise probleemiga, oli osa võtma kutsutud ka rida nimekaid spetsialiste teistest liiduvabariikidest. Saabunud külaliste seas oli küberneetik-akadeemik A. G. Ivahnenko Kiievist, tehnikadoktorid J. J. Neimark Gorkist ja A. G. Frantsuz Leningradist, mõlemad arvukate meditsiinilise diagnostika alaste matemaatiliste tööde autorid. Ülevaateettekande tegi I. B. Mutšnik Moskva Juhtimisprobleemide Instituudist, ühest sellealaste tööde ülemaailmselt tunnustatud keskusest. Osavõt-

[1] Vt. A. Riesen. Räägime kujundite eristamisest. — Matemaatika ja kaasaeg, XIII, lk. 35—47.

jaid oli saabunud veel Moskvast (ka Moskva ülikooli statistika laboratooriumist), Novosibirskist ja mujaltki.

Suuremat tähelepanu pälvisid veel TPI arvutusmatemaatika kateedri juhataja L. Võhandu, Kiievi küberneetikute I. V. Vassiljevi ja V. K. Malušenko ning Tartu sotsioloogide A. Murutari ning Ü. Vooglaiu ettekanded. Viimased valgustasid sotsioloogilise materjali töötlemisel TRÜ arvutuskeskuses saadud tulemusi ja nende tõlgendamist. TRÜ matemaatikutest esinesid aspirant M. Lanin ja dots. E. Tiit.

«LIHTSAID JA KEERULISI»

J. Gabovitš

Nii nimetab oma uut raamatut (Kirjastus «Valgus», Tallinn, 1970) **Ülo Kaasik.** Autor pakub lahendamiseks 200 nn. keerdülesannet. Mis need on, see selgub juba raamatu eessõnast, kus autor ütleb: «Kooli ülesannetest erinevad keerdülesanded eeskätt selle poolest, et nad pole määratud mitte niivõrd teadmiste ja oskuste omandamiseks, kui just huvitavaks (ja ka kasulikuks) ajaviiteks. Keerdülesannete lahendamisel pole reeglina tarvis mingeid erilisi teadmisi, küll aga visadust ja võimet loogiliselt arutleda.»

Raamatu peamiseks vooruseks tuleb lugeda seda, et ta on jõukohane ja huvipakkuv igale lugejale, sõltumata erialast, east ning teaduslikust kvalifikatsioonist.

Ülesanded on jaotatud kümnesse rubriiki. Et rubriikide nimetused on tabavalt valitud, siis annab järgnev sisukord lugejale hea ettekujutuse, mis laadi ülesannetega on tegemist.

1. Arutlegem loogiliselt!
2. Tõesuud, auspoolikud, luiskamid ja jumalad.
3. Kes on kes?
4. Nimekaimud.
5. Täiesti salajane!
6. Tähed numbriteks.
7. Auklik aritmeetika.
8. Mängud ja turniirid.
9. Kui tõenäone on, et...?
10. Loogiline matemaatika.

Ülesannetele eelneb 15-leheküljeline sissejuhatus, kus on toodud need minimaalsed matemaatilised teadmised, mida on vaja ülesannete lahendamisel; peale selle on antud kasulikke näpunäiteid eritüüpi keerdülesannete lahendamiseks.

Suure osa raamatu mahust (peaaegu $^2/_3$) võtavad enda alla ülesannete lahendused. Kui ainult osa ülesandeid on originaalsed ning näevad esmakordselt trükimusta, siis on lahendused autori enda poolt oskuslikult ja läbimõeldult koostatud. Nagu autor eessõnas õigusega märgib, moodustab sissejuhatus koos lahendustega keerdülesannetealase õpiku.

«Matemaatika ja kaasaja» lugeja leiab raamatust ka üht-teist tuttavat: üsna mitmed ülesanded on varem siin avaldatud. Raamatus jätkub ka (kuigi seal seda otseselt pole märgitud) üks «Matemaatika ja kaasaja» veergudel alanud «vägikaikavedamine». Nimelt juhtis H. Espenberg kord (vt. Matemaatika ja kaasaeg, XIII, lk. 128) tähelepanu sellele, et ühel Ü. Kaasiku poolt regulaarseks (üheselt lahenduvaks) kuulutatud liitmisülesandel (vt. Matemaatika ja kaasaeg, XI, lk. 113) on siiski kaks lahendit, ning tõi samas omakorda 3 näidet regulaarsete lahutamisülesannete kohta. Nüüd näitab Ü. Kaasik ülesande 108 lahenduses, et kahel neist on koguni kolm lahendit!

Kuidas töötada raamatuga «Lihtsaid ja keerulisi»? Eessõnas ega sissejuhatuses ei juhi autor kahjuks lugeja tähelepanu kõige tähtsamale asjaolule: ärge vaadake vastust enne ülesande täielikku lahendamist! Lahendused on mõeldud mitte tavaliseks lugemiseks, vaid lugeja poolt leitud lahenduste ja vastuste kontrollimiseks. Lugeja saab täismõnu raamatuga töötamisest vaid siis, kui tal jätkub visadust ülesannete iseseisvaks lahendamiseks.

Lenini preemia laureaate

LENINI PREEMIA TÖÖDE EEST TÕENÄOSUSTEOORIA PIIRTEOREEMIDE ALALT

E. Tiit

Tõenäosusteooria piirteoreemid on olnud traditsiooniliseks uurimissuunaks Peterburi matemaatikutele juba möödunud sajandi keskpaigast alates.[1]

P. L. Tšebõšovi tõestatud ja tema nime kandev võrratus andis põhimeetodi *suurte arvude seaduste* tõestamiseks — nii nimetatakse piirteoreeme, mis väidavad teatavate juhuslike suuruste jadade koondumist konstandiks. Nii näiteks koonduvad suhtelised sagedused tõenäosuseks; sellel tõsiasjal baseerub praktilises statistikas kasutatav nn. *statistiline tõenäosus*, milleks loetakse eksperimentaalselt leitud *suhtelist sagedust*. Tšebõšovi ja tema õpilaste A. A. Markovi ja A. M. Ljapunovi töödes anti metoodika ka nn. *klassikaliste tsentraalsete piirteoreemide* tõestamiseks — need on teoreemid, mis väidavad teatud tingimusi rahuldavate sõltumatute juhuslike liidetavate summa koonduvust *normaaljaotuseks*. Niisugused teoreemid selgitavad normaaljaotuse erilist osa looduses (teatavasti on näiteks igasugused mõõtmisvead, samuti väga paljud bioloogilised suurused normaaljaotusega).

Kuigi ülalkirjeldatud «klassikalistele» probleemidele piirteoreemide valdkonnas leiti lahendus juba ammu, on piirteoreemid praegugi jäänud aktuaalseks uurimisobjektiks tõenäosusteoorias ja tema rakendusalades. Väljendub ju nimelt piirteoreemides tõenäosusteooriale iseloomulik juhuslike nähtuste massilisel kordumisel ilmnev seaduspärasus.

Ükskõik missuguses konkreetses tõenäosusteooria valdkonnas uurija ka ei tegeleks, ikka kerkib tema ette probleem: analüüsida uuritavat nähtust mingis mõttes piiril — olgu selleks siis juhusliku protsessi kulgemine küllalt pika aja möödumisel, summa pärast suure arvu juhuslike liidetavate liitmist, osakese paiknemine pärast väga paljude «sammude astumist» jne.

Kõike seda arvestades ongi mõistetav, et Lenini preemia, mis 1970. aastal omistati nõukogude tõenäosusteoreetikutele, anti nimelt tööde tsükli eest piirteoreemide valdkonnas.

Silmapaistvaimaks teadlaseks värskete laureaatide seas on akadeemik **Juri Vladimirovitš Linnik**, NSVL TA V. A. Steklovi nimelise Matemaatikainstituudi Leningradi osakonna laboratooriumijuhataja. Akadeemik Linniku erakordsest võimekusest annab tunnistust ka tema biograafia aastaarvudes.[2]

- Sündis (Ukrainas Belaja Tserkovi külas) 8. jaanuaril 1915;
- Leningradi ülikooli lõpetas 1938;
- väitekirja kaitses (omistati doktorikraad) 1940;
- professorikutse sai 1943;
- riikliku preemia sai (töid arvuteooria alalt) 1947;
- NSVL TA korrespondentliikmeks valiti 1953;
- rahvusvaheliste statistikainstituutide tegevliikmeks valiti:
  - International Statistical Institute 1961,
  - Institute of Mathematical Statistics 1962;
- NSVL TA akadeemikuks valiti 1964.

Linniku trükis avaldatud tööde nimekiri sisaldab üle 200 nimetuse. Kaalukaimad neist on monograafiad aktuaalsete ning uudsete probleemide kohta, tõlgitud ka paljudesse võõrkeeltesse. Mainigem, et üksnes ajavahemikus 1957—1967 on trükist ilmunud 7 (!) originaalset monograafiat, igaüks 200—350 leheküljeline (neist vaid üks kahe autori ühistöö), lisaks veel ühe monograafia ümbertöötatud kordustrükk.

Akadeemik Linniku huvialaring on lai. Oma uurimusi alustas ta arvu-

[1] Vt. Matemaatika ja kaasaeg, IX, lk. 74—90 ja X, lk. 70—88.

[2] Vt. Matemaatika ja kaasaeg, VI, lk. 88—89.

teooria valdkonnas, püüdes siin anda originaalsete meetodite abil lahendusi oma raskuse ja lahendamatuse poolest kuulsaks saanud probleemidele.

Kümmekond aastat pärast ülikooli lõpetamist, juba tunnustatud teadlasena arvuteooria alal, huvitus Linnik tõenäosusteooriast ning saavutas oma esimesed tulemused nimelt piirteoreemide valdkonnas. Järgnes viljakas tegevus kahe teadusharu piirialal: tõenäosusteooria meetodite rakendamine (nn. dispersioonide meetod) võimaldab saada huvitavaid tulemusi arvuteoorias. Edasist loominguperioodi iseloomustab aga huviringi kaldumine tõenäosusteooria ja matemaatilise statistika suunas. Juri Linniku initsiatiivil luuakse statistika laboratoorium Steklovi-nimelise Matemaatika Instituudi Leningradi osakonnas, mis saab üheks statistikaalase uurimistöö keskuseks Nõukogude Liidus.

Ka tõenäosusteooria ja matemaatilise statistika valdkonnas iseloomustab Linniku töid vastuste otsimine keerulistele, põhilise tähtsusega probleemidele ja novaatorliku, sageli vägagi võimsa metoodika väljatöötamine. Sealjuures on tema tööde temaatika avar, ulatudes sügavalt teoreetilistest uurimustest tõenäosusteooria, juhuslike protsesside teooria ja matemaatilise statistika põhiküsimuste alalt kuni nende praktiliste rakendusteni majandusküsimustes.

Klassikaliste piirteoreemide valdkonda kuulub Juri Linniku uurimus normaaljaotuseks koondumise kiiruse kohta, kus ta annab efektiivse täpsustuse Ljapunovi valemile. Linnikule kuulub ka uus originaalne tõestus klassikalisele piirteoreemile nn. informatsioonilise funktsiooni abil. Praktilist huvi pakub uurimus suurte hälvete tõenäosusest piirprotsesside puhul, mis võimaldab saada varem tuntud Hintšini, Crameri ja Felleri hinnangutest oluliselt täpsemaid ja üldkehtivamaid tulemusi.

Kaudselt siia valdkonda kuuluvaiks võiks lugeda ka Hintšini tööd *piirjaotuste* (nn. lõpmatult jagunevate jaotuste) alal. Siin uurib ta lõpmatult jagunevate jaotuste (sealhulgas normaaljaotuse) komponentideks lahutamisega seotud küsimusi, tõestades muuhulgas, et küllaltki üldistel eeldustel funktsiooni g kohta järeldub seosest $Y = g(X)$, kus Y on normaaljaotusega juhuslik suurus, et ka X peab olema normaaljaotusega juhuslik suurus.

Ülaltoodud probleemidega on seotud ka statistikast tulenev ülesanne — iseloomustada (taastada) jaotust mõningate väljavõttefunktsioonide — nn. statistikute — põhjal, uurides selleks erinevate statistikute jaotusi ja võrreldes neid omavahel.

Teistest statistikasuundadest, mida Linnik on viljelnud, tuleks mainida eeskätt *hüpoteeside kontrolli teooriat*. Nii kuulub Linnikule rida tulemusi Behrens-Fisheri probleemi lahendamisel (hüpoteesi $H_0 : m_1 = m_2$ kontrollimine juhul, kus m_1 ja m_2 on normaaljaotuste keskväärtused, kusjuures väljavõtete mahud n_1 ja n_2, samuti dispersioonid σ_1^2 ja σ_2^2 on erinevad).

Toodud ülesande lahendamisel kasutas Linnik metoodikat, mis on rakendatav laiale statistikaülesannete klassile — nn. *«häirivate parameetritega»* ülesannetele.

Viimasel ajal on J. Linniku tööde hulgas olulisel kohal ka *katseplaneerimisega* seotud uurimused, samuti on ta andnud lahendusi mitmele rakenduslikule ülesandele.

Ülejäänud kolm laureaati —
Ildar Abdulovitš Ibragimov (sünd. 15. juulil 1932 Leningradis)
Juri Vassiljevitš Prohhorov (sünd. 15. dets. 1929 Moskvas) ja
Juri Anatoljevitš Rozanov (sünd. 7. dets. 1934 Moskvas)
kuuluvad nõukogude matemaatikute nooremasse põlvkonda. Kõigi nende teadlaste biograafias on palju ühist: Ibragimov on Leningradi ülikooli (lõpetas 1956), Prohhorov ja Rozanov — Moskva ülikooli kasvandikud (lõpetasid vastavalt 1949 ja 1957). Kõik nad saavutasid lühikese aja jooksul pärast ülikooli lõpetamist füüsika-matemaatikadoktori kraadi ja professorikutse (Prohhorov on ka NSVL TA kirjavahetajaliige), Ibragimovi töökohaks on Leningradi ülikool, Rozanov ja Prohhov aga töötavad praegu NSVL TA V. A. Steklovi nimelises Matemaatikainstituudis (Prohhorov osakonnajuhatajana).

Kõik laureaadid on umbes 50 teadusliku töö autorid ning on kirjutanud (nii üksikult kui ka omavahelises koostöös) rea monograafiaid, eriti aktuaalsete küsimuste kohta nende uurimissuundades. Neist mõned on ka mitmesse võõrkeelde tõlgitud.

Ibragimovi teadusliku tegevuse iseloomustamiseks tuleb märkida tema huvi *statsionaarsete juhuslike protsesside* vastu (need on niisugused protsessid, mille üldiseloom jääb aja kulgedes teatud mõttes muutumatuks: igal ajamomendil kujutab statsionaarne protsess sama jaotusega juhuslikku suurust; seega püsivad näiteks protsessi keskväärtus ja dispersioon konstantsena).

Statsionaarsete protsesside jaoks on Ibragimov tõestanud rea **piirteoreeme,** viimasel ajal aga uurinud ka statsionaarsete protsesside *prognoositavusega* seotud mõisteid (nn. regulaarsust ja täielikku regulaarsust). Samuti kuulub Ibragimovile rida töid normaaljaotuse kohta (niihästi piirteoreemide koondumiskiiruse kohta kui ka Gaussi juhuslike protsesside tõenäosusteoreetilistest omadustest). Viimased tulemused on kokku võetud Ibragimovi ja Rozanovi ühistöö tulemusena ilmunud monograafias.

Prohhorovi teaduslikus tegevuses on samuti oluline koht piirteoreemidega seotud küsimustel — ta on uurinud nn. tugevaid suurte arvude seadusi, samuti ka piirjaotuste omadusi. Viimase aja loomingut iseloomustab huvi *teenindusteooria* vastu, samuti mitmete praktilist laadi statistiliste ülesannete (geoloogias, keemias) lahendamine.

Ka Rozanovi tööd haaravad eeskätt piirteoreeme juhuslike protsesside kohta. Huvitavad on ka tulemused *sõltuvate juhuslike suuruste summeerimise* kohta, samuti normaaljaotuste kohta *lõpmatumõõtmelises* ruumis. Viimasel ajal on ka Rozanovi tööde hulgas oluline koht mitmesugustel statistikaalastel uurimustel niihästi juhuslike protsesside statistika kui ka statistiliste hinnangute teooria valdkonnast.

Kroonika

LÕPPES XIX VABARIIKLIK TÄPPISTEADUSTE OLÜMPIAAD

Olümpiaadi lõppvoorule Tartus 4.—8. märtsini 1972. aastal kogunes 217 õpilast vabariigi 71 koolist. Kolme päeva jooksul lahendasid nad keemia, matemaatika ja füüsika ülesandeid. Tulemused tehti teatavaks 8. märtsil ülikooli aulas toimunud pidulikul aktusel, kus võitjatele anti üle ka hinnalised auhinnad, mis olid välja pandud ENSV Haridusministeeriumi, Tartu Riikliku Ülikooli, Tõravere Observatooriumi, TRÜ Arvutuskeskuse ja TRÜ keemialaboratooriumide poolt.

Matemaatika ülesannete lahendamisest võtsid osa 176 õpilast, neist 67 eriklassidest. Tulemused näitasid, et harilike klasside õpilased suutsid küllaltki edukalt võistelda eriklasside õpilastega. Individuaalselt osutusid tugevamateks:

8. kl. (33 osavõtjat):
1. **Tiit Pikkat** (Tallinna 7. Keskkool),
2. **Rein Lall** (Tartu 2. Keskkool);

9. kl. (54 osavõtjat):
1. **Kalle Kulbok** (Nõo Keskkool),
2. **Anto Unt** (Tartu 2. Keskkool);
3. **Juri Knjazihhin** (Tallinna 15. Keskkool);

10. kl. (33 osavõtjat):
1. **Krista Poolakene** (Nõo Keskkool),
2. **Ago Samoson** (Võru 1. Keskkool),
3. **Eve Sillastu** (Nõo Keskkool);

11. kl. (56 osavõtjat):
1. **Gennadi Olenjev** (Tartu 4. Keskkooli 10. kl.),
2. **Andrei Talapov** (Tallinna 15. Keskkooli 10. kl.);
3. **Oleg Korsunski** (Tallinna 15. Keskkooli 10. kl.),
4. **Jüri Metsalu** (Tallinna 42. Keskkooli 11. kl.),
5. **Priit Kaljapulk** (Viljandi 1. Keskkooli 11. kl.),
6. **Urmas Haud** (Viljandi 1. Keskkooli 11. kl.).

Olümpiaadi kõigil kolmel alal võistelnud õpilastest olid parimad 9. klassis Tartu 2. Keskkooli õpilane **Anto Unt,** 10. klassis Nõo Keskkooli õpilane **Krista Poolakene,** lõpuklassis Tartu 4. Keskkooli õpilane **Gennadi Olenjev,** 8. klassis kahe ala — matemaatika ja füüsika — parim oli Tallinna 7. Keskkooli õpilane **Tiit Pikkat.** Matemaatikas ja füüsikas sai parima kooli nimetuse ja omandas TRÜ ränddiplomi **Nõo Keskkool** (eelmisel aastal Tartu 2. Keskkool) ning keemias **Tartu 2. Keskkool** (eelmisel aastal Nõo Keskkool).

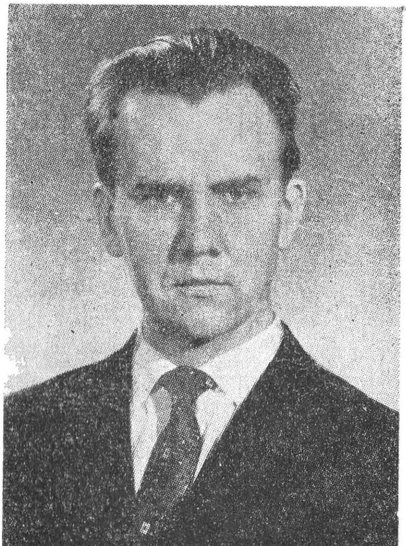
Kuigi olümpiaadi lõppvoorust osavõtjaile olid võistluspäevad pingelised, leiti aega ka enesetäiendamiseks ja kultuurilisteks meelelahutusteks. Toimusid ekskursioonid TRÜ füüsika- ja keemialaboratooriumidesse ning kohtumised TRÜ õppejõududega; 8. kl. õpilastele korraldati ekskursioon Nõo Keskkooli, külastati teatrit «Vanemuine».

A. Vassil

UUSI TEADUSE KANDIDAATE

10. aprillil 1970. a. kaitses oma väitekirja «Elastsete-plastsete plaatide ja koorikute pärastkriitilise staadiumi analüüs» TRÜ teoreetilise mehaanika kateedri vanemõpetaja **Elmar Sakkov.** Tööd juhendas prof. Ü. Lepik, oponeerisid prof. G. Teters (Riia), füüsika-matemaatikadoktor U. Nigul (Tallinn) ja dots. V. Zubtšaninov (Kalinin).

TRÜ Matemaatikateaduskonna nõukogu omistas E. Sakkovile füüsika-matemaatikakandidaadi **teadusliku** kraadi.



E. Sakkov tuletas oma töös uuritavate ülesannete jaoks Kármáni tüüpi diferentsiaalvõrrandid, mis on täpsemad võrreldes Lee-Ades'i hüpoteesist lähtudes saadud võrranditega, samuti meetodid nende võrrandite lahendamiseks. Töö sisaldab rea näiteid nimetatud meetodite rakendamise kohta elastsete-plastsete plaatide ja koorikute pärastkriitilise staadiumi uurimisel.

Elmar Sakkov on sündinud Mõisakülas 9. juunil 1941. a. Ta lõpetas 1959. a. Mõisaküla Keskkooli, kus tema matemaatikaõpetajaks oli Georg Rosenberg. Tartu Riikliku Ülikooli matemaatikaosakonna lõpetas E. Sakkov 1964. a. Pärast seda asus ta tööle TRÜ teoreetilise mehaanika kateedrisse, esialgu aspirandina (1965—1968), seejärel töötas assistendina ja vanemõpetajana.

24. aprillil 1969. a. kaitses oma väitekirja «Newtoni meetodi interpolatsioonanaloogid ekstreemumülesannete lahendamiseks» ENSV TA Küberneetika Instituudi noorem teaduslik töötaja **Valdur Poll.** Tööd juhendas sama instituudi vanem teaduslik töötaja S. Ulm, oponeerisid prof. G. Kangro ja dots. M. Levin.

ENSV TA füüsika-matemaatika- ja tehnikateaduste osakonna nõukogu omistas V. Pollile füüsika-matemaatikakandidaadi kraadi.

Väitekirjas vaadeldakse üldistatud diferentssuhete baasil konstrueeritud, tuletisi mittekasutavaid kõrgema astme koondumiskiirusega iteratsioonimeetodeid mitme muutuja funktsiooni statsionaarsete punktide (lokaalsete ekstreemumkohtade) leidmiseks lõplikudimensionaalses vektorruumis. Need meetodid laiendatakse ka funktsionaalide ekstreemumkohtade leidmiseks kinnises kumeras hulgas, s. t. tõketega ekstreemumülesannete lahendamiseks. Väitekirjas võrreldakse antud meetodeid neile lähedaste meetoditega eksperimentide ulatusliku seeria alusel.

Valdur Poll on sündinud Tallinnas 16. juunil 1936. a. Ta lõpetas 1954. a. Tallinna 20. Keskkooli, kus tema matemaatikaõpetajaks oli M. Usai. Seejärel lõpetas V. Poll 1960. a. Moskva Riikliku Ülikooli matemaatikaosakonna. Ta on töötanud ülikooli lõpetamisest saadik ENSV TA Küberneetika Instituudis. Samas õppis ta aspirantuuris aastatel 1964—1967. Praegu töötab V. Poll vanema teadusliku töötajana matemaatiliste meetodite sektoris.

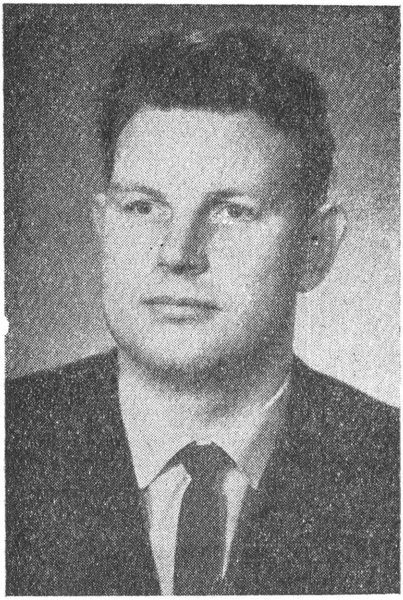
28. mail 1970. a. kaitses oma väitekirja «Mõnedest pöörd- ja pseudopöördoperaatorite järkjärgulisel aproksimeerimisel põhinevatest iteratsioonimeetodeist» ENSV TA Küberneetika Instituudi noorem teaduslik töötaja **Otu Vaarmann.** Tööd juhendas sama instituudi vanem teaduslik töötaja S. Ulm, oponeerisid prof. G. Vainikko ja dots. R. Jürgenson.

ENSV TA füüsika-matemaatika- ja tehnikateaduste osakonna nõukogu omistas O. Vaarmannile füüsika-matemaatikakandidaadi kraadi.

Väitekirjas on välja töötatud ja teoreetiliselt uuritud rida uusi iteratsioonimeetodeid. Pöördoperaatorite aproksimeerimine baseerub tõkestatud lineaarsete operaatorite iteratiivsel pööramisel ja toimub kahe ideeliselt erineva lähenemisviisi alusel. Olenevalt lähenemisviisist on saadud kas lineaarse või kõrgema astme koondumiskiirusega iteratsioonimeetodeid.

Osa meetodeid on üldistatud juhule, kui tuletisoperaatoril ei ole pöördoperaatorit, vaid eksisteerib ainult pseudopöördoperaator ja vaadeldava võrrandi lahendit otsitakse vähimruutude mõttes.

Kirjeldatud iteratsioonimeetodid on rakendatavad operaatorvõrrandite lahendamiseks funktsionaalruumides. Väitekirjas on üksikasjalikumalt vaadeldud nende rakendusi mittelineaarsete võrrandisüsteemide ja integraalvõrrandite lahendamiseks.



Väitekirjas on tuletatud ühe- ja kahekordsete integraalide arvutamiseks rida kvadratuur- ja kubatuurvalemeid, mis teatavates funktsioonide klassides on parimad (jääkliikme hinnang on vähim võrreldes teiste sama tüüpi valemitega). On antud eeskirjad nende valemite täpsuse hindamiseks.

Otu Vaarmann sündis Tallinnas 28. novembril 1937, lõpetas 1956. aastal Tallinna 2. Keskkooli ja astus samal aastal Tartu Riiklikku Ülikooli, mille lõpetas 1961. aastal arvutusmatemaatika erialal. Pärast ülikooli lõpetamist suunati ta tööle ENSV TA Küberneetika Instituuti. Ajavahemikul 15. okt. 1964 — 15. okt. 1965 viibis stažöörina Kiievis Ukraina TA Küberneetika Instituudis, kus täiendas end iseõppivate süsteemide alal. Aastatel 1965—1968 õppis ta aspirantuuris ENSV TA Küberneetika Instituudi juures, kus töötab ka praegu noorema teadusliku töötajana matemaatiliste meetodite sektoris.

Samal koosolekul (28. mail 1970) kaitses oma väitekirja «Mõned numbrilise integreerimise ekstreemumülesanded» Tallinna Polütehnilise Instituudi matemaatika kateedri assistent **Eugen Schatz**. Tööd juhendas sama kateedri dotsent M. Levin, oponeerisid prof. G. Kangro ja dots. M. Aksen. ENSV TA füüsika-matemaatika- ja tehnikateaduste osakonna nõukogu omistas ka E. Schatzile füüsika-matemaatikakandidaadi kraadi.

Eugen Schatz on sündinud Tallinnas 22. veebruaril 1938. Ta lõpetas 1955. aastal Tallinna 11. Keskkooli, kus tema matemaatikaõpetajaks oli J. Bahmat, ja 1961. aastal Tallinna Polütehnilise Instituudi. Seejärel töötas ta Pärnu merekalasadama peainsenerina (1961—1963) ja õppis aspirantuuris TPI matemaatika kateedri juures (1963—1966). Alates 1966. aastast töötab E. Schatz sama kateedri assistendina.

26. novembril 1970 kaitses Tallinna Polütehnilise Instituudi üldtehnilise kateedri vanemõpetaja **Juri Jartsev** ENSV TA füüsika-matemaatika- ja tehnikateaduste osakonna nõukogu ees väitekirja «Mõningate interpolatsioonitüüpi meetodite koonduvusest ja

stabiilsusest». Tööd juhendas dots. A. Särev, oponeerisid prof. G. Vainikko ja dots. S. Geisberg (Leningrad). J. Jartsevile anti füüsika-matemaatikakandidaadi kraad.

Väitekirjas tõestatakse rida teoreeme interpolatsioonitüüpi meetodite (Fejéri kollokatsioon, joonkollokatsioon, tavaline kollokatsioon jt.) koonduvusest, stabiilsusest ning kollokatsioonisüsteemide lahenduvusest mitmesuguste funktsionaalvõrrandite puhul. Seoses interpolatsioonitüüpi meetodite üha suurema kasutuselevõtmisega ja nende realiseerimisega elektronarvutitel on väitekirjas käsitletud probleemid, eriti aga stabiilsuseküsimused, huvipakkuvad ja aktuaalsed.

Juri Jartsev sündis 5. mail 1931 Leningradi oblastis Oredeži linnas. Lõpetanud 1952. aastal Viljandi 3. Keskkooli, kus tema matemaatikaõpetajaks oli A. Tanis, asus Jartsev õppima Tartu Riiklikku Ülikooli. Pärast ülikooli lõpetamist 1957. aastal töötas ta matemaatikaõpetajana Kohtla-Järve Mäekeemia Tehnikumis. Alates 1961. aastast töötab J. Jartsev Tallinna Polütehnilise Instituudi Kohtla-Järve osakonnas.

UUS LEND MATEMAATIKUID TARTU RIIKLIKUST ÜLIKOOLIST

1970. a. juunis lõpetas TRÜ Matemaatikateaduskonna järjekordne lend matemaatikuid. Matemaatika erialal kaitsti järgmised diplomitööd:

1. A i t, Olev. Kõrgema kooli juhtimiseks vajaliku informatsioonisüsteemi loomise alused. (Juhendajad E. Rootalu ja T. Kala.)

2. A l b e r t, Manja. Факторный анализ в исследований удовлетворенности заводского коллектива. (Juhendaja dots. E. Tiit.)

3. B e r k o v i t š, Šaja. Игры и автоматы. (Juhendaja dots. Ü. Kaasik.)

4. E l i n g s, Margarete. Simpleksite meetod mittelineaarsete planeerimisülesannete lahendamiseks. (Juhendaja dots. Ü. Kaasik.)

5. H e l e m ä e, Ants. Formaliseeritud keelte rakendusvõimalustest õigusnormide uurimisel. (Juhendaja dots. I. Kull.)

6. H i i e s a l u, Urve. Täisarvulise planeerimisülesande lahendamine simplekstabeli täisarvulisuse säilitamisega. (Juhendaja dots. L. Kivistik.)

7. J o h a r i, Kristin. Elastsete-plastsete ühtlaselt kuumutatud sinusoidaalsete kaarte stabiilsusest. (Juhendaja dots. E. Jõgi)

8. K e l d e r, Tõnis. Koonduvus suunatud perede abil. (Juhendaja prof. G. Kangro.)

9. K i p p a s t o, Virve. Tartu elanikkonna demograafiline kirjeldus väljavõtte põhjal. (Juhendaja dots. E. Tiit.)

10. K u l m e t, Reet. Määramata võrrandisüsteemide täisarvuliste ja osaliselt täisarvuliste lahendite leidmine. (Juhendaja dots. L. Kivistik.)

11. K ä h r i k, Ülo. Mõnede tähespektrite numbrilise liitmise ja kalibreerimise algoritmid. (Juhendaja dots. kt. A. Nilson.)

12. K õ b a s, Marge. Zermelo mõttes saavutatud hulkade aksiomaatika. (Juhendaja dots. kt. A. Tauts.)

13. L a s s, Helle. Finkelšteini meetod Boole'i muutujatega osaliselt täisarvulise lineaarse planeerimise ülesande lahendamiseks. (Juhendaja dots. L. Kivistik.)

14. L e p p, Riho. Ühtlase koonduvuse struktuur suunatud peredega. (Juhendaja prof. G. Kangro.)

15. P i k k, Jüri. Pingelainete uurimine elastses koorikus karakteristikute meetodiga telgsümmeetrilise deformatsiooni puhul. (Juhendaja tehn. tead. dr. U. Nigul.)

16. P u u s e m p, Peeter. Mõningate rühmade endomorfismipoolrühmadest. (Juhendaja dots. J. Hion.)

17. R e b a n e, Ingrid. Ühest tõenäosusjaotusest rühmal $SO(3)$. (Juhendaja van.-õp. T. Möls.)

18. R e d i, Kaie. Rühmitamismeetoditest. (Juhendaja dots. E. Tiit.)

19. R ä b o v õ i t r a, Mati. Juhuslike vektorite kategooriad. (Juhendaja van.-õp. R. Tammeste.)

20. S i k k, Jaak. Fourier' kordajate keskmiste omadusi. (Juhendaja van.-õp. M. Tõnnov.)

21. Š l a p i k i e n e, Marju. Analüütilisi poolrühmi genereerivate operaatorite häiritusest. (Juhendaja prof. kt. G. Vainikko.)

22. T a l v o j a, Viivi. Ühest aksiomaatiliselt määratud korrelatsioonikordajate klassist. (Juhendaja van.-õp. T. Möls.)

23. V a l l n e r, Tiiu. Kuuendat järku diferentsiaalvõrrandi rajaülesande lahendamine diferentsmeetodiga. (Juhendaja dots. E. Tamme.)

24. V a l l n e r, Uuno. Summeeruvatest poolrühmadest. (Juhendaja prof. kt. G. Vainikko.)

25. V i l l e m s, Anne. Algoritmilise keele BCL modifikatsioonist suurte diskreetsete informatsioonimassiivide töötlemisel. (Juhendajad dots. R. Jürgenson ja T. Mikli.)

Riigieksamitega lõpetasid matemaatikaosakonna:

1. A s t e l, Helle
2. H ä m a r s o o, Viive
3. K u l d, Sirje
4. L a m m e r t s o n, Ilme
5. M ä n n i k, Vello
6. S a l u m ä e, Jairi
7. U u s t a l u, Eda

Nendele lõpetajatele omistati matemaatiku kvalifikatisoon.

Mehhaanika erialal kaitsti järgmised diplomitööd:

1. H e i n l o o, Mati. Проблемы оптимизации многослойных сферических сосудов. (Juhendaja dots. Nemirovski.)

2. S a k s, Enno-Olevi. Некоторые задачи кручения круглых упругих и упруго-пластических стержней. (Juhendaja dots Nemirovski.)

Matemaatika pedagoogilises osakonnas kaitsti järgmised diplomitööd:

1. A f a n a s j e v, Jüri. Bimetallist kaarte elastilis-plastilisest paindest. (Juhendaja van.-õp. K. Soonets.)

2. H a a v a s a l u, Andres. Jõukohasuse printsiip koolimatemaatikas. (Juhendaja dots. O. Prinits.)

3. J ä r v i s t e, Tiiu. Matemaatika ja füüsika õpetamise seostamisest IX klassis. (Juhendaja van.-õp. K. Ariva.)

4. K a l m e t, Kaarel. Nõtkete plaatide elastilis-plastilisest paindest. (Juhendaja van.-õp. K. Soonets.)

5. K ä h r i k, Tiiu. Kõrgemasse kooli sisseastujate matemaatikaalaste teadmiste nivoost. (Juhendaja van.-õp. J. Reimand.)

6. L o s s m a n n, Ülle. Õpilaste matemaatikaalaste teadmiste sõltuvus õpetaja kvalifikatsioonist. (Juhendaja van.-õp. J. Reimand.)

7. O i d j ä r v, Hans. B-fokaalne ja -poolfokaalne pseudokongruents eukleidilises ruumis R_4. (Juhendaja van.-õp. L. Tuulmets.)

8. O j a p e r v, Mare. Suurima ühisteguri ja vähima ühiskordse käsitlemisest. (Juhendaja asp. E. Mitt.)

9. S e p p, Inna. Teooria ja praktika ühtsuse printsiip koolimatemaatikas. (Juhendaja dots. O. Prinits.)

10. T e l l a s, Helve. Näitlikustamise printsiip koolimatemaatikas. (Juhendaja dots. O. Prinits.)

11. V a g a. Elts. Mõningaid Ribacouri kongruentside üldistusi eukleidilisest ruumist R_3 eukleidilisse ruumi R_4. (Juhendaja van.-õp. L. Tuulmets).

Riigieksamitega lõpetasid matemaatika pedagoogilise osakonna:

1. H i r c h o n, Helvi
2. K i v i, Marje
3. L i p p a r t, Salme
4. M a l v, Silvi
5. O r g, Evi
6. S i i l i v a s k, Kalju
7. S i n e v, Virve
8. V a i k m e t s, Tiiu
9. V a r j a s, Aili

Matemaatika pedagoogilise osakonna lõpetajatele anti matemaatiku, matemaatikaõpetaja kvalifikatsioon.

EESTI NSV-S ILMUNUD MATEMAATIKAALASE KIRJANDUSE NIMESTIK

Oktoober 1969 — september 1970

(Koostanud M. Suurväli)

RAAMATUD

Baron, S., Jürimäe, E., Reimers, E., Sõrmus, T. ja Tõnnov, M. **Matemaatilise analüüsi praktikum. 1.** 2. tr. Trt., 1970. 251 lk. (TRÜ matem. analüüsi kateeder.) — Trükitud rotaprindil.

Bekker, M. B. **Matemaatika olümpiaadi ülesannete lahendamine.** (Met. materjal.) Tln., 1970. 168 lk. (ENSV Haridusministeerium. ENSV Vabariikl. Õpetajate Täiendusinstituut.) — Trükitud rotaprindil.

Espenberg, H. **Diferentsiaalarvutus.** Trt., 1970. 52 lk. (EPA.) — Trükitud rotaprindil.

Hanko, P. **Programmeerimine MALGOL-süsteemis.** Loengukonspekt. Tln., 1969. 94 lk. (TPI arvutusmatem. kateeder.) — Trükitud rotaprindil.

Harjutusi ja ülesandeid keskkooli matemaatikakursuse kordamiseks. Tln., 1969. 64 lk. (TPI matemaatika kateeder.) — T.-l. pöördel koost.: E. Etverk, A. Garšnek, A. Kass, P. Kass, H. Krusberg, M. Teeäär. — Trükitud rotaprindil.

Jürimäe, E. **Kompleksmuutuja funktsioonide teooria. 1—2.** 2. tr. Trt., 1970. (TRÜ matem. analüüsi kateeder.) — Trükitud rotaprindil.

1. Elementaarfunktsioonid. 132 lk.
2. Analüütilised funktsioonid. 138 lk.

Kaasik, Ü. **Lihtsaid ja keerulisi.** [Keerdülesannete kogu.] Tln., «Valgus», 1970. 288 lk.

Kraaving, M., Paluver, N., Rünk, O. ja Vallas, E. **Kujutav geomeetria.** Tln., 1970. (TPI.) — Paralleeltekst vene keeles. — Trükitud rotaprindil.

Harjutusülesanded. 64 lk.

Lisaharjutusülesanded ehituslike erialade jaoks. 20 lk.

Kõrgem matemaatika. Programm, metoodiline juhend ja kontrolltööde ülesanded. 1—2. Tln., 1969. (TPI matemaatika kateeder.) — Trükitud rotaprindil.

1. Kaugõppeteaduskonna I kursuse üliõpilastele. Koost. E. Etverk, A. Lõhmus, M. Seeru, P. Kass, A. Garšnek. 71 lk.
2. II kursuse kaugüliõpilastele. Koost. E. Etverk, H. Roos, T. Jõgi, A. Kass. 40 lk.

Lepik, Ü. **Valitud küsimusi teoreetilisest mehhaanikast. 1.** Masspunkti mehhaanika. 3. tr. Trt., 1969. 37 lk. (TRÜ teoreetilise mehhaanika kateeder.) — Trükitud rotaprindil.

Luigelaht, V. **Matemaatika töövihik.** Tln., 1969. (ENSV Kõrgema ja Keskerihariduse Ministeerium. Tead. Met. Kabinet.) — Trükitud rotaprindil.

Ligikaudsed arvutused. 25 lk.

Sirged ja tasapinnad ruumis. 25 lk.

Matemaatika ja kaasaeg. Abimaterjale matemaatika õpetajatele ja õppijatele. XVI. Trt., 1969. 206 lk. (TRÜ.)

Sisu: G. Vainikko. Mõnda funktsionaalanalüüsist I. — U. Kaljulaid. Geomeetrilisest meetodist diofantilises analüüsis. — M. Pedak. Liigsete kitsendustega lineaarsed planeerimisülesanded. — A. Leiten, M. Viitso. Täisarvulised planeerimisülesanded. — V. Tinn. Majandusmatemaatika-alasest ettevalmistusest Tšehhoslovakkia SV-s. — O. Prinits. Koolimatemaatika ja kaasaeg. — K. Ariva. Lobatševski geomeetria. — M. Levin, R. Troškov. Mõningaid valemeid kolmnurkade kohta. — W. W. Sawyer. Millised on matemaatiku omadused. — Ü. Kaasik. Dekrüpteerimisülesanded. (Kuidas lahendada keerdülesandeid II.) —

M. Vanem, E. Tamme. Kuidas õpiti lahendama võrrandeid. — U. Kaljulaid. Võrrandite lahendamise ajaloost. — P. Müürsepp. 90 aastat akadeemik L. S. Leibensoni sünnist. — Ülo Lumiste — füüsika-matemaatikadoktor. — JO. Prinits. Prof. Gerhard Rägot mälestades. — Prof. G. Rägo trükitud tööde nimestik. — Ü. Kaasik, Ü. Lumiste. Rünno Mullari. — R. Mullari trükis ilmunud tööd. — J. Gaiduk, O. Prinits. Professor I. K. Andronov 75-aastane. — J. I. Gilderman, T. I. Zelenjak. Sergei Lvovitš Sobolev. — Ü. Lumiste. Akadeemik Lev Pontrjagin 60-aastane. — M. Abel. Akadeemik Sergei Natanovitš Bernštein — E. Luht, E. Meidla, O. Prinits. Eesti nimekatest koolimatemaatikutest ehk 4 × 70 + 1 × 60. — Enn Nurmistet mälestades. — P. Kard. Kas «liikumishulk» või «impulss»? — Uusi teaduste kandidaate. — Külalisloengutega Berliinis. — Järjekordne lend matemaatikuid TRÜ Matemaatikateaduskonnast. — Järjekordne lend keskharidusega matemaatikuid. — Bibliograafia. — Ülesandeid.

Materjale keskkooli matemaatikakursuse kordamiseks. 1—2. Tln., 1969. (TPI matemaatika kateeder.) — T.-l. pöördel koost.: E. Etverk, A. Garšnek, A. Kass, P. Kass, H. Krusberg, M. Teeäär. — Trükitud rotaprindil.

1. Aritmeetika ja algebra 112 lk.
2. Geomeetria ja trigonomeetria. 128 lk.

Mitt, E. **Hulgateooria ja matemaatilise loogika elemendid.** (Met. materjale fakultatiivtundideks.) Tln., 1970. 79 lk. (ENSV Haridusministeerium. ENSV Vabariikl. Õpetajate Täiendusinstituut.) — Trükitud rotaprindil.

Programme kõigile. 2. ALGOL-mai keele ja translaatori kasutamisjuhend. Koost. K. Ääremaa, Ü. Kaasik. Trt., 1969. 56 lk. (TRÜ Arvutuskeskus.) — Trükitud rotaprindil.

Sõerd, J. **5.—8. klassi õpilaste matemaatikavigade psühholoogiast.** Tln., «Valgus», 1970. 43 lk. (ENSV Ped. TUI. 36.)

Sõrmus, T. ja Vainikko, G. **Harilikud diferentsiaalvõrrandid. 1—2.** 2. tr. Trt., 1969. (TRÜ matem. analüüsi kateeder.) — Trükitud rotaprindil.

1. 212 lk.
2. 127 lk.

Tammeste, R. **Tõenäosused Hilberti ruumides.** Trt., 1969. 108 lk. (TRÜ.) — Trükitud rotaprindil.

Teoreetiline mehaanika. Programm, metoodilised juhendid ja kontrolltööd kaugõppe üliõpilastele. Masinaehituse, peenmehaanika, transpordi ja ehituse erialad. Tln., 1969. 95 lk. (TPI teor. mehaanika kateeder.) — Trükitud rotaprindil.

Tiit, E. **Tõenäosusteooria. 1.** Loengukonspekt. 2. tr. Trt., 1970. 320 lk. (TRÜ arvutusmatem. kateeder.) — Trükitud rotaprindil.

Topnik, E. **Teoreetilise mehaanika ülesannetest. 1.** Staatika. Tln., 1970. 120 lk. (TPI teor. mehaanika kateeder.) — Trükitud rotaprindil.

Tšervjakov, V. **Matemaatilise statistika alused.** Õppevahend geograafidele. [Tlk. ja täiend. U. Pragi.] Trt., 1970. 76 lk. (TRÜ.) — Trükitud rotaprindil.

Õiglane, Hilja. **Määramata integraal asendusvõttega.** [Harjutuste kogumik.] Trt., 1970. 71 lk. (EPA.) — Trükitud rotaprindil.

Õppearvuti «Elma-2». Tln., 1970. 26 lk. (TPI arvutusmatem. kateeder.) — T.-l. pöördel koost.: L. Prisk. — Trükitud rotaprindil.

Ваарманн, О. М. **О некоторых итерационных методах с последовательной аппроксимацией обратных и псевдообратных операторов** (008). Автореферат дисс. на соискание учен. степ. канд. физ.-мат. наук. Таллин, 1970. 16 с. (АН ЭССР. Совет физ.-мат. и техн. наук.)

Вайникко, Г. М. **Компактная аппроксимация операторов и приближенное решение уравнений.** Тарту, 1970. 192 с. (ТГУ.) — Ротапринт.

Вихалем, К., Марте, К., Таутс, Т., Тийтс, Т. и Руубель, Х. **Программы по дискретному программированию и стандартные программы.** Таллин, 1969. 88 с. (АН ЭССР. Ин-т кибернетики. Программы для ЭЦВМ «Минск 2/22». Вып. 7.)

Исмит, Н. **Нахождение углового ускорения тела в плоских задачах динамики теоретической механики.** Таллин, 1970. 12 с. (ТПИ. Кафедра теорет. механики.) — Ротапринт.

Куусик, В. А., Сарв, Э. Н. и Хейнла, Л. Э. **ВЭЛГОЛ-система автоматизации программирования. 1—2.** (Справочник руководство). Таллин, 1970. (Вычислит. центр ЭРСПО. Ин-т электронных управляющих машин М-ва приборостроения, средств автоматизации и систем управления СССР. Ин-т кибернетики АН ЭССР. ИНТИ и П при СМ ЭССР.) — Ротапринт.

Ч. 1. 208 с.

Ч. 2. 108 с.

Лийва, Т. В. **Некоторые вопросы собственных колебаний и устойчивости оболочек вращения отрицательной гауссовой кривизны** (023). Автореферат дисс. на соискание учен. степ. канд. физ.-мат. наук. Таллин, 1970. 16 с. (АН ЭССР. Совет физ.-мат. и техн. наук.)

Математика. 4. Сборник статей. Таллин. 1969. 55 с. (Труды Таллинского политехн. ин-та. Серия А. № 280.) — Ротапринт.

Содерж.: А. Хумал. Параметрическая серия вариантов одной задачи на минимум. — Ф. Вихманн. О суммировании одного класса бесконечных произведений. — Ф. Вихманн. О сходимости двойных бесконечных произведений. — М. Левин. Об одной формуле для двойных интегралов. — М. Левин, К. Зинкель. О вычислении некоторых сумм от целых частей функции $\sqrt[k]{x}$. — М. Левин. Об эстетическом отношении людей к математике. (Результаты опросов.) — Э. Шац. Замечание об одной экстремальной задаче.

Математика и теоретическая механика. 5. Сборник статей. Таллин. 1970. 111 с. (Труды Таллинского политехн. ин-та. Серия А. № 293.) — Ротапринт.

Содерж.: М. Левина. О сходимости кусочно-полиномиальных приближений краевой задачи. — М. Левина. О среднеквадратической ошибке для одного вида сращенных функций. — М. Левин. Э. Шац. Построение одной наилучшей кубатурой формулы — Э. Шац. О некоторых многочленах наименьшего уклонения в метрике L_2. — Э. Шац. Наилучшая квадратурная формула для класса функций $W^{(4)}_{L_q}$ $(M;\ 0{,}1)$. — Х. Роос. Возможность рассмотрения действительных чисел и систем чисел на практических занятиях по числовым рядам. — Т. Лийва. О собственных неосесимметричных колебаниях оболочек вращения отрицательной гауссовой кривизны. — А. Чистякова. О применении метода Гамильтона-Якоби в задачах теории упругости. — А. Чистякова. Теоремы взаимности для динамических систем с конечным числом степеней свободы. — Г. Гольст. О колебаниях механической системы с конечным числом степеней свободы при действии прерывной повторной нагрузки. — О. Сильде, Б. Тийкма. Метод уравнения возможных мощностей. — Х. Релвик. Об одной задаче качания.

Программы для ЭВМ «Minsk-22». № 4. Система автоматического программирования для ЭВМ «Минск-22». Таллин, 1969. 139 с. (ЭРСПО. Вычислит. центр.) — Ротапринт.

Программы для ЭЦВМ «Минск-2/22». Вып. 7. Вихалем, К., Марге, К., Таутс, Т., Тийтс, Т. и Руубель, Х. Программы по дискретному программированию и стандартные программы. Таллин, 1969. 88 с. (АН ЭССР. Ин-т кибернетики.) — Ротапринт.

Программы для ЭЦВМ «Минск-22». Вып. 8. Лаане-Куусик, Л., Таутс, Т. и Рейго, М. Основные программы линейного программирования. Под. ред. М. Тамм. Таллин, 1969. 178 с. (АН ЭССР Ин-т кибернетики.) — Ротапринт.

Рейманд, Я. Я. **Преподавание элементов линейного программирования и экономической кибернетики в средней школе и развитие кибернетического стиля мышления учащихся** (13.731). Автореферат дисс. на соискание учен. степ. канд. физ.-мат. наук. Тарту, 1969. 40 с. (ТГУ.)

Сакков, Э. Э. **Анализ закритической стадии упруго-пластических пластин и оболочек** (023). Автореферат дисс. на соискание учен. степ. канд. физ.-мат. наук. Тарту, 1970. 12 с. (ТГУ.)

Сильде, О. **Основные вопросы теории относительности.** Таллин, 1970. 169 с. (ТПИ. Кафедра теорет. механики.) — Ротапринт.

Система модульного программирования для ЭВМ «Минск-22». Отладка и решение задач. Таллин, 1970. 88 с. (Науч.-исслед. и проектно-технол. ин-т систем планирования и управления в электропром-сти). — Ротапринт.

Труды Вычислительного Центра. Вып. 19. Тарту, 1970. 96 с. (ТГУ). — Ротапринт.

Содерж.: Ю. Т а п ф е р. Решение динамических моделей равновесия производства. — А. Л е й т е н. Об одном способе построения сечений при решении частично целочисленных задач. — Е. Г а б о в и ч. Малая задача коммивояжера. — Е. Г а б о в и ч. Задача коммивояжера. I.

Т ы у г у, Э. Х. **Система модульного программирования для ЭВМ «Минск-22».** Общее описание. Таллин, 1970. 50 с. (Науч.-исслед. и проектно-технол. ин-т систем планирования и управления в электропром-сти.) — Ротапринт.

У л ь м, С. Ю. **Исследования по методам решения нелинейных операторных уравнений и задач на экстремум** (008). Автореферат дисс. на соискание учен. степ. д-ра физ.-мат. наук. Таллин, 1970. 46 с. (АН ЭССР. Совет физ.-мат. и техн. наук.)

Ш а ц, Э. М. **Некоторые экстремальные задачи численного интегрирования.** (01.008). Автореферат дисс. на соискание учен. степ. канд. физ.-мат. наук. Таллин, 1970. 16 с. (АН ЭССР. Совет физ.-мат. и техн. наук.)

Э й н п а у л, Ю. **Руководство по вычислительному практикуму.** Таллин, 1970. 68 с. (ТПИ. Кафедра математики.) — Ротапринт.

ARTIKLID

Eesti NSV Teaduste Akadeemia Toimetised. Füüsika. Matemaatika. Tln., 1969.

Nr. 3. Matemaatika-alased artiklid (vene k., resümeed eesti ja inglise k.):

U. K a l j u l a i d. Mõningate kvaasiprojektiivsete muutkondade kohomoloogilisest dimensioonist. — Ü. J a a n s o o. Lineaarse inertsivaba juhtimisobjekti parameetrite rekursiivsest hindamisest. — A. S i i m o n. Trigeri väljundis eksisteeriva signaali aja koordinaatide määramine loogiliste skeemide analüütilise kirjeldamise keeles.

Nr. 4. Matemaatika-alased artiklid (vene k., resümeed eesti ja inglise k.):

E. K ü n n a p. Kõne süntees. — G. K a n g r o. Bohri-Hardy tüüpi summeeruvustegureist antud kiiruse puhul. II. — I n g r i d M a u e r. Kaks meetodit rangelt kumera ruutprogrammeerimisülesande lahendamiseks. — I. P e t e r s e n. Taastavate tuumade ning vähimruutude meetodite võrdlus. — I. P e t e r s e n. Identifitseerimine võrdtäpsete mõõtmiste järgi. — L. M i h h e j e v a, H. S a l u m. Boole'i funktsioonide minimiseerimine maskide meetodil. — M. L e v i n, E. S c h a t z. Ühest ositi integreerimise valemi üldistusest kahekordse integraali puhul. — M. L e v i n. Ühest ekstremaalülesandest.

Eesti NSV Teaduste Akadeemia Toimetised. Füüsika. Matemaatika. Tln., 1970.

Nr. 1. Matemaatika-alased artiklid (vene k., resümeed eesti, inglise ja saksa k.);

B. T a m m. Mõned süsteemprogrammeerimise kontseptsioonilised küsimused. — G. K a n g r o. Tauberi tingimuste nõrgendamisest. — I. P e t e r s e n. Polünoomide identifitseerimine ringil taastavate tuumade meetodi abil. — L. A i n o l a. Lineaarse mittesümmeetrilise elastsusteooria variatsioonprintsiipidest. — L. A i n o l a. Hamiltoni-Ostrogradski printsiibi modifikatsioon algväärtusülesannete jaoks. — I. P e t e r s e n, K. P u c k. Kolmanda astme regressioonkatsete optimaalsest planeerimisest sfääris.

Nr. 2. Matemaatika-alased artiklid (vene k., resümeed eesti ja inglise keeles).

I. P e t e r s e n. Kubatuurvalemid ringil kaaluga $(1-r^2)^{-1/2}$ — I. P e t e r s e n. Ühest Tšebõševi mõõdu omadusest n-dimensioonilisel keral. — M. L e v i n. Arvulise integreerimise parimatest fikseeritud sõlmedega valemitest. — S. U l m. Ühest suboptimaalsete juhtimiste sünteesi meetodist — V. A l a d j e v. Isepaljunevate automaatide teooriast tulenev matriitside probleem. — T. S a l u v e r e, V a i g e S a l u m, E. L i p p m a a. Kahe Lorentzi tüüpi joone summa komponentideks lahutamise algoritm. — S. U l m. Dünaamilise süsteemi detsentraliseeritud juhtimisest.

E i s e n, L. Õpetajate arvamusi 2. klassi matemaatikaprogrammi ja õppekirjanduse kohta. — Nõuk. Kool, 1970, nr. 5, lk. 390—396.

E t v e r k, E. ja T e l g m a a, A. Naturaalarvude hulga käsitlus 4. klassi uues matemaatikaõpikus. — Nõuk. Kool, 1970, nr. 8, lk. 603—609.

E t v e r k, E. ja V i h m a n, A. Uuest seitsmenda klassi matemaatika programmist ja õpikust. — Nõuk. Kool, 1969, nr. 10, lk. 788—790; nr. 12, lk. 942—947. Nr. 12 autor E. E t v e r k.

K i v i, J. Norbert Wiener. — Horisont, 1970, nr. 5, lk. 20—27.

K o p p e l, A a r e. Matemaatikata pole füüsikat. — Horisont, 1970, nr. 7, lk. 14—19.

Lepamaa, A. Tõenäosusteooria ja matemaatilise statistika terminitest ning sümbolitest. — Õppemetoodilisi küsimusi. 7. 1970, lk. 138—143.

Levin, A. ja Levin, M. Trigonomeetriliste võrrandite lahendite analüüs. [7. klass.] — Nõuk. Kool, 1970, nr. 3, lk. 194—199.

Levin, M. Matemaatika ja religioon. [Ateistlikust kasvatusest matemaatika tunnis.] — Nõuk. Kool, 1970, nr. 1, lk. 71—74.

Lints, A. Kuidas õpetada matemaatikat 3. klassis II õppeveerandil. — Nõuk. Kool, 1969, nr. 10, lk. 791—795; nr. 11, lk. 838—840.

Lints, A. Kuidas õpetada matemaatikat 3. klassis III õppeveerandil. — Nõuk. Kool, 1970, nr. 1, lk. 36—41; nr. 2, lk. 122—124.

Lints, A. Kuidas õpetada matemaatikat 3. klassis IV õppeveerandil. — Nõuk. Kool, 1970, nr. 3, lk. 189—194.

Lõhmus, J. Tunnustus diferentsiaalvõrrandite teooria koolkonnale. [Matemaatikute O. Ladõšenskajale ja N. Uraltsevale 1969. a. riikliku preemia andmise puhul.] — Horisont, 1970, nr. 3, lk. 19—20.

Moro, M. Ühetehteliste tekstülesannete lahendama õpetamine 1. ja 2. klassis. [Ajak. «Начальная школа», 1969, № 11. Lühend.] — Nõuk. Kool, 1970, nr. 6, lk. 435—438.

Prinits, O. Professor G. Rägo «Matemaatika õpetamise metoodika» käsikirja lehitsedes. — Nõuk. Kool, 1970, nr. 7, lk. 497—502; nr. 8, lk. 573—576.

Tamm, B. Pikalt lühikeselt reisilt. [Ameerika arvutustehnika konverentsilt. Las Vegas. 1969.] — Noorus, 1970, nr. 3, lk. 41—44.

Tümanok, A. Üliõpilaste iseseisvast tööst teoreetilise mehaanika omandamisel. — Õppemetoodika küsimusi, 7, 1970, lk. 29—38.

Usai, M. Analoogia ja selle rakendamine matemaatika õpetamisel. — Nõuk. Kool, 1969, nr. 11, lk. 834—837.

Usai, M. Tööst matemaatikas tugevamate õpilastega. — Nõuk. Kool, 1970, nr. 7, lk. 513—518.

Valma, R. Arvutustehnika-alane konverents Vilniuses. — Side, Raadio, Televisioon, 1970, nr. 3, lk. 23—25.

Албуташвили, А. Н. Система организации вступительных экзаменов по математике в Грузинском политехническом институте им. В. И. Ленина. — Вопросы методики обучения, 6, 1969, с. 69—76.

Аллик, К., Коппель, Х., Левина, М. и Руусталь, Э. Будущий инженер и математика. — Вопросы методики обучения, 5, 1969, с. 79—87.

Гольст, Г. Значение курса теоретической механики в подготовке будущего инженера. — Вопросы методики обучения, 5, 1969, с. 115—118.

Гольст, Г. О вопросах улучшения преподавания курса теоретической механики. — Вопросы методики обучения, 7, 1970, с. 144—150.

Палувер, Н. Методические указания по изучению курса начертательной геометрии. — Вопросы методики обучения, 5, 1969, с. 102—109.

Ыйглане, Х. А. Программированное обучение на практических занятиях по высшей математике. — Вопросы методики обучения, 6, 1969, с. 185—188.

Ülesandeid

ÜLESANDEID ELEMENTAARMATEMAATIKAST

1. Täisnurkse kolmnurga siseringjoone puutepunkt jaotab hüpotenuusi osadeks pikkustega a ja b. Leida kolmnurga pindala.

2. Kauplusse saabus müügile 6 ülikonda vastavalt hinnaga 48, 55, 60, 68, 76 ja 85 rubla. Esimesel päeval müüdi kolm, teisel päeval kaks ülikonda. Millised ülikonnad müüdi teisel päeval, kui on teada, et esimesel päeval saadi ülikondade müügist kaks korda rohkem raha kui teisel päeval?

3. Leida võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x_1 + x_2x_3x_4 = 10 \\ x_2 + x_1x_3x_4 = 10 \\ x_3 + x_1x_2x_4 = 10 \\ x_4 + x_1x_2x_3 = 10 \end{cases}$$

reaalarvulised lahendid.

4. Kolmnurga üks nurk on 120° ja küljed moodustavad aritmeetilise progressiooni. Tõestada, et küljed suhtuvad nagu $3:5:7$.

5. Kolmnurk ABC, mille siseringjooneks on ringjoon keskpunktiga O ja raadiusega r, rahuldab võrratusi $OA \leqslant OB$, $OA \leqslant OC$. Leida tipu A geomeetriline koht.

KOGUMIKU KUUETEISTKÜMNENDA VIHIKU ÜLESANNETE LAHENDUSED

Ülesande nr. 1 lahendus. Oletame, et meeskondadest A ja C kumbki ei mängi finaalis. Siis on ülesande tingimusi arvestades lihtne kindlaks teha, et finaalis mängiksid kolm meeskonda D, E ja F, mis pole võimalik.

Oletades, et meeskondadest C ja E kumbki ei mängi finaalis, jõuame jällegi vastuoluni.

Samal viisil ülesandes nimetatud ülejäänud paare analüüsides jõuame vastuseni: finaalis kohtuvad meeskonnad A ja E.

Ülesande nr. 2. lahendus. Kahekohalised kümnendsüsteemi arvud osutuvad viiendsüsteemis kas kahe- või kolmekohalisteks.

Olgu $ab_5 = ba_7$. Siis

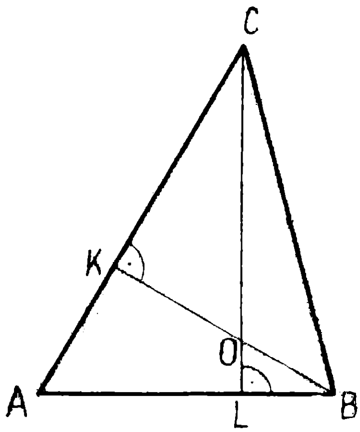
$$5a + b = 7b + a,$$
$$2a = 3b,$$
$$a = 3,\ b = 2.$$

Olgu $abc_5 = cba_7$. Siis

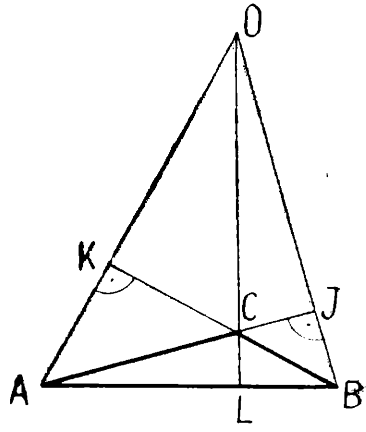
$$25a + 5b + c = 49c + 7b + a,$$
$$b = 12a - 24c,$$
$$a = 2,\ b = 0,\ c = 1 \quad \text{või} \quad a = 4,\ b = 0,\ c = 2.$$

Teine lahend ei sobi, kuna ta annab kolmekohalise kümnendsüsteemi arvu.

Seega on otsitavateks arvudeks 17 ja 51.



Joonis 1.



Joonis 2.

Ülesande nr. 3 lahendus.

Juht I (punkt O asub kolmnurga sees; joon. 1). Olgu BK ja CL kolmnurga kõrgused. Siis $\triangle AKB = \triangle OKC$, sest $AB = OC$, $\angle AKB = \angle OKC = 90°$ ja $\angle ABK = \angle OCK$ (ristuvate haaradega nurgad). Järelikult $BK = CK$, s. o. $\triangle BKC$ on võrdhaarne täisnurkne kolmnurk, mistõttu $\angle ACB = 45°$.

Juht II (punkt O asub väljaspool kolmnurka; joon. 2). Olgu $AJ \perp OB$ ja $BK \perp AO$. Siis $\triangle AKB = \triangle OKC$. Järelikult $BK = OK$, s. o. $\triangle OBK$ on võrdhaarne täisnurkne kolmnurk ning $\angle OBK = 45°$. Seega $\angle ACB = 180° - \angle JCB = 180° - \angle OBK = 135°$.

Ülesande nr. 4 lahendus. Rekurrentsest valemist leiame, et

$$u_2 = \frac{2u_1 - 1}{2 - u_1}; \quad u_3 = \frac{5u_1 - 4}{5 - 4u_1}; \quad u_4 = \frac{14u_1 - 13}{14 - 13u_1}.$$

Siin esinev korrapärasus lubab oletada, et

$$u_n = \frac{(3^{n-1} + 1)u_1 - (3^{n-1} - 1)}{(3^{n-1} + 1) - (3^{n-1} - 1)u_1}.$$

Antud valem on tõestatav matemaatilise induktsiooniga (tõesta!).

Kui $u_1 \neq 1$ ning $(3^{n-1} + 1) - (3^{n-1} - 1)u_1 \neq 0$ $(n = 2, 3, \ldots)$, siis

$$\lim_{n \to \infty} u_n = \lim_{n \to \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{3^{n-1}}\right)u_1 - \left(1 - \frac{1}{3^{n-1}}\right)}{\left(1 + \frac{1}{3^{n-1}}\right) - \left(1 - \frac{1}{3^{n-1}}\right)u_1} = \frac{u_1 - 1}{1 - u_1} = -1.$$

Kui $u_1 = 1$, siis $u_n = 1$ ja $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 1$.

Ülesande nr. 5 lahendus. Esitame antud võrrandi kujul

$$2a^2 - (2x^2 - 7x + 4)a - (x^3 - 3x^2 + 2x) = 0.$$

Lahendades selle võrrandi a suhtes, saame kaks lahendit:

$$a = -\frac{x}{2}, \quad a = x^2 - 3x + 2.$$

Lahendades viimased kaks võrrandit x suhtes, leiame

$$x_1 = -2a, \quad x_{2,3} = \frac{3 \pm \sqrt{1+4a}}{2}.$$

KOGUMIKU EELMISES NUMBRIS ILMUNUD BRIDŽIÜLESANNETE LAHENDUSED

(Ülesanded vt. «Matemaatika ja kaasaeg», XVII, lk. 6)

1. Nelja kaardi tõmbamiseks 52-kaardilisest pakist on kokku C_{52}^4 erinevat võimalust. Nelja masti vahel saavad need kaardid jaotuda üldse järgmisel viiel viisil: (4, 0, 0, 0), (3, 1, 0, 0), (2, 2, 0, 0), (2, 1, 1, 0) ja (1, 1, 1, 1). Erinevate võimaluste arvud kõigi nende viie jagunemisviisi jaoks on juba lihtsalt leitavad:

(4, 0, 0, 0) esinemiseks on $C_4^1 \cdot C_{13}^4$ võimalust,

(3, 1, 0, 0) esinemiseks on $C_4^1 \cdot C_{13}^3 \cdot C_{13}^1 \cdot C_3^1$ võimalust,

(2, 2, 0, 0) esinemiseks on $C_4^2 \cdot C_{13}^2 \cdot C_{13}^2$ võimalust,

(2, 1, 1, 0) esinemiseks on $C_4^1 \cdot C_{13}^2 \cdot C_3^2 \cdot C_{13}^1 \cdot C_{13}^1$ võimalust,

(1, 1, 1, 1) esinemiseks on $C_{13}^1 \cdot C_{13}^1 \cdot C_{13}^1 \cdot C_{13}^1$ võimalust

(kuigi meid huvitab vaid neljas nendest arvudest, võime nüüd kontrolliks veenduda, et kõigi viie arvu summa on ikka tõepoolest C_{52}^4). Otsitavaks tõenäosuseks saame seega:

$$\frac{C_4^1 \cdot C_{13}^2 \cdot C_3^2 \cdot C_{13}^1 \cdot C_{13}^1}{C_{52}^4} = \frac{158\ 184}{270\ 725} \approx \frac{10}{17}.$$

2. Aprioorsed tõenäosused kuue puuduva kaardi jaotumiseks suhtes 3 : 3 ja 4 : 2 on küll vastavalt

$$\frac{C_6^3 \cdot C_{20}^{10}}{C_{26}^{13}} = 0{,}355 \quad \text{ja} \quad \frac{C_6^4 \cdot C_{20}^9 + C_6^2 \cdot C_{20}^{11}}{C_{26}^{18}} = 0{,}485$$

(ning seega tuleks nagu panna *10*), kuid antud olukorras pole nende tõenäosustega midagi peale hakata, sest neis pole arvesse võetud otsustamise momendini saadud täiendavat informatsiooni. Nimelt teame me juba vasakpoolse vastase kolme ning parempoolse vastase kahte kaarti. Vastaste ülejäänud 21 kaardi hulgas paiknev meid huvitava masti *S* saab nüüd tõenäosusega 10 : 21 ($= C_{20}^9 : C_{21}^{10}$) olla vasakpoolse ja tõenäosusega 11 : 21 ($= C_{20}^{10} : C_{21}^{10}$) parempoolse vastase käes. See tähendab, et *Ä* panek on veidi eelistavam.

Kui enne vaadeldava masti juurde asumist on mängus võetud juba m tihi ($m \leqslant 9$), siis ei muutu kõnealused tõenäosused, sest eelmistesse tihidesse selle masti kaarte ei visatud.

3. See ülesanne võib isegi mõnele kogenud bridžimängijale näida eelmisega identsena, kuigi asi pole sugugi nii. Tuleb nimelt arvestada, et kui parempoolsel vastasel oleks olnud *S*, *10* ja *6*, siis teise (või esimese!) kaardina oleks ta võinud visata nii *10* kui ka *S* (isegi väheste kogemustega mängija viskab sellises olukorras esimesena vahel kõrgema, vahel aga madalama kaardi), kui tal oli aga ainult *10* ja *6*, siis polnud enam mingit valikuvabadust.

Vastaste käes oleva 26 kaardi kõigi võimalike (C_{26}^{13}) jaotumiste hulgas leidub C_{20}^{11} niisugust, mille korral parempoolsel vastasel on vaadeldavast mastist vaid *10* ja *6*, ning C_{20}^{10} niisugust, mille korral tal on *S*, *10* ja *6*. Umbes pooltel kordadel viimastest oleks ta aga visanud *10* asemel *S*. Seega suhtuvad nende kahe võimaluse esinemise sagedused nagu

$$\frac{C_{20}^{11}}{\frac{1}{2}\cdot C_{20}^{10}}=\frac{20}{11},$$

mis tähendab, et vaadeldavas ülesandes on *9* panek peaaegu kaks korda eelistatavam kui *Ä* panek.

Praktiliseks kasutamiseks võib saadud tulemust meeles pidada järgmise lihtsa reeglina (*the principle of restricted choice*): kui vastane viskab ära kõrge kaardi, siis on tõenäosem, et tal ei olnud valikuvabadust. Toome selle reegli rakendamise kohta veel ühe näite. Olgu vaadeldav mast jaotatud järgmiselt:

lepingutäitjal: *Ä 2*, lauas: *K 10 7 5 3*.

Lepingutäitja käib *Ä*, millele vasakpoolne vastane viskab *4*, parempoolne aga *S*. Järgnevalt käidud *2* peale paneb vasakpoolne vastane *6*. Kas suurima arvu tihide saamiseks vaadeldava mastiga tuleb lauast panna *10* või *K* (eeldades muidugi tihi üleandmise võimalusi teistes mastides)?

Sõnastatud reegli kohaselt peame nüüd oletama, et parempoolsel vastasel polnud valikuvabadust (s. t. tal oli käes ainult *S*, mitte *E* ja *S*), ning panema lauast *10*. Kontrollime! Niisuguseid jaotusi, mille korral parempoolsel vastasel on vaadeldavast mastist kas ainult *S* või *E* ning *S*, leidub vastavalt C_{20}^{12} ja C_{20}^{11}, kuid viimastest oleks ta pooltel juhtudel visanud *E*. Seega sageduste suhteks saame

$$\frac{C_{20}^{12}}{\frac{1}{2}\cdot C_{20}^{11}}=\frac{3}{2},$$

mis näitab, et *10* panek on tõepoolest eelistatavam (võimaluse, et parempoolse vastase käes on *E*, *S* ja veel näiteks *8*, jätame vaatlusest välja, sest sel korral saab iga mänguga neli tihi).

ROOSINUPU 3. TEOREEMI[1] TÕESTUS

Teoreem. *Leidub vaid üks paariskohaline algpalindroom (ja nimelt* 11).

Tõestus tugineb (põhjendamist siin vist mittevajavale) jaguvustunnusele: arv jagub 11-ga parajasti siis, kui tema paaritutel kohtadel olevate numbrite summa ja paariskohtadel olevate numbrite summa vahe jagub 11-ga (näit. 723 456 789 jagub 11-ga, sest $(7+3+5+7+9)-(2+4+6+8)=31-20=11$). Kui aga tegemist on paariskohalise palindroomiga, siis on nimetatud summade vahe alati null. Seega jagub iga selline palindroom 11-ga ning saab olla algarv vaid teiste tegurite puudumisel.

---

[1] Vt. lk. 80.

SISUKORD

МАТЕМАТИКА И СОВРЕМЕННОСТЬ XVIII
Вспомогательные материалы для преподающих и изучающих математику
На эстонском языке
Тартуский государственный университет.
ЭССР, г. Тарту, ул. Юликооли, 18

Vastutav toimetaja E. Tamme
Korrektor E. Oja

Ladumisele antud 25. I 1971. Trükkimisele antud 17. III 1972. Trükipoognaid 9,5+1 kleebis. Arvestuspoognaid 9,8. Kohila Paberivabriku trükipaber nr. 2, 60×90.1/16. Trükiarv 2000. MB 00655. Tell. nr. 529. Hans Heidemanni nim. trükikoda, Tartu, Ülikooli tn. 17/19. II.

Hind 60 kop.

2—2