0010001

Matemaatika ja kaasaeg

1000100

TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

MATEMAATIKA JA KAASAEG

XVII

ABIMATERJALE MATEMAATIKA ÕPETAJATELE JA ÕPPIJATELE

TARTU 1970

ÜLD- JA ÜKSIKMÕISTETE VAHEKORD

A. Tauts

Vaatleme kahte lauset:

1. Kui mingile kolmeelemendilisele hulgale liita mingi kaheelemendiline hulk, kusjuures neil hulkadel pole ühiseid elemente, siis saadakse tulemuseks viieelemendiline hulk.

2. Kui arvule 3 liita arv 2, siis saadakse arv 5.

Sisuliselt tähistavad mõlemad laused üht ja sama fakti, kuid ometi on nende vahel erinevus ja mitte ainult keeleline. Esimeses lauses räägitakse mingist kolmeelemendilisest ja mingist kaheelemendilisest hulgast, s. t. lauses väljendub selgesti üldistus üle paljude üksikjuhtumite. Seevastu teises lauses on tunda suhtumist arvudesse 3 ja 2 kui konkreetsetesse üksikobjektidesse. Arv 3, s. o. sisuliselt kolmeelemendiliste hulkade klass, on muudetud siin üksikuks konkreetseks objektiks. Et arve ollakse harjunud tõlgendama konkreetsete objektidena, seda võib näha juba sellest, et me räägime naturaalarvude hulgast, kolmega jaguvate naturaalarvude hulgast, arvust 4 väiksemate naturaalarvude hulgast jne. Hulga elemendiks peavad aga paratamatult olema objektid. Seejuures ei saa nendeks objektideks olla konkreetsed vastava elementide arvuga hulgad, sest siis eksisteeriks mitu naturaalarvude hulka olenevalt sellest, milline konkreetne hulk vastava arvu esindajaks võtta. Naturaalarvude hulga elementideks on klassid, mis koosnevad kõigist vastavat arvu elemente sisaldavatest hulkadest, kusjuures need klassid on loetud omaette objektideks. Seejuures on nad muutunud meie teadvuses peaaegu atomaarseteks mõisteteks, mistõttu meil ei tule meeldegi, et oma olemuselt on nad teatud hulkade klassid.

Selliste klasside muutmist omaette objektiks saab läbi viia ainult siis, kui kõik liikmed klassis on vaadeldavas aspektis isomorfsed. Näiteks kui meid rühma puhul huvitab ainult elementide identsusvahekord ja rühmaoperatsioon, siis ei või me lugeda omaette objektiks rühma kui niisugust, sest küsimusele: «Mitu erinevat elementi on rühmas?» ei leiduks ühtset vastust. Küll võib aga omaette objektiks sel juhul olla kolmeelemendiline tsükliline rühm kui niisugune, lugedes elementideks e, a ja b, kus e on ühikelement ning $ab = ba = e$. Sisuliselt on see rühm siin tegelikult kõigi kolmeelemendiliste rühmade klass. Nendel rühmadel on seejuures muidugi väga mitmesuguse struktuuriga elemendid, kuid meie aspektis, mis võttis arvesse ainult identsusvahekorra ja rühmaoperatsiooni, ei tule elementide endi struktuurilised iseärasused arvesse. Seega on need rühmad nimetatud aspektis isomorfsed.

Selline konkretiseerimine on otstarbekas läbi viia klassi puhul, mis koosneb isomorfsetest liikmetest. Kuigi matemaatilised tulemused ei olene sellest, kas tõestame mingi omaduse kehtivuse antud klassi kõigi liikmete puhul või tõestame ta ainult selle abstraktse objekti puhul, milleks me antud klassi oleme muutnud, on tunnetuslikult siin siiski vahe olemas. Öeldes «kaks liita kolm on viis» tunneme, et mainisime üksikut fakti, öeldes aga «kui võtta suvaline kaheelemendiline hulk ja suvaline kolmeelemendiline hulk, millel pole ühiseid elemente, siis nende summa on viieelemendiline hulk,» tunneme, et räägime korraga paljudest üksikfaktidest.

Kirjeldatud põhimõtte illustreerimiseks toome ühe näite, mis erinevalt eespool mainitud naturaalarvude näitest ei ole üldiselt meie teadvuses sellisel kujul juurdunud. Jutt on nimelt eukleidilise geomeetria kujunditest. Tõepoolest, samal ajal kui iga naturaalarvu üldiselt vaadeldakse ühesainsas eksemplaris eksisteerivana, ei ole geomeetriliste kujundite — ring, ruut jne. — kohta selgelt väljakujunenud seisukohta, kas igaüks neist eksisteerib ühes või mitmes eksemplaris.

Vaatame niisiis, kuidas tuleks muuta sellises mõttes üksikobjektideks eukleidilise geomeetria kujundeid, nii et poleks vaja näiteks öelda: «Iga võrdkülgse kolmnurga nurgad on omavahel võrdsed ja võrduvad kolmandikuga sirgnurgast», vaid selle asemel võiks kõnelda võrdkülgsest kolmnurgast kui üksikobjektist. Selleks peame kõigepealt määratlema aspekti, mida isomorfismi aluseks võtta. Teeme seda näiteks nii, et samastame kõik sarnased kujundid.

Defineerime kõigepealt üksikobjektina eukleidilise ruumi kui niisuguse. Vaatleme hulki, millel on defineeritud funktsioon, mis igale kahele elemendile x ja y seab vastavusse mittenegatiivse reaalarvu $\varrho(x, y)$ (viimast hakkame edaspidi nimetama vastavate elementide vaheliseks kauguseks). Nimetame seda hulka n-mõõtmeliselt eukleidiseeruvaks, kui saab korraldada üksühese vastavuse selle hulga elementide ja reaalarvude n-komponendiliste korteežide vahel nii, et kui elemendile x vastab $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ ja elemendile y vastab $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$, siis $\varrho(x, y) = \sqrt{\sum (\xi_k - \eta_k)^2}$.

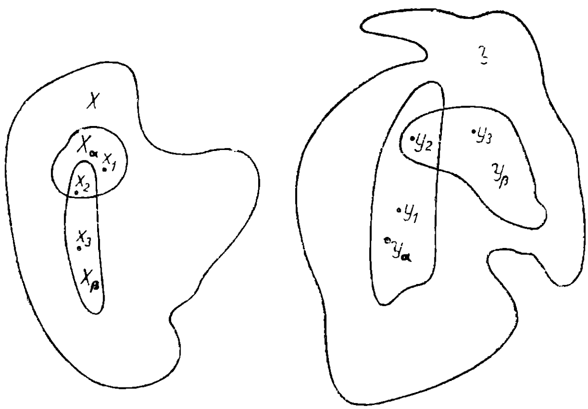
Kõigi n-mõõtmeliselt eukleidiseeruvate hulkade klassi nimetamegi n-mõõtmeliseks eukleidiliseks ruumiks. Selle klassi iga liige on siis paar (M, ϱ), kus M on hulk ja ϱ on ülalnimetatud tingimusi rahuldav kahekohaline funktsioon.

Konkreetne geomeetriline kujund n-mõõtmelises eukleidilises ruumis defineeritakse pisut keerulisemalt, kuid üldine põhimõte on sama. Kujundeid nagu sirge, tasand, kera, kuup jne. saab vaadelda ilmselt punktihulkadena. Kui on tegemist aga sellise kujundiga nagu näiteks sirge koos kolme fikseeritud punktiga sellel sirgel, siis ilmselt ühe osahulgana seda kirjeldada ei saa: osahulk sisaldaks ju kõik sirge punktid ja puuduks võimalus nimetatud kolme punkti erilist osa selles kujundis näidata. Seepärast tuleb kujundit üldiselt vaadata kui punktihulkade süsteemi.

Olgu A mingi hulk ja n mingi naturaalarv. Vaatleme struktuure, mis koosnevad n-mõõtmeliselt eukleidiseeruvatest hulkadest X, milles on eristatud osahulkade süsteem $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$. Selle süsteemi osahulgad võivad ka lõikuda. Oletame, et mistahes kahe vaadeldava n-mõõtmeliselt eukleidiseeruva hulga X ja Y vahel saab korraldada üksühese vastavuse, nii et on täidetud järgmised nõuded:

1) Leidub $\lambda > 0$, nii et kui elemendile $x_1 \in X$ vastab $y_1 \in Y$ ja elemendile $x_2 \in X$ vastab $y_2 \in Y$, siis $\varrho(x_1, x_2) = \lambda\varrho(y_1, y_2)$.

2) Iga süsteemi $\{X_\alpha\}$ kuuluva osahulga $X_\alpha \subset X$ elementidele vastavad parajasti Y_α elemendid.



Näiteks hulkade X ja Y vahel peab olema üksühene vastavus, nii ent X_α suvaline element x_1 vastaks tingimata Y_α mingile punktile y_1, samuti punktile x_3, mis kuulub hulka X_β, peab vastama mingi y_3, mis kuulub hulka Y_β. Et $x_2 \in X_\alpha \cap X_\beta$, siis peab talle vastav element y_2 olema nii Y_α kui ka Y_β element.

Geomeetriliseks kujundiks nimetame siis sellist maksimaalset klassi, mille liikmeteks on kolmikud $(M, \varrho, \{M_\alpha\})$, kus M on hulk, ϱ on eespool kirjeldatud kaugusfunktsiooni nõudeid rahuldav funktsioon ja $\{M_\alpha\}$ on hulga M osahulkade mingi süsteem, kusjuures selle klassi iga kahe liikme $(M, \varrho, \{M_\alpha\})$ ja $(N, \mu, \{N_\alpha\})$ puhul saab hulkade M ja N vahel korraldada ülalkirjeldatud vastavuse.

Näiteks selline geomeetriline kujund nagu punkt on klass, mille liikmeteks on n-dimensionaalselt eukleidiseeruvad hulgad, milles igaühes on eristatud üks üheelemendiline osahulk. Sirge seevastu on klass, mis koosneb n-mõõtmeliselt eukleidiseeruvatest hulkadest, kusjuures igaühes on eristatud maksimaalne selline osahulk, mille igast kolmest elemendist üks on kahe ülejäänu vahel. Elementi b nimetame elementide a ja c vahel asuvaks, kui $\varrho(a, c) = \varrho(a, b) + \varrho(b, c)$.

Sirge koos temal fikseeritud kolme punktiga on aga klass, kus igas hulgas lisaks eelmises näites kirjeldatud osahulgale on eristatud veel selle üks kolmepunktiline osahulk, kusjuures keskmise punkti kauguste suhe äärmistesse on selle klassi iga liikme puhul sama.

Seega on iga geomeetriline kujund kindel klass, mida võib harjuda vaatlema millegi elementaarse ja ühesena, nii nagu vaatleme naturaalarve.

Analoogilist mõttekäiku saab rakendada igakord, kui tahame samastada üksikjuhtumeid, mis on meid huvitavas aspektis isomorfsed.

BRIDŽIÜLESANDEID

«Matemaatika ja kaasaja» viimastes numbrites leidus igaühes üks loogilist laadi bridžiülesanne. Esitame nüüd vahelduseks mõned matemaatilise sisuga bridžiülesanded, mille lahendused avaldame «Matemaatika ja kaasaja» järgmises numbris.

1. Robber algab tavaliselt partnerite loosimisega — igaüks neljast osavõtjast tõmbab 52-kraadilisest pakist juhuslikult ühe kaardi ning partneriteks saavad vastavalt kahe kõrgeima ja kahe madalaima kaardi omanikud. Milline on tõenäosus, et tõmmatud neli kaarti esindavad täpselt kolme erinevat masti (s. t. kaks kaarti on mingist ühest mastist ja ülejäänud teistest mastidest)?

2. Üks mastidest jaotub (näiteks trumbita mängu korral) lepingutäitja ja laua vahel järgmiselt:

lepingutäitjal: *K E 2*, *lauas: Ä 10 5 3.*

Lepingutäitja käib algul *K* ning siis *E*, millele vastased viskavad *4, 6, 7* ja *8*. Lepingutäitja kolmandana käidud *2* peale paneb vasakpoolne vastane *9*. Kas lauast tuleb nüüd panna *Ä* või *10* (eeldades muidugi, et mingit täiendavat informatsiooni kaartide võimaliku jaotumise kohta pole mängu käigus õnnestunud hankida)?

3. Olgu eelmisega muidu täiesti analoogilises olukorras vaadeldav mast jaotatud järgmiselt:

lepingutäitjal: *K E 2*, lauas: *Ä 9 5 3*.

Lepingutäitja käib jälle *K* ning *E*, millele vasakpoolne vastane viskab *4* ja *7*, parempoolne aga *6* ja *10*. Kolmandana käidud *2* peale paneb vasakpoolne vastane *8*. Kas lauast tuleb panna *Ä* või *9*?

LISATEADMISI RÜHMADEST

U. Kaljulaid

— Mis tuleb selleks teha? — küsis VÄIKE PRINTS.
— Tuleb olla väga kannatlik, — kostis REBANE.
— Kõigepealt istu minust veidi eemale rohu peale... Nii! .... Mina vaatan sind silmanurgast ja sina ei ütle mulle mitte midagi. Keel on arusaamatuste allikas. Kuid iga päev võid sa istuda natuke lähemale...»
A. de Saint-Exupéry. Le Petit Prince

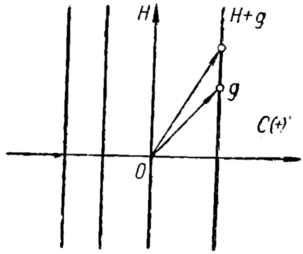
Käesolevat artiklit võib vaadelda Jevgeni Gabovitši ülevaate «Algebra põhimõisted» rühmi käsitleva osa jätkuna. Peale uute mõistete (homomorfism, normaaljagaja jt.) tutvub lugeja siin tsükliliste rühmade «kirjeldusega», rühma «lahenduvuse» mõistega, kriteeriumidega selle omaduse «avastamiseks», näidetega lahenduvatest rühmadest. Ta leiab ka Thompson-Feiti teoreemi ja mõnede selle järelduste sõnastused. Täiendav tutvus rühmadega on heaks eelduseks Galois' teooria mõistmisel, kaasaegse geomeetria tundmaõppimisel ja mujal. Rühmateooria rakenduslik väärtus ei vaja tänapäeval erilisi kommentaare. On üldtuntud tema rakendused füüsikas ja keemias[1], rääkimata matemaatikast endast[2].

1 Vaatleme suvalist rühma ja temas mingit alamrühma; tähistame nad vastavalt G ja H. Me võime rühmas G läbi viia klassijaotuse, lugedes klassideks alamrühma H «orbiidid», s. t. hulgad $Hg = \{hg \mid g \in G$ on fikseeritud; $h \in H$ on suvalised$\}$. Näiteks, kui rühmaks on komplekstasand C kompleksarvude liitmise suhtes ja alamrühmaks imaginaartelg, siis on orbiitideks vertikaalsirged (vt. joonis 1).

---

[1] Vt. näiteks N. Kristoffel, K. Rebane. Rühmateooria ja selle rakendusi molekulide ja kristallide füüsikas. Tartu, 1961, TRÜ rotaprint; või F. A. Cotton. Chemical applications of group theory, Interscience Tracts. New-York—London, 1964.

[2] Vt. Ü. Lumiste. Ruumi mõiste geomeetrias (Geomeetria ja teisenduste rühmad). — Matemaatika ja kaasaeg, XIV, lk. 3—21.



Joonis 1.

Orbiite nimetatakse ka alamrühma *kõrvalklassideks*, elementi g — klassi *esindajaks*. Lugeja veendub kergesti selles, et esindajaks võib elemendi g asemel valida suvalise teise «punkti» orbiidil, et erinevad orbiidid omavahel ei lõiku, et ühikelemendile vastav orbiit ühtib alamrühmaga ning et orbiidid katavad kogu rühma. Seega on tõepoolest tegemist klassijaotusega, mida kirjutatakse kujul $G = H + Hg_2 + Hg_3 + \ldots$, ehk lühidalt ka $G = \sum_{g \in K} Hg$, kus $K = \{e, g_2, g_3, \ldots\}$ on *täielik esindajate süsteem*, s. t. hulk, millesse igast klassist kuulub parajasti üks esindaja.

Vaatleme eraldi juhtu, kus rühm G on lõplik. Sellise rühma elementide arvu nimetame rühma järguks ja tähistame $|G|$. Erinevate orbiitide arvu nimetame *alamrühma H indeksiks rühmas G* ja tähistame $\mathrm{ind}_G H$ või ka $(G:H)$.

Lagrange'i teoreem. *Lõpliku rühma järk jagub iga tema alamrühma järguga, kusjuures jagatiseks on selle alamrühma indeks.*

Tõestus. Veendunud, et kujutus $\varphi: H \to Hg$, mis on antud valemiga $\varphi(h) = hg$, on üksühene, märkame, et kõigil orbiitidel on sama palju «punkte». Et aga orbiidid katavad kogu rühma ega lõiku omavahel, siis näeme indeksi definitsiooni silmas pidades, et $|G| = |H| \cdot \mathrm{ind}_G H$. Teoreemi väide on tõestatud.

Seega, Lagrange'i teoreem väidab, et alamrühmade järgud lõplikus rühmas on tema järgu jagajateks. Võib aga kerkida küsimus vastupidise õigsusest: kui arv m jagab lõpliku rühma järku, kas leidub siis temas alamrühm järguga m? Lihtsad näited kinnitavad sellise «pöördhüpoteesi» paikapidamatust üldjuhul. Siiski, ta on õige algarvulise m korral. Veelgi enam, kui $|G| = p^n \cdot r$, kus p on algarv ning arvud p ja r on vastastikku lihtsad, siis sisaldab rühm G alamrühmi järkudega $p, p^2, p^3, \ldots, p^n$. See väide (koos väikese lisandiga) on tuntud *Sylowi esimese teoreemina*.

Kas ei või kõigis eeltoodud arutlustes klasside Hg, nn. *parempoolsete kõrvalklasside* asemel vaadelda *vasakpoolseid kõrvalklasse gH*, s. o. hulki

$$gH = \{gh \mid g \in G \text{ fikseeritud; } h \in H \text{ suvalised}\}?$$

Lugeja realiseerib selle võimaluse kergesti (tänu täielikule analoogiale esitatuga) ja tulemuseks on toodud «parempoolse pildiga» sümmeetriline «vasakpoolne pilt». Erijuhul kui rühma operatsioon on kommutatiivne, s. o. võrdus $a \cdot b = b \cdot a$ kehtib suvaliste $a, b \in G$ korral, ühtivad need «pildid». Üldjuhul muidugi $Hg \neq gH$.

Olgu antud suvaline rühm G ja temas alamrühm H. Me teame, et rühma G võib katta nii parempoolsete klassidega Hg kui ka vasakpoolsete klassidega gH, s. t.

$$G = \sum_{q \in K} Hg = \sum_{g \in K'} gH.$$

Siin tähistavad K ja K' täielikku esindajate süsteemi vastavalt esimesel ja teisel juhul. Üldiselt muidugi $K \neq K'$. Küsime, kas esindajaid klassides on võimalik nii valida, et $K = K'$ kehtiks, s. o. et parempoolsete klasside esindajate täielik süsteem oleks üheaegselt ka vasakpoolsete klasside esindajate täielikuks süsteemiks? Üldjuhul on vastus eitav. Siiski, G. Miller näitas 1910. a., et selline valik on alati võimalik juhul, kui H on lõplik alamrühm. Kõnesolev situatsioon leiab aset veel teistelgi juhtudel. Üht neist kirjeldame järgnevas punktis, ülejäänud juhtudel me ei peatu [3].

2 Rühmas G fikseerime suvalise elemendi $a \in G$. Vaatleme rühma G «teisendust» σ_a, mis igale $g \in G$ seab vastavusse elemendi $a^{-1}ga$, s. o. antakse valemiga $\sigma_a(g) = a^{-1}ga$. Sealjuures $e \to e$, sest $a^{-1}ea = a^{-1}a = e$; $g_1 \neq g_2 \Leftrightarrow \sigma_a(g_1) \neq \sigma_a(g_2)$, sest võrdus $a^{-1}g_1a = a^{-1}g_2a$ on samaväärne võrdusega $g_1 = g_2$; $\sigma_a(g_1 \cdot g_2) = \sigma_a(g_1) \cdot \sigma_a(g_2)$, sest $a^{-1}(g_1 \cdot g_2)a = a^{-1}g_1aa^{-1}g_2a = (a^{-1}g_1a) \cdot (a^{-1}g_2a)$. Näeme, et rühma G ühikelement e on «teisenduse» σ_a püsipunktiks, et meie «teisendus» σ_a on üksühene vastavus rühmal G ja et ta viib elementide korrutise vastavate elementide korrutiseks. Ilmselt võib sellise konstruktsiooni «$a \rightsquigarrow \sigma_a$» läbi viia iga $a \in G$ korral ja sealjuures saadavaid «teisendusi» σ_a nimetame rühma G siseautomorfismideks.

Eriline osa kogu rühmateoorias on nn. *invariantsetel alamrühmadel* e. *normaaljagajail*. Nii nimetatakse alamrühmi $N \subseteq G$ omadusega «kõigi rühma G siseautomorfismide σ_a korral $\sigma_a(N) \subseteq N$.» Teiste sõnadega, alamrühm $N \subseteq G$ on normaaljagajaks, kui alati $n \in N$, $a \in G \Rightarrow a^{-1}na \in N$.

On kerge veenduda, et toodud definitsioon on samaväärne väitega «iga $a \in G$ korral $aN = Na$», s. t. ühtivad vastavad vasak- ja parempoolsed kõrvalklassid alamrühma N järgi. Asjaolu, et alamrühm N on normaaljagajaks rühmas G, tähistame $N \lhd G$.

Igas rühmas on ühikrühm ja rühm ise normaaljagajaiks — need on nn. triviaalsed normaaljagajad. Kui teisi normaaljagajaid rühmas ei leidu, nimetatakse teda *lihtsaks rühmaks*.

Näide. Lõpliku hulga üksüheseid kujutusi iseendale nimetatakse substitutsioonideks; substitutsiooni järguks on vaadeldava hulga

---

[3] Huvitavat materjali leiab artiklist O. Ore. On coset representatives in groups, Proceedings of the American Mathematical Society, v. 9, No 4, 1958.

elementide arv n. Et hulga elementide «individuaalsus» ei paku siin huvi, siis võib hulga elementidena vaadelda esimesi naturaalarve. Seega, iga n-järku substitutsiooni S saame kirja panna

kujul $$S = \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_n \\ j_1 & \dots & j_n \end{pmatrix},$$

kus $(i_1, \dots, i_n)$ ja $(j_1, \dots, j_n)$ on permutatsioonid arvudest $1, 2, \dots \dots, n$. Sellise «kirjaviisi» korral on oluline silmas pidada, et suvalised vertikaalpaaridega tehtavad ümberpaigutused substitutsiooni ei muuda, s. t. me loeme näiteks

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \equiv \text{jne.}$$

Substitutsioone saab «korrutada» — loeme $S = \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_n \\ j_1 & \dots & j_n \end{pmatrix}$ ja $T = \begin{pmatrix} j_1 & \dots & j_n \\ k_1 & \dots & k_n \end{pmatrix}$ korrutiseks substitutsiooni $S \cdot T = \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_n \\ k_1 & \dots & k_n \end{pmatrix}$. Eeltoodud märkust («kirjaviisi» kohta) silmas pidades näeb lugeja, et iga kaht n-järku substitutsiooni saab korrutada. Seega on kõigi n-järku substitutsioonide hulk $\mathfrak{S}_n$ varustatud algebralise operatsiooniga («korrutamisega»), mis, nagu kerge kontrollida, on assotsiatiivne ja (juhul $n > 2$) mittekommutatiivne. Selle «korrutamise» puhul on olemas ka ühik $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} \equiv$ $\equiv \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_n \\ i_1 & \dots & i_n \end{pmatrix} \equiv \dots$, ja igal substitutsioonil S on «pöördelement» $S^{-1} = \begin{pmatrix} j_1 & \dots & j_n \\ i_1 & \dots & i_n \end{pmatrix}$, sest $S \cdot S^{-1} = S^{-1} \cdot S = E$. Seega $\mathfrak{S}_n$ on rühm, mida nimetatakse *täielikuks sümmeetriliseks rühmaks*. Tema alamrühmi nimetatakse *substitutsioonirühmadeks*.

«Kirjaviisi» kohta tehtud märkus lubab iga substitutsiooni esitada n.-ö. «normaalkujul»

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n \end{pmatrix},$$

millest näeme, et permutatsioon $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ määrab substitutsiooni S juba üheselt. Veelgi enam, see «uus kirjaviis» lubab kõik substitutsioonid jaotada kaheks klassiks — paaris- ja paarituiks substitutsioonideks, kasutades inversiooni mõistet. Loetakse, et arvud s_i ja s_j, $i < j$ moodustavad inversiooni permutatsioonis $s = (s_1, \dots, s_i, \dots, s_j, \dots, s_n)$, kui $s_i > s_j$. Substitutsiooni S nimetatakse paaris või paarituks sõltuvalt sellest, kas permutatsioon s sisaldab paaris või paaritu arvu inversioone. Näiteks $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ on paaris —, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ aga paaritu substitutsioon.

Pole raske näha, et paarissubstitutsioone on $\frac{n!}{2}$ ja et nad moodustavad alamrühma $A_n \subset \mathfrak{S}_n$. Rühmad A_n $(n \geqslant 5)$ osutuvad lihtsaiks [4].

Seega annavad rühmad $A_n (n \geqslant 5)$ meile lõpmatu näidete seeria lõplikest mittekommutatiivsetest lihtsatest rühmadest. Küsimus kõigi selliste rühmade kirjeldusest on osutunud väga raskeks. Siiski on seoses mitmete uute vahendite avastamisega viimasel aastakümnel saavutatud rida huvitavaid tulemusi selles valdkonnas. Tutvume ühega nendest.

Kõigis rühmades $A_n (n \geqslant 5)$ on paarisarv elemente. Märgati, et kõik teadaolevad lõplikud mittekommutatiivsed lihtsad rühmad on paarisarvulist järku. Siit kerkis sajandi algul W. Burnside'i raske ülesanne: teha kindlaks lõplike, paaritut järku mittekommutatiivsete lihtsate rühmade olemasolu. See ülesanne on nüüd lahendatud [5].

Suvalises rühmas G, mis pole lihtne, leidub mingi mittetriviaalne normaaljagaja N, ja me võime vaadelda rühma G klassijaotust N järgi. Märkimisväärne on asjaolu, et normaaljagaja korral orbiitide süsteemil valemiga $Ng_1 \cdot Ng_2 = Ng_1g_2$ antud «korrutamine» on korrektne, s. t. ei sõltu esindajate g_1 ja g_2 valikust neil orbiitidel. Edasi, selle korrutamise suhtes on orbiit N «ühikuks» ja igal orbiidil Ng leidub «pöördorbiit» — Ng^{-1}. Järelikult on orbiitide hulk G/N selle korrutamise suhtes rühm; teda nimetatakse *rühma G faktorrühmaks normaaljagaja N järgi*. Indeksi definitsioonist on selge, et $|G/N| = \mathrm{ind}_G N$.

Tutvume mõningate näidetega normaaljagajaist.

Näide 1. Eespool tutvusime paarissubstitutsioonide alamrühmaga A_n rühmas $\mathfrak{S}_n$. Veendume nüüd selles, et tegemist on normaaljagajaga.

Võtame paaritu substitutsiooni $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 2 & 1 & 3 & 4 & \dots & n \end{pmatrix}$ ja moodustame orbiidi $A_n \cdot T$; selle «punktideks» on vaid paaritud substitutsioonid, kuna paaris- ja paaritu substitutsiooni korrutis on alati paaritu. Võtame nüüd suvalise elemendi $S \in \mathfrak{S}_n$. Kui S on paarissubstitutsioon, siis $S \in A_n$. Kui aga S on paaritu, siis $S \cdot T$ on paaris, ja kuna $S = (S \cdot T) \cdot T$, siis $S \in A_n \cdot T$. Me näeme, et

$$\mathfrak{S}_n = A_n + A_n \cdot T.$$

---

[4] Selle fakti tõestuse, vahendite poolest elementaarse, leiab lugeja raamatust А. Г. Курош, Лекции по общей алгебре, М. 1962, стр. 77—78.

[5] Kui lugeja on tutvunud tsüklilise rühmade «kirjelduse» ja omadustega (punkt 4), märkab ta kergesti, et ainsaiks kommutatiivseiks lihtsaiks rühmadeks on algarvulist järku tsüklilised rühmad. Burnside'i ülesande lahendamisest tuleb juttu punktis 8.

Seetõttu $\operatorname{ind}_{\mathfrak{S}_n} A_n = 2$. Osutub, et alamrühm indeksiga 2 on alati normaaljagaja. Tõesti, olgu mingis rühmas G alamrühma N indeksiks 2. Siis iga $a \overline{\in} N$ korral $G = N + aN = N + Na$, millest ilmselt järeldub $aN = Na$. Kuid see on samaväärne väitega «$N \lhd G$».

Näide 2. Kui G on kommutatiivne e. *Abeli rühm*, siis on tema iga alamrühm normaaljagajaks. See on selge otse normaaljagaja definitsioonist.

Näide 3. Igas rühmas G alamhulk

$$Z(G) = \{z \mid z \in G,\ zg = gz \text{ iga } g \in G \text{ korral}\},$$

mida *rühma tsentriks* nimetatakse, on normaaljagaja. Tõepoolest, suvaliste $z \in Z(G)$ ja $a \in G$, $g \in G$ korral

$$gzg^{-1} \cdot a = gg^{-1}za = eza = az = azgg^{-1} = a \cdot gzg^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow gzg^{-1} \in Z(G) \text{ m.o.t.t.}$$

Näide 4. Vaatleme suvalises rühmas G alamrühma G', mis «on moodustatud» elementide $g^{-1}h^{-1}gh$, $g \in G$, $h \in G$, poolt, s. t. alamrühma, mis koosneb kõigist elementidest kujuga $g^{-1}h^{-1}gh$, ja selliste elementide kõikvõimalikest lõplikest korrutistest. Niisugust alamrühma G' nimetatakse *rühma G kommutandiks.*

Alamrühm G' osutub normaaljagajaks rühmas G. Tõepoolest, on kerge näha, et rühma G kõigi siseautomorfismide σ_a korral $\sigma_a(G') \leqslant G'$. $G' \lhd G$ tuleneb nüüd definitsioonist.

Vahetute arvutustega on kerge kindlaks teha, et $(\mathfrak{S}_3)' = A_3$ ja $(\mathfrak{S}_4)' = A_4$. Varsti näeme, et $(\mathfrak{S}_n)' = A_n$ ka kõigi $n \geqslant 5$ korral. Selle fakti tõestamiseks tuleb meil enne tutvuda kahe abitulemusega, mis aga ka omaette võetuina aitavad selgitada kommutandi tähendust.

Esiteks, faktorrühm kommutandi järgi on Abeli rühm. Tõepoolest, olgu a, $b \in G$ suvalised. Siis

$$aG' \cdot bG' = abG' = ba(a^{-1}b^{-1}ab)G',$$

mis $a^{-1}b^{-1}ab \in G'$ tõttu võrdub $ba\,G' = bG' \cdot aG'$. Saadud seos $aG' \cdot bG' = bG' \cdot aG'$ näitab, et G/G' on Abeli rühm.

Teiseks, kommutant sisaldub rühma igas sellises normaaljagajas, mille järgi võetud faktorrühm on Abeli rühm. Tõestuseks olgu $N \lhd G$ selline, et G/N on Abeli rühm, s. o. kõigi a, $b \in G$ korral kehtib võrdus $aN \cdot bN = bN \cdot aN$. Sellest $abN = baN$, millest omakorda $a^{-1}b^{-1} \cdot abN = a^{-1}b^{-1} \cdot baN = N$. Seega, $a^{-1}b^{-1}ab \in N$. Et aga a, $b \in G$ olid suvalised, siis näitab see seos, et $G' \subseteq N$.

Tõestame nüüd, et $n \geqslant 5$ korral $(\mathfrak{S}_n)' = A_n$. Selleks paneme tähele, et $(\mathfrak{S}_n : A_n) = 2$, mistõttu $\mathfrak{S}_n/A_n$ on teist järku rühm. On kerge näha, et kõik teist järku rühmad on samasuguse ehitusega kui rühm $\{e, a \mid e \cdot e = e,\ e \cdot a = a \cdot e = a,\ a \cdot a = e\}$. See on aga Abeli rühm, mistõttu äsjatoodud teise abitulemuse kohaselt $(\mathfrak{S}_n)' \subseteq A_n$. Edasi, lugeja märkab, et vaid Abeli rühmas G kehtib seos $G' = (e)$. Et aga rühmad $\mathfrak{S}_n (n \geqslant 5)$ on mittekommutatiivsed, siis $(\mathfrak{S}_n)' \neq (e)$. Seosest $(\mathfrak{S}_n)' \lhd \mathfrak{S}_n$ ilmselt järeldub «nõrgem» seos $(\mathfrak{S}_n)' \lhd A_n$. Kuid A_n on lihtne rühm, millest $(\mathfrak{S}_n)' \neq (e)$ tõttu järeldubki vajalik $(\mathfrak{S}_n)' = A_n$. Väide on tõestatud.

3. Definitsioon. Olgu antud ühene funktsioon φ, mille määramispiirkonnaks on mingi rühma $(G_1, \cdot)$ kõigi elementide hulk; tema väärtusteks olgu rühma $(G_2, \circ)$ elemendid. Funktsiooni φ nimetame rühma G_1 *homomorfismiks* rühma G_2 (või ka rühma G_1 *esituseks* rühmas G_2), kui suvaliste $x, x' \in G_1$ korral kehtib seos

$$\varphi(x \cdot x') = \varphi(x) \circ \varphi(x').$$

Triviaalseks näiteks homomorfismist on rühmal G_1 konstantne funktsioon, mille väärtuseks on rühma G_2 ühikelement. Rühma G_1 nende elementide hulka, millel funktsiooni φ väärtuseks on rühma G_2 ühikelement e_2, nimetame *homomorfismi tuumaks*; tähistustes,

$$\operatorname{Ker} \varphi = \{n \mid n \in G_1, \ \varphi(n) = e_2\}.$$

See on normaaljagaja rühmas G_1, sest

$$\varphi(gng^{-1}) = \varphi(g) \circ \varphi(n) \circ \varphi(g^{-1}) = \varphi(g) \circ e_2 \circ \varphi(g)^{-1} =$$
$$= e_2 \Rightarrow gng^{-1} \in \operatorname{Ker} \varphi.$$

Kuna iga $N \lhd G$ korral on funktsioon $\varphi : G \to G/N$, $\varphi(g) = Ng$, homomorfism tuumaga N, näeme, et rühma normaaljagajad ja ainult nemad on selle rühma homomorfismide tuumadeks.

Kui funktsioon $\varphi : G_1 \to G_2$ korraldab veel ka üksühese vastavuse rühma G_1 ja väärtuste piirkonna $\operatorname{Im} \varphi = \varphi(G_1)$ vahel, nimetame teda *monomorfismiks*; sel korral $\operatorname{Ker} \varphi = (e_1)$. Kui $\operatorname{Im} \varphi = G_2$, s. t. kui väärtuste piirkonnaks on kogu rühm G_2, nimetame funktsiooni *epimorfismiks*. Kui homomorfism on korraga nii monomorfism kui epimorfism, siis kannab ta nimetust *isomorfism*. Rühmade G_1 ja G_2 isomorfismi tähistame $G_1 \cong G_2$. Lihtsaimaks näiteks on rühma G_1 «samasushomomorfism» iseendale, s. o. funktsioon $\varphi : G_1 \to G_2$, mis antakse valemiga $\varphi(g) = g$ kõigi $g \in G_1$ korral.

Kui $G_1 = G_2$, nimetatakse isomorfismi rühma G_1 *automorfismiks*, s. t. automorfism on rühma mingi isomorfism iseendaga. Märgime, et antud rühma G kõigi automorfismide hulk $\operatorname{Aut}(G)$ moodustab rühma — «kompositsiooniks» on automorfismide järjest rakendamine

$$\underbrace{G \xrightarrow{\sigma_1} G \xrightarrow{\sigma_2} G}_{\sigma_2 \cdot \sigma_1}$$

Rühmade $\mathfrak{S}_n (n \geqslant 3, \ n \neq 6)$ korral, näiteks, $\operatorname{Aut}(\mathfrak{S}_n) \cong \mathfrak{S}_n$; vastava teoreemi tõestas 1895. a. O. Hölder.

Lugeja veendus eespool, et iga $a \in G$ korral on homomorfism $\sigma_a : G \to G$, mis antakse valemiga $\sigma_a(g) = a^{-1}ga$, automorfism; rühma G sellise kujuga automorfisme me nimetasime tema siseautomorfismideks. Ilmselt on rühma G kõigi siseautomorfismide hulk alamrühmaks rühmas $\mathrm{Aut}(G)$.

Harjumiseks uute mõistetega tutvume veel mõnede näidetega.

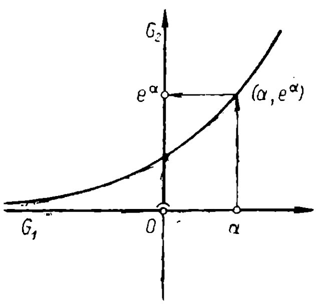
Näide 1. Võtame rühmaks G_1 kõigi reaalarvude aditiivse rühma $R^{(+)}$ ja rühmaks G_2 ühikringjoonel asuvate kompleksarvude multiplikatiivse rühma C°. Vaatleme funktsiooni φ, mis on antud valemiga

$$\varphi(a) = e^{2\pi i a} = \cos 2\pi a + i \sin 2\pi a.$$

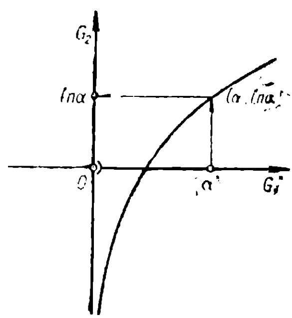
Kuna $\varphi(a+b) = e^{2\pi i(a+b)} = e^{2\pi i a} \cdot e^{2\pi i b} = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$, siis on tegemist homomorfismiga. Leiame tuuma. Definitsiooni kohaselt, $\mathrm{Ker}\,\varphi = \{a \mid a \in R,\ e^{2\pi i a} = 1\}$; seega $\mathrm{Ker}\,\varphi = Z$, s. o. ühtib täisarvude aditiivse rühmaga Z. Kuna ilmselt $\mathrm{Im}\,\varphi = C^{\circ}$, siis on tegemist epimorfismiga.

Näide 2. Olgu jällegi $G_1 = R^{(+)}$ ja rühmaks G_2 — positiivsete reaalarvude multiplikatiivne rühm R^*. Funktsioon $\varphi(\alpha) = e^{\alpha}$ määrab isomorfismi nende rühmade vahel (vt. joon. 2).

Näide 3. Ka «pöördfunktsioon» $\varphi = \ln : R^* \to R^{(+)}$ annab nende rühmade isomorfismi (vt. joon. 3).



Joonis 2.



Joonis 3.

Näide 4. «Loomulik sisestamine» $i : Z^{(+)} \to R^{(+)}$ on näide monomorfismist.

Näide 5. Vaatleme rühmana G_1 kõigi $\neq 0$ kompleksarvude multiplikatiivset rühma $C^{(\cdot)}$ ja rühmana G_2 — kõigi reaalarvuliste elementidega 2×2 regulaarmaatriksite rühma $GL(2, R)$. Funktsioon φ, mis antakse valemiga

$$\varphi(a+bi) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

on rühma $C^{(\cdot)}$ esituseks rühmas $GL(2, R)$. On kerge veenduda, et φ on monomorfism.

Olgu nüüd $\varphi: G_1 \to G_2$ suvaline homomorfism. Et $\operatorname{Ker} \varphi = N \lhd G_1$, siis võime moodustada faktorrühma G_1/N. Selle rühma võime võtta määramispiirkonnaks uuele funktsioonile $\hat{\varphi}: G_1/N \to \operatorname{Im} \varphi$, mille anname valemiga $\hat{\varphi}(Ng) = \varphi(g)$. Lihtne kontroll näitab, et $\hat{\varphi}$ on isomorfism. Seega, kehtib järgmine **teoreem homomorfismidest**: *funktsioon* $\hat{\varphi}$ *on isomorfism rühmade* $G_1/\operatorname{Ker} \varphi$ *ja* $\operatorname{Im} \varphi$ *vahel.*

4 Tutvume rühmade mõnede klassidega. *Abeli rühmadest* oli eespool juba juttu — nii nimetasime rühmi, milles algebraline operatsioon on kommutatiivne. Näiteks võivad olla multiplikatiivsed rühmad $Q^{(\cdot)}$, $R^{(\cdot)}$, $C^{(\cdot)}$, s. o. vastavad arvhulgad ilma nullita, kus kompositsiooniks on tavaline arvude korrutamine, ja aditiivsed rühmad $Q^{(+)}$, $R^{(+)}$, $C^{(+)}$, s. o. vastavad arvhulgad, kus algebraliseks operatsiooniks on tavaline arvude liitmine.

Tähtsa alamklassi nende rühmade seas moodustavad nn. *tsüklilised rühmad* — need on rühmad, mille kõiki elemente võib lugeda mingi ühe elemendi, nn. *moodustaja* erinevateks astmeteks (kui kompositsiooni nimetada «korrutamiseks») ehk kordseteks (kui kompositsioon on «liitmine»).

Näide 1. Vaatleme võrrandi $x^n - 1 = 0$ lahendeid, s. o. n-astme ühejuuri $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$. Ilmselt on iga kahe ühejuure korrutis jällegi ühejuur; samuti on seda ka pöördarv ühejuurele. Seega on tegemist rühmaga, mille elementideks on n-astme ühejuured, algebraliseks operatsiooniks aga tavaline kompleksarvude korrutamine. Kuna võrrandi $x^n - 1 = 0$ lahendid kujutavad ühikringjoone sisse joonestatud korrapärase n-nurga tippe, siis $\varepsilon_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}$, $k = 0, \ldots, n-1$. Moivre' valemite kohaselt $\varepsilon_1{}^k = \varepsilon_k$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, mis aga näitabki, et tegemist on lõpliku tsüklilise rühmaga: kõik elemendid ε_k on moodustaja ε_1 astmeteks.

Näide 2. Kõigi täisarvude aditiivne rühm $Z^{(+)}$ on tsükliline. Tõepoolest, tal on moodustaja 1, sest iga $n \in Z$ korral $n = n \cdot 1$.

Tsüklilise rühma iga alamrühm ja faktorrühm on jällegi tsüklilised. Esimese väite tõestuseks märgime, et alamrühma moodustajaks võib võtta kogu rühma moodustaja nende astmete seast, mis alamrühma kuuluvad, sellise, millel on vähim positiivne astendaja. Teise väite tõestuseks tuleb faktorrühma moodustajaks võtta orbiit, mis läbib kogu rühma moodustajat.

Rakendame nüüd neid üldisi märkusi täisarvude aditiivsele rühmale Z. Võttes suvalise $n \in Z$, $n \neq 0$ ja vaadeldes kõiki temaga jaguvate täisarvude hulka $N \subset Z$, saame alamrühma. On kerge näha, et kõigil alamrühmadel on selline kuju. Kuna Z on

Abeli rühm, siis on tema kõik alamrühmad ühtlasi ka normaaljagajaiks. Seepärast võime moodustada rühmad $Z/N = Z_n$, mis kui tsüklilise rühma faktorrühmad on tsüklilised. Sellega oleme leidnud rühma Z kõik alamrühmad, normaaljagajad ja faktorrühmad. Veelgi enam, oleme leidnud ka rühma Z kõik homomorfismid, kuna teoreem homomorfismidest lubab homomorfisme «taastada» nende tuumade järgi — neid aga teame kõiki, sest tuumade hulk langeb kokku Z normaaljagajate hulgaga.

Vaatleme nüüd suvalist tsüklilist rühma G_2 moodustajaga a ja anname funktsiooni φ, määramispiirkonnaga Z ja väärtustega rühmas G_2, valemi $\varphi(1) = a$ abil. Seega $\varphi(n) = a^n$. Kerge on veenduda $\mathrm{Im}\,\varphi = G_2$ kehtivuses, s. t. tegemist on epimorfismiga. Teoreem homomorfismidest annab

$$G_2 \cong Z/Ker\ \varphi.$$

Kuid Z faktorrühmad on meile kõik teada — nendeks on rühmad Z_n. Seega, mingi n korral $G_2 \cong Z_n$; juhul $\mathrm{Ker}\,\varphi = (0)$ saame $G_2 \cong Z$, ja tegemist on *lõpmatu tsüklilise rühmaga.*

Rühmade «abstraktses» teoorias, rühmateoorias, on vaatlusobjektiks mitte niivõrd «individuaalne» rühm kui klass omavahel isomorfseid rühmi. Selles mõttes oleme saanud tsükliliste rühmade kirjelduse täisarvude aditiivse rühma Z ja tema faktorrühmade Z_n termineis, s. o. meile «lähedasema» materjali baasil.

Kui n on algarv, on rühmad Z_n lihtsad — see on otsene järeldus Lagrange'i teoreemist. Tundes nüüd tsükliliste rühmade omadusi, veendub lugeja kergesti, et need on ainsad lihtsad Abeli rühmad.

5 Mis on «lahenduv» rühm?

Nägime[6], et iga rühmaga G võib siduda kõikvõimalike *kommutaatorite*, s. o. kujuga $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$, $a \in G$, $b \in G$, pooit moodustatud alamrühma G' — rühma G kommutandi. Viimane osutus normaaljagajaks rühmas G. Itereerides arutlust me saame alamrühma G' jaoks omakorda moodustada tema kommutandi G'', G'' jaoks — kommutandi G''' jne. Olgu $G \neq G'$. Vaadeldud iteratsioon annab siis kahaneva alamrühmade ahela, mille iga «lüli» on eelnevas normaaljagajaks:

$$(*) \quad G \trianglerighteq G' \trianglerighteq G'' \trianglerighteq \ldots \trianglerighteq G^{(i)} \ldots, \text{ kus } G^{(i)} = (G^{(i-1)})'.$$

D e f i n i t s i o o n. Rühma G nimetame *lahenduvaks*, kui see ahel (*) katkeb, s. t. leidub selline n, et $G^{(n)} = (e)$[7].

Näiteks on iga Abeli rühm G lahenduv[8], kuna sel korral $G' = (e)$, s. t. siin $n = 1$. Varsti kohtume ka lahenduvate mitte-

---

[6] Vt. näide 4 punktis 2.

[7] Siin «e» on rühma G ühikelement. Oma nimetuse on need rühmad saanud sellest, et parajasti selliste Galois' rühmadega algebralised võrrandid «lahenduvad radikaalides».

[8] Sealhulgas, iga tsükliline rühm on lahenduv.

kommutatiivsete rühmadega, mistõttu võib öelda, et lahenduvate rühmade klass on oluliselt laiem kui Abeli rühmade klass.

Lahenduvas rühmas G kehtib seos $G' \neq G$, s. t. kommutantsellistes rühmades ei saa ühtida rühma endaga. Tõepoolest, $G \neq (e)$ korral annab seos $G' = G$ seose $G^{(i)} = G \neq (e)$ kehtivuse kõigi i korral, mis oleks vastuolus rühma G lahenduvusega. Veelgi enam, ahelas (*) on lahenduva G korral kõik «lülid» $G^{(i)}$ erinevad — seosest $G^{(i)} = G^{(i+1)}$ järelduksid seosed $G^{(i)} = G^{(j)}$ kõigi $j \geqslant i$ korral. Märkame ka, et ahela (*) faktorid, s. o. faktorrühmad G/G', G'/G'', ... on Abeli rühmad. See järeldub meile tuntud faktist: iga rühma korral on tema faktorrühm kommutandi järgi Abeli rühm.

Lahenduva rühma alamrühmad ja faktorrühmad osutuvad ka lahenduvaiks.

Esimese väite tõestuseks piisab märkusest:

$$H \subset G \Rightarrow H' \subset G' \Rightarrow H'' \subset G'' \Rightarrow \ldots$$

$$\ldots \Rightarrow H^{(n)} \subset G^{(n)} = (e) \Rightarrow H^{(n)} = (e),$$ s. t. rühm H on lahenduv.

Et tõestada teist väidet, vaatleme epimorfismi $\varphi : G \to G/N$. Kuna iga kommutaator rühmas G/N on rühma G mingi kommutaatori kujutiseks, märkame, et φ indutseerib uue epimorfismi $\varphi' : G' \to (G/N)'$. Itereerides seda arutlust, saame epimorfismid $\varphi'' : G'' \to (G/N)''$, $\varphi''' : G''' \to (N/G)'''$, jne. Kuna $G^{(n)} = (e)$ ja $\varphi^{(n)}$ on epimorfism, siis ka $(G/N)^{(n)} = (N)$, m. o. t. t.

6 Lõplike rühmade korral antakse rühma lahenduvusele tavaliselt teine definitsioon — seda saab teha rühma «kompositsiooniahela» mõistet kasutades.

Tutvume algul ühe konkreetse olukorraga, et seda järgnevas kasutada üldiste arutluste näitena.

Vaatleme 6. järku tsüklilist rühma $G = \{e, a, a^2, a^3, a^4, a^5 \mid a^6 = e\}$. Hulgad $N_1 = \{e, a^3\}$ ja $N_2 = \{e, a^2, a^4\}$ on alamrühmad, kusjuures $N_1 \not\subset N_2$. Teisi «pärisalamrühmi»[9] pole: Lagrange'i teoreemi kohaselt peab alamrühma järk olema rühma järgu jagajaks. Arvu 6 jagajaiks on vaid 2 ja 3. Rühma G kommutatiivsusest järeldub, et N_1 ja N_2 on normaaljagajad temas. See annab kaks ahelat

$$G \trianglerighteq N_1 \trianglerighteq (e) \text{ ja } G \trianglerighteq N_2 \trianglerighteq (e).$$

Kerge on kontrollida, et $G/N_1 \cong N_2/(e) \cong N_2$ ja $N_1 \cong N_1/(e) \cong G/N_2$.

D e f i n i t s i o o n. Olgu G lõplik rühm. Alamrühmade kahanevat ahelat

$$(**) \qquad G = N_0 \supset N_1 \supset N_2 \supset \ldots \supset N_k = (e)$$

nimetatakse *kompositsiooniahelaks*, kui on täidetud järgmised kaks tingimust:

(1) kõigi $i = 0, \ldots, k-1$ korral on N_{i+1} normaaljagajaks rühmas N_i, ja

[9] s. o. ühikrühmast (e) ja rühmast G endast erinevaid,

(2) ühegi $i=0, \ldots, k-1$ korral ei leidu rühmas N_i sellist normaaljagajat M, et $N_{i+1} \subset M \subset N_i$, $M \neq N_{i+1}$, $M \neq N_i$.

Lugeja märkab kohe, et «näites» vaadeldud ahelad $G \supset N_1 \supset \supset (e)$ ja $G \supset N_2 \supset (e)$ on kompositsiooniahelad.

Igal lõplikul rühmal on kompositsiooniahelad. Sealjuures on Jordan-Hölderi teoreemi kohaselt[10] iga kaks kompositsiooniahelat ühesuguse pikkusega ja nende ahelate faktorite vahel saab korraldada sellise üksühese vastavuse, et vastavad faktorid oleksid isomorfsed rühmad; kõneldakse lõpliku rühma kompositsiooniahelate isomorfismist. Toodud teoreem lubab meil lõplikus rühmas tema iga kompositsiooniahelat vaadelda mingi ühe, «originaal»-kompositsiooniahela «koopiana». Seega, sisuliselt on lõplikul rühmal vaid üksainus kompositsiooniahel — see «originaal»; kõik teised on «originaali» «koopiad», s. o. temaga isomorfsed ahelad. «Originaaliks» võib sealjuures fikseerida rühma suvalise kompositsiooniahela.

Osutub, et lõplik rühm on lahenduv parajasti siis, kui tema kompositsiooniahela kõik faktorid on algarvulist järku tsüklilised rühmad. See ongi lahenduvuse teine definitsioon lõplike rühmade korral. Teda kasutades märkab lugeja kohe, et kui lõplik lahenduv rühm on lihtne, peab ta olema algarvulist järku tsükliline rühm; viimaste lahenduvus on meil teada.[11]

Lugeja märkab ka, et lahenduva rühma G järk $|G|$ on tema kompositsiooniahela faktorite järkude korrutis. Tõepoolest, Lagrange'i teoreemi korduv rakendamine ahela (**) korral annab

$$|G| = |G/N_1| \cdot |N_1| = |G/N_1| \cdot |N_1/N_2| \cdot |N_2| = \ldots$$
$$\ldots = |G/N_1| \cdot |N_1/N_2| \cdot |N_2/N_3| \cdot \ldots |N_k|,$$

m. o. t. t. Siinjuures võib faktorite järkudeks olevate algarvude seas olla võrdseid. Veel enam, nad võivad ka kõik olla võrdsed, s. o. järk $|G|$ on arv kujuga p^α, kus p — algarv. Lagrange'i teoreemi kohaselt peab rühma G järk jaguma tema iga alamrühma järguga. Kerkib huvitav küsimus Lagrange'i teoreemi «pöördhüpoteesi» õigsusest lahenduvate rühmade korral[12].

Osutub, et *lahenduvas rühmas G järguga $|G| = m \cdot n$, kus arvud m ja n on vastastikku lihtsad, leiduvad alamrühmad järkudega m ja n.* Selle fakti tõestamisel tuleks meil siseneda «tehnilisse tihnikusse», mis käesoleva väljaande veergudel on vaevalt otstarbekas. Väärib aga märkimist, et tegelikult on toodud fakt lahenduvaile rühmadele «iseloomulik», s. t. teda võib kasutada rühma lahenduvuse kriteeriumina.

Tutvume veel J. G. Thompsoni kahe kriteeriumiga, kuna neid

---

[10] Vt. G. Kangro. Kõrgem algebra II. Tln., 1950, lk. 286.
[11] ...aga on ka vahetu järeldus toodud teisest lahenduvuse definitsioonist.
[12] Vt. ka punkti 1.

saab sageli rühmade lahenduvuse või mittelahenduvuse kindlakstegemisel kergesti rakendada.[13]

I. Lõplik rühm on lahenduv parajasti siis, kui tema iga elemendipaari poolt moodustatud alamrühm on lahenduv.

II. Lõplik rühm on lahenduv parajasti siis, kui ta ei sisalda kolme sellist ühikust erinevat elementi, mille järgud on paarikaupa vastastikku lihtsad ja mille korrutis on võrdne rühma ühikuga.

7. Järgnev teoreem annab seeria näiteid mittelahenduvatest rühmadest. Ta mängib ka olulist osa Ruffini-Abeli teoreemi tõestamisel.

Teoreem. *Täielikud sümmeetrilised rühmad* $\mathfrak{S}_n$ $(n \geqslant 5)$ *ei ole lahenduvad. Rühmad* $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_3$, $\mathfrak{S}_4$ *on lahenduvad.*

Tõestus. Kuna lahenduva rühma iga alamrühm peab samuti olema lahenduv, siis piisab teoreemi esimese väite tõestuseks leida rühmades $\mathfrak{S}_n$ $(n \geqslant 5)$ mittelahenduvad alamrühmad. Seda teha pole raske: alamrühmad $A_n \subset \mathfrak{S}_n$ sobivad! Rühmad A_n on lihtsad, aga nende järk $|A_n| = \frac{n!}{2}$ pole algarv — siit nende mittelahenduvus. Tõepoolest, eelmises punktis nägime, et lõplike rühmade seas on lihtsaiks lahenduvaiks vaid algarvulist järku tsüklilised rühmad. Teoreemi esimene väide on tõestatud.

Vaatleme rühma $\mathfrak{S}_2$. Et $|\mathfrak{S}_2| = 2! = 2$, siis $\mathfrak{S}_2$ on algarvulist järku tsükliline rühm ja seega lahenduv.

Rühma $\mathfrak{S}_3$ lahenduvuse tõestamiseks märgime, et A_3 on lahenduv, sest $|A_3| = \frac{1}{2}\,3! = 3$ tõttu on tegemist algarvulist järku tsüklilise rühmaga. Lisaks on $(\mathfrak{S}_3 : A_3) = 2$ algarv, mistõttu $(e) \subset \subset A_3 \subset \mathfrak{S}_3$ on kompositsiooniahel. Viimase faktorid on ilmselt algarvulist järku tsüklilised rühmad. Rühma $\mathfrak{S}_3$ lahenduvus järeldub nüüd definitsioonist.

Rühma $\mathfrak{S}_4$ ehitus on tunduvalt keerulisem. Alamrühm A_4 koosneb elementidest:

$$e = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix},\ a_1 = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix},\ a_2 = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix},\ a_3 = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}$$

$$b_1 = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix},\ b_2 = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix},\ b_3 = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix},\ b_4 = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix}$$

$$b_5 = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix},\ b_6 = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix},\ b_7 = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{pmatrix},\ b_8 = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix},$$

Vahetute arvutustega on lihtne kontrollida, et hulk $K_4 = \{e, a_1, a_2, a_3\}$ on kommutatiivne alamrühm. Veelgi enam, arvutanud 24 korrutist $b_i^{-1}a_jb_i$, kus $i = 1, 2, \ldots, 8$; $j = 1, 2, 3$, veendume, et kõik nad kuuluvad hulka K_4. See aga tähendab, et K_4

---

[13] Vt. Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 74, 1968.

on normaaljagajaks rühmas A_4. Võttes $N_4 = \{e, a_1\}$ ja moodustades ahela

$$(e) \subset N_4 \subset K_4 \subset A_4 \subset \mathfrak{S}_4,$$

näeme, et tegemist on kompositsiooniahelaga, mille kõik faktorid on algarvulist järku tsüklilised rühmad. Sellest järeldub, et $\mathfrak{S}_4$ on lahenduv. Teoreem on tõestatud.

Tõestuses esinevat rühma K_4 nimetatakse Kleini 4-rühmaks. On kerge kontrollida, et temas kehtivad ka seosed $a_1^2 = a_2^2 = a_3^2 = e$, mistõttu $\{e, a_1\}$, $\{e, a_2\}$, $\{e, a_3\}$ on alamrühmadeks. Näeme, et $K_4 = \{e, a_1\} \cup \{e, a_2\} \cup \{e, a_3\}$, s. t. Kleini 4-rühm on kolme pärisalamrühma ühendina esitatav. S. Haber ja A. Rosenfeld (1959) tõestasid, et K_4 on «tüüpiline näide» sellise omadusega rühmadest: K_4 ja veel need rühmad, mis on temale epimorfselt kujutatavad, on kolme pärisalamrühma ühendina esitatavad. Teisi sellise omadusega rühmi pole. Võib kerkida küsimus selliste rühmade «kirjeldamisest», mis on esitatavad kahe oma pärisalamrühma ühendina. Lihtne vastuväiteline arutlus näitab, et selliseid rühmi pole. Küsimus rühmadest, mis on «kaetavad» n pärisalamrühmaga, $n \geqslant 4$, pole lihtne.

8. Viiekümnendail aastail leiti, et lõplike rühmade teooria asub mingis «tardumuse» seisundis; kuuldus hääli, et ta on end ammendanud. Põhjuseks polnud kaugeltki lahendamata probleemide puudumine — küsimus kõigi lõplike, lihtsate rühmade kirjeldusest ootab lahendust tänini! Pigem vastupidi: nagu arvuteoorias, nii ka rühmateoorias on hoopis kergem anda küsimusi kui neile vastata. Ei saanud ka väita, et polnud meetodeid: Hölderi, Jordani, Frobeniuse, Molieni, Burnside'i ja Schuri käes olid suurepärased meetodid. Seetõttu arvati, et neile meetodeile kättesaadav küsimuste ring on täiesti ammendatud, võib olla vähehuvitavate eranditega.

Möödunud aastakümne algul toimus lõplike rühmade teoorias murrang: W. Feit ja J. G. Thompson tõestasid [14], et

kõik paaritut järku lõplikud rühmad on lahenduvad!

Teoreemi tõestus tugineb P. Halli, G. Higmani, H. Wielandti, R. Braueri, M. Suzuki jt. ideedele, tulemustele ja teooriaile. Kahtlemata avaldab see teoreem koos oma monumentaalse tõestusega sügavat mõju rühmateooria arengule[15].

Järgnevalt vaatleme kaht selle teoreemi arvukatest järeldustest.

---

[14] W. Feit, J. G. Thompson. Solvability of Groups of Odd Order, Pacific Journal of Mathematics. Vol. 13 (1963), pp. 775—1029.

[15] Käesoleva kogumiku ilmumise momendiks on lugejale arvatavasti juba kättesaadav venekeelne tõlge raamatust <W. Feit. Characters of Finite Groups>, ja tal avaneb võimalus tutvuda suurepärases esituses lõplike rühmade teooria «tänapäevaga».

Alustame küsimusest: kui rühm G pole algarvulist järku tsükliline, siis mida võib öelda «suhteliselt suure» järguga alamrühmade H olemasolu kohta rühmas G? Täpsemalt, vajab tõestamist järgmine hüpotees: alati leidub selline alamrühm $H \subseteq G$, et $|H| > \sqrt[3]{|G|}$. Paarisarvulist järku rühmade G korral õnnestus 1955. a. R. Braueril ja K. Fowler'il see hüpotees tõestada. Jäi juht, kus $|G|$ on paaritu; seda «ületada» ei õnnestunud.

Thompson-Feiti teoreemi tundmine muudab selle ülesande üpris lihtsaks ja seega ka mõistetavaks käesoleva artikli raames. Tõepoolest, selle teoreemi kohaselt on kõik paaritut järku rühmad lahenduvad. Kuid igas lõplikus lahenduvas rühmas G, mille järk on ühest suurem mitte-algarv, leidub alamrühm järguga $\geqslant \sqrt{|G|}$.

Tõestus.

Lahutame arvu $|G| = g$ algarvuliste tegurite korrutiseks $g = p_1^{\alpha_1} \ldots p_s^{\alpha_s}$. Vaatleme eraldi kaht juhtu.

Esiteks, kui $s = 1$, siis $g = p^\alpha$. Et sealjuures g peab olema ühest suurem mittealgarv, siis $\alpha \geqslant 2$. Sylowi esimese teoreemi põhjal on rühmal G siis alamrühm H järguga $p^{\alpha-1}$. Kuna $\alpha \geqslant 2$ tõttu kehtib võrratus $p^{\alpha-1} \geqslant \sqrt{g}$, siis olemegi sobiva alamrühma H leidnud.

Teiseks, olgu $s > 1$. Siis saame hulga $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_s\}$ jagada kaheks mittetühjaks ja mittelõikuvaks (kõik arvud p_i on omavahel erinevad!) alamhulgaks P' ja P'', s. t. meil on seosed

$$P = P' \cup P'' \quad \text{ja} \quad P' \cap P'' = \varnothing.$$

Olgu $m = \prod\limits_{p_i \in P'} p_i^{\alpha_i}$ ja $n = \prod\limits_{p_j \in P''} p_j^{\alpha_j}$. Seosest $P' \cap P'' \varnothing$ järeldub, et arvud m ja n on vastastikku lihtsad. On võimalikud alajuhud:

(i) $m > n$, ja
(ii) $n > m$.

Rakendame nüüd lahenduva rühma «iseloomulikku omadust» (vt. punktis 6).

Juhul (i) ta garanteerib, et rühmas G leidub alamrühma H järku m. Kuna $m > n$, siis $g = mn < m^2$, millest $|H| = m > \sqrt{g}$. Sobiv alamrühm on leitud.

Juhul (ii) on arutlused analoogilised: tuleb vaid asendada neis $m \to n$ ja $n \to m$.

Väide on tõestatud.

Et $|H| \geqslant \sqrt{|G|}$ korral on täidetud ka nõue $|H| > \sqrt[3]{|G|}$, siis on kõnesolnud hüpotees tõestatud kõigi lõplike rühmade korral.

Toome veel ühe Thompson-Feiti teoreemi rakenduse.

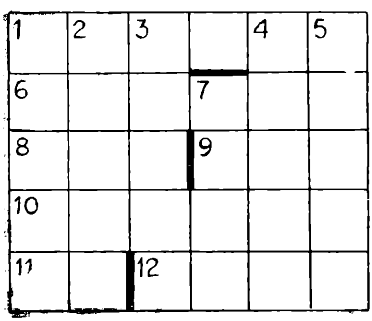
Punktis 2 oli juttu sellisest W. Burnside'i ülesandest: kas leiduvad paaritut järku mittekommutatiivsed lihtsad rühmad? Vastus sellele küsimusele on Thompson-Feiti teoreemi otseseks järelduseks: oletades sellise rühma olemasolu, näeme teoreemist, et ta peab olema lahenduv. Samal ajal aga koosneb lõplike lahenduvate lihtsate rühmade klass vaid algarvulist järku tsüklilistest, seega vaid kommutatiivsetest rühmadest. Saadud vastuolu näitab, et vastus on eitav.

Tänini on lahendamata [16] kaks huvitavat (ja rasket) küsimust.

1) On hästi teada, et $p^{\alpha} \cdot q^{\beta}$ järku rühmad, kus p, q on algarvud, on lahenduvad. See on Burnside'i teoreem. Siiani on aga teadmata nende lõplike rühmade ehitus, mille järk jagub täpselt kolme erineva algarvuga. Ei teata ka, millised on kõik sellise omadusega lihtsad rühmad, veelgi enam, kas neid on lõplik arv. Seda, et siin on tegemist hästi püstitatud probleemiga, peaks näitama järgmine J. Thompsoni tulemus: kui lihtsa rühma järgul on kuju $p^{\alpha} \cdot q^{\beta} \cdot r^{\gamma}$, kus p, g, r on erinevad algarvud (näiteks $p < q < r$), siis $p = 2$, $q = 3$, $r = 5$, 7, 13 või 17.

2) Tõestada, et lõplik rühm G, mis «lubab» automorfismi ainsa püsipunktiga selle rühma ühikus, on lahenduv. Selle hüpoteesi tõeväärsuse kinnituseks on fakt: kui kõnesolnud automorfismi (kui rühma $\mathrm{Aut}(G)$ elemendi) järk on $= 2^n$, n — naturaalarv, siis on rühm G paaritut järku; G lahenduvus tuleneb nüüd Thompson-Feiti teoreemist. Rühma G lõplikkuse nõue on oluline. Tõepoolest leiduvad lõpmatud mittelahenduvad «lineaarselt järjestatud» rühmad G. Iga selline rühm aga lubab automorfismi $\sigma : G \rightarrow G$, $\sigma(g) = g^{-1}$, mille ainsaks püsipunktiks on rühma G ühik.

[16] ...autorile teadaolevail andmeil.



RISTARVUD

Paremale: 1. viimased kolm on kolme võrra rohkem kui esimesed kolm kolmekordselt; 6. kahekordistamiseks esimesed kaks lõppu; 8. sümmeetriline täisruut; 9. ristsumma on kolm; 10. esimese ja teise, kolmanda ja neljanda ning viienda ja kuuenda summad ühesugused; 11. oma ristsumma kordne; 12. ühe algarvu kuup pluss teise ruut.

Alla: 1. neljas aste; 2. kahe aste; 3. kolme aste tagurpidi; 4. sisaldab kaks korda numbrit, mida teised ei sisalda; 5. seitsmes alla seitsmendsüsteemis; 7. viies alla kümnendsüsteemis.

DIFERENTSIAALVÕRRANDI LAHENDI OLEMASOLU JA ÜHESUS

T. Sõrmus

Diferentsiaalvõrrandi lahendi olemasolust ja ühesusest kui diferentsiaalvõrrandite teooria ühest põhiküsimusest rääkisime üldsõnaliselt «Matemaatika ja kaasaja» 15. vihikus. Nagu seal, nii piirdume ka siin harilike diferentsiaalvõrranditega.

Lahendi olemasolu ja ühesuse küsimus kõrgemat järku tuletise suhtes ilmutatud diferentsiaalvõrrandi jaoks püstitatakse kaasajal järgmiselt.

Missugused $n+1$ muutuja funktsiooni $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ omadused tagavad võrrandi

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-)}) \qquad (1)$$

niisuguse lahendi olemasolu, mis rahuldab algtingimusi

$$y^{(i)}(x_0) = y_0^{(i)} \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1)? \qquad (2)$$

Missugustel tingimustel on ülesande[1] $\{(1), (2)\}$ lahend ühene?

Samasugune probleem mõnevõrra komplitseeritumal kujul on sõnastatav ka üldise n-järku diferentsiaalvõrrandi

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$$

ja diferentsiaalvõrrandite süsteemi jaoks. Analoogiline probleem eksisteerib samuti rajatingimustega või mingite teiste lisatingimustega ülesannete puhul.

Käesoleva kirjutise eesmärgiks on olemasolu probleemi arenguloo valgustamine diferentsiaalvõrrandite teooria ajaloost pärinevate näidete varal. Meie ajaloolise ülevaate esimeses punktis tutvustatakse lähemalt lahendi olemasolu ja ühesuse teoreeme, teises jälgitakse lahendi olemasolu probleemi arengut ja kolmandas võetakse valgusvihku algtingimustega ülesande lahendi ühesuse küsimus.

---

[1] Ülesande $\{(1), (2)\}$ all mõistame edaspidi ülesannet: leida võrrandile (1) algtingimusi (2) rahuldav lahend. Niisugust ülesannet nimetatakse lühidalt ka algtingimustega ülesandeks.

1. Diferentsiaalvõrrandi lahendi olemasolu ja ühesuse mõiste

Lähtume diferentsiaalvõrrandite teooria põhikursuses tõestatavast tuletise suhtes ilmutatud esimest järku diferentsiaalvõrrandi lahendi olemasolu ja ühesuse teoreemist[2].

T e o r e e m 1. Olgu funktsioon $f(x, y)$ koos $f_y(x, y)$ pidev kinnises tõkestatud piirkonnas G. Siis leidub piirkonna G iga seesmise punkti $A = (x_0, y_0)$ korral niisugune vahemik $J_{x_0} = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, kus $\delta > 0$ küllaldaselt väike reaalarv, millel *eksisteerib parajasti üks algtingimust*

$$y(x_0) = y_0 \tag{3}$$

rahuldav diferentsiaalvõrrandi

$$y' = f(x, y) \tag{4}$$

lahend.

Siin kindlustavad funktsiooni $f(x, y)$ kohta esitatud eeldused punkti x_0 *niisuguse ümbruse* $J_{x_0} = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ja selles määratud *niisuguse funktsiooni* $y(x)$ (s. t. *võrrandi* (4) *lahendi*) *olemasolu*, et iga $x \in J_{x_0}$ koos vastavate väärtustega $y(x)$ ja $y'(x)$ rahuldavad võrrandit (4) samaselt. Funktsioonist $y(x)$, $x \in J_{x_0}$ informeerib meid teoreem 1 veel selles, et $y(x)$ rahuldab tingimust $y(x_0) = y_0$ (s. t. funktsiooni $y(x)$ graafik läbib punkti A puutuja tõusuga $f(x_0, y_0)$) ja on piirkonnas J_{x_0} pidevalt diferentseeruv. Lõppeks, meie *teoreem kindlustab parajasti ühe niisuguse funktsiooni olemasolu*, s. t. teoreemiga 1 *on tagatud ülesande* $\{(3), (4)\}$ *lahendi ühesus punkti* x_0 ümbruses J_{x_0}.

Viimast mõistet täpsustame järgnevalt. Olgu punktihulk H funktsiooni $f(x, y)$ määramispiirkonna G niisugune alamhulk, et iga punkti $P = (\xi, \eta) \in H$ suhtes $f(x, y)$ rahuldab samasuguseid eeldusi nagu punkti A suhtes teoreemis 1. Siis on võrrandil (4) ka iga $P \in H$ korral vastavas ümbruses $J_\xi = (\xi - \delta(\xi), \xi + \delta(\xi))$[3] parajasti üks lahend $y(x)$, mis samuti on vahemikus J_ξ pidevalt diferentseeruv ja rahuldab tingimust

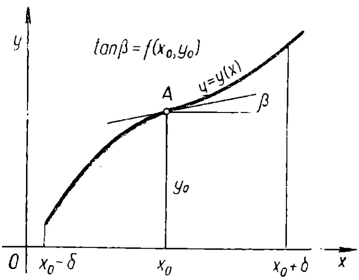
$$y(\xi) = \eta. \tag{5}$$

Selles mõttes on võrrandil (4) üldiselt lõpmata palju lahendeid, kuid *iga punkti* $P \in H$ korral *parajasti üks niisugune, mis rahuldab tingimust* (5). Viimases mõttes tulebki mõista ülesande $\{(4), (3)\}$ või $\{(4), (5)\}$ lahendi ühesust. Joonisel 1 on kujutatud ülesande $\{(4), (3)\}$ üheselt määratud lahend vahemikus J_{x_0}, sellele vastupidine näide on kujutatud joonisel 2. Joonisel 3 on kujutatud piirkonnas H ülesannete $\{(4), y(x_i) = y_i\}$ $(i = 1, 2, 3)$ kolm üheselt määratud lahendit.

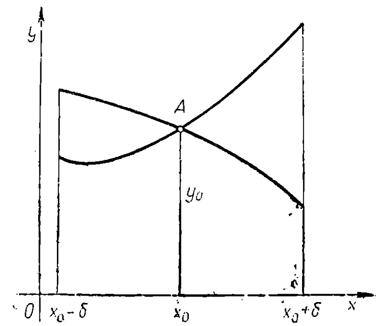
---

[2] Vt. näiteks Р. С. Г у т е р и А. Р. Я м п о л ь с к и й. Дифференциальные уравнения, гл. I, § 7.

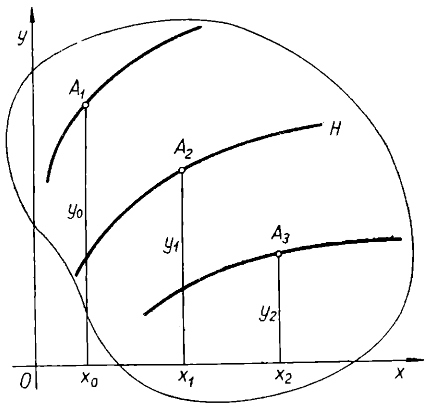
[3] $\delta(\xi)$ on üldiselt iga punkti ξ korral erinev positiivne reaalarv.



Joonis 1.



Joonis 2.



Joonis 3.

Muu informatsiooni saamine teoreemiga 1 eksisteerivaks kuulutatud ülesande $\{(4), (3)\}$ lahendi kohta (näit. missugune on funktsiooni $y(x)$ avaldis, kuidas seda funktsiooni leida võrrandist (4), kus asuvad $y(x)$ ekstreemumid, nullkohad jne.) ei kuulu diferentsiaalvõrrandi lahendi olemasolu ja ühesuse teoreemi kompetentsi.

Ülesandel

$$y' = x \ln (y+1), \quad y(1) = 0 \tag{6}$$

näiteks eksisteerib vahemikus $(1-\delta, 1+\delta)$, kus $\delta > 0$ küllaldaselt väike reaalarv, parajasti üks algtingimust $y(1) = 0$ rahuldav lahend, sest $f(x, y) = x \ln(y+1)$ rahuldab teoreemi 1 eeldusi piirkonnas[4] $G_1 = \{(x, y) : x \in (-\infty, \infty), \ y \in (-1, \infty)\}$, kuhu kuulub punkt $(1, 0)$. Kuid võrrandi (6) lahendit kujul $y = y(x)$

---

[4] Niisuguses piirkonnas G_1 leidub alati kinnine tõkestatud piirkond $G \ni (1, 0)$.

meil ei õnnestu leida; samuti jätab teoreem 1 lahtiseks küsimuse avaldise $y(x)$ leidmise võimalikkusest.

Ülesande $\{(1), (2)\}$ lahendi olemasolu ja ühesuse mõiste ühtib põhilises ülesande $\{(4), (3)\}$ jaoks ülal esitatud vastava mõistega. Viimane võimaldab selgitada nüüd ka järgmise informatsiooni — *algtingimustega ülesandel* $\{(1), (2)\}$ *eksisteerib parajasti üks lahend* — sisu. Nimetatud informatsioon tähendab järgmist:

1° on kindlustatud võrrandi (1) lahendi olemasolu teatud vahemikus $J_{x_0} = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ (s. t. niisuguse funktsiooni $y(x)$ olemasolu, mis on vahemikus J_{x_0} vajalik arv kordi diferentseeruv ja rahuldab selles vahemikus võrrandit (1) samaselt);

2° leidub võrrandi (1) niisugune lahend, mis rahuldab algtingimusi (2);

3° ülesandel $\{(1), (2)\}$ on parajasti üks lahend.

Ülesande $\{(1), (2)\}$ lahendamisega ja lahendiga seoses olevad kõik muud küsimused (näit. võimalus avaldada lahendit kvadratuurides[5] või ligikaudu[6] mingi meetodiga, lahendi nullkohtade arv, nende sagedus jt.) ei kuulu vaadeldavasse informatsiooni, kuid nad võivad olla teada või selgitatavad.

Ülesande $\{(1), (2)\}$ lahendi olemasolu ja ühesuse teoreemid lahendavad käesoleva artikli sissejuhatuses püstitatud probleemi mitmesugustel erinevatel eeldustel funktsiooni $f(x, y, y', \ldots$ $\ldots, y^{(n-1)})$ kohta. Eespool rääkisime diferentsiaalvõrrandi lahendi olemasolust ja ühesusest kui diferentsiaalvõrrandite teooria ühest terviklikust küsimusest. Viimane on ajaloolise arengu vältel kujunenud tervikuks kahest iseseisvast probleemküsimusest — ülesande $\{(1), (2)\}$ lahendi olemasolu küsimusest (vt. ülal punktid 1° ja 2°) ja sama ülesande lahendi ühesuse küsimusest (vt. ülal punkt 3°). Vastavates olemasolu teoreemides ja ühesuse teoreemides seatakse omakorda võrrandit (1) määravale funktsioonile niisugused võimalikult avarad eeldused, mis tagavad võrrandi lahendi olemasolu esimesel juhul või lahendi ühesuse teisel. Näiteks esitame veel järgmised teoreemid esimest järku diferentsiaalvõrrandi jaoks.

T e o r e e m 2. Olgu funktsioon $f(x, y)$ pidev kinnises tõkestatud piirkonnas G. Piirkonna G iga seesmise punkti (x_0, y_0) korral leidub niisugune vahemik $J_{x_0} = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, kus $\delta > 0$ on küllaldaselt väike reaalarv, millel *eksisteerib vähemalt üks algtingimust (3) rahuldav* võrrandi (4) *lahend.*

T e o r e e m 3. Olgu funktsioon $f_y(x, y)$ tõkestatud piirkonnas G, kus G on tõkestatud ja muutuja y suhtes kumer[7] piirkond.

---

[5] Vt. Matemaatika ja kaasaeg, XV, lk. 23.

[6] Vt. samas, lk. 25.

[7] Öeldakse, et piirkond G on kumer y suhtes, kui y-teljega paralleelne lõik AB asub piirkonnas G, niipea kui $A, B \in G$.

Siis *saab piirkonna G iga seesmist punkti* (x_0, y_0) *läbida mitte enam kui üks* võrrandi (4) *integraalkõver.*

Esimene neist teoreemidest kindlustab nii lahendi olemasolu kui ka ühesuse. Teine teoreem, milles funktsioonilt $f(x, y)$ on vähemat nõutud, garanteerib võrrandi (4) lahendi olemasolu, kuid lahtiseks jääb lahendi ühesus. Viimases teoreemis on küll kindlustatud lahendi ühesus, kuid võrrandi (4) lahendi olemasolu teoreem ei garanteeri.

Oletame nüüd, et vaatleme mingit konkreetset ülesannet $\{(1), (2)\}$. Kas vaadeldav *ülesanne on lahenduv*? Niisugusele *küsimusele on lahendi olemasolu* mitmesugused *teoreemid võimelised* positiivselt *vastama* vaid *juhul, kui* diferentsiaalvõrrandit määravad *funktsioonid* nagu $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$, $f(x, y)$ või teised, *rahuldavad* mõne *olemasolu teoreemi eeldusi. Vastupidisel juhul ei tarvitse* veel *vastus eitav olla,* kuigi olemasoluteoreemid pole võimelised sellele vastama. Põhjus: *olemasoluteoreemid* 1) *annavad* vaid *piisavad tingimused lahendi olemasoluks* ja *ühesuseks* (vt. teoreemid 1—3) ja 2) on rakendatavad vaid niisugustele ülesannetele, mis rahuldavad mõne olemasolu teoreemi eeldusi.

2. Lahendi olemasolu küsimuse uurimise ajalugu

Diferentsiaalvõrrandite teooria ajaloost ilmneb, et kaasajal esmase ja printsipiaalse tähtsusega küsimus diferentsiaalvõrrandi lahendi olemasolust (eelmise punkti tähenduses) puudub pikemat aega üldse diferentsiaalvõrrandite teoorias. Selle arengu esimesel perioodil, s. o. 17. sajandi teisel ja 18. sajandi esimesel poolel tegeldakse peamiselt ja eriti pingsalt võrrandite lahendusmeetodite väljatöötamise ning nende pideva täiustamisega. Seejuures otsitakse sihikindlalt niisuguseid võrrandite klasse, mille üldlahendid [8] (edaspidi ütleme «lahendid») avalduvad elementaarfunktsioonides [9] või kvadratuuride kaudu viimastest.

Peatselt tekivad siin ka esimesed kokkupuuted lahendi olemasoluga. Kuid kas ja missugused on erinevused küsimuse seades endas ning selle asendis teoorias? On lahendi olemasolu kohe üldist ja problemaatilist laadi või juhuslik ning praktilise kallakuga? Nendele ja teistele analoogilistele küsimustele kujundavad vastuseid järgmised ajaloolise väärtusega näited.

1° Diferentsiaalvõrrandite teooria arengu esimesel perioodil omistatakse erilist tähtsust *integreeruvusteguri* [10] *meetodile,* mida rakendatakse nii esimest kui ka kõrgemat järku võrrandite lahendamiseks. Mõni sõna selle meetodi selgituseks.

---

[8] Vt. Matemaatika ja kaasaeg, XV, lk. 18.
[9] Vt. G. Kangro. Matemaatiline analüüs I. Tln., 1965, lk. 162.
[10] Vt. Matemaatika ja kaasaeg, XV, lk. 24.

Võrrandit

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0 \qquad (7)$$

nimetatakse *täisdiferentsiaalidega võrrandiks*, kui selle vasak pool on mingi kahe muutuja funktsiooni $U(x, y)$ täisdiferentsiaal, nii et $dU(x, y) = P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$. Diferentsiaalvõrrandite teooria põhikursuses näidatakse [11], et täisdiferentsiaalidega võrrandi (7) üldlahend avaldub seosega $U(x, y) = C$, kus C on suvaline konstant. Kui (7) ei ole täisdiferentsiaalidega võrrand, saab teda mõningatel erijuhtudel selliseks teisendada. Selleks korrutatakse võrrandit (7) integreeruvusteguriga ehk niisuguse kahe või ühe muutuja funktsiooniga, mis muudab võrrandi (7) täisdiferentsiaalidega võrrandiks.

Nii on funktsioon $\mu(x) = \frac{1}{x^2}$ võrrandi

$$(x^2 - y)\,dx + (x^2y^2 + x)\,dy = 0$$

integreeruvusteguriks, millega korrutatult ta esitub kujul

$$dx + y^2dy = -\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2}.$$

Saadud võrrandi mõlemal pool seisavad täisdiferentsiaalid $d\left(x + \frac{y^3}{3}\right)$ ja $d\left(\frac{y}{x}\right)$ vastavalt ning $U(x, y)$ meie näite puhul on $x + \frac{y^3}{3} + \frac{y}{x}$. Sellepärast avaldub vaadeldava diferentsiaalvõrrandi üldlahend seosega

$$x + \frac{y^3}{3} + \frac{y}{x} = C.$$

Integreeruvusteguri meetodit uurisid ajavahemikus 1691—1772 korduvalt, puhuti vaheaegadega ja seoses mitmesuguste võrranditega Johann Bernoulli ja tema poeg Nikolaus, L. Euler, A. C. Clairaut', A. J. Lexell, J. L. Lagrange, M. A. Condorcet jt.

Uurimused integreeruvusteguri meetodist jõudsid haripunkti 18. sajandi keskel, mil kujunes tsentraalseks ühelt poolt *integreeruvusteguri olemasolu* mingil võrrandil või võrrandite klassil ja teiselt poolt niisuguse võrrandite klassi leidmine, millele *antud struktuuriga funktsioon oleks integreeruvusteguriks*. Suurimad teened nendes küsimustes on L. Euleril, kelle fundamentaalsed uurimused vaadeldavast meetodist lõppesid integreeruvustegurite ja (nende rakendatavuse mõttes) vastavate võrrandite klassifikatsiooniga ning avaldati trükis aastail 1735, 1740, 1763 ja 1773.

Miks omistati integreeruvusteguri meetodile rõhutatult suurt tähelepanu? Peamiseks põhjuseks tuleks siin lugeda meetodi ole-

---

[11] Vt. käesoleva artikli viide 2, seal I ptk. § 5.

muse lihtsust — niipea kui on teada diferentsiaalvõrrandi integreeruvustegur, taandub võrrandi lahendamine kvadratuuridele. Teiseks põhjuseks on meetodi näiliselt lai rakendusväli.

Missugune on *olemasolu küsimuste* asend selles meetodis? *Antud meetodi puhul* tekib situatsioon, kus *lahendi olemasolu selgitamine jääb integreeruvusteguri olemasolu küsimuste varju.* Niisugust olukorda õigustab meetod ise: on teatud võrrandi või võrrandite klassi jaoks integreeruvusteguri olemasolu selgunud, langeb küsimus lahendi olemasolust automaatselt ära, sest lahend on ju niisugusel juhul praktiliselt teada.

Esitatud näite puhul võime konstateerida *kaudset kokkupuudet diferentsiaalvõrrandi lahendi olemasolu* ja integreeruvusteguri olemasolu vahel. Lahendi olemasolust kaasaegses mõttes veel ei räägita.

2° Küllaldaselt lähedale vaadeldavale probleemile kaasaegse tähenduse mõttes jõuab L. Euler üldise esimest järku diferentsiaalvõrrandi (7) integreeruvusteguri olemasolu uurides. Euleri «Integraalarvutuse» esimeses köites (1768. a.) seisab eeliskohal järgmine teoreem [12].

T e o r e e m 4. Iga diferentsiaalvõrrandi (7) jaoks, mis pole vahetult integreeruv [13], leidub niisugune funktsioon [14], millega korrutatult muutub võrrand (7) integreeruvaks [15].

Kuigi Euleri teoreem selgitab just võrrandi (7) lahendi olemasolu, jäetakse ta oma looja ja hilisemate uurijate poolt integreeruvusteguri olemasolu konstateerivaks teoreemiks.

Tegelikult jääb teoreem 4 Euleril tõestamata, sest oma tõestuses postuleerib autor sisuliselt võrrandi (7) üldlahendi olemasolu. Sellega tõestab Euler tegelikult niisuguse teoreemi, milles järeldatakse võrrandi (7) integreeruvusteguri olemasolu, eeldades lahendi olemasolu. Korrektselt tõestab Euleri teoreemi J. D'Alembert 1768. aastal.

Teoreemi 4 näol *kohtume* me *esimese katsega tõestada ühe diferentsiaalvõrrandite klassi jaoks lahendi olemasolu integreeruvusteguri olemasolu kaudu.* Lahendi olemasolu probleem punktis 1 esitatud mõttes jääb siingi veel sõnastamata.

3° Võrrand

$$y' + \varphi(x)y + \psi(x)y^2 = \chi(x), \tag{8}$$

kus $\varphi(x)$, $\psi(x)$ ja $\chi(x)$ on ühises vahemikus määratud funktsioonid, kannab Itaalia krahvi J. Riccati nime. Selle võrrandi uurimislugu, ulatudes 1715. aastast kaasaega, on omaette huvitav ja talletab diferentsiaalvõrrandite teooria põhiprobleemide arengulugu miniatuuris.

---

[12] Teoreemi sõnastus on kohandatud kaasaegseks.
[13] S. t. ei taandu eralduvate muutujatega integreeruvaks võrrandiks.
[14] S. t. integreeruvustegur.
[15] S. t. kvadratuurides avalduva lahendiga võrrandiks.

Võrrandist (8) ja selle erijuhust

$$y' + ay^2 = bx^\alpha, \tag{9}$$

kus a, b ja α on konstandid, kujuneb 18. sajandi nimekaimate matemaatikute — vendade Nikolaus ja Johann ning viimase poja Daniel Bernoulli, samuti ka L. Euleri ja J. D'Alembert'i huviobjekt.

Riccatil õnnestub üheaegselt D. Bernoulliga selgitada, missuguste a, b ja α väärtuste korral võrrand (9) taandub eralduvate muutujatega võrrandiks ja sellega lahendub kvadratuurides. Euler aga leiab 1732/33. aastal võrrandile (9) lahendi reaksarenduse kujul suvaliste reaalarvuliste a, b ja α väärtuste korral. Sedapuhku on siis võrrandi (9) lahendi olemasolu näidatud reaksarenduse kujul eksisteeriva lahendi kaudu. Viimane ei tarvitse olla elementaarfunktsioon. Lisame siinkohal, et lõpliku tulemuseni võrrandi (9) lahenduvusest elementaarfunktsioonides jõuab J. Liouville alles 1841. aastal. Ta näitab, missuguste a, b ja α väärtuste korral avaldub võrrandi (9) lahend kvadratuurides elementaarfunktsioonidest, ja tõestab, et ülejäänud juhtudel niisugune lahend võrrandil puudub.

Üldisema Riccati võrrandi (8) jaoks suudab Euler näidata järgmist. Kui on teada võrrandi (8) mingi erilahend, näiteks y^*, siis taandub see võrrand muutujate asendusega $y = y^* - \frac{1}{z}$ uue muutuja z suhtes esimest järku lineaarseks [16] diferentsiaalvõrrandiks. Võrrandi (8) üldlahend avaldub siis kahe kvadratuuri abil. Hiljem täiendab Euler saadud tulemust järgmisega. Võrrandi (8) üldlahend avaldub ühe kvadratuuriga, kui on teada selle võrrandi mingisugused kaks erilahendit.

Niisiis on lahendi olemasolu küsimustes Riccati võrrandi puhul sihid ja eesmärgid juba selgemalt seatud. Siin lausa *selgitatakse võrrandi* (9) *lahendi olemasolu tingimusi*. Tõsi küll, esialgu veel niisuguseid, mis tagavad võrrandi lahenduvuse kas kvadratuurides (Liouville'i tulemus) või reaksarenduse kaudu (Euleri tulemus).

4° Võrrandi

$$P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz = 0 \tag{10}$$

lahendi [17] olemasolust räägib Euler kaasajale juba hoopis tuttavamas mõttes. Selle võrrandi lahendi olemasolu küsimustega puutub Euler kokku 1755. aastal, üldistades sellele võrrandile oma täisdiferentsiaalidele taandamise meetodit kui ühte võrrandi (7)

[16] Vt. Matemaatika ja kaasaeg, XV, lk. 22.

[17] Selle artikli ulatuses mõistame võrrandi (10) lahendina mistahes diferentseeruvat kahe muutuja niisugust funktsiooni, mis teatud tasandilises piirkonnas rahuldab võrrandit (10).

lahendusmeetodit. Oma «Diferentsiaalarvutuses»[18] avaldab Euler selgelt järgmise nõude: enne võrrandi (10) lahendamist peab kontrollima selle integreeruvuse tingimuste täidetust, teiste sõnadega, lahendi olemasolu. Oma mõtte põhjendab autor nii [19]: «Oleks imelik otsida mingile diferentsiaalvõrrandile (10) lahendit, s. o. võrrandit $\varphi(x, y, z) = 0$, mis määrab diferentsiaalvõrrandi lahendi ilmutamata kujul, kui niisugust võrrandit ei eksisteeri.»

Esitatud näide kinnitab, et vähemalt *aastal 1755* jõuti olukorrani, mil *päevakorda kerkib* (esialgu mõne konkreetse) *diferentsiaalvõrrandi lahendi olemasolu selgitamise vajadus.*

Eespool esitatu võime kokku võtta järgnevalt.

Diferentsiaalvõrrandi lahendi olemasolu küsimus ühel või teisel kujul seisab päevakorras diferentsiaalvõrrandite teooria kõige varajasemast perioodist alates. Ent kaasaja ja 18. sajandi küsimise seades ilmneb kvalitatiivne erinevus. Lahendi olemasolu kaasajal (vt. punkt 1) on diferentsiaalvõrrandite teooria printsipiaalne ja võimalikult üldiselt püstitatud teooria küsimus. 17. ja 18. sajandil oli ta praktilise kallakuga ja üksikute võrrandite ning võrrandite klassidega seotud. Pealegi esineb ta põhiliselt võrrandite lahendusmeetodite koostisosana ja sellepärast kerkib selgepiirilisemalt esile juhtudel, kui võrrandi lahendamine on seotud raskustega. Küsimus üldlahendi[20] olemasolust üldjuhul jääb 17. ja 18. sajandil püstitamata. Sellise olukorra põhjuseks on teadlasi pikemat aega vallanud veendumus, et igal diferentsiaalvõrrandil eksisteerib üldlahend (meenuta Euleri viga teoreemi 4 tõestuses).

Ent ajapikku selgub — elementaarfunktsioonides või nendest võetud kvadratuurides integreeruv võrrandite klass on piiratud ja esineb pigem erandjuhtudel kui üldiselt. Teiselt poolt koguneb lahendamata võrrandite arsenali võrrandeid, mille puhul pikemate uurimuste tulemusena selgub, et neil puudub kvadratuurides avalduv lahend. Kerkib küsimus niisuguste võrrandite lahendi olemasolust üldjuhul (meenutame taas Riccati diferentsiaalvõrrandit).

Nii möödub enam kui sajandi pikkune paradokse koguv ja kujunenud veendumusi ümberlükkav ajavahemik, enne kui lahendi olemasolu probleem esitatakse teooriale esimeses artiklis antud sõnastuses.

3. Lahendi ühesuse mõiste kujunemine

Diferentsiaalvõrrandite teooria rakendused füüsikas, astronoomias, keemias jt. teadustes toovad peamiselt algtingimustega või

---

[18] Vt. Л. Эйлер. Дифференциальное исчисление. Перевод с латынского М. Я. Выгодского., М.—Л., 1949, стр. 201.

[19] Euleri sõnastus on kohandatud kaasaegseks.

[20] Kuni 19. sajandini nimetati diferentsiaalvõrrandi üldlahendiks niisugust lahendit, mis sisaldas kõiki erilahendeid.

teiste lisatingimustega ülesannete[21] juurde. Niisuguste ülesannete esinemist diferentsiaalvõrrandite teoorias täheldatakse juba selle arengu algperioodil. Ent algtingimusega ülesannet ei peeta siis iseseisvaks, üldlahendi leidmisest sõltumatuks ülesandeks. Pikka aega ollakse veendunud võrrandi üldlahendis esinevate konstantide niisugusest määramise võimalusest, mis annab parajasti vajaliku erilahendi. Teiste sõnadega, arvatakse, et üldlahendist on igal juhul võimalik leida niisugune erilahend, mis vastab diferentsiaalvõrrandiga määratud füüsikalise, mehhaanikalise või mis tahes teise nähtuse lähteolekule või seisule. Seda veendumust kujundab esialgselt ka praktika.

Järgmised tsitaadid diferentsiaalvõrrandite teooria nimekate viljelejate töödest olgu kinnituseks öeldule.

L. Euler[22] (1786. a.): «Me juba rääkisime, et *kõikide* niisuguste *ülesannete puhul,* mille *lahendamine toob diferentsiaalvõrrandi juurde, peab integreerimisele kaasnev konstant olema määratav* ülesandele vastavatest tingimustest, *nii* et *alati vajatakse ainult erilahendit.*»

V. A. Steklov[23] (1927. a.) väidab, et ainult erandjuhtudel ei õnnestu määrata algtingimustele vastavat erilahendit üldlahendist ja ütleb sel puhul järgmist: «Tõenäoliselt pole ühelgi mehhaanikalise päritoluga diferentsiaalvõrrandil iseäraseid lahendeid[24] olemas, kuigi see olulise filosoofilise tähendusega väide, nii palju kui mulle teada on, pole käesoleva ajani üldiselt tõestatud.»

Sellepärast ei uuritagi algtingimustega ülesande lahendi olemasolu iseseisvalt, ta jääb kuni 19. sajandi lõpuni kõrvalküsimuseks üldisemate seas.

Diferentsiaalvõrrandi lahendi olemasolu küsimustest jääb algtingimustega ülesande ühesus varjatuks hoopis pikemaks ajaks. Lahendi ühesusele vasturääkivaid näiteid muidugi esineb ka teooria arengu algperioodil, kuid lahendi ühesust peetakse sedavõrd loomulikuks, et *lahendid, milles ilmneb ühesuse kadu, heidetakse lihtsalt kõrvale.* Niisugune teguviis on seletatav ühelt poolt 17. ja 18. sajandi matemaatika stiiliga, teiselt poolt üldlahendi väära mõiste kasutamisega ja lõppeks stimuleerivad seda ka vastavad näited rakendustes. Pikemat aega aheldab teadlasi lahendi ühesuses veendumus «analüüsi» meetodite võimsusest. Sellest juhituna püütakse kaitsta «analüüsi» etteheidetest selle mittetäielike meetodite kohta (siin võimetusest garanteerida algtingimustega ülesandele lahendi ühesust) ja jõutakse vääradele tulemustele.

---

[21] Selle punkti ulatuses piirdume algtingimustega ülesannetega.

[22] Vt. L. Euler. Opera omnia. Lipsial et Berolini, ser. I, t. XI, 1913, lk. 346—347.

[23] Vt. B. A. Стеклов. Основы теории интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М.—Л., 1927, стр. 51.

[24] Nimelt iseäraste lahendite esinemisel võibki tekkida olukord, et algtingimuste põhjal võib erilahendi leidmisega tekkida raskusi.

Esitame mõned niisugustest näidetest.

1758. aastal otsis Euler lahendust järgmisele ülesandele.

Leida niisugune joonte pere, mille kõik puutujad jäävad antud punktist samale kaugusele a.

Otsitava joone $y = y(x)$ diferentsiaalvõrrandiks on

$$(x^2 - a^2)(y')^2 - 2yy'x + y^2 = a^2, \qquad (11)$$

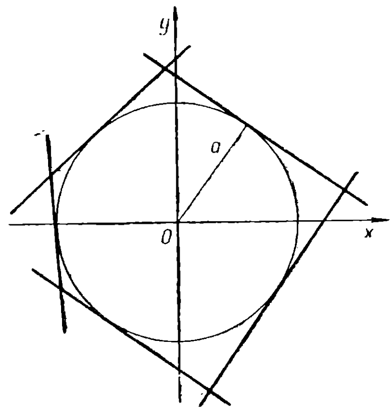
üldlahendiks aga

$$y = \frac{C}{2}(a + x) + \frac{1}{2C}(a - x). \qquad (12)$$

Leitud joonte peret (12) (sirgete peret) käsitleb ta võrrandi üldintegraalina (*tolle aja üldlahendi mõiste kohaselt peab* (12) *sisaldama* võrrandi (11) *kõiki lahendeid!*). Arusaadavalt ka ringjoon

$$x^2 + y^2 = a^2 \qquad (13)$$

on nii diferentsiaalvõrrandi (11) kui ka püstitatud ülesande lahendiks, kuid 1) ringjoon ei sisaldu peres (12) ja 2) ringjoone igas punktis läheb kaduma lahendi ühesus. Sellepärast viskab Euler ringjoone (13) ülesande lahendite hulgast välja, põhjendades oma teguviisi järgmiselt. Võrrandi (11) lahend (12) on «integraal, mis võetuna kogu tema üldisuses sisaldab ainult sirgeid, nii et nimetatud ringjoon on probleemi lahendusest täielikult välja jäetud».[25]



Joonis 4.

L. Euleri «Mehhaanikas» aastast 1736 leidub üksikuid punkti dünaamikaga seotud ülesandeid, kus autor selgelt viitab oma veendumuste kohaselt paradoksaalsele olukorrale — reaalse probleemiga määratud algtingimustega ülesanne ei lahendu üheselt. Mõningate niisuguste ülesannete lähema analüüsi puhul, kus algtingimustega ülesandel on kas lõpmata palju lahendeid või kaks erinevat, soovitab Euler ühesuse taastamiseks esimesel juhul probleemi täpsustada, teisel aga piirdub mehhaanikalise tõlgendusega kummalegi lahendile. Selgitamata jääb seejuures kõikjal küsimuse analüütiline ja geomeetriline külg.

On arusaadav, et niisuguste eriliste integraalide (Euler nimetab neid lihtsalt «suurusteks» ja mitte integraalideks) väljajätmine erinevate probleemide lahendamisel tekitas õpetlases lõpuks sügavaid kahtlusi. Nende ajendil kerkib uus probleem: kuidas saab

---

[25] Vt. L. Euler. Mém. de l'Acad. des sciences. Berlin, 1750, p. 232.

eritleda diferentsiaalvõrrandi harilikke erilahendeid niisugustest isesugustest «suurustest». Nimetatud küsimust käsitlevates uurimustes viitab Euler korduvalt püstitatud ülesande tähtsusele, raskusele ja võimalusele teha tõsiseid vigu selle lahendamisel. Sel puhul ütleb Euler (Vt. eespool viide 22, seal lk. 357—358): «... me peame eriti tähelepanelikult jälgima seda, et me lõplikku «suurust», mis rahuldab võrrandit, ei peaks ekslikult erilahendiks. Kuna me eralduvate muutujatega võrrandite puhul jõudsime selles küsimuses täieliku selguseni, kavatseme üksikasjalikult uurida, kuidas vältida nimetatud viga suvaliste diferentsiaalvõrrandite korral.»

Huvitav on märkida, et erilahendi eristamise kriteeriumi aluseks on Euleril sama idee, millest lähtutakse paljudes kaasaja ühesusteoreemide tõestustes. Ja ometi lahendi ühesusest veel ei räägita. Ei leita jälgi niisugusest mõistest ka Euleri töödes, kuigi ühesuse olemus peaks Eulerile täiesti selge olema.

Kindlama seisukoha võtab Euleri isesuguste «suuruste» suhtes D'Alembert juba 1750. aastal. Ta kinnitab, et *diferentsiaalvõrranditel võib esineda lahendeid väljaspool üldlahendit* ning *neid tuleb arvestada* kui täisõiguslikke lahendeid. Eespool kirjeldatud kahtlused ja paradoksid suunavad teadlasi otsima geomeetrilist seletust eksisteerivatele isesugustele olukordadele lahendi ühesuse kao puhul.

Esimesed sammud lahendi ühesuse küsimuste geomeetrilise tõlgenduse leidmisel astub D. Bernoulli 18. sajandi lõpul. Viimane, uurides lineaarse diferentsiaalvõrrandi integraalkõverate kulgu, näitab, et need moodustavad niisuguse kõverate pere, mille puhul tasandi iga punkti läbib parajasti üks kõver perest. Kuigi see on esimeseks geomeetriliseks tõlgenduseks lahendi ühesusele, ei räägita sellest veel täieliku printsipiaalsusega 19. sajandi alguseski.

Alles Lagrange, uurinud oma eelkäijate Euleri, Clairant'i, D'Alembert'i jt. seisukohti lahendi ühesuse küsimustes, konstateerib 1776., 1779. ja 1801. aastal korduvalt: *diferentsiaalvõrranditel võivad olla niisugused lahendid,* mille *igas punktis läheb kaduma lahendi ühesus.* Neid lahendeid hakkab Lagrange nimetama *iseärasteks lahenditeks* ja selgitab nende analüütilise ning geomeetrilise tähenduse. Sellega saavad seletuse ka Euleri «paradoksid». Võrrandi (11) puhul on ringjoon (13) kui integraalkõverate pere (12) mähisjoon selle võrrandi iseärane lahend.

Lagrange'i uurimused näitavad lahendi ühesuse küsimuse selgitamise vajalikkust.

Nii võrsub diferentsiaalvõrrandite teoorias uus — lahendi olemasolu ja ühesuse küsimusi uuriv suund. A. Cauchy tulemused sellel alal loovad diferentsiaalvõrrandite teooriale rangelt põhjendatud alused.

MÕNDA FUNKTSIONAALANALÜÜSIST II

G. Vainikko

Olgu E ja F mingid hulgad. Kui on antud eeskiri, mis seab hulga E igale elemendile x vastavusse hulga F mingi kindla elemendi y, siis öeldakse, et on defineeritud operaator, mis toimib hulgast E hulka F. Seega on mingi operaator f määratletud siis, kui oleme iga elemendi $x \in E$ jaoks teatud viisil ära näidanud, milline element $y = f(x) \in F$ seatakse talle vastavusse. Kasutatud tähistustes väljendabki täht f seda eeskirja. Kui tahame rõhutada, et operaator f toimib hulgast E hulka F, siis kirjutame $f: E \rightarrow F$, kuigi mõnikord kasutame sel puhul ka sõnu: operaator f on määratud hulgal E ja tema väärtused kuuluvad hulka F.

Keskkooli matemaatikas defineeritakse analoogiliselt funktsiooni mõiste. Erinevus funktsiooni ja operaatori mõiste vahel seisneb selles, et esimesel juhul on E ja F mingid arvude hulgad, teisel juhul aga mistahes hulgad (hulga elementideks ei pruugi olla arvud). Seega on operaatori mõiste funktsiooni mõiste üldistus. See üldistus on nii vahetu, et mõnikord isegi kasutatakse sõna «operaator» asemel sõna «funktsioon». Sageli kasutatakse ka sõna «teisendus». Kõiki neid kolme terminit võib lugeda samaväärseteks (kuigi igaühel neist ehk ongi oma varjund). Me kasutame edaspidi terminit «funktsioon» vaid tavalises mõttes, s. t. funktsioon on operaator mingist reaalarvude hulgast reaalarvude hulka. Operaatorit $f: E \rightarrow R$, mis toimib suvalisest hulgast E reaalarvude hulka R, nimetatakse funktsionaaliks.

Pidevad operaatorid

Teatavasti nimetatakse funktsiooni $f: R \rightarrow R$ pidevaks punktis x_0, kui f väärtus ja piirväärtus punktis x_0 on võrdsed: $f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$. Teiste sõnadega, funktsioon f on pidev punktis x_0, kui mistahes arvujada x_n koondumine piirväärtuseks x_0 (lühidalt, $x_n \rightarrow x_0$) toob kaasa koondumise $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$.

Seda definitsiooni saab üle kanda operaatorile $f: E \rightarrow F$ siis, kui hulkades E ja F on defineeritud koondumise mõiste. Käesoleva kirjutise I osas [1] me juba andsime koondumise mõiste meetrilistes

[1] Vt. Matemaatika ja kaasaeg, XVI, lk. 3—19.

ja normeeritud ruumides (viimased olid meetriliste ruumide erijuhuks), millele toetudes pole raske ka pidevuse definitsiooni ümber sõnastada.

Definitsioon. *Operaatorit f, mis toimib meetrilisest ruumist E meetrilisse ruumi F, nimetatakse pidevaks punktis $x_0 \in E$, kui koondumine $x_n \xrightarrow{E} x_0$ toob endaga kaasa koondumise $f(x_n) \xrightarrow{F} f(x_0)$.*

Selgitame siin kasutatud tähiseid. Meil on vaatluse all korraga kaks meetrilist ruumi E ja F. Kui x, $x' \in E$, siis $f(x)$, $f(x') \in F$. Kummaski ruumis on defineeritud elementidevaheline kaugus

$$\varrho_E(x, x') \text{ — kaugus } x, x' \in E \text{ vahel,}$$
$$\varrho_F(y, y') \text{ — kaugus } y, y' \in F \text{ vahel.}$$

Tähis $x_n \xrightarrow{E} x_0$ tähendab järgmist: (ruumi E elementidest moodustatud) jada $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ koondub $n \to \infty$ korral ruumis E elemendiks $x_0 \in E$, s. t. $\varrho_E(x_n, x_0) \to 0$. Analoogiliselt, $f(x_n) \xrightarrow{F} f(x_0)$ tähendab, et $\varrho_E(f(x_n), f(x_0)) \to 0$.

Operaatorit $f: E \to F$ nimetatakse pidevaks, kui ta on pidev ruumi E igas punktis.

Ülesanne 12. Olgu antud m funktsiooni

$$\eta_k = f_k(\xi_1, \ldots, \xi_n) \quad (k = 1, \ldots, m)$$

n argumendist $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Defineerime operaatori $f: R_n \to R_m$, mis igale vektorile $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in R_n$ seab vastavusse vektori $y = (\eta_1, \ldots, \eta_m) \in R_m$ komponentidega $\eta_k = f_k(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ $(k = 1, \ldots, m)$. Näidata, et operaator f on pidev punktis $x_0 = (\xi_1^0, \ldots, \xi_n^0)$ siis, kui funktsioonid $f_k(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ $(k = 1, \ldots, m)$ on pidevad selles punktis.

Ülesanne 13. Olgu antud pidev funktsioon $K(t, s, u)$ kolmest argumendist t, s, u. Defineerime operaatori $f: c[a, b] \to C[a, b]$, mis igale funktsioonile $x = x(t) \in C[a, b]$ seab vastavusse funktsiooni

$$y(t) = \int_a^b K(t, s, x(s))\,ds.$$

Näidata, et operaator f on pidev.

Lineaarsed operaatorid

Olgu E ja F vektorruumid. Operaatorit $f: E \to F$ nimetatakse lineaarseks, kui iga x, $x' \in E$ ja skalaari λ korral on kehtivad järgmised võrdused:

1° $f(x + x') = f(x) + f(x')$ (operaatori f aditiivsus);

2° $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ (operaatori f homogeensus).

Vaatleme lihtsaimat juhtu, kui $E = F = R_1$. Siis on operaatoriteks $f : R_1 \to R_1$ (ühe argumendi) funktsioonid. Operaator $f : R_1 \to R_1$ on lineaarne parajasti siis, kui $f(x) = ax$, kus a on mingi konstant. Operaator $g(x) = ax + b$ pole lineaarne, kui $b \neq 0$, sest ta pole ei aditiivne ega homogeenne. Niisiis esitab lineaarne funktsioon $y = ax + b$ lineaarset operaatorit ainult sel juhul, kui $b = 0$, s. t. kui sirge $y = ax + b$ kulgeb läbi koordinaatide alguse.

Lineaarseid operaatoreid tähistatakse tavaliselt suurte ladina tähtedega. Kui $A : E \to F$ on lineaarne operaator, siis $A(x)$ asemel kirjutatakse tavaliselt Ax (sulud jäetakse ära).

Ülesanne 14. Olgu antud maatriks (arvude tabel)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Defineerime operaatori $A : R_n \to R_m$, mis igale vektorile $x = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in R_n$ seab vastavusse vektori $y = (\eta_1, \dots, \eta_n) \in R_m$ komponentidega

$$\eta_k = a_{k1}\xi_1 + a_{k2}\xi_2 + \dots + a_{kn}\xi_n \quad (k = 1, \dots, m).$$

Näidata, et operaator A on lineaarne.

Ülesanne 15. Olgu antud pidev funktsioon $K(t, s)$ kahest argumendist t ja s. Defineerime operaatori $A : C[a, b] \to C[a, b]$, mis igale funktsioonile $x \in C[a, b]$ seab vastavusse funktsiooni

$$y(t) = \int_b^a K(t, s)x(s)ds.$$

Näidata, et operaator B on lineaarne.

Lineaarne operaator seab nullelemendile vastavusse nullelemendi. Tõepoolest, olgu $A : E \to F$ lineaarne, O_E ja O_F — vektorruumide E ja F nullelemendid. Kuna iga $x \in E$, $y \in F$ korral $O \cdot x = O_E$, $O \cdot y = O_F$, siis A homogeensuse tõttu $AO_E = A(O \cdot x) = O_F$, m.o.t.t.

Lineaarse operaaatori pidevus ja tõkestatus

Olgu E ja F nüüd normeeritud ruumid. Kuna normeeritud ruum on korraga nii meetriline ruum kui ka vektorruum, siis on mõtet rääkida pidevatest lineaarsetest operaatoritest $A : E \to F$. Lineaarsetel operaatoritel on järgmine huvitav omadus: kui $A : E \to F$ on pidev nullpunktis, siis ta on pidev (igas punktis $x \in E$). Tõepoolest, kui $x_n \xrightarrow{E} x$, siis $x_n - x \xrightarrow{E} O_E$, pidevuse tõttu nullpunktis $A(x_n - x) \xrightarrow{F} AO_E = O_F$; kasutades A lineaarsust, saame $Ax_n - Ax \xrightarrow{E} O_F$ ehk $Ax_n \xrightarrow{F} Ax$, mis tõestabki A pidevuse suvalises punktis $x \in E$.

Lineaarset operaatorit $A : E \to F$ nimetatakse tõkestatuks, kui leidub selline konstant c, et[2]

$$\|Ax\| \leqslant c\|x\| \text{ iga } x \in E \text{ korral.} \qquad (1)$$

Vähimat c väärtust, mille korral viimane võrratus veel kehtib, nimetatakse operaatori A normiks ja tähistatakse $\|A\|$.

Teoreem. *Lineaarne operaator $A : E \to F$ on pidev siis ja ainult siis, kui ta on tõkestatud.*

Piisavuse tõestus. Olgu A tõkestatud, s. t. kehtib (1). Pidevuse näitamiseks piisab pidevuse kontrollimisest nullpunktis. Kui $x_n \xrightarrow{E} O_E$, s. t. kui $\|x_n\| \to 0$, siis (1) tõttu ka $\|Ax_n\| \to 0$, ehk $Ax_n \to O_F$, m.o.t.t.

Tarvilikkuse tõestus. Olgu A pidev, peame näitama, et ta on tõkestatud. Oletame väitevastaselt, et A ei ole tõkestatud: kui suure arvu c me ette ka ei vali, vähemalt ühe elemendi $x \in E$ korral $\|Ax\| > c\,\|x\|$. Võtame $c = n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ja olgu $x_n \in E$ selline, et $\|Ax_n\| > n\,\|x_n\|$. Moodustame elemendid $x'_n = \frac{x_n}{n\|x_n\|}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Siis $Ax'_n = \frac{1}{n\|x_n\|} Ax_n$ ning normi homogeensuse tõttu

$$\|x'_n\| = \frac{1}{n\,\|x_n\|}\,\|x_n\| = \frac{1}{n} \to 0$$

$$\|Ax'_n\| = \frac{1}{n\,\|x_n\|}\,\|Ax_n\| > \frac{1}{n\,\|x_n\|}\,n\,\|x_n\| = 1,$$

s. t. jada x'_n koondub nullelemendiks, jada Ax'_n aga mitte. See on vastuolus A pidevusega nullpunktis. Vastuolu tekkis meie väitevastasest oletusest ning teoreem on tõestatud.

Ülesanne 16. Näidata, et ülesandes 14 defineeritud operaator $A : R_n \to R_m$ on tõkestatud (seega ka pidev).

Ülesanne 17. Näidata, et ülesandes 15 defineeritud operaator $A : C[a, b] \to C[a, b]$ on tõkestatud (seega ka pidev).

Koonduvad read normeeritud ruumides

Olgu x_k $(k = 1, 2, \ldots)$ normeeritud ruumi E elemendid. Rida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ nimetatakse koonduvaks, kui osasummade jada $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ $(n = 1, 2, \ldots)$ koondub ruumis E; osasummade jada piirväärtust x

[2] Normi ruumides E ja F tähistame ühtemoodi sümboliga $\|\;\|$. Tuleb silmas pidada, et $x \in E$, $Ax \in F$, seega $\|x\|$ ja $\|Ax\|$ tähendavad norme vastavalt ruumides E ja F.

nimetatakse rea summaks ning kirjutatakse $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$. Rida $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ nimetatakse absoluutselt koonduvaks, kui koondub positiivne arvurida $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$.

Kui normeeritud ruum E on täielik (s. t. kui E on Banachi ruum), siis rea absoluutsest koondumisest järeldub selle rea koondumine. Tõepoolest, koondugu rida $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ absoluutselt: $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \infty$. Veendume, et rea $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ osasummade jada $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ on Cauchy jada, s. t. $m, n \to \infty$ korral $\|s_m - s_n\| \to 0$. Olgu konkreetsuse mõttes $m > n$. Siis

$$s_m - s_n = \sum_{k=1}^{m} x_k - \sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=n+1}^{m} x_k$$

ja

$$\|s_m - s_n\| = \|\sum_{k=n+1}^{m} x_k\| \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} \|x_k\| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \|x_k\|.$$

Kuna eelduse kohaselt $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \infty$, siis jääkrida $\sum_{k=n+1}^{\infty} \|x_k\|$ koondub $n \to \infty$ korral nulliks. Normi $\|s_m - s_n\|$ hinnangust järeldame nüüd, et $m, n \to \infty$ korral ka $\|s_m - s_n\| \to 0$. Seega on jada s_n Cauchy jada. Ruumi E täielikkuse tõttu koondub iga Cauchy jada ruumis E selle ruumi mingiks elemendiks. Osasummade jada s_n koondumine aga tähendabki definitsiooni kohaselt, et rida $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ koondub.

Ülesanne 18. Koondugu rida $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ normeeritud ruumis E ning olgu $A : E \to F$ pidev lineaarne operaator. Näidata, et siis rida $\sum_{k=1}^{\infty} Ax_k$ koondub (normeeritud) ruumis F ning $A(\sum_{k=1}^{\infty} x_k) = \sum_{k=1}^{\infty} Ax_k$.

Poolnormid ja nende pidevus

Olgu E normeeritud ruum. Operaatorit (funktsionaali) $p : E \to R_1$ nimetatakse poolnormiks, kui ta rahuldab järgmisi tingimusi:

1° $p(x) \geqslant 0$ iga $x \in E$ korral;

2° $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ iga $x \in E$ ja skalaari λ korral;

3° $p(x+x') \leqslant p(x) + p(x')$ iga $x, x' \in E$ korral.

Need tingimused on analoogilised normi aksioomidega. Erinevus on vaid esimeses tingimuses: on lubatud, et $p(x) = 0$ ka mingi $x \neq 0$ korral, samal ajal kui normi esimene aksioom nõudis, et $\|x\| = 0$ siis ja ainult siis, kui $x = 0$. Seetõttu on norm $q(x) = \|x\|$ ühtlasi ka poolnorm, mistahes poolnorm $p(x)$ aga ei pruugi normiks olla.

Poolnormi p nimetatakse tõkestatuks, kui leidub selline konstant c, et

$$p(x) \leqslant c\|x\| \text{ iga } x \in E \text{ korral.}$$

Ülesanne 19. Olgu $p: E \to R_1$ poolnorm. Näidata, et

$$|p(x) - p(x')| \leqslant p(x-x') \text{ iga } x, x' \in E \text{ korral.}$$

Järgmise kolme ülesande lahendamisel on võimalik kasutada arutlusi, mis on analoogilised eespool lineaarsete operaatorite käsitlemisel toodutega.

Ülesanne 20. Olgu $p: E \to R_1$ poolnorm. Näidata, et $p(O) = 0$.

Ülesanne 21. Näidata, et poolnorm on pidev siis ja ainult siis, kui ta on pidev nullpunktis.

Ülesanne 22. Näidata, et poolnorm on pidev siis ja ainult siis, kui ta on tõkestatud.

Ülesanne 23. Olgu $p: E \to R_1$ poolnorm. Näidata, et

$$p\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} p(x_k).$$

Märgime, et analoogiline võrratus on koonduvate ridade $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ jaoks üldiselt ei kehti (nagu peagi selgub, on vastava võrratuse kehtimine seotud poolnormi pidevuse või mittepidevusega).

Kergesti kontrollitava tingimuse poolnormi pidevuseks andis hiljuti Voroneži matemaatik P. P. Zabreiko.

Zabreiko teoreem.[3] *Banachi ruumil E määratud poolnorm $p: E \to R_1$ on tõkestatud (pidev) siis ja ainult siis, kui iga koonduva rea $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$ korral*

$$p(x) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} p(x_k). \tag{2}$$

---

[3] See teoreem on mõnevõrra üldisemal kujul esitatud P. P. Zabreiko artiklis ajakirjas «Функциональный анализ и его приложения» (1969, № 1).

Märkus. Kuigi me eeldame rea $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ koondumist, võib juhtuda, et positiivne arvurida $\sum_{k=1}^{\infty} p(x_k)$ hajub, s. t. $\sum_{k=1}^{\infty} p(x_k) = \infty$. Sel juhul loeme võrratuse (2) automaatselt täidetuks, sest võrratuse vasakul poolel on mingi reaalarv, paremal pool aga ∞. Seega piisab võrratuse (2) kehtivuse kontrollimisest vaid juhul, kui lisaks reale $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ koondub ka arvurida $\sum_{k=1}^{\infty} p(x_k)$.

Zabreiko teoreemi tõestus on suhteliselt keeruline ja siin me seda ei esita.

Kauguse omaduste põhjal[4] võime väita, et norm on pidev poolnorm: kui $x_n \to x$, siis $\|x_n\| = \varrho(x_n, 0) \to \varrho(x, 0) = \|x\|$. Zabreiko teoreemi põhjal iga koonduva rea $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ korral

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty} x_k\right\| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|.$$

Ülesanne 24. Tõestada viimane võrratus vahetult, kasutamata Zabreiko teoreemi.

Kinniste lineaarsete operaatorite pidevus

Operaatori pidevuse näitamine vahetult definitsioonist lähtudes on sageli üsna tülikas ja raske. Seepärast on tuletatud operaatorite pidevuse mitmesuguseid tarvilikke ja piisavaid tingimusi. Eespool me juba tutvusime ühe sellise tingimusega lineaarse operaatori pidevuseks — tõkestatusega. Siin esitame veel ühe tarviliku ja piisava tingimuse lineaarse operaatori pidevuseks — kinnisuse.

Olgu E ja F Banachi ruumid. Operaatorit $f: E \to F$ nimetatakse kinniseks, kui koondumistest $x_n \xrightarrow{E} x$, $f(x_n) \xrightarrow{F} y$ järeldub, et $f(x) = y$. Paneme tähele olulist erinevust, võrreldes pidevuse definitsiooniga. Kui $f: E \to F$ on pidev, siis juba ainuüksi koondumisest $x_n \xrightarrow{E} x$ järeldub, et $f(x) \xrightarrow{F} y = Ax$. Seega on pidev operaator $f: E \to F$ kinnine. Vastupidine üldiselt ei kehti. Kui $f: E \to F$ on kinnine, siis koondumisest $x_n \xrightarrow{E} x$ üldse ei pruugi järelduda jada $f(x_n)$ koondumine; kui aga juhtub, et ka jada $f(x_n)$ koondub mingiks elemendiks y, siis (seda ja ainult seda nõuabki kinnisuse definitsioon) $y = f(x)$. Tähelepanuväärne on, et lineaarsete operaatorite korral pidevuse ja kinnisuse nõuded siiski ühtivad.

---

[4] Vt. Matemaatika ja kaasaeg, XVI, lk. 4.

Banachi teoreem. *Olgu lineaarne operaator $A : E \to F$ määratud Banachi ruumil E ja kuulugu tema väärtused Banachi ruumi F. Siis on A pidevuseks tarvilik ja piisav, et A oleks kinnine.*

(See väide osutub vääraks, kui E või F oleks mittetäielik normeeritud ruum.)

Tõestus. Eespool juba veendusime, et A pidevusest järeldub tema kinnisus. Jääb tõestada, et kinnine lineaarne operaator on tõkestatud (seega ka pidev).

Olgu $A : E \to F$ kinnine lineaarne operaator. Valemiga

$$p(x) = \|Ax\|$$

defineerime poolnormi $p : E \to R_1$ (poolnormi aksioomide 1°—3° kontroll on päris lihtne ja jäägu lugeja hooleks). Näitame, et see poolnorm rahuldab tingimust (2). Olgu $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$ koonduv rida ruumis E ning $\sum_{k=1}^{\infty} p(x_k) < \infty$. Siis on rida $\sum_{k=1}^{\infty} Ax_k$ absoluutselt koonduv: $\sum_{k=1}^{\infty} \|Ax_k\| = \sum_{k=1}^{\infty} p(x_k) < \infty$. Ruumi F täielikkuse tõttu rea $\sum_{k=1}^{\infty} Ax_k$ absoluutsest koondumisest järeldub tema koondumine — olgu y tema summa. Seega on meil kaks koonduvat rida:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \text{ ja } y = \sum_{k=1}^{\infty} Ax_k.$$

Nende ridade osasummade jadad $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ ja $s'_n = \sum_{k=1}^{n} Ax_k$ koonduvad vastavalt elementideks x ja y. Operaatori A lineaarsusest järeldame, et $s'_n = As_n$. Niisiis $s_n \to x$ ja $As_n \to y$. Operaatori A kinnisuse tõttu $y = Ax$. Nüüd

$$p(x) = \|Ax\| = \|y\| = \left\|\sum_{k=1}^{\infty} Ax_k\right\| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \|Ax_k\| = \sum_{k=1}^{\infty} p(x_k),$$

s. t. võrratus (2) on iga koonduva rea $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$ jaoks täidetud. Zabreiko teoreemi põhjal on poolnorm p tõkestatud: leidub selline konstant c, et $p(x) \leqslant c\,\|x\|$ iga $x \in E$ korral. Et aga $p(x) = \|Ax\|$, siis $\|Ax\| \leqslant c\,\|x\|$ iga $x \in E$ korral, s. t. operaator A on tõkestatud ja koos sellega ka pidev. Teoreem on tõestatud.

Lineaarse operaatori pöördoperaator

Teisendagu operaator $A: E \rightarrow F$ Banachi ruumi E üksüheselt Banachi ruumiks F, s. t. igal elemendil $y \in F$ on olemas parajasti üks originaal (elementi $x \in E$ nimetatakse elemendi $y \in F$ originaaliks, kui $Ax = y$). Seades igale elemendile $y \in F$ vastavusse tema originaali, defineerime teatava ruumist F ruumi E toimiva operaatori. Seda operaatorit nimetatakse operaatori A pöördoperaatoriks ja tähistatakse A^{-1}. Definitsioonist nähtub, et

$$A^{-1}(Ax) = x \text{ iga } x \in E \text{ korral,}$$
$$A(A^{-1}y) = y \text{ iga } y \in F \text{ korral.}$$

Näitame, et A^{-1} on lineaarne, kui A on lineaarne. Me peame näitama, et iga $y, y' \in F$ ja skalaari λ korral

$$A^{-1}(y + y') = A^{-1}y + A^{-1}y, \qquad A^{-1}(\lambda y) = \lambda A^{-1}y.$$

Tähistame $x = A^{-1}y$, $x' = A^{-1}y'$. Siis A lineaarsuse tõttu

$$A(x + x') = Ax + Ax' = y + y', \qquad A(\lambda x) = \lambda Ax = \lambda y,$$

kust

$$x + x' = A^{-1}(y + y'), \qquad \lambda x = A^{-1}(\lambda y)$$

ehk meie tähistusi arvestades

$$A^{-1}y + A^{-1}y' = A^{-1}(y + y'), \qquad \lambda A^{-1}y = A^{-1}(\lambda y), \text{ m. o. t. t.}$$

Näitame nüüd, et A^{-1} on pidev lineaarne operaator, kui A on pidev lineaarne operaator. Banachi teoreemi põhjal piisab selleks näidata, et operaator $A^{-1}: F \rightarrow E$ on kinnine, s. t. koondumistest $y_n \xrightarrow{F} y$, $A^{-1}y_n \xrightarrow{E} x$ järeldub $x = A^{-1}y$. Operaatori A pidevuse tõttu koondumisest $A^{-1}y_n \rightarrow x$ järeldub, et $AA^{-1}y_n = y_n \rightarrow Ax$. Niisiis $y_n \rightarrow y$ ja $y_n \rightarrow Ax$, kust piirväärtuse ühesuse tõttu saamegi $y = Ax$ ehk $x = A^{-1}y$, m. o. t. t.

Sellega oleme tõestanud järgmise tulemuse, mida nimetatakse Banachi teoreemiks (samuti nagu eelmist teoreemi).

Banachi teoreem. *Kui pidev lineaarne operaator $A: E \rightarrow F$ teisendab Banachi ruumi E üksüheselt Banachi ruumiks F, siis pöördoperaator $A^{-1}: F \rightarrow E$ on samuti pidev ja lineaarne.*

Ülesanne 25. Tõestada viimane teoreem, tuginedes Zabreiko teoreemile (näidates võrratuse (2) kehtivust poolnormi $p(y) = \|A^{-1}y\|$ jaoks).

(Järgneb)

MATEMAATILISE STATISTIKA ARENGUST TEADUSTE MATEMATISEERIMISE KÄIGUS

E. Tiit

Kaasaegset teaduste arenemise etappi iseloomustab üha süvenev ja laienev matematiseerumine. Seoses sellega omandab järjest suurema tähtsuse tänapäeval eriti kiiresti arenev matemaatika haru — matemaatiline statistika, mis etendab teiste teaduste ja matemaatika vahel teatava vahelüli osa.

Käesoleva artikli eesmärgiks ongi jälgida seda seost ühelt poolt erinevate teaduste matematiseerumise teele asumise ning matematiseerumise taseme ja teiselt poolt matemaatilise statistika, tema erinevate harude ning meetodite arenemise vahel ajaloolises plaanis.

Matemaatiline statistika kui praktika ja teooria vaheliste üleminekute meetod

Dialektilise materialismi kohaselt toimub tunnetusprotsess järgneva skeemi järgi:

Abstraktne

Konkreetne Konkreetne

s. t. konkreetselt kogemuselt (praktikast) abstraktsioonile (teooriale), viimast kontrollitakse aga jällegi praktikas. Sama skeemi, kuid paljuastmelisena, võiksime kasutada ka mistahes teaduse arengu kirjeldamiseks. Meenutame siinjuures ühtlasi, et iga teaduse arenemine kulgeb kaasajal formaliseerumise, abstraheerumise — s. o. kõige üldisemalt mõistetud matematiseerumise suunas.

Teooria Matematiseerumine

Matemaatiline statistika

Praktika

Skeemi lihtsustamise eesmärgil jätame kõrvale kõik võimalikud seosed teooria sfääris (näiteks seosed erinevate teooriate ning teooria rohkem ja vähem abstraheerunud tasemete vahel). Et teaduslike teooriate kujunemise seaduspärasused (hüpoteeside rajamine, hüpoteetilis-deduktiivse süsteemi loomine, matemaatiliste mudelite konstrueerimine ja üldistamine), mis on ühised paljudele teadusharudele, on leidnud filosoofilises kirjanduses laialdast käsitlust [1], siis me nendel käesolevas arutluses pikemalt ei peatu.

Samuti huvitab meid praktika üksnes kui uurimisobjekt ning teooria kontrollimise sfäär, kusjuures me ei pööra tähelepanu teoreetiliste tulemuste võimalikule rakendamisele inimtegevuses. Seega mõistame me oma käsitluses praktikana vaatlust, eksperimenti ning mõõtmist. Ka ei ole käesoleva artikli raames võimalik puudutada praktikaga seotud filosoofilisi probleeme; märgime siin vaid, et me praktikat (samuti kui teooriatki) käsitleme arenevana (pidades silmas järjest täiustuvat eksperimendi- ja mõõtmistehnikat ning -metoodikat). Eriti oluline on meile siinjuures see, et sageli viib mõõtmise ja eksperimendi täpsuse suurendamine kvalitatiivselt uute avastusteni teoorias [2].

Meie tähelepanu objektiks käesolevas artiklis on üleminekud praktikalt teooriale ja teoorialt praktikale, mis filosoofilises kirjanduses ei ole märkimisväärset käsitlust leidnud. Väga paljude, kui mitte enamiku teadusharude juures kasutatakse nende üleminekute juures oluliselt m a t e m a a t i l i s t s t a t i s t i k a t. Võiks isegi öelda, et matemaatiline statistika on teatud mõttes praktika ja teooria vaheliste üleminekute meetodiks.

Kõigepealt püüame selgeks teha, mis määrab matemaatilise statistika sellise mõnevõrra omapärase asendi teaduste süsteemis.

Mistahes looduslik või ühiskondlik nähtus kätkeb eneses lõpmata paljude oluliste ning väheoluliste faktorite koosmõju; iga katse või vaatluse tulemus sisaldab ühtlasi ka subjektiivsete tegurite mõju. Kõigi nende faktorite seast tuleb vaadeldava nähtuse abstraheerimisel, tema teaduslikul kirjeldamisel vaid lõplik hulk mingis mõttes olulisi faktoreid välja valida ning arvesse võtta. Tõepoolest, mingi eksperimendi korduval teostamisel samadel tingimustel saadakse tavaliselt rida erinevaid tulemusi. Kuigi kõigil olulistel, kontrollitavatel ja juhitavatel faktoritel olid iga katse puhul samad väärtused, muutusid aga ülejäänud, kontrollimatud ja tundmatud faktorid — need põhjustasidki katsetulemuse muutumist. Eksperimentaator ütleb sel puhul: tulemuste erinevus on juhuslik, sõltub juhusest — tähistades sõnaga «juhus» kõiki kontrollimatuid ja tundmatuid objektiivseid ning subjektiivseid faktoreid.

Juhusest sõltuvate, nn. juhuslike suuruste [3] matemaatiliseks

---

[1] Vt. näiteks H. W e y l. Philosophy of Matematics and Natural Science. Princeton, 1949, samuti rida nõukogude filosoofide artikleid ajakirjades «Вопросы Философии» ja «Философские Науки».

[2] Vt. näiteks E. В и г н е р. Непостижимая эффективность математики в естественных науках. Усп. Физ. Наук, 1968, 49—56.

[3] Vt. E. T i i t. Mis on tõenäosus. — Matemaatika ja kaasaeg, IX, lk. 74—90, X, lk. 86—95.

teooriaks on tõenäosusteooria; tõenäosusteooriast erineb uurimisobjekti poolest tema noorem, rakendusliku suunaga haru — matemaatiline statistika, mis tegeleb nimelt konkreetsete vaatluste ja mõõtmiste tulemusena saadavate juhuslike suurustega.

Niisiis, et praktikast saadavad tulemused on reeglina kirjeldatavad juhuslike suurustena, siis sellepärast ongi nende abstraheerimisel tarvis rakendada matemaatilist statistikat — praktikast saadavate juhuslike suuruste teooriat.

Teaduste matematiseerimise tasemed

Näib, et mingi teaduse formaliseerumise, matematiseerumise taseme vaadeldaval momendil määrab see, kuivõrd lihtsalt on selles teaduses teostatavad üleminekud praktika ja teooria vahel; teiselt poolt aga määrab erinevate teaduste matematiseerumise aste (mingil vaadeldaval perioodil) omakorda matemaatilise statistika arenemise taseme. Et seda seost jälgida, võrreldes selleks erinevaid teadusharusid nende matematiseerumise taseme poolest, esitame siin nõukogude filosoofi I. A. Aktšurini [4] poolt väljatöötatud teaduste matematiseerumise skeemi. Aktšurini järgi on teaduste matematiseerumise käigus eristatavad järgmised kolm etappi:

1) formaliseerimine,
2) osalise matemaatilise mudeli loomine,
3) täielikult aksiomatiseeritud teooria väljakujunemine.

Esimesel etapil formaliseeritakse vaadeldavas teaduses kasutatavad mõisted (või mingi osa nendest); kui tarvis, kodeeritakse kvalitatiivsed tunnused mingil viisil kvantitatiivseiks; kirjeldatakse matemaatiliselt kõige lihtsamaid seoseid. Sellel etapil reeglina ei moodustata uusi mõisteid, samuti ei kasutata formaalset aparatuuri uute seaduspärasuste tuletamiseks.

Näiteks esimesel matematiseerumise etapil olevate teaduste kohta on ajalugu, kirjandusteadus, ka mitmed bioloogia harud, meditsiin jm. Tuleb märkida, et ühel või teisel viisil on matematiseerumine haaranud suuremat osa kaasaegseid teadusi, nii et tinglikult võiksime asetada sellele etapile peaaegu kõik teadused, mille matematiseerumine ei ole veel kaugemale arenenud.

Reeglina järgneb ajalooliselt esimesele etapile mingi teaduse matematiseerumise käigus teine etapp, mida iseloomustab vaadeldava teaduse mingi osa jaoks matemaatilise mudeli koostamine. See mudel võimaldab mitte üksnes olemasolevaid nähtusi seletada, vaid ka uusi nähtusi ennustada, seega ühtlasi planee-

[4] И. А. Акчурин. Место математики в системе наук. — Вопр. философии. 1967, 1, стр. 77—90.

rida eksperimentaalse uurimise suundi. Sageli nõuab matematiseerumise teine etapp mitmete uute mõistete defineerimist ja tarvituselevõtmist.

Matematiseerumise teisel etapil olevate teaduste näiteks võiks tuua matemaatilise lingvistika, majandusteaduse, geneetika, mitmed füüsika suhteliselt vähem arenenud harud jm.

Kolmandasse etappi jõudnud teadused on läbinud esimese ja teise etapi; sellistel teatud mõttes «täielikult matematiseerunud» teadustel on välja kujunenud aksiomaatiline teooria, mis baseerub väikesel arvul algmõistetel ning -seostel, ja kogu teooria tuleneb loogiliselt neist algmõistetest. Selliste täielikult aksiomatiseeritud teaduste näiteiks on kvantmehhaanika ja klassikaline mehhaanika.

Matemaatilise statistika klassikaline arenguperiood

1. Esimesteks teadusteks[5], mis asusid formaliseerumise ja ühtlasi matematiseerumise teele, olid astronoomia ja mehhaanika (eriti taevamehhaanika). Selle põhjuseks oli ilmselt nende teaduste uurimisobjektide suhteliselt lihtne formaliseeritavus. Kõik vaadeldavad objektid on iseloomustatavad suhteliselt väikese arvu mõõdetavate suuruste — näiteks koordinaatide ja kiiruse komponentide abil. Siinjuures on mõjuvatest faktoritest, mille konkreetne olemus ei tarvitsenud uurijaile üldse selge ollagi, tähtsaim faktor (näiteks Päikese või Maa gravitatsioonitung) ülejäänutest (näiteks teiste kehade gravitatsioonitungidest) oluliselt suurem. Et mõõtmistulemusteks on arvud, langeb ära igasugune vajadus vaatlustulemuste täiendavaks kodeerimiseks. Ainsaks formaliseerimise valdkonda kuuluvaks probleemiks, mis mõõtmistulemuste kasutamisel tekkis, oli mõõtmisvigade arvestamine ja elimineerimine.

Vastavalt sellele oligi esimeseks matemaatilise statistika haruks, mis XVIII sajandil arenema hakkas, mõõtmisvigade teooria.

Mitmed tolle perioodi matemaatikud, sealhulgas R. Cotes ja T. Simpson[6], püüdsid leida mõõtmisvigade jaotusseadust; sisuliselt võeti kasutusele usalduspiirkonna mõiste; tõstatati küsimus mingis mõttes õigeima (tõepäraseima) väärtuse omistamisest mõõdetavale suurusele, seega pandi alus kaasaegsele vahemik- ja punkthinnangute teooriale.

---

[5] Lähemat selle teaduste arenguperioodi kohta võib lugeja leida raamatus J. Bernal. Teadus ühiskonna ajaloos. Tln., 1962.

[6] Tõenäosusteooria ja matemaatilise statistika ajalooga võib lugeja tutvuda raamatust Д. Е. Майстров. Теория вероятности. Исторический очерк. Москва, 1967; E. Tiit. Tõenäosusteooria II viimasest peatükist või viites 3 märgitud artiklitest.

Et astronoomias ja mehhaanikas sel perioodil mitte üksnes ei formaliseeritud uurimisobjekte, vaid ka kirjeldati matemaatiliselt nende objektide vahelisi seoseid, tekkis vajadus leida ka vaatlusandmete funktsiooni vea jaotusseadust, samuti omistada uuritavatele suurustele teatud mõttes optimaalne väärtus nn. kaudsete mõõtmiste abil. Nendele ülesannetele andsid lahenduse XIX sajandi algul C. F. Gauss ja A. M. Legendre oma vähimruutude meetodiga.

Seega oli XIX sajandi alguseks rajatud alus esimesele matemaatilise statistika harule — hinnangute teooriale. Samaks ajaks olid ka teadusharud, mille vajadusi matemaatiline statistika teenindas — astronoomia, mehhaanika, taevamehhaanika — jõudnud oma arengus matematiseerumise II (osalt isegi III) etapini. Seda näitab ilmekalt planeet Neptuuni avastamine 1846. aastal U. J. J. Leverrier' ja J. C. Adamsi arvutuste põhjal: taevamehhaanikas oli loodud mudel, mis võimaldas mitte üksnes nähtusi seletada, vaid ka ennustada.

2. Järgmisteks teadusteks, mis esitasid oma nõudeid matemaatilisele statistikale, olid bioloogia mitmesugused harud. XIX sajandi teisel poolel arenes bioloogia intensiivselt; jõuti ka esimeste matemaatiliselt formuleeritud seaduspärasusteni bioloogias — nendeks olid G. Mendeli pärilikkuse seadused. On huvitav märkida, et Mendeli avastatud seaduspärasused on (erinevalt füüsika ja mehhaanika seadustest) statistilise iseloomuga: vanemate omaduste järgi määratakse kindlaks järglastel teatavate omaduste esinemise tõenäosus.

Mendeli seadused suutsid siiski kirjeldada vaid väga väikest osa geneetika keerukatest seaduspärasustest. Üheks peamiseks raskuseks bioloogia matematiseerumisel, mistõttu siin ei ole seninigi veel eriti kaugele jõutud, on objektide formaliseerimise ja nende vaheliste seoste avastamise keerukus.

Kui füüsika erinevates distsipliinides uuritavate nähtuste kirjeldamisel ja formaliseerimisel oli XIX sajandil suurelt osalt kasutatav juba loodud matemaatiline statistika aparaat (hinnangute teooria), siis bioloogias oli olukord põhimõtteliselt erinev. Bioloogilised objektid on kirjeldatavad väga suure arvu kvantitatiivsete ja kvalitatiivsete tunnuste abil, kusjuures iga üksik indiviid erineb igast teisest väga paljude näitajate poolest (keha üksikosade mõõtmed, kaal, värvus, organismi funktsionaalsed karakteristikud). Objektide formaliseerimise muudab keerukamaks ka asjaolu, et neid iseloomustavad tunnused ei ole sõltumatud, vaid tunnuste vahel valitsevad mitmesuguse tugevuse ja kujuga seosed, mis reeglina ei kuulu funktsionaalsete sõltuvuste hulka, vaid on juhusliku (stohhastilise) iseloomuga.

Selliste paljutunnuseliste objektide kirjeldamiseks tuli välja töötada uus matemaatilise statistika meetod — mitmemõõtmeline statistiline analüüs. Siin kirjeldab iga uuritavat objekti mõõtmis- ja vaatlustulemustest koosnev juhuslik vektor, mille iga komponent iseloomustab üht uuritavat tunnust (objekti kehapikkust, kaalu, vanust jne.) Vaadeldavate tunnuste vaheliste seoste tugevuse ja kuju iseloomustamiseks võtsid geneetik F. Galton ja statistik K. Pearson XIX sajandi lõpupoolel kasutusele korrelatsiooni- ja regressioonikordajate mõisted. Seega oli rajatud alus korrelatsioon- ja regressioonanalüüsile — olulisematele meetoditele tänapäevaseski mitmemõõtmelises statistilises analüüsis.

3. Mõlemad kirjeldatud matemaatilise statistika meetodid olid vajalikud tunnetuse esimeseks etapiks — praktikalt teooriale üleminekuks. Kuid ka teine etapp — teoreetiliste tulemuste kontrollimine praktikas — ei tule toime ilma spetsiaalsete matemaatiliste statistika meetoditeta.

Tõepoolest, kujutleme, et mingis teadusharus on välja töötatud teoreetiline mudel, mille kohaselt on võimalik ennustada mingite uuritavate objektide käitumist või olekut teatavate tingimuste korral. Et kontrollida hüpoteesi selle mudeli õigsuse kohta, korraldatakse vastav eksperiment või kogutakse vaatlusandmeid; saadud tulemused näitavad, kas objektide tegelik käitumine või olek vastab mudeli poolt ennustatule.

Enamasti aga erinevad praktikast saadud tulemused mõnevõrra teoreetiliselt ennustatuist. Tekib küsimus — milline ja kui suur erinevus on lubatud, et hüpoteesi veel õigeks võiks lugeda? Sellele küsimusele vastamiseks tutvume kõigepealt loomulike eeldustega, millele tugineb hüpoteeside kontrolli statistiline teooria.

1) Ükski hüpotees ei ole absoluutselt kindlasti tõestatav.
2) Hüpotees loetakse tõestatuks siis, kui tõenäosus selleks, et ta on vale, on küllalt väike (väiksem nn. olulisuse nivoost).
3) Olulisuse nivoo määrab uurija suvaliselt, arvestades kontrollitava hüpoteesi tähtsust, keerukust, tava jt. tegureid.
4) Ühe hüpoteesi tõestamine (mingi olulisuse nivooga) ei välista mingi teise, sellest erineva (kuigi mitte otseselt vastupidise) hüpoteesi tõestamist (sama või erineva) olulisuse nivooga.
5) Kui hüpotees on õige (s. t. erinevus teooria ja praktika vahel on tingitud üksnes juhusest), siis on võimalik tõestada seda hüpoteesi kuitahes väikese olulisuse nivooga (s. t. kuitahes suure «kindluse astmega»), tehes selleks vaid küllaldase arvu vaatlusi või katseid).

Praktiliselt kasutatakse hüpoteeside kontrolli teoorias asjaolu, et juhuslikest põhjustest (mõõtmisvead jne.) tingitud erinevused teoreetiliste ja praktiliste tulemuste vahel alluvad teatud kindlatele, tõenäosusteoorias uuritud seaduspärasustele (on näiteks normaaljaotusega). See võimaldab konstrueerida kriteeriume (teste) mitmesuguste hüpoteeside kontrollimiseks, niipea, kui need on sõnastatud statistilises terminoloogias. Siinjuures toimub hüpoteesi vastuvõtmine või kummutamine vastavalt uurija poolt määratud olulisuse nivoole või nn. «kindluse astmele».

Kõige lihtsamaks hüpoteeside kontrollimise meetodiks on usalduspiirkondade kasutamine; s. t. mõningaid hüpoteese on võimalik kontrollida vahemikhinnangute teooria tulemuste abil. Kuid keerukamate ülesannete lahendamiseks oli tarvis välja töötada juba spetsiaalsed meetodid.

Üks esimesi kriteeriume hüpoteeside kontrollimiseks oli möödunud sajandi lõpul astronoom F. R. Helmerti poolt praktiliselt kasutusele võetud nn. χ^2-kriteerium, mis võimaldab võrrelda mingi juhusliku suuruse teoreetilist jaotust praktikast leitud empiirilise jaotusega. Kaasajal tuntud kuju andis sellele kriteeriumile statistik P. Pearson.

Järgnes rida teisi, praktikas vajalikke kriteeriume (sealhulgas näiteks eriti bioloogias ulatuslikult kasutatav Studenti t-test kahe indiviidide rühma eraldamiseks ühe tunnuse järgi). Käesoleva sajandi algul töötaski nimekas statistik R. Fischer välja kolmanda matemaatilise statistika suuna — hüpoteeside kontrolli teooria teoreetilised alused.

4. XX sajandi algul asus intensiivse arenemise ning abstraheerumise teele arvukalt uusi teadusharusid, mille kõigi uurimisobjektid ning nende formaliseerimisega seotud probleemid osutusid mõnevõrra erinevaiks. See põhjustas rea uute matemaatilise statistika meetodite tekkimise, mis enamasti mahuvad ühe või teise ülalkirjeldatud üldsuuna alla. Nimetame siin olulisemaid nendest;

1) Faktoranalüüsi eesmärgiks on kirjeldada suurt arvu tunnuseid suhteliselt väikese arvu faktorite lineaarsete kombinatsioonidena; meetod kasvas välja psühholoogia vajadustest ja kuulub mitmemõõtmelisse statistilisse analüüsi.

2) Dispersioonanalüüs kontrollib ja kirjeldab mingi juhusliku suuruse sõltuvust mitmetest erinevatest faktoritest; meetodit rakendati kõigepealt agronoomias saakide sõltuvuse uurimisel mitmesugustest teguritest. Dispersioonanalüüs on oma olemuselt hüpoteesi kontrollimeetod.

3) Klassikaline diskriminantanalüüs võimaldab objekte rühmitada, arvestades erinevusi mitmete tunnuste osas; meetodit kasutati kõigepealt paleontoloogias ja see kuulub mitmemõõtmelisse statistilisse analüüsi.

Sel perioodil — käesoleva sajandi algusest kuni 30-ndate aastateni — saavutas matemaatiline statistika küllaltki kõrge arenemistaseme ja ulatusliku rakendatavuse (hakkas ilmuma terve rida spetsiaalseid matemaatilise statistika alaseid ajakirju). Kujunesid välja mitmed olulised mõisted, mida rakendatakse paljude küsimuste lahendamisel (näiteks vabadusaste, usaldus- ning olulisuse nivoo jt.). Võime rääkida klassikalise matemaatilise statistika väljakujunemisest.

Ometi ei moodusta klassikaline matemaatiline statistika kaugeltki ühtset matemaatilist teooriat. Hinnates matemaatilist statistikat tema formaliseerumise taseme järgi, võiks ta tinglikult paigutada teise etappi. Tõepoolest, üksikud matemaatilise statistika harud olid selleks perioodiks jõudnud küllaltki kompaktse, sisuliselt seotud teooriani; eriti tuleb siin märkida statistiliste hüpoteeside kontrolli teooriat (tänu J. Neymani ja K. Pearsoni töödele); teistes harudes kasutatavad meetodid olid aga matemaatiliselt üpriski läbi töötamata, nii et ei olnud selged isegi nende rakendatavuse eeldused ja vahekord teiste meetoditega.

On iseloomulik, et matemaatilisel statistikal puudus sel perioodil ka korrektne määratlus; mitmed autorid käsitlesid matemaatilist statistikat lihtsustatult kui vaatlusandmete töötlemise teooriat, mis aga kaugeltki täielikult ei ava matemaatilise statistika kui terviku sisu.

Matemaatilise statistika kaasaegne arenguperiood

Uus, kaasaegne periood matemaatilise statistika arengus algas pärast II maailmasõda, osaliselt isegi sõja-aastail.

Erinevus selle ja eelneva arenguperioodi vahel seisneb ühelt poolt matemaatilisele statistikale esitatavates ülesannetes, aga samuti ka enneolematutes võimalustes (peame siin silmas elektronarvuteid), teiselt poolt uutes joontes ja seaduspärasustes matemaatilise statistika enese sisemises arengus.

Sõjajärgsetele aastatele on iseloomulik kõigi teaduste arengu kiirenemine ning intensiivistuv matematiseerumine [7], mis esitab järjest uusi nõudeid matemaatilisele statistikale ning põhjustab uute statistiliste uurimissuundade ja meetodite teket ning väljakujunemist; samuti esitab üha suuremaid nõudeid matemaatilisele statistikale inimkonna majanduslik tegevus.

Teisest küljest on matemaatilise statistika arenemisele otsustava mõjuga ka arvutustehnika täiustumine; kui klassikaline matemaatiline statistika piirdus vaid väikese töömahuga, käsitsiarvutamiseks sobivate meetodite uurimisega, siis kaasaegne matemaatiline statistika saab, tänu kiirete ja mahuka mäluga elektronarvutite kasutamisele, lahendada ka suure töömahuga ülesandeid (eriti mitmemõõtmelises statistilises analüüsis), rakendada iteratsioonimeetodeid (näiteks maksimaalse tõepärasuse hinnangute leidmisel), teostada üksikindiviidide võrdlemist ja rühmitamist, mis varem vähegi suurema vaatlusmaterjali korral oli täiesti teostamatu.

[7] Vt. M. V. Keldõš. Matemaatika ja kaasaeg, XII, 1967, lk. 15—16.

Lõpuks tuleb arvestada ka matemaatilise statistika sidet ja tagasisidet matemaatika teiste harudega; eriti väärib siin märkimist juhuslike protsesside teooria, informatsiooniteooria ja mänguteooria mõju matemaatilisele statistikale, samuti ka aksiomaatilise tõenäosusteooria väljakujunemine.

Niisiis areneb kaasaegne matemaatiline statistika intensiivselt niihästi laiuti kui ka sügavuti. Peatuksimegi kõigepealt põgusalt mõningatel iseloomulikumatel u u t e l uurimissuundadel.

1. Seoses üha keerukamalt formaliseeritavate teaduste asumisega matemaatilise arengu teele tekkis vajadus uuritavate objektide teatavaks eeltöötlemiseks nende klassifitseerimise või rühmitamise näol. Kuid ka mitmete teoreetiliste küsimuste lahendamise eelduseks on materjali sobiv klassifitseerimine. Nii tekkiski ühe uue matemaatilise statistika uurimissuunana rühmitamisteooria (väljakujunenud teooriast selles valdkonnas on küll veel vara kõnelda, tegemist on meetodite koguga, mis on sealjuures sageli empiirilise või heuristilise iseloomuga). Oma sisult on see uurimisvaldkond lähedane teoreetilises küberneetikas uuritava kujundite eristamise probleemiga — uurimisobjekt on matemaatiliselt sama, erineb vaid rakendatav metoodika. Et kõik rühmitamismeetodid on paratamatult väga töörohked, sai selle uurimissuuna arenemine võimalikuks üksnes tänu elektronarvutite kasutamisele.

2. Suurel määral formaliseerimisraskustest (eriti psühholoogias, bioloogias ja sotsioloogias) on tingitud ka teatud mõttes uus meetodite rühm — nn. mitteparameetriliste meetodite intensiivne kasutuselevõtt. Nimelt võimaldavad need meetodid objektide formaliseerimisel kasutada kvantitatiivsete tunnuste asemel ka kvalitatiivseid tunnuseid, kui need vaid on järjestatavad (näiteks — subjektiivne meeldivus; värvitooni tumedus jne.).

3. Esialgu füüsika vajadusteks, hiljem aga ka mitmesuguste bioloogiliste ning majanduslike protsesside modelleerimiseks kujunes käesoleva sajandi keskel välja tõenäosusteooria uus, eriti kiiresti arenev haru — juhuslike protsesside teooria. Praktikas esinevate protsesside kirjeldamisel teoreetiliste protsesside abil ja nende prognoosimisel tekkisid uut liiki üleminekuprobleemid, mille lahendamiseks hakkas arenema matemaatilise statistika uus haru — juhuslike protsesside statistika.

Juhuslike protsesside statistika tulemusi rakendavad ka otseselt majanduslike ülesannete lahendamiseks tekkinud uued teadusharud — järjekorra teooria ning töökindluse teooria.

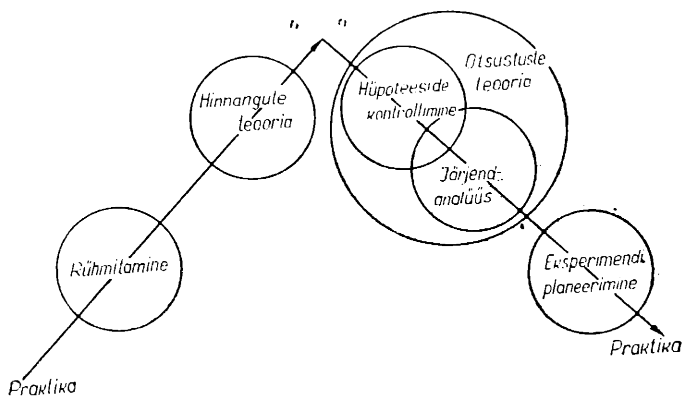
4. Juba II maailmasõja päevil kujunes majanduslike ülesannete lahendamiseks välja statistika meetod, mis oma iseloomult kuulub tüüpiliselt kaasaegsesse matemaatilisse statistikasse — nimelt järjendanalüüs. Sel perioodil töötas rühm ameerika statistikuid eesotsas A. Waldiga välja meetodi toodete kvaliteedi statistiliseks kontrollimiseks, mis sisuliselt kuulub statistiliste

hüpoteeside kontrolli teooriasse, kuid on klassikalistest hüpoteeside kontrollimeetoditest hoopiski paindlikum. Katseid või vaatlusi teostatakse sammhaaval, iga sammu järel kontrollides, kas on võimalik hüpoteesi vastu võtta, kummutada või tuleb katsetamist jätkata.

Seega võimaldab järjendanalüüs mitte üksnes kontrollida hüpoteese, vaid ka kõige otstarbekamalt teostada vaatlusi: neid tehakse parajasti niipalju, kui on tarvis, et üht hüpoteesidest vastu võtta.

5. Ülesanne korraldada eksperimentaalne töö võimalikult otstarbekalt omandab olulise tähtsuse eriti kulukate eksperimentide korral (näiteks majanduslikud eksperimendid). Seetõttu tuleb üleminekul teoorialt praktikale pidada silmas veel üht aspekti — planeerida katsed teatud mõttes o p t i m a a l s e l t. Selle probleemiga tegelebki vastav haru kaasaegses matemaatilises statistikas — eksperimendi planeerimise teooria (ehk üldiselt — eksperimendi matemaatiline teooria).

6. Eeskätt majanduslike ülesannete lahendamiseks kujunes välja ka uus kaasaegse matemaatilise statistika kesksemaid harusid — statistiliste otsustuste teooria, mille alused rajas samuti ameerika statistik A. Wald sõjajärgsetel aastatel. Oma probleemiseadelt üldistab statistiliste otsustuste teooria hüpoteeside kontrolli teooriat, käsitledes olukordi, kus statistilise materjali põhjal tuleb valida mitme otsustuse vahel (hüpoteeside kontrolli teoorias oli võimalikke otsustusi alati vaid kaks — hüpoteesi vastuvõtmine või kummutamine). Ka valikukriteeriumid on otsustuste teoorial paindlikumad, arvestades mitte etteantud olulisuse nivood (s. t. maksimaalset lubatavat eksimuse tõenäosust), vaid kaofunktsioone, mis kirjeldavad iga vale hüpoteesi vastuvõtmisel tekkinud kahju. See võimaldab arvestada ka näiteks täiendava



informatsiooni saamiseks vajalike katsete hinda, mis on eriti oluline kulukate eksperimentide korral.

Rakendades otsustuste tegemisel nn. Bayesi strateegiat, on võimalik kasutada mitte üksnes statistilisest väljavõttest vahetult ammutatavat informatsiooni, vaid ka kogu võimalikku eelinformatsiooni, olgu see siis saadud varasematest katsetest, kirjandusest või isegi sugenenud mingi alateadliku eelarvamusena. Bayesi strateegia sisuks on niisiis klassikalises tõenäosusteoorias tuntud Bayesi teoreemiga analoogilise mõttekäigu rakendamine aprioorselt hinnatud tõenäosuste täpsustamiseks teatud mõttes kaudsete katsetulemuste arvestamise najal. Lugedes aprioorseks tõenäosuseks subjektiivse tõenäosuse (kahtlemata isegi sama alginformatsiooni puhul võib see igal uurijal olla erinev), saame nii otsuste vastuvõtmise protsessi kirjeldada võimalikult lähedasena tegelikkuses esinevale. Siinjuures ilmneb ühtlasi, et piisav hulk uut informatsiooni muudab ükskõik kui tugevate eelarvamuste osa praktiliselt nulliks, sellal kui vähese täiendava informatsiooni korral on aprioorsel tõenäosusel aposterioorsele küllaltki suur mõju.

Kaasajal on statistiliste otsustuste teooriat laialdaselt rakendatud kõige erinevamates teadusharudes — psühholoogias, pedagoogikas, meditsiinis ja mujalgi.

Matemaatilise statistika arengu üldised seaduspärasused

Kõik need uued suunad (neid võiks loetleda veelgi enam) näitavad kaasaegse matemaatilise statistika üht olulist iseloomulikku joont — *intensiivset arenemist laiuti.*

Teiseks iseloomulikuks jooneks kaasaegsele matemaatilisele statistikale on tema *meetodite universaalsus.* Kõik väljatöötatud meetodid omandavad kiiresti üldkasutatava iseloomu: meetodid, mis sobivad aju biovoolude klassifitseerimiseks, on kasutatavad ka hieroglüüfkirja lugemiseks jne. Üldkasutatavateks muutuvad ka varem spetsiaalsed meetodid — nii kasutatakse kaasajal faktor-, dispersioon- ja regressioonanalüüsi (sageli paralleelselt) nii sotsioloogias, majandusliku tegevuse analüüsimisel, spordifüsioloogias kui ka ajaloos.

Kolmandaks iseloomulikuks jooneks kaasaegsele matemaatilisele statistikale on *meetodite rakenduspiirkondade* ning *vahekordade selgitamine.* Nimelt on ebaõnnestumised matemaatilise statistika rakendamisel väga sageli tingitud patustamisest meetodite rakendatavuspiirkondade vastu. Neid ei määra muidugi mitte uurimisobjektide konkreetne iseloom, vaid meetodi matemaatilised eeldused ning see, kas vaadeldavate objektide korral on õige lugeda kasutatava meetodi eeldused täidetuks (näiteks eeldada jaotuse normaalsust või mingite vaatluste sõltumatust). Eriti oluliseks muutub see probleem nimelt universaalsete meetodite puhul.

Sellega seoses jõuamegi probleemideni, mis näitavad matemaatilise statistika arengut *sügavuti*, s. t. *teooria enese matemaatilise läbitöötamise suunas*. Kaasaegset matemaatilist statistikat iseloomustab, nagu nägime, paljude erinevate harude ning meetodite rohkus, millest igaüks rakendab erinevat matemaatilist aparatuuri, isegi baseerub mõnevõrra erinevatel põhimõistetel. Võiks isegi öelda, et matemaatilisel statistikal ei ole veel välja kujunenud selget sisemist struktuuri. Isegi esitatud alajaotused, mis on teatud mõttes ajalooliselt ja traditsiooniliselt kujunenud, ei vasta ühistele printsiipidele.

Tõepoolest, iseloomustades matemaatilise statistika harusid ning uurimissuundi vastavalt nende kohale tunnetusprotsessis, saaksime järgneva skeemi.

Praktikalt teooriale viivate üleminekute meetoditest on olulisim hinnangute teooria, mida võib juba enam-vähem väljakujunenud matemaatiliseks teooriaks lugeda. Sama üleminekut teenib valdavalt ka rühmitamise teooria.

Teoorialt praktikale suunduvate üleminekute kõige olulisemaks ning väljakujunenumaks meetodiks on hüpoteeside kontrolli teooria; mõnevõrra üldisema käsitluse ühele osale sellest teooriast annab järjendanalüüs ning mõlemaid teooriaid üldistab statistiliste otsustuste teooria. Viimasega on mõningaid ühiseid jooni eksperimendi planeerimise teoorial, mille ülesandeks on teatud mõttes suunata üleminekut teoorialt praktikale.

Rühmitades aga matemaatilise statistika harusid uurimisobjekti järgi, saaksime järgmise pildi:

Ühemõõtmeline mat. statistika	Mitmemõõtmeline mat. statistika	Juhuslike protsesside statistika

Siinjuures on niihästi ühe- kui ka mitmedimensionaalses statistikas esindatud peaaegu kõik ülaltoodud uurimissuunad; protsesside statistikas, milles on tulemusi veel suhteliselt vähe, on esindatud vaid olulisemad nende hulgast.

Mitteparameetriline statistika, mis erineb nn. «parameetrilisest» vaid formaliseerimise meetodi poolest, areneb viimasega n.-ö. paralleelselt, kuid sisaldab kaugelt vähem tulemusi. Seetõttu on matemaatiline statistika oma praegusel arenguetapil veel üsnagi kaugel täiuslikust matemaatilisest teooriast.

Ometi võib öelda, et neljandaks iseloomulikuks jooneks kaasaegsele matemaatilisele statistikale on *areng ühtsuse ja formaliseerumise suunas*. Kõige ilmekamalt väljendub see tendents statistiliste otsustuste teooria väljakujunemises. Nimelt võimaldab see teooria käsitleda ühtsest seisukohast peaaegu kõiki matemaatilise statistika ülesandeid (kuigi veel mitte nende lahendusmeetodeid). Tõepoolest, mistahes statistilist ülesannet võib käsitleda *otsustusprobleemina osaliselt määramatus olukorras*, kusjuures erinevate meetodite korral on lähtematerjaliks, mille põhjal otsustus tuleb vastu võtta, alati vaatlusmaterjal, statistiline väljavõte. Erinevate probleemide korral on aga võimalike otsustuste hulk — otsustuste ruum erineva struktuuri ja kujuga.

Hüpoteeside kontrolli ülesannete korral sisaldab otsustuste ruum ainult kahte punkti — üks neist vastab kontrollitava hüpoteesi vastuvõtmisele, teine — kummutamisele. Hinnangute teoorias seevastu võib otsustuste ruumiks olla kõigi reaalarvude hulk või kõigi reaalarvuliste vahemikkude hulk, mille seast tuleb välja valida üks punkt või üks vahemik, mitme väärtuse hindamisel ka mitmedimensionaalne eukleidiline ruum, mille mingi punkt või piirkond annab hinnatavate suuruste mingis mõttes optimaalse punkt- või vahemikhinnangu. Mitmedimensionaalse analüüsi puhul on otsustuste ruumiks enamasti kirjeldatud ruumi otsekorrutis (sõltuvalt sellest, missugune on konkreetselt uuritav probleem). Rühmitamisprobleemi korral (antud rühmade puhul) on iga üksiku indiviidi puhul võimalike otsustuste ruumiks fikseeritud rühmade hulk. Suhteliselt lihtne on otsustuste ruumi struktuur järjendanalüüsi korral: siis tuleb iga katse järel vastu võtta üks kolmest otsusest: loodud hüpotees õigeks lugeda, kummutada see või jätkata katsetamist.

Sellise ühise käsitluse tekkimine lubab loota ka matemaatilise statistika kujunemist edaspidi ühtseks matemaatiliseks teooriaks, millel eksisteerib ühtne põhimõistete süsteem, selge sisemine struktuur ja võib-olla ka täiesti range aksiomaatika.

Võrreldes kaasaegset matemaatilist statistikat klassikalisega näeme, et hoolimata mitmetest uutest arengutendentsidest **säilib tema üldine iseloom ning ülesanne — vahendada üleminekuid teoorialt praktikale ning praktikalt teooriale.** Samuti tuleb nentida matemaatilise statistika osatähtsuse suurenemist kaasaegsel teaduste arengu perioodil, mida põhjustab kahtlemata paljude teadusharude ja majandusliku tegevuse intensiivne matematiseerumine.

Üldtuntud on kaasaegse teaduse ja tehnika suursaavutused, milleni on jõutud tänu matemaatiliste meetodite ja arvutustehnika rakendamisele kõige mitmekesisemates valdkondades. Nimetaksime näidetena kasvõi masinatõlget, maiade hieroglüüfkirja dešifreerimist, matemaatilist diagnostikat, kaasaegse majanduse planeerimist ning juhtimist ja kosmose uurimist. Kõigi nende ülesannete lahendamise eelduseks on mitte üksnes vajaliku alginformatsiooni ning sobiva matemaatilise mudeli, samuti ka piisava võimsusega arvutustehnika olemasolu, vaid on tarvis ka vajalike matemaatilise statistika meetodite eksisteerimist ning nende õiget kasutamist. Ja küllaltki paljude kaasajal veel lahendamata, pealtnäha liiga keeruliste, «segaste» ülesannete lahendamisel ongi üheks oluliseks takistuseks sobivate statistika meetodite puudumine. Siit järeldub, et ka tulevikus võib oodata matemaatilise statistika intensiivset arenemist.

Matemaatilise statistika kohast tulevikuteaduste süsteemis

Millises suunas toimub areng? Millist mõju avaldab matemaatilise statistika arenemisele teiste teaduste edasine matematiseerumine? Milline koht jääb matemaatilisele statistikale tulevikuteaduste süsteemis?

Need on küsimused, mille vastus pakub huvi mitte üksnes matemaatilise statistika uurijatele, vaid mis on mõnevõrra olulised ka nn. «teaduste teaduse» — stsientoloogia ehk metateaduse seisukohalt.[8]

Täpset vastust neile küsimustele loomulikult anda ei saa, kuid siiski püüaksime eespool vaadeldu põhjal teha mõningaid kõige üldisemaid prognoose.

Kahtlemata tuuakse arenemisprotsessis kõigis teadusharudes uusi matemaatilisi mudeleid, täpsustatakse olemasolevaid ning kooskõlastatakse neid praktikaga. Kui kaasajal enamus mudeleid on deterministliku iseloomuga, s. t. käsitleb kõiki suurusi juhusest sõltumatutena, siis kahtlemata edasise arengu ja täpsustamise käigus tuleb mudelites arvestada ka juhuslikkust.

Meie jaoks pakub huvi küsimus — milline osa jääb matemaatilisele statistikale stohhastiliste mudelite rakendamisel sel korral, kui matemaatilise statistika ja tõenäosusteooria elemendid teatud mõttes tungivad ka teooria sfääri, esinevad ka antud nähtust kirjeldavas teoreetilises mudelis?

Dialektikast on aga teada, et kui täpne ja hea ka ei oleks mudel, ei kajasta ta kunagi tegelikkuse kõiki külgi, seega teaduse arenemise kõigil etappidel säilib erinevus mudeli (teooria) ja praktika vahel. Seega *säilib vajadus üleminekuteks praktikalt teooriale ja teooriast praktikale.* Ning säilib ka vajadus *matemaatilise statistika*, nende *üleminekute meetodi järele.* Kuivõrd mudelite täpsustamise tagajärjel erinevused mudeli ja tegelikkuse vahel muutuvad väiksemaks, kerkivad matemaatilise statistika ette üha uued, järjest keerukamad ülesanded. *Säilib aga matemaatilise statistika iseloom ning funktsioon, samuti tema koht teaduste süsteemis.*

---

[8] Vt. Д. И. Гордеев, Е. А. Куражковская. Проблемы науковедения. Вестник МГУ Философия, 1968, 11—19 и А. А. Зворыкин. Структурный анализ науки, — Философские науки, 1968, 2, 22—31.

Majandusmatemaatika

TÄISARVULISED PLANEERIMISÜLESANDED[1]

A. Leiten, M. Viitso

Land-Doigi meetod

Land-Doigi meetod on rakendatav nii osaliselt täisarvuliste kui ka puhttäisarvuliste planeerimisülesannete lahendamiseks. Lahendatava ülesande võib üldkujul sõnastada järgmiselt: maksimiseerida

$$z = c_1x_1 + \ldots + c_px_p + \gamma_1y_1 + \ldots + \gamma_qy_q \tag{1}$$

kitsendustel

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1p}x_p + \alpha_{11}y_1 + \ldots + \alpha_{1q}y_q \leqslant b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mp}x_p + \alpha_{m1}y_1 + \ldots + \alpha_{mq}y_q \leqslant b_m \end{array} \tag{2}$$

$$x_j \geqslant 0 \ (j = 1, \ldots, p), \ y_k \geqslant 0 \ (k = 1, \ldots, q), \tag{3}$$

$$x_j \text{ on täisarv iga } j = 1, \ldots, p \text{ puhul.} \tag{4}$$

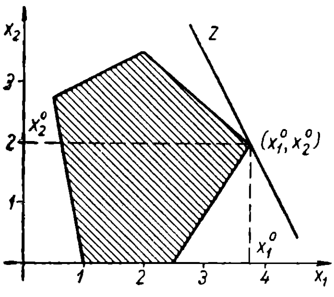
Vaadeldavas ülesandes on seega $n = p + q$ tundmatut ja m võrratusena antud kitsendust.

Ülesandega (1)—(4) on tihedalt seotud vastav lineaarse planeerimise ülesanne (1)—(3), mille sihifunktsiooni optimaalne väärtus annab ülesande (1)—(4) sihifunktsiooni väärtuste ülemise tõkke.

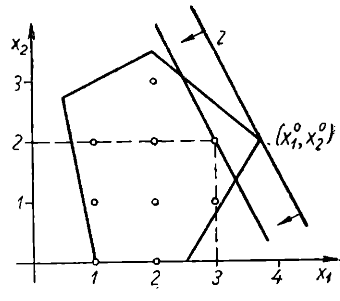
Ülesannete (1)—(3) ja (1)—(4) vahelise seose ning meetodi idee lihtsamaks kirjeldamiseks vaatleme probleemi algul kahemõõtmelisel juhul, s. o. juhul, kui ülesandes on ainult kaks tundmatut ($n = 2$).

Kujutagu sellise täisarvulisuse nõudeta ülesande lubatavate lahendite piirkonda viirutatud hulknurk joonisel 1, kusjuures ülesande optimaalne lahend on punktis (x_1^0, x_2^0). Kui nüüd nõuda tundmatutelt x_1 ja x_2 täisarvulisust, siis moodustavad saadava täisarvulise ülesande lubatavate lahendite hulga täisarvuliste koordinaatidega punktid lähteülesande lubatavate lahendite piirkonnas (vt. ringikestega märgitud punktid joonisel 2). Seega

[1] Artikli algus vt. Matemaatika ja kaasaeg, XVI, lk. 36—46.



Joonis 1.



Joonis 2.

koosneb lubatavate lahendite hulk ainult üheksast punktist. Jooniselt nähtub, et täisarvulisuse nõudega ülesande optimaalseks lahendiks on (3, 2), mille võib saada punkti (x_1^0, x_2^0) läbivat sihifunktsiooni sirget noolega näidatud suunas seni paralleelselt nihutades, kuni ta läbib esimest täisarvuliste koordinaatidega punkti (vt. joonis 2).

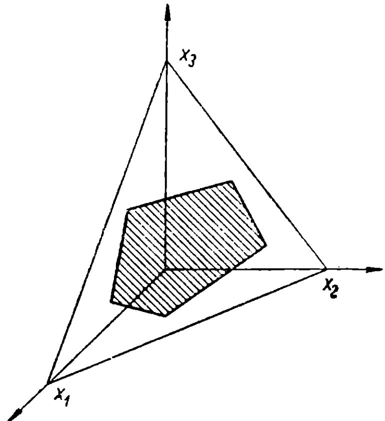
Kirjeldatav algoritm kujutabki selle lihtsa idee üldistust n-mõõtmelisele juhule. Ülesande (1)—(4) lahendamiseks n-mõõtmelisel juhul tuleb nimelt ülesande (1)—(3) optimaalset lahendit läbivat sihifunktsiooni hüpertasandit (1) paralleelselt nihutada ülesande (1)—(4) lubatavate lahendite piirkonna poole (s. o. muutuja z vähenemise suunas) seni, kuni ta läbib selle piirkonna esimest punkti. See punkt vastabki ülesande (1)—(4) optimaalsele lahendile. Osutub aga, et niisuguse lihtsa idee realiseerimine on seotud hulktahuka (2)—(3) suure hulga punktide läbivaatamisega. Tuleb nimelt arvestada, et numbrilised meetodid võimaldavad korraga vaadelda ainult üht n-mõõtmelise ruumi punkti, mitte aga kogu hüpertasandit tervikuna. Hüpertasandit tuleb nihutada järk-järgult ühelt tasemelt teisele, kusjuures nihutamisreeglid peavad olema sellised, et poleks võimalik mööduda otsitavast optimaalsest lahendist. Samuti peab hüpertasandi (1) iga taseme puhul olema võimalik määrata, kas selle hüpertasandi ja hulktahuka (2)—(3) lõige sisaldab tingimust (4) rahuldavat punkti.

Algoritmi alustamiseks lahendatakse kõigepealt ülesanne (1)—(3), millega saadakse ülesande (1)—(4) sihifunktsioonile z ülemine tõke z^0 (hüpertasand $z = z^0$ ehk hüpertasand tasemel z^0 on kumera hulktahuka (2)—(3) tugitasandiks). Edasi seisneb algoritm ülemise tõkke z^0 järkjärgulises kahandamises, millega tekib ülemiste tõkete jada

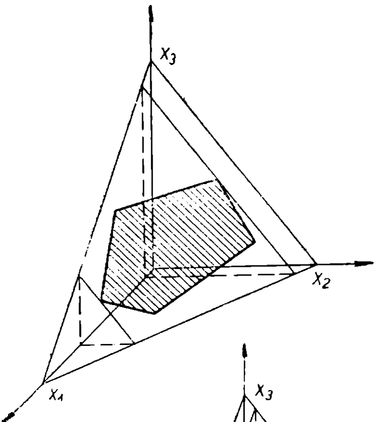
$$z^0 > z^1 > z^2 > \ldots > z^k > \ldots$$

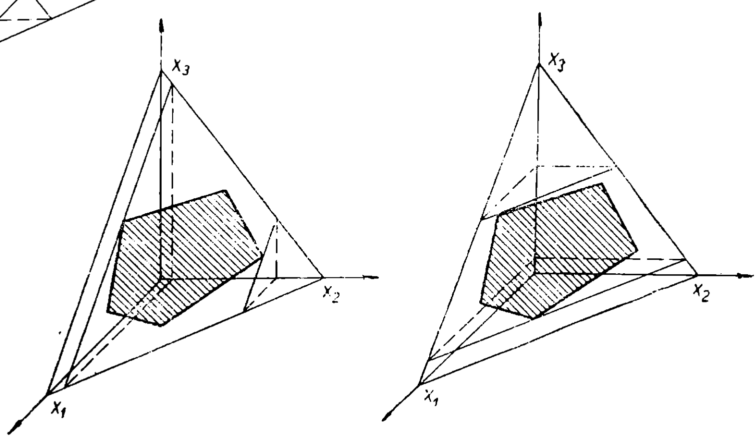
Üleminek tõkke ühelt väärtuselt teisele peab muidugi toimuma nii, et iga väärtusest z^k suurema sihifunktsiooni väärtuse korral pole enam võimalik leida kitsendusi (2)—(4) rahuldavat punkti.

Olgu leitud mingi selline sihifunktsiooni ülemine tõke z^k. Et otsustada, kas z^k saab olla ülesande (1)—(4) sihifunktsiooni optimaalseks väärtuseks, tuleb uurida hüpertasandi $z =$



Joonis 3.





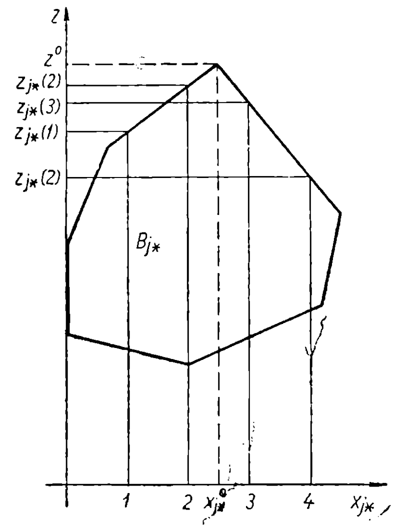
Joonis 4.

$= z^k$ ja hulktahuka (2)—(3) lõiget, mis on alati mingi kumer hulk $(n - 1)$-mõõtmelises ruumis. Näiteks joonisel 3 kujutab viirutatud piirkond üht niisugust lõiget kolmemõõtmelises ruumis (hulktahukas ise pole välja joonistatud; punktides x_1, x_2, x_3 lõikab sihifunktsiooni tasand vastavaid koordinaattelgi). Igas sellises lõikes on igal tundmatul x minimaalne ja maksimaalne väärtus. Vaadeldaval juhul on need joonisel 4 näidatud iga koordinaattelje suhtes eraldi.

Kumera hulktahuka (2)—(3) ja hüpertasandi $z = z^k$ lõikes saab seega iga tundmatu x_j $(j = 1, \ldots, p)$ jaoks leida kaks äärmist väärtust — $\min x_j$ ja $\max x_j$. Teades, et vähemalt ühe tundmatu x_j väärtuste lõigul $[\min x_j, \max x_j]$ pole ühtki täisarvu, võib kohe järeldada, et vastav z_k ei saa olla ülesande (1)—(4) sihifunktsiooni optimaalseks väärtuseks. Vastupidine väide ei tarvitse muidugi alati õige olla, sest kui mingi z^k korral iga tundmatu minimaalse ja maksimaalse väärtuse vahele jääb üks või isegi mitu täisarvu, siis sellest ei saa veel järeldada, et z^k osutub ülesande (1)—(4) sihifunktsiooni optimaalseks väärtuseks.

Et iga fikseeritud $j = j^*$ ja $z = z^*$ korral saab üheselt määrata tundmatu x_{j^*} maksimaalse ja minimaalse lubatava väärtuse, siis seost x_{j^*} muutumise ja hüpertasandi (1) ühelt tasemelt teisele nihutamise vahel võib kirjeldada funktsioonide $\min x_{j^*}$ ja $\max x_{j^*}$ abil. Nende funktsioonide kasutamise selgitamiseks vaatleme süsteemi (1)—(3) poolt määratud kumerat hulktahukat $(n+1)$-mõõtmelises ruumis. Selle hulktahuka projektsiooniks $x_{j^*}z$-tasandil on kumer hulknurk nagu näiteks hulknurk B_{j^*} joonisel 5. Hulknurga külgedeks on funktsioonide $\min x_{j^*}$ ja $\max x_{j^*}$ projektsioonid vaadeldavale tasandile.

Oletame algul lihtsuse mõttes, et ülesandes (1)—(4) nõutakse täisarvulisust vaid tundmatult x_{j^*}. Olgu ülesande (1)—(3) optimaalses lahendis x_{j^*} väärtuseks mittetäisarv $x^0{}_{j^*}$. Hulknurga B_{j^*} kumeruse tõttu võib ülesande (1)—(4) optimaalse lahendi saamiseks vaadelda sihifunktsiooni väärtusi ainult tundmatu x_{j^*} väärtuste $[x_{j^*}{}^0]$ ja $[x_{j^*}{}^0]+1$ korral (joonisel 5 on nendeks sihifunktsiooni väärtused $z_{j^*}(2)$ ja $z_{j^*}(3)$). Sihifunktsiooni väärtuse $z_{j^*}([x_{j^*}{}^0])$ (või $z_{j^*}([x_{j^*}{}^0])+1)$) leidmine on samaväärne kitsendusega $x_{j^*} = [x_{j^*}{}^0]$ (või kitsendusega $x^j{}_* = [x^j{}_*{}^0]+1$) täiendatud ülesande (1)—(3) lahendamisega. Neid tulemusi võrdeldes leitakse nüüd tundmatu x_{j^*} selline täisarvuline väärtus, mille puhul sihifunktsioonil on suurim väärtus (joonisel 5 osutub selliseks $x_{j^*} = 2$).



Joonis 5.

Kui x_{j^*} pole ainuke täisarvulisuse nõudega tundmatu, siis fikseerime algul $x_{j^*} = [x_{j^*}{}^0]$ ja rakendame kirjeldatud protsessi järgmise niisuguse tundmatu suhtes, mis peab samuti olema täisarv. Seejärel fikseerime $x_{j^*} = [x_{j^*}{}^0]+1$ ning toimime analoogiliselt. Iga kord, kui saame mõnedele tundmatutele täisarvulised väärtused, peame meeles vastavad z väärtused ja jätkame protsessi (lähtudes juba leitud punktidest) seni, kuni on saadud täisarvulised väärtused kõigile tundmatutele, mis peavad olema täisarvud. Sel viisil leitud lahendite seast valime lõpuks selle, millele vastab suurim z väärtus. Kirjeldatud lahendusprotsessi praktilisel läbiviimisel tuleb konstrueeritavate lahendite valikul muidugi veel kinni pidada teatavast järjestusest.

Meetodi üksikasjalisemaks kirjeldamiseks võtame kasutusele rea tähistusi. Tähistagu $P(j)$ järgmist ülesannet: leida võrratuste süsteemi (2)—(3) lahendite seast selline, mis maksimiseerib sihifunktsiooni (1), kusjuures nõutakse, et lahendvektoris on j täisarvulist koordinaati ($j = 1, \ldots, p$). Olgu S_j ülesande $P(j)$ lubatavate lahendite hulk ning $\bar{S}$ kõigi $P(j)$-tüüpi ülesannete mittelubatavate lahendite hulk. Seega $P(0)$ tähistab ülesannet (1)—(3), mille lubatavate lahendite hulk S_0 on vaadeldud kumer hulktahukas. Sümboliga $P(p)$ tähistame aga ülesannet (1)—(4), nii et otsitav lahend peab seega olema hulga S_p element. Ilmselt kehtib siinjuures võrratuste ahel

$$\max_{S_p} z \leqslant \max_{S_{p-1}} z \leqslant \ldots \leqslant \max_{S_1} z \leqslant \max_{S_0} z = z_0.$$

Ülesande lahenduskäiku võib nüüd kirjeldada puuna, mille tippudeks on kas hulkade S_j ($j = 1, \ldots, p$) või hulga $\bar{S}$ elemendid, kusjuures osa nendest tippudest märgitakse (märgis $k = 0, 1, \ldots$). Seega on iga tipuga seotud mingi kindel n-mõõtmeline lahendvektor, mis annab sihifunktsioonile teatava väärtuse. Et iga tipu kõige tähtsamaks karakteristikuks ongi sellele tipule vastav sihifunktsiooni väärtus, siis tähistame märgistatud tippe lihtsalt sihifunktsiooni väärtustega $z^0, z^1, \ldots, z^k, \ldots$.

Puu esimeseks märgistatud tipuks z^0 ($k = 0$) on ülesande $P(0)$ optimaalne lahend. Kui saadud lahend on hulga S_p element (tähistame seda sümboolselt $z^0 \in S_p$), siis on lahendusprotsess lõppenud, vastasel juhul aga jätkub.

Oletame, et viimati märgistati tipp $z^k (k \geqslant 0)$. Puu edasine konstrueerimine toimub siis järgmiselt:

1. H a r g n e m i n e. Leitakse kaks tipust z^k lähtuvat haru, mille lõpptippude määramiseks valitakse mingi täisarvulisuse nõudega tundmatu, millel on tipus z^k murdarvuline väärtus. Olgu selleks tundmatuks x_i väärtusega x_i^k. Puu uuteks tippudeks võetakse nüüd $z_i([x_i^k])$ ja $z_i([x_i^k] + 1)$, mille saamiseks tuleb lahendada ülesanded $P(k)$ lisakitsendusega vastavalt kas $x_i = [x_i^k]$ või $x_i = [x_i^k] + 1$. Uued tipud kuuluvad hulkadesse S_{k+1} või $\bar{S}$ sõltuvalt sellest, kas need ülesanded $P(k)$ koos vastava lisakitsendusega on lahenduvad või mitte.

2. T õ k e s t a m i n e. Märgistamata tippude seas, mis ei kuulu hulka $\bar{S}$, märgitakse tipuks z^{k+1} see, milles sihifunktsiooni väärtus

on suurim. Kui $z^{k+1} \in S_p$, siis on lahendusprotsess lõppenud. Vastasel juhul jätkub töö algoritmi punktiga 3.

3. H a r g n e m i n e. Kui $z^{k+1} \not\subset S_p$, siis täiendatakse puud uute harude ja tippudega. Tipp z^{k+1} saadi selle tipuga samal harul asuvast naabertipust mingi tundmatu x_i täisarvuliseks muutmisel. Tipus z^{k+1} olgu $x_i = v$, kusjuures see ülesandele lisatud kitsendus $x_i = v$ säilib puu kõigis harudes, mis lähtuvad tipust z^{k+1}. Nüüd leitakse $z_i(v-1)$ ja $z_i(v+1)$ väärtused (vastavalt kitsenduste $x_i = v-1$ ja $x_i = v+1$ korral), mis on puu uuteks tippudeks, ning ühendatakse sama tipuga, millest lähtub tippu z^{k+1} suunduv haru. Tuleb märkida, et sageli leitakse juba algoritmi punktis 1 üks väärtustest $z_i(v-1)$ või $z_i(v+1)$. Kui $z_i(v-1) \neq z^{k+1}$ ja $z_i(v+1) \neq z^{k+1}$, siis võetakse k asemele $k+1$ ning tööd jätkatakse punktist 1, kusjuures tuleb säilitada kõik lisakitsendused, mis olid vajalikud tipu z^{k+1} leidmiseks. Kui aga $z_i(v-1) = z^{k+1}$ või $z_i(v+1) = z^{k+1}$, siis tuleb puule veel uusi tippe lisada. Näiteks $z_i(v-1) = z^{k+1}$ korral (juhtum $z_i(v+1) = z^{k+1}$ on täiesti analoogiline) tuleb arvutada väärtusi $z_i(v-p)$, kus $1 \leqslant p \leqslant v$, seni kui saadakse väärtus, mis on väiksem kui z^{k+1}, või kui jõutakse tipuni, mis osutub hulga $\overline{S}$ elemendiks. Seejärel võetakse k asemele $k+1$ ja töö jätkub algoritmi punktist 1.

Kirjeldatud lahenduskäigust on näha, et märgistatud tipud moodustavad sihifunktsiooni z väärtuste kahaneva jada. Kuna märgistamata tippudes on sihifunktsiooni väärtused rangelt väiksemad väärtustest märgistatud tippudes ja kuna vaadeldakse kõiki võimalusi, siis jõutakse tingimata ülesande $P(p)$ optimaalse lahendini, kui see on olemas. Kui aga vaadeldaval ülesandel lahend puudub, siis jõutakse olukorrani, kus puu kõik harud lõpevad tippudega, mis on hulga $\overline{S}$ elementideks.

Lahendame näiteülesande, mida vaatlesime ka Gomory meetodi käsitlemisel (vt. artikli eelmist osa): maksimiseerida lineaarvorm

$$z = 2x_1 + x_2$$

kitsendustel

$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 &\leqslant 12 \\ x_1 - 2x_2 &\leqslant 2 \\ x_1, x_2 &\geqslant 0; \ x_1, x_2 \text{ — täisarvud.} \end{aligned}$$

Selle ülesande lahenduskäiku illustreerib joonis 6.

Kõigepealt lahendatakse ülesanne tundmatute x_1 ja x_2 täisarvulisuse nõuet arvestamata. Simpleksmeetodit kasutades saadakse lahendiks

$$z^0 = 5\frac{9}{11}, \quad x_1 = 2\frac{8}{11}, \quad x_2 = \frac{4}{11}.$$

Vastavalt algoritmi punktile 1 valime nüüd välja (selles lahendis suurima murdosaga) tundmatu x_1. Võttes kõigepealt $x_1 = [2\frac{8}{11}] = 2$ tuleb sihifunktsiooni väärtuse $z_1(2)$ saamiseks lahendada ülesanne: maksimiseerida lineaarvorm

$$z = x_2 + 4$$

kitsendustel

$$x_1 = 2, \quad x_2 \leqslant \frac{4}{3}, \quad x_2 \geqslant 0.$$

Lahendiks saadakse

$$z_1(2) = 5\frac{1}{3}$$

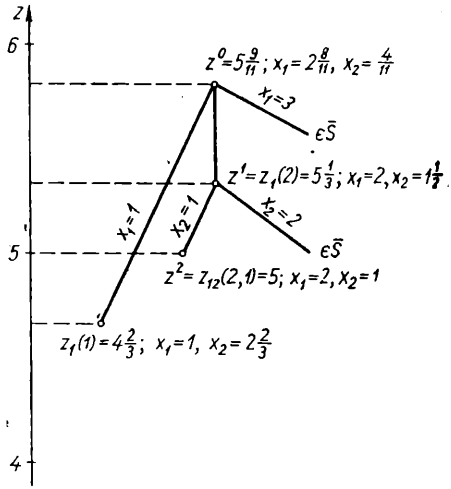
$$x_1 = 2, \quad x_2 = 1\frac{1}{3}.$$

Võttes nüüd $x_1 = \left[2\frac{8}{11}\right] + 1 = 3$ tuleb väärtuse $z_1(3)$ leidmiseks lahendada veel ülesanne: maksimiseerida lineaarvorm

$$z = 6 + x_2$$

kitsendustel

$$x_1 = 3, \quad x_2 \leqslant 0, \quad x_2 \geqslant \frac{1}{2}.$$



Joonis 6.

Nagu kitsendustest näha, puudub sellel ülesandel lahend, seega $z_1(3) \in \bar{S}$.

Algoritmi punkti 2 kohaselt märgistatakse nüüd tipp $z_1(2) = z^1$. Et aga $z^1 \notin S_2$, siis tuleb algoritmi punkti 3 põhjal leida sihifunktsiooni väärtused $z_1(1)$ ja $z_1(3)$. Neist $z_1(3)$ on juba arvutatud (kusjuures $z_1(3) \in \bar{S}$), $z_1(1)$ arvutamiseks tuleb aga lahendada ülesanne: maksimiseerida lineaarvorm

$$z = x_2 + 2$$

kitsendustel

$$x_1 = 1, \quad x_2 \leqslant \frac{8}{3}, \quad x_2 \geqslant -\frac{1}{2}.$$

Lahendiks saadakse

$$z_1(1) = 4\frac{2}{3}, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2\frac{2}{3}.$$

Et $x^1 > z_1(1)$, siis jätkub lähteülesande lahendamine algoritmi punkti 1 järgi.

Viimasena märgistati tipp $z^1 = 5\frac{1}{3}$, kusjuures selles tipus $x_1 = 2$ ja $x_2 = 1\frac{1}{3}$. Ainukeseks murdarvulise väärtusega tundmatuks, millelt nõutakse täisarvulisust, on nüüd x_2. Võttes $x_2 = [1\frac{1}{3}] = 1$ saadakse $z_{12}(2, 1) = 5$. Kui aga võtta $x_2 = [1\frac{1}{3}] + 2$, siis $z_{12}(2, 2) \in \overline{S}$, sest ülesande kitsendused pole rahuldatavad.

Vastavalt algoritmi punktile 2 leitakse

$$\max (z_1(1), z_{12}(2, 1)) = z_{12}(2, 1) = z^2 = 5.$$

Kuna $z_{12}(2, 1) \in S_2$, siis $z_{12}(2, 1) = 5$ ongi sihifunktsiooni optimaalseks väärtuseks.

Ligikaudsed lahendusmeetodid erikujuliste planeerimisülesannete lahendamiseks

Iteratsioonimeetod laadimisülesannete[2] lahendamiseks. Laadimisülesannet võib matemaatiliselt sõnastada näiteks järgmiselt: maksimiseerida lineaarvorm

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{5}$$

kitsendustel

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i (i = 1, \ldots, m), \tag{6}$$

$$x_j = 0 \text{ või } 1 \ (j = 1, \ldots, n), \tag{7}$$

kus kõik kordajad a_{ij}, b_i, c_j on mittenegatiivsed.

Et suure dimensiooniga ülesannete puhul osutub täpsete lahendusmeetodite koondumiskiirus sageli ebapiisavaks isegi kaasaegset arvutustehnikat abiks võttes, siis tuleb praktikas esinevate majandusliku planeerimise või juhtimise probleemide matemaatilisel uurimisel mõnikord kasutada heuristilisi võtteid ligikaudse lahendi saamiseks. Järgnevas kirjeldatavat I. Pjatetski-Šapiro, V. Volkonski, L. Levina ja A. Pomanski algoritmi kasutati näiteks sellise majandusliku sisuga ülesande lahendamisel.

Olgu tegemist n objektiga, mille ehitamisel kasutatakse m erinevat liiki ressursse, kusjuures antud varude puhul pole võimalik kõiki n objekte valmis ehitada. Tähistagu b_i ressursi i varu, selle ressursi kulu objekti j ehitamisel olgu a_{ij} ühikut, c_j aga iseloomustagu mingil viisil j-nda objekti kasulikkust. Nendele andmetele tuginedes tuleb leida realiseeritav ja seejuures võimalikult hea

---

[2] Laadimisülesannetest võib lähemalt lugeda artiklis Ü. K a a s i k, E. T a m m e. Laadimisülesanded. — Matemaatika ja kaasaeg, XII, lk. 64—72.

ehitusplaan $x = (x_1, \ldots, x_n)$, kus $x_j = 1$ või 0 sõltuvalt sellest, kas objekt j on plaani võetud või mitte.

Ülesande lahendamine algab sellega, et valitakse teataval viisil sihifunktsiooni (5) alumine tõke b_0 ning leitakse vektor $x = (x_1, \ldots, x_n)$, mis rahuldab seoseid (6), (7) ja täiendavat kitsendust

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \geqslant b_0. \tag{8}$$

Tõke b_0 valitakse teatavatest praktilistest kaalutlustest lähtudes, vektor x aga kui kitsenduste süsteemi (6)—(8) lahend leitakse järgmise iteratsiooniprotsessiga.

Lähtevektor $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ valitakse suvaliselt. Olgu üldiselt sammul $k (k \geqslant 0)$ saadud vektor $(x_1^k, \ldots, x_n^k)$. Arvutame nüüd suurused

$$\Delta_0 = \max \left(\frac{b_0 - \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^k}{b_0}, 0 \right)$$

ja

$$\Delta_i = \max \left(\frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^k - b_i}{b_i}, 0 \right) \quad (i = 1, \ldots, m),$$

mis iseloomustavad vastavalt kitsenduse (8) ja kitsenduste (6) mittetäidetust (ehk mittetäidetusest tekkinud kahju) selle vektori x^k korral. Kui mingi Δ_i $(i = 0, 1, \ldots, m)$ on nullist erinev, siis pole kitsenduste süsteem (6)—(8) veel rahuldatud ja tuleb teostada järgmine iteratsioonisamm, mille käigus muudame juhuslikult, ühe ja sama tõenäosusega

$$p = \min (\tau, \max_{0 \leqslant i \leqslant m} \Delta_i)$$

ning üksteisest sõltumatult vektori $(x_1^k, \ldots, x_n^k)$ komponente[3] $(0 \leqslant \tau \leqslant 1$, tehtud arvutuseksperimentides võeti $\tau = 0{,}5)$. Seega saadakse uus vektor $(x^{k+1}, \ldots, x_n^{k+1})$.

---

[3] Selleks tuleb n korda teostada mingit juhuslikku katset, mis iga kord tõenäosusega $p = \frac{\alpha}{\beta}$ annab teatava tulemuse. Olgu näiteks urnis β kuulikest, neist α valged. Võtame j-ndal katsel urnist juhuslikult kuulikese. Kui selleks on valge kuulike, siis muudame komponenti x_j^k (s. t. kui $x_j^k = 1$, siis $x_j^{k+1} = 0$, ja kui $x_j^k = 0$, siis $x_j^{k+1} = 1$). Et katsetulemused oleksid üksteisest sõltumatud, tuleb väljavõetud kuulike iga kord pärast katsetulemuse fikseerimist urni tagasi panna. Masinaeksperimentides muidugi selliseid katseid ei tehta, vaid kasutatakse juhuslike arvude generaatoreid.

Kui mingil iteratsioonisammul kõik $\Delta_i = 0$ $(i = 0, 1, \ldots, m)$, siis on iteratsiooniprotsess lõppenud, sest vastav vektor rahuldab kitsenduste süsteemi (6)—(8) ja on seega ülesandele (5)—(7) esialgseks ligikaudseks lahendiks.

Saadud ligikaudse lahendi parandamiseks suurendatakse tõket b_0 ja korratakse esitatud mõttekäiku. Kui teatud küllalt suure arvu sammude järel süsteemi (6)—(8) lahendit ei saada, siis võib lahendamise lõpetada, võttes ligikaudseks lahendiks ülesandele (5)—(7) eelmistel iteratsioonidel konstrueeritud parima lahendi.

I. Pjatetski-Šapiro, V. Volkonski, D. Kazakevitš ja L. Levina on kirjeldatud meetodit modifitseerinud. Suurema dimensiooniga ülesannete lahendamisel tükeldavad nad ülesande mitmeks osaülesandeks, millest igaühele leitakse terve hulk optimaalsele lahendile lähedasi lahendeid. Lähteülesande lahend saadakse seejuures osaülesannete lahendite kombineerimisel (vaadatakse läbi kõikvõimalikud osaülesannete lahendite kombinatsioonid). Sellist lähenemisviisi õigustab asjaolu, et majandusliku sisuga ülesannetele on sageli iseloomulik algandmete teatav ebatäpsus, mistõttu optimaalne lahend võib osutuda ebastabiilseks (s. t. algandmete vähesel muutmisel osutuda esialgsest lahendist suhteliselt kaugel asuvaks). Süsteemi (6)—(8) lahendamise lihtsustamiseks otsitakse mõnikord lahendeid, mis rahuldavad kitsendusi (6)—(7) teatava etteantud täpsusega; edasises vaadeldakse aga juba nimetatud lahendite kombinatsioone.

Reiter-Shermani meetod. S. Reiter ja G. Sherman esitasid ligikaudse meetodi, milles lubatava lahendi juhusliku valikuga kaasneb selle lahendi parandamine «lokaalse» optimumini (s. t. optimiseerimine toimub vaid valitud lahendi teatavas ümbruses).

Lubatavat lahendit juhuslikult valides on oluline, et teda oleks kerge leida, s. t. ülesande lubatavate lahendite hulk peab olema ülevaatlik. Üldiselt see nii küll ei ole, kuid «sobivaid» ülesandeid leidub siiski üsna rohkesti. Kerge on näiteks leida «rändkaupmehe ülesande» lubatavaid lahendeid: nendeks on kõikvõimalikud permutatsioonid naturaalarvudest $1, 2, \ldots, n$.

Defineerime lubatava lahendi X ümbruse $G(X)$ kui teatava reegli järgi valitud lubatavate lahendite hulga. Ainuke (praktiline) nõue ümbrusele seisneb selles, et sinna ei tohi kuuluda liiga palju lubatavaid lahendeid, s. t. ümbruse elementide täielik uurimine peab olema praktiliselt teostatav. «Rändkaupmehe ülesande» mingi lubatava lahendi ümbruse võib konstrueerida näiteks kõigist niisugustest permutatsioonidest, mis saadakse sellele lahendile vastavast jadast $i_1, \ldots, i_n$ mingi kahe indeksi ümbervahetamise teel.

Lubatavat lahendit X nimetatakse «lokaalseks» maksimumiks (minimiseerimisülesande puhul defineeritakse analoogiliselt «lokaalne» miinimum), kui X ümbruses ei leidu ühtegi lahendit Y, mis annaks sihifunktsioonile f suurema väärtuse, kui annab X:

$$f(X) \geqslant \max_{Y \in G(X)} f(Y).$$

Reiter-Shermani algoritm seisneb järgmise kahe etapi korduvas rakendamises:

a) lubatava lahendi juhuslik valik,

b) saadud lubatava lahendi parandamine «lokaalse» optimumini.

Vaatleme lähemalt etapil a) valitud lahendi X^0 «lokaalset» optimiseerimist. Nimetades lähtelahendi X^0 parandamist esimeseks iteratsioonisammuks, kirjeldame üldiselt sammu k ($k \geqslant 1$). Selle käigus vaadeldakse kõiki juba leitud lahendi X^{k-1} ümbrusse $G(X^{k-1})$ kuuluvaid lahendeid X. Kui X^{k-1} osutub «lokaalseks» optimumiks, siis on ülesande üks ligikaudne lahend saadud ning parema lahendi saamiseks võib protsessi korrata. Kui aga leidub $X^k \in G(X^{k-1})$, nii et

$$f(X^k) = \max_{X \in G(X^{k-1})} f(X) > f(X^{k-1}),$$

siis suurendame k väärtust ja kordame kirjeldatud iteratsioonisammu.

Etappide a)—b) korduv rakendamine annab rea «lokaalseid» optimume. Nende seast valitaksegi lõpuks parim (sihifunktsiooni väärtuse järgi), mis võetakse ülesande ligikaudseks lahendiks.

Meetodi mõnedes modifikatsioonides võetakse kasutusele veel arvutustöö mahu «maksumuse» mõiste (või mingi teine analoogiline karakteristik), et mitte lahendit vähe parandada liiga kalli «hinnaga». Loomulikult sõltub meetodi seadus oluliselt lubatava lahendi ümbruse konstrueerimise viisist. S. Reiter ja G. Sherman kasutasid «rändkaupmehe ülesande» lahendamisel tervet algoritmide seeriat, katsetades mitmeid ümbruse konstrueerimise reegleid.

Arvutuseksperimentide tulemustest

Kõigi eespool vaadeldud meetodite praktilise väärtuse määrab nende rakendatavuse efektiivsus konkreetsete täisarvulise planeerimise ülesannete lahendamisel, nende meetodite realiseeritavus elektronarvutitel, sest vähegi suuremate ülesannete lahendamine pole mõeldav kaasaegse arvutustehnika abita. Kahjuks on uurimused konkreetsete meetodite rakendatavusest eksperimentaalset laadi ning seni pole paljude arvutuseksperimentide tulemustele õnnestunud anda teoreetilist põhjendust.

Lõikemeetodeid kui esimesena tuntuid on arvutuslikult kõige rohkem uuritud. Vaatamata Gomory meetodi koondumisele lõpliku arvu sammude järel pole veel kaugeltki selge, milliste ülesannete korral lahendit praktiliselt õnnestub saada. Arvutuspraktikas ilmneb, et osa ülesandeid lahendub äärmiselt kiiresti, teised aga nõuavad nii palju iteratsioone, et nende lahendamist hakkab piirama aeg. On esinenud ülesandeid, mille lahendit polegi õnnestunud saada, kuigi tundmatuid on alla kümne; teiselt poolt on aga edukalt lahendatud mitmekümne tundmatuga ülesandeid. Huvitav on märkida, et ühe kolme kitsenduse ja kuue tundmatuga ülesande lahendamisel tuleb teostada üle 3000 iteratsiooni, mis rohkem kui neljakordselt ületab lubatavate lahendite otsese läbivaatamisega kaasneva töömahu.

Mitmetes arvutuseksperimentides on tähele pandud Gomory meetodi iteratsioonide arvu sõltuvust juhtrea valikust ja tundmatute ümbernummerdamisest. Näiteid selle kohta võib kirjanduses leida hulgaliselt. On teada üks 20 kitsenduse ja 39 tundmatuga ülesanne, mis juhtrea ühe valikureegli puhul lahendati 70 iteratsiooniga, teise valikureegli kasutamise korral aga ei saadud lahendit veel 30 000 iteratsiooni järel. Seni polegi Gomory meetodi jaoks õnnestunud määrata üldist efektiivset juhtrea valiku eeskirja.

Gomory meetodi koondumise kiirendamiseks on välja töötatud mitmeid selle meetodi modifikatsioone. Üks tuntumaid on G. T. Martini poolt 1963. a. esitatud algoritm. On teada, et 1965. a. lahendati nimetatud algoritmi abil arvutil IBM-7094 24 minutiga ülesanne dimensiooniga 80×2400. Suurim teadaolev ülesanne, mis lahendati selle meetodiga, on aga mõõtmetega 215×2600. Tundub, et selliste suurte ülesannete lahendamine oli võimalik mitte niivõrd meetodi efektiivsuse kui just vaadeldud ülesannete klassi heade omaduste tõttu. Mõlema ülesande maatriksis oli nimelt nullist erinevaid elemente vaid 15%, kusjuures enamik neist võrdus ühega. On ju üldse tähele pandud, et lõikemeetodite puhul kasvab iteratsioonide arv ülesande tundmatute ja kitsenduste arvu kasvamisel, kordajate maatriksi elementide suurusjärgu kasvamisel ja maatriksis nullist erinevate elementide arvu suurenemisel.

Kombinatoorsete meetodite osas on arvutuspraktika tunduvalt vaesem. Land-Doigi meetodi rakendusest võib tuua näiteks R. J. Dakini lahendatud ülesande dimensiooniga 15×30, kus kõigilt tundmatuilt nõuti täisarvulisust. Ülesande lahend Land-Doigi meetodil saadi (arvutil KDF9) 484 iteratsiooni järel, kuna sama ülesande lahendamine Gomory meetodiga ei andnud lahendit veel 2000 iteratsiooniga. Land-Doigi meetodi üheks tõsiseks puuduseks on aga asjaolu, et lahendatava ülesande mõõtmete suurenemisel kasvavad algandmete ja vahetulemuste säilitamiseks vajalikud mälu ning arvutustöö mahud üsna kiiresti. Mälu kasutamise suhtes ökonoomsem on G. L. Thomsoni esitatud Land-Doigi meetodi modifikatsioon.

Sama puudus mis Land-Doigi meetodil on ka J. D. C. Little'i, K. G. Murty, D. W. Sweeney ja C. Kareli meetodil «rändkaupmehe ülesande» lahendamiseks. Nii lahendati (arvutil IBM-7090) ülesanded 30 linnaga keskmiselt ühe minutiga, linnade arvu suurenemisel kasvas aga lahendusaeg järsult.

I. Pjatetski-Šapiro, V. Volkonski, L. Levina ja A. Pomanski iteratsioonimeetodi koondumiskiiruse kohta võib tuua järgmised näited. Ülesande puhul, mille mõõtmed olid 3×17 ning sihifunktsiooni tõeline optimaalne väärtus $z = 14{,}91$, saadi vastavalt 14 ja 166 iteratsiooni järel ligikaudsed lahendid sihifunktsiooni väärtustega 13,88 ja 14,76. Teise ülesande puhul, mille mõõtmed olid 2×30 ja sihifunktsiooni optimaalne väärtus $z = 20$, saadi z väärtused 15, 16, 17, 18, 19 vastavalt 253, 777, 1335, 2317 iteratsiooni järel.

Ka arvutuseksperimentide tulemused «rändkaupmehe ülesande» lahendamisel S. Reiteri ja G. Shermani meetodiga olid üpris edukad. Katsetati mitut varianti, mis erinesid üksteisest lubatava lahendi ümbruse konstrueerimise reeglite poolest. Ühe ülesande (33 linna) paljukordsel lahendamisel andis üks vaadeldud variantidest optimaalse lahendi 23% arvutuseksperimentide korral, teine variant aga 33% juhtudest.

Võib arvata, et arvutustehnika ning lahendusmeetodite täiustamise tulemusena õnnestub tulevikus mitte ainult suurema dimensiooniga ülesannete lahendamine, vaid ka iga konkreetse meetodi jaoks selle abil hästi lahenduvate ülesannete klassi eristamine.

1	2	3	4	5
6			7	
8			9	
10	11	12		
13		14		

RISTARVUD

Paremale:

1. b^2;
4. $a + c - 1$;
6. $c^4 - d^2 - 2a$;
7. ad ;
8. $2a^2b^2$;
10. b;
12. $b^3 - a^3$;
13. a^2;
14. a^3;

Alla: 1. $3cb^2d - 10b^2 - 11$; 2. abd ; 3. $2cb^2d + 3$; 4. $(c^2 - 1) : 2$; 5. $2a^2b^2 + c^3$; 9. $2c^3 + a^3 - d$; 11. $a + b + 1$.

LINEAARSETE PUHTTÄISARVULISTE PLANEERIMISÜLESANNETE LAHENDAMISE ALGORITMID

L. Kivistik

1. Sissejuhatus

Meie kogumiku eelmises ja käesolevas numbris on avaldatud ülevaade lineaarsete täisarvuliste planeerimisülesannete lahendamise meetoditest [1]. Muuhulgas on ülevaates esitatud Gomory I algoritm, mis kuulub nn. lõigete meetodite hulka. Kuna täisarvulise planeerimise meetodite seas on lõigete meetodid kõige enam uuritud ja ühtlasi kõige lihtsamini programmeeritavad, siis tutvume allpool veel kahe sama tüüpi meetodiga, millest eriti teine, alles hiljuti väljatöötatud algoritm peaks pälvima erilist tähelepanu. Erinevalt Gomory I algoritmist võimaldavad tutvustatavad algoritmid arvutusi täisarvuliste maatriksitega ega nõua jagamise tehet. See asjaolu muudab algoritmide rakendamise eriti mugavaks. Arvuti kasutamisel on hõlpsasti välditav ümardamisvigade tekkimine ja kuhjumine, mis on tõsiseks probleemiks Gomory I meetodi korral.

Mõlemad allpool tutvustatavad algoritmid seisnevad üleminekus ühelt täisarvuliselt lahendilt teisele, niikaua kuni saadakse optimaalne lahend. Esimene algoritmidest kasutab duaalset simpleksmeetodit ja säilitab igal sammul simplekstabeli duaalse lubatavuse. Teine algoritm kasutab otsest simpleksmeetodit ja säilitab igal sammul lahendi lubatavuse. Lahendi optimaalsuse tunnus on nende algoritmide jaoks sama mis simpleksmeetodi korral.

Allpool vaatleme täielikult täisarvulist planeerimisülesannet järgmisel kujul: leida mittenegatiivsete komponentidega vektor $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, mis maksimiseerib sihifunktsiooni

$$x_0 = a_{00} + \sum_{j=1}^{n} a_{0j}(-x_j) \tag{1}$$

tingimustel

$$x_{n+i} = a_{i0} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-x_j) \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \tag{2}$$

$$x_j \text{ — täisarvud}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \tag{3}$$

[1] A. Leiten, M. Viitso. Täisarvulised planeerimisülesanded. — Matemaatika ja kaasaeg, XVI, lk. 36—46. XVII, lk. 58—70.

kusjuures eeldame, et kõik kordajad a_{ij} ($i = 0, 1, \ldots, m$; $j = 0, 1, \ldots, n$) on täisarvud[2]. Lisame tingimustele (2) veel samasused

$$x_j = -(-x_j), \quad j = 1, 2, \ldots, n \tag{4}$$

ja esitame seosed (1), (2), (4) järgmise simplekstabelina:

	1	$-x_1$	$\ldots$	$-x_l$	$\ldots$	$-x_n$
$x_0 =$	a_{00}	a_{01}	$\ldots$	a_{0l}	$\ldots$	a_{0n}
$x_1 =$	0	-1	$\ldots$	0	$\ldots$	0
$\vdots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$x_l =$	0	0	$\ldots$	-1		0
$\vdots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$x_n =$	0	0		0	$\ldots$	-1
$x_{n+1} =$	a_{10}	a_{11}		a_{1l}		a_{1n}
$\vdots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$x_{n+k} =$	k_{k0}	a_{k1}		a_{kl}		a_{kn}
$\vdots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$x_{n+m} =$	a_{m0}	a_{m1}	$\ldots$	a_{ml}		a_{mn}

(5)

Kui tähistada simplekstabeli j-ndat veergu α_j ($j = 0, 1, \ldots, n$) ja sama veergu pärast üht simplekssammu $\bar{\alpha}_j$, siis üleminek ühelt simplekstabelilt teisele nii simpleksmeetodi kui ka duaalse simpleksmeetodi korral toimub teatavasti järgmiste lihtsate valemite kohaselt[3]:

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_l &= -\frac{1}{a_{kl}}\alpha_l, \\ \bar{\alpha}_j &= \alpha_j + a_{kj}\bar{\alpha}_l = \alpha_j - \frac{a_{kj}}{a_{kl}}\bar{\alpha}_l, \end{aligned} \tag{6}$$

kus a_{kl} on juhtelement. Skemaatiliselt võib üleminekut uuele tabelile kujutada järgmiselt:

---

[2] Ilmselt järeldub siit, et ka abitundmatud $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$ on mittenegatiivsed ja täisarvulised.

[3] Need valemid võib saada, ühendades koordinaatkujul teadaolevad valemid veergude kaupa.

$$
\begin{array}{ll|cc|}
 & & -x_l & -x_j \\
\hline
x_0 & = & \vdots & \vdots \\
x_1 & = & \vdots & \vdots \\
\vdots & & & \\
x_n & = & a_l & a_j \\
x_{n+1} & = & \vdots & \vdots \\
\vdots & & & \\
x_{n+m} & = & \vdots & \vdots \\
\hline
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{array}{ll|cc|}
 & & -x_{n+l} & -x_j \\
\hline
x_0 & = & \vdots & \vdots \\
x_1 & = & \vdots & \vdots \\
\vdots & & & \\
x_n & = & \bar{a}_l & \bar{a}_j \\
x_{n+1} & = & \vdots & \vdots \\
\vdots & & & \\
x_{n+m} & = & \vdots & \vdots \\
\hline
\end{array}
$$

Kuna allpool kirjeldatavate meetodite korral juhtelement a_{kl} on kas -1 või $+1$ ja a_{kj} on täisarv, siis üleminek ühelt tabelilt teisele seisneb järgnevas: 1) kui $a_{kl} = -1$, jääb juhtveerg muutmata; kui $a_{kl} = 1$, siis muudetakse juhtveerus kõikide elementide märgid vastupidiseks, ja 2) ülejäänud veergudele liidetakse või neist lahutatakse juhtveerg niimitu korda, kuipalju on tarvis selleks, et kõik juhtrea elemendid (peale juhtelemendi) teiseneksid nulliks.

2. Gomory III algoritm

Alustame R. E. Gomory poolt 1960. a. soovitatud algoritmist, mida mõnikord nimetatakse Gomory III algoritmiks ehk «diskreetseks» algoritmiks.[4] Selleks et nimetatud algoritmi saaks rakendada, peab ülesanne (1)—(2) olema duaalselt lubataval kujul, s. t. sihifunktsiooni (1) kordajad $a_{01}, a_{02}, \ldots, a_{0n}$, ehk mis on sama, simplekstabeli (5) esimese rea elemendid alates teisest peavad olema mittenegatiivsed täisarvud. Kui see nii ei ole, siis enamasti saab ülesannet hõlpsasti teisendada kujule, kus nõutud tingimus on täidetud. Tõepoolest, eeldades, et kitsendustega (2) määratud piirkond on ülalt tõkestatud vähemalt nende koordinaatide järgi, mille korral $a_{0j} < 0$, saame leida x_j jaoks täisarvulise tõkke d_j, nii et $x_j \leqslant d_j$. Teostades muutujate vahetuse $x_j = d_j - x_j'$ kõikide nende indeksite j korral, mille puhul $a_{0j} < 0$, saame ülesande kujul, kus duaalse lubatavuse nõue on täidetud (kordajate täisarvulisus ilmselt säilib). Tõkke d_j võib leida näiteks sel teel, et lahendame x_j maksimiseerimise ülesande tingimustel (2). Juhul kui kitsenduste (2) seas leidub kitsendus $a_{k0} + \sum_{t=1}^{n} a_{kt}(-x_t) \geqslant 0$, mille kõik kordajad a_{kt} $(t = 0, 1, \ldots, n)$ on mittenegatiivsed ja $a_{kj} > 0$, saame tõkke d_j lihtsamalt. Selleks

[4] Gomory III algoritm on esitatud näiteks raamatus А. А. Корбут, Ю. Ю. Финкельштейн. Дискретное программирование, Москва, 1969.

sobib ilmselt $\left[\frac{a_{k0}}{a_{kj}}\right]$. Mõnikord saab üsna lihtsalt moodustada mitme kitsenduse lineaarse positiivsete kordajatega kombinatsiooni, mis on sama omadusega nagu nimetatud kitsendus. Siis võib tõkked d_j määrata selle kombinatsiooni abil.[5]

Eeldame, et ülesanne (1)—(4) on juba vajalikul kujul, s. t. simplekstabelis (5) on esimese rea elemendid alates teisest mittenegatiivsed. Kui ka esimese veeru elemendid $a_{10}, a_{20}, \ldots, a_{m0}$ on mittenegatiivsed, on ülesande (1)—(3) optimaalne lahend leitud. Vaatleme juhtu, kus kordajate a_{i0} seas leidub negatiivseid. Siis simplekstabelist (5) saadav baasilahend

$$x_1 = \ldots = x_n = 0, \quad x_{n+1} = a_{10}, \quad \ldots, \quad x_{n+m} = a_{m0} \tag{7}$$

ei ole lubatav, sest ta ei rahulda mittenegatiivsuse nõuet. Olgu näiteks $a_{k0} < 0$. Konstrueerime täiendava kitsenduse, mida rahuldavad kõik lubatavad lahendid, kuid ei rahulda (mittelubatav) baasilahend (7). Selleks et nimetatud kitsendust saada, jagame k-nda kitsenduse positiivse reaalarvuga λ (λ väärtuse määrame hiljem):

$$\frac{x_{n+k}}{\lambda} = \frac{a_{k0}}{\lambda} + \sum_{j=1}^{n} \frac{a_{kj}}{\lambda}(-x_j).$$

Eraldades kordajate täis- ja murdosad saame[6]

$$\frac{x_{n+k}}{\lambda} + \sum \left\{\frac{a_{kj}}{\lambda}\right\} x_j - \left\{\frac{a_{k0}}{\lambda}\right\} = \left[\frac{a_{k0}}{\lambda}\right] + \sum \left[\frac{a_{kj}}{\lambda}\right](-x_j). \tag{8}$$

Kuna mittenegatiivsete x_{n+k} ja x_j korral on

$$\frac{x_{n+k}}{\lambda} + \sum \left\{\frac{a_{kj}}{\lambda}\right\} x_j \geqslant 0 \text{ ja } -\left\{\frac{a_{k0}}{\lambda}\right\} > -1,$$

siis on x_{n+k}, x_j lubatavate väärtuste korral võrduse (8) vasak pool rangelt suurem kui -1. Et võrduse parem pool on täisarvuliste x_j väärtuste korral täisarv, siis on seda ka vasak pool. See aga tähendab, et võrduse (8) vasak ja seega ka parem pool on lubatavate täisarvuliste x_{n+k}, x_j korral mittenegatiivne täisarv:

$$s = \left[\frac{a_{k0}}{\lambda}\right] + \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{a_{kj}}{\lambda}\right](-x_j) \geqslant 0, \quad s \text{ —täisarv.} \tag{9}$$

Et $a_{k0} < 0$, siis $\left[\frac{a_{k0}}{\lambda}\right] \leqslant -1$ ja simplekstabelist (5) saadav baasilahend, milles $x_j = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, ei rahulda võrratust (9).

---

[5] Märgime, et leidub ka teisi võimalusi ülesande teisendamiseks duaalselt lubatavale kujule (vt. näit. viites 4 märgitud monograafia).

[6] $\{a\}$ tähistab arvu a murdosa, $[a]$ aga täisosa. Seega $a = [a] + \{a\}$, kusjuures alati $0 \leqslant \{a\} < 1$.

Seega lõikab võrratus (9) iga $\lambda > 0$ korral kitsenduste süsteemi (2) lahendite hulgast välja leitud mittelubatava baasilahendi (ja teatavad selle ümbruses asuvad mittelubatavad lahendid), kuid ei lõika ära ühtki lubatavat täisarvulist lahendit. Lisamegi kitsenduste süsteemile (2) kitsenduse (9), lugedes s uueks täisarvuliseks tundmatuks. Siis lisandub simplekstabelile (5) rida

$$s = \left| \left[\frac{a_{k0}}{\lambda}\right] \middle| \left[\frac{a_{k1}}{\lambda}\right] \dots \left[\frac{a_{kl}}{\lambda}\right] \dots \left[\frac{a_{kn}}{\lambda}\right] \right| \qquad (5s)$$

Valime selle rea juhtreaks ja teostame duaalse simpleksmeetodi ühe sammu, määrates enne λ nii, et juhtelement $\left[\frac{a_{kl}}{\lambda}\right]$ võrduks -1-ga. Saame uuesti duaalselt lubatava ja täisarvulise simplekstabeli. Kui see ei ole lubatav, siis rakendame talle jälle ülalkirjeldatud võtet. Lõpuks jõuame tabelini, mis on nii duaalselt lubatav kui ka lubatav ja annab optimaalse lahendi.

Vaatleme λ määramist. Arvestades valemeid (6), kus juhtelemendi a_{kl} asemel on $\left[\frac{a_{kl}}{\lambda}\right] = -1$ ja a_{kj} asemel $\left[\frac{a_{kj}}{\lambda}\right]$, saame teisendatud simplekstabeli veergudeks

$$\bar{a}_l = a_l, \quad \bar{a}_j = a_j + \left[\frac{a_{kj}}{\lambda}\right] a_l \quad (j \neq l).$$

Esimese rea elemendid teisenevad seega järgmiste valemite kohaselt:

$$\bar{a}_{0l} = a_{0l}, \quad \bar{a}_{0j} = a_{0j} + \left[\frac{a_{kj}}{\lambda}\right] a_{0l}.$$

Selleks et duaalne lubatavus säiliks, peab olema

$$a_{0j} + \left[\frac{a_{kj}}{\lambda}\right] a_{0l} \geqslant 0. \qquad (10)$$

Kui $a_{kj} \geqslant 0$, siis on see nõue täidetud. Kui $a_{kj} < 0$, siis $\left[\frac{a_{kj}}{\lambda}\right] \leqslant -1$, mistõttu peab kõigepealt olema

$$0 \leqslant a_{0j} + \left[\frac{a_{kl}}{\lambda}\right] a_{0l} \leqslant a_{0j} - a_{0l}$$

ehk

$$a_{0l} = \min_{a_{kj} < 0} a_{0j}. \qquad (11)$$

Tingimus (11) annab reegli juhtveeru indeksi l valikuks.

Kui $a_{0l}=0$, siis tingimus (10) on alati täidetud. Sel korral jääb λ määramiseks vaid nõue, et $\left[\frac{a_{kl}}{\lambda}\right]=-1$, millest

$$\lambda \geqslant -a_{kl} \qquad (a_{kl}<0). \tag{12}$$

Kui $a_{0l}\neq 0$, siis saame tingimuse (10) esitada kujul

$$-\left[\frac{a_{kj}}{\lambda}\right] \leqslant \frac{a_{0j}}{a_{0l}}.$$

Arvestades, et t ä i s a r v u a korral on võrratused $a \leqslant x$ ja $a \leqslant [x]$ samaväärsed, saame siit järk-järgult

$$-\left[\frac{a_{kj}}{\lambda}\right] \leqslant \left[\frac{a_{0j}}{a_{0l}}\right], -\left[\frac{a_{0j}}{a_{0l}}\right] \leqslant \left[\frac{a_{kj}}{\lambda}\right], -\left[\frac{a_{0j}}{a_{0l}}\right] \leqslant \frac{a_{kj}}{\lambda}.$$

Viimasest võrratusest leiame

$$\lambda \geqslant \max_{\substack{a_{kj}<0,\\ j\neq 0}} \left(-a_{kj} \Big/ \left[\frac{a_{0j}}{a_{0l}}\right]\right),$$

kusjuures tingimuse (12) tõttu võib j omandada ka väärtuse l. Võrratus (9) on ilmselt seda rangem, mida väiksem on λ. Seda arvestades valime juhul, kui $a_{0l}\neq 0$,

$$\lambda = \max_{\substack{a_{kj}<0,\\ j\neq 0}} \left(-a_{kj} \Big/ \left[\frac{a_{0j}}{a_{0l}}\right]\right). \tag{13}$$

Kui $a_{0l}=0$, võtame $\lambda=-a_{kl}$.

N ä i d e. Selleks et võrrelda algoritme omavahel, lahendame ülesande, mis on toodud viites 1 märgitud ülevaateartiklis: maksimiseerida funktsioon

$$x_0 = -2(-x_1) - (-x_2)$$

tingimustel

$$12 + 4(-x_1) + 3(-x_2) \geqslant 0,$$

$$2 + (-x_1) - 2(-x_2) \geqslant 0,$$

$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_1,\ x_2 \text{ — täisarvud.}$$

Et ülesanne pole duaalselt lubataval kujul, siis teeme muutujate vahetuse, mis ta sellisele kujule viib. Esimesest võrratusest, mille võib ümber kirjutada $4x_1 + 3x_2 \leqslant 12$, nähtub, et $x_1 \leqslant 3$, $x_2 \leqslant 4$. Seega võib võtta $x_1 = 3 - x_1'$, $x_2 = 4 - x_2'$. Pärast asendamist saame sihifunktsiooniks

$$x_0 = 10 + 2(-x_1') + (-x_2')$$

ja tingimusteks

$$x_3' = -12 - 4(-x_1') - 3(-x_2') \geqslant 0,$$

$$x_4' = 7 - (-x_1') + 2(-x_2') \geqslant 0,$$

$$x_1' \geqslant 0,\ x_2' \geqslant 0,\ x_1',\ x_2' \text{ — täisarvud},$$

kus x_3' ja x_4' on täisarvulised abitundmatud. Sellele ülesandele vastavaks duaalselt lubatavaks simplekstabeliks on tabel 1 ilma viimase reata. Nimetatud tabelis määrame kõigepealt rea, mille järgi moodustame lisakitsenduse (valitud rea märgime noolega tabeli vasakul äärel). Juhul kui esimeses veerus on rohkem kui üks negatiivne element, moodustatakse lisakitsendus tavaliselt selle rea järgi, milles see negatiivne element on absoluutväärtuselt maksimaalne (nimetatud valik annab optimaalse lahendi enamasti kiiremini kui teised valikud). Seejärel määrame juhtveeru (märgime noolega tabeli peal) ja λ, mis antud juhul tuleb 3. Nüüd jagame noolega märgitud rea elemendid λ-ga ja leiame

Tabel 1

				↓
	$x_0 =$	10	2	1
	$x_1' =$	0	—1	0
	$x_2' =$	0	0	—1
→	$x_3' =$	—12	—4	—3
	$x_4' =$	7	—1	2
	$s =$	—4	—2	—1*

Tabel 2

			↓	
	$x_0 =$	6	0	1
	$x_1' =$	0	—1	0
	$x_2' =$	4	2	—1
	$x_3' =$	0	2	—3
→	$x_4' =$	—1	—5	2
	$s =$	—1	—1*	0

Tabel 3

				↓
	$x_0 =$	6	0	1
	$x_1' =$	1	—1	0
	$x_2' =$	2	2	—1
→	$x_3' =$	—2	2	—3
	$x_4' =$	4	—5	2
	$s =$	—1	0	—1*

Tabel 4

$x_0 =$	5	0	1
$x_1' =$	1	—1	0
$x_2' =$	3	2	—1
$x_3' =$	1	2	—3
$x_4' =$	2	—5	2

$\lambda = \max\left\{\frac{4}{2}, 3\right\} = 3$ $\quad\lambda = 5\quad$ $\lambda = 3$

jagatiste täisosad. Saame tabeli viimase rea, mille võtame juhtreaks. Sealjuures juhtelement, mis on —1, asub noolega märgitud veerus. Tabelites on juhtelement tähistatud tärniga. Tabeli 2 saamiseks tuleb tabeli 1 esimesest veerust lahutada 4-kordne juhtveerg ja teisest veerust 2-kordne juhtveerg, juhtveerg ise jääb aga muutmata. Sealjuures jätame kirjutamata tabeli viimase rea, sest s väärtus meid otsitavas lahendis ei huvita. Ärajäetud rea asemele kirjutame uuele täiendavale kitsendusele (9) vastava rea. Kolme sammu järel saame tabeli 4, mis annab teisendatud ülesande optimaalse lahendi $x_1' = 1$, $x_2' = 3$, millest esialgse ülesande optimaalseks lahendiks saame $x_1 = 3 - x_1' = 2$, $x_2 =$

$= 4 - x_2' = 1$. Sihifunktsiooni maksimaalne väärtus on 5. Võrreldes Gomory I algoritmiga saame III algoritmi abil optimaalse lahendi kätte ühe sammu võrra kiiremini, kusjuures arvutused on tunduvalt lihtsamad.

Lõpuks märgime, et Gomory III algoritmi lõplikkus on tõestatud järgmistel eeldustel: 1) ülesandel leidub vähemalt üks täisarvuline lahend, 2) igal sammul moodustatakse täiendav kitsendus esimese sellise rea järgi, milles esimese veeru element on negatiivne, ja 3) juhtveerg α_l määratakse tingimuse (11) asemel tingimusest

$$\alpha_l = \operatorname*{lex\,min}_{a_{kj} < 0} \alpha_j, \tag{14}$$

kus lex min α_j märgib vektorite α_j hulgas leksikograafiliselt minimaalset.[7] Sealjuures eeldatakse, et alguses on tabeli (5) veerud $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ leksikograafiliselt positiivsed ja et λ vastava valikuga säilitatakse nimetatud omadus ka pärast simplekssammu. See tähendab muuseas seda, et λ määramine muutub märksa keerukamaks kui vaadeldud juhul ja et λ tuleb võtta mõnel juhul suurem kui valemist (13) saadav väärtus.

3. Otsene algoritm

Teiseks käsitleme nn. otsest algoritmi, mis on mitme autori (A. Ben-Israel ja A. Charnes 1962; R. D. Young, 1965, 1968; F. Glover, 1968) jõupingutuse tulemus ja esitatud täiuslikul kujul alles 1968. aastal F. Gloveri poolt[8]. Otsese algoritmi rakendamiseks peab ülesanne (1)—(3) olema lubataval kujul, s. t. vastavas simplekstabelis (5) peavad esimese veeru elemendid $a_{10}, a_{20}, \ldots, a_{m0}$ olema mittenegatiivsed. See tähendab, et peab olema teada lubatav täisarvuline baasilahend (lubatav alglahend) $x_1 = \ldots = x_n = 0$, $x_{n+1} = a_{10}, \ldots, x_{n+m} = a_{m0}$. Kui selline lahend ei ole teada, siis juhul, kui ta eksisteerib, saab teda alati leida kunstliku baasi meetodil[9], kasutades sealjuures sedasama allpool kirjelda-

---

[7] Leksikograafiline miinimum defineeritakse vektorite leksikograafilise järjestuse mõiste abil. Ütleme, et vektor α on leksikograafiliselt negatiivne ja kirjutame $\alpha \prec 0$, kui vektori α esimene nullist erinev komponent on negatiivne. Edasi, ütleme, et vektor α on leksikograafiliselt väiksem vektorist β, ja märgime $\alpha \prec \beta$, kui $\alpha - \beta \prec 0$. Hulgas B on α leksikograafiliselt minimaalne, $\alpha = \operatorname{lex\,min} \tilde{\beta}$, kui iga $\beta \in \underset{\sim}{B}$ ja $\beta \neq \alpha$ korral on $\alpha \prec \beta$. Vektorit α nimetatakse leksikograafiliselt positiivseks ja märgitakse $\alpha \succ 0$, kui $-\alpha \prec 0$.

[8] F. Glover. A new foundation for a simplified primal integer programming algorithm. Operations Research, 1968, vol. 16, No. 4, p. 727—740.

[9] Lineaarse planeerimisülesande lubatava alglahendi leidmisest vt. näit. Ü. Kaasik. Matemaatiline planeerimine. Tln., 1967, I ptk., § 6.

tavat otsest algoritmi. Järgnevas eeldame, et simplekstabel (5) on juba lubatav.

Selleks et meetodi idee oleks paremini jälgitav, kirjeldame algoritmi esialgu lihtsustatud kujul. Lähtume simplekstabelist (5), kus valime juhtveeru simpleksmeetodi reeglite kohaselt, s. t. ühe veergudest, milles $a_{0j} < 0$. Olgu juhtveeruks valitud veerg α_l ($a_{0l} < 0$). Kasutades simpleksmeetodi juhtrea valiku reeglit, s. t. määrates reaindeksi k tingimusest

$$\frac{a_{k0}}{a_{kl}} = \min_{a_{il} > 0} \frac{a_{i0}}{a_{il}}, \tag{15}$$

moodustame k-nda rea abil kitsenduse (9), kus võtame $\lambda = a_{kl}$. Saadud kitsendusele vastava rea (5s) lisame simplekstabelile (5) ja võttes rea (5s) juhtreaks juhtelemendiga 1 l-ndas veerus, teostame ühe simplekssammu. Seda protsessi kordame seni, kuni saame simplekstabeli, mis on ka duaalselt lubatav ja annab seega optimaalse lahendi. Märgime siinjuures, et kitsendus (9) on täidetud iga lubatava täisarvulise lahendi puhul. Seega ei lõika ta kitsenduste piirkonnast välja juba leitud baasilahendit, nagu see toimub Gomory I ja III algoritmi korral. See siiski ei tähenda, et tingimus (9) ei kitsendaks esialgset piirkonda (2).

Osutub, et kitsendust (9) polegi tegelikult vaja moodustada. Üleminek ühelt simplekstabelilt teisele on lihtsalt teostatav juba tingimusega (15) määratud k-nda rea abil. Tõepoolest, tabelist (5)+(5s), kus $\lambda = a_{kl}$, nähtub, et järgmise simplekstabeli k-nda rea elemendid $\bar{a}_{kj}$ ($j = 0, 1, \ldots, n$) saadakse valemist

$$\bar{a}_{kj} = a_{kj} - \left[\frac{a_{kj}}{a_{kl}}\right] a_{kl},$$

kusjuures $0 \leqslant \frac{a_{kj}}{a_{kl}} - \left[\frac{a_{kj}}{a_{kl}}\right] < 1$ ja $a_{kl} > 0$ tõttu on

$$0 \leqslant a_{kj} - \left[\frac{a_{kj}}{a_{kl}}\right] a_{kl} < a_{kl}.$$

Niisiis on $\left[\frac{a_{kj}}{a_{kl}}\right]$ maksimaalne täisarv, mille kordselt elemendi a_{kl} lahutamine elemendist a_{kj} annab mittenegatiivse vahe. Seega võib üleminekul tabelilt (5) uuele sama tüüpi tabelile kasutada järgmist reeglit: juhtveerg α_l tuleb lahutada igast ülejäänud veerust α_j maksimaalne täisarv korda, mille puhul element a_{kj} teiseneb mittenegatiivseks, kus indeks k on määratud tingimusega (15). Seejärel tuleb juhtveergu α_l korrutada -1-ga. Kui $a_{kj} < 0$, tähendab nimetatud reegel tegelikult seda, et juhtveerg tuleb liita j-ndale veerule minimaalne täisarv korda, mille puhul a_{kj} teiseneb mittenegatiivseks. Niisiis võib vaadeldavat algoritmi tõlgendada kui simpleksmeetodi teatavat modifikatsiooni, kus juhtelement a_{kl} valitakse samuti nagu tavalise simpleksmeetodi korral, erinevus simpleksmeetodist seisneb aga selles, et juhtveerg tuleb ülejäänud veergudest lahutada või neile liita teatud t ä i s a r v korda, mistõttu juhtrea elemendid ei teisene nullideks, vaid mittenegatiivseteks, juhtelemendist väiksemateks täisarvudeks.

N ä i d e. Kasutades viimati saadud reegleid lahendame eelmises punktis vaadeldud näite. Ülesande algkujule vastab tabel 5. Kõikides tabelites on tärniga märgitud simpleksmeetodi juhtelement a_{kl}. Esimene samm (üleminek tabelilt 5 tabelile 6) ühtib tavalise simplekssammuga. Tabelist 6 saadakse tabel 7 sel teel, et liidetakse teisele veerule kolmas ja korrutatakse kolmandat veergu —1-ga, jne. Tabelist 9 saame optimaalse lahendi: $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_0 = 5$ $(x_3 = 1,\ x_4 = 2)$.

	Tabel 5				Tabel 6				Tabel 7				Tabel 8				Tabel 9		
		↓					↓			↓					↓				
$x_0 =$	0	—2	—1		4	2	—5		4	—3	5		4	3	—1		5	0	1
$x_1 =$	0	—1	0		2	1	—2		2	—1	2		2	1	0		2	1	0
$x_2 =$	0	0	—1		0	0	—1		0	—1	1		0	1	—1		1	—2	1
$x_3 =$	12	4	3	→	4	—4	11*	→	4	7*	—11	→	4	—7	3*		1	2	—3
→ $x_4 =$	2	1*	—2		0	—1	0		0	—1	0		0	1	—2		2	—5	2

Suuremate dimensioonidega ülesande korral võib kirjeldatud algoritm nõuda liialt palju samme. Pealegi pole tõestatud, et ta annab optimaalse lahendi alati lõpliku arvu sammudega. Selleks et kindlustada algoritmi lõplikkust ja vähendada sammude arvu, tuleb enne ülesande (1)—(3) lahendamisele asumist lisada kitsendustele (2) täiendav võrratus

$$x_{n+m+1} = a_{m+1,\,0} + \sum_{j=1}^{n} a_{m+1,\,j}(-x_j) \geqslant 0, \tag{16}$$

mille kordajad $a_{m+1,\,j}$ on täisarvud ja rahuldavad teatud kindlaid tingimusi. Nimetatud tingimusi esitamata märgime, et võib valida näiteks

$$a_{m+1,\,j} = 1\ (j = 1, 2, \ldots, n) \text{ ja } a_{m+1,\,0} = a, \tag{17}$$

kus a on lahendi komponentide $x_1, \ldots, x_n$ summa mingi täisarvuline ülemine tõke, s. t. $\sum_{j=1}^{n} x_j \leqslant a$. Kitsenduse (16) võib moodustada ka sel teel, et võtame võrratuste (2) lineaarse kombinatsiooni, mille kordajateks on ülesandega (1)—(2) duaalse ülesannete ande[10] lubatava lahendi vastavad komponendid y_i, seejärel aga korrutame saadud võrratust veel sellise positiivse konstandiga c, mis kindlustab tundmatute kordajate täisarvulisuse, s. t.

$$a_{m+1,\,j} = \sum_{i=1}^{m} c y_i a_{ij}, \quad j = 0,1, \ldots, n. \tag{18}$$

Nagu näha, ei kitsenda võrratus (16) lubatavate lahendite esialgset piirkonda, vaid on järeldus tingimustest (2).

Peale seosele (16) vastava rea lisamist simplekstabelile (5) rakendame juba kirjeldatud algoritmi järgmiste täpsustatud reeglitega juhtveeru ja juhtrea määramiseks. Juhtveerg α_l valitakse tingimusest

$$\frac{\alpha_l}{a_{m+1,l}} = \operatorname{lex}\min_{a_{m+1,\,j} > 0} \frac{\alpha_j}{a_{m+1,\,j}}. \tag{19}$$

Seejärel valitakse ridade hulgast, mille korral

$$\left[\frac{a_{k0}}{a_{kl}}\right] = \min_{a_{il}>0} \left[\frac{a_{i0}}{a_{il}}\right],$$

juhtreaks see rida, mis maksimiseerib uue simplekstabeli esimese rea negatiivsete kordajate summa. Kui selliseid ridu on rohkem kui üks, võetakse neist esimene. On tõestatud, et kui optimaalne lahend eksisteerib, siis juhtveeru ja juhtrea näidatud valiku korral saadakse optimaalne täisarvuline lahend lõpliku arvu sammude järel[11]. Sammude arv sõltub väga tugevasti võrratuse (16) kordajate valikust. Eriti kiire koondumise saame juhul, kui arvutame kordajad valemist (18), kus suurusteks y_i on võetud duaalse ülesande o p t i m a a l s e lahendi komponendid. Võrreldes valikuga (17) võib niiviisi saada optimaalse lahendi mitu korda kiiremini.

Lahendame nüüd uuesti eespool vaadeldud näite, lisades kitsendustele võrratuse (16), kus $a_{m+1,\,j}$ on arvutatud valemist (18) ja y_i on duaalse ülesande optimaalse lahendi komponendid. Antud juhul on viimasteks $y_1 = \frac{5}{11}$, $y_2 = \frac{2}{11}$. Võttes $c = 11$ saame võrratuseks (16)

$$x_5 = 64 + 22(-x_1) + 11(-x_2) \geqslant 0.$$

---

[10] Ülesandega (1)—(2) duaalseks ülesandeks nimetatakse järgmist lineaarset planeerimisülesannet: minimiseerida funktsioon $u = a_{00} + \sum_{i=1}^{m} a_{i0} y_i$ kitsendustel $a_{0j} + \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geqslant 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$; $y_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

[11] Optimaalse lahendi puudumise põhjuseks saab siin olla vaid sihifunktsiooni tõkestamatus. Viimase tunnuseks on nagu simpleksmeetodi korralgi sellise veeru α_j ilmumine, milles puuduvad positiivsed elemendid ja $a_{0j} < 0$.

Ülesande algkujule koos viimase seosega vastab tabel 10. Optimaalse lahendi saamiseks kulub nüüd 2 sammu (tabelid 10—12).

Tabel 10

$x_0 =$	0	—2	—1
$x_1 =$	0	—1	0
$x_2 =$	0	0	—1
$x_3 =$	12	4	3
$^*x_4 =$	2	1	—2
$\rightarrow\ ^*x_5 =$	64	22*	11

Tabel 11

	4	2	—1
	2	1	0
	0	0	—1
→*	4	—4	3*
	0	—1	—2
*	20	—22	11

Tabel 12

5	0	1
2	2	0
1	—2	1
1	2	—3
2	—5	2
9	0	—11

Tabelite 10 ja 11 vasakutel äärtel on märgitud tärniga read, mis rahuldavad tingimust (20). Nende hulgast valitud juhtrida on märgitud peale selle veel noolega.

Lõpuks esitame lugejale iseseisvaks lahendamiseks ülesande, mis on avaldatud viites 8 märgitud F. Gloveri artiklis: leida võrratuste süsteemi

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 \phantom{{}- 4x_3} &\leqslant 5 \\ 9x_1 + 2x_2 - 4x_3 &\leqslant 8 \\ -3x_1 - 2x_2 + 2x_3 &\leqslant 1 \\ -5x_1 + 4x_2 + 6x_3 &\leqslant 16 \end{aligned}$$

mittenegatiivne täisarvuline lahend, mis maksimiseerib lineaarvormi

$$4x_1 + 6x_2 + 3x_3.$$

Märgime, et kui jätta kõrvale täisarvulisuse nõue, siis on toodud ülesandega duaalse ülesande optimaalseks lahendiks

$$y_1 = 0,\ y_2 = \frac{39}{34},\ y_3 = 0,\ y_4 = \frac{43}{34},$$

mille võib saada duaalse simpleksmeetodi abil 4 sammuga. Ette olgu öeldud, et duaalse ülesande optimaalse lahendi kasutamine annab toodud ülesande optimaalse täisarvulise lahendi 6 sammuga. Et teise ja neljanda võrratuse liitmisel saame lihtsalt määrata tundmatute ülemised tõkked, siis võib võrratuse (16) kordajad arvutada ka valemitest (17). Viimasel juhul kulub aga optimaalse lahendi saamiseks 15 sammu. Muide, tundmatute ülemiste tõkete teadmine võimaldab ülesande hõlpsasti teisendada duaalselt lubatavale kujule ja lahendada selle võrdluseks Gomory III algoritmi abil.

MAAGILISED RUUDUD

L. Väljaots, Ü. Kaasik[1]

Maagilise ruudu mõistet tuleb vist lugeda enam-vähem üldtuntuks, siin ja seal võib leida maagiliste ruutude näiteid või nendega seotud ülesandeid, kuid sellele vaatamata annab otsida matemaatilistes raamatutes maagiliste ruutude teooriale pühendatud peatükki või vähemalt paragrahvi[2]. Milles on asi?

Et maagilised ruudud vähemalt seni peaaegu mingit praktilist rakendust leidnud ei ole, siis on nende teooria küsimustega tegeldud eeskätt vaid omamoodi ajaviitena. Probleemide raskuse kõrval näib see olevatki peapõhjuseks, miks maagiliste ruutude teooria niivõrd lünklikuks on jäänud, et seda üldse vaid üsna tinglikult teooriaks võib nimetada. Näiteks pole lahendatud isegi küsimus sellest, kuidas leida antud järku maagiliste ruutude arvu, rääkimata algoritmist, mis võimaldaks kõik need ruudud tegelikult välja kirjutada.

Tervikliku teooria puudumisele vaatamata on maagiliste ruutude uurimisel siiski üsna palju ära tehtud. Tutvustamegi järgnevalt mõningaid saadud tulemustest, alustades sealjuures päris algmõistetest.

Vaatleme ruutu, mis on horisontaal- ja vertikaaljoontega jagatud vastavalt n reaks ja n veeruks. Tekkinud n^2 lahtrisse kirjutame esimesed n^2 naturaalarvu $1, 2, \ldots, n^2$. Kui lahtrid on täidetud selliselt, et igas reas, samuti aga igas veerus ja ka kahel diagonaalil paiknevate arvude summad osutuvad ühesugusteks, siis nimetatakse tulemust (n-järku) m a a g i l i s e k s r u u d u k s

[1] *Toimetuselt.* Käesoleva artikli esialgses variandis kirjeldas autor L. V ä l j a o t s vaid enda tuletatud meetodeid maagiliste ruutude saamiseks. Et aga «Matemaatika ja kaasaja» veergudel maagilistest ruutudest seni peaaegu üldse juttu pole olnud, siis tegi toimetus Ü. K a a s i k u l e ülesandeks koos artikli redigeerimisega täiendada seda mõningase ülevaatega maagilistest ruutudest üldse ja nendega seotud probleemidest.

[2] Eesti keeles võib lühikese ülevaate maagiliste ruutude teooria mõnedest küsimustest leida raamatust: B. K o r d e m s k i. Matemaatilisi pähkleid. ERK, Tln., 1960, lk. 255—288. Maagiliste ruutude kohta ilmunud venekeelsest kirjandusest on kättesaadavamateks järgmised kaks brošüüri: М. М. П о с т н и к о в. Магические квадраты. Изд. «Наука», М., 1964, 84 стр. Е. Я. Г у р е в и ч. Тайна древнего талисмана. Изд. «Наука». М., 1969, 151 стр.

ja selle ühise summa väärtust vastava ruudu maagiliseks konstandiks. Näiteks neljandat järku maagiline ruut[3] on kujutatud joonisel 1, kus nii kõigis neljas reas, kõigis neljas veerus kui ka mõlemas diagonaalis saame võrdse summa — selle ruudu maagiliseks konstandiks on 34.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Joonis 1.

1	14	4	15
8	11	5	10
13	2	16	3
12	7	9	6

Joonis 2.

Maagiliste ruutude eriti huvitava erijuhu moodustavad nn. ülimaagilised ruudud, kus peale ridade, veergude ja peadiagonaalide annavad sama summa veel kõrvaldiagonaalid. Üldse on $n \times n$ ruudus $2n - 2$ kõrvaldiagonaali (ehk murtud diagonaali), näiteks joonisel 1 on nendeks järgmised kuus:

$$\begin{aligned}
3 + 11 + 12 + 4 &= 30\\
2 + 8 + 9 + 15 &= 34\\
13 + 5 + 6 + 14 &= 38\\
9 + 10 + 2 + 1 &= 22\\
5 + 3 + 14 + 12 &= 34\\
16 + 15 + 7 + 8 &= 46
\end{aligned}$$

Et vaid kahel kõrvaldiagonaalil saime summa 34, siis on meil antud juhul tegemist küll maagilise, kuid mitte ülimaagilise ruuduga. Neljandat järku ülimaagiliseks ruuduks osutub aga joonisel 2 esitatu, kus maagiliseks konstandiks on samuti 34.

Keerdülesannete rubriikides on vahetevahel maagilisteks ruutudeks nimetatud ka nn. üldistatud maagilisi ruute, kus lahtrite täitmiseks kasutatakse mitte arve 1, 2, ..., n^2, vaid üldse mistahes naturaalarve, täisarve või isegi murdarve[4]. Et selliste üldistatud ruutude teooriaga on seni nähtavasti tegeldud vaid paaril erijuhul, siis jätame nad ka järgnevas enamasti vaatlusest välja. Toome siinkohal vaid näitena kaks «eriti maagilist» ruutu (vt. joonised 3 ja 4), kus peale seni vaadeldud omaduste ka

[3] See on ka ainus maagiline ruut, millest «Matemaatika ja kaasaja» veergudel seni juttu on olnud (vihik VII, lk. 54—55).

[4] Vt. näit. «Pähklipureja» nr. 8, 1968.

ruutude lihtne ümberpööramine ja peegeldamine annab samade omadustega maagilised ruudud.

18	99	86	61
66	81	98	19
91	16	69	88
89	68	11	96

Joonis 3.

8818	1111	8188	1881
8181	1888	8811	1118
1811	8118	1181	8888
1188	8881	1818	8111

Joonis 4.

Veel ühe kõrvalepõikena nimetame maagiliste ruutude selliseid üldistusi, kus ühesugused summad saadakse mitte samas reas või veerus paiknevate arvude liitmisel, vaid just erinevatest ridadest ning veergudest võetud arvude liitmisel. Sellise viiendat järku «antimaagilise» ruudu näide on toodud joonisel 5. Valides kõigepealt juhuslikult ühe arvu, seejärel teise, mis ei paikne eelmisega samas reas ega veerus, siis kolmanda, mis ei paikne eelmistega samades ridades või veergudes, siis samuti neljanda ja lõpuks ülejäänud rea ning veeru lõikekohalt veel viienda arvu, saame valitud viie arvu summaks alati 1970 (selle ruudu trükis ilmumise aasta). Lihtne kontroll näitab, et sellisteks valikuteks on kokku $5^2 \cdot 4^2 \cdot 3^2 \cdot 2^2 = 14\,400$ erinevat võimalust. Seega summa 1970 saab sellest ruudust 14 400 erineval viisil!

179	265	394	476	591
204	290	419	501	616
268	354	483	565	680
237	323	452	534	649
72	158	287	369	484

Joonis 5.

Loodetavasti ei valmista niisuguste «antimaagiliste» ruutude üldise teooria väljatöötamine lugejatele raskusi.

Üheks esimeseks küsimuseks maagiliste ruutude teoorias on n-järku ruudu võimalike maagiliste konstantide leidmine. Osutub, et iga n korral on see konstant üheselt määratud. Tõepoolest, maagilise ruudu n reas esinevad kõik n^2 arvu kogusummaga

$$1 + 2 + \ldots + n^2 = \frac{(1 + n^2)\,n^2}{2}.$$

Et aga kõikide ridade summade liitmisel peame saama sama tulemuse, siis iga rea summa on lihtsalt n korda väiksem. Tähistades n-järku ruudu maagilist konstanti sümboliga $\sum_n$, oleme seega leidnud, et

$$\sum_n = \frac{(1+n^2)n}{2}.$$

Näiteks $n=4$ korral annab see valem juba tuntud arvu $\sum_4 = 34$. Rõhutame, et üldistatud maagiliste ruutude korral võib maagiline konstant olla üldiselt mistahes arv.

Järgmise olulise probleemina kerkib olemasolu küsimus. Toodud näited kinnitasid, et neljandat järku maagilised ruudud on olemas. Kuidas on aga lugu üldjuhul?

Triviaalne esimest järku maagiline ruut on muidugi olemas ja ainus, kuid teist järku maagilisi ruute pole üldse olemas (loodetavasti ei valmista selle fakti range tõestamine lugejatele erilisi raskusi). Nende kahe juhu erandlikkust arvestades jäetakse nad tavaliselt üldse kõrvale ja maagilistest ruutudest rääkides mõeldakse (seda isegi eraldi rõhutamata) alati juurde, et $n \geqslant 3$. Nagu me hiljem näeme, on sel juhul kõik n-järku maagilised ruudud alati olemas.

Veel üheks loomulikuks küsimuseks näib olevat antud järku maagiliste ruutude arv. Nagu juba öeldud, pole see küsimus üldjuhul seni lahendatud. Veelgi halvem, vastust teatakse praegu üldse vaid juhtudel $n=3$ ja $n=4$. Kõrgemat järku maagiliste ruutude arvu kohta on kahjuks teada vaid, et see iga n korral jagub kaheksaga.

Viimast asjaolu on äärmiselt lihtne põhjendada. Nimelt annab iga maagiline ruut otsekohe veel seitse maagilist ruutu, mis saadakse lähteruudu pöörete ja peegelduste tulemusena. Näiteks on joonisel 6 toodud kõik need kaheksa maagilist ruutu, mis sel viisil

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

13	2	3	16
8	11	10	5
12	7	6	9
1	14	15	4

4	9	5	16
15	6	10	3
14	7	11	2
1	12	8	13

1	12	8	13
14	7	11	2
15	6	10	3
4	9	5	16

16	5	9	4
3	10	6	15
2	11	7	14
13	8	12	1

13	8	12	1
2	11	7	14
3	10	6	15
16	5	9	4

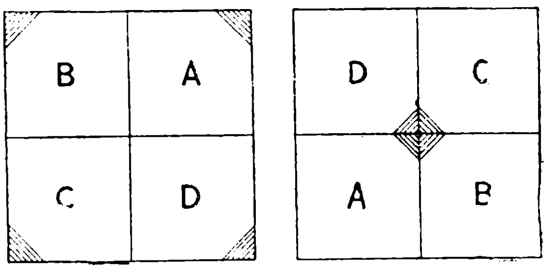
4	15	14	1
9	6	7	12
5	10	11	8
16	3	2	13

1	14	15	4
12	7	6	9
8	11	10	5
13	2	3	16

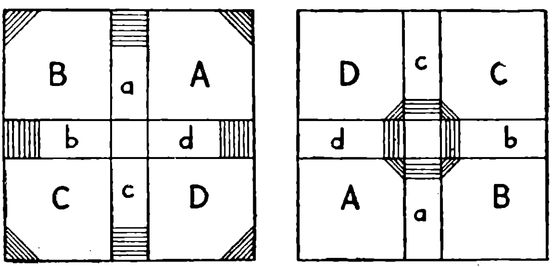
Joonis 6.

tekivad joonisel 1 esitatust. Seega esinevad maagilised ruudud alati kaheksakaupa ja muidugi peab siis ka mistahes järku maagiliste ruutude arv jaguma kaheksaga.

Märgime siinjuures, et leidub ka teisi võtteid ühest maagilisest ruudust uute saamiseks. Näiteks saame maagilise ruudu, kui me antud maagilises ruudus vahetame mingid kaks rida ja seejärel ka samade järjekorranumbritega veerud. Joonisel 7 on skemaatiliselt näidatud veel üks paarisarvulise n korral rakendatav võimalus uue maagilise ruudu saamiseks ja joonisel 8 analoogiline võimalus paaritu n jaoks.



Joonis 7.



Joonis 8.

Üldistatud maagilisi ruute võib saada näiteks siis, kui mingit antud maagilist ruutu moodustavad arvud lahutada teatud konstandist (kui selleks konstandiks on n^2+1, siis saame jälle maagilise ruudu), kui neile arvudele liita mingi konstant või kui neid arve korrutada mingi konstandiga. Näiteks lahutades joonisel 2 toodud ruudu kõik arvud konstandist 10 ja korrutades veel tulemust (—2)-ga saame joonisel 9 oleva üldistatud ülimaagilise ruudu maagilise konstandiga $(4 \cdot 10 - 34) \cdot (-2) = -12$.

—18	8	—12	10
—4	2	—10	0
6	—16	12	—14
4	—6	—2	—8

Joonis 9.

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Joonis 10.

Pöördudes tagasi maagiliste ruutude arvu juurde leiame selle kõigepealt kolmandat järku maagiliste ruutude korral. Selleks tähistame kolmandat järku maagilist ruutu moodustavaid arve tähtedega a, b, ..., i, nagu on näidatud joonisel 10. Arvestades, et maagiline konstant on nüüd $\sum_3 = 15$, leiame kõigepealt keskmise arvu e. Kirjutades välja keskmise rea, keskmise veeru ja kahe diagonaali summad saame:

$$(d+e+f)+(b+e+h)+(a+e+i)+(g+e+c)=4\cdot 15,$$
$$3e+(a+b+c+d+e+f+g+h+i)=60,$$
$$3e+45=60,\quad e=5.$$

Ühtlasi näeme nüüd, et

$$d+f=b+h=a+i=g+c=10.$$

Edasi tõestame, et arv 1 ei saa paikneda nurkmises lahtris. Tõepoolest, kui oleks näiteks $a=1$ ja seega $i=9$, siis ei saa 2, 3 ega 4 paikneda 1-ga samas reas või veerus, sest ei leidu enam vajaliku suurusega kolmandat arvu. See aga jätab nende kolme arvu jaoks vaid kaks võimalikku kohta (h ja f), mis tõestabki, et

8	1	6
3	5	7
4	9	2

6	1	8
7	5	3
2	9	4

4	3	8
9	5	1
2	7	6

2	7	6
9	5	1
4	3	8

8	3	4
1	5	9
6	7	2

6	7	2
1	5	9
8	3	4

4	9	2
3	5	7
8	1	6

2	9	4
7	5	3
6	1	8

Joonis 11.

$a \neq 1$ (täpselt sama tõestus sobib ka teiste nurkmiste arvude jaoks). Järelikult peavad 1 ja 9 paiknema kas keskmises reas või keskmises veerus, olgu näiteks $b = 1$ ja $h = 9$. Ilmselt ei saa arv 3 olla ei 1-ga ega 9-ga samas reas või veerus (jälle ei leiduks sobivat kolmandat arvu) — seega peavad ka 3 ja 7 paiknema keskmises reas või veerus, näiteks $d = 3$, $f = 7$. Ülejäänud arvude paigaldamiseks jääb aga nüüd ainus võimalus. Muutes arvude 1, 3, 7 ja 9 asukohti, saame veel seitse varianti ning seega kolmandat järku maagilisi ruute ongi kokku vaid kaheksa (vt. joonis 11).

Ei valmista muide raskust üles kirjutada ka kolmandat järku üldistatud maagiliste ruutude (maagilise konstandiga $3x$) üldkuju (vt. joonis 12). Siit näeme muuhulgas, et $n = 3$ korral ei leidu isegi üldistatud ülimaagilisi ruute (ülimaagilistest rääkimata).

$x+y$	$x-y-z$	$x+z$
$x-y+z$	x	$x+y-z$
$x-z$	$x+y+z$	$x-y$

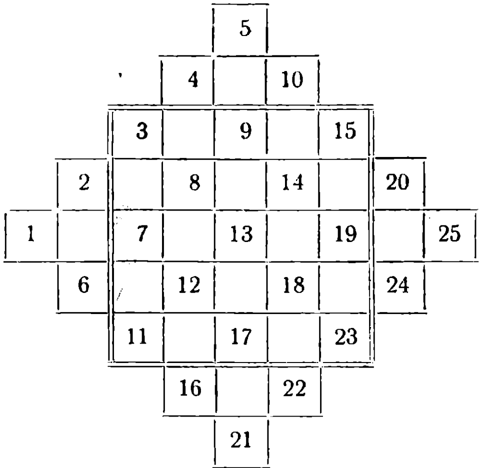
Joonis 12.

Kahjuks pole sama meetod enam rakendatav kõrgemat järku maagiliste ruutude arvu leidmisel. Hoopis keerulisemate mõttekäikudega on siiski leitud, et neljandat järku maagiliste ruutude arv on 880, kuid kaugemale seni veel jõutud ei ole.

Et puudub mõistlik algoritm maagiliste ruutude arvu leidmiseks, siis loomulikult pole ka algoritmi kõigi antud järku maagiliste ruutude tegelikuks väljakirjutamiseks. Küll on aga olemas (ja isegi üsna palju) meetodeid mõningate konkreetsete antud järku maagiliste ruutude koostamiseks. Tutvustamegi järgnevalt mõningaid neist.

Maagiliste ruutude koostamise meetodid võib jagada kahte klassi selle järgi, kas nad on kasutatavad iga järgu n korral või mitte. Universaalsetest, iga n puhul sobivatest meetoditest on näiteks kõige tuntum nn. ääristamismeetod, mis $(n-2)$-järku maagilisest ruudust lähtudes võimaldab konstrueerida n-järku maagilise ruudu (äärmiste ridade ning veergude lisamise ja arvude sobiva ümbertõstmise teel). Jätame sellised meetodid siin siiski kõrvale ja vaatleme mõningaid spetsiaalsemaid võtteid, mis kõlbavad vaid n teatavat tüüpi väärtuste korral. Näiteks vaadeldakse tavaliselt eraldi paaritu- ja paarisarvulise n juhte.

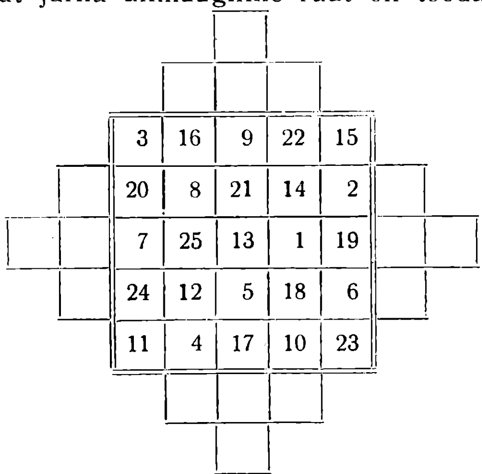
Üheks ajalooliselt kõige tuntumaks paaritut järku maagiliste ruutude koostamise meetodiks on nähtavasti nn. terrasside meetod. Selle puhul täiendatakse koostatav ruut kõigepealt sümmeetriliseks trepikujuliste äärtega kujundiks, nagu viiendat järku ruudu jaoks on näidatud joonisel 13. Saadud kujundisse paiguta-



Joonis 13.

takse nüüd mööda diagonaale järjekorras arvud 1, 2, ... , n^2. Näiteks joonisel 13 on seda tehtud vasakult alt üles paremale kulgevaid diagonaale pidi. Osa arve (näite puhul 3, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19 ja 23) satuvad sellise paigutamise korral juba ruudu lahtritesse õigetele kohtadele, muist aga jääb väljapoole ruutu. Need väljapoole jäänud arvud tõstame nüüd n (näite puhul viie) koha võrra ruudu suunas mööda seda rida või veergu, millel nad paiknevad. Nii valmibki maagiline ruut maagilise konstandiga $\sum_5 = 65$, mis antud näite jaoks on esitatud joonisel 14.

Paneme tähele, et terrasside meetodiga saadud ruut ei osutu kunagi ülimaagiliseks, kuigi neid on olemas iga $n > 3$ korral. Näiteks viiendat järku ülimaagiline ruut on toodud joonisel 15.



Joonis 14.

1	23	20	12	9
15	7	4	21	18
24	16	13	10	2
8	5	22	19	11
17	14	6	3	25

Joonis 15.

1	1	14	**4**
12	**6**	**7**	9
8	**10**	**11**	5
13	[illegible]	[illegible]	**16**

Joonis 16.

Paarisarvulist järku maagiliste ruutude koostamise meetodid jaotatakse sageli veel kahte rühma selle järgi, kas järk *n* jagub neljaga või mitte. Nimelt saab neljaga jaguva järgu korral kasutada tunduvalt lihtsamaid meetodeid. Üks lihtsamaid on järgmine.

Vaatleme joonisel 16 toodud neljandat järku maagilist ruutu (see on saadud joonise 6 viimasest ruudust keskmiste veergude vahetamise teel). Paneme tähele, et selles ruudus asuvad diagonaalidel olevad (poolpaksult trükitud) arvud 1, 4, 6, 7, 10, 11, 13 ja 16 täpselt samades lahtrites, kuhu nad satuksid arvude 1, 2, . . . , 16 järjestikusel paigutamisel ruudu ridadesse alustades ülalt ja igas reas suunaga vasakult paremale. Ülejäänud arvud 2, 3, 5, 8, 9, 12, 14 ja 15 asuvad aga nendes lahtrites, kuhu nad satuksid arvude 1, 2, . . . , 16 järjestikusel paigutamisel ruudu ridadesse alates alt ja igas reas suunaga paremalt vasakule.

Analoogilise olukorraga on tegemist joonisel 17 esitatud kaheksandat järku maagilises ruudus. Nimelt selle iga veerandi diagonaalidel paiknevad (poolpaksult trükitud) arvud jälle samuti, nagu nad satuksid arvude 1, 2, . . . , 64 järjestikusel paigutamisel kogu ruutu. Ka väljaspool diagonaale leiab aset neljandat järku ruudu korral märgatud seaduspärasus.

1	63	62	**4**	**5**	59	58	**8**
56	**10**	**11**	53	52	**14**	**15**	49
48	**18**	**19**	45	44	**22**	**23**	41
25	39	38	**28**	**29**	35	34	**32**
33	31	30	**36**	**37**	27	26	**40**
24	**42**	**43**	21	20	**46**	**47**	17
16	**50**	**51**	13	12	**54**	**55**	9
57	7	6	**60**	**61**	3	2	**64**

Joonis 17.

Osutubki, et iga neljaga jaguva järgu korral leidub täpselt samasuguste omadustega maagiline ruut. Näiteks niisuguse kaheteistkümnendat järku maagilise ruudu saamiseks kanname kõigepealt selle 4×4-lahtriliste osade diagonaalidele arvude 1, 2, ... , 144 järjest paigutamisel sinna sattuvad arvud. Nii kujuneb joonisel 18 näidatud osaliselt täidetud ruut. Vabad lahtrid täidame samade arvude 1, 2, ... , 144 alt paremalt alustatud järjest paigutamisel sinna sattuvatega, millega saame joonisel 19 esitatud maagilise ruudu.

1			4	5			8	9			12
	14	15			18	19			22	23	
	26	27			30	31			34	35	
37			40	41			44	45			48
49			52	53			56	57			60
	62	63			66	67			70	71	
	74	75			78	79			82	83	
85			88	89			92	93			96
97			100	101			104	105			108
	110	111			114	115			118	119	
	122	123			126	127			130	131	
133			136	137			140	141			144

Joonis 18.

Jääb veel tutvuda maagilise ruudu konstrueerimisega juhul, kui järgu jagamisel neljaga tekib jääk 2 ($n = 4k + 2$). Vaatleme selleks kõigepealt kümnendat järku ruutu.

Kui jagada ruut jälle neljaks võrdseks osaks ning kanda sinna arvud 1, 2, ... , 100 täpselt samuti nagu äsja käsitletud juhul, siis ei osutu tulemus maagiliseks ruuduks. Tõepoolest, jooniselt 20 näeme, et ainult diagonaalidel kujuneb summa $\sum_{10} = 505$, ridade ja veergude summasid tuleb aga veel sulgudes märgitud suuruste võrra «parandada». Nii näiteks puudub esimeses reas maagilisest konstandist 90, teises reas on summa maagilisest konstandist 70 võrra suurem jne. Otsekohe torkab nende paranduste hulgas silma teatav sümmeetria ja pole raske leida sellist üksikute arvude vahetamise moodust, mille korral kõik summad muutu-

1	143	142	4	5	139	138	8	9	135	134	12
132	14	15	129	128	18	19	125	124	22	23	121
120	26	27	117	116	30	31	113	112	34	35	109
37	107	106	40	41	103	102	44	45	99	98	48
49	95	94	52	53	91	90	56	57	87	86	60
84	62	63	81	80	66	67	77	76	70	71	73
72	74	75	69	68	78	79	65	64	82	83	61
85	59	58	88	89	55	54	92	93	51	50	96
97	47	46	100	101	43	42	104	105	39	38	108
36	110	111	33	32	114	115	29	28	118	119	25
24	122	123	21	20	126	127	17	16	130	131	13
133	11	10	136	137	7	6	140	141	3	2	144

Joonis 19.

1	99	3	97	5	6	94	8	92	10	415 (+90)
90	12	88	14	86	85	17	83	19	81	575 (—70)
21	79	23	77	25	26	74	28	72	30	455 (+50)
70	32	68	34	66	65	37	63	39	61	535 (—30)
41	59	43	57	45	46	54	48	52	50	495 (+10)
51	49	53	47	55	56	44	58	42	60	515 (—10)
40	62	38	64	36	35	67	33	69	31	475 (+30)
71	29	73	27	75	76	24	78	22	80	555 (—50)
20	82	18	84	16	15	87	13	89	11	435 (+70)
91	9	93	7	95	96	4	98	2	100	595 (—90)
496	512	500	508	504	506	502	510	498	514	
(+9)	(—7)	(+5)	(—3)	(+1)	(—1)	(+3)	(—5)	(+7)	(—9)	

Joonis 20.

vad võrdseteks. Üks võimalik korrigeerimise variant on näidatud joonisel 21, kus poolpaksult trükitud arvud tuleb paarikaupa vahetada samas reas paiknevate sobivate arvudega ja tavalises kirjas trükitud arvud samas veerus paiknevatega. Vahetuste tulemusel saadav kümnendat järku maagiline ruut on näidatud joonisel 22.

		93		**6**	**5**				
				16					
30				75					**21**
				36					
51	**52**	**48**	**54**			**57**	**43**	**59**	
41									
				66					
				25					
				86					
		3							

Joonis 21.

1	99	93	97	6	5	94	8	92	10
90	12	88	14	16	85	17	83	19	81
30	79	23	77	75	26	74	28	78	21
70	32	68	34	36	65	37	63	39	61
51	52	48	54	45	46	57	43	59	50
41	49	53	47	55	56	44	58	48	60
40	62	38	64	66	35	67	33	69	31
71	29	73	27	25	76	24	78	22	80
20	82	18	84	86	15	87	13	89	11
91	9	3	7	95	96	4	98	2	100

Joonis 22.

Analoogiliselt toimub ka näiteks neljateistkümnendat järku maagilise ruudu konstrueerimine, mille maagiline konstant on $\sum_{14} = 1379$. Ruudu esialgse täitmise tulemus sel juhul on näidatud joonisel 23 (ridade ja veergude juurde on kirjutatud nõutavad parandused), pärast vahetusi saadud maagiline ruut aga joonisel 24 (vahetatud arvud on trükitud poolpaksult).

Tuleb märkida, et kirjeldatud võte ei sobi juhul $n = 6$, sest siis pole võimalik leida sobivat arvude vahetamise moodust (soovitame lugejail selles praktiliste kogemuste varal veenduda). Selle juhu jaoks tuleb seega kasutada mõnd teist konstrueerimisviisi, kasvõi näiteks seda, mis on kirjeldatud viites 2 esimesena nimetatud raamatus (tulemus on näidatud joonisel 25).

1	195	3	193	5	191	7	8	188	10	186	12	184	14	+182
182	16	180	18	178	20	176	175	23	173	25	171	27	169	—154
29	167	31	165	33	163	35	36	160	38	158	40	156	42	+126
154	44	152	46	150	48	148	147	51	145	53	143	55	141	—98
57	139	59	137	61	135	63	64	132	66	130	68	128	70	+70
126	72	124	74	122	76	120	119	79	117	81	115	83	113	—42
85	111	87	109	89	107	91	92	104	94	102	96	100	98	+14
99	97	101	95	103	93	105	106	90	108	88	110	86	112	—14
84	114	82	116	80	118	78	77	121	75	123	73	125	71	+42
127	69	129	67	131	65	133	134	62	136	60	138	58	140	—70
56	142	54	144	52	146	50	49	149	47	151	45	153	43	+98
155	41	157	39	159	37	161	162	34	164	32	166	30	168	—126
28	170	26	172	24	174	22	21	177	19	179	17	181	15	+154
183	13	185	11	187	9	189	190	6	192	4	194	2	196	—182
+13	—11	+9	—7	+5	—3	+1	—1	+3	—5	+7	—9	+11	—13	

Joonis 23.

Ei tule muidugi arvata, nagu jaguneksid maagiliste ruutude konstrueerimise spetsiaalsed meetodid ainult nendeks kolmeks klassiks ($n = 2k + 1$, $n = 4k$ ja $n = 4k + 2$). Teine tuntud jaotamisviis seisneb selles, et antakse eraldi meetodid algarvulise ning kordarvulise n juhuks. Viimane jaguneb sel juhul veel kaheks alajuhuks vastavalt sellele, kas $n = 2p$, kus p on algarv, või avaldub arv n teistsuguste tegurite korrutisena.

1	195	**185**	193	5	191	**8**	**7**	188	10	186	12	184	**14**
182	16	180	18	178	20	**22**	175	23	173	25	171	27	169
42	167	31	165	33	163	**161**	36	160	38	158	40	156	**29**
154	44	152	46	150	48	**50**	147	51	145	53	143	55	141
57	139	59	137	61	135	**133**	64	132	66	130	68	128	70
126	72	124	74	122	76	**78**	119	79	117	81	115	83	113
99	**100**	**96**	**102**	**94**	**104**	91	92	**107**	**89**	**109**	**87**	**111**	98
85	97	101	95	103	93	105	106	90	108	88	110	86	112
84	114	82	116	80	118	**120**	77	121	75	123	73	125	71
127	69	129	67	131	65	**63**	134	62	136	60	138	58	140
56	142	54	144	52	146	**148**	49	149	47	151	45	153	43
155	41	157	39	159	37	**35**	162	34	164	32	166	30	168
28	170	26	172	24	174	**176**	21	177	19	179	17	181	15
183	13	**3**	11	187	9	189	190	6	192	4	194	2	196

Joonis 24.

Vaatlemegi lõpuks veel viimati nimetatud võimalust. On nimelt üpris lihtne olemasolevate m-järku ja n-järku maagiliste ruutude abil otsekohe kirjutada mn-järku maagilist ruutu. Selleks tuleb vaid antud m-järku maagilises ruudus iga arv k ($k = 1, 2, \ldots$ $\ldots, m^2$) asendada terve n-järku üldistatud maagilise ruuduga, mis saadakse antud maagilisest ruudust selle igale arvule konstandi $(k-1)n^2$ lisamise teel. Näiteks joonisel 26 toodud kolmandat ja joonisel 27 toodud neljandat järku maagilistest ruutudest saame nii (võttes $m = 3$ ja $n = 4$) joonisel 28 kujutatud kaheteistkümnendat järku maagilise ruudu (maagilise konstandiga $\sum_{12} = 870$).

31	9	2	22	27	20
3	32	7	21	23	25
35	1	6	26	19	24
4	36	29	13	18	11
30	5	34	12	14	16
8	28	33	17	10	15

Joonis 25.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Joonis 26.

1	14	4	15
8	11	5	10
13	2	16	3
12	7	9	6

Joonis 27.

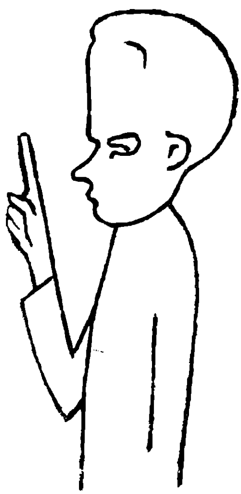
113	126	116	127	1	14	4	15	81	94	84	95
120	123	117	122	8	11	5	10	88	91	85	90
125	114	128	115	13	2	16	3	93	82	96	83
124	119	121	118	12	7	9	6	92	87	89	86
33	46	36	47	65	78	68	79	97	110	100	111
40	43	37	42	72	75	69	74	104	107	101	106
45	34	48	35	77	66	80	67	109	98	112	99
44	39	41	38	76	71	73	70	108	103	105	102
49	62	52	63	129	142	132	143	17	30	20	31
56	59	53	58	136	139	133	138	24	27	21	26
61	50	64	51	141	130	144	131	29	18	32	19
60	55	57	54	140	135	137	134	28	23	25	22

Joonis 28.

Täiesti analoogiliselt saab samadest lähteruutudest ka veel teise kaheteistkümnendat järku maagilise ruudu (kui võtta $m = 4$ ja $n = 3$), kuid selle jätame juba lugejale teha.

ARVUTEOORIA PÕHITEOREEM

T. Roosinupp



Juba hulk sajandeid on matemaatikud püüdnud lahendada mõningaid üliraskeid arvuteoreetilisi probleeme, kuid paraku tagajärjetult. Käesolevas uurimuses lahendame paar olulisemat nendest probleemidest ja näitame ühtlasi võimaluse kõigi ülejäänute lahendamiseks. Kõigepealt tõestame selleks ühe fundamentaalse teoreemi, mida tema suure teadusliku ja praktilise tähtsuse tõttu võib õigusega nimetada arvuteooria põhiteoreemiks (või veelgi täpsemalt — Roosinupu teoreemiks).

Teoreem. *Kõik naturaalarvud on võrdsed arvuga 1.*

Tõestus. On teada, et $\lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{k} = 1$.

Vastavalt piirväärtuse definitsioonile (vt. näit. G. Kangro. Matemaatiline analüüs I, lk. 58) tähendab see seda, et iga positiivse reaalarvu ε korral leidub selline naturaalarv N, et kui vaid $k > N$, siis

$$|\sqrt[k]{k} - 1| < \varepsilon.$$

See võrratus on aga samaväärne võrratustega

$$1 - \varepsilon < \sqrt[k]{k} < 1 + \varepsilon.$$

Kasutades astmefunktsiooni monotoonsust (vt. G. Kangro. Op. cit., lk. 138), saame nendele võrratustele kuju

$$(1 - \varepsilon)^k < k < (1 + \varepsilon)^k.$$

Tuletatud võrratused kehtivad iga $\varepsilon > 0$ korral. Kui nüüd arvestada, et astmefunktsiooni pidevuse tõttu eksisteerivad piirväärtused

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (1 - \varepsilon)^k = 1 \text{ ja } \lim_{\varepsilon \to 0} (1 + \varepsilon)^k = 1,$$

siis piirväärtuse monotoonsuse omaduse põhjal järeldub viimastest võrratustest

$$1 \leqslant k \leqslant 1,$$

kui vaid $k > N$. Et aga naturaalarvude jada on ilmselt mittekahanev ja $1 = 1$, siis osutub, et ka iga naturaalarvu $s \leqslant N$ korral ammugi $s = 1$. Sellega on teoreem tõestatud.

Teeme nüüd mõned järeldused.

Järeldus 1. *Kõik positiivsed ratsionaalarvud on võrdsed 1-ga ja kõik negatiivsed ratsionaalarvud (—1)-ga.*

T õ e p o o l e s t, iga positiivset ratsionaalarvu r võib vaadelda kui naturaalarvude jagatist, s. t. $r = \frac{m}{n}$. Et aga teoreemi põhjal $m = 1$ ja $n = 1$, siis on meie väide positiivsete ratsionaalrvude korral ilmne. Täpselt samuti kulgeb tõestus ka negatiivsete ratsionaalarvude korral.

Järeldus. 2. *Kõik positiivsed reaalarvud on võrdsed 1-ga ja kõik negatiivsed reaalarvud (—1)-ga.*

T õ e s t u s. Et ratsionaalarvude hulk on reaalarvude hulgas kõikjal tihe (vt. näit. G. Kangro. Matemaatiline analüüs II, lk. 403), siis võib iga reaalarvu vaadelda kui ratsionaalarvude mingi jada piirväärtust. Näiteks vastavalt reaalarvule $a > 0$ leidub ratsionaalarvude jada $\{r_n\}$ nii, et $\lim_{n \to \infty} r_n = a$. Et aga järelduse 1 põhjal $r_n = 1$, siis on ka $a = 1$. Negatiivsete reaalarvude korral on tõestus täpselt samasugune.

Lihtne on veenduda järgmiste järelduste õigsuses:

Järeldus 3. *Kõik naturaalarvud on algarvud.*

Järeldus 4. *Pole olemas kaksikuid algarve.*

Nende järeldustega pole meie teoreemi rakendusvõimalused muidugi ammendatud. Ülejäänud järeldused jätame aga lugeja formuleerida ja tõestada.

ARITMEETIKAÜLESANDEID

1. Neljakohalise arvu $ABCD$ numbreid permuteerides saame: neli algarvu; seitse kahe algarvu korrutist; ühe algarvu ruudu; kaheksa arvu, mis jaguvad 2-ga (kuid mitte 4-ga); kaks arvu, mis jaguvad 4-ga (kuid mitte 8-ga); ühe arvu, mis jagub 8-ga (kuid mitte 16-ga) ja ühe arvu, mis jagub 16-ga. Millised on need arvud?

2. Arvude ABC ja $DEDF$ aritmeetiline keskmine on $DFIA$, geomeetriline keskmine $DBAC$ ning harmooniline keskmine $DBBC$. Leida need arvud.

3. Taastada järgnev korrutamistehe, kui on teada, et paarituteks numbriteks ei osutu ainult A, B ja C (mis sealjuures ei tarvitse olla erinevad):

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & \times & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\hline
 & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & & \cdot & A & \cdot & \cdot & \\
\cdot & \cdot & B & \cdot & \cdot & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\
\hline
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & C & \cdot
\end{array}
$$

MORITZ CANTOR — MATEMAATIKA AJALOO SUURKUJU[1]

J. Depman

Moritz Cantor, kelle surmast käesoleval aastal möödus 50 aastat, on 19. sajandi suurimaid matemaatika ajaloolasi ning üks väheseid uurijaid, kes kogu oma energia väga pika elu jooksul on andnud matemaatika ajaloole. Matemaatika ajaloo alal on töötanud mõningad vägagi silmapaistvad õpetlased (Hankel, Chasles jt.), kuid nad ei vaadanud matemaatika ajaloole kui oma põhilisele erialale. Moritz Cantor, samuti nagu Venemaal Viktor Viktorovitš Bobõnin (1849—1919), nägi just matemaatika ajaloos oma tegevuse põhiala ning jättis seal endale igavese mälestusmärgi neljaköitelise kapitaalse töö «Vorlesungen über Geschichte der Mathematik» (Loengud matemaatika ajaloost) ning arvukate monograafiate ja artiklite kujul, millest tähtsamaid mainime allpool.

Moritz Cantori elulugu pole keeruline. Ta sündis Mannheimis 23. augustil 1829, suri 91. eluaastal Heidelbergis 9. aprillil 1920, olles sealse ülikooli korraliseks honorarprofessoriks (mittekoosseisuliseks).

Cantor oli Gaussi ja Dirichlet' õpilane Göttingeni ülikoolis ning Steineri ja Sterni õpilane Berliini ülikoolis. Astunud 1848. a. Göttingeni ülikooli, kuulas Cantor 1850/51. aasta talvesemestril Gaussi kursust vähimruutude meetodist ning sai 1851. a. sügisel teadusliku kraadi väitekirja «Vähekasutatavatest koordinaatsüsteemidest» eest. Ta jätkas õpinguid Berliinis ning omandas loengute pidamise õiguse 1853. a. Heidelbergis, kus asus lugema kursust «Elementaarmatemaatika alused». Saanud innustust Sternilt, Chasles'ilt ja Bertrandilt (viimase kahega tutvus Cantor lähemalt Pariisis), aga ka filosoof Eduard Röthilt, kirjutas Cantor: «Ma mainin teatava uhkustundega, et E. Röthi õhutus oli väga oluline minu suunamisel matemaatika ajaloo alastele uurimustele.»

Juba 1860. a. suvesemestril luges Cantor Heidelbergi ülikoolis matemaatika ajaloo kursust. Tema ettekanded saksa loodusuurijate kongressidel (Bonnis ja Karlsruhes) ning tema astumine ajakirja «Zeitschrift für Mathematik und Physik» toimetusse 1859. aastal laiendasid tema tegevusvälja. Cantori üha sügavamale ja

[1] Artikli on venekeelsest käsikirjast tõlkinud E. Tamme.

sügavamale tungivad uurimused matemaatika ajaloo alal viisid tema esimese suurema tööni «Mathematische Beiträge zum Kulturleben der Völker» (Matemaatilised panused rahvaste kultuuri), mis andis autorile 1863. a. professori kutse. Selle töö kirjutamise ajast kuni 1903. aastani kestab teaduslik kirjavahetus Cantori ja tema erialakaaslase Maximilian Curtze (1837—1903) vahel, kes avastas euroopa matemaatika ajaloole Nicole Oresme'i (1320?—1382). Rahulikus ja loovas võistluses ehitasid kaks sõpra matemaatika ajaloo hoone, millele oli alusmüüri rajanud ja üldised kontuurid kujundanud juba Montucla [2], kuid mis vajas täiendavat kriitiliselt kontrollitud ehitusmaterjali.

Seoses töötamisega nimetatud ajakirja toimetuses tegi Cantor tohutut retsenseerimistööd. Väga elava õppetöö kõrval hakkas kiiresti kasvama tema tööde arv matemaatika ajaloo alal. Cantori loetud kursuste nimekiri näitab tema uurimuste ja materjalide kogumise esialgset plaani matemaatika monumentaalse ajaloo jaoks ning kõik see koos iseloomustab tagasihoidlikku, kindlale eesmärgile suunatud uurija elu.

1875. aastal ilmunud Cantori raamat rooma maamõõtjatest (Die römische Agrimensoren) täidab haigutavat kuristikku antiik- ja euroopa matemaatika vahel, mida kõik selle ajani tajusid, ning võimaldab visandada matemaatika arengu üldised kontuurid Euroopas, nagu väljendas üks varasemaid ja tõsisemaid Cantori õpilasi Siegmund Günther (1848—1923).

Samast, 1875. aastast algab Cantori kaastöö saksa biograafilisele sõnastikule «Allgemeine deutsche Biographien», kuhu ta kirjutab sadade matemaatikute biograafiad, milles pole edasi antud mitte ainult faktid, vaid on määratud ka vaadeldavate õpetlaste koht matemaatika arengus.

Matemaatika ajaloo peatükid, mis Cantor arendas iseseisvateks töödeks, näitavad uurija kasvu ja tema kolmesemestrilise ülikoolikursuse sisu rikkust.

1880. aastal ilmus esimene köide tema loengutest «Vorlesungen über Geschichte der Mathematik» — 945 suureformaadilist lehekülge tihedat teksti.

Cantori lähim sõber ja kaaslane teaduse alal M. Curtze märgib omakasupüüdmatu siirusega esimese köite suurt sisulist rikkust, kunstilist vormi ja loomulikku terviklikkust. See köide haarab antiikmaailma, kloostriõpetlased, keskaja ja idamaade matemaatika. «Ainult selline meister nagu Cantor, algallikate täieliku valdamisega, väsimatu töökuse ja kogumiskirega võis lõpule viia selle töö», väidab prof. P. Stäckel (1862—1919), geomeetria aluste allikate suur asjatundja ja koguja. Cantori stiili meisterlikkusest, mida korduvalt on rõhutanud kriitikud, võimaldavad saada ettekujutust

---

[2] Vt. J. Depman. Montucla — matemaatika ajaloo pioneer. — Matemaatika ja kaasaeg, XII, lk. 108—115.

tema töö peatükid renessansi matemaatikutest-kunstnikest, logaritmide avastamisest, jagamatuse meetodi tekkimisest, vendadest Bernoullidest, Euleri ajastust jm. Need peatükid on nagu kunstilised etüüdid suure pildi jaoks.

1892. aastal ilmus «Loengute» II köide (955 lk.), mis hõlmab aastad 1200—1668, 1898. aastal III köide (931 lk.), mis viib matemaatika ajaloo kuni 1758. aastani. Kuni selle aastani kirjutas matemaatika ajaloo Cantor üksi. Varsti ilmusid nende köidete kordusväljaanded.

Cantoril oli kirjavahetus kõigi rahvaste teadlastega, kes töötasid matemaatika ajaloo alal. Eriti elav oli tema teaduslik kirjavahetus Pariisis elava Paul Tanneryga (1843—1904), Diophantose, Fermat' ja Descartes'i väljaandjaga, suurima prantsuse spetsialistiga matemaatika ajaloo alal. Tannery lesk andis mehe pärandist välja teaduslikke memuaare (Mémoires scientifiques), mille VI köites on talletatud see huvitav kirjavahetus.

Cantori töö rahvusvahelist tunnustust demonstreeriti rahvusvahelistel matemaatikute kongressidel Pariisis (1900), Heidelbergis (1904), Roomas (1908). Cantori 70. sünnipäeva puhul ühinesid paljude rahvaste 32 uurijat, et teha matemaatika ajaloo uurijate auväärsele patriarhile üldtunnustatud kink — teaduslike artiklite kogumik. Samal ajal õnnestus ellu kutsuda veelgi olulisem liit: üheksaliikmeline autorite — juubilari sõprade kollektiiv (S. Günther, V. Bobõnin, A. Braunmühl, F. Cajori, E. Netto, G. Loria, V. Kommerell, G. Vivati, C. R. Wallner) asus jätkama juubilari põhitööd, et viia see kuni 1799. aastani, Gaussi doktoritöö ilmumiseni. Nii ilmus 1907. a. «Loengute» neljas köide (1119 lk.), milles vaid väike osa pärineb otseselt Cantori sulest. Sellega oli tõmmatud joon alla Cantori ülemaailmset tunnustust leidnud elutööle. Nii nagu enne Cantorit ei saanud kirjutada midagi matemaatika ajaloost ilma Montucla raamatusse vaatamata, nii ei saa pärast Cantorit midagi sellel alal kirjutada ilma Cantori raamatuid kasutamata.

Cantori loengutes on ka faktilisi ebatäpsusi ja põhimõtteliselt vastuvõtmatuid lähenemisi. Teine sama väsimatu matemaatika ajaloo materjalide koguja Gustav Eneström (1852—1923) Upsalas on oma ajakirjas «Bibliotheka Mathematica», mida hiljem andis välja Leipzigis, märkinud suure hulga selliseid ebatäpsusi. Matemaatika ajaloost huvitatud on tänutundega kandnud need märkused Cantori raamatute isiklikku eksemplari. Kuid kõik see ei vähenda Cantori monumentaalse töö tohutut tähtsust. Eneströmi enamasti õiged märkused on ellu kutsunud ka ägedaid ja kõneosavaid Cantori apologeete, nagu preester-jesuiit H. Bosmans (1852—1928) Belgias või G. Loria Itaalias, kellele matemaatika võlgneb peale suure hulga matemaatika ajaloo alaste etüüdide ka Fagnano ja Torricelli tööde väljaandmise.

Cantori ustavateks teekaaslasteks uurimiste teel olid taanlane H. G. Zeuthen, prantslane Pierre Duhem, itaallane A. Favaro. Cantor oli Peterburi, Torino, Viini ja Heidelbergi teaduste akadeemiate korrespondentliige.

Cantori kaheksakümnendaks sünnipäevaks kingiti talle teine tööde kogumik tema õpilastelt ja austajatelt, keda leidus kõikjal maailmas.

Umbes 60 aastat vältas Cantori pedagoogiline tegevus. Tema viimaseks tööks oli Feuerbachi biograafia, pärast seda on ta avaldanud veel kirjutisi oma sõprade — Boncompagni, Curtze, Schloemilchi ja Gerhardti mälestuseks.

Kuigi Cantorile olid võõrad kommertshuvid ning elule vaatas ta naiivse idealisti silmadega, ei puudunud tal siiski huvi reaalse elu vastu. Kõrvuti matemaatika ajalooga, mis on kaugel igasugusest praktikast, luges ta igapäevase elu matemaatika kursust. Kaheksakümnendatel eluaastatel asutas ta koos mõttekaaslastest professoritega, kelle hulgas olid Oncken, Wundt, Zeller, Bluntschi, ajaloolis-filosoofilise ühingu ja pidas seal populaarseid loenguid. «See on matemaatika ajaloo suurepärane tundja», ütles tema kohta Kuno Fischer. «Leidlik ja julge mõistus, mis koos eaga omandas tasakaalukuse, täpne ja range, õnnistatud kõigi kirjanikutalentidega», lisab Paul Tannery.

Hinnangu Cantori «Matemaatika ajaloo» kohta annab Paul Tannery «Prantsuse Suures Entsüklopeedias» sõnadega: «Ta [Cantor] oli selles juhiks koolkonnale, keda jäljendatakse kaua; kui ka mõned tema arvamused võivad põhjustada vastuväiteid, annab neile Cantori nimi siiski erakordse kaalu.»

M. Cantori tööde bibliograafia, mis sisaldab ligi 1000 nimetust, andis M. Curtze Cantori 70. sünnipäevale pühendatud kogumikus. Seda nimekirja täiendas hilisemate töödega Cantori õpilane ja järglane kateedris Karl Bopp (1877—1934). Peale juba mainitud Cantori raamatute märgime veel tema töid «Loengud elementaarmatemaatika alustest» (Heidelberg, 1855), «Juhuse seadustest» (Berlin, 1877), «Poliitilise aritmeetika käsiraamat» (Leipzig, 1898).

Üldise hinnangu Moritz Cantori töödele annab Saksa biograafiline aastaraamat 1917—1920 (Deutsches Biographisches Jahrbuch, herausgegeben vom Verbande der deutschen Akademien, 1928).

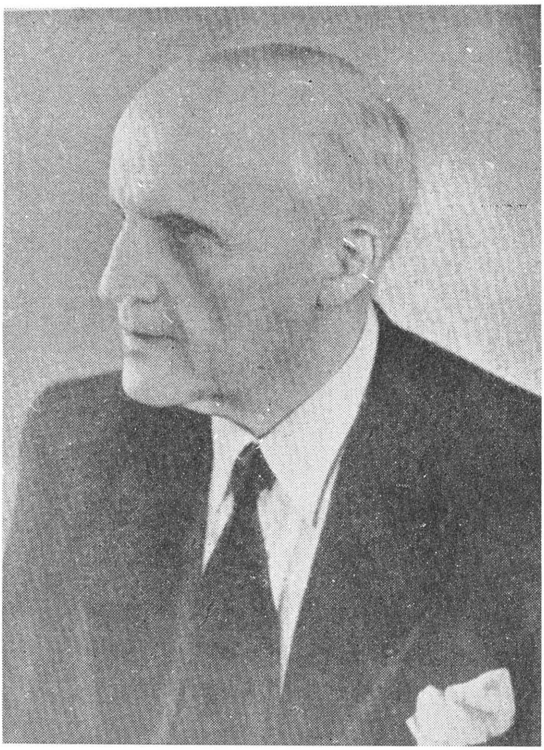
ERHARD SCHMIDT — TARTU ÜLIKOOLI KASVANDIK

Ü. Lumiste

Detsembris 1969 möödus kümme aastat käesoleva sajandi ühe silmapaistva matemaatiku Erhard Schmidti (13. I 1876—6. XII 1959) surmast. Oma esimeste, D. Hilberti mõjul kirjutatud töödega sai E. Schmidt kaasaja funktsionaalanalüüsi üheks rajajaks. Võib leida mitmeid viiteid, milles tunnustavalt märgitakse tema teeneid sellel alal. N. Bourbaki näiteks kirjutab [1]: «Hilberti tuntud tööd integraalvõrranditest andsid Erhard Schmidtile võimaluse täielikus analoogias Eukleidese geomeetriaga defineerida ja uurida geomeetriliselt Hilberti ruumi. ... Frechet' ja F. Rieszi vaated üldisele topoloogiale mõjutasid E. Schmidti ja Frechet'd ennast 1907.—1908. a. julgelt viima «Hilberti ruumi» (reaalsesse või kompleksesse) eukleidilise geomeetria keelt. ... Schmidt tõestab ortogonaalprojektsiooni olemasolu kinnisele lineaarsele muutkonnale, mis loob võimaluse anda Hilberti lineaarsüsteemide teooriale lihtsama ja üldisema kuju». K. Maurini ülevaatest loeme[2]: «Tohutut mõju lineaarvõrrandite teooria edasisele arengule avaldasid Erhard Schmidti tööd ja tema väitekiri 1905. a., mis avaldati 1907. a. ajakirja «Mathematische Annalen» 43. köites. Nendele töödele on iseloomulik vahendite lihtsus — Schmidti ortogonaliseerimine, Besseli võrratus — ja klassikaline ilu.» E. Schmidti avaldatud tööde nimestik ei ole pikk. See sisaldab 36 artiklit ja 12 lühimärget. Kuid enamik teaduslikest artiklitest on jätnud sügava jälje vastava ala arengusse. Funktsionaalanalüüsile pühendatud tööde kõrval on püsiva väärtusega ka E. Schmidti hilisemad uurimused isoperimeetrilise probleemi alal (eriti n-mõõtmelistes konstantse kõverusega ruumides), mis on avaldatud aastatel 1939—1949. Viljakas oli ka tema pedagoogiline töö Breslau (praegu Wrocławi) ja Berliini ülikoolides (vastavalt a-st 1911 ja 1917), kus E. Schmidti silmapaistvamateks õpilasteks olid Heinz Hopf, Johann von Neumann, Hans Freudenthal jt. Tema kauaaegne assistent Hans Rohrbach meenutab [3]: «Alles hoopis hiljem märkasime me, kui

---

[1] Н. Бурбаки. Очерки по истории математики. М., 1963, стр. 142, 224.
[2] К. Морен. Методы гильбертова пространства. М., 1965, стр. 530.
[3] Ansprachen anlässlich der Feier des 75. Geburtstages von Erhard Schmidt durch seine Fachgenossen (13. I 1951), lk. 29 (Berliini Tehnikaülikooli Matemaatikainstituudi eeltrükis, 1951). Selle väljaande lahke saatmise eest on käesoleva kirjutise autor siiralt tänulik Kurt R. Biermannile.



Erhard Schmidt
13. I 1876 — 6. XII 1959

Erhard Schmidt Tartu ülikooli üliõpilasena
(ENSV RAKA, f. 402, nim. 1, sü. 29768, l. 7)

palju ulatub sellest, mis on eriliselt elegantses esituses üldtuntud, tagasi Erhard Schmidtini.»

E. Schmidti teaduslikud ja pedagoogilised teened ei jäänud juba tema eluajal vajaliku tähelepanuta [4]. Peatselt pärast Berliini tulekut valiti ta a. 1918 Preisi Teaduste Akadeemia liikmeks, hiljem 1942 — Bayeri Teaduste Akadeemia korrespondentliikmeks. Kahel korral (1927/28 ja 1935/36) oli ta valitud Saksa Matemaatikaseltsi esimeheks, ühel korral — 1929/30 Berliini ülikooli rektoriks. Saksa Demokraatlik Vabariik hindas 1949. a. tema teeneid I klassi rahvusliku preemiaga. Ta valiti 1951. a. Saksa Matemaatikaseltsi auliikmeks, 1955. a. andis Tübingeni ülikool talle audoktori kraadi. Prantsuse Teaduste Akadeemia valis ta 1956. a. oma korrespondentliikmeks.

Erhard Schmidt on sündinud ja kasvanud Tartus, kus möödusid ka tema kooliaastad. Siin lõpetas ta ülikooli. Tema isa Aleksander Schmidt (1831—1894) põlvnes põlisest Saare- ja Muhumaal tegutsenud balti-saksa vaimulike suguvõsast. Sündinud Muhu saare pastori, hilisema Saaremaa superintendendi pojana, lõpetas Aleksander Schmidt Tartu ülikooli arstiteaduskonna ja kaitses siin 1858. a. meditsiinidoktori kraadi. Alates 1862. aastast kuni surmani tegutses A. Schmidt Tartu ülikooli õppejõuna, 1869—1894 füsioloogiaprofessorina. Suure tunnustuse saavutas ta oma teedrajavate uurimustega hematoloogias, eriti vere hüübimisprotsesside alal [5] Viis aastat (1885—1890) oli A. Schmidt Tartu ülikooli rektor. Tema ja tema abikaasa Ida Schmidti (neiuna Fick) perekonnas sündiski 13. jaanuaril 1876 poeg, kellele pandi nimeks Osvald Johannes Erhard.

Kooliharidusе sai E. Schmidt Tartus. Kolm aastat õppis ta siinses Kollmani eragümnaasiumis ning oli seejärel ühe aasta Riia Linnagümnaasiumi lõpuklassis, mille lõpetas silmapaistva eduga 1892. aastal. Küpsustunnistusel oli kõigis ainetes, välja arvatud vene keel, hindeks «väga hea».[6]

Järgmise aasta sügisel 1893 astus nooruk Tartu ülikooli matemaatikat õppima. Aastase viivituse põhjustas halb tervis. Ka ülikooli esimese semestri õpinguid segas närvihaigus. Kuigi noor üliõpilane kuulas innukalt analüütilise geomeetria ja diferentsiaalarvutuse loenguid prof. K. Lahtini juures ning elementaarmatemaatikat dots. Th. Molieni juures, halvenes tema tervis semestri lõpuks sedavõrd, et oldi sunnitud pöörduma Peterburi eriarsti poole, kes diagnoosis haiguseks neurasteenia ja keelas

---

[4] Hans Rohrbach. Erhard Schmidt. Ein Lebensbild. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 1968, 69, 209—224.

[5] Biographisches Lexikon hervorragender Ärzte. 2. Aufl. Berlin-Wien, 1934, B. 5, S. 99—100; Большая Советская Энциклопедия. 2-е изд., т. 48, стр. 123.

[6] ENSV RAKA, fond 402, nim. 1, sü. 29768.

seisukorra paranemiseni igasuguse vaimse töö. Pärast mõnekuust puhkust võis jälle mõelda loengutel käimisele. Lisaks K. Lahtini kursuse teise poole kuulamisele võttis E. Schmidt nüüd osa ka A. Kneseri determinantide teooria ja kõrgema algebra elementide loengutest, P. Grave potentsiaaliteooria- ja Tammanni keemia-loengutest. Tervisehäiretele lisandus raske kaotus — 22. aprillil 1894. a. suri isa. Perekond sattus majanduslikesse raskustesse, neile jäi ainult väike maja ja emale määratud pension, millest ei jätkunud nelja lapse koolitamiseks. Kuigi E. Schmidt kohaliku professori pojana oli vabastatud loengumaksust, tuli tal 1894. a. augustis paluda ka teda arvestada stipendiumide jagamisel. Õpingute jätkamist takistas aga tervise järsk halvenemine. Arsti nõudel tuli veel ühe aasta jooksul täielikult puhata igasugusest vaimsest tööst. Alles 1895. a. septembris võis uuesti mõelda loengutele ja raamatutele. Kuid ka seekordne tööperiood oli lühike — aeg novembrist märtsini möödus haigevoodis, algul pleuriidiga, seejärel sarlakiga. Nii suutiski E. Schmidt oma esimesed ülikooli-eksamid anda alles 1896. a. septembris komisjonieksamitena: elementaarmatemaatikas Bervi, Molieni ja Kneseri ees, sissejuhatuses analüüsi nende ja Aleksejevi ees, analüütilises geomeetrias Aleksejevile. Lisaks veel füüsika üldkursus Sadovskile ning anorgaaniline keemia Tammanile, Levinson-Lessingile ja Lembergile. Kõikides ainetes oli hindeks «väga hea». Siitpeale lähevad õpingud vaheaegadeta ja suure eduga. Järgnesid sellised matemaatika kursused nagu kõrgem algebra Kneserile ja Aleksejevile, diferentsiaal- ja integraalarvutus Aleksejevile ja Pokrovskile, diferentsiaalvõrrandid ja variatsioonarvutus, analüütiline mehhaanika, selle täiendavad peatükid — kõik Kneserile, kõrgem geomeetria Aleksejevile, diferentsarvutus Gravele. Peale selle kõrvalained — astronoomia, füüsika, isegi meteoroloogia. Jälle olid kõik hinded «väga head». Semestritöö astmeridadest kirjutas E. Schmidt 1899. a. esimesel semestril Kneseri juhendamisel, ülikooli lõpetas ta aga mais kandidaaditööga «Graviteeriva keha potentsiaali teistest tuletistest sisepunktides», mille eest talle 1900. a. mais omistati selleaegne füüsika-matemaatikakandidaadi diplom. Viimane töö oli kirjutatud mitte enam Tartus, vaid Berliinis, kuhu E. Schmidt oli siirdunud juba augustis 1899. a. Sealt kirjutas ta teaduskonnale novembris ja palus pikendada kandidaaditöö esitamise tähtaega, märkides põhjuseks, et pärast pikaajalist tööd ühe teema kallal oli ta sunnitud valima teise teema. Oma õpinguid Berliini ülikoolis ei katkestanud E. Schmidt ka diplomi vastuvõtmiseks Tartus, see anti allkirja vastu 1901. a. jaanuaris tema emale.

Ülikooli lõpetamiseks Tartus läks E. Schmidtil tervisehäirete tõttu seega 7 aastat. Kõige sügavamat mõju avaldas talle siin kahtlemata A. Kneser, kes oli silmapaistvaim sellal Tartus töötavaist matemaatikaprofessoreist, seejuures ainus sakslane. Temagi lahkus 1900. aastal. Tartusse jäid vaevalt keskpärased matemaatikud Aleksejev ja Grave. On loomulik, et E. Schmidtil ei olnud siin mingeid väljavaateid ning tema siirdumine Saksamaale on täiesti ootuspärane. Pärast õpinguid Berliinis täiendas ta end veel Göttingenis, kus talle väga suurt mõju avaldas selle aja juhtivamaid matemaatikuid D. Hilbert. Viimase juures kaitses E. Schmidt 1905. a. oma doktoriväitekirja «Suvaliste funktsioonide arendamine etteantud süsteemide järgi» (Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebenen), millega sai ühel hoobil ülemaailmselt tunnustatud matemaatikuks. Järgnes kutse Bonni ülikoolilt, kus E. Schmidt habiliteerus 1906. a. Study juures. Kahe aasta pärast oli ta juba korraline matemaatikaprofessor, esialgu Zürichi, seejärel 1910-st aastast Erlangeni ülikoolis. Pikemalt (1911—1917) töötas E. Schmidt Breslau (praegu Wrocław) ülikoolis. Sellest ajast meenutas E. Schmidt oma 75. sünnipäeva tähistamisel vastuses H. Kneseri tervitusele järgmist[3]: «See oli aastal 1911. Ma olin just Breslausse kutsutud ja mind tervitas sealse kombe kohaselt rektor pidulikul Nõukogu istungil. Rektoriks oli Teie isa[7] ja ta ütles tookord: «Kui me täna silmast silma seisame, mõtlen ma ühele hetkele 23 aastat tagasi. Siis tervitas mind kui Tartu ülikooli vastnimetatud professorit pidulikul Nõukogu istungil rektor — ja see oli Teie isa». Nii on meie perekonnad seisnud juba kolm korda vastastikku tervitussõnu öeldes, võib-olla tuleb Teie poja abiga ka veel neljas kord.»

E. Schmidti isiklikku elu Breslaus tumestasid kurvad sündmused. Veel Zürichis olles 1909. a. abiellus ta Tartust pärit Berta Bergmanniga, Tartu ülikooli kasvandiku ja tunnustatud kirurgiaprofessori Ernst Bergmanni tütrega. Vanim poeg Aleksander-Ernst sündis Erlangenis, Breslaus sündinud teine poeg Erhard suri mõne kuu pärast. Kolmanda poja Karl-Ernsti sündimisel suri ema. Majapidamise ja poegade kasvatamise võttis üle seni kasvatajannana töötanud Martha Ehrlich, kes jäi E. Schmidti hoolitsevaks majapidajaks kuni viimase surmani.

1917. aastal sai E. Schmidt austava kutse Berliini ülikoolilt asuda matemaatikaprofessorina H. A. Schwarzi kohale, mis oli vabanenud viimase pensionile siirdumisega. Schmidt ise meenutas hiljem[3]: «Kui ma Berliini ülikooli esimesest teaduskonna istungist osa võtsin, jättis ülimalt tähtsate peade imposantne ring mulle unustamatu mulje ja mul tekkis kohe tunne: selle ringi traditsiooni astumisega oled sa saavutanud oma elu krooni.» Tema teaduslike publikatsioonide arv ei olnud siis kuigi suur, kuid need olid kõik esmajärgulise tähtsusega tööd. Seoses sellega meenutab

---

[7] Tartus sündinud Hellmuth Kneser on Adolf Kneseri teine poeg.

H. Rohrbach järgmist seika. Edmund Landau, kes oli sellal kahtlemata üks tunnustatumaid saksa matemaatikuid ja meeletult palju publitseeris, põles samal ajal soovist, et teda kutsutaks Berliini. E. Schmidt oli üks nendest, kes tegi talle selle soovi täitumise võimatuks. Hilbert, kes teadis seda Landau väikest nõrkust, kasutas meelsasti Schmidti uut ilmunud tööd, hoides seda Göttingeni Matemaatikaseltsi istungil kui punast rätti Landau ees.

Berliini jäi E. Schmidt kuni elu lõpuni, olles sealt eemal ainult sõja tõttu aastail 1944—1946. Berliini ülikooli tegevuse taaselustamisel tuli E. Schmidt 1946. a. sügisel ööpimeduses üle Inglise ja Nõukogude okupatsioonitsoonide piiri. Ülikooli juurde juba koondunud matemaatikud võtsid ta suure rõõmuga vastu, ta sai kohe nende vaimseks juhiks. Nelja aasta pärast (1950) loobus E. Schmidt kõrge ea tõttu õppetööst ülikoolis, kuid jäi edasi Saksa DV Teaduste Akadeemia Matemaatikainstituudi direktoriks. Teda nimetati «Berliini matemaatikute Nestoriks». Väärikalt tähistati 1951. aastal tema 75. sünnipäeva. Ajakiri «Mathematische Nachrichten», mille üheks asutajaks ta on, pühendas talle oma 4. köite. See sisaldab 45 sõbra, kolleegi ja õpilase artiklid 21 maalt. Saksa Matemaatikaselts valis ta oma auliikmeks. Toimus pidulik istung rohkete tervituste ja õnnitlustega [3]. 80. sünnipäeva puhul 1956. aastal ilmus R. Nevanlinna artikkel [8], milles on antud esimene sisukas ülevaade E. Schmidti loomingust.

Erhard Schmidt suri Berliinis 6. detsembril 1959. a. Talle on pühendatud mitmed järelhüüded [9].

Ammendavat hinnangut E. Schmidti loomingule on vara anda, sedavõrd on see veel värske. Püsiva koha matemaatika ajaloos on leidnud tema tööd lineaarvõrranditest Hilberti ruumis (lineaarsetest integraalvõrranditest, lõpmata paljude tundmatutega lineaarvõrrandisüsteemidest jms.). Nende tähtsusest annavad tunnistust kasvõi juba käesoleva artikli alguses toodud tsitaadid. Vähem tuntud on tema paar tööd arvuteooriast. Lisaks neile kuulub E. Schmidtile artikleid, kus antakse mõnede fundamentaalsete mõistete ja lausete metoodiliselt hiilgavad käsitlused, mis on hiljem leidnud tee mitmetesse õpikutesse ja monograafiatesse. Nii käsitleb ta kaarepikkuse ja ruumala mõistet, arendab potentsiaaliteooriat, määrab kõigi selliste ruumiliste kõverate seas, mis

---

[8] R. Nevanlinna. Erhard Schmidt zu seinem 80. Geburtstag. Math. Nachr., 1956, 15, 3—6.

[9] G. Julia. Notice necrologique sur Erhard Schmidt. C. r. Acad. Paris, 1959, 249, 2676—2677.

G. Dunken. Erhard Schmidt (Nekrolog). Das Hochschulwesen, 1960, Nr. 2, 94—95.

K. Schröder. Erhard Schmidt (1876—1959). Math. Nachrichten, 1963, 25, Nr. 1, 1—3.

ühendavad kaht antud punkti ja mille kõverus rahuldab etteantud kitsendusi, niisugused kõverad, mille pikkus on ekstremaalne.

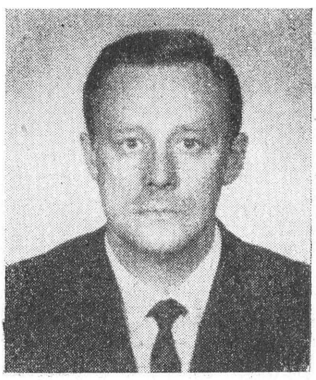
Omaette tsükli moodustavad tema viimased tööd isoperimeetrilise probleemi alal kõverpindadel ja konstantse kõverusega ruumides. Esimese töö selle probleemi alalt avaldas E. Schmidt 1939. aastal. Ta tõestab siin suure elegantsiga järgmise lause: «Kui r on sellise sfääri raadius n-mõõtmelises eukleidilises ruumis, millel on sama pindala, mis etteantud kehal K, ja r' on sellise kera raadius, millel on kehaga K sama ruumala, siis on $r' \leqslant r$, kusjuures võrdus kehtib ainult siis, kui K on kera.» Järgmisel aastal ilmuvad kaks tööd, milles antakse analoogiline lause n-mõõtmelise hüperboolse ruumi puhul ja sama ülesande osaline lahendus n-mõõtmelise elliptilise ruumi jaoks. Edasi järgneb 1942. a. artikkel üldisema probleemiseadega. Vaadeldakse ruutvormiga

$$ds^2 = du^2 + g(u)^2 dv^2$$

antud Riemanni meetrikat (u, v)-tasandil. Kui $\sigma(u)$ ja $\tau(u)$ on etteantud positiivsed kaks korda diferentseeruvad funktsioonid, C — lihtne kinnine kõver ja T — selle kõvera poolt piiratud piirkond, siis nõutakse etteantud väärtuse $L = \int_C \sigma(u) ds$ korral leida kõver selliselt, et $I = \int_T \tau(u) g(u) du dv$ oleks maksimaalne. Erijuhul, kui $\sigma(u) \equiv \tau(u) \equiv 1$ ning tegemist on seega klassikalise isoperimeetrilise ülesande analoogiga pöördpinna meetrikat kandval tasandil, uuris seda ülesannet aastatel 1843—1883 Tartu ülikoolis matemaatikaprofessorina tegutsenud Ferdinand Minding, kes pühendas sellele nii oma esimese (1830) kui ka viimase (1879) publikatsiooni. Minding ei saanud selle raske ülesande lahendamisel veel lõplikke tulemusi ning oma viimase, Tartus kirjutatud artikli lõpus pärandab ta probleemi tulevikule. Järgmiseks selle ülesande uurijaks oli 63 aasta pärast Tartust pärit matemaatik E. Schmidt, kes oma töös korduvalt viitab Mindingi artiklile, mida ta edasi arendab.

Hiilgava kokkuvõtte isoperimeetrilise probleemi kohta saadud tulemustest teeb E. Schmidt oma viimastes töödes aastatel 1948 ja 1949, kus ülesannet vaadeldakse üldisemal kujul. Pinna pindala tavaline definitsioon asendatakse Minkowski definitsiooniga, seega tavalise isoperimeetrilise võrratuse asemel saadakse Brunn-Minkowski võrratus. Seejuures õnnestus E. Schmidtil anda n-mõõtmelise eukleidilise, hüperboolse ja elliptilise ruumi jaoks ühtne käsitlus. Viimase töö kohta väljendus John von Neumann ühes kirjas E. Schmidtile järgmiselt: «Mul on igal sammul tunne, et ma alles nüüd hakkan aru saama, millised on isoperimeetrilise probleemi sisemised seosed. Ka seal, kus kõverusega ruumide juurdetoomine arutlused pikemateks muudab, leian ma ikka jälle, et arusaadavus, mis niiviisi saavutatakse, on oluliselt sügavam ja väärt lisanduvaid arendusi. Pealegi on isegi väikseimad, pealtnäha kõrvalised detailid sageli kõige enam vaimustavad... «Gambiit», milles Te näiliselt elementaargeomeetrilise lause Lebesgue'i mõõduteooria tiheduselause abil tõestate, on täiesti erakordselt rabav ja elegantne.» Sellist elegantsi võib E. Schmidti mahult küll mitte eriti ulatuslikust, kuid väga mõjukast loomingust sageli leida.

BORIS TAMM — TEHNIKADOKTOR



15. mail 1969 kaitses Boris Tamm ENSV TA Füüsika-Matemaatika- ja Tehnikateaduste Osakonna Nõukogu avalikul koosolekul edukalt oma väitekirja «Spetsialiseeritud programmeerimissüsteemide abil insenerlike protsesside modelleerimise teooria elemendid» tehnikadoktori kraadi taotlemiseks. Väitekirja oponeerisid NSVL TA korrespondentliige tehnikadoktor professor S. S. Lavrov (Moskvast), tehnikadoktor professor B. N. Naumov (Moskvast) ja tehnikadoktor G. A. Spõnu (Kiievist). Dissertatsioonis näidatakse, kuidas kõrge deklaratiivsusastmega spetsialiseeritud programmeerimiskeeled muutuvad insenerlike protsesside keelelise modelleerimise aparaadiks, avades uusi võimalusi nende juhtimiseks elektronarvutitel. Formuleeritakse viis teoreetilist printsiipi insenerlike programmeerimissüsteemide loomiseks, analüüsitakse olemasolevaid süsteeme nende valguses ning tehakse mitmeid üldistusi. Formuleeritakse suure integreeritud insenerliku programmeerimissüsteemi põhikontseptsioonid ja üldine arhitektuur ning näidatakse tähtsamad teed selle probleemi lahendamiseks.

Boris Tamm sündis Tallinnas 23. juulil 1930. a., lõpetas 1949. a. Tallinna VII Keskkooli kuldmedaliga ja 1954. a. kiitusega Tallinna Polütehnilise Instituudi elektrijaamade, -võrkude ja süsteemide insenerina. 1954—1957 töötas ta laboratooriumi juhatajana TPI-s, tehes samal ajal teaduslikku tööd õpitud erialal. Alates aspirantuurist 1957—1960 NSVL TA Automaatika ja Telemehhaanika Instituudis on B. Tamme teaduslikuks suunaks aga probleemorientatsiooniga automaatprogrammeerimissüsteemid. Aspirantuuri lõpetamise järel asus B. Tamm tööle ENSV TA Küberneetika Instituudi automaatika ja telemehhaanika sektori peainsenerina. 1962. a. kaitses ta edukalt oma väitekirja «Automaatprogrammeerimismeetodid alginformatsiooni töötlemiseks programmjuhtimisega süsteemidele» tehnikakandidaadi kraadi taotlemiseks. 1962—1969 töötas ta Küberneetika Instituudi direktori asetäitjana, 1969. aastast aga on selle instituudi direktor.

B. Tamm on kujunenud juhtivaks eriteadlaseks Nõukogude Liidus probleemorientatsiooniga automaatprogrammeerimissüsteemide alal. Tema juhendamisel Küberneetika Instituudis töötav uurimisrühm on saavutanud tunnustust väärivaid teoreetilisi ja praktilisi tulemusi automaatprogrammeerimissüsteemide loomise alal. 1965. a. omistati B. Tammele koos Juhan Pruudeniga Nõukogude Eesti preemia laureaadi nimetus esimese Nõukogude Liidus juurutatud automaatprogrammeerimissüsteemi eest programmjuhtimisega freespinkidele. B. Tamm on esinenud ettekannetega oma töötulemustest paljudel üleliidulistel ja rahvusvahelistel konverentsidel ja kongressidel (Namur 1964 ja 1967, Edinburgh 1968), seejuures oli ta V küberneetika kongressil Namuris Nõukogude delegatsiooni juhiks. Ta on olnud mitmete üleliiduliste ja rahvusvaheliste nõupidamiste organiseerimiskomitees. B. Tamm on Nõukogude Liidu esindajaks rahvusvaheliste teaduslike föderatsioonide IFIP ja IFAC probleemkomisjonis «PROLAMAT». B. Tamm viibis 1966. a. $1^1/_2$ kuud Norras teaduslikul komandeeringul ning pidas 1968. a. Soome ülikoolides loenguid. Ta kuulub mitmete ajakirjade toimetuskolleegiumi.

B. Tamm on avaldanud üle 30 teadusliku töö.

M. Tamm

GENNADI VAINIKKO — FÜÜSIKA-MATEMAATIKA-DOKTOR

1. aprillil 1969 kaitses Voroneži ülikoolis oma doktoriväitekirja «Lineaarsete ja mittelineaarsete operaatorite aproksimeerimisest ja operaatorvõrrandite ligikaudsest lahendamisest» Tartu ülikooli 30-aastane dotsent Gennadi Vainikko. Oponendid, professorid S. G. Krein, S. G. Mihlin ja P. J. Sobolevski leidsid üksmeelselt, et nimetatud töö on silmapaistev saavutus ligikaudsete meetodite teoorias.

Gennadi Vainikko sündis Karjalas Kontupohja linnakeses 31. mail 1938. Tänu isale Mihhail Vainikkole, kes on aastaid töötanud matemaatika ja füüsika õpetajana, tekkis tal juba lapsepõlves huvi matemaatika vastu. Sõjakeeris kandis Vainikkode perekonna Eestisse. G. Vainikko õppis Mäetaguse, Vändra, Tõrva, Kose ja Kehra koolides ning lõpetas 1956. a. Kehra keskkooli kuldmedaliga.

Sama aasta sügisel astus G. Vainikko Tartu ülikooli matemaatikateaduskonda. Küsimusele, millal tekkis soov saada matemaatikuks, vastas ta [1]: «Pärast keskkooli lõpetamist seisin dilemma ees: kas astuda polütehnilisse instituuti või ülikooli. Esitasin dokumendid TPI-sse, kuid arstlik komisjon tunnistas nägemise puudulikuks. Jäi üle TRÜ. Oleksin vist astunud füüsikaosakonda, aga isa mõjutusel sai minust siiski matemaatikaosakonna üliõpilane. Lootsin, et minust saab matemaatika ja füüsika õpetaja nagu isagi.»

---

[1] Ajalehes «Edasi», 2. aprillil 1969 ilmunud J. Reimandi intervjuu avaldamata osas.

Ülikoolis nähti peagi, et noor tudeng ilma õppimisele kuigi palju aega kulutamata sooritas kõik eksamid maksimaalsele hindele ning tegi igale küsijale möödaminnes selgeks probleemi. G. Vainikko ise meenutab[1]: «Mulle tundus, et keerulisi tõestusi ei ole võimalik meelde jätta ja ma püüdsin leida lihtsamaid. Sageli olid need valed. Suur oli ehmatus, kui koduteel pärast matemaalise analüüsi eksamit äkki taipasin, et eksamil esitatud tõestus oli juurteni ekslik. Õppejõud polnud märganud mu patustamisi. Oleks ta märganud, poleks ma suutnud õiget tõestust asemele pakkuda — polnud ju seda lugenudki.»

Energilise ja hakkaja üliõpilasena lõi G. Vainikko kaasa kursuse kõigil seaduslikel ja illegaalsetel ettevõtmistel. Kui sõideti uudismaale, oli ta platsis ning temast sai auväärt ehitaja. Kursusekaaslastel on pilte nn. «šefluspäevadest», kus ta tõstab tüsedaid kive kolhoosi linade leotamiseks või veab viljakotte. Ka sõjaväelaagris ja õppustel polnud talle palju kanda kuulipildujat või mõnda muud «raskemat toru», sest rivistatakse ju ikka pikkuse järgi ning vastavalt sellele jaotatakse ka koormused.

G. Vainikko oskas aega nii jaotada, et õppimine ei seganud meelelahutust ja ka vastupidi. Alati oli ta kursis ilu- ja ajakirjandusega. TRÜ segakoori tegevusest võttis ta innukalt osa juba selle loomisest alates.

Viimasel kursusel süvenes G. Vainikko suure püsivusega diplomitöö temaatikasse ega rahuldunud enne, kui oli iseseisvalt jõudnud lihtsa ja ilusa ideeni veahinnangute tuletamiseks Galjorkini meetodi abil arvutatud lähislahendite jaoks. Selle metoodika abil leitud veahinnangud osutusid mitmes suhtes paremateks varem kirjanduses avaldatud hinnangutest. G. Vainikko töö tunnistati üliõpilastööde vabariiklikul konkursil esimese auhinna vääriliseks ning selle tulemused on avaldatud TRÜ Toimetistes (1962).

1961. a. lõpetas G. Vainikko kiitusega TRÜ matemaatikaosakonna ning jätkas õpinguid samas aspirantuuris. Suure järjekindluse ja visadusega asus ta uurima töid, mis olid pühendatud Galjorkini meetodile ja sellele lähedastele meetoditele. Töötanud üksi läbi ulatusliku kirjanduse ja tutvunud kõigi selle ala olulisemate saavutustega, jõudis ta suurepäraste uute tulemusteni.

Galjorkini meetod on üks põhimeetodeid harilike ja osatuletistega diferentsiaalvõrrandite rajaülesannete lahendamisel. Meetod pärineb mehhaanikutelt: insener B. G. Galjorkin kasutas seda juba 1915. a., G. I. Petrov esitas 1940. a. aga selle meetodi üldistuse. Galjorkin-Petrovi meetodi erijuhtudena on vaadeldavad ka vähimruutude meetod ja mitmed teised meetodid, mis moodustavad nn. Galjorkini tüüpi meetodite ehk projektsioonimeetodite klassi.

Galjorkini meetodi teoreetiline uurimine osutus aga raskeks probleemiks. Meetodi põhjendamine saab alguse käesoleva sajandi 20-ndatel ja 30-ndatel aastatel akadeemik N. M. Krõlovi arvukates töödes, milles on tuletatud aprioorsed veahinnangud Galjorkini meetodi ja selle erijuhu Ritzi meetodi jaoks eeskätt harilike diferentsiaalvõrrandite lahendamisel. 60-ndatel aastatel on N. M. Krõlovi mõningaid hinnanguid täpsustanud saksa matemaatikud N. J. Lehmann ja W. Börsch-Supan, osatuletistega diferentsiaalvõrrandite juhule üldistanud aga gruusia matemaatik A. V. Džiškariani. Fundamentaalseid tulemusi Galjorkini meetodi ja üldse projektsioonimeetodite koonduvuse kohta on saanud Nõukogude matemaatikud M. V. Keldõš (1942), S. G. Mihlin (1948, 1950), M. A. Krasnoselski (1950, 1954) ja N. I. Polski (1949, 1955, 1962).

Aspirantuuris suutis G. Vainikko lühikese ajaga lisada mainitud uurimustele olulisi uusi tulemusi ning kujunes üheks kõige arvestatavamaks spetsialistiks projektsioonimeetodite alal. Ettenähtud 3 aasta asemel valmis kandidaadiväitekiri 2 aastaga. Seejuures töötas G. Vainikko Kvissentali ühiselamu toas, kus tal sageli tuli abistada üliõpilasest abikaasat kodustel töödel ning olla lapsehoidjaks pisipojale. Küsimusele, kas sisukas väitekiri valmis ohvrite ja loobumiste hinnaga, vastas G. Vainikko [2]: «Ei, mingeid erilisi ohvreid ega loobumisi ei olnud. Töötasin püsiva kirega seitse päeva nädalas, ka ametliku puhkuse ajal. Kohakaasluse alusel tuli muidugi ka koduseid töid teha. Loobumistena tundusid hoopiski päevad, kus ei saanud pliiatsit käes hoida ja mõtisklusi kontrollida.»

G. Vainikko kaitses oma kandidaadiväitekirja «Galjorkini tüüpi meetodite täpsusest» Tartu ülikoolis 5. juunil 1964. Oponendid professorid G. Kangro ja S. G. Mihlin andsid tööle kõrge hinnangu. Töö tulemuste tähtsust rõhutasid saabunud arvamustes M. A. Krasnoselski, N. I. Polski jt. selle ala tuntud spetsialistid.

Jätkates N. M. Krõlovi ja A. V. Džiškariani uurimusi tuletab G. Vainikko väitekirjas Galjorkini meetodi abil arvutatud lähislahendite jaoks rea otseseid ja asümptootilisi veahinnanguid, mis võrreldes varem tuntud hinnangutega on täpsemad ning mille rakendusväli on avaram.

Erilist tähelepanu on köitnud G. Vainikko saavutused projektsioonimeetodite koonduvuse uurimisel omaväärtusülesande lahendamisel. Varem oli tuntud vaid M. A. Krasnoselski tulemused projektsioonimeetodite koondumiskiirusest ühekordse omaväärtuse leidmisel. Ületades küllaltki tõsiseid põhimõttelisi ja tehnilisi raskusi, täpsustab G. Vainikko M. A. Krasnoselski tulemusi, üldistab need kordsete omaväärtuste juhule ning tuletab esimesed praktikas kasutatavad konkreetsed ja asümptootilised veahinnangud omaväärtuste ja omavektorite lähendite jaoks, mis on arvutatud Galjorkini meetodiga. Voroneži ülikooli funktsionaalanalüüsi kateedrilt, mille juhatajaks oli prof. M. A. Krasnoselski, saabunud arvamusest loeme: «Märgime eriti tulemusi, mis on seotud

---

[2] «Edasi», 2. aprillil 1969.

Voroneži matemaatikute töödega. M. A. Krasnoselski on saanud hinnanguid Galjorkini meetodi koondumiskiiruse kohta ühekordsete omaväärtuste leidmisel, Dissertant täpsustab varem tuntud hinnanguid ühekordsete omaväärtuste juhul ja leiab vastavad hinnangud kordsete omaväärtuste juhu jaoks(!). Meile tundub see tulemus vägagi tugevana.»

G. Vainikko kandidaadiväitekirjas leidub ka huvipakkuvaid üldisi tulemusi projektsioonimeetodite koondumise iseloomu kohta. Oponent S. G. Mihlin märgib: «G. M. Vainikko väitekirjas sisalduvad uued tulemused avardavad tunduvalt meie teadmisi variatsioonimeetodite ja üldse projektsioonimeetodite koondumiskiiruse kohta.»

1963. a. asus G. Vainikko Tartu ülikooli matemaatilise analüüsi kateedris tööle assistendina ja hiljem vanemõpetajana. Ta loeb matemaatilise analüüsi, diferentsiaalvõrrandite, matemaatilise füüsika võrrandite ja integraalvõrrandite kursusi, näidates end suurepärase lektorina. Kõrvuti eduka pedagoogilise tööga jätkub aga ka tema väga intensiivne teaduslik uurimistöö.

G. Vainikko lahendab S. G. Mihlini seatud probleemi, näidates, et G. N. Jaskova ja M. N. Jakovlevi poolt 1962. a. leitud piisavad tingimused Galjorkin-Petrovi meetodi stabiilsuseks osutuvad ka tarvilikeks. Ta leiab üldkuju nn. korrapärastele operaatoritele, mille korral Galjorkini meetod annab täieliku koordinaatjada puhul koonduva protsessi.

Olulisi uusi tulemusi saab G. Vainikko ka kollokatsioonimeetodi koonduvuse uurimisel. Varem oli vaid E. B. Karpilovskaja suutnud L. V. Kantorovitši poolt väljatöötatud ligikaudsete meetodite üldise teooria abil saada mõningaid tulemusi kollokatsioonimeetodi koonduvuse kohta lineaarsete rajaülesannete lahendamisel. Üldistades väitekirjas Galjorkini meetodi puhul kasutatud metoodikat leiab G. Vainikko lihtsa tee kollokatsioonimeetodi vahetuks uurimiseks. See võimaldab tal anda tingimused kollokatsioonimeetodi koondumiseks nii lineaarsete kui ka mittelineaarsete rajaülesannete lahendamisel ning hinnangud koondumiskiiruse jaoks, samuti tarvilikud ja piisavad tingimused kollokatsioonimeetodi stabiilsuseks lineaarse rajaülesande juhul.

Kollokatsioonimeetodi koonduvuse kohta saadud tulemusi tutvustab G. Vainikko 1965. a. jaanuaris Moskvas üleliidulisel arvutusmatemaatika konverentsil. Siin kohtub ta isiklikult M. A. Krasnoselskiga, kes kutsub teda tööle Voroneži ülikooli. Viimase kutse võtab G. Vainikko ka vastu ning siirdub suvel koos perekonnaga Voroneži. 1965. a. sügisel saab G. Vainikko Voroneži ülikooli matemaatilise analüüsi kateedri dotsendi kohustetäitjaks. Siin omistatakse talle ka dotsendi teaduslik kutse (kinnitatud 1967. a.). Tema abikaasa Iivi Vainikko töötas Voronežis aspirandina oma väitekirja kallal, mille kaitses Tartus 1969. a.

Voronež on tunnustatud matemaatikakeskus, kus toimub eriti ulatuslik uurimistöö funktsionaalanalüüsi ja selle rakenduste alal. G. Vainikko lülitus kogu energiaga tööle selles tugevas matemaatikute kollektiivis. Ta töötas Voronežis vaid 2 aastat. Need aastad kujutavad aga erakordselt intensiivset ja viljakat töö- ning õpingute perioodi, mille vältel G. Vainikko kujunes avara silmaringiga teadlaseks-matemaatikuks.

Voroneži ülikoolis luges G. Vainikko matemaatilise loogika ja hulgateooria, matemaatilise analüüsi, variatsioonarvutuse ja funktsionaalanalüüsi kursusi ning erikursust projektsioonimeetoditest, milles tutvustas ka oma uurimistulemusi. Viimase erikursusega kaasnes seminar ning sellele tuginevad neli tema juhendatud diplomitööd, millest kahe (A. M. Dementjeva ja J. B. Umanski) tulemused on avaldatud trükis. Üliõpilaste kasvatamisest võttis ta osa ka esimese kursuse juhendajana.

Voronežis sai G. Vainikko Gruusiast pärit aspirandi D. G. Peradze juhendajaks. D. G. Peradze töötas hiljem mõne aja ka Tartus ning kaitses kandidaadiväitekirja «Iteratsioonimeetodite tõenäosuslike veahinnangute asümptootikast lineaarsete võrrandite lahendamisel» Tbilisis 1969. a. Voronežis esines G. Vainikko neljal korral kandidaadiväitekirjade oponendina.

Kõige suuremat mõju G. Vainikko kui teadlase arengus etendas aktiivne osavõtt arvukatest teaduslikest seminaridest. Ta töötas M. A. Krasnoselski mittelineaarse analüüsi ning algebralise topoloogia seminarides, S. G. Kreini operaatorite teooria ning osatuletistega diferentsiaalvõrrandite seminarides, A. I. Perovi peaaegu perioodiliste funktsioonide seminaris jt. seminarides. G. Vainikko meenutab[2]: «Unustamatuks jäävad professor M. A. Krasnoselski seminarid ja eraviisilised vestlused töö käigus. See on mõõtmatu intuitsiooniga matemaatik, erakordse oskusega teha kuulajaile selgeks keerulisi asju. Oma läbinägelikkusega mõjub ta lausa vapustavalt. Huvitavad olid ka professor S. G. Kreini seminarid. Üldse viibisin mitmesugustel seminaridel sageli ligi 20 tundi nädalas. Usun, et suutsin imeda endasse küllaltki palju matemaatilist folkloori — teadmisi, mis pole talletatud raamatutes.»

Voronežis jõudis G. Vainikko ka oma doktoritöö põhiliste tulemusteni, mis on ette kantud ja läbi arutatud M. A. Krasnoselski mittelineaarse analüüsi seminaris ning avaldatud reas artiklites.

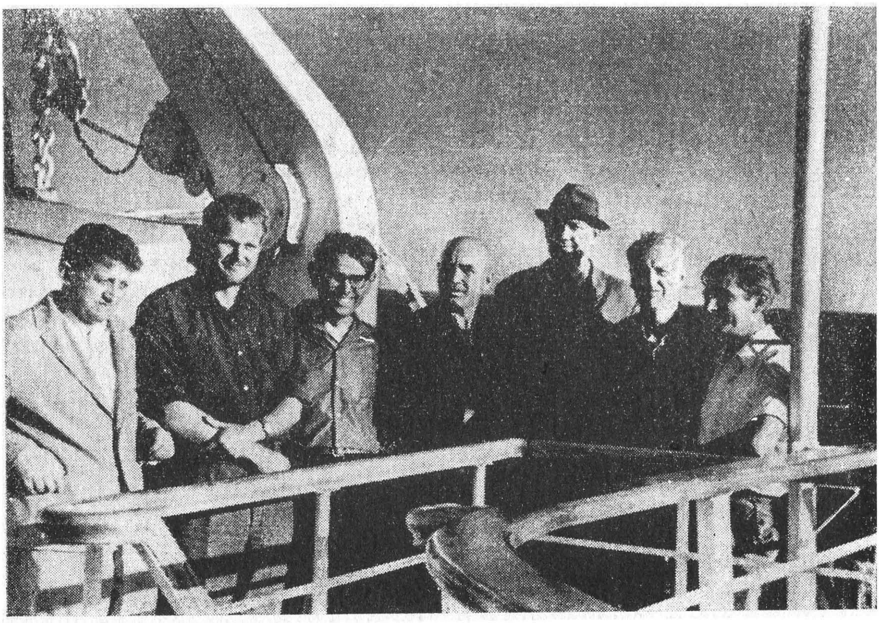
G. Vainikko töötas välja üldise skeemi arvutusmeetodite koonduvuse ja koondumiskiiruse uurimiseks, mida ta ise nimetas häiritusega Galjorkini meetodiks. Varasema ligikaudsete meetodite üldise teooria oli andnud L. V. Kantorovitš 1948. a. See teooria leidis küll arvukat rakendamist mitmesuguste arvutusmeetodite koonduvuse uurimisel, kuid teooriat ennast järgneva 18 aasta jooksul oluliselt edasi ei arendatud. Kantorovitši teooria rakendusväli piirdus ainult lineaarsete võrranditega. Seda ei suudetud üldistada mittelineaarsete võrrandite juhul. Omaväärtusülesandes õnnestus selle abil selgitada ainult meetodite koonduvust, ei suudetud aga anda hinnanguid koondumiskiiruse kohta.

Sõltumatult ligikaudsete meetodite üldisest teooriast areneb märksa kaugemale projektsioonimeetodite teooria juba eespool mainitud S. G. Mihlini, M. A. Krasnoselski, N. I. Polski ning G. Vainikko töödes. Muuhulgas uuris M. A. Krasnoselski projektsioonimeetodite koonduvust mittelineaarsete võrrandite lahendamisel ja G. Vainikko omaväärtusprobleemis. Loonud häiritusega Galjorkini meetodi skeemi, jõudis G. Vainikko sellel teel sedavõrd ulatusliku ligikaudsete meetodite klassini, et tema tulemustest lihtsa erijuhuna lineaarsete võrrandite korral järelduvad L. V. Kantorovitši ligikaudsete meetodite üldise teooria põhitulemused. Seejuures on need tulemused G. Vainikko näidatud metoodikaga võrratult lihtsamalt põhjendatavad kui varem L. V. Kantorovitši poolt kasutatud teel. Kõige tähtsam on aga asjaolu, et G. Vainikko üldistas Kantorovitši teooria ka mittelineaarsete võrrandite ja omaväärtusülesannete juhule ning seega lõi üldise teooria mittelineaarsete võrrandite ja omaväärtusülesannete lahendusmeetodite uurimiseks. Uue teooria ühe olulise rakendusena tuletas G. Vainikko üldised koonduvustingimused ja koondumiskiiruse hinnangud integraalvõrrandite põhilise lahendusmeetodi jaoks, mille korral integraal asendatakse summaga mingi kvadratuurvalemi abil. Uue teooria põhitulemustest kõneles G. Vainikko ettekandes rahvusvahelisel matemaatikute kongressil 1966. a. Moskvas. Need on esitatud ka raamatus «Приближенное решение операторных уравнений», mille ta kirjutas Voronežis koos M. A. Krasnoselski, P. P. Zabreiko, J. B. Rutitski ja V. J. Stetsenkoga ning mis ilmus kirjastuse «Наука» väljaandel 1969. a. Selles raamatus on G. Vainikkolt projektsioonimeetodeid käsitlev ulatuslik peatükk.

G. Vainikko näitab tema poolt väljatöötatud ligikaudsete meetodite teooria rakendusvõimalusi ka põhilise diferentsiaalvõrrandite lahendusmeetodi — diferentsmeetodi koonduvuse uurimisel. Selleks asendab ta kõigepealt diferentsiaalvõrrandi rajaülesande samaväärse integraalvõrrandiga ning näitab, et vaadeldav diferentsmeetod on samaväärne teatava kvadratuurvalemi kasutamisega integraalvõrrandi lahendamiseks.

Pidades silmas võimaluste avamist ligikaudsete meetodite üldise teooria vahetuks rakendamiseks diferentsmeetodite uurimisel, astub G. Vainikko veel ühe olulise sammu selle teooria üldistamise teel, võttes kasutusele operaatorite läheduse iseloomustamiseks tema poolt kompaktseks aproksimatsiooniks nimetatud printsiibi. See on hinnangutevaba puhttopoloogiline operaatorite läheduse näitaja, mida paljudes rakendustes on väga mugav kasutada. Tuginedes kompaktse aproksimatsiooni mõistele arendab G. Vainikko välja nii lineaarsete kui ka mittelineaarsete võrrandite ning omaväärtusülesannete ligikaudse lahendamise meetodite üldise teooria, mis erijuhuna sisaldab tema poolt varem loodud häiritusega Galjorkini meetodi skeemi. Teooria arendamisel jõuab ta küllaltki sügavatele tulemustele funktsionaalanalüüsis. Uus teooria võimaldab G. Vainikkol muuhulgas ühtsest seisukohast tuletada väga üldised teoreemid diferentsmeetodi koonduvuse ja koondumiskiiruse kohta harilike diferentsiaalvõrrandite lineaarsete ja mittelineaarsete rajaülesannete ning vastavate omaväärtusülesannete lahendamisel.

Viimati mainitud uurimused teostab G. Vainikko juba Tartu ülikoolis, kus ta 1967/68. õppeaastal on matemaatilise analüüsi kateedri dotsendi kohal ning järgmisel õppeaastal doktorantuuris. Ka siin ennetab G. Vainikko tähtaegu. 1968. a. sügisel vormistas ta umbes kuu ajaga rohkem kui 300-leheküljelise sisutiheda doktoritöö, mille kaitses Voronežis 1. aprillil 1969. Töös on ühtses käsitluses kokku võetud viimaste aastate uurimiste tulemused. Siin on esitatud kompaktse aproksimatsiooni printsiibile tuginev üldine teooria lineaarsete ja mittelineaarsete võrrandite ning omaväärtusülesannete lähendusmeetodite jaoks. Selle teooria abil on saadud olulisi uusi tulemusi peaaegu kõigi tähtsamate diferentsiaal- ja integraalvõrrandite ligikaudse lahendamise meeto-



Grupp osavõtjaid ja lektoreid Odessa Arvutusmatemaatikakoolis 1969. a. septembris (vasakult): J. Volkov, G. Vainikko, E. Tamme, D. Davidenko, A. Gorbunov, V. Ivanov, S. Kiro.

dite: projektsioonimeetodite, kollokatsioonimeetodi, kvadratuurvalemite meetodi ja diferentsmeetodite jaoks.

Doktoritöö kaitsmisel ütles töö teaduslik konsultant prof. M. A. Krasnoselski: «Ma ühinen täielikult oponentide arvamusega, et see väitekiri on väljapaistvaks sündmuseks ligikaudsete meetodite teoorias. Pole kahtlust, et see on suurepärane doktoritöö... Arvamuse lõpus tahaksin öelda mõne sõna dissertandist endast. Mul oli hea meel töötada koos temaga rohkem kui kahe aasta vältel. Gennadi Mihhailovitš on avara teaduslike huvide ringiga, suure eruditsiooniga ja hämmastava teadusliku entusiasmiga õpetlane, kes oskab lahendada raskeid probleeme, seada uusi ülesandeid. Gennadi Mihhailovitš on väga hea lektor, suurepärane noorte matemaatikute kasvataja, tema juhendamisel teostas huvitavaid uurimusi rida noori matemaatikuid. Sisuliselt on Gennadi Mihhailovitš juba ammu (vaatamata oma noorusele) teaduste doktor, täna toimub vaid selle fakti ametlik vormistamine.»

Peale doktoritöö kaitsmist, alates sama aasta sügisest, töötab G. Vainikko dotsendina arvutusmatemaatika kateedris. Ta on suurepärane õppejõud, juhendab diplomande ja aspirante, pannes erilist rõhku oma õpilaste üldise matemaatilise kultuuri arengule. G. Vainikko juhendatavates teaduslikes seminarides hakkab välja kujunema tema teaduslik koolkond. Ta kirjutab pidevalt referaate ajakirjale «Реферативный журнал. Математика», retsensioone mitmetele keskajakirjadele jne.

Kuid kõige selle kõrval leiab G. Vainikko aega ka pidevaks osavõtuks Tartu kõrgemate koolide lõpetanute meeskoori ja U. Sahva võimlemisrühma tegevusest. Suvel võime teda koos perekonnaga kohata matkateedel, talvel suusaradadel.

Eespool suutsime vaid viidata mõnedele tulemustele G. Vainikko juba küllaltki ulatuslikus ja sügavas matemaatilises loomingus, mida pole võimalik käesoleva kirjutise raamides lähemalt tutvustada. Tema matemaatilistest töödest võib ettekujutuse saada alles siis, kui võtta kätte tema selgelt kirjutatud sisutihedad teaduslikud artiklid, millest igaüks pakub midagi oluliselt uut. Võime aga olla veendunud, et kõik see, millest me saame kirjutada täna, kujutab vaid esimesi samme Gennadi Vainikko teadlase- ja pedagoogiteel.

E. Tamme

Matemaatiline päevakaja

ON ILMUNUD MATEMAATILISE ANALÜÜSI ÕPIKU II OSA

M. Tõnnov

Kirjastuse «Valgus» väljaandena ilmus 1968. aastal professor G. Kangro raamatu «Matemaatiline analüüs» II osa (Esimene osa ilmus juba 1965. a., vt. ka «Matemaatika ja kaasaeg», IX, lk. 97—98). Õpiku teine osa erineb tunduvalt teistest NSV Liidu ülikoolide ja instituutide üliõpilastele määratud matemaatilise analüüsi õpikutest. Erinevus on peamiselt selles, et siin käsitletakse klassikalise analüüsi kõrval ka kaasaegse analüüsi (s. o. funktsionaalanalüüsi) elemente. Raamat on kirjutatud loengute põhjal, mida autor pidas TRÜ matemaatika- ja füüsikaosakondade II kursuse üliõpilastele. Seetõttu vastab õpik kõige paremini TRÜ programmile. Matemaatilise analüüsi kursus on TRÜ-s jaotatud neljale semestrile; nendest kolmel esimesel käsitletakse klassikalist analüüsi, neljandal aga funktsionaalanalüüsi. Seda on arvestatud ka õpiku koostamisel.

Õpik koosneb neljast osast: 1) ridade teooria (I ja II ptk.), 2) mitmemuutuja funktsioonide diferentsiaalarvutus (III ja IV ptk.), 3) mitmemuutuja funktsioonide integraalarvutus (V ja VI ptk.), 4) funktsionaalanalüüsi elemendid (VII ja VIII ptk.).

Kaks viimast peatükki on nii üles ehitatud, et nad ühelt poolt üldistavad ja ka täiendavad õpiku I osa ja teise osa I—VI peatükke ning teiselt poolt annavad ülevaate funktsionaalanalüüsi kõige olulisematest küsimustest. Nii on siin ühelt poolt vaadeldud operaatorite diferentsiaalarvutust, teiselt poolt aga funktsionaalanalüüsi alust — lineaarsete operaatorite üldist teooriat. Selle tõttu on õpikus süstemaatilist käsitlemist leidnud lineaarsete operaatorite teooria 3 printsiipi: ühtlase tõkestatuse, lahtise kujutuse ja funktsionaali jätkamise printsiibid. Need lineaarsete operaatorite kolm printsiipi on alusmüüriks paljudele lineaarse analüüsi distsipliinidele nagu näiteks summeeruvuse teooriale, momentide probleemile, mõõduteooriale, integreerimise teooriale jne. Funktsionaalanalüüsis on teoreetiline materjal illustreeritud rohkete näidetega, mis omakorda kujutavad huvipakkuvaid teoreeme lineaarse analüüsi mitmesugustest valdkondadest. VII ja VIII peatükki eraldi võetuna võib vaadelda kui omaette tervikut — funktsionaalanalüüsi kursust. Õpiku esimesed peatükid (I—VI) sisaldavad analüüsi standardset materjali.

Et edukamalt rakendada diferentsiaal- ja integraalarvutuse meetodeid funktsioonide uurimiseks, on vaja vahendit funktsioonide (ja arvude) analüütiliseks esitamiseks. Niisuguseks vahendiks on lõpmatud read, mis on saanud kaasaegse matemaatika üheks tähtsamaks vahendiks. Ridade teooria on kaasajal kujunenud iseseisvaks matemaatilise analüüsi distsipliiniks. Eriti huvipakkuv on õpikus sellele teemale pühendatud osa (I ja II ptk.). Siin on kõrvuti klassikalise koonduvate ridade teooriaga antud ka kaasaegse hajuvate ridade teooria lähtekohad. Metoodiliselt huvitavalt on üles ehitatud funktsionaalridade osa (II ptk). Oluline koht selles peatükis on ortogonaalridadel.

Ka mitmemuutuja funktsioonide diferentsiaal- ja integraalarvutuse osas (III—VI ptk.) on mitmed metoodilised uuendused ekstreemumi uurimisel, joonintegraali käsitlemisel jt.). Teoreetiline materjal on alati illustreeritud rohkete huvitavate näidetega.

Prof. G. Kangro õpikus on materjali esitus range ja täielik, ei esine lünki tõestustes ega sõnastuses. Raamat paistab silma sõnastuse kerguse ja lihtsuse poolest. Alati juhitakse tähelepanu kõige olulisemale. Teoreemi tõestused ei takerdu kunagi arvutustesse, vaid rõhutatakse arutlevat osa, s. o. rõhutatakse tõestuse ideed. See ongi üks olulisi põhjusi, miks prof. G. Kangro õpik on kergesti loetav. Viited probleemide ajaloole ja klassikalise ning tänapäeva matemaatika ühenduskohtade rõhutamine muudavad prof. G. Kangro raamatu mitte ainult heaks õpikuks, vaid ka heaks raamatuks, mis väärib iga matemaatiku tähelepanu.

NSV LIIDU RIIKLIKKE PREEMIAID MATEMAATIKUTELE

Alates 1967. aastast autasustab NSV Liidu valitsus silmapaistvaid teaduse ja tehnika alaseid töid NSV Liidu riiklike preemiatega, mis kuulutatakse välja igal Oktoobrirevolutsiooni aastapäeval. Selle kõrge autasu vääriliseks on tunnistatud järgmised matemaatikud:

1967. aastal sai riikliku preemia NSVL Teaduste Akadeemia V. A. Steklovi nim. Matemaatika Instituudi vanem teaduslik töötaja Anatoli Georgijevitš Vituškin (sünd. 1931) tööde eest hulkade variatsioonide uurimisel ja nende kasutamisel algoritmide keerulisuse hindamiseks;

1968. aastal sama instituudi teaduslik töötaja Aleksei Ivanovitš Kostrikin (sünd. 1929) uurimuste eest lõplike rühmade ja Lie algebrate teoorias;

1969. aastal Leningradi naismatemaatikud: sama instituudi Leningradi osakonna laboratooriumijuhataja Olga Aleksandrovna Ladõženskaja (sünd. 1922) ja Leningradi ülikooli professor Niina Nikolajevna Uraltseva tööde eest lineaarsete ja kvaasilineaarsete paraboolset tüüpi diferentsiaalvõrrandite rajaülesannete alal.

Kroonika

BORIS TIIKMA

In memoriam

10. juulil lahkus ootamatu surma läbi meie hulgast Tallinna Polütehnilise Instituudi teoreetilise mehaanika kateedri dotsendi kt. Boris Tiikma.

Lahkunu sündis Tallinnas 6. juunil 1908 raudteelukksepa pojana. Alg- ja keskhariduse omandas ta Tallinnas. Aastail 1926—1932 õppis Boris Tiikma Tartu ülikoolis matemaatikat ja 1936. aastal omandas gümnaasiumiõpetaja kutse. Seejärel töötas ta õpetajana gümnaasiumides.

Boris Tiikma võttis osa Suurest Isamaasõjast. 1945. a. sügisest alates töötas ta TPI-s ja alates 1953. aastast teoreetilise mehhaanika kateedris, olles ühe aasta selle kateedri juhataja kohusetäitjaks. 1964. aastast alates oli ta selle kateedri dotsendi ametikohal.

Boris Tiikma töö TPI-s oli väga viljakas. Omades suuri kogemusi õpetamises ja sügavaid teoreetilisi teadmisi oma aines, osutus ta väga heaks metoodikuks. Temalt on trükis ilmunud rida õppevahendeid ja juhendeid, ta on tõlkinud raamatuid. Palju aitas ta kaasa õppeprotsessi parandamiseks kaugõppeteaduskonnas. Kõigis tema töödes nagu loenguteski ilmnes pedagoogilise kunsti meisterlik valdamine, mõtete selgus ja lihtsus, proportsioon teoorias ja näidete vahel.

Teaduslikul alal huvitas Boris Tiikmat algul tensorarvutus, mille kohta kirjutas teaduslikke artikleid, hiljem aga haaras teda teoreetilise mehhaanika kineetilise energia muutumise teoreemi rakendamine ülesannete lahendamisel. Sel alal kirjutas ta põhjaliku töö.

Lahkunu täitis aastaid ühingu «Teadus» TPI juhatuse büroo esimehe kohuseid ja võttis osa paljudest ühiskondlikest üritustest oma töökohal ja väljaspool. Oma tööalal nii üliõpilaste kui ka kolleegide suhtes ja ka kõikjal oli Boris Tiikma abivalmis, lahkelt vastutulelik ja sõbralik. Tööülesannete täitmisel oli ta väga kohusetruu, täpne ja korralik ning püüdis neid omadusi istutada ka teistesse. Raskustest aitas teda üle huumorimeel.

Mälestus kallist kolleegist jääb meiega.

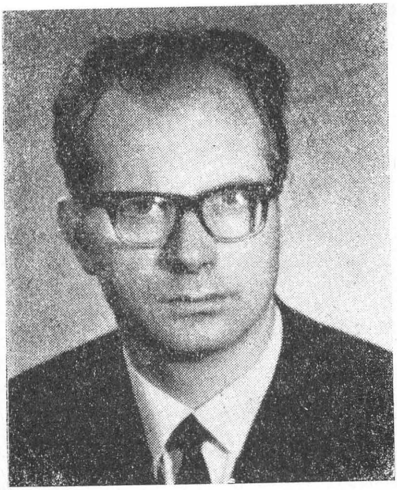
UUSI TEADUSE KANDIDAATE

14. veebruaril 1969. a. toimus esimene matemaatikateaduskonna teaduslike kraadide kaitsmise nõukogu koosolek, kus kaitsti kolm kandidaadiväitekirja.

Esimesena kaitses väitekirja TRÜ teoreetilise mehaanika kateedri vanemõpetaja **Iivi Vainikko** teemal «Plastsest-elastsest-viskoossest materjalist plaatide ja koorikute deformeerumisest». Nimetatud töös uuriti plaatide ja koorikute deformeerumist materjali reoloogilisi omadusi arvestades. Deformatsiooniprotsesside uurimiseks kasutati dünaamilisi mudeleid. I. Vainikkole anti füüsika-matemaatikakandidaadi teaduslik kraad.

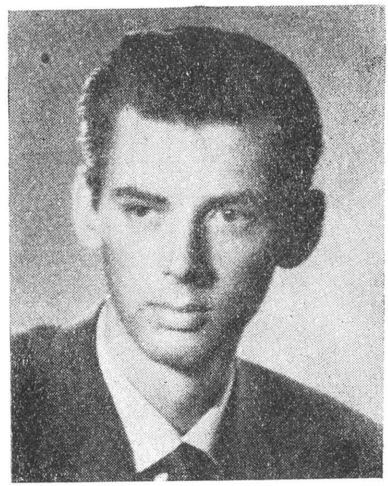
Iivi Vainikko (Riso) on sündinud 23. novembril 1939. a. Viljandi rajooni Nuia asulas. 1958. a. lõpetas ta Tartu II Keskkooli, jätkas õpinguid Tallinna Polütehnilises Instituudis ja Tartu Riiklikus Ülikoolis. 1964. a. lõpetas ta TRÜ Füüsika-Matemaatikateaduskonna matemaatikaosakonna mehhaanika erialal. Pärast lühiajalist töötamist TRÜ teoreetilise mehhaanika kateedri vanemlaborandina õppis I. Vainikko Voroneži Pedagoogilises Instituudis sihtaspirantuuris, kus valmis ka kaitsmisele esitatud väitekiri D. D. Ivlevi juhendamisel.

Teisena kaitses väitekirja «Meetod absoluutse ja tigimusteta summeeruvuse uurimiseks» aspirant **Heino Türnpu**. Tema väitekirjas on välja töötatud üldine meetod mitmesuguste teisenduste absoluutse ja tingimusteta summeeruvuse uurimiseks. Erilist tähelepanu pööratakse dissertatsioonis Fourier' ridade absoluutse ja tigimusteta summeeruvuse uurimisele. Töös esitatakse ka antud meetodi rakendusi mitmesugust tüüpi summeeruvustegurite uurimisel. Tööd juhendas prof. G. Kangro, oponeerisid prof. J. S. Bugrov Blagoveštšenski Pedagoogilisest Instituudist ja dots. A. Särev Tallinna Polütehnilisest Instituudist. Nõukogu tunnistas H. Türnpu väitekirja kandidaaditöö vääriliseks. H. Türnpu sündis 05. 06. 1936. a. Hiiumaal. Pärast



kohaliku kooli lõpetamist asus ta õppima Haapsalu Pedagoogilisse Kooli. 1954. a. suunati ta algkooliõpetajana tööle Paide rajooni, aastail 1955 kuni 1958 teenis Nõukogude armees. Pärast sõjaväeteenistust töötas H. Türnpu kaks aastat Hiiumaal matemaatikaõpetajana. 1959. a. astus ta TRÜ Matemaatika-Loodusteaduskonna matemaatikaosakonna kaugõppeosakonda, 1960. aastast alates õppis statsionaarses osakonnas. Pärast ülikooli lõpetamist 1964. aastal töötas ta TRÜ arvutuskeskuses noorema teadusliku töötajana ja matemaatilise analüüsi kateedris assistendina ja vanemõpetajana. Aspirantuuri astus 1967. a. detsembris.

Kolmandana kaitses TPI arvutusmatemaatika kateedri assistent **Jüri Lamp** väitekirja «Üldistatud jadade teisendused». Töös uuritakse ühtselt seisukohalt nii harilike ja kordsete jadade kui ka funktsioonide selliseid teisendusi, mis hõlmavad praegu suurt huvi pakkuvaid pidevaid ja maatriksteisendusi. Tänu käsitluse üldsusele on kõik siiani teadaolevad tulemused saadud ühtsest vaatepunktist. Üldises summeeruvusteoorias on eriti tähtis nende jadade hulga topoloogiline struktuur, mis antud teisendusega on teisendatavad koonduvateks jadadeks. Oma väitekirjas andis dissertant nende üldistatud jadade hulga topoloogilise struktuuri, mis on teisendatavad koonduvateks üldistatud jadadeks. Peale selle on uuritud veel vaadeldavate teisenduste sisalduvust ja kooskõla. Tööd juhendas prof. G. Kangro, oponeerisid prof. J. S. Bugrov ja dots. A. Särev. Oponendid andsid tööle hea hinnangu ja nõukogu tunnistas J. Lambi väitekirja kandidaaditöö vääriliseks.



J. Lamp sündis 22. märtsil 1940. a. Õppis Tartu I ja II keskkoolis. Ta tegeles innukalt spordiga ja täitis 1962. a. meistersportlase normatiivid tennises. 1958. a. astus J. Lamp TRÜ Matemaatika-Loodusteaduskonna matemaatikaosakonda. Pärast ülikooli lõpetamist 1963. a. suunati ta assistendina tööle Tallinna Polütehnilise Instituudi matemaatika kateedrisse. TRÜ aspirantuuri astus ta 1965. a. Pärast väitekirja valmimist 1968. aastal suunati ta jälle tööle Tallinna Polütehnilisse Instituuti.

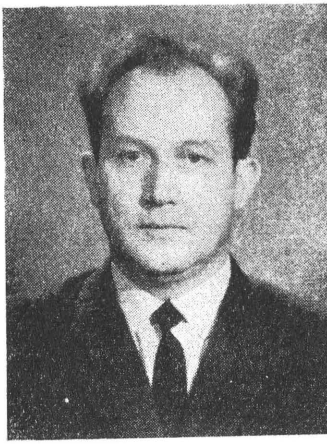
1969. a. juunis kaitses Leningradi Riiklikus Ülikoolis kandidaadiväitekirja TPI teoreetilise mehhaanika kateedri assistent **Kalju Kenk.**

Tänapäeva tehnikas töötavad mitmed konstruktsioonid plastilise deformatsiooni olukorras. Kui kaasaegne plastilisuse teooria kirjeldab rahuldavalt materjali käitumist ühekordsel koormamisel, siis hoopis halb on olukord mitmekordsete (tsükliliste) koormamiste korral. Komplitseeritumate koormamisjuhtude kirjeldamiseks on loodud hulgaliselt erinevaid teooriaid, kuid kõik nad osutuvad ebarahuldavateks. Just seda küsimust, mis paljudele uurijatele on osutunud ülejõukäivaks, hakkas uurima K. Kenk. Valminud dissertatsioon tunnistas töö õnnestumist ja K. Kenkile omistati füüsika-matemaatikakandidaadi teaduslik kraad.

K. Kenk sündis 1940. a. Misso vallas Võrumaal. 1963. a. lõpetas ta Tartu Riikliku Ülikooli Füüsika-Matemaatikateaduskonna, seejärel oli Leningradi Riikliku Ülikooli aspirantuuris. Pärast aspirantuuri lõpetamist suunati ta tööle Tallinna Polütehnilisse Instituuti.

19. detsembril 1969 kaitses **Jaan Reimand** TRÜ Matemaatikateaduskonna nõukogus oma väitekirja «Lineaarplaneerimise ja majandusküberneetika elemendid keskkoolis ning küberneetilise mõtteviisi arendamine». Teaduslikuks konsultandiks oli NSVL PTA vanem teaduslik töötaja V. M. Monahhov. Oponeerisid akadeemik A. Humal, dotsent E. Tamme ja dotsent H. Metsa. Dissertandile omistati pedagoogikakandidaadi kraad.

J. Reimand sündis 2. juunil 1930. a. Pärnumaal talupoja perekonnas.



Alghariduse sai Halinga valla Jaagupi algkoolis, keskhariduse mittestatsionaarselt Pärnu Töölisnoorte Koolis, küpsustunnistuse aga 1954. a. sõjaväeteenistuse ajal Valgevene NSV-s Borissovi 3. Töölisnoorte Koolis. Seejärel astus Tallinna Pedagoogilisse Instituuti, kust tuli üle Tartu Riiklikku Ülikooli, mille matemaatikaosakonna lõpetas 1959. a. Aastatel 1959—1962 õppis TRÜ aspirantuuris. Järgnes töötamine TRÜ-s, esialgu teoreetilise mehhaanika ja seejärel matemaatika õpetamise metoodika kateedris.

UUSI ÜLIKOOLI LÕPETANUD MATEMAATIKUID

1969. a. juunis lõpetas TRÜ järjekordne lend matemaatikuid.

Matemaatika erialal kaitsti järgmised diplomitööd:

1. Angelštok, Gerda. Tootmisühikute optimaalse suuruse ja asukoha määramise matemaatiline mudel. (Juhendaja T. Akkel.)
2. Ehasalu, Elvi. Diferentsskeeme kolmnurksetel võrkudel. (Juhendaja dots. E. Tamme.)
3. Ehasalu, Jaan. Kolmevalentse loogika valemite normaalkujud (Juhendaja dots. A. Tauts.)
4. Jokk, Viivi. Ühest valiku ülesandest. (Juhendaja R. Tammeste.)
5. Jokk, Heiki. Diferentsmeetodite koondumisest teist järku diferent-

siaalvõrrandite jaoks. (Juhendajad dots. G. Vainikko ja dots. E. Tamme.)

6. Kolde, Jaan. Populatsiooni regeneratsiooni mudel. (Juhendaja T. Möls.)
7. Kuura, Sirje. Ühest universaalsete algebrate klassist. (Juhendaja dots. J. Hion.)
8. Korjus, Eve. Muutuva pikkusega šifrite unifitseeritud kodeerimisest. (Juhendaja dots. L. Võhandu.)
9. Lanin, Mihhail. Mõnedest matemaatika kasutamise küsimustest sotsioloogias. (Juhendaja dots. E. Tiit.)
10. Linnamägi, Sirje. Menetluste klassi $C\alpha\beta$ summeeruvustegurid. (Juhendaja dots. S. Baron.)
11. Litvinenko, Svetlana. Kahekordsete integraalide summeeruvustegurid. (Juhendaja dots. S. Baron.)
12. Lõhmus, Tiiu. Kolmekihilisi diferentsskeeme paraboolset tüüpi diferentsiaalvõrrandite lahendamiseks. (Juhendaja dots. E. Tamme.)
13. Noomen, Silvi. Helberti algebratest. (Juhendaja R. Tammeste.)
14. Pensa, Galina. Об оценках коэффициентов корреляций и факторных весов в случае дискретных случайных величин. (Juhendaja dots. E. Tiit.)
15. Ploom, Anne. Mitmepunkti rajaülesanded. (Juhendaja dots. E. Tamme.)
16. Sonn, Helbe. RAT «Vanemuise» külastajaskonna analüüs. (Juhendaja dots. E. Tiit.)
17. Saganova, Tamara. О методах отсечения в целочисленном линейном программировании. (Juhendaja dots. L. Kivistik.)
18. Tepandi, Jaak. Lineaarsest regressioonist korreleeritud argumentide korral. (Juhendaja dots. E. Tiit.)
19. Torokoff, Jaan. Täisarvuline planeerimine. (Juhendaja dots. Ü. Kaasik.)
20. Tombak, Mati. Genereerimiseeskirjade võimsuse probleemist. (Juhendaja dots. I. Kull.)
21. Veltson, Hans. Mõningaid programmeerimise automatiseerimise küsimusi. (Juhendaja E. Tõugu.)

Mehhaanika erialal kaitsti järgmised diplomitööd:

22. Fleišman, Aleksander. О прочности замкнутых цилиндрических оболочек, находящихся под воздействием осесимметричных нагрузок. (Juhendaja J. Nemirovski.)
23. Hain, Samuil. Некоторые задачи из области ползучести цилиндрических оболочек. (Juhendaja prof. V. Rosenblum.)

Matemaatika erialal lõpetasid riigieksamitega:

24. Hallika, Toivo
25. Huik, Jaan
26. Karpenko, Ruslan
27. Karpenko, Tatjana
28. Rannak, Jüri
29. Salganik, Diana
30. Šahhovtsev, Vladim
31. Vassiltšenkova, Ljudmilla

Matemaatika pedagoogilises osakonnas kaitsti järgmised diplomitööd:

32. Leidmaa, Reet. Matemaatilise planeerimise käsitlemine keskkooli matemaatikaringis. (Juhendaja dots. Kivistik.)
33. Truija, Viivi. Ruutfunktsiooni ja ruutvõrrandi käsitlemine VIII klassis. (Juhendaja dots. O. Prinits.)
24. Saar, Ruth. X klassi õpilaste matemaatikaalastest teadmistest ja oskustest. (Juhedaja dots. O. Prinits.)
35. Raudava, Maire. Õpilaste mõtlemisvõime ja õppeedukuse seosest. (Juhendaja dots. O. Prinits.)
36. Vares, Aili. Teoreem ja tõestus. (Juhendaja dots. O. Prinits.)
37. Veski. Anu. Rühmitamismeetoditest. (Juhendaja dots. L. Võhandu.)

Riigieksamitega lõpetasid pedagoogilise osakonna:

38. Kikerpill, Elle
39. Koort, Tiina
40. Kuusemets, Aime
41. Põllumees, Helju
42. Saag, Ülle
43. Soodla, Helmi
44. Tammer, Helgi
45. Tõnts, Erika
46. Velder, Leili
47. Õlluk, Linda

JÄRJEKORDNE LEND KESKHARIDUSEGA MATEMAATIKUID

A. H. Tammsaare nim. Tartu I Keskkooli matemaatika eriklassi lõpetasid:

1. Aas, Tiina
2. Järv, Anne
3. Kalberg, Mati
4. Keis, Maire
5. Kiho, Mariann
6. Kork, Andres
7. Kose, Ester
8. Kukke, Sulev
9. Kurvits, Marika
10. Käsper, Kalev
11. Miidla, Peep
12. Mikson, Sirje
13. Must, Olev
14. Mõistus, Helje
15. Padjus, Aavo
16. Pastel, Silvia
17. Peets, Adu
18. Peetsmann, Ilme
19. Petti, Sirje
20. Pärn, Aive
21. Ross, Kaarel
22. Ruuder, Ann
23. Rümmel, Maret
24. September, Gaida
25. Säre, Enn
26. Zirna, Eha
27. Taat, Tiiu
28. Tiismaa, Aino

Nõo Keskkooli matemaatika eriklassi lõpetasid:

1. Aigro, Helle
2. Ainola, Ande
3. Evert, Irja
4. Helstein, Eve
5. Helstein, Liidia
6. Hõbe, Ago
7. Ebrus, Hans
8. Kaeli, Reine
9. Kahu, Vaike
10. Lellep, Helle
11. Lilover, Hele-Mai
12. Lodeson, Silver
13. Lõp, Arno
14. Saagim, Sirje
15. Sakk, Ants
16. Samuel, Kaiu
17. Sipelgas, Jaan
18. Taar, Ago
19. Tammiste, Viire
20. Tenusaar, Arnold
21. Toobal, Kadri
22. Toomemets, Rein
23. Varda, Rein
24. Vilismäe, Jaak
25. Vilismäe, Jüri
26. Väikene, Luule
27. Õsso, Urmas

Tallinna I Keskkooli matemaatika eriklassi lõpetasid:

1. Alumäe, Mare
2. Ehvärt, Villem
3. Eivak, Peeter
4. Joorits, Aune
5. Kallisaar, Urmas
6. Klaan, Maie
7. Konga, Heldur
8. Küling, Helme
9. Liivik, Ene
10. Maanso, Helve
11. Meos, Heiki
12. Mere, Urve
13. Mellik, Enna
14. Nopri, Lydia
15. Ots, Mare
16. Paavo, Toivo
17. Pirn, Lembit
18. Purre, Tiit
19. Rajandu, Kaisa
20. Ringo, Sirje
21. Roletski, Harri
22. Tähe, Sirje
23. Täht, Tiiu
24. Vainomäe, Kristjan
25. Vellend, Toomas
26. Agu, Mait
27. Enok, Heiki
28. Fuks, Ksanne
29. Heinlaid, Heli
30. Karro, Elina
31. Kiitam, Andres
32. Kuller, Ene
33. Kuusk, Sirje
34. Künnap, Margarita
35. Laast-Laas, Jüri
36. Loitmets, Mati
37. Malla, Viivi
38. Mandre, Toomas
39. Martin, Aleksei
40. Meriloo, Malle
41. Preimann, Heiki
42. Raichmann, Riina
43. Rennik, Urve
44. Sahk, Eva
45. Palginõmm, Mai
46. Taavel, Kairi
47. Talivee, Tõnu
48. Uleksin, Boris

Bibliograafia

Eesti NSV-s ilmunud matemaatika-alase kirjanduse nimestik

Jaanuar—september 1969

(Koostanud S. Kiis)

RAAMATUD

Allik, K. **Integraalarvutus.** Tln., 1969. 71 lk., joon. (TPI arvutusmatemaatika kateeder.) Trükitud rotaprindil.

Bradis, V. **Neljakohalised matemaatilised tabelid keskkoolile.** 3. tr. Tln., «Valgus», 1969. 96 lk.

Elementaarmatemaatika. [TRÜ Matemaatikateaduskonna ja Füüsika-Keemiateaduskonna pedagoogiliste osakondade üliõpilastele.] Trt., 1969. (TRÜ matemaatika õpetamise metoodika kateeder.) Trükitud rotaprindil.

2. Laretei, A. ja Reimand, J. **Kogumik TRÜ vastuvõtueksamite ülesandeid.** 120 lk. Trükitud rotaprindil.

3. Mitt, E., Prinits, O. ja Velsker, K. **ENSV keskkooliõpilaste matemaatikaolümpiaadide ülesanded.** 104 lk. Trükitud rotaprindil.

Gabovitš, Jevgeni. **Arvudeta matemaatika.** Populaarne sissejuhatus tänapäeva matemaatikasse. Tln., «Valgus», 1968. 328 lk.

Gabovitš, Jakob ja Kivistik, L. **Arvuteooria.** Trt., 1968. 228 lk. (TRÜ arvutusmatemaatika kateeder.) Trükitud rotaprindil.

Gardner, M. **Relatiivsusteooria miljonitele.** Tln., «Valgus», 1968. 175 lk.

Gelb, A. **Arvutustehnika alused.** Tln., 1968. 132 lk. (ENSV Kõrgema ja Kesk-erihariduse Ministeerium. Tead.-Met. Kabinet.)

Gelfand, S., Gerver, M., Kirillov, A. jt. **Elementaarmatemaatika ülesandeid.** Jadad. Kombinatoorika. Piirväärtused. Tln., «Valgus», 1969. 174 lk.

Kõrgema matemaatika programm ja kontrolltööd kaugõppeteaduskonna tehniliste osakondade II kursusele. Koost. H. Espenberg ja H. Vallner. Trt., 1969. 19 lk. (EPA.) Trükitud rotaprindil.

Lepamaa, A. **Tõenäosusteooria ja matemaatiline statistika.** Tln., 1968. 112 lk. (TPI arvutusmatemaatika kateeder.) Trükitud rotaprindil.

Majandusmatemaatilised meetodid. 1. Lineaarse planeerimise matemaatilised alused. [Ptk. rmt. «Matematické metody v ekonomii».] Kordustr. Saku, 1969. 84 lk. (Eesti Maaviljeluse ja Maaparanduse TUI. Tead.-eksperim. inform.-arvutuskeskus.)

Matemaatika ja kaasaeg. Abimaterjale matemaatika õpetajatele ja õppijatele. XV. Trt., 1968. 148 lk. (Tartu Riiklik Ülikool.)

Sisu: U. Kaljulaid. Geomeetrilisest meetodist diofantilises analüüsis. — T. Sõrmus. Diferentsiaalvõrrandite teooria olemusest ja kujunemisest. — M. Koit. Graafid ja lauseõpetus. — E. Tiit. Reserveerimine ja töökindlus. — R. Mullari. Kaks pähklit majandusküberneetikale katkihammustamiseks. — Ü. Kaasik. Kes-on-kes tüüpi ülesanded. — K. Ariva. Lobatševski geomeetria. — O. Prinits. Loogiliselt samaväärsed laused. — P. Kees. Algklasside matemaatika õpetamisest L. V. Zankovi uue algõpetuse süsteemi põhjal. — J. Reimand, R. Ruut. Matemaatika- ja füüsikaõpetajate kaadrist 1965. aastal. — Akadeemik Arnold Humal. — O. Prinits, E. Tamme. Kalle Väisälä ja Tartu ülikool. — M. Tõnnov. Jean le Rond d'Alembert — entsüklopedist, matemaatik, filosoof. — R. Mullari. Kiri «Matemaatika ja tegelikkuse» autorile. — G. Kangro, A. Melentsov. Summeeruvusteooria-alane suvekool Zaretšnõis. — R. Kolde. Külalistena Lobatševski paikades. — M. Kutser. Koorikute teooria spetsialistid Tartus. — E. Toom. Matemaatikud tulevad matemaatikakoolist. — Kroonika. — Bibliograafia. — Ülesandeid.

Matemaatika- ja mehhaanikaalaseid töid. VIII. Trt., 1968. 247 lk. (Tartu Riikliku Ülikooli Toimetised. Nr. 220.) (Vene k., resümeed eesti, saksa ja inglise k.)

Sisu: A. T a u t s. Loogika kui valemite klassifikatsioon. — Ü. L u m i s t e K. R i i v e s. Eukleidilise ruumi R_4 liikumiste rühma Lie alamrühmad ja nende orbiidid. — H. K i l p. Teatud diferentsiaalvõrrandite süsteemiga antud tasandite pere geomeetriline ehitus. — H. K i l p. Tasandite pere invariantsusrühmad ja vastavad G-strukuurid. — J. L a m p. Üldistatud jadade teisendused. — J. L a m p. Üldistatud jadade teisenduste σ-väljadest. — H. T ü r n p u. Ühest integraalteisenduste klassist. — G. K a n g r o. Tauberi tingimuste sõltumatus summeeruvuse järgust. — E. R e i m e r s. Kooskõla *s*-koonduvuse korral. — E. K o l k. Summeeruvustegurid üldistatud absoluutse Cesàro-summeeruvuse jaoks. — M. A b e l. Esimest liiki summeeruvustegurid kompleksset järku Cesàro menetluste korral. — H. T ü r n p u. Biortonormaalridade absoluutne summeeruvus. — S. B a r o n. Kahekordsete ortogonaatridade Lebesgue'i funktsioonid summeeruvuse puhul. — G. V a i n i k k o. Lineaarsete täielikult pidevate operaatorite kompaktne aproksimeerimine operaatoritega faktorruumides. — R. J ü r g e n s o n. Neljandat järku mittelineaarsete diferentsiaalvõrrandite rajaülesannete lahendamisest diferentsmeetodiga. — E. S a k k o v. Surutud silindriliste koorikute pärastkriitilise staadiumi analüüs. — I. V a i n i k k o. Plastsete-elastsete-viskoossete plaatide ja koorikute deformeerumisest. — I. V a i n i k k o. Plastsete-elastsete-viskoossete rõngasplaatide ja silindriliste koorikute dünaamiline paine.

Matemaatikateaduskonna arvutusmatemaatika osakonna V kursuse üliõpilaste menetluspraktika programmjuhend. Trt., 1969. 6 lk. (TRÜ arvutusmatemaatika kateeder.) Trükitud rotaprindil.

M e r i l o, H. **Elementaarne lähendusarvutus.** Trt., 1968. 20 lk. (EPA.) Trükitud rotaprindil.

«Minsk-1» käskude süsteem. Trt., 1968. 10 lk. (EPA.) Trükitud rotaprindil.

P e t e r s e n, I. ja R o o s, H. **Kõrgema matemaatika ülesannete kogu.** Tln., «Valgus», 1969.
1. 3. tr. 303 lk.
2. 2. tr. 252 lk.

P i a g e t, J. **Arvumõiste tekkimine lapsel.** [Ettekanne kogumikust «Initiation on calcul (enfants de 4 á 7 ans)».] Tln., 1969. 56 lk. (ENSV Kõrgema ja Kesk-erihariduse Ministeerium. E. Vilde nim. TPedI ped. ja psühhol. kateeder.)

P r i n i t s, O. **Täiendavaid peatükke matemaatikaklassidele.** Tln., «Valgus», 1969. 224 lk. (ENSV Haridusministeerium.)

R i i v e s, S. ja R u u b e l, A. **Aksonomeetria.** Näidisülesannete lahendamisega. Trt. 1968. 67 lk. (EPA.) Trükitud rotaprindil.

R o z e n f e l d, I. **Majandusmatemaatika ABC.** Tln., «Valgus», 1969. 183 lk.

R ü n k, O. ja P a l u v e r, N. **Kujutav geomeetria.** Kõrgematele koolidele. 2., ümbertööt. tr. Tln., «Valgus», 1969. 284 lk.

T i i k m a a, B. **Reaktsioonijõud staatikas.** Tln., 1969. 34 lk. (TPI teoreetilise mehhaanika kateeder.) Trükitud rotaprindil.

T i i t, E. **Tõenäosusteooria.** 2. [Loengukonspekt TRÜ matemaatikaosakonna üliõpilastele.] Trt., 1969. 300 lk. (TRÜ arvutusmatemaatika kateeder.) Trükitud rotaprindil.

В а й н и к к о, И. С. **О деформировании пластин и оболочек из пластически-упруго-вязкого материала.** (023). Автореферат дисс. на соискание учен. степ. канд. физ.-мат. наук. Тарту, 1968. 11 с. (ТГУ.)

Инструкция по программированию для ЭВМ «Минск-22». Таллин, 1969. 135 с. (Проектно-технол. и науч.-исслед. ин-т).

Л а м п, Ю. В. **Преобразования обобщенных последовательностей** (001). Автореферат дисс. на соискание учен. степ. канд. физ.-мат. наук. Тарту, 1968. 16 с. (ТГУ).

Математические материалы по эксплуатации ЭВМ «Минск-22» в режиме Г. Таллин, 1969 76 с. (Проектно-технол. и науч.-исслед. ин-т).

П о л л ь, В. В. **Интерполяционные аналоги метода Ньютона для решения задач на экстремум.** (008). Автореферат дисс. на соискание учен. степ. канд. физ.-мат. наук. Таллин, 1969. 20 с. (АН ЭССР. Совет физ. техн. и матем. наук).

Программы общего назначения для ЭВМ «Минск-22». Таллин, 1969. 56 с. (ЭРСПО. Вычислит. центр).

Система символического кодирования для ЭВМ «Минск-2(22)». Таллин, 1969. (Проектно-технол. и науч.-исслед. ин-т).

Ч. 2. Инструкция по перфорации символических программ. 16 с.

Ч. 3. Инструкция по трансляции символических программ. 43 с.

Ч. 4. Эксплуатация ССК в режиме Г. 19 с.

Труды Вычислительного центра. Тарту, 1969. (ТГУ).

Вып. 16. Муллари, Р. Р. К теории многомерных поверхностей евклидова пространства. (Индикатрисы кривизны, главные направления, эволюцы). 128 с. на ротапринте.

Тюрнпу, Х. А. **Метод исследования абсолютной и безусловной суммируемости.** (001). Автореферат дисс. на соискание учен. степ. канд. физ.-мат. наук. Тарту, 1968. 18 с. (ТГУ).

ARTIKLID

Albutašvili, A. **Sisseastumiseksamite korraldus matemaatikas V. I. Lenini nimelises Gruusia Polütehnilises Instituudis.** — Programmõpe, 7, 1968, lk. 47—55.

Allik, K., Puustal, E., Koppel, H. ja Levina, M. **Tulevane insener ja matemaatika.** [Kõrgema matemaatika õppimisest.] — Õppemetoodika küsimusi, 4, 1969, lk. 75—84.

Bantova, M. **Uus matemaatika programm nõuab uut metoodikat.** — Nõukogude Kool, 1969, nr. 2, lk. 147—153.

Eesti NSV Teaduste Akadeemia Toimetised. Füüsika. Matemaatika. Tln., 1969.

Nr. 1. Matemaatika-alased artiklid (vene k., resümeed eesti ja inglise k.):

S. Ulm. Kahenivoolisest optimiseerimisest. — O. Vaarmann. Mõnedest iteratsioonimeetodeist pöördoperaatori järkjärgulise aproksimeerimisega. II. — E. Raik. Fejeri tüüpi jadadega iteratsioonimeetodite klassist. — F. Vichmann. Lõpmatute korrutiste summeerimisest. — J. Kuks. Ühest algoritmist seoses kujundite äratundmise probleemiga. — L. Ainola. Lainevõrrandi segaülesande variatsioonprintsiibid ja üldised valemid. — S. Ulm, V. Poll. Üldistatud diferentssuhete konstrueerimisest. — H. Aben. Pööratavuse printsiip ruumilises fotoelastsuses.

Nr. 2. Matemaatika-alased artiklid (vene k., resümeed eesti ja inglise k.):

Г. Кангро. О множителях суммируемости типа Бора-Харди для заданной скорости. I. — С. Ульм. Покипонентный спуск и иерархическая оптимизация. — М. Тамм. Естественное начальное решение и анализ чувствительности оптимального решения в задачах линейного программирования. — П. Кард, Е. Несмелов, Г. Конюхов, В. Иванов. Просветление трехслойным симметричным покрытием. — А. Шпилевский. Доказательство невозможности процесса. — С. Ульм. Метод условного градиента и декомпозиция задач оптимального управления. — М. Левин. Одна экспериментальная задача для квадратурной формулы Маркова.

Nr. 3. Matemaatika-alased artiklid (vene k., resümeed eesti ja inglise k.):

Ф. Фришман. Расчет системы из двух турбулентных затопленных струй, вытекающих из прямоугольных сопел с параллельными осями. — А. Сиймон. Определение временных координат существования сигнала на выходе Триггера на языке аналитического описания логических схем.

Eesti Põllumajanduse Akadeemia teaduslike tööde kogumik. Maaparanduse, ehitusmehhaanika, maakorralduse ja matemaatika-alased tööd. Trt., 1969.

Nr. 53. Matemaatika-alased artiklid (vene k.; resümeed eesti ja inglise k.):

Э. Вирма. О линейном программировании и теории предельного равновесия. — Х. Эспенберг. Степенные множители суммируемости первого и второго рода для метода Эйлера-Кноппа. — Х. Эспенберг. Множители суммируемости двойных рядов для метода Эйлера-Кноппа. — М. Лейбур. Испытание модели железобетонной оболочки вида гиперболического параболоида. — М. Лейбур. Трещиностойкость и несущая способность железобетонных оболочек вида гиперболического параболоида. — М. Лейбур. Определение внутренней силы затяжки квадратной в плане пологой оболочки в виде гиперболического параболоида. — M. Leibur. Ruudukujulise põhiplaaniga hüperboolse paraboloidkooriku ääretingimused. — M. Leibur. Ruudukujulise põhiplaaniga hüperboolse paraboloidkooriku armeerimisest. — Кыо, Я. П. О расчете электрокристаллизационных напряжений в гальванических покрытиях по деформации ленточного катода.

Etverk, E. ja Vihman, A. **Uuest seitsmenda klassi matemaatika programmist ja õpikust.** — Nõukogude Kool, 1969, nr. 7, lk. 533—538;

nr. 8. lk. 618—620; nr. 10, lk. 788—790 (järgneb).

Golst, G. **Teoreetilise mehaanika tähtsusest tulevase inseneri ettevalmistamisel.** — Õppemetoodika küsimusi, 4, 1969, lk. 107—109.

Haamer, A. **Katse individualiseerida õppetööd 5. klassis geomeetriakursuse õpetamisel.** — Nõukogude pedagoogika ja kool. 4. Trt., 1969, lk. 28—35.

Kärner, O. **Tabelilisest meetodist võrratuste lahendamisel.** — Nõukogude Kool, 1969, nr. 2, lk. 115—123.

Levin, M. **Esteetilise kasvatuse küsimusi matemaatikatundides.** — Nõukogude Kool, 1969, nr. 1, lk. 66—70.

Lints, A. **Korrutamise ja jagamise käsitlemisest 2. klassis.** — Nõukogude Kool, 1969, nr. 1, lk. 18—26; nr. 3, lk. 177—186.

Lints, A. **Kuidas õpetada matemaatikat 3. klassis I õppeveerandil.** — Nõukogude Kool, 1969, nr. 8, lk. 628—634.

Loko, V. **Regressioonivõrrandi kasutamine analüüsimeetodina [põllumajanduses]** — Sotsialistlik Põllumajandus, 1969, nr. 9, lk. 389—391.

Lõhmus, J. **Ühe matemaatilise probleemi saatusest.** [A. Kostrikini doktoriväitekirjast teemal «Burnside'i probleemist».] — Horisont, 1969, nr. 2, lk. 40—41.

Moro, M. **Näitlikustamine matemaatika õpetamisel I. klassis.** — Nõukogude Kool, 1969, nr. 4, lk. 314—317.

Palm, T. **Katse individualiseerida õppetööd 5. klassi matemaatikas teemal «Harilikud murrud».** — Nõukogude pedagoogika ja kool. 4. Trt., 1969, lk. 36—42.

Paluver, N. **Metoodilisi nõuandeid kujutava geomeetria õppimisel.** [TPI.] — Õppemetoodika küsimusi, 4, 1969, lk. 95—101.

Prinits, O. **Mõtlemisvõime ja õppeedukuse seos matemaatika õpetamisel.** — Nõukogude Kool, 1969, nr. 6, lk. 422—427.

Salum, H. **Riikliku preemia laureaate arvutustehnikas.** [Elektronarvuti «MIR» väljatöötamisest ja tootmisse juurutamisest. Autorite kollektiivi autasustamisest eesotsas V. Gluškoviga.] — Horisont, 1969, nr. 3, lk. 28—29.

Silde, O. ja Reľvik, H. **Kellade paradoksist relatiivsusteoorias.** — Horisont, 1969, nr. 5, lk. 30—36.

Trostnikov, V. **Aga võib-olla olete te matemaatik?** — Noorus, 1969, nr. 2, lk. 70—75.

Usai, M. **Matemaatikaõhtu.** — Nõukogude Kool, 1969, nr. 7, lk. 556—560.

Vaher, E. **Logaritmide õppimine programmeeritud materjalide abil.** — Nõukogude pedagoogika ja kool. 4 Trt., 1969, lk. 218—225.

Valma, R. **Julgemalt juurutada arvutustehnikat** [elektrotehnikatööstuses.] — Side, Raadio, Televisioon, 1969, nr. 1, lk. 27—28.

Võhandu, L. **Õpime programmeerima!** — Horisont, 1969, nr. 1, lk. 65—69; nr. 2, lk. 61—64; nr. 3, lk. 63—67; nr. 4, lk. 61—65; nr. 5, lk. 72—74; nr. 6, lk. 64—67.

Велскер, К. **О преподавании элементов теории вероятностей и математической статистики в Тартуской I средней школе.** — Советская педагогика и школа. 1. Тарту, 1968, с. 219—221.

Кулль, Х. **Решение задач на косоугольные треугольники по линейной и разветвленной программам.** — Советская педагогика и школа. 1. Тарту, 1968, с. 162—169.

Лелумсэс, Х. Э. **Решение одной задачи стохастического распределения нагрузок в энергетической системе на аналоговой вычислительной машине.** — Труды Таллинского политехн. ин-та. Серия А, № 275. 1969, с. 15—21.

Пальм, Т. **Самостоятельная работа учащихся по принципу программированного обучения на уроках математики.** — Советская педагогика и школа. 1. Тарту, 1968, с. 155—161.

Реймананд, Я. **О преподавании линейного программирования в I и VIII средних школах г. Тарту.** — Советская педагогика и школа. 1. Тарту, 1968, с. 211—218.

Ülesandeid

Seekord pakume lugejaile lahendamiseks ülesandeid Ochanomizu Naiste Ülikooli (Jaapan) matemaatika programmist. Ülesanded saatis toimetusele Kobe ülikooli matemaatikaprofessor Kiyoshi Iséki.

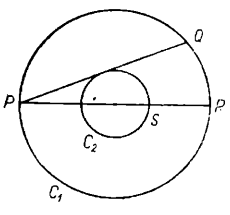
1. Tõestada matemaatilise induktsiooni teel, et

$$\frac{(m+n)!}{m!n!} \geqslant mn+1$$

(m, n — naturaalarvud).

2. On antud kolmnurk ABC. Määrata kolmnurga kuju, kui on teada, et järgmised skalaarkorrutised on võrdsed:

$$\overline{AB} \cdot \overline{BC} = \overline{BC} \cdot \overline{CA} = \overline{CA} \cdot \overline{AB}.$$



3. On antud kaks kontsentrilist ringjoont C_1 ja C_2, kusjuures ringjoone C_1 raadius r_1 on suurem kui ringjoone C_2 raadius r_2. Ringjoonele C_2 on tõmmatud puutuja, mis lõikab ringjoont C_1 punktides P ja Q. Ringjoone C_1 diameeter PF lõikab ringjoont C_2 punktis S (punkt S on see lõikepunkt, mille kaugus punktist R on väiksem kui punktist P). Millistes piirides võib muutuda suhe $\frac{r_1}{r_2}$ kui $QS > QR$?

4. Leida funktsiooni

$$f(t) = \frac{1}{t}\int_0^t x(x-1)(x-t)dx \quad (t > 0)$$

maksimum.

5. Võrdle järgmiste arvridade summasid:

$$1 + \frac{a}{2} + \frac{a^2}{2^2} + \ldots + \frac{a^n}{2^n} + \ldots,$$

$$1 - \frac{1}{2-a} + \frac{1}{(2-a)^2} - \ldots + \frac{(-1)^n}{(2-a)^n} + \ldots.$$

6. Ristkoordinaadistikus on antud punkt $A(0, a)$ $(a > 0)$. Piki x-telje positiivset osa liiguvad punktid $U(u, 0)$ ja $V(v, 0)$ nii, et $AU + AV = c$ (c on konstant). Vaadeldes suurusi u ja v aja t funktsioonidena, tõestada, et

$$\frac{du}{dt} \cdot \cos \widehat{AUO} + \frac{dv}{dt} \cdot \cos \widehat{AVO} = 0$$

(O — koordinaatide algus).

KOGUMIKU VIIETEISTKÜMNENDA VIHIKU ÜLESANNETE LAHENDUSED

Ülesande nr. 1 lahendus. Võrdusest $a^{3m} + a^{3n} = a^{3p} + a^{3q}$ järeldub $(a^m + a^n)(a^{2m} - a^m a^n + a^{2n}) = (a^p + a^q)(a^{2p} - a^p a^q + a^{2q})$.

Et

$$a^m + a^n = a^p + a^q,$$

siis $a^{2m} - a^{m+n} + a^{2n} = a^{2p} - a^{p+q} + a^{2q}$. (1)

Lahutades saadud võrduse võrdusest $(a^m - a^n)^2 = (a^p - a^q)^2$, saame

$$a^{m+n} = a^{p+q},$$

$$m + n = p + q. \qquad (2)$$

$$m - p = q - n.$$

Seose (1) põhjal

$$a^p(a^{m-p} - 1) = a^n(a^{q-n} - 1). \qquad (3)$$

Võib esineda kaks juhtu:

1) $m = p$. Siis (2) põhjal $q = n$ ning $mn = pq$.

2) $m \neq p$. Siis (2) põhjal $m - p = q - n \neq 0$ ja võrdus (3) võtab kuju $a^p = a^n$. Siit $p = n$, seose (2) põhjal $m = q$ ning $mn = pq$.

Ülesande nr. 2 lahendus. Olgu ruutvõrrandi lahendid x_1 ja x_2. Et $x_1 + x_2 = a - 3$ ja $x_1 x_2 = a + 3$, siis

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (a-3)^2 - 2(a+3) = a^2 - 8a + 3 = (a-4)^2 - 13.$$

Seega on ülesande vastuseks $a = 4$.

Ülesande nr. 3 lahendus. Olgu otsitavad arvud x ja y. Ülesande tingimuse kohaselt

$$x + y = 0{,}2xy,$$
$$5x + 5y = xy.$$

Siit

$$x(y-5) = 5y,$$
$$y(x-5) = 5x.$$

Korrutades need võrrandid saame

$$(x-5)(y-5) = 25.$$

Et arv 25 on lahutatav tegureiks ainult kahel viisil $(25 = 1 \cdot 25 = 5 \cdot 5)$, siis on otsitavaid arvupaare kaks: (6, 30) ja (10, 10).

Ülesande nr. 4 lahendus. Olgu kolmnurkade AOB, BOC, COD, DOA pindalad vastavalt S_1, S_2, S_3, S_4. Siis

$$\frac{S_1}{S_4} = \frac{BO}{OD}, \qquad \frac{S_4}{S_3} = \frac{AO}{OC}, \qquad \frac{BO}{OD} = \frac{AO}{OC}.$$

Siit

$$\frac{S_1}{S_4} = \frac{S_4}{S_3},$$

$$S_4 = \sqrt{S_1 S_3}.$$

Analoogiliselt saame

$$S_2 \sqrt{S_1 S_3}$$

Seega $S = S_1 + S_3 + 2\sqrt{S_1 S_3}$, ehk

$$S = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_3})^2.$$

Ülesande nr. 5 lahendus. Tõstes antud seosed ruutu, saame

$$\sin^2 x + 2\sin x \sin y + \sin^2 y = a^2,$$
$$\cos^2 x + 2\cos x \cos y + \cos^2 y = b^2.$$

Nende liitmisel ja lahutamisel saame

$$2 + 2\cos(x - y) = a^2 + b^2, \qquad (1)$$
$$\cos 2x + \cos 2y + 2\cos(x + y) = b^2 - a^2. \qquad (2)$$

Koosinuste summa valemi põhjal (2) teisendub kujule

$$2\cos(x + y)\cos(x - y) + 2\cos(x + y) = b^2 - a^2.$$

Jagades saadud võrduse võrdusega (1) saame

$$\cos(x + y) = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2}.$$

EELMISES NUMBRIS ILMUNUD BRIDŽIÜLESANDE LAHENDUS

(Ülesanne vt. «Matemaatika ja kaasaeg», XVI, lk. 82)

S käib ärtu üheksa. Kui vastased seda üle ei löö, siis kord ruutut lõigates saab padaga kaks korda tihi *N* kätte andes kõrgete ruutudega *O* trumpe lõigata ning kaheksa tihi on garanteeritud. Kui esimesel käigul *O* lööb ärtu üheksa kuningaga, siis saab täiesti analoogiliselt *N*-i ruutudega *O* viimase trumbi maha võtta. Vastaste parim kaitse on seega esimese tihi võtmine ärtu emandaga. Sõltuvalt *W* käigust on nüüd viis võimalust.

1) Kui *W* käib teiseks käiguks pada, siis ei valmista kaheksa tihi saamine *S*-ile ilmselt mingit raskust.

2) Kui *W* käib ristit, siis *S* võtab, annab tihi *N*-i ruutu ässale (ilma lõikuseta), trumpab ruutu kuninga üle (*O* peab seda ju ilmselt trumpama) ja käib oma viimase risti *O* trumbi alla. Sõltumata *O* käigust võtab nüüd *N* pada, *S* kaks ärtut ja *W* on sunnitud kas pada või ruutu pidaja ära viskama.

3) Kui *W* käib ruutu nelja või viie, siis *S* võtab selle seitsmega, *N* trumpab risti kümne, *S* trumpab ruutu ässa (tarbekorral) üle, annab pada lõikusega tihi jälle *N*-ile, trumpab ka ruutu kuninga üle, tõmbab ärtu ässa ja käib risti emanda, millega *O* saab veel vaid ärtu kuninga tihi.

4) Kui *W* käib ruutu kaheksa, siis *N* lööb selle üle ja käib järgmise suure ruutu. Sõltuvalt *O* tegevusest on nüüd kaks võimalust.

a) Kui *O* kaotab ristit, siis *S* samuti. Edasi lõikab ta ärtut, millega tekib põhimõtteliselt sama olukord nagu juhul 3 pärast neljandat käiku.

b) Kui *O* paneb väikese trumbi (trumbi kuninga panek muudaks olukorra täiesti lihtsaks), siis *S* trumpab üle, tõmbab risti emanda (*N* viskab pada) ja *N* trumpab teise risti. *O* parimaks kaitseks on see üle trumbata ja pada käia, kuid *S* trumpab nüüd ruutu (tarbekorral) üle, tõmbab trumbi ässa (*N* viskab pada) ja *N* saab viimased kaks tihi.

5) Kui *W* käib ärtu seitsme, siis *S* võtab selle sõduriga (*O* kuninga panek ainult lihtsustaks asja) ja tõmbab veel ärtu ässa, millele *N* viskab väikese pada. Sõltuvalt *W* viskest on nüüd kolm võimalust.

a) Kui *W* viskab kolmandale tihile pada, siis on kaheksa tihi võtmine täiesti lihtne.

b) Kui *W* viskab ruutut, siis S käib edasi risti emanda (N viskab pada), annab tihi ruutu ässale ja *N* käib ruutu kuninga. Kui O seda ei trumpa, siis jätkab N ruutude käimist, kui O trumpab madalalt, siis S trumpab üle, annab pada lõikusega tihi *N*-ile ja käib jälle ruutut. Kui *O* trumpab kuuendat tihi kuningaga ja käib pada, siis käib *N* seni ruutut, kuni *O* trumpi paneb.

c) Kui *W* viskab ristit, siis *S* käib risti emanda ja seejärel ruutu seitsme. Kui *W* selle üle lööb, siis taandub olukord eelmisele variandile, kui aga ruutu seitse tihi saab, siis järgneb pada lõikus ja *N* käib ruutu ässa. Kui *O* trumpab madalalt, siis *S* trumpab üle ja käib ristit. Kui *O* trumpab kuningaga, siis *S* viskab pada ja sõltumata *O* käigust saab kõik tihid.

SISUKORD