Matemaatika ja kaasaeg

TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

MATEMAATIKA JA KAASAEG

XVI

ABIMATERJALE MATEMAATIKA ÕPETAJATELE JA ÕPPIJATELE

TARTU 1969

Toimetuselt

Kuigi «Matemaatika ja kaasaeg» on aperioodiline väljaanne, on ta ilmunud sagedusega kaks numbrit aastas. Kahjuks ei olnud 1969. aastal toimetusest sõltumatutel tehnilistel põhjustel võimalik kahte vihikut välja anda ning laekunud materjal tuli koondada ühte numbrisse, mille maht kasvas ligemale kahekordseks. Sellepärast ongi käesolev vihik varasematest mahukam ning seetõttu ka vastavalt kallim.

Loodame, et edaspidi on meil võimalik anda kogumikku välja jälle kaks numbrit aastas.

MÕNDA FUNKTSIONAALANALÜÜSIST I

G. Vainikko

Funktsionaalanalüüs kujunes välja matemaatilisest analüüsist käesoleva sajandi algul. Pioneerideks uuel alal olid D. Hilbert, F. Riesz ja S. Banach. Peagi muutus funktsionaalanalüüs moodsaks matemaatiliseks distsipliiniks ja käesoleval ajal on juba väga raske loetleda kõigi nende uurijate nimesid, kes seda distsipliini oma töödega on rikastanud.

Funktsionaalanalüüs on üles ehitatud märksa sügavamatele matemaatilistele abstraktsioonidele kui klassikaline analüüs. See võimaldab ühtsest seisukohast vaadelda mitmeid probleeme, mida varem käsitleti eraldi, ja läbi funktsionaalanalüüsi prisma vaadatuna omandavad need probleemid enneolematu selguse ja lihtsuse. Ühtlasi on funktsionaalanalüüs baasiks, alusmüüriks paljudele teistele matemaatilistele distsipliinidele. Näiteks oleksid tänapäeva diferentsiaalvõrrandite teooria ja arvutusmatemaatika mõeldamatud ilma funktsionaalanalüüsita.

Funktsionaalanalüüsi põhimõisteks on operaatori mõiste. See on funktsiooni mõiste üldistus. Operaatori argumendiks ja kujutiseks on punktid (elemendid) mingitest abstraktsetest ruumidest. Just viimaste käsitlemisest algamegi.

Meetrilised ruumid ja koondumine nendes

Vaatleme algul tasandit, millel oleme sisse toonud ristkoordinaadistiku. Tasandi punkte tähistame x, y, z jne., nende koordinaate vastavate kreeka tähtedega, kasutades indekseid. Näiteks punkti x koordinaatideks on ξ_1 ja ξ_2, punkti y koordinaatideks η_1 ja η_2, punkti z koordinaatideks ζ_1 ja ζ_2. Olgu $\varrho(x, y)$ kaugus punktist x punktini y (vt. joon. 1):

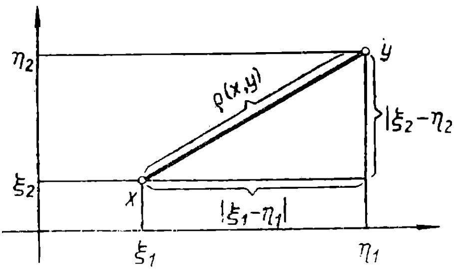
$$\varrho(x, y) = \sqrt{(\xi_1 - \eta_1)^2 + (\xi_2 - \eta_2)^2}.$$

Ilmselt on kaugus $\varrho(x, y)$ alati mittenegatiivne, kusjuures võrdus $\varrho(x, y) = 0$ on samaväärne väitega, et punktid x ja y ühtivad. Edasi, kehtib võrdus $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$, mis tähendab, et kaugus punktist x punktini y on võrdne kaugusega punktist y punktini x (kauguse sümmeetria). Fakti, et kolmnurga külje pikkus on väiksem kahe ülejäänud kolmnurga külje pikkuste summast, väljendab võrratus (vt. joon. 2):

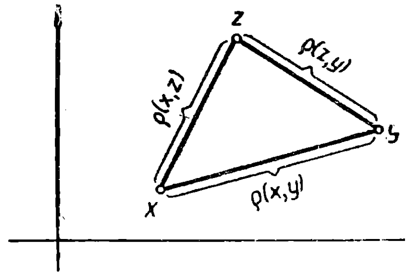
$$\varrho(x, y) \leqslant \varrho(x, z) + \varrho(z, y).$$

Analoogilised omadused on kaugusel kolmemõõtmelises ruumis, milles on sisse toodud ristkoordinaadistik.

Meetriline ruum on reaalse ruumi matemaatiline abstraktsioon. Meetriliseks ruumiks võib olla mistahes hulk, kui vaid



Joonis 1.



Joonis 2.

selle hulga punktide (elementide) vahel on defineeritud kaugus eespool märgitud omadustega. Hulga punktideks võivad sealjuures olla mistahes objektid.

Esitame nüüd täpse definitsiooni.

Meetriliseks ruumiks nimetatakse hulka E, mille igale elementide paarile x, y on ühesel viisil vastavusse seatud mittenegatiivne reaalarv (mida tähistame $\varrho(x, y)$ ja nimetame punktide x ja y vaheliseks kauguseks), nii et on täidetud järgmised tingimused:

1° $\varrho(x, y) = 0$ siis ja ainult siis, kui $x = y$;

2° $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$;

3° $\varrho(x, y) \leqslant \varrho(x, z) + \varrho(z, y)$ mistahes $x, y, z \in E$ korral.

Tingimusi 1°, 2° ja 3° nimetatakse vastavalt samasuse, sümmeetria ja kolmnurga aksioomideks.

Meetrilisele ruumile on lihtsalt ülekantav matemaatilise analüüsi üks põhilisemaid mõisteid — piirväärtuse mõiste. Teatavasti on arvjada ξ_n piirväärtuseks arv ξ (seda märgitakse lühidalt $\xi_n \to \xi$ või $\lim \xi_n = \xi$), kui iga (kuitahes väikese) arvu $\varepsilon > 0$ jaoks leidub selline naturaalarv N_ε, et $n > N_\varepsilon$ korral $|\xi_n - \xi| < \varepsilon$.

Me ütleme, et elementide jada $x_n \in E$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ***koondub*** $n \to \infty$ korral meetrilises ruumis E elemendiks $x \in E$, kui kaugus elementide x_n ja x vahel läheneb nullile, s. t. kui arvjada $\varrho(x_n, x)$ koondub nulliks:

$$\varrho(x_n, x) \to 0.$$

Jada $x_n \in E$ koondumist elemendiks $x \in E$ märgime lühidalt

$x_n \to x$ või $\lim x_n = x$. Seega võime piirväärtuse definitsiooni esitada lühidalt nii:

$$x_n \to x, \text{ kui } \varrho(x_n, x) \to 0.$$

Ehk:

$$x_n \to x, \text{ kui iga } \varepsilon > 0 \text{ jaoks leidub selline } N_\varepsilon,$$
$$\text{et } n > N_\varepsilon \text{ korral } \varrho(x_n, x) < \varepsilon.$$

Viimane formuleering on saadud eelnevast, asendades nõude $\varrho(x_n, x) \to 0$ vastavalt arvjada piirväärtuse definitsioonile.

Nimetame järgnevalt mõned piirväärtuse omadused, mis on täiesti analoogilised vastavate omadustega arvjadade puhul.

1. Koonduval jadal ei saa olla mitut piirväärtust. Tõepoolest, kui $x_n \to x$ ja $x_n \to x'$, s. t. kui $\varrho(x_n, x) \to 0$ ja $\varrho(x_n, x') \to 0$, siis kolmnurga aksioomi tõttu

$$\varrho(x, x') \leqslant \varrho(x, x_n) + \varrho(x_n, x') \to 0.$$

Et aga võrratuse vasak pool üldse ei sõltu indeksist n ja on mittenegatiivne, siis $\varrho(x, x') = 0$ ehk $x = x'$, mis tõestabki piirväärtuse ühesuse.

2. Olgu $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ mistahes kasvav naturaalarvude jada. Jada x_{n_k} $(k = 1, 2, \ldots)$ nimetatakse jada x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ osajadaks. Kui $x_n \to x$, siis ka $x_{n_k} \to x$. See väide järeldub arvjadade analoogilisest omadusest: kui $\varrho(x_n, x) \to 0$, siis ka $\varrho(x_{n_k}, x) \to 0$.

3. Iga koonduva jada $x_n \to x$ ja suvalise elemendi $y \in E$ korral

$$\varrho(x_n, y) \to \varrho(x, y) \quad \text{(kauguse pidevus)}.$$

Tõepoolest, kolmnurga võrratust kasutades leiame

$$\varrho(x_n, y) \leqslant \varrho(x_n, x) + \varrho(x, y), \quad \varrho(x, y) \leqslant \varrho(x, x_n) + \varrho(x_n, y),$$

kust

$$\varrho(x_n, y) - \varrho(x, y) \leqslant \varrho(x_n, x), \quad \varrho(x, y) - \varrho(x_n, y) \leqslant \varrho(x, x_n).$$

Kaks viimast võrratust saab absoluutväärtuse märgi abil ühendada:

$$|\varrho(x_n, y) - \varrho(x, y)| \leqslant \varrho(x_n, x).$$

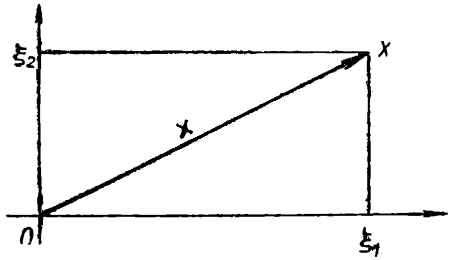
Et aga $\varrho(x_n, x) \to 0$, siis ka $\varrho(x_n, y) - \varrho(x, y) \to 0$ ehk $\varrho(x_n, y) \to \varrho(x, y)$, mis tõestabki meie väite.

Ülesanne 1. Olgu $x_n \to x$ ja $y_n \to y$ mistahes koonduvad jadad meetrilises ruumis E. Näidata, et

$$\varrho(x_n, y_n) \to \varrho(x, y).$$

Vektorruumid

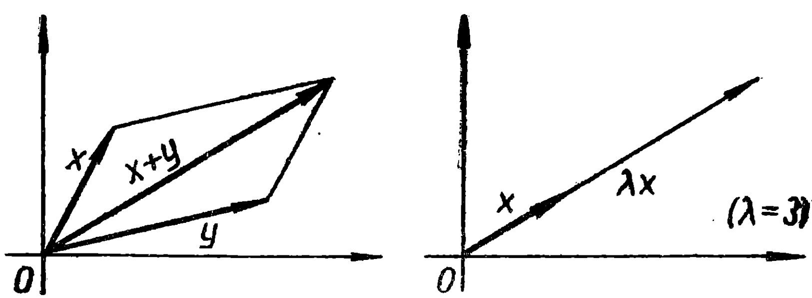
Vaatleme taas tasandit, millel on sisse toodud ristkoordinaadistik. Kui punkti x koordinaatideks on ξ_1 ja ξ_2, siis nimetatakse vektorit $\mathbf{x} = (\xi_1, \xi_2)$ punkti x kohavektoriks (joon. 3). Ilmselt vastab igale punktile tasandil parajasti üks kohavektor ja vastupidi; koordinaatide alguse O kohavektoriks on nullvektor $\mathbf{0} = (0, 0)$. See vastavuse üks-ühesus võimaldab edaspidi punkti x asemel kõnelda vektorist $\mathbf{x} = (\xi_1, \xi_2)$, tasandi enda asemel aga kõigi kahekomponendiliste vektorite hulgast. Viimast hulka tähis-



Joonis 3.

tame R_2. Hulga R_2 elementide (kahekomponendiliste vektorite) vahel on defineeritud liitmise, lahutamise ja skalaariga korrutamise tehted, mis ei vii hulgast R_2 välja. Näiteks kahe vektori $\mathbf{x} = (\xi_1, \xi_2)$ ja $\mathbf{y} = (\eta_1, \eta_2)$ summaks on vektor $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2)$, vektori $\mathbf{x}$ ja skalaari λ korrutiseks vektor $\lambda\mathbf{x} = (\lambda\xi_1, \lambda\xi_2)$; (vt. joon. 4).

Liitmise ja skalaariga korrutamise tehted (koos nendega ühtlasi lahutamistehte) võib sisse tuua ka paljudes sellistes hulkades, mille elementideks pole vektorid. Kui need tehted on samade omadustega nagu vektorite korral, nimetatakse vastavat hulka vektorruumiks. Esitame täpse definitsiooni.



Joonis 4.

Hulka E nimetatakse *vektorruumiks*, kui tema elementide vahel on defineeritud liitmise ja (reaalarvulise) skalaariga korrutamise tehted, mis ei vii hulgast E välja (s. t. vektorite summa ning vektori ja skalaari korrutis peavad samuti kuuluma hulka E), nii et on täidetud järgmised nõuded:

1° $x+y=y+x$ (liitmise kommutatiivsus);
2° $(x+y)+z=x+(y+z)$ (liitmise assotsiatiivsus);
3° hulgas E leidub selline element $\mathbf{0}$, et iga $x\in E$ korral $0\cdot x=\mathbf{0}$;
4° $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$,
5° $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$ } (skalaariga korrutamise distributiivsus);
6° $(\lambda\mu)x=\lambda(\mu x)$ (skalaariga korrutamise assotsiatiivsus);
7° $1\cdot x=x$.

Elementi $\mathbf{0}$, mille olemasolu postuleeriti aksioomis 3°, nimetatakse nullelemendiks. Tal on analoogilised omadused nagu nullil arvude vallas. Näiteks iga $x\in E$ korral $x+\mathbf{0}=x$, sest aksioomide 3°, 4° ja 7° põhjal $x+\mathbf{0}=1\cdot x+0\cdot x=(1+0)x=1\cdot x=x$.

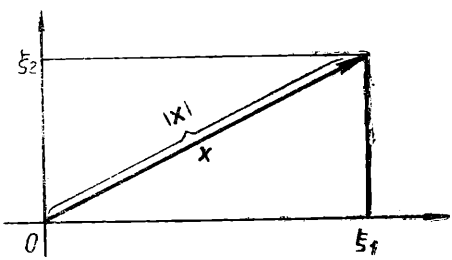
Elementi $(-1)\cdot x$ nimetatakse x vastandelemendiks ning tähistatakse lühidalt $-x$. Mistahes elemendi ja tema vastandelemendi summaks on nullelement:

$$x+(-1)x=1\cdot x+(-1)x=(1+(-1))x=0\cdot x=\mathbf{0}.$$

Elementi $z=x+(-1)y=x-y$ nimetatakse x ja y vaheks.

Ülesanne 2. Näidata, et:
a) $x=y$ siis ja ainult siis, kui $x-y=\mathbf{0}$;
b) $\lambda(x-y)=\lambda x-\lambda y$,
$(\lambda-\mu)x=\lambda x-\mu x$;
c) $\lambda\cdot\mathbf{0}=\mathbf{0}$;
d) $\lambda x=\mathbf{0}$ siis ja ainult siis, kui $\lambda=0$ või $x=\mathbf{0}$.

Rõhutame, et tõestustes võib kasutada ainult aksioome 1°–7° ja väiteid, mis on eelnevalt juba tõestatud nende aksioomide abil.



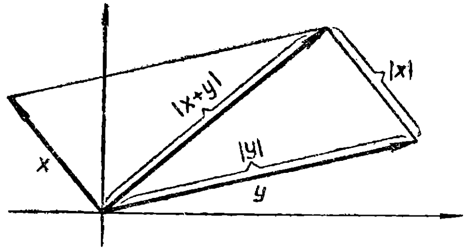
Joonis 5.

Normeeritud ruumid

Pöördume tagasi vektorruumi R_2 juurde. Olgu $|\mathbf{x}|$ vektori $\mathbf{x}=(\xi_1,\xi_2)$ pikkus (vt. joon. 5):

$$|\mathbf{x}|=\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}.$$

Ilmselt on nullvektor $\mathbf{0}=(0,0)$ ainus selline vektor ruumis R_2, mille pikkuseks on 0. Mistahes vektori korrutamisel skalaariga λ suureneb vektori pikkus $|\lambda|$ korda: $|\lambda \mathbf{x}| = |\lambda| |\mathbf{x}|$. Mistahes vektorite $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{y}$ korral kehtib võrratus $|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leqslant |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$, mis taas väljendab fakti, et kolmnurga külg ei ületa ülejäänud kahe külje summat (vt. joon. 6).



Joonis 6.

Vektori pikkuse mõiste üldistuseks mistahes vektorruumile on vektorruumi elemendi normi mõiste. Nõutakse, et elemendi normil oleksid samasugused omadused, mis olid vektori pikkusel vektorruumi R_2 korral. Vektorruumi, mille igale elemendile on seatud vastavusse tema norm, nimetatakse normeeritud vektorruumiks või lihtsalt normeeritud ruumiks. Järgneb täpne definitsioon.

Vektorruumi E nimetatakse *normeeritud ruumiks*, kui igale elemendile $x \in E$ on ühesel viisil vastavusse seatud mittenegatiivne reaalarv $\|x\|$ — elemendi x norm, nii et on rahuldatud järgmised nõuded (normi aksioomid):

1° $\|x\| = 0$ siis ja ainult siis, kui $x = \mathbf{0}$ (samasuse aksioom);
2° $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ (normi homogeensuse aksioom);
3° $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (kolmnurga aksioom).

Normeeritud ruum on ühtlasi ka meetriliseks ruumiks, kui defineerida kaugus elementide x ja y vahel järgmiselt:

$$\varrho(x, y) = \|x - y\|.$$

Tõestuseks veendume normi aksioome 1°—3° kasutades, et selliselt defineeritud kaugus $\varrho(x, y)$ rahuldab meetrilise ruumi aksioome 1°—3°:

1° $\varrho(x, y) = 0$ siis ja ainult siis, kui $\|x - y\| = 0$, s. t. $x - y = \mathbf{0}$ ehk $x = y$;

2° $\varrho(x, y) = \|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| = |(-1)| \|y - x\| = \|y - x\| = \varrho(y, x)$;

3° $\varrho(x, y) = \|x - y\| = \|(x - z) + (z - y)\| \leqslant \|x - z\| + \|z - y\| = \varrho(x, z) + \varrho(z, y)$.

Vastavalt kauguse definitsioonile omandab piirväärtuse mõiste normeeritud ruumides järgmise kuju. Elementide jada $x_n \in E$ koondub (ruumi E normi järgi) elemendiks $x \in E$, kui arvjada $\varrho(x_n, x) = \|x_n - x\|$ koondub nulliks. Lühidalt,

$$x_n \to x, \quad \text{kui} \quad \|x_n - x\| \to 0$$

ehk:

$x_n \to x$, kui iga $\varepsilon > 0$ jaoks leidub selline N_ε, et $n > N_\varepsilon$ korral $\|x_n - x\| < \varepsilon$.

Nagu juba öeldud, on iga normeeritud ruum ühtlasi ka meetriline ruum. Vastupidine väide pole õige — mitte iga meetriline ruum pole normeeritud ruum kas või sel põhjusel, et normeeritud ruum peab olema vektorruum, meetriline ruum aga ei pruugi vektorruum olla.

Ülesanne 3. Olgu E normeeritud ruum. Näidata, et kaugus $\varrho(x, y) = \|x - y\|$ rahuldab järgmisi tingimusi:

4° $\varrho(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| \varrho(x, y)$;

5° $\varrho(x + z, y + z) = \varrho(x, y)$.

Ülesanne 4. Olgu E vektorruum ja ühtlasi ka meetriline ruum, milles kaugus $\varrho(x, y)$ rahuldab peale meetrilise ruumi aksioomide 1°—3° veel lisatingimusi 4° ja 5° eelmisest ülesandest. Näidata, et E on siis ka normeeritud ruum, kui defineerida

$$\|x\| = \varrho(x, 0).$$

Näiteid normeeritud ruumidest (ruum R_n)

Defineerime kõigi n-komponendiliste vektorite hulgas liitmise ja skalaariga korrutamise tehted: kui

$$x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n), \quad y = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n),$$

siis

$$x + y = (\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, \ldots, \xi_n + \eta_n),$$
$$\lambda x = (\lambda \xi_1, \lambda \xi_2, \ldots, \lambda \xi_n).$$

Lihtne on kontrollida, et need tehted rahuldavad vektorruumi aksioome 1°—7°, kusjuures nullelemendiks on $0 = (0, 0, \ldots, 0)$. Sellega oleme muutnud n-komponendiliste vektorite hulga vektorruumiks. Veendume, et ta on normeeritud ruum, kui võtta normiks

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \xi_k^2}\,;$$

seda normeeritud ruumi nimetatakse eukleidiliseks ruumiks ja tähistatakse R_n. On vaja kontrollida normi aksioomide 1°—3° täidetust. Ilmselt on $\|x\| = 0$ siis ja ainult siis, kui $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0, \ldots, \xi_n = 0$, s. t. kui $x = 0$. Seega on samasuse aksioom täidetud. Normi homogeensuse aksioomi kontroll:

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (\lambda \xi_k)^2} = \sqrt{\lambda^2 \sum_{k=1}^{n} \xi_k^2} = |\lambda| \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \xi_k^2} = |\lambda|\, \|x\|.$$

Mõnevõrra keerulisem on kolmnurga aksioomi kontroll. Selleks tuleb eelnevalt näidata, et mistahes reaalarvude $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ ja $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ korral kehtib nn. Cauchy võrratus.

$$|\sum_{k=1}^{n} \xi_k \eta_k| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \xi_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \eta_k^2}.$$

Iga reaalse λ korral kehtib võrratus

$$\sum_{k=1}^{n} (\lambda \xi_k - \eta_k)^2 \geqslant 0$$

ehk

$$\sum_{k=1}^{n} (\lambda^2 \xi_k^2 - 2\lambda \xi_k \eta_k + \eta_k^2) \geqslant 0.$$

Korraldades liikmed λ astmete järgi, saame

$$(\sum_{k=1}^{n} \xi_k^2)\lambda^2 - 2(\sum_{k=1}^{n} \xi_k \eta_k)\lambda + (\sum_{k=1}^{n} \eta_k^2) \geqslant 0.$$

Kuna see võrratus kehtib iga λ korral, on ruutkolmliikme diskriminant mittepositiivne:

$$(\sum_{k=1}^{n} \xi_k \eta_k)^2 - (\sum_{k=1}^{n} \xi_k^2)(\sum_{k=1}^{n} \eta_k^2) \leqslant 0.$$

Kandes teise liikme võrratuse paremale poolele, saamegi juurimisel Cauchy võrratuse.

Kontrollime nüüd kolmnurga aksioomi kehtivust. Võrratus $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$, mille kehtivust on vaja kontrollida, on antud juhul

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (\xi_k + \eta_k)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \xi_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \eta_k^2}.$$

Tõstame võrratuse mõlemad pooled ruutu

$$\sum_{k=1}^{n} (\xi_k^2 + 2\xi_k \eta_k + \eta_k^2) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \xi_k^2 + 2\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \xi_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \eta_k^2} + \sum_{k=1}^{n} \eta_k^2.$$

Koondanud võrratuse mõlemal poolel esinevad liikmed $\sum_{k=1}^{n} \xi_k^2$ ja $\sum_{k=1}^{n} \eta_k^2$ ning jaganud saadava võrratuse 2-ga, jõuame Cauchy võrratuseni

$$\sum_{k=1}^{n} \xi_k \eta_k \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \xi_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \eta_k^2},$$

mille kehtivuses me eespool juba veendusime. Järelikult kehtivad ka eelnevad kaks võrratust ning kolmnurga aksioom on rahuldatud.

Vaatame, mida tähendab koondumine ruumis R_n. Koondugu vektorite jada $x_m=(\xi_1^{(m)}, \xi_2^{(m)}, \ldots, \xi_n^{(m)})$ $m\to\infty$ korral vektoriks $x=(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$: iga $\varepsilon>0$ jaoks leidub selline N_ε, et $m>N_\varepsilon$ puhul

$$\|x_m-x\|=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(\xi_k^{(m)}-\xi_k)^2}<\varepsilon.$$

Siis $m\geqslant N_\varepsilon$ korral ka

$$|\xi_k^{(m)}-\xi_k|<\varepsilon \qquad (k \text{ suvaline, } 1\leqslant k\leqslant n),$$

s. t. arvjada $\xi_k^{(m)}$ koondub piirväärtuseks ξ_k. Me veendusime, et koondumisest ruumis R_n järeldub komponenditi koondumine — koonduva jada x_m k-ndatest komponentidest moodustatud arvjada koondub piirvektori x k-ndaks komponendiks. Ei valmista raskusi ka vastupidise näitamine (üksikasjaliku tõestuse jätame lugeja hooleks): kui jada x_m koondub komponenditi vektoriks x, siis x_m koondub x-ks ka normi järgi.

Seega tähendab koondumine ruumis R_n komponenditi koondumist.

Vektorruumi R_3 võib geomeetriliselt kujutada kolmemõõtmelise ruumina, milles on sisse toodud ristkoordinaadistik, elemente $x=(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ aga selle ruumi punktidena või nende punktide kohavektoritena. Vektorruum R_2 kujutab endast tasandit ristkoordinaadistikuga, elemendid $x=(\xi_1, \xi_2)$ tasandi punkte või nende kohavektoreid. Ruumist R_2 on eespool mitu korda juttu olnud. Ruum R_1 kujutab endast arvtelge ja tema elemendid — reaalarve (või nende kohavektoreid). Elemendi norm (vektori pikkus) ja elementide (punktide)-vaheline kaugus mainitud kolmes ruumis on:

$$x, y\in R_1 \text{ korral } \|x\|=|x|,\ \varrho(x, y)=|x-y|;$$

$$x=(\xi_1, \xi_2),\ y=(\eta_1, \eta_2)\in R_2 \text{ korral } \|x\|=\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2},$$

$$\varrho(x, y)=\sqrt{(\xi_1-\eta_1)^2+(\xi_2-\eta_2)^2};$$

$$x=(\xi_1, \xi_2, \xi_3),\ y=(\eta_1, \eta_2, \eta_3)\in R_3 \text{ korral } \|x\|=\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2},$$

$$\varrho(x, y)=\sqrt{(\xi_1-\eta_1)^2+(\xi_2-\eta_2)^2+(\xi_3-\eta_3)^2}.$$

Toodud kauguse valemid on geomeetrias hästi tuntud. Ruumi R_n, mis on saadud ruumide R_1, R_2 ja R_3 vahetu üldistusena, on võimalik üle kanda enamik geomeetria mõisteid, valemeid ja teoreeme. Ruum R_n kannab eukleidilise ruumi nime suure antiikgeomeetri Eukleidese auks.

Märgime, et n-komponendilise vektori normi võib defineerida ka teisiti ja selliselt jõuame uute normeeritud ruumideni.

Ülesanne 5. Näidata, et n-komponendiliste vektorite hulk on normeeritud ruum, kui vektori $x=(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ normiks võtta suurim komponentide absoluutväärtustest:

$$\|x\| = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |\xi_k|.$$

Selliselt normeeritud vektorruumi tähistatakse m_n.

Ülesanne 6. Näidata, et n-komponendiliste vektorite hulk on normeeritud ruum, kui vektori $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ norm defineerida:

$$\|x\| = \sum_{k=1}^{n} |\xi_k|.$$

Selliselt normeeritud vektorruumi tähistatakse l_n.

Näiteid normeeritud ruumidest (ruum $C[a, b]$)

Olgu $C[a, b]$ kõigi lõigul $a \leqslant t \leqslant b$ pidevate funktsioonide hulk. Defineerime hulgas $C[a, b]$ liitmise ja skalaariga korrutamise tehted: kui $x = x(t)$ ja $y = y(t)$ on pidevad funktsioonid (seega hulga $C[a, b]$ elemendid), siis elementideks $x + y$ ja λx on funktsioonid

$$(x + y)(t) = x(t) + y(t), \quad (\lambda x)(t) = \lambda x(t).$$

Vektorruumi aksioomide 1° — 7° kontroll ei valmista raskusi. Nullelemendiks vektorruumis $C[a, b]$ on nullfunktsioon, s. t. funktsioon, mis võrdub samaselt nulliga.

Pideva funktsiooni normi defineerime kui funktsiooni absoluutväärtuse suurima väärtuse lõigul $[a, b]$:

$$\|x\| = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t)|.$$

Normi aksioomide kontroll on seekord päris lihtne. Ilmselt on $\|x\| = 0$ parajasti siis, kui $x(t)$ on nullfunktsioon — vektorruumi $C[a, b]$ nullelement. Seega on aksioom 1° rahuldatud. Aksioom 2° on kontrollitav vahetu arvutusega:

$$\|\lambda x\| = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |\lambda x(t)| = |\lambda| \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t)| = |\lambda| \, \|x\|.$$

Kolmnurga aksioomi (aksioomi 3°) kontrolliks paneme algul tähele, et iga fikseeritud t korral

$$|x(t) + y(t)| \leqslant |x(t)| + |y(t)| \leqslant \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t)| + \max_{a \leqslant t \leqslant b} |y(t)|.$$

Et see võrratus kehtib iga t korral, siis ka

$$\max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t) + y(t)| \leqslant \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t)| + \max_{a \leqslant t \leqslant b} |y(t)|.$$

See ongi kolmnurga võrratus $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Niisiis on $C[a, b]$ normeeritud ruum. Vaatleme, mida tähendab koondumine ruumis $C[a, b]$. Koondugu jada $x_n = x_n(t)$ normi järgi elemendiks $x = x(t)$:

$$\|x_n - x\| \to 0, \quad \text{ehk} \quad \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x_n(t) - x(t)| \to 0, \text{ kui } n \to \infty.$$

Lugeja, kes on kokku puutunud funktsioonide jada ühtlase koondumise mõistega, paneb tähele, et viimane tingimus tähendabki funktsioonide jada $x_n(t)$ ühtlast koondumist piirfunktsiooniks $x(t)$. Lugeja, kes selle mõistega kokku pole puutunud, võib viimast tingimust vaadelda kui ühtlase koondumise definitsiooni. Sõna «ühtlane» rõhutab siin asjaolu, et vahe $|x_n(t) - x(t)|$ saab (küllalt suurte n väärtuste korral) kuitahes väikeseks kõigi t väärtuste puhul korraga — koondumine $x_n(t) \to x(t)$ on ühtlane t suhtes.

Ülesanne 7. Näidata, et pidevate funktsioonide hulk on normeeritud ruum, kui defineerida

$$\|x\| = \int_a^b |x(t)|\, dt.$$

Seda normeeritud ruumi tähistame $\tilde{L}[a, b]$.

Täielikud meetrilised ruumid. Banachi ruum

Olgu E meetriline ruum. Jada $x_n \in E$ $(n = 1, 2, \ldots)$ nimetatakse Cauchy jadaks, kui $m, n \to \infty$ korral $\varrho(x_m, x_n) \to 0$. Teisiti öeldes, jada $x_n \in E$ on Cauchy jada, kui iga (kuitahes väikese) arvu $\varepsilon > 0$ jaoks leidub selline N_ε, et $m, n > N_\varepsilon$ korral

$$\varrho(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Olgu x_n koonduv jada, $x_n \to x$. Piirväärtuse definitsiooni kohaselt leidub iga $\varepsilon > 0$ jaoks selline N_ε, et $n > N_\varepsilon$ korral

$$\varrho(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Kui ka $m > N_\varepsilon$, siis muidugi ka

$$\varrho(x_m, x) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Kolmnurga võrratust kasutades leiame nüüd aga, et $m, n > N$ korral

$$\varrho(x_m, x_n) \leqslant \varrho(x_m, x) + \varrho(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

s. t. jada x_n on Cauchy jada.

Toodud arutlus näitab, et iga koonduv jada on Cauchy jada. Kui kehtib ka vastupidine, s. t. kui iga Cauchy jada koondub ruumi E mingiks elemendiks, siis öeldakse, et meetriline ruum E on *täielik*. Täielikku normeeritud ruumi nimetatakse lühidalt *Banachi ruumiks*. Selgituseks meenutame, et iga normeeritud ruum on ühtlasi ka meetriliseks ruumiks kauguse $\varrho(x, y) = \|x - y\|$ suhtes. Jada x_n on Cauchy jadaks normeeritud ruumis E, kui $m, n \to \infty$ korral $\|x_m - x_n\| \to 0$.

Matemaatilise analüüsi kursuses tõestatakse Bolzano-Cauchy teoreem, mille kohaselt arvjada ξ_n koondub mingiks reaalarvuks

ξ siis ja ainult siis, kui jada ξ_n on Cauchy jada, s. t. kui $m, n \to \infty$ korral $|\xi_m - \xi_n| \to 0$. Funktsionaalanalüüsi seisukohalt tähendab see teoreem, et meetriline ruum R_1 on täielik. (Meenutame, et elementide (reaalarvude) ξ ja η vaheliseks kauguseks ruumis R_1 on parajasti $\varrho(\xi, \eta) = |\xi - \eta|$.)

Ruum R_n on täielik ja seega Banachi ruum. Selles veendumiseks tuleb tähele panna, et Cauchy jada $x_m \in R_n$ $(m = 1, 2, \ldots)$ korral moodustavad selle jada k-ndad $(1 \leqslant k \leqslant n)$ komponendid Cauchy arvjada, mis Bolzano-Cauchy teoreemi põhjal on koonduv. Seega koondub vektorite jada x_m komponenditi mingiks vektoriks $x \in R_n$. Et aga koondumine ruumis R_n tähendaski komponenditi koondumist, siis $x_n \to x$ normi järgi, m. o. t. t.

Ülesanne 8. Näidata, et ruumid m_n ja l_n (vt. ülesandeid 5 ja 6) on täielikud.

Ruum $C[a, b]$ on samuti täielik ja seega Banachi ruum. Tõestus on esitatud järgmises punktis.

Esitame näite mittetäielikust meetrilisest ruumist. Olgu $\tilde{R}_1$ kõigi ratsionaalarvude hulk, milles kaugus on defineeritud samal viisil nagu ruumis R_1:

$$\varrho(\xi, \eta) = |\xi - \eta|.$$

Sellega muutsime $\tilde{R}_1$ meetriliseks ruumiks. Vaatleme jada $\xi_n \in \tilde{R}_1$, kus ξ_n on arvu π kümnendmurruline lähend n kohaga pärast koma:

$$\xi_1 = 3{,}1; \quad \xi_2 = 3{,}14; \quad \xi_3 = 3{,}141; \quad \xi_4 = 3{,}1415 \text{ jne.}$$

Arvjada ξ_n koondub arvuks π. Siit järeldame, et ξ_n on Cauchy jada ruumis $\tilde{R}_1$, sest $m, n \to \infty$ korral

$$|\xi_m - \xi_n| \leqslant |\xi_m - \pi| + |\pi - \xi_n| \to 0.$$

Kuid ruumis $\tilde{R}_1$ jada ξ_n ei koondu — irratsionaalarv π pole ruumi $\tilde{R}_1$ element! Järelikult ei ole meetriline ruum $\tilde{R}_1$ täielik.

Iga meetrilist ruumi on võimalik muuta täielikuks (ehk, nagu öeldakse, täielikustada), tuues sellesse ruumi juurde uusi elemente, nii et iga Cauchy jada muutuks koonduvaks. Näiteks, ratsionaalarvude ruumi $\tilde{R}_1$ täielikustamisel tuleb $\tilde{R}_1$-le lisada kõik irratsionaalarvud ja saadav täielik ruum ei ole midagi muud kui reaalarvude ruum R_1.

Teiseks näiteks mittetäielikust ruumist on ruum $\tilde{L}[a, b]$, mille defineerisime ülesandes 7. Selles veendumiseks tuleb lahendada järgmine ülesanne.

Ülesanne 9. Näidata, et jada

$$x_n(t) = \begin{cases} 0, \text{ kui } -1 \leqslant t \leqslant 0, \\ nt, \text{ kui } \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, \ldots) \\ 1, \text{ kui } \quad \frac{1}{n} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

on Cauchy jada ruumis $\tilde{L}[-1, 1]$, kuid ei koondu ruumi $\tilde{L}[-1, 1]$ elemendiks. Konstrueerida analoogiline näide ruumis $\tilde{L}[a, b]$ mistahes a, b korral.

Ruumi $\tilde{L}[a, b]$ täielikustamisel jõuame ruumini $L[a, b]$, mis koosneb Lebesgue'i mõttes integreeruvatest funktsioonidest (õigemini teatavatest funktsioonide klassidest). Norm ruumis $L[a, b]$ on taas defineeritud integraalina

$$\|x\| = \int_a^b |x(t)|\, dt,$$

ainult et seda integraali tuleb nüüd mõista Lebesgue'i mõttes. Meil ei ole võimalust siin anda lähemaid seletusi Lebesgue'i mõttes integreeruvate funktsioonide ja Lebesgue'i integraali kohta. Märgime vaid, et neid käsitletakse reaalmuutuja funktsioonide teoorias.

Toodud näide ruumist $\tilde{L}[a, b]$ illustreerib fakti, et kuigi iga meetrilist ruumi on võimalik täielikustada, võivad juurdevõetud elemendid igal konkreetsel juhul olla hoopis keerulisema ehitusega kui ruumi enda elemendid.

Ruumi $C[a, b]$ täielikkus

Normeeritud ruumi $C[a, b]$ elementideks olid lõigul $a \leqslant t \leqslant b$ pidevad funktsioonid ning funktsiooni $x = x(t)$ normiks oli

$$\|x\| = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t)|.$$

Vaatleme suvalist Cauchy jada $x_n = x_n(t)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ruumis $C[a, b]$ ja näitame, et see koondub ruumi $C[a, b]$ elemendiks, s. t. pidevaks funktsiooniks. Et jada $x_n(t)$ on Cauchy jada, siis leidub iga $\varepsilon > 0$ jaoks selline N_ε, et $m, n > N_\varepsilon$ korral

$$\|x_m - x_n\| = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x_m(t) - x_n(t)| < \varepsilon.$$

Siit näeme, et iga fikseeritud t korral on arvjada $x_n(t)$ Cauchy jada ja järelikult koondub mingiks piirväärtuseks. Et see piirväärtus võib erinevate t väärtuste korral olla erinev, siis on piirväärtuseks mingi funktsioon $x(t)$:

$$x_n(t) \to x(t) \text{ iga } t \ (a \leqslant t \leqslant b) \text{ korral.}$$

Me ei tea veel, kas esineb ka normi järgi koondumine (s. t. kas koondumine on ühtlane) ja kas piirfunktsioon kuulub ruumi $C[a, b]$ (s. t. kas $x(t)$ on pidev). Kui $m, n > N_\varepsilon$, siis

$$|x_m(t) - x_n(t)| < \varepsilon$$

iga t $(a \leqslant t \leqslant b)$ korral. Vaadeldes viimast võrratust iga fikseeritud t korral eraldi, võime temas minna üle piirile $m \to \infty$. Tulemuseks saame, et $n > N_\varepsilon$ ja iga t $(a \leqslant t \leqslant b)$ korral

$$|x(t) - x_n(t)| \leqslant \varepsilon'$$

ehk, teisiti öeldes, $n > N_\varepsilon$ korral

$$\max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t) - x_n(t)| \leqslant \varepsilon, \qquad (*)$$

s. t. koondumine $x_n(t) \to x(t)$ on ühtlane.

Näitame nüüd, et piirfunktsioon $x(t)$ on pidev igas punktis t_0 $(a \leqslant t_0 \leqslant b)$. Võrdusest

$$x(t) - x(t_0) = [x(t) - x_n(t)] + [x_n(t) - x_n(t_0)] + [x_n(t_0) - x(t_0)]$$

leiame, et

$$|x(t) - x(t_0)| \leqslant |x(t) - x_n(t)| + |x_n(t) - x_n(t_0)| + |x_n(t_0) - x(t_0)|.$$

Kui $n > N_\varepsilon$, siis on esimene ja kolmas liidetav viimase võrratuse paremal poolel tingimuse (*) tõttu $\leqslant \varepsilon$. Fikseerimegi n nii, et $n > N_\varepsilon$. Teise liidetava võrratuse paremal poolel saame teha väiksemaks kui ε tänu funktsiooni $x_n(t)$ pidevusele, kui võtame t küllalt lähedal t_0-le, s. t. kui $|t - t_0| < \delta$, kus $\delta > 0$ on küllalt väike arv (ta võib sõltuda ε-st). Kokkuvõttes, $|t - t_0| < \delta$ korral

$$|x(t) - x(t_0)| < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon.$$

Arv $\varepsilon > 0$ oli meie arutlustes kuitahes väike ning viimane võrratus tähendabki, et funktsioon $x(t)$ on pidev punktis t_0. Et aga t_0 $(a \leqslant t_0 \leqslant b)$ oli suvaline, siis on funktsioon $x(t)$ pidev kogu lõigul $a \leqslant t \leqslant b$.

Sellega oleme näidanud, et iga Cauchy jada $x_n(t)$ ruumis $C[a, b]$ koondub normi järgi ruumi $C[a, b]$ mingiks elemendiks $x(t)$. Järelikult on ruum $C[a, b]$ täielik, s. t. $C[a, b]$ on Banachi ruum.

Hulgad meetrilises ruumis

Olgu E meetriline ruum. *Lahtiseks keraks* keskpunktiga $x_0 \in E$ ja raadiusega r nimetatakse selliste elementide $x \in E$ hulka, mille korral $\varrho(x, x_0) < r$. *Kinniseks keraks* keskpunktiga $x_0 \in E$ ja raadiusega r nimetatakse selliste elementide hulka, mille korral $\varrho(x, x_0) \leqslant r$. Neid hulki (kerasid) tähistame vastavalt $S(x_0, r)$ ja $\overline{S}(x_0, r)$. Esitatud definitsioonid võib lühidalt kirja panna:

$$S(x_0, r) = \{x \in E : \varrho(x, x_0) < r\},$$

$$\overline{S}(x_0, r) = \{x \in E : \varrho(x, x_0) \leqslant r\}.$$

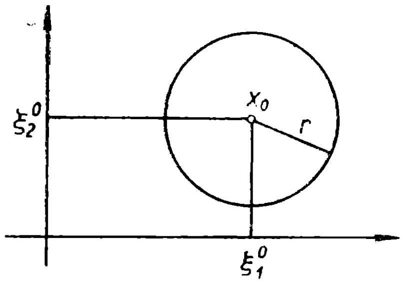
Juhul kui E on normeeritud ruum,

$$S(x_0, r) = \{x \in E : \|x - x_0\| < r\},$$

$$\overline{S}(x_0, r) = \{x \in E : \|x - x_0\| \leqslant r\}.$$

Pöördume näidete juurde. Ruumi R_1 lahtiseks keraks keskpunktiga $x_0 \in R_1$ ja raadiusega r on vahemik $(x_0 - r, x_0 + r)$,

s. t. nende reaalarvude x hulk, mille puhul $|x - x_0| < r$. Kinniseks keraks sama keskpunkti ja raadiusega on lõik $[x_0 - r, x_0 + r]$, s. t. nende reaalarvude hulk, mille puhul $|x - x_0| \leqslant r$.

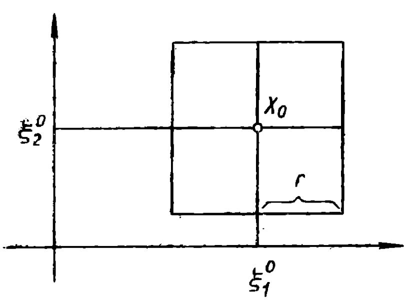


Joonis 7.

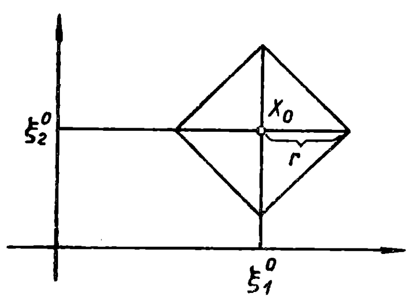
Kerad $S(x_0, r)$ ja $\bar{S}(x_0, r)$ ruumis R_2 on ringid keskpunktiga $x_0 = (\xi_1^0, \xi_2^0)$ ja raadiusega r (vt. joon. 7), kusjuures seda ringi ümbritsev ringjoon kerasse $S(x_0, r)$ ei kuulu, küll aga kuulub kerasse $\bar{S}(x_0, r)$.

Ruumi R_3 korral on $S(x_0, r)$ ja $\bar{S}(x_0, r)$ kerad selle sõna geomeetrilises mõttes. Kera keskpunktiks on $x_0 = (\xi_1^0, \xi_2^0, \xi_3^0)$ ja raadiuseks r, kusjuures kera ümbritsev kerapind (sfäär) kerasse $S(x_0, r)$ ei kuulu, küll aga kuulub kerasse $\bar{S}(x_0, r)$.

Ülesanne 10. Näidata, et ruumide m_2 ja l_2 keradeks keskpunktiga $x_0 = (\xi_1^0, \xi_2^0)$ ja raadiusega r on vastavalt joonistel 8 ja 9 kujutatud ruudud.



Joonis 8.



Joonis 9.

Ülesanne 11. Keraks ruumis m_3 on kuup, ruumis l_3 aga korrapärane oktaeeder. Teha joonised!

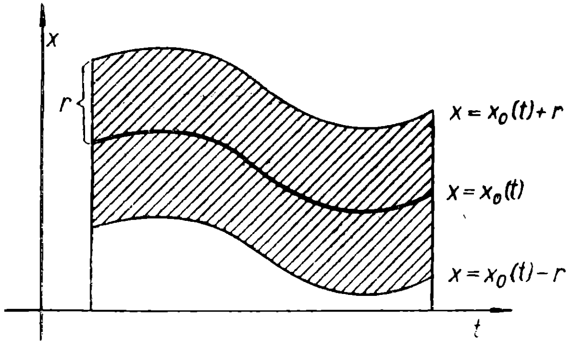
Anname geomeetrilise tõlgenduse keradele $S(x_0, r)$ ja $\bar{S}(x_0, r)$

ka ruumis $C[a, b]$. Kera keskpunktiks x_0 on funktsioon $x_0 = x_0(t)$, kera ise aga koosneb sellistest funktsioonidest $x = x(t)$, et

$$S(x_0, r) \text{ korral } \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t) - x_0(t)| < r,$$

$$\overline{S}(x_0, r) \text{ korral } \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t) - x_0(t)| \leqslant r.$$

Joonistame funktsiooni $x_0(t)$ graafiku ja nihutame seda graafikut x-telje suunas üles ja alla r ühiku võrra. Nihutatud graafikud koos sirgetega $t = a$ ja $t = b$ moodustavad vöötme, mis joonisel 10 on viirutatud. Kera $S(x_0, r)$ koosneb sellistest pidevatest funkt-



Joonis 10.

sioonidest, mille graafikud paiknevad viirutatud vöötmes rangelt kõverate $x = x_0(t) - r$ ja $x = x_0(t) + r$ vahel. Kera $\overline{S}(x_0, r)$ koosneb sellistest pidevatest funktsioonidest, mille graafikud paiknevad samuti viirutatud vöötmes, kuid võivad omada ühiseid punkte kõverategа $x = x_0(t) - r$ ja $x = x_0(t) + r$.

Defineerime kinniste ja lahtiste hulkade mõisted mistahes meetrilises ruumis E ja näitame, et kinnine kera on kinnine hulk, lahtine kera aga lahtine hulk.

Hulka $F \subset E$ nimetatakse *kinniseks*, kui iga koonduva jada $x_n \in F$ $(n = 1, 2 \ldots)$ piirväärtus kuulub ka hulka F. Hulka $G \subset E$ nimetatakse *lahtiseks*, kui ta koos iga oma punktiga $x \in G$ sisaldab ka teatava (küllalt väikese) kera $S(x, \delta)$; kera raadius $\delta > 0$ võib sõltuda x-st. Saab näidata (tõestusel me ei peatu), et hulk F on kinnine siis ja ainult siis, kui tema täiendhulk $G = E \setminus F$ on lahtine. Leidub hulki, mis pole ei kinnised ega lahtised.

Veendume, et $\overline{S}(x_0, r)$ on kinnine hulk. Olgu jada $x_n \in \overline{S}(x_0, r)$ koonduv: $x_n \to x$. Kauguse pidevuse tõttu

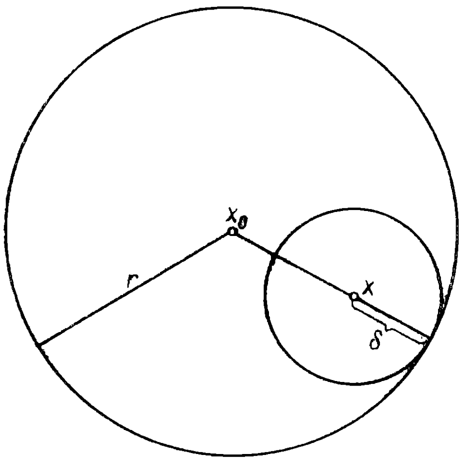
$$\varrho(x_n, x_0) \to \varrho(x, x_0),$$

et aga $\varrho(x_n, x_0) \leqslant r$ (sest $x_n \in \overline{S}(x_0, r)$!), siis ka $\varrho(x, x_0) \leqslant r$, s. t. $x \in \overline{S}(x_0, r)$, mis tõestabki hulga $\overline{S}(x_0, r)$ kinnisuse.

Veendume, et $S(x_0, r)$ on lahtine hulk. Võtame mistahes punkti $x \in S(x_0, r)$. Siis $\varrho(x, x_0) < r$. Tähistame $\delta = r - \varrho(x, x_0)$ ja näitame, et $S(x, \delta) \subset S(x_0, r)$. Tõepoolest, kui $y \in S(x, \delta)$, s. t. kui $\varrho(y, x) < \delta$, siis kolmnurga võrratuse tõttu

$$\varrho(y, x_0) \leqslant \varrho(y, x) + \varrho(x, x_0) < \delta + (r - \delta) = r$$

ehk $y \in S(x_0, r)$. Niisiis sisaldab hulk $S(x_0, r)$ koos iga oma



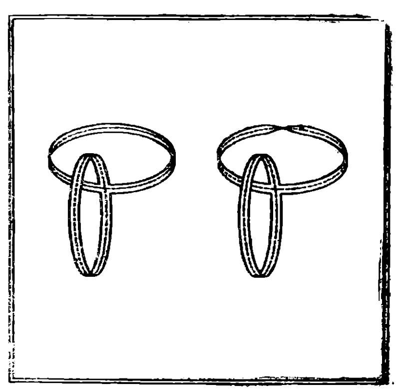
Joonis 11.

punktiga $x \in S(x_0, r)$ kera $S(x, \delta)$, kus $\delta = r - \varrho(x, x_0) > 0$, s. t. $S(x_0, r)$ on lahtine hulk, m. o. t. t. Kera $S(x, \delta)$ konstruktsioon ruumi R_2 puhul on illustreeritud joonisel 11.

(Järgneb)

VIGURIGA ÜLESANDEID

Järgnevad ülesanded (vt. samuti lk. 26, 35, 46, 95, 109) on küll enam või vähem matemaatilised, kuid kõik väikese viguriga, mis tavaliselt seisneb selles, et lahendamine osutub üsna lihtsaks. (Ülesanded pärinevad M. Gardnerilt, ajakirja *Scientific American* 1968. a. augustinumbrist.) Lahendused vt. lk. 140.



1. Kõrval oleval joonisel on kujutatud kaks paberist konstruktsiooni, milles mõlemad rõngad on sama pikkusega ning ühelaiused. Teine konstruktsioon erineb esimesest vaid selle poolest, et ühel rõngal on pool keerdu sees. Kui esimene konstruktsioon piki punktiirjoont katki lõigata, siis osutub tulemuseks joonist ümbritsev ruut. Mis me saame teise konstruktsiooni analoogilisel katkilõikamisel?

GEOMEETRILISEST MEETODIST DIOFANTILISES ANALÜÜSIS[1]

U. Kaljulaid

III. ALGEBRALISTE KÕVERATE KLASSIFIKATSIOON

Õpilane: «Ma ei saa teist päris hästi aru.»
Mefistofeles: «See läheb teil varsti tunduvalt paremini, kui õpite kõike redutseerima ja klassifitseerima, nagu peab.»

Goethe «Faust».

8. **Algebralise kõvera liik.** Olgu antud mingi taandumatu algebraline kõver Γ. Kõvera iga punktiga $P_i \in \Gamma$ me sidusime naturaalarvu $r_i \geqslant 1$ (vt. punkt 6), selle punkti kordsuse. Kui kõvera Γ järk on n, siis nägime, et kehtib võrratus

$$\sum_{P_i \in \Gamma} (r_i - 1) r_i \leqslant (n-1)(n-2).$$

Iga algebralise kõveraga on seotud teatav mittenegatiivne täisarv g — kõvera liik e. žanr, mille lihtsamail juhtudel võime leida valemist[2]

$$g = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \frac{\sum_{P_i \in \Gamma} r_i (r_i - 1)}{2}.$$

Eespool nägime, et juhul $K = C$ on iga projektiivse algebralise kõveraga seotud kompaktne Riemanni pind. Iga selline pind on aga topoloogiliselt samaväärne «sangadega sfääriga» ja seega määrab sellise pinna topoloogilise ehituse ainus täisarvuline invariant — «sangade arv», s. o. pinna liik e. žanr. Algebralise kõvera liik erijuhul $K = C$ (s. o. kui kõvera defineerimiskorpuseks on kompleksarvude vald C) polegi midagi muud kui talle vastava Riemanni pinna liik.[3]

---

[1] Artikli algus vt. Matemaatika ja kaasaeg, XIV, lk. 22—30 ja XV, lk. 3—13.

[2] Iga projektiivse algebralise kõvera saab biratsionaalse teisendusega viia tasandiliseks kõveraks, millel on vaid tavalised 2-kordsed iseärasused (ilma kordsete puutujateta neis punktides), ja kuna liik g on biratsionaalne invariant, siis on antud arvutusvalem universaalne (sest me saame igas biratsionaalse ekvivalentsi klassis mingi kõvera liigi g leida selle valemi järgi).

[3] Ü. Lumiste. Riemann topoloogia ja üldise kõvera ruumi geomeetria loojana. — Matemaatika ja kaasaeg, XI, lk. 65—76.

Kui vaatleme algebralisi kõveraid üle arvude korpuste, siis ei määra kõvera liik mitte ainult kõigi algebraliste punktide hulga struktuuri kõveral, vaid määrab suuresti ka tema Q-punktide ja z-punktide hulga struktuuri (vt. edaspidi Mordell-Weyli teoreemi). Diofantiliste ülesannete seisukohalt on seepärast tähelepanuväärt asjaolu, et kõvera liik g osutub biratsionaalseks invariandiks, olles võrdne samasse biratsionaalsuse klassi kuuluvail kõverail. See annab võimaluse kõverate klassifikatsiooniks ja seega ka vastavate diofantiliste ülesannete klassifikatsiooniks.

9. Klassifikatsioonist. Kõveraid liiki $g = 0$ nimetame ratsionaalseiks. Et ilma iseäraste punktideta n-järku tasandilise kõvera liik g leitakse valemist

$$g = \frac{1}{2}(n-1)(n-2),$$

siis näeme, et esimest järku kõverad (s. o. sirged) ja teist järku kõverad on ratsionaalsed. Teiselt poolt — D. Hilbert ja A. Hurwitz näitasid 1890. aastal, et iga ratsionaalne kõver on isomorfne tasandilise teist järku kõveraga $a_0x_0^2 + a_1x_1^2 + a_2x_2^2 = 0$. Vastav isomorfism saavutatakse muutujate biratsionaalse asendusega, kusjuures seda asendust määravad kordajad kuuluvad selle kõvera defineerimiskorpusesse K. Lähemalt tutvume selliste kõveratega järgmises punktis.

Kõveraid liiki $g = 1$ nimetatakse elliptilisteks kõverateks; nad on biratsionaalselt ekvivalentsed ilma iseäraste punktideta kuupkõveratega. Me näeme siit[4], et kui elliptilisel kõveral on ratsionaalpunkt, siis on ta biratsionaalselt ekvivalentne kõveraga, mille võrrandiks on $y^2 = x^3 + Ax + B$. Oma nimetuse on elliptilised kõverad saanud sellest, et juhul $K = C$ on neid võimalik elliptiliste funktsioonidega parametriseerida.[5]

Põhikorpuse $K = C$ korral vastab elliptilisele kõverale kompaktne Riemanni pind liiki $g = 1$, s. o. rõngaspind e. toor. Et rõngaspind topoloogiliselt on kahe ringjoone otsekorrutis, siis saab temal defineerida kommutatiivse kompaktse Lie' rühma struktuuri. Kui elliptilisel kõveral on ratsionaalpunkt, siis saab selle punkti vastaval Riemanni pinnal võtta sellise Lie' rühma struktuuri nullelemendiks, mille kompositsioon avaldub algebraliste funktsioonidena punktide koordinaatidest. Kompaktne kompleksne Lie' rühm, mis on samal ajal ka algebraline muutkond ja mille kompositsioon antakse algebraliste funktsioonidega, kannab Abeli muutkonna nime. Seega: kui elliptilisel kõveral leidub ratsionaalpunkt, siis on see kõver ühedimensionaalne Abeli muutkond. Rea fundamentaalsete tulemuste põhjal jõudis A. Weyl

---

[4] Vt. teoreemi punktist 7. (Matemaatika ja kaasaeg, XV).

[5] Vt. A. Картан. Элементарная теория аналитических функций одного и нескольких комплексных переменных. М., 1963, lk. 261.

arvamusele, et iga edusamm elliptiliste kõverate valdkonnas toob kaasa suure edasimineku üldiste Abeli muutkondade teoorias. Seepärast on selge, miks sellele kõverate klassile omistatakse algebralises geomeetrias kõige rohkem tähelepanu.

Kõveraid, mille liik $g > 1$, nimetame mitteelliptilisteks [6]. Käesoleva sajandi algul püstitati diofantilises geomeetrias hüpotees: mitteelliptilistel kõveratel on üle arvude korpuste vaid lõplik arv ratsionaalpunkte. Vaatamata paljude matemaatikute jõupingutustele pole vastavat teoreemi siiani õnnestunud tõestada. J. I. Manin näitas, et selle küsimuse lahendamisele taandub ka üldistatud Mordelli hüpoteesi tõestus.[7] Lähem tutvumine selliste kõveratega pole siin võimalik, sest see valdkond on seni üpris raskesti uuritav ja siin puudub rahuldav teooria.

10. Ratsionaalsed kõverad. Kõveraid, mille liik $g = 0$, nimetasime ratsionaalseiks. Et n-järku kõvera Γ liik avaldub valemiga

$$g = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \frac{\sum\limits_{P_i \in \Gamma} r_i(r_i - 1)}{2},$$

siis on n-järku kõvera ratsionaalsuse kriteeriumiks võrdus

$$\sum_{P_i \in \Gamma} r_i(r_i - 1) = (n-1)(n-2).$$

Lihtsaimaks kõveraks on sirge $y = 1$. Ratsionaalfunktsioonide korpuseks sellel kõveral on korpus $K(x, 1) = K(x)$. Eelmises punktis me nägime, et sirged on ratsionaalsed kõverad. See annab meile otsekohe järgmise ratsionaalsuse tarviliku tingimuse.

Et mingi kõver ratsionaalfunktsioonide korpusega $K(x, y)$ oleks ratsionaalne, peab leiduma selline funktsioon $\varphi \in K(x, y)$, mille kaudu x ja y avalduvad ratsionaalselt üle korpuse [8] K.

Et illustreerida selle tingimuse rakendamist, tõestame, et kompleksel projektiivsel tasandil P_2 (C) on kõver

$$x_0^{2/3} + x_1^{2/3} + x_2^{2/3} = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

ratsionaalne.

---

[6] Nälteks on kõverad $p(x)y^2 + q(x) = 0$, kus $\deg p(x) = g$, $\deg q(x) = g + 2$ ja võrrandil $p(x) \cdot q(x) = 0$ pole kordseid lahendeid. Selline kõver on $(g+2)$-järku ja tema ainsa iseärase punkti kordsus on g. Seepärast punktis 8 toodud valemi kohaselt

$$(\text{kõvera liik}) = \frac{(g+2-1)(g+2-2)}{2} -$$

$$- \frac{g(g-1)}{2} = \frac{g(g+1)}{2} - \frac{g(g-1)}{2} = g.$$

[7] Vt. ka Matemaatika ja kaasaeg, XIV, lk. 108—110.

[8] See tingimus osutub ka piisavaks.

Selleks märgime, et väärtustus $x_0 = i$, $x_1 = \sin^3 \alpha$, $x_2 = \cos^3 \alpha$ rahuldab võrrandit (1). Võttes $t = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$ leiame

$1 + t^2 = \frac{2}{\sin\alpha}\cdot\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{2}{\sin\alpha}\cdot t$, millest

$$\sin\alpha = \frac{1+t^2}{2t}, \quad \cos\alpha = \frac{i(1-t^2)}{2t}.$$

Leiame, et $x_0 = i$, $x_1 = \frac{(1+t^2)^3}{8t^3}$, $x_2 = \frac{i^3(1-t^2)^3}{8t^3}$;

seega võime võtta

$$cx_0 = -8t^3, \quad cx_1 = i(1+t^2)^3, \quad cx_2 = (1-t^2)^3, \tag{2}$$

kus $0 \neq c \in C$.

Teiselt poolt, kuna $-icx_1 + cx_2 = 2 + 6t^4$ ja $6t^4 = \frac{3t}{4}(8t^3) = = \frac{3t}{4}(cx_0)$, saame

$$t = -\frac{4i}{3}\left(\frac{x_1}{x_0}\right) + \frac{4}{3}\left(\frac{x_2}{x_0}\right) - \frac{8i}{3c} \in C\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right), \quad c \in C. \tag{3}$$

Seosed (2) ja (3) lubavad rakendada toodud ratsionaalsusetingimust, millest näeme, et kõver (1) on ratsionaalne.

Anname nüüd vastuse punktis 4 esitatud küsimusele ruutkõverate puhul.

T e o r e e m. Kui teist järku kõveral on ratsionaalpunkt, siis on tal selliseid punkte (lõpmatu korpuse K korral) lõpmata palju.

Olgu meil antud teist järku kõver Γ võrrandiga $f(x, y) = 0$ ning olgu tal ratsionaalpunkt $Q = (x_0, y_0) \in \Gamma$. Vaatleme sirgeid läbi selle punkti:

$$x - x_0 = t(y - y_0).$$

Leiame kõvera Γ lõikepunktid sellise sirgega. Selleks on meil vaja lahendada järgmine ruutvõrrand y suhtes:

$$f(x_0 + t(y - y_0), y) = 0.$$

Selle võrrandi üks lahend $y = y_0$ on aga meile teada. Teine lahend y avaldub Viëta valemite põhjal y_0 ja ruutpolünoomi f kordajate kaudu, s. o. ta avaldub ratsionaalselt x_0, t, y_0 ja korpuse K elementide kaudu. Teiste sõnadega, et $x_0, y_0 \in K$, siis y avaldub ratsionaalselt t kaudu. Siis aga $x = x_0 + t(y - y_0)$ avaldub samuti ratsionaalselt t kaudu. Toodud arutlused näitavad, et punkti Q läbivate «ratsionaalsete» sirgete ($t \in K$) lõikepunktid kõveraga Γ osutuvad ratsionaalpunktideks. Teoreem on tõestatud.

Kui $K = Q$, siis on ratsionaalpunkti olemasolu teist järku kõveral kontrollitav efektiivse arvutusprotsessiga (selle annab

Minkowski-Hasse teoreem). Seega on ruutkõverate aritmeetika küsimus lahendatud.

11. Elliptilised kõverad. Tutvume algul elliptiliste kõverate biratsionaalse klassifikatsiooniga.

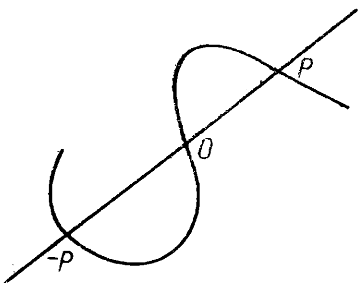
Kui põhikorpus K on algebraliselt kinnine, siis on iga elliptiline kõver üle K biratsionaalselt ekvivalentne kõveraga nn. «Weierstrassi normaalkujul»:

$$y^2 = x^3 + ax + b, \qquad a, b \in K.$$

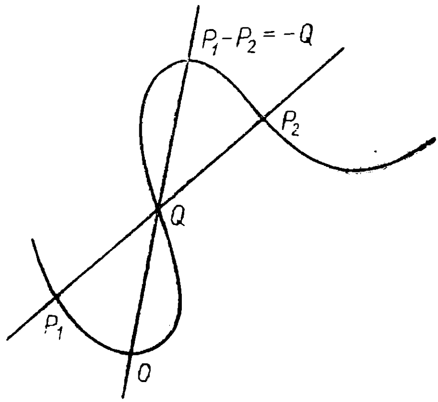
Kaks kõverat selliste võrranditega on omakorda biratsionaalselt ekvivalentsed parajasti siis, kui ühtivad nende absoluutsed invariandid j, kusjuures absoluutne invariant j leitakse valemist

$$j = \frac{4a^3}{4a^3 + 27b^2}; \qquad j \in K.$$

Juhul kui põhikorpus K pole algebraliselt kinnine, nõuab klassifikatsioon keerulise tehnilise aparaadi kasutamist. Kui elliptilisel kõveral Γ leidub K-ratsionaalne punkt [9], siis saame tema ratsionaalpunktide hulgale, mida me tähistame $G(\Gamma, K) = G$,



Joonis 9.



Joonis 10.

seada vastavusse aditiivse Abeli rühma struktuuri nullelemendiga punktis O. Teeme seda järgnevalt (vt. joonis 9). Rühma G nulliks loeme punkti O. Antud punkti P vastandpunktiks loeme punkte O ja P läbiva sirge ning kõvera Γ kolmandat lõikepunkti — P. Olgu nüüd kõveral antud kaks ratsionaalpunkti P_1 ja P_2 (vt. joon. 10). Paneme läbi nende punktide lõikaja ning leiame saadud kolmanda lõikepunkti Q jaoks vastandpunkti $-Q$. Defineerime

[9] Juhul kui K on lõplik korpus, on selline punkt alati olemas (F. K. Schmidti teoreem). Üldjuhul võib sellise punkti olemasolu küsimus osutuda küllalt tõsiseks ülesandeks.

$-Q = P_1 + P_2$. Kui $P_1 \equiv P_2$, siis võtame lõikaja asemel kõvera Γ puutuja punktis $P_1 \equiv P_2$. On võimalik tõestada, et sel viisil defineeritud punktide liitmise suhtes moodustab ratsionaalpunktide hulk $G = G(\Gamma, K)$ aditiivse Abeli rühma.[10] See rühm osutub biratsionaalseks invariandiks, s. t. ühte biratsionaalsuse klassi kuuluvate elliptiliste kõverate ratsionaalpunktide rühmad on isomorfsed. See asjaolu võimaldab meil anda rühmast G hoopis parema ettekujutuse. Tõepoolest, et rühm $G(\Gamma, K)$ on biratsionaalne invariant, siis lubab käesoleva punkti algul toodud tulemus meil elliptilise kõvera Γ asendada kõveraga Γ' normaalkujul:

$$\Gamma' : y^2 = x^3 + ax + b.$$

Minnes üle homogeenseile koordinaatidele $\frac{\xi_1}{\xi_0} = x$, $\frac{\xi_2}{\xi_0} = y$ $\infty = (0, 0, 1)$ saame kõvera Γ' võrrandiks

$$\xi_0 \xi_2^2 = \xi_1^3 + a \cdot \xi_0^2 \xi_1 + b\xi_0^3.$$

Ilmselt $\infty \in \Gamma'$. Loeme $\infty \equiv 0$, s. o. lõpmatusepunkti ∞ võtame rühma $G(\Gamma', K)$ nullelemendiks. Et $G(\Gamma', K) \approx G(\Gamma, K)$ (rühmad on isomorfsed), siis saame rühma $G(\Gamma, K)$ jaoks järgmised struktuurivalemid.

Kui $P = (x, y)$, siis $-P = (x, -y)$.

Kui $P_1 = (x_1, y_1)$ ja $P_2 = (x_2, y_2)$, siis $P_1 + P_2 = P_3 = (x_3, y_3) =$

$$= \left(-(x_1 + x_2) + \left(\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \right)^2, \; y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x_3 - x_1) \right).$$

Vaatleme elliptilisi kõveraid üle ratsionaalarvude korpuse, s. t. erijuhtu $K = Q$. H. Poincaré püstitas 1901. a. hüpoteesi, et sellel rühmal on lõplik arv moodustajaid. Väide leidis kinnitust — 1922. a. andis L. J. Mordell sellele tõestuse. Kuus aastat hiljem õnnestus A. Weylil seda teoreemi üldistada juhule, kus korpuseks on suvaline algebraliste arvude korpus.[11] Sellel teoreemil, mida nimetatakse Mordell-Weyli teoreemiks, on rida tähtsaid rakendusi diofantilises geomeetrias. Talle on leitud mitmeid tõestusi, kuid kõik nad on mitteefektiivsed, s. o. annavad vaid rühma G

---

[10] Hulgal G võib defineerida binaarse algebralise operatsiooni «O» valemiga $P_1 \circ P_2 = Q$. See kompositsioon pole assotsiatiivne, kuid rahuldab samasusi

$$P_1 \circ P_2 = P_2 \circ P_1 \text{ ja } P_1 \circ (P_1 \circ P_2) = P_2.$$

R. H. Bruck ja V. D. Beloussov nimetavad seda süsteemi TS-kvaasirühmaks. See algebraline objekt võimaldas hiljuti J. I. Maninil realiseerida huvitava geomeetrilise idee ja leida olulise üldistuse klassikalise diofantilise geomeetria vastavatele tulemustele. Vt. art. Ю. И. Манин. Кубические гиперповерхности I, Изв. АН СССР (сер. мат.), т. 32, № 6, 1968.

[11] ... ja analoogiline teoreem tõestada ka mitmemõõtmeliste Abeli muutkondade jaoks.

moodustajate arvu jaoks mingi ülemise tõkke ega anna meetodit moodustajate tegelikuks leidmiseks. Seepärast jääb enamikul juhtudel rühma $G(\Gamma, K)$ ehitus meile teadmata. Siiski, rühma $G(\Gamma, Q)$ lõplikku järku elementide (s. o. punktide $P, nP = 0$, $n \in Z$) leidmiseks andis T. Nagell 1935. aastal järgmise meetodi.

Elliptiline kõver Γ tuleb esitada normaalkujul

$$y^2 = x^3 - Ax - B, \qquad A, B \in Z.$$

Siis peavad kõvera Γ lõplikku järku ratsionaalpunktidel (s. o. lõplikku järku Q-punktid) olema täisarvulised koordinaadid x ja y; sealjuures, kas $y^2 = 0$ või y^2 on arvu $4A^3 - 27B^2$ täisarvuliseks jagajaks.

Nagelli tulemus näitab, et kõik lõplikku järku Q-punktid on leitavad nende kõikvõimalike väärtuste hulgast, mille määrab koordinaat y, kontrollides selle hulga kõik punktid. Inglise matemaatikud B. J. Birch ja H. P. F. Swinnerton-Dyer leidsid hiljuti terve hulga suure tõeväärsusega hüpoteese elliptilise kõvera lõpmatut järku Q-punktide hulga ehituse kohta.[10] Need hüpoteesid põhinevad empiirilisel materjalil, mille saamiseks nad kasutasid oluliselt elektronarvutite abi, sest väidete tõeväärsuse kontrolliks tuli teha hulk suuremahulisi arvutusi.

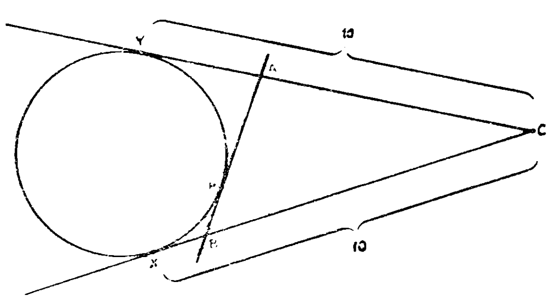
Vaatamata esitatud materjali fragmentaarsusele julgeb autor loota, et lugeja sai siiski mõningat uut kinnitust Lagrange'i sõnadele:

«Kuni algebra ja geomeetria arenesid omaette, oli nende edasiminek aeglane ja rakendused piiratud. Sõbrunedes said nad teineteiselt uut elujõudu ja liiguvad nüüd hoopis kiiremalt edasise täiustumise suunas».

---

[10] Vt. art. П. Свиннертон-Дайер. Гипотезы Бэрга и Свиннертон-Дайера и гипотезы Тэйга, Математика 13: 5, 1969.

VIGURIGA ÜLESANDEID



2. Ringjoonele on punktist C tõmmatud kaks puutujat, mille lõigud CX ja CY on muidugi võrdsed. Olgu nende lõikude pikkused 10 ühikut (vt. joonis). Ringjoonel on X ja Y vahel juhuslikult valitud punkt P, läbi mille on seejärel tõmmatud puutuja AB. Leida kolmnurga ABC ümbermõõt.

Majandusmatemaatika

LIIGSETE KITSENDUSTEGA LINEAARSED PLANEERIMISÜLESANDED

M. Pedak

Paljud praktikast pärinevad planeerimisülesanded taanduvad nn. lineaarsetele planeerimisülesannetele [1], milles nõutakse sihifunktsiooni

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \tag{1}$$

maksimiseerimist kitsendustel

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{n1}x_n \leqslant b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{n2}x_n \leqslant b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leqslant b_m, \end{array} \tag{2}$$

ja

$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0, \dots,\ x_n \geqslant 0. \tag{3}$$

Kitsendusi (2) ja (3) rahuldavaid vektoreid $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nimetatakse planeerimisülesande l u b a t a v a t e k s l a h e n d i t e k s, kõigi niisuguste vektorite hulka aga lubatavate lahendite piirkonnaks (või lihtsalt l u b a t a v a k s p i i r k o n n a k s).

Planeerimisülesande formuleerimisel võetakse mudelisse sageli palju kitsendusi. Mõned nendest kitsendustest võivad aga osutuda mittevajalikeks ja nende mudelisse võtmine suurendab asjatult arvutustööde mahtu ülesande lahendamisel. Seega oleks lahenduskäigu lihtsustamiseks mõistlik kõigepealt kõrvaldada liigsed kitsendused.

Liigseid kitsendusi on põhimõtteliselt kahte tüüpi. Esiteks võib juhtuda, et mõni kitsendus tegelikult ei kitsendagi lubatavate lahendite piirkonda, s. t. selle kitsenduse ärajätmisel ei muutu lubatav piirkond. Selliseid kitsendusi nimetatakse t r i v i a a l s e t e k s. Teiseks võib ülesandes esineda kitsendusi, mis küll kitsendavad lubatavat piirkonda, kuid ei muuda optimaalset lahendit. Mõlemat tüüpi liigsete kitsenduste äratundmiseks on esitatud mitmeid nii täpseid kui ka ligikaudseid meetodeid, kuid kahjuks osutub enamus neist üsna töömahukaiks.

[1] Vt. näit. Ü. K a a s i k. Lineaarsed planeerimisülesanded. — Matemaatika ja kaasaeg, II, lk. 31—46 või raamatut Ü. K a a s i k. Matemaatiline planeerimine. Tallinn, 1967.

Kui liigsete kitsenduste kõrvaldamiseks kasutatakse mingit ligikaudset meetodit ja on leitud väiksema kitsenduste arvuga ülesande optimaalne lahend, siis tuleb veel kontrollida, kas ülesandest kõrvaldatud kitsendused on rahuldatud. Jaataval juhul osutub saadud lahend ka lähteülesande optimaalseks lahendiks, eitaval juhul tuleb aga vastav kitsendus ülesandesse tagasi tuua ja lahendamist uuesti alustada.

Planeerimisülesannete mõõtmete vähendamise meetodeid saab ühendada ka nende ülesannete põhilise lahendusmeetodiga — simpleksmeetodiga.[1] See võib toimuda näiteks nii, et pärast iga simplekssammu kontrollitakse kitsendusi ja kui mõni neist osutub liigseks, siis kõrvaldatakse ta ülesandest.

Järgnevas kirjeldame ühte täpset meetodit (Booti meetod) ja ühte ligikaudset meetodit (Radzikowski meetod) liigsete kitsenduste kõrvaldamiseks.

Triviaalsed kitsendused

Tähistame vektorid

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad c = (c_1, c_2, \ldots, c_n),$$
$$a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}), \qquad b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$$

ja vektorite skalaarkorrutise

$$cx = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n.$$

Siis võime sihifunktsiooni (1), kitsendused (2) ning mittenegatiivsuse nõuded (3) kirjutada kujul

$$z = cx,$$
$$a_ix \leqslant b_i \ (i = 1, 2, \ldots, m),$$
$$x \geqslant 0.$$

Ilmselt osutub planeerimisülesande kitsendus liigseks siis, kui kõigi ülejäänud kitsenduste täidetuse korral on see kitsendus ammugi täidetud. Seda mõtet saab formuleerida järgmise definitsioonina.

Kitsendust

$$a_1x \leqslant b_1 \tag{4}$$

nimetatakse triviaalseks, kui iga $x \geqslant 0$, *mis rahuldab ülesande ülejäänud kitsendusi*

$$a_ix \leqslant b_i \qquad (i = 2, \ldots, m), \tag{5}$$

rahuldab ka kitsendust (4).

Kitsenduste triviaalsust on lihtne selgitada, kui tundmatute arv $n = 2$ ning lubatava piirkonna esitamisel kasutada graafilist meetodit.[2] Olgu näiteks lubatavate lahendite piirkonnaks joonisel 1 viirutatud piirkond. Siis on mittetriviaalseteks kitsendusteks kitsendused 1 ja 4, triviaalseteks osutuvad aga kit-

[2] Vt. näit. P. Hanko jt. Täiendavaid teemasid koolimatemaatikale. Tallinn, 1967, lk. 58—132.

sendused 2 ja 3, sest nende ärajätmine ei muuda lubatavate lahendite piirkonda.

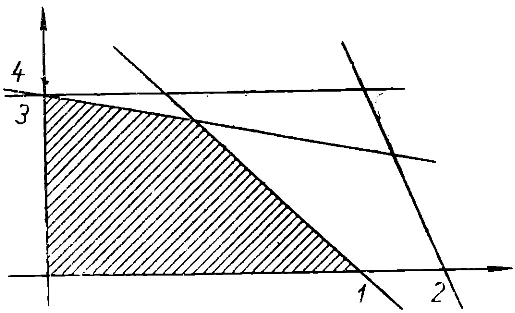
Triviaalsete kitsenduste kindlakstegemisel saab kasutada järgmist tulemust.

Lemma 1. *Kitsendus (4) on triviaalne parajasti siis, kui ei leidu ühtki vektorit $x \geqslant 0$ nii, et kehtiksid võrratused*

$$a_1 x > b_1 \quad \text{ja} \quad a_i x \leqslant b_i \qquad (i = 2, \ldots, m). \tag{6}$$

Lemma tõestus on päris lihtne. Oletame, et kitsendus (4) on triviaalne. Siis rahuldab võrrandisüsteemi (5) iga mittenegatiivne lahend x ka võrratust (4) ning seega ei rahulda võrratust $a_1 x > b_1$. Järelikult puuduvad võrratuste süsteemil (6) mittenegatiivsed lahendid.

Vastupidi, kui süsteemil (6) puuduvad mittenegatiivsed lahendid, siis rahuldab võrratuste süsteemi (5) iga mittenegatiivne lahend ka võrratust (4), mistõttu kitsendus (4) osutub triviaalseks. Sellega on lemma tõestatud.



Joonis 1.

Märgime kahte üsna ilmset triviaalsete kitsenduste juhtu, mida saab vaadelda ka kui järeldusi äsja tõestatud lemmast.

1) Kahest ekvivalentsest kitsendusest[3] on üks alati triviaalne.

2) Kitsendus (4) on alati triviaalne, kui võrratuste süsteemil (5) puuduvad mittenegatiivsed lahendid (siis puuduvad mittenegatiivsed lahendid ka süsteemil (6)). Sellisel juhul pole planeerimisülesandel lubatavaid lahendeid.

Lemma tingimusi võib formuleerida ka veidi teisiti. Nimelt: võrratuste süsteemil (6) puuduvad mittenegatiivsed lahendid parajasti siis, kui süsteemil

$$a_1 x = b_1 + \varepsilon, \quad a_i x \leqslant b_i \quad (i = 2, 3, \ldots, m)$$

pole mittenegatiivseid lahendeid mitte ühegi positiivse ε korral. Kitsendus (4) osutub aga triviaalseks ka siis, kui viimasel süsteemil puuduvad mittenegatiivsed lahendid ainult kõigi küllalt väikeste positiivsete suuruste ε korral.

---

[3] Kitsendusi nimetatakse e k v i v a l e n t s e t e k s, kui neile vastavate lahendite hulgad ühtivad.

Võtame kasutusele tähistuse

$$b_1^+ = b_1 + \varepsilon,$$

kus ε on mistahes küllalt väike positiivne suurus. J. C. G. Boot on tõestanud järgmise teoreemi.[4]

Teoreem 1. *Kitsendus* (4) *on triviaalne parajasti siis, kui ei leidu ühtki vektorit* $x \geqslant 0$ *nii, et kehtiksid võrratused*

$$a_1 x = b_1^+, \quad a_i x \leqslant b_i \quad (i = 2, \ldots, m). \tag{7}$$

Triviaalsete kitsenduste kõrvaldamine Booti meetodil

Vaatleme planeerimisülesannet (1)—(3). Juhul kui võrratuste süsteemil (5) pole mittenegatiivseid lahendeid, siis puuduvad vaadeldaval planeerimisülesandel lubatavad ja seega ka optimaalsed lahendid. Seetõttu järgnevas eeldame, et võrratustel (5) on mittenegatiivseid lahendeid. Püüame selgitada, kas kitsendus (4) on triviaalne.

Et vektori a_1 kõik koordinaadid pole nullid (muidu poleks kitsendusel (4) mõtet), siis võib üldsust kitsendamata oletada, et $a_{11} \neq 0$ (selle saavutamiseks võib vajaduse korral muutujaid x_j ümber nummerdada). Siis saab võrrandist $a_1 x = b_1^+$ ehk

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1^+$$

avaldada otsitava x_1:

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}} [b_1^+ - (a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n)].$$

Elimineerides suuruse x_1 selle seose abil võrratustest (7), saame

$$\frac{a_{i1}}{a_{11}} (b_1^+ - \sum_{j=2}^{n} a_{1j}x_j) + \sum_{j=2}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i.$$

Kui $a_{11} > 0$, siis võib selle võrratuse teisendada kujule

$$d_{i2}x_2 + \ldots + d_{in}x_n \leqslant c_i \quad (i = 2, \ldots, m), \tag{8}$$

kus

$$d_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j} \\ a_{i1} & a_{ij} \end{vmatrix}, \quad c_i = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1^+ \\ a_{i1} & b_i \end{vmatrix}.$$

Suuruse x_1 mittenegatiivsuse nõude

$$a_{11}x_1 = b_1^+ - (a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n) \geqslant 0$$

saab nüüd esitada kujul

$$a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leqslant b_1^+. \tag{9}$$

Teoreemist 1 järeldub järgmine triviaalsuse kriteerium.

Teoreem 2. *Olgu* $a_{11} > 0$. *Siis on kitsendus* (4) *triviaalne parajasti siis, kui võrratuste süsteemil* (8)—(9) *pole mittenegatiivseid lahendeid.*

M ä r k u s. Selle teoreemi saab kergesti sõnastada ka juhu $a_{11} < 0$ jaoks, asendades vaid tingimustes (8)—(9) võrratuse märgid vastupidistega.

[4] Vt. J. C. G. B o o t. On Trivial and Binding Constraints in Programming Problem. — Management Science, 1962, vol. 8, No. 4.

Süsteemi (8)—(9) koostamine on suhteliselt lihtne: tuleb arvutada $n(m-1)$ teist järku determinanti. Selle süsteemi lahenduvuse uurimisel võib kasutada järgmisi teoreeme.[5] Nende teoreemide sõnastamisel kasutame vektoreid

$$x=(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad y=(y_1, y_2, \ldots, y_m),$$
$$c=(c_1, c_2, \ldots, c_m)$$

ja maatrikseid

$$D=\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \ldots d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \ldots d_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ d_{m1} & d_{m2} & \ldots d_{mn} \end{pmatrix}, \quad D'=\begin{pmatrix} d_{11} & d_{21} & \ldots d_{m1} \\ d_{12} & d_{22} & \ldots d_{m2} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ d_{1n} & d_{2n} & \ldots d_{mn} \end{pmatrix}$$

(teine maatriks on saadud esimesest transponeerimise, s. t. ridade ja veergude ümbervahetamise teel), mis võimaldab näiteks süsteemi

$$d_{i1}x_1+d_{i2}x_2+\ldots+d_{in}x_n \leqslant c_i \quad (i=1, 2, \ldots, m)$$

lühidalt kirjutada kujul

$$Dx \leqslant c.$$

Teoreem 3. *Kahest võrratuste süsteemist*

$$Dx \leqslant c, \quad x \geqslant 0$$

ning

$$D'y \geqslant 0, \quad cy < 0, \quad y \geqslant 0$$

on üks ja ainult üks lahenduv.

Teoreem 4. Kahest süsteemist

$$Dx \leqslant c, \quad x \geqslant 0$$

ning

$$D'y=0, \quad cy<0, \quad y \geqslant 0$$

on üks ja ainult üks lahenduv.

Eriti lihtne on võrratuste süsteemi lahenduvust selgitada järgmiste järelduste abil neist teoreemidest (muide, nende väidete õigsuses pole raske ka vahetult veenduda).

Järeldus 1. *Kui $c \geqslant 0$, siis süsteemil*

$$Dx \leqslant c, \quad x \geqslant 0$$

leidub lahend.

Tõepoolest, juhul $c \geqslant 0$ ei leidu vektorit $y \geqslant 0$, nii et oleks $cy < 0$; mistõttu sõnastatud väide järeldub teoreemist 3.

Järeldus 2. *Kui maatriksi D mingi veeru kõik elemendid on negatiivsed, siis süsteemil*

$$Dx \leqslant c, \quad x \geqslant 0$$

leidub lahend.

Tõepoolest, seoseid $D'y=0$ rahuldab siis ainult $y=0$, mistõttu süsteemil

$$D'y=0, \quad cy<0, \quad y \geqslant 0$$

puudub lahend.

---

[5] Nende teoreemide tõestused võib leida raamatust J. C. G. Boot. Quadratic Programming. Amsterdam, 1964.

Vaatleme arvulist näidet. Olgu planeerimisülesande kitsendused antud kujul

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\leqslant 5/3, \\ 5x_1 \quad + 10x_3 \quad &\leqslant 2, \\ 4x_2 \quad + 5x_4 &\leqslant 3, \\ x_i &\geqslant 0 \qquad (i = 1, \ldots, 4). \end{aligned}$$

Üheks lubatavaks lahendiks on $x = 0$. Et rakendada triviaalsuse kriteeriumi, koostame süsteemi (8)—(9):

$$\begin{aligned} -5x_2 + 5x_3 - 5x_4 &\leqslant -(19/3)^+, \\ 4x_2 \quad + 5x_4 &\leqslant 3, \\ x_2 + x_3 + x_4 &\leqslant (5/3)^+, \\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0,\ x_4 &\geqslant 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Vastavalt teoreemile 3 on lahend kas süsteemil (10) või süsteemil:

$$\begin{aligned} -5y_1 + 4y_2 + y_3 &\geqslant 0, \\ 5y_1 \quad + y_3 &\geqslant 0, \\ -5y_1 + 5y_2 + y_3 &\geqslant 0, \\ -(19/3)^+y_1 + 3y_2 + (5/3)^+y_3 &< 0, \\ y_k &\geqslant 0 \quad (k = 1, 2, 3). \end{aligned} \tag{11}$$

Lihtne on kontrollida, et vektor $y = (1, 1, 1)$ rahuldab seoseid (11). Järelikult puudub süsteemil (10) lahend, mistõttu teoreemi 2 põhjal on esimene kitsendus triviaalne. Et ta ei kitsenda lubatavate lahendite piirkonda, siis võib selle kitsenduse üldse ülesandest välja jätta.

Kontrollime ka teist kitsendust. Et juba esimese tingimuse jätsime ülesandest välja, siis avalduvad võrratused (8)—(9) kujul:

$$\begin{aligned} 20x_2 + 25x_4 &\leqslant 15, \\ 10x_3 \quad &\leqslant 2^+, \\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0,\ x_4 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Siin on kõik vabaliikmed positiivsed ja seega on järelduse 1 põhjal teine kitsendus mittetriviaalne.

Kolmanda kitsenduse kontrollimisel saame süsteemi

$$\begin{aligned} 20x_1 + 40x_3 &\leqslant 8, \\ 5x_4 &\leqslant 3^+, \\ x_1 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0,\ x_4 &\geqslant 0, \end{aligned}$$

kust jällegi analoogiliselt eelmise juhuga järeldub kitsenduse mittetriviaalsus.

Kirjeldatud meetod triviaalsete kitsenduste leidmiseks kannabki B o o t i m e e t o d i nime. Meetod nõuab küllaltki suurt arvutustööd, eriti siis, kui ei saa kasutada teoreemidest 3 ja 4 tehtud järeldusi. Seega pole Booti meetod triviaalsete kitsenduste praktiliseks leidmiseks eriti mugav.

Radzikowski meetod

Üheks efektiivsemaks meetodiks planeerimisülesande dimensioonide vähendamiseks on R a d z i k o w s k i m e e t o d.[6] See meetod on vahetult rakendatav vaid siis, kui kitsendustes kõik $a_{ij} \geqslant 0$ ja $b_i > 0$. Järgnevas oletame, et need nõuded on rahuldatud. (Kui mõned kitsendused ei rahulda nõudeid, võib meetodi rakendamisel vastavad kitsendused kõrvale jätta ning pärast ülesande vähendamist uuesti lisada.)

Radzikowski meetod jätab kitsendustest alles ainult tugevaima tõkke iga muutuja x_j jaoks ja ühe kitsenduse, mis on tugevaim tõke kõigi muutujate x_j jaoks. Vastavate kitsenduste leidmiseks toimime järgmiselt.

Jagades iga kitsenduse (2) vabaliikmega b_i, saame need teisendada kujule

$$d_{i1}x_1 + d_{i2}x_2 + \ldots + d_{in}x_n \leqslant 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

kus

$$d_{ij} = \frac{a_{ij}}{b_i}.$$

Et kõik $d_{ij} \geqslant 0$ ja $x_j \geqslant 0$, siis

$$d_{ij}x_j \leqslant 1 \quad \text{ehk} \quad x_j \leqslant \frac{1}{d_{ij}}.$$

Vastavalt sellele leitakse iga j korral

$$d_{v_j j} = \max_i d_{ij},$$

millest nähtub, et kitsendus indeksiga v_j annab minimaalse tõkke muutujale x_j.

Edasi arvutatakse suurused

$$e_i = \sum_{j=1}^{n} d_{ij}$$

nende kitsenduste jaoks, milles esineb rohkem kui üks tundmatu ning leitakse

$$e_w = \max_i e_i.$$

Kitsendus indeksiga w annab tugevaima tõkke kõigile muutujaile.

Radzikowski meetodi korral moodustatakse lähteülesandest uus väiksem planeerimisülesanne, säilitades ainult kitsendused, mille indeks $i = v_j$ või $i = w$. Jääb järele ülesanne, milles on ülimalt $n+1$ kitsendust, sest mõned indeksid v_j ja w võivad ka ühtida. Vähendatud ülesande optimaalne lahend aga üldiselt enam ei ühti lähteülesande optimaalse lahendiga, sest koos liigsete kitsendustega võivad kõrvale jääda ka olulised.

---

[6] Vt. näit. H. J. T i s c h e r. Erfahrungen mit der Auswendung eines Näherungsfahrens zur Reduzierung des Ausmasse linearer Optimierungsaufgaben. Wirtschaftswissenschaft, 1966, Nr. 9, 1520—1530.

Pärast vähendatud ülesande optimaalse lahendi leidmist tuleb kontrollida, kas ülesandest väljajäetud kitsendused on täidetud. Kui mõni neist osutub rikutuks, tuleb see lisada vähendatud ülesandele ja uuesti leida optimaalne lahend.

Näitena maksimiseerime $z = x_1 + x_2$ kitsendustel

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 &\leqslant 15, \\ 2x_1 + 5x_2 &\leqslant 20, \\ 5x_1 + 9x_2 &\leqslant 45, \\ x_1 \qquad &\leqslant 7, \\ x_2 &\leqslant 4, \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

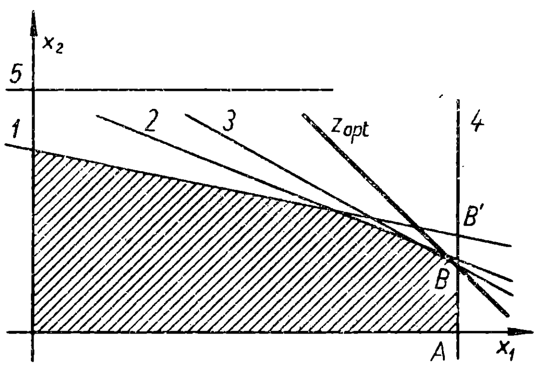
Esitame arvutused tabelina

i	d_{i1}	d_{i2}	e_i
1	0,07	0,33	0,40
2	0,10	0,25	0,35
3	0,11	0,20	0,31
4	0,14	0	—
5	0	0,25	—

Tabelist leiame, et

$$\begin{aligned} \max d_{i1} &= d_{41} = 0{,}14, \\ \max d_{i2} &= d_{12} = 0{,}33, \\ \max e_i &= e_1 = 0{,}40, \end{aligned}$$

s. t. $v_1 = 4$, $v_2 = 1$, $w = 1$.



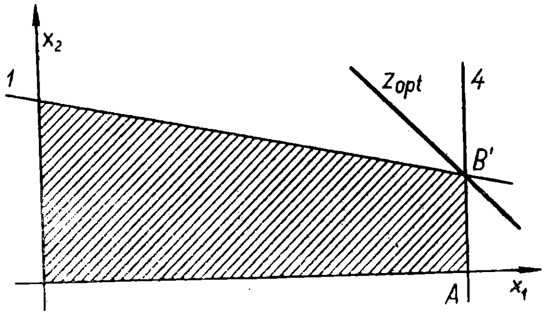
Joonis 2.

Vähendatud ülesandeks saame:

maksimiseerida $z = x_1 + x_2$ kitsendustel

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 &\leqslant 15, \\ x_1 &\leqslant 7, \\ x_1 \geqslant 0, \quad x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Joonisel 2 on viirutatud lubatavate lahendite piirkond algülesande korral, joonisel 3 aga vähendatud ülesande korral. Lähteülesande optimaalne lahend vastab tipule B, vähendatud ülesande optimaalne lahend aga tipule B'. Need optimaalsed lahendid ei ühti, sest kõrvale jäeti ka olulised kitsendused 2 ja 3. Siiski on vähendatud ülesande optimaalne lahend teatav (kuigi mittelubatav) lähend lähteülesande optimaalsele lahendile. Seetõttu võime Radzikowski meetodit vaadelda kui ligikaudset meetodit planeerimisülesande lahendamiseks.



Joonis 3.

H. J. Tischer väidab,[6] et Radzikowski meetodit ülesande vähendamiseks on kasutatud suure eduga praktilistes arvutustes. Paljudes ülesannetes leiti, et meetod annab täpse optimaalse lahendi, real juhtudel aga ei osutunud kitsenduste rikkumine oluliseks ning loobuti isegi rikutud kitsenduste lisamisest redutseeritud ülesandele ja uuest optimiseerimisest. Täpseks on osutunud meetod enamasti seal, kus esinevad mõned väga tugevad kitsendused. Meetodi rakendamisega on saavutatud ülesande kitsenduste arvu vähendamine 60—80% võrra.

VIGURIGA ÜLESANDEID

3. Võrdkülgne kolmnurk ja korrapärane kuusnurk on võrdsete ümbermõõtudega. Kuidas suhtuvad nende kujundite pindalad?

4. Arvude jadas
10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 20, 22, 24, 31, 100, —, 10000, 1111111111111111
on üks arv asendatud kriipsuga. Leida see puuduv arv, kui on teada, et ta peab olema kirjutatud kolmendsüsteemis.

5. Korrapärase hulktahuka masskese paikneb keskpunktis ja seetõttu on niisugune hulktahukas ükskõik millisele tahule asetatult stabiilses tasakaalus. Lihtne on seevastu konstrueerida ebakorrapäraseid hulktahukaid, mis mõnele tahule asetatult ei ole stabiilsed. Kas on võimalik valmistada niisuguse korrapäratu hulktahuka mudelit, mis on igale tahule asetatult ebastabiilne?

TÄISARVULISED PLANEERIMISÜLESANDED[1]

A. Leiten, M. Viitso

Majandustegevuse juhtimise matematiseerimise käigus on tekkinud uus hoogsasti arenev matemaatikaharu — matemaatiline planeerimine. Viimasel ajal aga kerkib praktikas järjest rohkem probleeme (majanduse valdkonnas, sõjaasjanduses jm.), mis taanduvad küll matemaatilise planeerimise ülesannetele, kuid milles lisaks tavalistele kitsendustele nõutakse veel kas kõigi või vähemalt mõnede tundmatute täisarvulisust. Viimane nõue on enamasti tingitud ülesande tundmatute konkreetsest majanduslikust sisust. Kuigi esimesed uurimused selles valdkonnas ilmusid vähem kui 15 aastat tagasi, võib käesoleval ajal kõnelda juba matemaatilise planeerimise iseseisvast harust — täisarvulisest (ehk diskreetsest) planeerimisest.

Täisarvulisuse nõue ülesande tundmatutele püstitatakse eeskätt sel juhul, kui tundmatud tähendavad juba oma olemuse tõttu vaid täisarvulises koguses esinevate objektide arvu. Jagamatute objektidega on tegemist näiteks nn. laadimisülesannete[2] puhul, kus antud objektidest tuleb valida mingis mõttes sobivaim (näiteks võimalikult suure maksumusega) laadung, eeldades muidugi, et kõiki olemasolevaid objekte pole võimalik laadida. Samuti ei ole võimalik suunata mingile tööle 20,7 inimest, saata veoste tegemiseks 1,1 autot või lennuliinile 10,5 lennukit.

Suur hulk planeerimisega seotud probleeme taandub ülesannetele, milles on tegemist nn. Boole'i muutujatega, s .t. muutujatega, mis võivad omandada ainult väärtusi 1 ja 0. Boole'i muutujatega lineaarne planeerimisülesanne tekib näiteks rändkaupmehe ülesande[3] matemaatilisel sõnastamisel. Mistahes kahe

---

[1] Käesoleva ülevaate kirjutamisel on kasutatud artiklit: А. А. Корбут, Ю. Ю. Финкельштейн. Дискретные задачи математического планирования. Итоги науки. Теория вероятностей, математическая статистика. Теоретическая кибернетика, 1966, lk. 59—108.

[2] Laadimisülesannetest võib lähemalt lugeda artiklis: Ü. Kaasik, E. Tamme. Laadimisülesanded. — Matemaatika ja kaasaeg, XII, lk. 64—72.

[3] Ülesanne sõnastatakse tavaliselt järgmiselt: rändkaupmees, sõites välja mingist punktist (linnast), peab külastama vähemalt üks kord igaüht n erinevast punktist ja tulema lähtepunkti tagasi nii, et kogu läbitud tee üldpikkus oleks minimaalne (vt. Matemaatika ja kaasaeg, V, lk. 48).

linna i ja j puhul tähendab tundmatu x_{ij} väärtus 1 sel juhul seda, et rändkaupmees liigub linnast i otse linna j, väärtus 0 tähendab aga niisuguse liikumistee puudumist.

Tuleb märkida, et täisarvulisi planeerimisülesandeid ei saa üldiselt lahendada sel teel, et «unustades» algul tundmatutele püstitatud täisarvulisuse nõude lahendame ülesande matemaatilise planeerimise tavaliste lahendusmeetoditega ja seejärel ümardame saadud mittetäisarvulise optimaalse lahendi komponendid lähemateks täisarvudeks. Võib nimelt juhtuda, et selline lihtne ümardamine annab mitte ainult optimaalsest kaugel asuva, vaid isegi mittelubatava lahendi. Lahendades näiteks ülesande, milles nõutakse maksimiseerida sihifunktsioon

$$z = x_1 + 6x_2$$

kitsendustel

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 &\leqslant 1, \\ x_1 + x_2 &\leqslant 11\tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

simpleksmeetodil[4] või lihtsalt graafilisel teel, saame optimaalseks lahendiks

$$x_1 = 3\tfrac{1}{2}, \quad x_2 = 8.$$

Nõudes nüüd täiendavalt tundmatute x_1 ja x_2 täisarvulisust, pole eespool vaadeldud ülesande optimaalse lahendi ümardamise teel saadavad lahendid

$$x_1 = 3, \ x_2 = 8 \quad \text{või} \quad x_1 = 4, \ x_2 = 8$$

üldse enam lubatavad lahendid, kuna ülesande kitsendused pole kummalgi juhul rahuldatud. Lubatava täisarvulise lahendi saamiseks peab seega muutma ka tundmatu x_2 väärtust.

Ümardamise teel saadud täisarvuline lahend on suhteliselt kaugel tegelikust optimumist näiteks järgmise ülesande korral: maksimiseerida sihifunktsioon

$$z = x_1 + 6x_2$$

kitsendustel

$$\begin{aligned} x_1 + 12x_2 &\leqslant 24, \\ x_1 \qquad &\leqslant 2, \end{aligned}$$

kusjuures x_1 ja x_2 peavad olema mittenegatiivsed täisarvud. Lahendades ülesande kasvõi graafiliselt (joonis 1), saame mittetäisarvulise optimaalse lahendi

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 1\frac{5}{6},$$

mis annab sihifunktsioonile väärtuse $z = 13$. Selle ülesande optimaalne täisarvuline lahend on aga

$$x_1 = 0, \ x_2 = 2$$

sihifunktsiooni väärtusega $z = 12$.

---

[4] Simpleksmeetodi kirjelduse, samuti lineaarsete planeerimisülesannetega seotud põhimõistete definitsioonid võib leida näiteks artiklis: Ü. Kaasik. Lineaarsed planeermisülesanded. — Matemaatika ja kaasaeg, II, lk. 31—46.

Täisarvuliste planeerimisülesannete niisugune ligikaudne lahendamine annab võrdlemisi rahuldavaid tulemusi peamiselt vaid siis, kui tundmatud võivad omandada küllalt suuri väärtusi. Kui aga (teise äärmusena) on tegemist hoopis Boole'i muutujatega ülesannetega, siis ei osutu selline lahendusmeetod peaaegu kunagi sobivaks. Seda kõike arvestades ongi otstarbekas niisuguseid planeerimisülesandeid, kus nõutakse tundmatute täisarvulisust, vaadelda omaette ülesannete klassina. Lahendi täisarvulisuse nõue muudab planeerimisülesanded matemaatiliselt suhteliselt raskesti käsitletavateks, sest ülesande lahendiks võivad nüüd olla ainult kitsendustega määratud piirkonna täisarvulised punktid, seega ei ole lubatavate lahendite hulk enam sidus ega kumer.

Meetodite liigitamisest

Lähenemisviisi poolest võib täisarvuliste planeerimisülesannete lahendusmeetodid jaotada kolme suurde rühma:

1) lõigete meetodid;
2) kombinatoorsed meetodid;
3) ligikaudsed meetodid.

Et mittelineaarsetest ülesannetest on seni uuritud vaid mõningaid erikujulisi täisarvulisi planeerimisülesandeid, siis edaspidises vaatleme üksnes täisarvulisi lineaarseid planeerimisülesandeid, mis üldkujul sõnastatakse järgmiselt: maksimiseerida lineaarvorm

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1}$$

kitsendustel

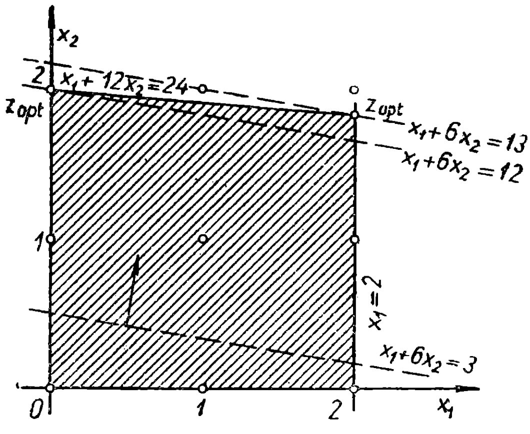
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant a_{i0}, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{2}$$

$$x_j \geqslant 0, \; j = 1, \ldots, n, \tag{3}$$

$$x_j \text{ on täisarv iga } j \in T \text{ korral}, \tag{4}$$

kus T tähistab ülesande tundmatuid nummerdava indeksite hulga $N = \{1, \ldots, n\}$ teatavat etteantud alamhulka. Kui $T = N$ (s. t. täisarvulisust nõutakse kõigilt tundmatutelt x_j), siis nimetatakse ülesannet (1)—(4) puhttäisarvuliseks (ehk lihtsalt täisarvuliseks); kui aga $T \neq N$, siis kõneldakse osaliselt täisarvulisest ülesandest (s. t. täisarvulisust nõutakse vaid osalt tundmatutest x_j).

L õ i g e t e m e e t o d i t e puhul kahandatakse täiendavate kitsenduste juurdetoomisega ülesande (1)—(3) lubatavate lahendite hulka ilma täisarvulise ülesande (1)—(4) lubatavaid lahendeid kõrvale heitmata. Täiendavaid kitsendusi lisatakse niikaua, kuni ülesande (1)—(3) optimaalne lahend osutub täisarvuliseks (kusjuures lisaks kitsendustele (2)—(3) arvestatakse ka täiendavaid kitsendusi). Seega taandatakse ülesande (1)—(4) lahendamine teatava hulga tavaliste lineaarsete planeerimisülesannete lahendamisele (mis juba toimub näiteks simpleksmeetodil).



Joonis 1.

Täiendavad kitsendused on tavaliselt sellise omadusega, et ülesande (1)—(3) (mittetäisarvuline) optimaalne lahend ei rahulda, aga täisarvulise ülesande (1)—(4) optimaalne lahend rahuldab lisatavat kitsendust. Kui ülesande (1)—(3) optimaalseks lahendiks on vektor

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0),$$

mille kõik komponendid pole täisarvud, siis võib täiendavaks kitsenduseks võtta näiteks võrratuse

$$x_{m+1} + x_{m+2} + \dots + x_n \geqslant 1. \tag{5}$$

Tõepoolest, seda kitsendust ei rahulda esitatud optimaalne lahend, rahuldab aga mistahes täisarvuline lahend. Geomeetriliselt tähendab täiendavate lineaarsete kitsenduste lisamine hüpertasandite konstrueerimist, mis lõikavad ülesande (1)—(3) lahendite hulktahukast välja mingi osa, mis sisaldab optimaalse mittetäisarvulise lahendi, ei sisalda aga ühtki selle hulktahuka täisarvulist punkti (seetõttu saidki niisugused lõikamise ideele toetuvad meetodid lõigete meetodite nimetuse).

Lõigete meetodite puhul tuleb kokku puutuda kahe probleemiga: 1) universaalse reegli leidmine täiendavate kitsenduste saamiseks; 2) algoritmi lõplikkuse tõestus. Ainult nende kahe probleemi lahendamine viib universaalsele ja arvutuslikus mõttes realiseeritavale algoritmile. Esimesena tegi seda oma meetodite puhul R. E. Gomory (1958. a.).

Gomory töötas välja kaks algoritmi puhttäisarvuliste lineaarsete planeerimisülesannete lahendamiseks. Gomory esimest algoritmi vaatleme lähemalt allpool.[5] Teises algoritmis teostatakse arvutamise käigus tehted ainult täisarvudega, millega välditakse ümardamisvigade kuhjumist. Peale selle esitas Gomory veel meetodi osaliselt täisarvuliste ülesannete lahendamiseks. Oluline on märkida, et õnnestus tõestada kõigi kolme algoritmi lõplikkus (kolmanda algoritmi puhul tuleb eeldada veel, et $c_j = 0$ kõigi $j \in \overline{T}$ puhul, s. t. sihifunktsioonis võivad nullist erineda vaid kordajad, mis vastavad täisarvulistele tundmatutele). Mis puutub aga näiteks G. B. Danzigi poolt soovitatud kitsenduste (5) sissetoomisse, siis see algoritm on lõplik vaid üsna kitsa ülesannete klassi puhul.[6]

Paljud autorid (G. T. Martin jt.) on esitanud Gomory meetodi modifikatsioone, mille tulemusena saadakse algoritmi suurem koondumiskiirus. Lõigete meetodite ideid on edasi arendatud mitmes suunas. Nii on esitatud algoritme Boole'i muutujatega lineaarsete planeerimisülesannete lahendamiseks (J. Finkelštein), peale lineaarsete kitsenduste on täiendavate kitsendustena kasutatud «paraboolseid» kitsendusi kujul

$$a_{00} - L_0(X) - b_1(L_1(X))^2 - \ldots - b_k(L_k(X))^2 \geqslant 0,$$

kus $L_s(X) = a_{s1}x_1 + \ldots + a_{sn}x_n$ on lineaarselt sõltumatud homogeensed lineaarvormid, $s = 0, 1, \ldots, k$ (V. C. Witzgall) jne.

Kombinatoorsetes meetodites kasutatakse suuremal või vähemal määral ülesande lubatavate lahendite läbivaatamist kindlas järjekorras mingi kindla eeskirja põhjal, mis võimaldab otsustada, millised punktidest võib edasisest vaatlusest välja jätta kui ilmselt mitteoptimaalsed, kuni jõutakse optimaalse lahendini (piltlikult öeldes, analoogiliselt mängule «külm — kuum — põletab»). Et lineaarsetel täisarvulistel planeerimisülesannetel on tavaliselt lubatavaid lahendeid üldse vaid lõplik arv, siis ilmselt ei saa niisugune lahendusprotsess olla lõpmatu. Konkreetse meetodi efektiivsus sõltub seega kasutatava välistamiseeskirja tõhususest.

Esimestena esitasid sellist tüüpi meetodi A. H. Land ja A. G. Doig 1960. a. (selle meetodi täpsema kirjelduse anname edaspidi). Lähedast ideed kasutasid J. D. C. Little, K. G. Murty, D. W. Sweeney ja C. Karel, nimetades oma meetodit ka «harude ja tõkete» meetodiks. Boole'i muutujatega ülesannete jaoks on kombinatoorseid meetodeid esitanud R. Faure, Y. Malgrange,

---

[5] Gomory esimese algoritmi kirjelduse võib leida ka Ü. Kaasiku õpikus «Matemaatiline planeerimine» (Tln. 1967).

[6] Selle algoritmi teatava täpsustuse töötasid välja TRÜ matemaatikud V. Allsalu ja R. Mullari (vt. Труды ВЦ ТГУ № 14, lk. 46—59).

A. le Garff, E. Balas jt. Kombinatoorse iseloomuga on ka meetodid laadimisülesannete lahendamiseks.

Kuigi kombinatoorsete meetodite lõplikkust ja optimaalse lahendini jõudmist ei ole tavaliselt raske näha, tuleb märkida, et sellised meetodid on suurema dimensiooniga ülesannete puhul küllaltki töömahukad.

L i g i k a u d s e t e   m e e t o d i t e teket stimuleerisid järgmised asjaolud: 1) olemasolevad täpsed meetodid polnud küllalt täiuslikud, mistõttu suure dimensiooniga ülesannete lahendamine oli seotud suurte raskustega; 2) sageli tuli lahendada kiireloomulisi ülesandeid, mille jaoks ligikaudse lahendi suhteliselt kiire leidmine oli tähtsam kui tunduva ajakuluga seotud täpne lahendamine.

S. Reiteri ja G. Shermani esitatud meetodi idee seisneb kahe etapi korduvas rakendamises: 1) lubatava lahendi juhuslik valik; 2) saadud lubatava lahendi parandamine «lokaalse» optimumini. Teistest uurimustest ligikaudsete meetodite vallas võib mainida I. Pjatetski-Šapiro, V. Volkonski, S. Levina ja A. Pomanski esitatud iteratiivset meetodit Boole'i muutujatega lineaarse planeerimisülesande lahendamiseks. Ka nende meetodite täpsema kirjelduse anname edaspidises.

Viimastel aastatel ilmunud uurimustest tuleb veel märkida R. A. Cook'i algoritmi. See toetub lineaarsete diofantiliste võrratusesüsteemide[7] lahendusmeetodile, mis annab süsteemi mingi lahendi või näitab selle puudumist.

Järgnevalt kirjeldame täpsemalt Gomory meetodit, Landi ja Doigi meetodit, ligikaudseid meetodeid ning lõpuks toome andmeid meetodite realiseerimisest elektronarvutitel.

Gomory meetod

Vaatleme nüüd lähemalt Gomory meetodit puhttäisarvuliste ülesannete lahendamiseks.

Olgu tarvis leida võrratusesüsteemi (2) mittenegatiivsete täisarvuliste lahendite hulgast see, mis maksimiseerib funktsiooni

$$z = a_{00} + a_{01}(-x_1) + \dots + a_{0n}(-x_n), \tag{6}$$

kusjuures eeldatakse, et nii võrratusesüsteemi kui ka sihifunktsiooni kordajad ning vabaliikmed on kõik täisarvud (meetodi praktilise rakendatavuse sfääri see eeldus ei ahenda, sest lähteandmed määratakse ju ikka mingi etteantud täpsusega ega saa seega olla lõpmatud kümnendmurrud). Samuti eeldatakse veel, et süsteemi (1) vabaliikmed a_{i0} on kõik positiivsed.

[7] Diofantiliste võrratuste süsteemiks nimetatakse ratsionaalarvuliste kordajatega algebraliste võrratuste süsteemi, mille jaoks otsitakse täisarvulisi lahendeid.

Lineaarses planeerimises tavalise võtte abil — uute täiendavate tundmatute juurdetoomisega — muudetakse võrratusesüsteem (2) võrrandisüsteemiks:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= a_{10} + a_{11}(-x_1) + \ldots + a_{1n}(-x_n) \\ x_{n+2} &= a_{20} + a_{21}(-x_1) + \ldots + a_{2n}(-x_n) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n+m} &= a_{m0} + a_{m1}(-x_1) + \ldots + a_{mn}(-x_n) \end{aligned} \qquad (7)$$

Lisades sellele süsteemile võrrandi (6), saab vaadeldava planeerimisülesande sõnastada järgmiselt: leida võrrandisüsteemi (6)—(7) selline lahend, milles tundmatud x_i ($i = 1, 2, \ldots, n + m$) on mittenegatiivsed täisarvud ning z omandab maksimaalse võimaliku väärtuse. Ülesande selline püstitus osutub kasulikuks seetõttu, et ta võimaldab kohe välja kirjutada ühe lubatava erilahendi

$$z = a_{00},\ x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0,\ x_{n+1} = a_{10},\ \ldots,\ x_{n+m} = a_{m0}.$$

Matemaatilises planeerimises nimetatakse tavaliselt tundmatuid $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$ baasi kuuluvaiks (ehk baasitundmatuiks) ning tundmatuid $x_1, \ldots, x_n$ baasi mittekuuluvaiks. Seejuures on baasitundmatud ja z võrranditega (7)—(6) avaldatud baasi mittekuuluvate tundmatute lineaarkombinatsioonidena. Vastavate kordajate maatriksi (simplekstabeli) võib anda kujul

$$\begin{array}{c|cccc|} & 1 & -x_1 & \ldots & -x_n \\ z & a_{00} & a_{01} & \ldots & a_{0n} \\ x_{n+1} & a_{10} & a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{n+m} & a_{m0} & a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{array}$$

Öeldakse, et simplekstabelil on lubatav kuju, kui maatriksi esimese veeru kõik elemendid on mittenegatiivsed, s. o. kui iga $i = 1, \ldots, m$ puhul $a_{i0} \geqslant 0$. Kui maatriksi esimese rea kõik elemendid on mittenegatiivsed (iga $j = 1, \ldots, n$ korral $a_{0j} \geqslant 0$), siis öeldakse, et simplekstabelil on duaalselt lubatav kuju. Kui aga simplekstabelil on samaaegselt nii lubatav kui ka duaalselt lubatav kuju, siis öeldakse, et tal on optimaalne kuju.

Gomory meetod põhineb simpleksmeetodi ja nn. duaalse simpleksmeetodi kasutamisel: optimaalse kuju leidmiseks rakendatakse simpleksmeetodit sel juhul, kui lähtetabelil on lubatav kuju, ning duaalset simpleksmeetodit sel juhul, kui tabelil on algul duaalselt lubatav kuju (duaalne simpleksmeetod[8] erineb simpleksmeetodist tegelikult ainult juhtelemendi valiku reeglite poolest, kõik ülejäänud operatsioonid on mõlema meetodi korral samad).

Ülesande (6)—(7) lahendamine Gomory meetodil algab sellega, et täisarvulisuse nõuet ignoreerides saadakse harilik

[8] Vt. viites 5 nimetatud raamat, lk. 72—74.

lineaarne planeerimisülesanne, mis lahendatakse simpleksmeetodiga. Lõpptulemusena saadud optimaalne tabel olgu järgmine:

$$\begin{array}{c|cccc|}
 & 1 & -x'_1 & \dots & -x'_n \\
z & x_{00} & x_{01} & & x_{0n} \\
x'_{n+1} & x_{10} & x_{11} & & x_{1n} \\
\dots & \dots & \dots & & \dots \\
x'_{n+r} & x_{r0} & x_{r1} & & x_{rn} \\
\dots & \dots & \dots & & \dots \\
x'_{n+m} & x_{m0} & x_{m1} & \dots & x_{mn}
\end{array}$$

Selles tabelis tähistavad $x'_{n+1}, \dots, x'_{n+m}$ ja $x'_1, \dots, x'_n$ vastavalt baasitundmatuid ja baasi mittekuuluvaid tundmatuid; suurusteks x_{ij} on simpleksprotsessis teisenenud kordajad a_{ij}. Tabelist vahetult väljakirjutatav erilahend

$$z = x_{00},\ x'_{n+1} = x_{10},\ \dots,\ x'_{n+r} = x_{r0},\ \dots,\ x'_{n+m} = \\ = x_{m0},\ x'_1 = \dots = x'_n = 0 \qquad (8)$$

ongi vaadeldud ülesande optimaalne lahend. Kui see lahend osutub täisarvuliseks, siis on ka lähteülesande lahendamine lõpetatud. Vastasel juhul tuuakse sisse üks uus tundmatu ning moodustatakse niisugune lisakitsendus, mis on täidetud iga lubatava täisarvulise lahendi korral, kuid pole täidetud olemasoleva lahendi (8) puhul.

Uue kitsenduse konstrueerimise kirjeldamiseks tuleb võtta kasutusele järgmised tähistused. Sümboliga $[x_{ij}]$ tähistame arvu x_{ij} täisosa, s. t. suurimat täisarvu, mis ei ületa arvu x_{ij} (näiteks $[6,7] = 6$ ja $[-1,2] = -2$). Sümboliga y_{ij} tähistame arvu x_{ij} murdosa, s. t. vahet $x_{ij} - [x_{ij}]$ (paneme tähele, et murdosa on alati mittenegatiivne ja väiksem ühest: $0 \leqslant y_{ij} < 1$). Seega võib iga arvu esitada tema täisosa ja murdosa summana: $x_{ij} = [x_{ij}] + y_{ij}$.

Olgu lahendis (8) murdarvulise väärtusega tundmatuks x'_{n+r}. Kirjutades välja talle võrrandisüsteemis vastava võrrandi

$$x'_{n+r} = x_{r0} + x_{r1}(-x'_1) + \dots + x_{rm}(-x'_n)$$

ning esitades selles võrrandis kõik kordajad täisosa ja murdosa summana, saadakse võrrand

$$(1+0)x'_{n+r} = [x_{r0}] + y_{r0} + ([x_{r1}] + y_{r1})(-x'_1) + \dots \\ \dots + ([x_{rm}] + y_{rm})(-x'_n).$$

Kui kanda murruliste kordajatega tundmatud võrrandi vasakule poole ja täisarvuliste kordajatega tundmatud paremale poole, omandab võrrand kuju:

$$-y_{r1}(-x'_1) - \dots - y_{rm}(-x'_n) = y_{r0} + \{[x_{r0}] - x'_{n+r} + \\ + [x_{r1}](-x'_1) + \dots + [x_{rm}](-x'_n)\}. \qquad (9)$$

Et kõik tundmatud peavad olema mittenegatiivsed täisarvud, siis on viimase võrrandi vasak pool kindlasti mittenegatiivne ja parem pool võrdub suurusega y_{r0} pluss mingi mittenegatiivne täisarv q (võrrandis loogelistes sulgudes). Jättes võrrandi (9) paremalt poolelt ära selle täisarvu q, saadakse võrratus

$$-y_{r1}(-x'_1) - \ldots - y_{rm}(-x'_n) \geqslant y_{r0},$$

mis kehtib iga lubatava täisarvulise lahendi korral. Uue lisatundmatu x_{n+m+1} sissetoomisega muudetakse saadud võrratus võrduseks

$$x_{n+m+1} = -y_{r0} - y_{r1}(-x'_1) - \ldots - y_{rm}(-x'_n). \qquad (10)$$

Võttes arvesse, et ka võrdus (9) kehtib iga lubatava täisarvulise lahendi korral, on ilmne, et tundmatu x_{n+m+1} võib omandada ainult mittenegatiivseid täisarvulisi väärtusi.

Võrdus (10) sobibki uueks kitsenduseks, mis on rahuldatud iga täisarvulise lubatava lahendi korral, kuid ei ole rahuldatud lahendi (8) puhul, sest uue tundmatu väärtus on selles lahendis negatiivne murdarv:

$$x_{n+m+1} = -y_{r0}.$$

Lisades kitsenduse (10) kordajad ülesande optimaalsele tabelile, saadakse tabel

	1	$-x'_1$	...	$-x'_n$
z	x_{00}	x_{01}		x_{0n}
x'_{n+1}	x_{10}	x_{11}		x_{1n}
...	...	...		...
x'_{n+r}	x_{r0}	x_{r1}		x_{rn}
...	...	...		...
x'_{n+m}	x_{m0}	x_{m1}	...	x_{mn}
x'_{n+m+1}	$-y_{r0}$	$-y_{r1}$	...	$-y_{rn}$

Et saadud tabelil on duaalselt lubatav kuju, siis viiakse see tabel duaalset simpleksmeetodit kasutades optimaalsele kujule. Nüüd korratakse protseduuri (s. o. uue kitsenduse juurdetoomist ja duaalse simpleksmeetodi rakendamist) seni, kuni optimaalne täisarvuline lahend on leitud.

Gomory meetodi praktilise rakenduse demonstreerimiseks lahendame järgmise näite: maksimiseerida sihifunktsioon

$$z = 2x_1 + x_2$$

kitsendustel

$$4x_1 + 3x_2 \leqslant 12,$$
$$x_1 - 2x_2 \leqslant 2,$$

kusjuures x_1 ja x_2 peavad olema mittenegatiivsed täisarvud.

Tuues juurde täiendavad tundmatud x_3 ja x_4, saab ülesande viia kujule:

$$\begin{aligned} z &= 0 - 2(-x_1) - 1(-x_2) \\ x_3 &= 12 + 4(-x_1) + 3(-x_2) \\ x_4 &= 2 + 1(-x_1) - 2(-x_2). \end{aligned} \qquad (11)$$

Süsteemist (11) kohe väljakirjutatavaks lubatavaks alglahendiks on

$$z = 0, \; x_1 = x_2 = 0, \; x_3 = 12, \; x_4 = 2.$$

Sellele ülesandele vastav simplekstabel (tabel 1) viiakse simpleksmeetodi abil optimaalsele kujule (vt. tabelid 2—3; tabelis raamiga ümbritsetud element on vastaval simplekssammul juhtelemendiks):

	1	$-x_1$	$-x_2$
z	0	-2	-1
x_3	12	4	3
x_4	2	$\boxed{1}$	-2

Tabel 1.

	1	$-x_4$	$-x_2$
z	4	2	-5
x_3	4	-4	$\boxed{11}$
x_1	2	1	-2

Tabel 2.

	1	$-x_4$	$-x_3$
z	$^{64}/_{11}$	$^{2}/_{11}$	$^{5}/_{11}$
x_2	$^{4}/_{11}$	$-^{4}/_{11}$	$^{1}/_{11}$
$\rightarrow x_1$	$^{30}/_{11}$	$^{3}/_{11}$	$^{2}/_{11}$
x_5	$-^{8}/_{11}$	$-^{3}/_{11}$	$-^{2}/_{11}$

Tabel 3.

Et tabelis 3 on tundmatud x_1 ja x_2 mõlemad mittetäisarvulised, võib ükskõik kumma neist valida juhttundmatuks x_r. Kahjuks puudub üldine reegel juhttundmatu niisuguseks valikuks, mille korral oleks tagatud optimaalse täisarvulise lahendi leidmine lühimal viisil (s. o. vähima tehete arvuga). Vaadeldava näite lahendamisel valime kõigepealt juhttundmatuks x_1 (tabelis 3 noolekesega märgistatud). Kasutades eeskirja (10) ning tabeli 3 eelviimast rida, moodustatakse uus kitsendus

$$x_5 = -(^{30}/_{11} - [^{30}/_{11}]) - (^{3}/_{11} - [^{3}/_{11}])(-x_4) - (^{2}/_{11} - [^{2}/_{11}])(-x_3) = -^{8}/_{11} - ^{3}/_{11}(-x_4) - ^{2}/_{11}(-x_3), \qquad (12)$$

mis ongi juba kantud tabeli 3 viimasesse ritta. Et tabelil on nüüd duaalselt lubatav kuju, siis viiakse ta duaalset simpleksmeetodit kasutades optimaalsele kujule. Nii saadud tabelis 4 võetakse nüüd juhttundmatuks x_2 ning moodustatakse uus kitsendus, mis kantakse jälle tabeli viimasesse ritta. Rakendades veel kord duaalset simpleksmeetodit, saadakse tabel 5, millest tulenev erilahend

$$z = 5, \; x_1 = 2, \; x_2 = 1, \; x_3 = 1, \; x_4 = 2$$

ongi optimaalne täisarvuline lahend.

	1	$-x_5$	$-x_3$
z	$^{16}/_{3}$	$^{2}/_{3}$	$^{1}/_{3}$
$\rightarrow x_2$	$^{4}/_{3}$	$-^{4}/_{3}$	$^{1}/_{3}$
x_1	2	1	0
x_4	$^{8}/_{3}$	$-^{11}/_{3}$	$^{2}/_{3}$
x_6	$-^{1}/_{3}$	$-^{2}/_{3}$	$-^{1}/_{3}$

Tabel 4.

	1	$-x_5$	$-x_6$
z	5	0	1
x_2	1	-2	1
x_1	2	1	0
x_4	2	-5	2
x_3	1	2	-3

Tabel 5.

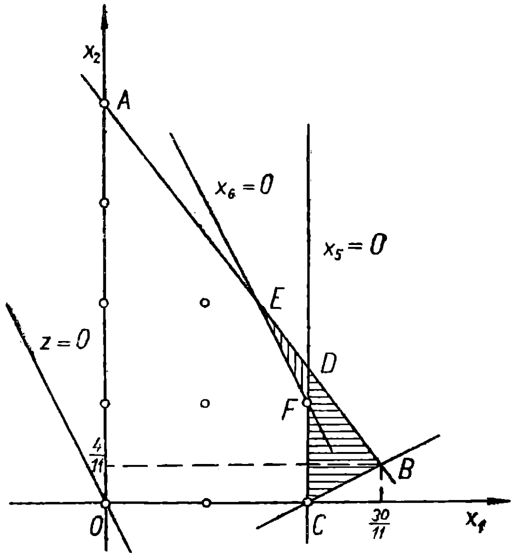
Siin on näiteks võetud kahe põhitundmatuga ülesanne selleks, et lahendusprotsessi oleks võimalik kujutada tasandil. Joonisel 2 tugevalt esile tõstetud punktid on vaadeldud ülesande lubatavad täisarvulised lahendid ja kumer hulknurk $OABC$ kõigi (ka mittetäisarvuliste) lubatavate lahendite piirkond. Selle ülesande mittetäisarvuline optimaalne lahend asub punktis $B(^{30}/_{11}, ^{4}/_{11})$, mille puhul sihifunktsiooni väärtus $z = {}^{64}/_{11}$. Eespool sissetoodud esimene lisatundmatu x_5 on x_1x_2-tasandil muidugi võrdne nulliga ning kitsendus (12) võrdusi (11) arvestades seega viidav kujule

$$x_5 = -{}^{8}/_{11} + {}^{3}/_{11}(2 - x_1 + 2x_2) + {}^{2}/_{11}(12 - 4x_1 - 3x_2) = 0$$

ehk

$$x_5 = 2 - x_1 = 0.$$

Seega lõikab kitsendus (12) hulknurgast $OABC$ välja horisontaalselt viirutatud ala, mille tulemusena saadakse uueks lubata-



Joonis 2.

vate lahendite piirkonnaks hulknurk $OADC$. Analoogiliselt viiakse tabelisse 4 kantud lisakitsendus x_1x_2-tasandil kujule

$$x_6 = -2x_1 - x_2 + 5 = 0.$$

See kitsendus lõikab hulknurgast $OADC$ välja vertikaalselt viirutatud ala, kusjuures saadav täisarvuliste koordinaatidega punkt $F(2, 1)$ on hulknurga $OAEFC$ tipuks ja ühtlasi ka ülesande optimaalseks lahendiks.

(*Järgneb*)

VIGURIGA ÜLESANDEID

6. Ühes Aafrika külas elab 800 naist. Kolm protsenti nendest kannab üht kõrvarõngast, ülejäänud 97 protsendi hulgast pooled kannavad kaht kõrvarõngast ja pooled mitte ühtegi. Mitut kõrvarõngast kokku need naised kannavad?

MAJANDUSMATEMAATIKA-ALASEST ETTEVALMISTUSEST TŠEHHOSLOVAKKIA SV-s

V. Tinn

Rahvamajanduse juhtimine kaasaja tasemel nõuab elektronarvutite ja matemaatiliste meetodite laialdast kasutamist, samuti uusimate juhtimismeetodite tundmist. Spetsialistide ettevalmistamine nendes valdkondades on tähtis ülesanne nii meie vabariigis kui ka mujal. Käesolevas arktiklis [1] püütaksegi tutvustada majandusmatemaatikute ja majandusinseneride ettevalmistamist Tšehhoslovakkia SV-s ja anda mõningane ülevaade olemasolevatest erialadest, õppeplaanidest ja väljaõppe liikidest, pretendeerimata kaadri ettevalmistamise probleemi üksikasjalisele käsitlemisele.

Kõikide erialade matemaatikuid valmistatakse ette Prahas, Karli Ülikooli (Tšehhoslovakkia vanim ülikool, asutatud 1348. a.) Matemaatika-Füüsikateaduskonnas järgmistel erialadel:

a) matemaatika õpetamine, lisaspetsiaalsustega: kujutav geomeetria, füüsika, filosoofia või kehaline kasvatus;
b) matemaatiline analüüs;
c) algebra ja geomeetria;
d) rakendusmatemaatika;
e) arvutusmatemaatika;
f) matemaatiline statistika;
g) matemaatilise statistika majanduslikud suunad.

Kõikide nende erialade üliõpilased tutvuvad ka programmeerimisega, kuid küllaltki väikeses mahus (4 nädalatundi ühe semestri jooksul). Programmeerimise praktika on rakendus- ja arvutusmatemaatika ning statistika erialadel. Täielikuma ettevalmistuse majandusmatemaatiliste meetodite ja elektronarvutite alal saavad vaid matemaatilise statistika majandussuundade üliõpilased, kellele loetakse selliseid kursusi nagu maatriksarvutus, tõenäosusteooria, matemaatiline statistika, Markovi protsessid, matemaatiline planeerimine, arvutusmeetodid, elektronarvutid ja programmeerimine, matemaatiline ökonoomika, rahvamajanduse planeerimine, mänguteooria ja otsustusfunktsioonid jne.

---

[1] Artikli autor töötas 1967/68. õ.-a. vältel teaduslikus komandeeringus viibides Praha Kõrgema Majanduskooli juures, kuid tutvus ka teiste Tšehhoslovakkia SV kõrgemate õppeasutustega.

Ülikooli lõpetanud matemaatikud töötavad enamuses vaid teoreetilise kallakuga teaduslikes uurimisinstituutides. Suuremates rakendusliku kallakuga arvutuskeskustes on ainult 2—3 matemaatikut, kes ka seal töötavad teoreetiliste probleemide kallal.

Põhilisteks kohtadeks, kus valmistatakse ette programmeerijaid ja majandusmatemaatika ala spetsialiste, on kõrgemad majanduskoolid Prahas ja Bratislavas.

Tutvustamegi järgnevalt Praha Kõrgemas Majanduskoolis õpetatavaid erialasid.

1. **Poliitilise ökonoomia** erialal valmistatakse ette selliseid insener-ökonomiste, kes oleksid võimelised töötama majandusteooria ja rahvamajanduse juhtimise ning planeerimise valdkonnas.

Põhikursusteks on sellel erialal teoreetilised ühiskonnateadused (poliitökonoomia, filosoofia, teaduslik kommunism, sotsioloogia) ja üldained nagu juhtimisteooria, matemaatika, statistika, arveldus ning raamatupidamine, tehnoloogia alused jne. Kitsamat eriala andvateks kursusteks on kaasaegne sotsialism ja kapitalism, majandusteooriate ajalugu, rahvamajanduse ajalugu, finantsküsimused, ökonomeetrika, küberneetika jne.

Selle suuna lõpetajad asuvad tööle teaduslike töötajatena majandusinstituutidesse, õppejõududena kõrgematesse koolidesse ja spetsialistidena riigiorganeisse.

2. **Rahvamajanduse juhtimise ja planeerimise** erialal valmistatakse ette spetsialiste rahvamajanduse kompleksete küsimuste, rahvamajanduse bilansi, rajoonide planeerimise ja investeeringute majandusliku efektiivsuse alal.

Põhikursusteks on siin teoreetilised ühiskonnateadused, matemaatika, juhtimisteooria, tehnoloogia alused jne. Profileerivate kursuste hulka kuuluvad investeerimiste, tehnika, kaadri jne. perspektiivide väljatöötamine, hindade küsimused, samuti rahvamajanduse ajalugu, majandusstatistika, majanduspiirkondade planeerimine, matemaatiliste meetodite rakendamine planeerimisel jne.

Lõpetajad asuvad tööle ettevõtete plaaniosakondades, ehitus- ja projekteerimisorganisatsioonides, ühiskondliku tarbimise juhtimisorganeis, plaanikomiteedes ja uurimisinstituutides.

3. **Rahanduse** eriala valmistab ette spetsialiste rahandusorganeile, pankadele, suurte ettevõtete finantsosakondadele jne. Kõrvuti põhikursustega ja rahandusalaste erikursustega käsitletakse siin ka arvutus- ja organisatsioonitehnikat, matemaatilisi meetodeid rahanduses jne.

4. **Juhtimistööde mehhaniseerimise ja automatiseerimise** erialal valmistatakse ette töötajaid, kes tunnevad informatsiooni töötlemise süsteemide projekteerimist, ettevõtte arvestuste metoodikat, organisatsiooni, tehnikat ja vorme, informatsioonimassiivide töötlemist elektronarvuteil ning perfokaartarvuteil, raamatupidamise üksikute lõikude mehhaniseerimist ja selle juhtimist.

Peale teoreetiliste ühiskonnateaduste ja põhikursuste (juhtimisteooria, matemaatika, statistika jne.) loetakse matemaatilist planeerimist, üksikute tööstusharude arvestust ja kalkulatsiooni, majandusliku informatsiooni töötlemise mehhaniseerimist ja automatiseerimist, küberneetikat, informatsiooniteooriat ja ökonomeetrikat. Lisakursustena (vastavalt tulevasele töökohale) käsitletakse üksikasjaliselt juhtimisteooriat, ettevõtte organiseerimist ja ökonoomikat, finantseerimist, seadusandlust, majanduslikku analüüsi või programmeerimise automatiseerimist, algoritmilisi keeli, masinaarvutusjaamade ja arvutuskeskuste töö organiseerimist jne.

Lõpetanud lähevad tööle eelkõige arvelduse mehhaniseerimise ja automatiseerimise valdkonda: organisaatoritena, projekteerijatena, arvutusjaamade või -keskuste juhtivate töötajatena ettevõtetesse ja ministeeriumidesse.

5. **Majandusmatemaatiliste arvutuste** erialal valmistatakse ette töötajaid matemaatiliste meetodite rakendamiseks praktikasse. Lõpetajad on võimelised matemaatiliselt sõnastama tegelikkuses esilekerkivaid ülesandeid, organiseerima vajalike algandmete kogumist ja teostama sellega seotud statistilist analüüsi.

Peale põhikursuste (ühiskonnateadused, matemaatika, statistika jne.) käsitletakse sellel erialal veel põhjalikult matemaatilise planeerimise kursusi, majandusliku informatsiooni automatiseeritud töötlemist, informatsiooniteooriat, küberneetikat, ökonomeetrikat. Vastavalt praktika vajadustele süvendatakse kuulajate teadmisi matemaatikast, statistikast või informatsiooni töötlemise automatiseerimisest ja mehhaniseerimisest. Need teadmised antakse selliste valikkursuste näol, nagu lineaarsete mudelite teooria, mänguteooria, mittelineaarne planeerimine, dünaamiline planeerimine, massilise teenindamise teooria, sotsiomeetrias graafide teooria jne. Lõpetajad on võimelised konstrueerima majandusprotsesside mitmesuguseid matemaatilisi mudeleid ning töötlema neid elektronarvutil. Samuti on nad võimelised teostama vajalikku statistilist analüüsi.

Selle eriala lõpetajaid kasutatakse suurte ettevõtete operatsioonanalüüsi osakondades, ministeeriumide ja nõukogude organite majandusosakondades.

6. **Majandusainete õpetamise** erialal valmistatakse ette pedagooge majanduskeskkoolidele.

Õppeprogrammi aluseks on siin teoreetilised ühiskonnateadused, poliitökonoomia, rahvamajanduse planeerimine, juhtimistööde või arvelduse mehhaniseerimine ja automatiseerimine, sotsioloogia, matemaatika, statistika jne.

Peale nende õpetatakse veel teisi majandusalaseid distsipliine, aga ka pedagoogikat ja psühholoogiat.

7. **Tööstuse ökonoomika ja juhtimise** erialal valmistatakse ette insener-ökonomiste, kes on võimelised töötama ettevõtete ja trustide majandusliku tegevuse juhtimisel, aga ka kohalike nõukogude organites, kus on tegemist tootmisplaanide koostamisega vastavalt turuhindade, palkade, finants-, investeerimis- ja varustuspoliitikale, turustamisega kodu- ja välismaale. Omandanud praktika, võivad nad töötada ka tööstusministeeriumides, keskorganites, uurimisinstituutides ja kõrgemates koolides.

Põhikursusteks on sel erialal teoreetilised ühiskonnateadused, juhtimisteooria, matemaatika, statistika, arveldus. Peale selle käsitletakse arvutus-

Tabel 1

	Majandusmatemaatiliste arvutuste eriala									Juhtimistööde automatiseerimise ja mehhaniseerimise eriala								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Töölisklassi ja TšKP ajalugu	3/—									3/—								
Marksistlik filosoofia		1/1	1/1				2/—				1/1	1/1				2/—		
Teaduslik kommunism		2/1	1/1								2/1	1/1						
Poliitiline ökonoomia	2/2	2/2	2/2	2/2					1/2	2/2	2/2	2/2	2/2					1/2
Matemaatika	4/2	4/3	4/2							4/2	4/2	4/2						
Statistika		2/2	2/2	4/2	4/2						2/2	2/2	4/2					
Loogika	2/—									2/—								
Arvutustehnika tehnoloogia	2/2	2/2								2/2	2/2							
Kehaline kasvatus	—/2	—/2	—/2	—/2	—/1	—/1	—/1	—/1		—/2	—/2	—/2	—/2	—/1	—/1	—/1	—/1	
Arvepidamine			2/2	2/2	2/2							2/2	2/2	2/2				2/2
Vene keel																		
Matemaatiline planeerimine				4/2			3/2	2/2					4/2	2/2	4/2			
Maj. statistika või strukt. analüüs						2/2												
Juhtimisteooria						2/—									2/—			
Rahvamajanduse planeerimine					4/—									4/—				
Teaduslik programmeerimine					2/2	4/2			4/—									
Maj. inform. automatiseerimine						2/2	—/4								2/2	2/2	2/2	
Matemaatiline statistika						2/2	2/2											
Psühholoogia ja sotsioloogia							2/—		2/—							2/—		2/—
Rahandus							4/—							4/—				
Eriseminar								—/3										—/3
Küberneetika alused								2/—										
Valitud peatükke mat. statistikast või massil. teenindamise mudelid								2/2										
Matemaat. dünaamika või valitud probleeme matemaat. planeerimisest								2/—										
Valitud peatükke ettevõtte ökonoomikast, ökon. ajaloost, maailmaökonoomikast								6/—										

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Valikseminar									—/3								—/3	
Majandusõigus														4/—				
Ettevõttesisene arveldus ja kalkulatsioon															4/2	2/2		
Majandusliku informatsiooni mehhaniseerimine														2/2	2/2	2/2		
Valitud peatükke ökonoomikast																	3/—	
Tööstuse analüüs																		
Arveldus ja majandusl. anal.																	4/2	
Kontroll või kübern. alused																	2/—	

Tabel 2

Kursuse nimetus	Kestus semestrit	Õppetöö sagedus	Põhilised õppeained	Kursuse maht tundi	Millega kursus lõpeb	Märkused
1	2	3	4	5	6	7
Ettevõtete direktorite kursus	3	1 nädal kahe kuu järel	Rahvamajanduse uus juhtimissüsteem Rahvamajanduse arengu analüüs ja perspektiivid Rahvusvaheline tööjaotus — Tšehhoslovakkia suhted maailmamajandusega Teaduslik-tehniline revolutsioon, tehnilise arengu perspektiivid Matemaatiliste ja statistiliste meetodite kasutamine ettevõtte juhtimisel Tööstusettevõtte juhtimise ökonoomika uue juhtimissüsteemi korral Juhtimise teooria ja praktika Seadusandluse valitud probleemid	8 16 8 18 46 47 132 20	 A A A E E A	Kursus lõpeb kirjaliku lõputööga
Rahvamajanduse juhtimine ja planeerimine	4	4—5 kolmepäevast õppeperioodi igas semestris lõpeb kahenädalase õppekogunemisega	Sotsialistliku majanduse kasvuteooria Sotsialistliku rahvamajanduse juhtimise teooria Statistilised ja matemaatilised meetodid Sotsialistliku maailmasüsteemi ökonoomika Kapitalistliku majandussüsteemi ökonoomika Valitud peatükke filosoofiast Spetsialiseerumine	100 74 90 24 24 40 60	A2× A2×, S A, E A A E E	Kursuste kuulajad on keskasutuste töötajad, kellel on vähemalt 5 aastat praktikat ja kavatsus täiendada end aspirantuuris. Kursus lõpeb kirjaliku lõputööga

ja organiseerimistehnikat, teaduslikku planeerimist, rahvamajanduse planeerimist, rahvamajandusõigust, majandusgeograafiat jne.

8. **Põllumajanduse ökonoomika ja juhtimise** erialal valmistatakse ette insener-ökonomiste põllumajandusettevõtetele. Selle ala spetsialistid peavad oskama teha jooksvat ja pikaajalist majanduslikku analüüsi, kooskõlastada tootmisplaane finants-investeerimis- ja tööplaanidega, juhtida ettevõtte finantstegevust, kaasa arvatud materiaalne huvitatus ning sidemed panga, tellijate ja varustajatega.

Õppeprogrammi aluseks on kõrvuti ühiskonnateaduste, juhtimisteooria, matemaatika ja arveldusega ka arvutus- ja organiseerimistehnika, teaduslik planeerimine, rahvamajanduse planeerimine, rahandus, majandusõigus, majandusgeograafia, keeled jne.

Lõpetajaid rakendatakse suurtes põllumajandusettevõtetes või neid juhtivais organeis ning pärast praktika omandamist ka ministeeriumides, teadusliku uurimise instituutides ja mujal.

9. **Transpordi ning side ökonoomika ja juhtimise erialal** valmistatakse ette spetsialiste vastava ala ettevõtetele.

Põhikursustes käsitletakse ühiskonnateadusi, juhtimisteooriat, matemaatikat, statistikat, arveldust, arvutus- ja organiseerimistehnikat, matemaatilist planeerimist, rahvamajanduse planeerimist, rahandust, majandusõigust, majandusgeograafiat, keeli jne. Erialastest ainetest saadakse ettevalmistus transpordi ja sideorganisatsioonide ökonoomika, kommerts- ja kaubandustegevuses, side ja transpordi organiseerimises, selle tegevuse analüüsis, mehhaniseerimises ja automatiseerimises.

10. **Sisekaubanduse ökonoomika ja juhtimise** erialal saadakse teadmisi töötamiseks sisekaubanduse juhtivatel kohtadel. Lõpetajaid rakendatakse kaubandusorganisatsioonides, tootmisettevõtete turustusorganeis, hotellides, reisibüroodes jne.

11. **Väliskaubanduse ökonoomika ja juhtimise erialal** valmistatakse ette spetsialiste väliskaubanduseks kodu- ja välismaal. Lõpetajaid rakendatakse väliskaubandusettevõtete referentidena, delegaatidena välismaal, samuti ka konjunktuuri uurimisel, hindade moodustamisel, kontrolli alal jne. Lõpetajad leiavad tööd ka firmade turustusorganeis, kes otse ekspordivad oma kaupa.

Et anda ettekujutust üksikute ainete mahust, nende õpetamise ajast ja üliõpilaste koormusest semestri vältel, on tabelis 1 toodud kahe eriala täielikud õppeprogrammid 1967/68. õppeaastal. Tabelis on esitatud loengute ja praktikumide (L/P) arv nädalas üheksal õppesemestril. Kümnes semester on ette nähtud diplomitööks ja riigieksameiks. Plaanidest on välja jäetud tootmispraktika neljandatel kursustel. Riigieksamid on poliitökonoomias ja erialal. Peale selle on kolmandatel kursustel 3 nädalat ja neljandatel kursustel 6 nädalat sõjalist õpetust.

Kõrvuti statsionaarse osakonnaga töötab Kõrgemates Majanduskoolides ka mittestatsionaarne osakond, kus valmistatakse ette spetsialiste järgmistel erialadel: poliitökonoomia, majanduslike ainete õpetamine, rahvamajanduse juhtimine ja planeerimine, töö ökonoomika, rahandus, majandusmatemaatilised arvutused, juhtimistööde mehhaniseerimine ja automatiseerimine, administratiivtööde mehhaniseerimine, arveldus ja majandustegevuse analüüs, tööstuse ökonoomika ja juhtimine, materiaal-tehniline varustamine, põllumajanduse juhtimine ja ökonoomika, side ja transpordi juhtimine ja ökonoomika, sisekaubanduse ökonoomika ja juhtimine, väliskaubanduse ökonoomika ja juhtimine. Õppeplaanid ühtivad või on sarnased statsionaarse osakonna vastavate või analoogiliste erialade plaanidega.

Mittestatsionaarses osakonnas on õppetöö samuti 5 aastat ja lõpetajad saavad statsionaarse osakonna lõpetajatega võrdväärse diplomi.

Kõrvuti statsionaarse ja mittestatsionaarse osakonnaga töötavad veel kursused nendele spetsialistidele, kes on omandanud kõrgema hariduse varem ja pole kursis tänapäeva teaduse saavutustega. Sellised kursused toimuvad tavaliselt mitme semestri jooksul ja lõpevad arvestuste, eksamite ja diplomitööle analoogilise tööga (tavaliselt tehakse lõputööd just nende ettevõtete baasil, kus kursuslased töötavad).

Tabelis 2 on esitatud mõningate selliste kursuste õppeprogrammid.

Peale tabelis 2 toodute toimuvad veel järgmised kursused: töö organiseerimine ja ökonoomika, tootmise juhtimine ja organiseerimine tööstusettevõttes, majanduspiirkonna ökonoomika, uurimistööde juhtimise organiseerimine ja ökonoomika ning uue tehnika juurutamine, põllumajanduse juhtimine, teaduslik-tehnilise arengu ja kapitaalmahutuste efektiivsus, rahandus, arenevate maade majandus, majandusdistsipliinid õpetajatele, materjalimajandus, turustamine, transpordi ja side ökonoomika, sisekaubanduse ökonoomika.

Nende kursuste kuulajatelt on üldreeglina nõutud kõrgemat haridust. Tänapäeval töötab aga juhtivatel kohtadel ka praktikuid, kel puudub erialane kõrgem haridus. Nende jaoks on korraldatud erakorralised kursused.

Analoogiliste õppeplaanide järgi ja sarnastel aladel valmistatakse spetsialiste ette ka Bratislava kõrgemas majanduskoolis. Teatud kontingendi (20 inimest aastas) juhtimisala spetsialiste laseb välja ka Tšehhoslovakkia kõrgem tehnikakool.

Kõrvuti ühiskonnateaduste ja teiste põhiainetega saavad selle ala üliõpilased ettevalmistuse operatsioonanalüüsi, statistika, automatiseerimise aluste, kaasaja arvutustehnika, lineaarse ja mittelineaarse planeerimise, mänguteooria, järjekordade teooria, matemaatilise varustamise, uuendamise ja hoolduse teooria, programmeerimise, informatsiooni massilise töötlemise jne alal.

Lõpetajad lähevad tööle juhtivatele kohtadele masinaehitusettevõtetes.

Samas valdkonnas on avatud kursused praktikutele; need lõpetab aastas 50—80 inimest. Majandusmatemaatiliste meetodite ja arvutustehnika kasutamist praktikutele tutvustatakse ka ministeeriumide ja keskasutuste uurimisinstituutide poolt korraldatud kursustel.

Tabel 2 (järg)

1	2	3	4	5	6	7
Tehnikute kursus	5	Kolmepäevased õppeperioodid kolme nädala järel, neli kahenädalast ja kümme ühenädalast õppekogunemist	Kapitalismi poliitökonoomia	86	E	Kursused on mõeldud tehnilise erialaga ja kõrgema haridusega töötajate teadmiste täiendamiseks majanduse alal. Kursus lõpeb kirjaliku tööga
			Rahvamajanduse ajalugu	22	E	
			Filosoofia	56	E	
			Arvutustehnika kasutamine	18	A	
			Arveldustööd	72	E2×	
			Sotsialismi poliitökonoomia	68	E	
			Teaduslik kommunism	48	E	
			Majandusõigus	30	E	
			Võõrkeel	112	A3×, E	
			Hindade moodustamine ja planeerimine	42	E	
			Matemaatilise statistika meetodid	112	E	
			Rahvamajanduse planeerimine	116	E	
			Rahandus	40	E	
			Tehnilise arengu juhtimine ja efektiivsus	32	E	
			Tööstusharu ja ettevõtte ökonoomika	62	E	
			Juhtimisteooria	15		
			Valikseminar	15		
Teadusliku juhtimise kursus	2	Kolm päeva kahe kuu järel	Teaduslik juhtimine	5		Kuulajateks on rahvamajanduse keskorganite juhtivad töötajad. Kursus lõpeb kirjaliku tööga
			Teadusliku juhtimise arengu ülevaade	3		
			Küberneetika alused	19		
			Ühiskondlike süsteemide ja sots. ühiskonna juhtimine	13		
			Organiseerimise teooria alused	14		
			Juhtimise tsükli analüüs	17		
			Majanduse juhtimise tehnilised vahendid	20		
			Juhtivad kaadrid ja nende töö	20		
			Juhtimistöö erinevail juhtimisastmeil	13		
			Juhtimise efektiivsuse tõstmise põhisuunad	7		
Majandussotsioloogia ja psühholoogia	2	1 päev nädalas	Valitud küsimusi filosoofiast	12		Kursus on ette nähtud ministeeriumide ja ettevõtete töötajatele, lõpeb kirjaliku tööga
			Rahvamajanduse juhtimise teooria	24		
			Sotsioloogia alused	30	E	
			Sotsioloogia uurimismeetodid	24	E	
			Majanduspsühholoogia	30	E	
			Sotsioloogia ja psühholoogia aktuaalseid küsimusi	30		
Matemaatiliste meetodite kasutamine majanduses	4	Pool päeva 1 kord nädalas	Lineaarsete mudelite teooria ja rakendamine	112	A, E	Kursus on ette nähtud kõikidele juhtivatele töötajatele, lõpeb kirjaliku tööga
			Harudevaheliste suhete probleemid	14	A	
			Programmeerimine elektronarvutitel	42	A	
			Elektronarvutitel programmeerimise kasutamine	14	E	
			Tõenäosuslike mudelite kasutamine	42	E	

Tabel 2 (järg)

1	2	3	4	5	6	7
a) Sotsialistlikud rahvusvahelised majandussuhted b) Rahvusvahelised suhted	4		Sissejuhatus rahvusvahelistesse suhetesse	10		Kursus on ette nähtud keskasutuste töötajatele, lõpeb kirjaliku tööga
			Valitud küsimusi filosoofiast	30	E	
			Valitud probleeme poliitökonoomiast	34	E	
			Majandusliku analüüsi metoodika	40	A	
			Kaasaja maailmamajandus	40	E	
			Kaasaja poliitiline maailm	40	E	
			Riigiõigus	20	E	
			Rahvusvahelised majandussuhted	40	E	
			Rahvusvahelised poliitilised suhted	44	E	
			Rahvusvaheline õigus	30	E	
			Tšehhoslovakkia majanduse välissuhted	20	E	
			Tšehhoslovakkia välispoliitika	30	E	
			Valikkursus	40	A	

Märkus: Käesolevas tabelis on kasutatud lühendeid:
A — arvestus,
E — eksam,
S — seminaritöö,
A2× — tuleb sooritada 2 arvestust.

KOOLIMATEMAATIKA JA KAASAEG[1]

O. Prinits

Sissejuhatuseks

Elame teaduste tormilise arengu ajastul, mil täppisteaduste osa on domineeriv. Matemaatika areng toimub peamiselt laienenud rakenduste baasil. See protsess kajastub ka koolimatemaatikas. Kui lugeda matemaatika õpetamise eesmärkideks koolis:

1) igale haritud inimesele vajaliku teadmiste miinimumi andmist;

2) mistahes liiki praktilisele tegevusele ettevalmistamist ja

3) eelduste loomist õpingute jätkamiseks kõrgemas koolis, siis need eesmärgid on mõnevõrra üksteisele vasturääkivad ja see muudab programmide koostamise, eriti kaasajal, keerukaks.

Matemaatika õpetamise moderniseerimine on suurel määral seotud konkreetsete, loetletud eesmärkidest tulenevate nõudmiste muutumisega. Muutub näiteks mõiste «haritud inimene». Möödunud sajandi haritud inimene ei ole haritud inimene tänapäeva mõttes. Matemaatika osas on see muutus eriti tunnetatav. Võib oletada, et lähemas tulevikus peaksid haritud inimese teadmiste hulka kuuluma ka mõisted nagu «informatsioon» ja «strateegia». Juba praegu on kaheldav, kas inimene, kes ei tee vahet mõistete «juhuslik» ja «seaduspärane» vahel, on haritud. Seepärast ongi praegu koolimatemaatika moderniseerimisel kõigis maades probleemiks tõenäosusteooria ja matemaatilise statistika elementide õpetamine. Analoogiline on probleem matemaatilise loogika mõistetega.

Õppeplaanide sagedased muutmised kõrgemates koolides, mille tagajärjel ikka enam lülitatakse matemaatilisi distsipliine seniste traditsiooniliste nii matemaatilise kui ka mittematemaatilise suunaga teaduskondade õppeplaanidesse, viitab faktile, et on muutunud ja muutumas kõrgema matemaatika sisu. Kaasaegne matemaatika revolutsioon on seotud ühelt poolt elektronarvutite ja

[1] Ettekanne Eesti NSV matemaatikute ja füüsikute konverentsil «Täppisteadused ja haridus» 1968. a. mais Tartus.

küberneetikaga, teiselt poolt kogu matemaatika algebraseerumisega. Seetõttu nõuavadki teaduslikud asutused kõrgematelt koolidelt kaasaegsemal tasemel ettevalmistatud spetsialiste, kõrgem kool nõuab keskkoolilt kaasaegsema ettevalmistusega üliõpilaskandidaate, keskkoolide õpetajad ja metoodikud nõuavad algklasside õpilaste ettevalmistamise tõhustamist ja algõpetuse metoodikud on oma sihikule võtnud lasteaiad. Teame, et matemaatika õpetamise osas on see protsess eriti silmatorkav ja selle põhjustest on korduvalt kõneldud ja kirjutatud. Niisiis, on tekkinud olukord, et teaduste arengu pidurdajaks on saanud kool, täpsemalt küll koolidele kinnitatud programmid. Sellest piduris vabanemiseks on kõikjal maailmas hakatud otsima vahendeid.

Kui 17. sajandil toodi matemaatikasse muutuv suurus koos tuletise ja integraali mõistega, siis koputasid need mõisted kaua kooli ukse taga, enne kui nad sisse lasti. Kaasaegne matemaatika areng on tormilisem, tema rakendusalad tohutu laiad ja seetõttu tõusis koolimatemaatika kaasajastamise probleem päevakorda juba umbes 15 aastat pärast esimese elektronarvuti loomist. Suure rahvusvahelise tähtsusega oli 1959. a. Prantsusmaal Royaumont'i linnakeses toimunud seminar teemal «Uus mõtlemine matemaatikas», millest võtsid osa paljude, peamiselt Lääne-Euroopa maade esindajad. Seal püstitati esimesed laiaulatuslikumad nõuded koolimatemaatika ümberkorraldamiseks, millest kõige revolutsioonilisem oli nimeka prantsuse matemaatiku Dieudonné ettepanek: «Eukleides peab lahkuma!»

Juba enne Royaumont'i seminari olid mitmete Ameerika ülikoolide juures loodud matemaatikute rühmitused koolimatemaatika reformimiseks. Neist tunnustatumaks on saanud professor Begle'i juhtimisel töötanud rühm («School Mathematics Study Group») esialgu Yale'i, hiljem Stanfordi ülikooli juures. On märkimisväärne, et selle rühmituse tööd finantseeris föderaalvalitsus. Ameerika Ühendriikides laialt levinud liikumine koolimatemaatika reformimiseks kandus peatselt üle ka Kanadasse.

Lääne-Euroopa maade esindajate kokkutulekud koolimatemaatika reformimise küsimustes jätkusid pärast Royaumont'i seminari Jugoslaavias Dubrovniku linnakeses 1960. a. ja seejärel 1963. a. Ateenas. Dubrovnikus kohtusid paljude maade esindajad koolimatemaatika reformi põhiideede väljatöötamiseks ning Ateenas võidi juba küsimusi detailselt arutada.

Royaumont'i seminaril kutsuti üles kõikjal alustama tööd koolimatemaatika reformimiseks. Selle üleskutse tulemusena loodigi paljudes riikides oma komisjonid. Kui käesoleva sajandi algul haarasid koolimatemaatika reformitaotlused peamiselt vanemaid klasse, siis nüüd ulatusid reforminõuded kuni esimeste matemaatikatundideni I klassis. Seega on kaasaja nõuded palju ulatuslikumad, mis muudab nende realiseerimise hoopis raskemaks ja, mis väga tähtis, palju kulukamaks. Seetõttu liitusid mitmed riigid koolimatemaatika reformimiseks. Tihedas koostöös töötavad näiteks Hollandi ja Belgia matemaatikud, kuid, mis meile eriti huvitav, Taani, Norra, Rootsi ja Soome asutasid 1960. a. Koolimatemaatika Moderniseerimise Põhja Komitee. Selle komitee töös on initsiatiiv kindlalt rootslaste ja taanlaste käes. Rootsis ilmunud uued matemaatika kooliraamatud on kaasaegse õpiku toredateks näideteks.

Koolimatemaatika reformimisega on aktiivselt tegeldud ka sotsialismimaades. Jugoslaavia matemaatikud võtsid osa Lääne-Euroopa riikide poolt organiseeritud seminaridest. Tšehhide ettepanek sotsialismimaadele ühinemiseks uute reformitaotluste elluviimisel ei ole veel vastu võetud. Väga energiliselt töötatakse Saksa Demokraatlikus Vabariigis ja eriti Berliini ülikooli juures avatud Koolimatemaatika Instituudis noore professori K. Härtigi juhtimisel.

Koolimatemaatika kaasajastamisest Belgias

Kaasaegse koolimatemaatika kursuse väljatöötamisel on belglaste ettepanekud kõige radikaalsemad. Belgia nimekad entusiastid professor Servais' juhtimisel on välja töötanud keskkooli matemaatika uue programmi ja eriti huvipakkuvad on professor Papy õpikud, mis oluliselt erinevad traditsioonilistest kooliraamatutest. Olgu mainitud, et Belgia koolides on keskkooli nooremas astmes (12—15 aastased õpilased) matemaatikat 4 tundi nädalas. Professor Servais' koostatud programmi järgi, mida ta tutvustas Ateenas 1963. a., tuleb sellel astmel käsitleda muuhulgas järgmisi küsimusi.

Hulgad (kusjuures tutvustatakse ka alamhulkade hulka), operatsioonid hulkadega, kaasa arvatud sümmeetriline vahe $A \triangle B$, kvantorid ja korrutishulk $A \times B$.

Relatsioonid ja funktsioonid, kusjuures jõutakse hulkade võrdvõimsuse ning homomorfismi ja isomorfismi mõisteteni.

Keskkooli vanem aste (klassid III—I, 16—18 aastased õpilased) jaguneb Belgias kahte suunda: klassikaline ja moodne. Kummaski neist figureerivad matemaatika kallakuga klassid, kus matemaatikat õpetatakse 7 tundi nädalas. Majanduskallakuga klassides ja vanade keelte klassides on matemaatikat 3 tundi nädalas ning nn. teaduste B harus ja ladina keele ning täppisteaduste harus 5 tundi nädalas. Matemaatika kallakuga klasside matemaatika programmi on planeeritud järgmised teemad:

III klassi kavas on:

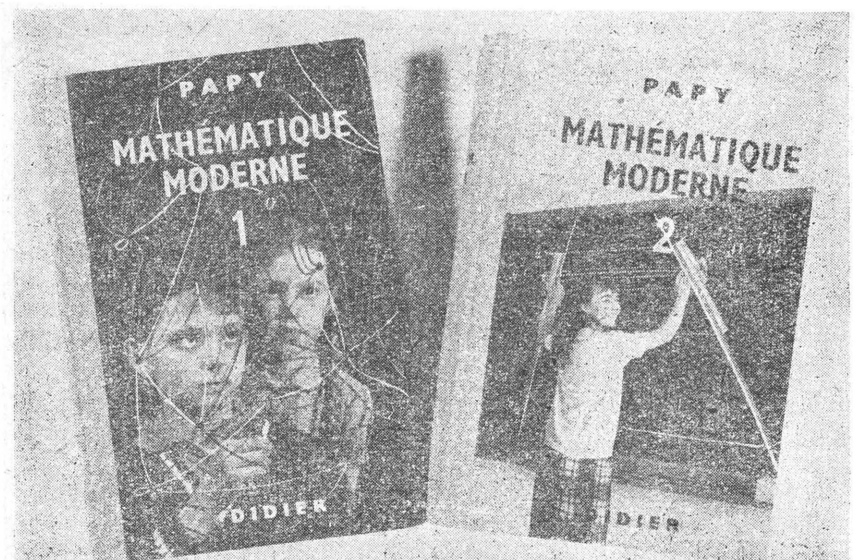
Naturaalarvude hulk koos Peano aksiomaatikaga. Sirge ja tasand kui punktide hulgad. Siin tutvutakse ka rühma mõistega ja isomorfsete rühmadega, täisarvude järjestatud ringiga ning kommutatiivse ja täielikult järjestatud reaalarvude korpusega. Edasi on selle klassi kavas numbrilise arvutamise küsimused, kus antakse ka absoluutse ja relatiivse vea mõiste; logaritmid, progressioonid, ühe ja mitme muutujaga polünoomide ring üle korpuse, üle ringi; ruutvõrrandid. Siis veel vektorite kommutatiivne rühm tasandil, vektorite ja punktide koordinaadid, sirge võrrandid, kahe tundmatuga lineaarne võrrandisüsteem, nelja elemendiga maatriksid ja determinandid, kahe tundmatuga esimese astme võrratused ja võrratusesüsteemid, lineaarse planeerimise küsimusi, üldised afiinsed teisendused, meetriline eukleidiline geomeetria tasandil, kirjeldav statistika, mis hõlmab küsimusi kuni lineaarse korrelatsioonini.

II klassi kavas on:

Kompleksarvude korpus, kaasa arvatud kompleksarvu n-es juur, veel kord rühmad, ringid, korpused (teema on kordava iseloomuga); vektorruumid, afiinne ruum, eukleidiline geomeetria ruumis, lõplikud tõenäosuse ruumid (käsitluses jõutakse kuni suurte arvude seaduseni), meetriline ruum ja topoloogia, pidevad funktsioonid.

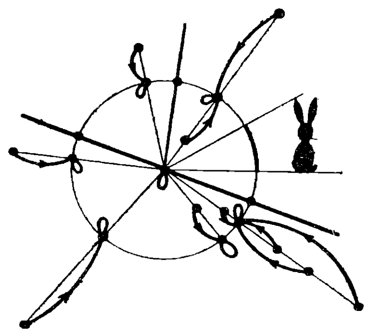
I klassi kavas on:

Diferentsiaalarvutus kuni Taylori ja Maclaurini valemini, integraalarvutus koos asendusvõtte ja ositi integreerimise võttega ja tõenäosusteooria aksiomaatika.



Juba nimetatud Papy raamatud on koostatud sellele programmile vastavalt. Papy alustas oma õpikute katsetamist tütarlaste gümnaasiumis, kus valmistati ette lasteaia kasvatajaid. On mõistetav, et selle kooli õpilastel puudus eriline huvi matemaatika vastu. Papy püüdis neile esitada ainet mängulähedasena, tuginedes kõige tavalisematele igapäevastele mõistetele nagu isa, ema, vend jne. Õige põgusalt peatume Papy esimese raamatu juures. See õpik on mõeldud 12—13 a. lastele (meie VI kl.). Siin puudub jaotus algebraks ja geomeetriaks. Autor läheb täiesti vabalt üle puhtloogilistelt või -algebralistelt teemadelt geomeetrilistele ja vastupidi ja seda isegi ühe teema ulatuses. Papy on arvamisel, et kool peab andma õpilastele ettekujutuse matemaatikast kui tervikust. Õpik sisaldab küllaldase hulga ülesandeid. Raamatut võib lugeda tänapäeva polügraafia parimate saavutuste hulka. Siin kasutatakse kuni seitset eri värvi, mis peab õpilastes esile kutsuma «isu» seal käsitletava aine vastu. Raamat tervikuna sisaldab järgmisi teemasid:

I. Hulkade algebra elemendid (hulgad, alamhulgad, ühisosa, ühend, vahe, hulkade algebra).



Illustratsioone Papy õpikutest.

II. Algteadmised geomeetriast (geomeetria algmed, teisendused tasapinnal, paralleelprojektsioon ja järjestus, ekvivalentsed punktipaarid (vektorid), paralleellüke, tsentraalsümmeetria).

III. Binaarsed suhted ja funktsioonid (suhted, mõned suhete klassid, suhete kompositsioon, ekvivalentsus, funktsioonid).

Illustratsioone Papy õpikutest.

IV. Teoreetilise aritmeetika elemendid (kardinaalarvud, liitmine, korrutamine, kahendsüsteem, täisarvud).

V. Abstraktse algebra elemendid (permutatsioonid, rühmad). Raamatus on aga teemade järjestus teine. I teemale järgnevad näiteks geomeetria algmed, edasi III teema, seejärel permutatsioonid, siis teisendused tasandil jne. Aine käsitlus on raamatus kohati väga abstraktne. Juba 4. leheküljel leiame näiteks võrduse omadused (reflektiivsus, sümmeetria ja transitiivsus). 22. leheküljel tutvustatakse antud hulga alamhulkade hulka.

Raamatust leiame üheainsa traditsioonilise teema — geomeetria algmed, kuid selle käsitlus on tavalisest täiesti erinev. Tasandilisi kujundeid vaadeldakse punktihulkadena; vaadeldakse näit. ruutu ja ringi juhul, kui ringjoon kuulub sellesse punktide hulka, ja juhul, kui ei kuulu. Vaadeldakse geomeetriliste kujundite ühendeid ja ühisosi. Näit. $A \cap B$, kus A ja B on sirged, võib olla tühi hulk $\varnothing$ (sirged on $\|$), ühest punktist koosnev hulk (lõikuvad) või $A = B$ (ühtivad). Seejärel esitatakse aksioomide süsteem, millega tehakse katset tutvustada matemaatika deduktiivset käsitlust. Esimesed aksioomid on: *Tasand π on lõpmatu punktide hulk ja sirge on tasandi lõpmatu pärisalamhulk,* samuti 5. aksioom: *igale sihile vastab üksainus teine siht, mida nimetatakse esimese ristsihiks*, kusjuures ristumise mõiste on vastastikune, mistahes kaks sirget, mis vastavad vastastikku ristuvatele sihtidele, lõikuvad. Hiljem tulevad aksioomid, mis on seotud sirge ja tasandi orientatsiooniga. Aksioomide loetelu lõpetavad 9. aksioom *rööpküliku diagonaalid lõikuvad teineteisega* (seda kasutatakse Paschi teoreemi tõestamiseks: iga sirge, mis lõikab kolmnurga üht külge, lõikab ka selle kolmnurga üht teist külge); ja 10. aksioom, milles väidetakse vektorite võrdsuse transitiivsust.

Väga karakteerne Papy õpikule on kolmanda teema — relatsioonide käsitlus. Alustatakse kahest mängust: eesnimi — perekonnanimi, eesnimi — eesnimi. Esimeses neist tuleb igal õpilasel leida kõik need õpilased, kelle perekonnanimi algab sama tähega, millega algab tema eesnimi, ja teises need, kelle eesnimi algab sama tähega. Nende näidete juures tutvustatakse relatsiooni omadustega ja selgitatakse, kuidas kirjutada relatsioone graafide abil. Edasi vaadeldakse mitmesuguseid relatsioone, nagu «on õde», «on tegur», «on suurem» jne. ning jõutakse ka relatsiooni üldiste omadusteni (refleksiivsus ($A => A$), antirefleksiivsus, sümmeetrilisus (kui $A => B$, siis $B => A$), antisümmeetrilisus, transitiivsus (kui $A => B$ ja $B => C$, siis $A => C$)).

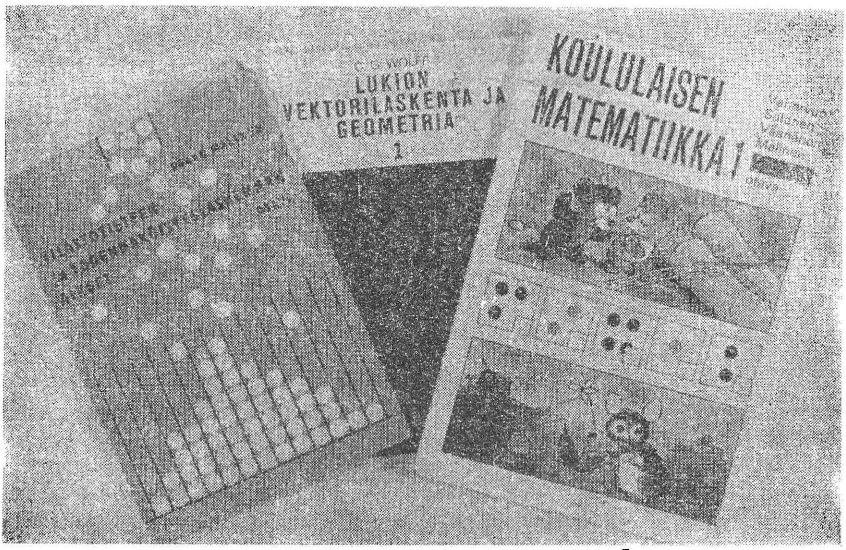
Raamatu teoreetilise osa kõrgpunkt saavutatakse Cantor-Bernsteini teoreemi tõestamisega (Kui hulk A kujutatakse üks-üheselt hulga B osale ja hulk B hulga A osale, siis on hulkadel A ja B sama võimsus). Papy'l on lause sõnastatud kujus «Suhe $\leqslant$ on kardinaalarvude hulgas antisümmeetriline». Raamatu abstraktsusest annavad tunnistust veel kahe kardinaalarvu summa ja korrutise defineerimine hulkade $A \cup B$ ja $A \times B$ võimsuste kaudu. Lähtudes neist definitsioonidest tõestatakse liitmise ja korrutamise kommutatiivsuse, assotsiatiivsuse ja ka distributiivsuse omadused.

Papy on jätkanud õpikute väljaandmist vanematele klassidele. Meile on seni kättesaadavaiks osutunud 1., 2., 5. ja 6. raamat. On selge, et töötamine Belgia koolides nende raamatute järgi ei lähe raskusteta. On tekkinud tugev opositsioon. Papy oma temperamentse esinemisega on tuttav mitte ainult Belgias, vaid ka paljudes teistes riikides. Ta on korduvalt esinenud oma ideede propageerijana ka Nõukogude Liidus. On märkimisväärne, et Papy raamatuid on juba tõlgitud mitmesse keelde. Nii on Papy raamatud tehtud kättesaadavaks hollandlastele, sakslastele, rumeenlastele, inglastele ja ameeriklastele. Ajakirjas «Математика в школе» on esitatud mõte tõlkida Papy õpikud vene keelde.

Koolimatemaatika Moderniseerimise Põhja Komitee

Analüüsides paljude maade koolipoliitikat ja selle kõrval koolimatemaatika programme, võime veenduda, et on erinevusi materjali paigutuses lõunapoolsete riikide ja põhjapoolsete riikide vahel. See on seotud laste kiirema arenguga lõunamaades. Geograafilisest asendist tingituna pakub meile seega peamist huvi koolimatemaatika moderniseerimine Põhja-Euroopa riikides. 1959. a. Royaumont'is Euroopa Majandusühenduse ja Arengu Organisatsiooni poolt korraldatud seminaris teemal «Uus mõtlemine koolimatemaatikas» soovitati asutada regionaalseid ühendusi koolimatemaatika moderniseerimise organiseerimiseks. Põhjamaade delegaadid otsustasidki ühineda, pidades silmas paremat ekspertide kasutamise võimalust, majanduslikku efekti ning arvestades kehtivate koolisüsteemide küllalt suurt sarnasust. 1960. a. juunis loodigi Põhja Kultuurikomisjoni juures 2. sektsioon, kus nii Taani, Soome, Norra kui ka Rootsi olid esindatud 4 delegaadi-matemaatikuga (Taani: Agnete Bundgaard, Bent Christiansen, Erik Kristensen, Ole Rindung; Soome: Harkko Helvelahti, Yrjö Juve, Paavo Malinen, Inkeri Simola; Norra: Karsten Kjelberg, Ingebrigt Johansson, Kay Piene, Ragnar Solvang; Rootsi: Göran Holmström, Lennart Sandgren (esimees), Sixten Thörnqvist, Matts Håstand (sekretär)). Esimene selle sektsiooni kokkutulek oli 1960. a. oktoobris, kui komisjonile anti nimetus «Koolimatemaatika Moderniseerimise Põhja Komitee», sekretariaadi asukohaga Stokholmis.

1967. a. avaldati selle komisjoni töö tulemused 290-leheküljelises rootsikeelses kogumikus. Selles anti ülevaade kehtivast haridussüsteemist kõigis põhjamaades, diskuteeriti matemaatika õpetamise eesmärkide üle, toodi ära komisjoni poolt organiseeritud eksperimentide tekstid ja juhised ning ettepanekud õpetatava aine kohta. Selle kogumiku lühendatud väljaanne avaldati ka soome ja inglise keeles.



Põhjamaades ollakse veendunud, et kaasaegse haridussüsteemi ebastabiilsus on tingitud koolides kauem õppivate õpilaste arvu suurenemisest, mis omakorda põhjustab õpetuse sisu muutumise. Ollakse samuti veendunud, et matemaatikast on saanud vajalik instrument nii loodusteadlasele kui ka insenerile ja et matemaatilised mudelid ja meetodid võetakse üha enam kasutusele aladel, kus seda varem pole tehtud. Ollakse veendunud, et ühiskond, kus kasvab kiirelt urbaniseerimine ja automatiseerimine, nõuab senisest märgatavalt enam matemaatika rakendamist igapäevases elus. Sellest järeldub, et peab suurenema koolimatemaatika osatähtsus. See ei saa aga toimuda ainult matemaatika programmi suurendamise teel, vaid ka mõnede oma tähtsuse minetanud osade väljajätmise või vähendamise teel. Erilise tähelepanu objektiks peavad aga saama kaalutlused matemaatika õpetamise eesmärkide kohta.

Matemaatika õpetamise vajadust on seni, nagu märgitakse komitee ülevaates, põhjendatud aine suure haridusliku väärtusega, sest see arendab otsustusvõimet ja väljenduse selgust, ning sotsiaalse tähtsusega, sest ta on aluseks teaduslikule tööle ja vajalik igapäevases elus. Kui varem oli esimesel momendil peatähtsus, siis kaasajal kaldub see enam teisele momendile.

Põhjamaades rõhutatakse eriti järgmisi matemaatika õpetamise eesmärke:

1) õpilased peavad tundma rõõmu matemaatikaga tegelemisest ja

2) õpilased peavad olema võimelised oma matemaatikaalaseid teadmisi rakendama praktikas.

Esimese eesmärgi saavutamine sõltub materjali doseerimisest, õpitud materjali seostamisest uuega, mängulise elemendi rakendamisest ja, mis kõige tähtsam, tema arusaadavusest. Viimasele peavadki kaasa aitama hulgateooria elemendid ja sümboolika, relatsiooni ja funktsiooni mõisted ning vektorid. Teise eesmärgi saavutamiseks ei loeta õigeks eraldada omaette osadeks rakenduslikke küsimusi, nagu kiiruse arvutamine, äriprobleemid jne. Peetakse väga oluliseks harjutada õpilasi haarama probleeme ilma spetsiaalse ettevalmistuseta. Peetakse vajalikuks küllaldase tähelepanu osutamist ligikaudsele arvutamisele, kuid samuti peab tulema arutluse alla matemaatilise mudeli ja selle realiseerimise mõiste. Seda rakendatakse siis ka teistes õppeainetes.

Õpetamismeetodite osas loetakse õigeks aktiivsemate meetodite kasutamist. Õpilasele on suureks auks avastada ja luua matemaatikat ise. Tavaline klassitöö, kus õpetaja annab teadmisi ja õpilased kordavad seda ja kus õpikuid kasutatakse peamiselt ainult ülesannete kogudena, tuleb asendada mitmesuguste õppevahendite abil antava informatsiooniga ja suurel määral õpilaste iseseisva tööga. Õpetaja omandab rohkem konsultandi osa. Nagu teada, on mõnedes maades selleks välja töötatud teatud spetsiaalsed strukturaalsed materjalid.

Matemaatika õpetamisel peetakse parimaks viisiks spiraalset, mitte lineaarset printsiipi. See printsiip võimaldab õpilasel sama küsimuse juurde uuesti tagasi tulla ja vajaduse korral küsimuse omandamist edasi lükata.

Komisjon töötas välja ka matemaatika uue programmi. See jaguneb põhikursuseks, mis omandatakse kohustusliku 9 esimese õppeaasta jooksul, ja gümnaasiumi kursuseks 10.—12. õppeaasta jaoks.

Põhikursus hõlmab järgmised peamised teemad:

1. Arvud.

Kõik õpilased peavad arvutama naturaalarvudega, täisarvudega, kümnendmurdudega ja ratsionaalarvudega. Nad peavad saama tuttavaks arvu omadustega ja olema võimelised rakendama nelja põhitehet praktiliste probleemide lahendamisel.

2. Geomeetria.

Kõik õpilased peavad tundma lihtsamaid tasapinnalisi ja 3-dimensionaalseid kujundeid. Nad peavad tutvuma geomeetriaalase terminoloogiaga ja töötama konkreetsete kujunditega. Samuti peavad õpilased tutvuma lihtsamate kongruentsuse ja sarnasuse teisenduste ning sümmeetriaga.

3. Mõõdud.

Kõik õpilased peavad kokku puutuma printsiipidega, mis on seotud mõõtmisega. Nad peavad oskama mõõta pikkust, pindala, ruumala, aega, raskust, temperatuuri, tundma rahaühikuid ja mõõtühikute teisendamist.

4. Tõenäosus.

Kõik õpilased peavad tegema katseid, millest ilmneb relatiivse sageduse stabiilsus, ja tutvuma tõenäosuse mõistega.

5. Tabelid ja diagrammid.

Kõik õpilased peavad valmistama tabeleid ja diagramme nii statistiliste kui ka funktsionaalsete andmete järgi. Tegelda tuleb nii tabelite ja diagrammide koostamise kui ka nende tõlgendamisega.

6. Probleemide lahendamine.

Kõik õpilased peavad kokku puutuma matemaatilise mudeli mõistega ja selle mudeli kasutamisega antud probleemi analüüsimisest kuni mudeli konstrueerimiseni, samuti tegema mudelist järeldusi ja kandma need üle tegelikkusesse.

7. Matemaatika olemus.

Kõik õpilased peavad saama teatud ülevaate matemaatika olemusest. Erilist tähelepanu tuleb osutada muutuja mõistele.

Et see programm realiseeruks edukalt, selleks peetakse vajalikuks, et matemaatikat esitataks moodsas vaimus. See tähendab, et rakendataks teatud põhimõisteid hulkadest, nagu ühend, ühisosa, alamhulk ja korrutishulk, arvtelg, relatsiooni ja funktsiooni mõisted (sisaldab ka geomeetrilisi teisendusi) ja koordinaatide süsteem pluss teatud hulk elementaarseid loogika mõisteid.

Näitena olgu esitatud **9. klassi programm.**

Ratsionaalsed funktsioonid.

Polünoomide liitmine, lahutamine ja korrutamine. Valemid $(a+b)^2$, $(a-b)(a+b)$. Lihtsamad teguriteks lahutamised. Neli põhioperatsiooni ratsionaalfunktsioonidega.

Rühma mõiste.

Seni algebras ja geomeetrias tundmaõpitud struktuurid, mis on rühmad. Näiteid lõplikest hulkadest. Lühidalt matemaatika aksiomaatilisest ülesehitusest.

Ruutjuur.

Ruutvõrrand.

Tõenäosus.

Kui kaugele minnakse, see sõltub õpilaste huvist. Kõik peavad tutvuma sündmuste ühendi ja ühisosaga, võimatu sündmusega, aga samuti täiendiga ja nende tõenäosuse arvutamisega.

Sissejuhatav tuletise käsitlus.

Kiirus ja puutuja. Õpilastele selgub vajadus piirväärtuse ja tuletise mõistete järele.

Ruumiline geomeetria.

Ruumala arvutamine. Mõned õpilased võivad tutvuda ka vektorite ja koordinaatide süsteemiga ruumis.

Gümnaasiumi matemaatika programmis on järgmised teemad:

X kl.: Arvutamise põhiseadused. Järjestus. Arvutamine võrratustega. Vektorid tasandil. Sirge võrrandid. Pöördfunktsioon. Liitfunktsioon. Monotoonne funktsioon. Logaritmid. Lükati. Trigonomeetrilised funktsioonid. Kahe tundmatuga lineaarfunktsioonid. Teise ja kõrgema astme polünoomid. Kõrgema astme võrrandite graafiline lahendamine. Ratsionaalfunktsioonid. Tuletis. Ligikaudne arvutamine.

XI kl.: Pidevus. Piirväärtus. Diferentseeruvus. Reaalmuutuja vektorfunktsioon. Vektori tuletis. Keskväärtuse teoreem. Algfunktsioon. Kõrgemat järku tuletised. Integreerimisvalemid ja võtted. Logaritmfunktsioon ja eksponentfunktsioon. Parabool, ellips, hüperbool. Jadad ja read. Kombinatoorika. Binoomlause.

XII kl.: Tõenäosusteooria kuni normaalse jaotuseni. Algebra põhimõisted. Kompleksarvud. I järku lineaarsed diferentsiaalvõrrandid. II järku lineaarsed konstantsete kordajatega diferentsiaalvõrrandid. Vektor ruumis. Vektorkorrutis. Sirged ja tasandid. Sfääri võrrand. Lihtsamate kehade pindala ja ruumala.

Gümnaasium on Põhjamaades ette nähtud kaheharuline; siin toodud programm kuulub nn. teaduslikule harule. Mitteteaduslikus harus on matemaatika programm ulatuselt väiksem, sisaldab aga peaaegu kõik need mõisted, mida tutvustatakse teaduslikus harus.

Uus matemaatika programm Nõukogude Liidus

Pärast pikemaid vaidlusi ja arutlusi on kinnitatud uus matemaatika programm ka Nõukogude Liidu koolidele. Selle programmi kohaselt on matemaatika õpetamise eesmärgiks keskkoolis jõuda püsivate ja teaduslikult omandatud teadmiste ja oskuseni, mis

a) on vajalikud igapäevases elus ja töös igale tänapäeva ühiskonna liikmele;
b) moodustavad vajaliku aluse teiste teaduste õppimiseks koolis;
c) on küllaldased iseseisvaks hariduse jätkamiseks pärast kooli, populaarteadusliku ja tehnilise kirjanduse lugemiseks jne.

Matemaatika õpetamisel on suur tähtsus ka vaimsete võimete arendamisel, loogilise mõtlemise harjumuse ja kujutlusvõime kujundamiseks.

Eraldi tuleks peatuda siin teisena nimetatud eesmärgil, sest programmi koostajad on eriti silmas pidanud kontakti vajalikkust füüsika õpetamisega. Selleks võetaksegi IV—V klassi matemaatika kursuses kasutusele täheline sümboolika ja valemid, V klassis negatiivsed arvud ja kui füüsikaõpetaja asub mehhaanikaküsimuste käsitlemisele, on õpilased juba tuttavad ühtlase liikumise võrrandiga $s = vt$ ja oskavad graafiliselt lahendada liikumise ülesandeid. VIII klassis tunnevad õpilased aga vajalikul määral vektoreid ja tehteid vektoritega, sest need on kavas VII klassi matemaatika kursuses. Matemaatika õpetamisel kasutatakse omakorda füüsikas omandatud teadmisi. Nii käsitletakse füüsikas liikumise kiiruse mõistet enne kui matemaatikas tuletist; harmoonilist võnkumist käsitletakse matemaatika tundides pärast seda, kui füüsikas on omandatud teema «Võnkumised ja lained». Ligikaudse arvutamise osatähtsuse suurendamine VII klassis ja arvutusmeetodite käsitlemine VIII klassis aitavad omakorda kaasa matemaatika ja teiste kooliainete vaheliste seoste tugevdamisele.

Mõõtmistööd on programmi kohaselt ette nähtud ainult VII klassis, kuid neid soovitatakse teha ka teistes klassides alates IV õppeaastast. On rõhutatud lihtsate harjutuste ja ülesannete suurt tähtsust püsivate oskuste kujundamisel. Valemite päheõppimise asemel soovitatakse õpetada kasutama valemite kogusid (spravotšnikke).

Et matemaatikale reserveeritud aja maht ei suurene, küll aga aine maht, siis loetakse sellega kaasnev ajapuuduse probleem lahendatuks algebra ja geomeetria elementide toomisega IV—V klassi. Seda sammu õigustavad suur hulk läbiviidud eksperimente. Algebra ja geomeetria elementidega varasem tutvumine peab aga võimaldama aine käsitlemise tempo kiirendamist vanemais klassides. Mõningat ajavõitu loodetakse saada ka diferentsiaal- ja integraalarvutuse elementide rakendamisest traditsiooniliste teemade käsitlemisel (funktsioonide uurimine, ruumalade valemite tuletamine). Senise kavaga võrreldes on uues programmis tehtud ka mõningaid kärpeid, nii on näiteks kompleksarvud koolimatemaatika põhikursusest täielikult välja jäetud.

Järgnevalt lühidalt uue programmi teemadest.

Aritmeetika ja algebra algmed — IV—V klass.

Siin on kavas:

Naturaalarvud. Kümnendmurrud. Positiivsed ja negatiivsed arvud. Harilikud murrud.

Nendes klassides süvendatakse algklassides omandatud aritmeetiliste tehete sooritamise oskust. Võetakse kasutusele hulga mõiste ja mõisted «hulga element», «kuuluvus», «hulkade ühend», «hulkade ühisosa», «tühi hulk», «alamhulk». Neid mõisteid rakendatakse jaguvuse küsimuste käsitlemisel, võrrandite ja võrratuste lahendamisel ja lihtsamate graafikute joonestamisel. Võrrandeid lahendatakse esialgu tuginedes aritmeetiliste tehete omadustele, hiljem sõnastatakse ka vastavad reeglid. Tekstülesannete lahendamisel kasutatakse aga võrrandite koostamist.

Algebra — VI—VIII klass.

Siin on kavas:

Põhimõisted. Võrdelisus ja pöördvõrdelisus. Üksliikmed. Täisavaldised. Võrrandid ja võrrandisüsteemid.

Ratsionaalavaldised. Võrratused. Juured. Ruutvõrrandid.

Aritmeetiline ja geomeetriline progressioon. Murrulise astendajaga aste. Eksponentfunktsioon ja logaritmid. Arvutuste organiseerimine ja arvutustehnika.

Sellel astmel tõstetakse aine käsitlemise loogilist taset, tuginedes loogika elementide ja vastava sümboolika kasutamisele. Kogu kursuse vältel esineb sageli funktsioonide käsitlemist ja vastavate graafikute ehitamist. Ruutkolmliikmete uurimine on viidud ülesannete hulka. Seoses võrrandite ja võrratustega võetakse kasutusele mõisted «lause», «predikaat» ning kasutatakse järelduse ja samaväärsuse sümboleid.

Geomeetria — IV—VIII klass.

Siin on kavas:

Peamised geomeetria mõisted.

Geomeetrilised konstruktsioonid.

Tasandiliste kujundite võrdsus. Geomeetria loogiline ülesehitus. Hulknurgad.

Stereomeetria algmõisted. Geomeetrilised suurused. Sarnasus. Liikumisteisendused ja sarnasused.

Meetrilised seosed kolmnurgas. Trigonomeetrilised funktsioonid. Ringjoon. Sise- ja ümberringjoon.

IV klassis tutvustatakse esimest tõestust (tipunurkade võrdsus). V klassis suureneb tõestuste arv (rist- ja kaldlõigu pikkus, kolmnurga nurkade summa jne.). Geomeetria ülesehitamine antud aksioomidele algab VI klassis. Välja jäetakse aga küll järjestus- ja pidevusaksioomid. Geomeetria kursust on lihtsustatud mitmete teoreemide väljajätmise või nende ülesannete hulka paigutamise teel (näit. meetrilised seosed ringis, kolmnurga kõrguste ja kolmnurga mediaanide lõikumine, Heroni valem). Stereomeetria osas süstematiseeritakse joonestamistundides saadud teadmisi. Võttes tõestuseta kasutusele teoreemi ruumala võrdelisuse kohta sarnasusteguri kuubiga, saab sellele tuginedes tuletada püramiidi ruumala valemi. Geomeetrilisi teisendusi käsitletakse V—VII klassis. V klassis tutvutakse pöörde, lükke ja teljelise sümmeetriaga. VII klassis jõutakse homoteetsuseni, mis seostatakse vektori ja arvu korrutamisega.

Algebra ja analüüsi algmed — IX—X klass.

Siin on kavas:

Matemaatilise induktsiooni printsiip. Kombinatoorika elemendid.

Lõpmatud jadad ja piirväärtused.

Tuletis ja selle rakendusi.

Trigonomeetrilised funktsioonid, nende graafikud ja tuletised.

Eksponentfunktsiooni ja logaritmi tuletis.

Integraal.

Võrrandisüsteemid ja võrratusesüsteemid, elektronarvutid.

Matemaatilise induktsiooni käsitlemise eesmärgiks on süvendada õpilaste ettekujutust naturaalarvude süsteemi ehitusest. Siin luuakse täielik ettekujutus reaalarvude hulgast. Ka siin on järjekindlalt arvestatud füüsika kursust. VIII klassis on füüsikas käsitletud kiiruse ja kiirenduse mõisteid, nüüd antakse neile mõistetele matemaatiline vorm. IX klassis tutvutakse trigonomeetriliste funktsioonide tuletistega ja neid on võimalik rakendada X klassis füüsika kursuses teema «Võnkumine ja lained» käsitlemisel; eksponentfunktsiooni tuletist aga teema «Summutatud võnkumised» käsitlemisel.

Diferentsiaalvõrrandite $y' = ky$ ja $y'' = -k^2y$ abil antakse õpilastele ettekujutus diferentsiaalvõrrandite osast reaalsete nähtuste uurimisel. Kavas on ka tutvumine integraali mõistega, laskumata integreerimisvõtete tutvustamisele. Peetakse aga loomulikuks, et selle kaudu täpsustatakse pindala mõistet ja et integraali rakendatakse ruumala valemite tuletamisel.

Geomeetria — IX—X klass.

Siin on kavas:

Sirged ja tasapinnad; koordinaadid ja vektorid ruumis.

Hulktahukad ja pöördkehad.

Programm ei lahenda küsimust, kas vektoritega sooritatavate operatsioonide omadused formuleeritakse näitlikule kujutlusele tuginedes või kasutatakse selleks vastavat aksiomaatikat.

Programm on täielikult avaldatud ajakirja «Математика в школе» 1968. aasta 2. numbris.

Kui võrdleme Nõukogude koolidele kinnitatud programmi eespool toodud Belgia ja Põhjamaade keskkooli matemaatika programmidega, siis näeme, et neis on mõnedki uuendustaotlused erinevad. Võime täheldada, et Nõukogude Liidu programmis on hoopis vähem tähelepanu osutatud kaasaja algebra küsimustele ning seevastu on suurem osatähtsus antud matemaatilise analüüsi teemadele. Ka tõenäosusteooria ja matemaatilise statistika elemendid on siin ainult fakultatiivse kursuse programmis. On kaheldamatult selge, et raskusi kerkib kõigi kõne all olnud programmide realiseerimisel. Eespool oli nimetatud tuntud prantsuse matemaatiku Dieudonné arvamusi koolimatemaatika kohta. Üldtuntuks on saanud ka nimeka soome matemaatiku prof. Rolf Nevanlinna arvamused koolimatemaatika moderniseerimise kohta, mis on kohati väga vastukäivad Dieudonné arvamustega. Tema terava kriitika alla langeb muuhulgas siin tutvustatud Põhja Komitee poolt koostatud matemaatika programm. Samuti riivavad tema märkused õige tugevasti belglaste ja prantslaste püüdeid koolimatemaatika uuendamisel. On selge, et alles pikemaajalisem kogemus saab siin oma lõpliku sõna öelda.

Koolimatemaatika reform Eesti NSV-s

Lõpuks tuleks lühidalt peatuda koolimatemaatika uuendamiskatsete juures meie vabariigi koolides. On möödunud juba üle kümne aasta, kui haridusministeeriumi matemaatikakomisjon sm. E. Etvergi juhtimisel asus sisse viima uuendusi meie koolimatemaatikasse. Vabariikliku Õpetajate Täiendusinstituudi laiaulatuslikud matemaatikaõpetajate suvekursused ja õpetajateentusiastide, nagu õp. Meidla Viljandist, õp. Kork Kehrast, õp-d Kraubner ja Palm Tallinnast, õp. Lepland Abjast, õp. Nurk Vändrast jt. leidumine on võimaldanud meil olla koolimatemaatika küsimuste lahendamisel Nõukogude Liidus mitte sabassörkijate kohal. Teostatud uuendused ei viinud meid aga oluliselt kaugemale käesoleva sajandi alguse reformitaotlustest. Sellele vaatamata võime heameelega märkida, et mõnedki meie püüdlused on leidnud nüüd fikseerimist uues üleliidulises programmis. Nimetagem näiteks kas koolimatemaatika eridistsipliinide vähendamise tendentsi või tuletise ja integraali käsitlemist.

Kaasaegne koolimatemaatika reform on samuti leidnud juba tee meie koolidesse. Seda tänu sm. A. Lintsi entusiastlikule tööle algklasside matemaatika uuendamisel ja sellele suurele algklasside õpetajate hulgale, kes on aru saanud koolimatemaatika reformimise vajalikkusest. Haridusministeeriumi õpikute ja metoodika osakond (H. Reinop ja M. Kärner), aga samuti matemaatikakomisjon sm. A. Telgmaa juhtimisel on asunud innukalt keskkooli matemaatika uue programmi realiseerimise ettevalmistamisele. Uus matemaatikakomisjoni poolt väljatöötatud programm saab kõigile kättesaadavaks lähemal ajal. Tuleb ainult märkida, et see väga oluliselt ei erine praegu kehtivast programmist ja et seepärast on meil märksa paremad eeldused oma uue programmi realiseerimiseks kui näiteks Belgias või Rootsis või teistes liiduvabariikides. On isegi tõsiselt karta (tuginedes ajaloolisele kogemusele), et Nõukogude Liidus tervikuna võib esile kerkida küllalt suuri raskusi uue programmi kehtestamisel. Seda enam peame me tähelepanu osutama seni saavutatu kindlustamisele ja mõistlikule edasiarendamisele.

Ei tohi unustada, et tegelik töötegija on õpetaja. Töövihikute ja kontrolltööde kogumike, samuti lisaülesannete kogude ja kaartide ning mitmesuguse muu metoodilise materjaliga tuleb õpetajaid varustada. Eriti tuleb aga õpetajaid aidata uue aine omandamisel. Teatavasti sisaldab uus programm nii hulgateooria kui ka matemaatilise loogika elemente, fakultatiivkursustesse soovitame tõenäosusteooriat ja statistikat, lineaarset planeerimist, aga veel näiteks mänguteooriat, vektorruume jne. Tegemist on ainetega, mida enamik meie matemaatikaõpetajaid pole ise õppinud. Seepärast tunneme möödapääsmatut vajadust vastava eestikeelse kirjanduse järele, aga samuti kindla eesmärgiga sihipäraste kursuste järele matemaatikaõpetajatele. Haridusministeerium peaks veel kord kaaluma võimalusi õpetajate tasustamiseks töö sisulise külje järgi, et sellega anda ka õpetajate kursustele senisest suuremat autoriteeti. Õpetaja kvalifikatsiooni tõusuga peaks kaasnema ka palga tõus.

Meie senine töö koolimatemaatika reformimisel on tuginenud mõnede inimeste entusiasmile ja haridusministeeriumi juhtivate töötajate heatahtlikule suhtumisele nendesse entusiastidesse. Me hindaksime oma entusiaste aga liiga kõrgelt, kui loodaksime, et neil jätkub energiat ka käesoleva reformi läbiviimiseks, mis on mahult siiski märksa ulatuslikum kui eelmine ja mis tahetakse ellu viia lühema ajavahemiku jooksul kui eelmine. Arvestagem, et üldreeglina juhivad kaasajal koolimatemaatika reformimist spetsiaalsed instituudid ülikoolide juures, kus on rakendatud tööle ka küllaldane arv inimesi. Haridusministeerium on värvanud uusi inimesi õpikute ja töövihikute koostamise juurde, kuid sellest on kaheldamatult vähe. Et spetsiaalse töörühma asutamine Tartu Riikliku Ülikooli juures on olnud juba haridusministri ja ülikooli rektori vahel kõneaineks, siis jääb loota, et meilgi suudetakse kogu koolimatemaatika reformimine viia vajalikule kindlamale tasemele. Uue reformi ettevalmistamisest ja läbiviimisest on seni suhteliselt kõrvale jäänud õpetajaskond. Loodame, et olukord ka selles osas paraneb ja seniste entusiastlike õpetajate kõrvale astuvad uued, kes täie energiaga on nõus kaasa aitama koolimatemaatika kaasajastamisele.

LOBATŠEVSKI GEOMEETRIA

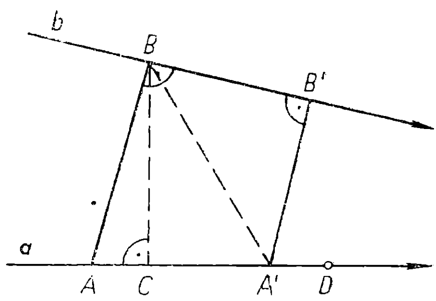
K. Ariva

III Lobatševski funktsioon

Artikli eelmises osas [1] selgitasime, milline saab olla kahe sirge vastastikune asend Lobatševski tasandil.[2] Seame nüüd eesmärgiks iseloomustada kõige lihtsamaid tasandilisi kujundeid, peamiselt kolm- ja nelinurki. Samuti nagu sirgete puhul ilmneb ka siin terve rida asjaolusid ja omadusi, mis erinevad kooligeomeetrias tundmaõpitud vahekordadest või lisanduvad nendele. Selleks, et neid uudseid momente kirjeldada, osutub vajalikuks eelnevalt uurida huvitavat sirglõikude ja nurkade vahelist funktsionaalset sõltuvust, mis tuleneb sirgete paralleelsuse uuest definitsioonist ja millel on eriline tähtsus kogu Lobatševski geomeetria jaoks.

Paralleelsust iseloomustavad muutuvad suurused

Vaatleme kaht omavahel paralleelset sirget a ja b (joon. 1; paralleelsuse suunda näitavad nooled). Sirge a vabalt valitud



Joonis 1.

punktis A iseloomustavad sirge a paralleelsust sirgega b viimasele tõmmatud ristlõik AB ja selle lõigu ning sirge a paralleelsusesuunalise poolsirge vaheline nurk BAC. Nagu eespool

[1] Matemaatika ja kaasaeg, XV, lk. 67.

[2] s. t. tasandil, mille puhul kehtib Lobatševski aktsioom.

märkisime, nimetatakse esimest **paralleelsuselõiguks** ja teist **paralleelsusenurgaks**. Vastavalt sirgete paralleelsuse definitsioonile on paralleelsusenurk terav.

Sirgete paralleelsus on nende vastastikune omadus (teoreem 1): sirge b igas punktis saab tema paralleelsust sirgega a iseloomustada samal viisil — lõigu ja teravnurga abil. Kerge on märgata, et paralleelsuselõigud ja -nurgad sirgete a ja b punktides A ja B on erinevad: $AB > BC$ ja $\widehat{BAC} < \widehat{CBB'}$. Esimene võrratus väljendab absoluutsesse geomeetriasse kuuluvat tõsiasja, et punktist sirgele tõmmatud kaldlõik on pikem samast punktist tõmmatud ristlõigust. Teine võrratus järeldub võrdsusest $\widehat{ABC} + \widehat{CBB'} = \frac{\pi}{2}$ ja võrratusest $\widehat{ABC} + \widehat{BAC} < \frac{\pi}{2}$; viimane tuleneb omakorda asjaolust, et $\sum_{ABC} < \pi$.

Esimesel pilgul näib paralleelsusenurkade BAC ja CBB' erinevus olevat vastuolus kujutlusega, et sirged võtavad paralleelsusest osa ühel ja samal viisil. Kas tõesti tuleb sirge b paralleelsust sirgega a lugeda erinevaks sirge a paralleelsusest sirge b suhtes?

Nii kummalist olukorda siiski ei esine. Vastuolu kaob, kui tähele panna, et paralleelsusenurk muutub tema tipu liikumisel mööda sirget, mille paralleelsust ta kirjeldab. Selles veendumiseks vaatleme uuesti joonist 1. Olgu A' sirge a mingi punkt, mis asub punktist A paralleelsuse suunas, ja olgu $A'B'$ vastav paralleelsuselõik. Et $\sum_{ABA'} < \pi$ ja $\sum_{B'A'B} < \pi$, siis on nelinurga $ABB'A'$ sisenurkade summa väiksem kui 2π, järelikult $\widehat{BAC} + \widehat{B'A'C'} < \pi$. Teiselt poolt $\widehat{B'A'D} + \widehat{B'A'C} = \pi$: kõrvunurkade summa on sirgnurk. Siis aga $\widehat{BAC} < \widehat{B'A'D}$, s. t. sirge a paralleelsust iseloomustav nurk kasvab, kui tema tipp liigub mööda sirget a paralleelsuse suunas.

Et paralleelsuselõik on muutuv suurus, sellega tuli meil nõustuda juba eespool: paralleelsuselõik mõõdab sirge punkti kaugust paralleelsirgest, see kaugus aga kahaneb punkti liikumisel paralleelsuse suunas (teoreem 5). Nüüd oleme sunnitud loobuma ka kujutlusest, et paralleelsusenurk on konstantne suurus. Ilmneb, et sirgete paralleelsus on tunduvalt keerukam nähtus, kui lubab arvata koolis omandatud tarkus.

Kooligeomeetrias on kahe sirge paralleelsus õige jäik ja «ühetooniline» vahekord, mida iseloomustavad üksnes muutumatud suurused. Kaugus kahe antud paralleelsirge vahel on siin konstantne ja määrab nende sirgete vastastikuse asendi täielikult. Erinevate kaugustega määratud paralleelsirgete paare ei saa ühtimisele viia liikumise teel, s. o. kaugusi säilitades. Paralleelsusenurk on üks ja seesama kõigi paralleelsirgete kõigi punktide juures, seepärast puudub koolis tarvidus selle mõiste järele. Iga sirge, mis on risti ühe paralleelsirgega, on risti ka teisega. Ühiseid ristsirgeid on paralleelsirgetel lõpmata palju ja need kõik on omavahel niisama «üksluiselt» paralleelsed.

Pilt, mis avaneb me pilgu ees, kui loeme tõeseks Lobatševski aksioomi, on palju vaheldusrikkam. Paralleelsete sirgete vaheline kaugus muutub punktist punkti. Ainult kauguse abil sirge *a* paralleelsirget määrata ei saa; tuleb lisaks näidata sirge *a* punkt, millest seda kaugust arvestatakse, ja paralleelsuse suund (muidugi tuleb veel valida üks sirgega *a* äärnevaist pooltasandeist, nagu kooligeomeetriaski). Et iga kahe paralleelsirge korral saavutab nendevaheline kaugus iga etteantud väärtuse (teoreem 5), siis on võimalik iga kaht paralleelsirgete paari viia ühtimisele liikumise abil. Antud paralleelsusenurk iseloomustab kahe sirge paralleelsust ainult ühes punktis kummalgi sirgel. Ühiseid ristsirgeid paralleelsirgetel ei leidu. Sirge, mis on risti ühega paralleelsirgetest, moodustab teisega mittevõrdsed kõrvunurgad; kõrvunurkade paarid, mille määravad mistahes kaks sellist sirget, on erinevad, need sirged ise aga hajuvad.

Nende tähelepanekute põhjal peame ütlema, et Lobatševski geomeetrias on sirge paralleelsus teise sirgega punktist punkti muutuv vahekord. Paralleelsuse suunas paralleelsuselõik kahaneb ja paralleelsusenurk kasvab. Esimest asjaolu ongi püütud kujutada joonisel 1. Näitlikkuse huvides on siin sirgete *a* ja *b* lähenemisega liialdatud — nende pikendamine võimaldab kergesti konstrueerida lõikepunkti, mille puudumist me eeldame. Selleks, et joonisel «nähtavalt» esitada paralleelsusenurga muutumist, tuleks talitada veelgi «ebatäpsemalt», nimelt kujutada paralleelsirgeid kõverjoontena, mis lähenevad teineteisele asümptootiliselt.[3]

Rõhutame veel kord, et iga joonis on siin vaid ligikaudne mudel, mis kajastab ainult mõnda külge uuritavatest vahekordadest. Oma arutlustes loeme tõeseks kõike, mis järeldub loogiliselt juba tõestatud või tõeseks peetud lausetest. Küsimus, kas sel viisil tehtud otsustused on kooskõlas kujutlusega ja kas neid on võimalik kõigis üksikasjades «tõetruult» esitada joonistel, on teisejärguline ega saa kuidagi mõjutada meie mõttekäike.

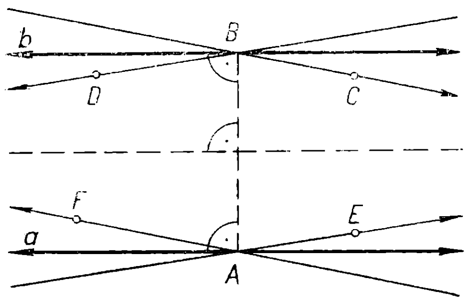
Nurga saab konstrueerida üheainsa sirglõigu abil

Valime tasandil mingi sirglõigu *AB* ja moodustame selle abil neli paralleelsusenurka (joon. 2). Selleks tõmbame läbi otspunktide *A* ja *B* kuus sirget: sirged *a* ja *b*, mis on lõiguga *AB* risti, ning sirged *BC*, *BD*, *AE* ja *AF*, millest kaks esimest on sirgega *a*, kaks viimast aga sirgega *b* vastassuundades paralleelsed. Lõik

[3] Vt. Matemaatika ja kaasaeg, XV, lk. 78, joon. 11 (3).

AB on neid paralleelsusi iseloomustav paralleelsuselõik vastavalt punktis B ja punktis A.

Ehitatud paralleelsusenurgad on omavahel kongruentsed: $\widehat{ABC} = \widehat{ABD} = \widehat{BAF} = \widehat{BAE}$. Esimene ja viimane võrdus järeldub peegeldusest sirge AB suhtes, keskmine peegeldusest lõigu AB keskristsirge c suhtes. Et igast punktist saab antud sirgele antud suunas tõmmata ühe ja ainult ühe paralleelsirge, siis on sel viisil konstrueeritud kõik lõiguga AB seotud paralleelsusenurgad.



Joonis 2.

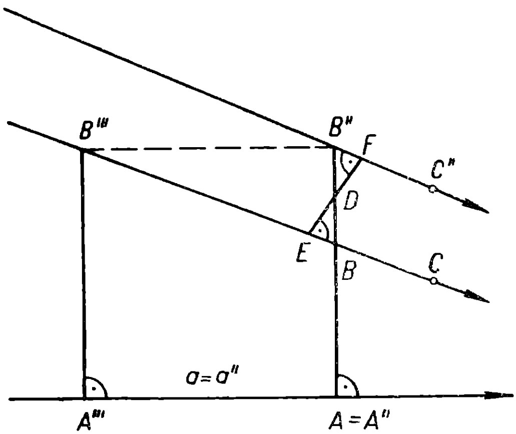
Siit nähtub, et **sirgete paralleelsuse mõiste võimaldab igale sirglõigule vastavusse seada teravnurga, mille suurus on selle lõiguga üheselt määratud.**

Üldistame nüüd seda mõttekäiku. Vaatleme mingit teist lõiku $A'B'$, mis on lõiguga AB kongruentne. Ehitame lõigule $A'B'$ vastava paralleelsusenurga $\widehat{A'B'C'}$, tõmmates läbi punkti A' sirge a' risti lõiguga $A'B'$ ja läbi punkti B' sirge $B'C'$ paralleelselt sirgega a'. Asetame tekkinud kujundi joonisel 2 näidatud kujundile nii, et sirge a' satub sirgele a ja punkt A' punkti A. Seejuures asetub lõik $A'B'$ lõigule AB ja nende kongruentsuse tõttu ühtib punkt B' oma uues asendis punktiga B. Antud suunas tõmmatud paralleelsirge ühesuse tõttu peab sirge $B'C'$ sattuma kas sirgele BC või sirgele BD. Mõlemal juhul $\widehat{A'B'C'} = \widehat{ABC}$.

See tähelepanek võimaldab täpsemalt iseloomustada paralleelsuse mõiste abil korraldatud vastavust sirglõikude ja nurkade vahel: **kongruentsetele lõikudele vastavad kongruentsed teravnurgad.**

Olgu nüüd $A''B''$ mingi lõik, mis ei ole kongruentne lõiguga AB. Kordame temaga lõigu $A'B'$ puhul sooritatud protsessi: ehitame lõigule $A''B''$ vastava paralleelsusenurga $\widehat{A''B''C''}$ sirgete

a'' ja $B''C''$ abil (a'' läbib punkti A'', $a'' \perp A''B''$ ja $B''C'' \parallel a''$) ning asetame saadud kujundi joonisel 2 esitatud kujundile nii, et sirged a'' ja a, samuti punktid A'' ja A ühtivad. Punkt B'' ei satu nüüd punkti B. Olgu $A''B'' > AB$ (arutlus vastupidisel juhul ei erine oluliselt järgnevast), siis asetub B'' lõigu AB pikendile ja sirge $B''C''$ osutub oma uues asendis paralleelseks sirgega a.



Joonis 3.

Vajaduse puhul peegeldame veel sirget $B''C''$ sirge AB suhtes, nii et sirgete a ja $B''C''$ paralleelsus osutub samasuunaliseks sirgete a ja BC paralleelsusega. Tekib joonisel 3 kujutatud olukord.

Ilmneb, et $A''\widehat{B''}C'' < A\widehat{B}C$. Siin esinevate vahekordade mitmekülgsema selgitamise eesmärgil põhjendame seda võrratust kolmel erineval viisil:

1) Et $B''C'' \parallel a$ ja $BC \parallel a$, siis ka $B''C'' \parallel BC$ (teoreem 2). Oletusest, et sirgete BC ja $B''C''$ lõikamisel sirgega AB tekkinud ühepoolsete nurkade summa on sirgnurk, järeldub Eukleidese V postulaat, mis on Lobatševski geomeetrias väär lause. See summa ei saa olla ka suurem sirgnurgast, sest vastupidisel juhul saaks läbi punkti B'' tõmmata sirge, mis moodustab koos sirgetega BB'' ja BC kolmnurga, mille sisenurkade summa on suurem kui sirgnurk. Järelikult $B''\widehat{B}C + B\widehat{B''}C'' < \pi$. Kuid $B''\widehat{B}C + A\widehat{B}C = \pi$, seega $B\widehat{B''}C'' < A\widehat{B}C$, s. t. $A''\widehat{B''}C'' < A\widehat{B}C$.

2) Tõmbame lõigu BB'' keskpunktist D ristlõigud DE ja DF sirgetele BC ja $B''C''$. Kui oletada, et $A''\widehat{B''}C'' = A\widehat{B}C$, s. t.

$D\widehat{B''}F = D\widehat{B}E$, siis osutuksid täisnurksed kolmnurgad DFB'' ja DEB kongruentseteks, mistõttu $B''\widehat{D}F = B\widehat{D}E$, s. o. punktid E, D ja F asuksid ühel sirgel, mis peaks olema risti nii sirgega BC kui ka sirgega $B''C''$; paralleelsirgetel aga ühiseid ristsirgeid ei leidu. Oletus $A''\widehat{B''}C'' > A\widehat{B}C$ tekitab samuti vastuolu: siis saaks nurka $BB''C''$ läbi selle tipu tõmmata sirge, millel on sirgega BC ühine ristsirge ja mis seetõttu oleks BC suhtes hajuv. Niisiis $A''\widehat{B''}C'' < A\widehat{B}C$.

3) Nihutame sirget a'' *mööda* sirget a paralleelsusele vastassuunas, kuni ristlõigu $A''B''$ otspunkt B'' satub sirgele BC teatud asendisse B'''; teoreemi põhjal on seda võimalik saavutada kuitahes pika lõigu $A''B''$ korral. Sirge $B''C''$ peab nihke tagajärjel asetuma sirgele BC, seega $A''\widehat{B''}C'' = A'''\widehat{B'''}C$. Kuid $A'''\widehat{B'''}C < A\widehat{B}C$, nagu veendusime eespool.

Nüüd saame uuritava vastavuse iseloomustusse lisada uue tõsiasja: mittekongruentsetele lõikudele vastavad mittekongruentsed teravnurgad, kusjuures lõigu kasvamisel vastav nurk kahaneb.

Kongruentsetel lõikudel on ühine pikkus, kongruentsetel nurkadel ühine suurus. Kasutame lõigu pikkuse ja nurga suuruse märkimiseks vastavalt tähistusi x ja α. Kui vaadelda kõiki võimalikke lõike ja teravnurki, siis osutuvad x ja α muutuvateks suurusteks, kusjuures $0 < x < +\infty$ ja $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Eelnevad tähelepanekud näitavad, et nende suuruste vahel esineb teatud funktsionaalne sõltuvus. Võtame need tähelepanekud kokku ühe lausena.

Teoreem 7. Teravnurga suurus α on sirglõigu pikkuse x ühene kahanev funktsioon[4], mis on määratud argumendi x kõigil väärtustel.

Senised arutlused ei võimalda veel esitada seda funktsiooni analüütiliselt, s. o. valemi abil. Eespool ilmnes aga kindel eeskiri, mis lubab leida igale antud lõigule vastava teravnurga: tuleb tõlgendada lõiku paralleelsuselõiguna ja konstrueerida selle juurde

[4] Funktsiooni nimetatakse üheseks, kui argumendi igale väärtusele määramispiirkonnast vastab parajasti üks funktsiooni väärtus. Funktsiooni $y = f(x)$ nimetatakse kahanevaks, kui argumendi kasvades funktsioon kahaneb, s. t. kui mistahes $x_1 < x_2$ korral määramispiirkonnast $f(x_1) > f(x_2)$. Kahanev on näiteks eksponentfunktsioon $y = a^x$, kui $0 < a < 1$. Kasvavat funktsiooni iseloomustavad võrratused $x_1 < x_2$, $f(x_1) < f(x_2)$.

kuuluv paralleelsusenurk.[5] Selles mõttes osutub vaadeldav sõltuvus täiel määral teadaolevaks. Räägime sel puhul Lobatševski funktsioonist ja kasutame tähistust $\alpha=\pi(x)$.

Eukleidese geomeetrias Lobatševski funktsiooni taolist sõltuvust[6] sirglõikude ja nurkade vahel ei leidu. Küll saab siin vastavuse korraldada lõikude paaride ja teravnurkade vahel. Selline vastavus on hästi tuntud koolimatemaatikast. Võib talitada näiteks nii: ehitada täisnurkne kolmnurk, mille kaatetiteks on antud lõikude paar ja lugeda sellele paarile vastavaks üks kolmnurga teravnurkadest. Et siin alati $\sum=\pi$, siis pole tarvidust öelda, et kahele lõigule vastab kaks teravnurka, sest täisnurkse kolmnurga teravnurgad määravad teineteise täielikult ja üht võib lugeda teise funktsiooniks.

Lobatševski funktsiooni puhul määravad ühe ja sellesama nurga kõik ühise pikkusega sirglõigud; öeldakse ka, et nurga defineerib siin omavahel kongruentsete lõikude klass. Eukleidese geomeetrias ei ole lõigu pikkus nurga ehitamisel oluline, sest muutes mõlema antud lõigu pikkust nii, et nende suhe säilib, saame esialgsega sarnase täisnurkse kolmnurga, seega sama teravnurga. Niisiis täidavad siin kongruentsete lõikude osa ühise suhtega lõikude paarid. Kui nimetada selliseid paare ekvivalentseteks, siis võib öelda, et Eukleidese geomeetrias määrab teravnurga ekvivalentsete lõigupaaride klass.

Ka Eukleidese geomeetrias on võimalik korraldada teravnurkade ühene vastavus sirglõikudele: kui fikseerida täisnurkse kolmnurga üks kaatet, siis vastab muutuva teise kaateti igale pikkusele kindla suurusega nurk. Kuid lõikude suhte, s. o. kahe lõigu kasutamise vajadusest siiski vabaneda ei saa, sest fikseeritud kaatetil on sõltuvuse defineerimisel oluline osa. Sisuliselt tähendab tehtud kokkulepe seda, et igast ekvivalentsete lõigupaaride klassist valitakse parajasti üks esindaja, konkreetne paar, mille üheks komponendiks on fikseeritud lõik.

Autor on siinkohal sunnitud lugejalt vabandust paluma eelneva alapealkirja pärast, mille mõnevõrra intrigeeriv sõnastus on valitud peamiselt tähelepanu köitmiseks. On ju selge, et ainult üks sirglõik nurka ei moodusta, ka Lobatševski geomeetrias mitte; nagu nägime, on lõigule vastava paralleelsusenurga ehitamiseks tarvis tõmmata kaks lisasirget. See pealkiri ei ole siiski väär

[5] Muidugi on see konstruktsioonieeskiri puhtteoreetiline. Nimelt selline «konstrueerimine» ongi geomeetriale iseloomulik. Ütleme, et teatud geomeetriline objekt on antud, kui on teada tingimused, mis määravad tema olemasolu ja iseloomu. Objekti tegelik ehitamine joonlaua, sirkli jne. abil ei kuulu õigupoolest geomeetriasse, vaid selle rakendustesse.

[6] Kasutame siin õppekirjanduses levinud terminoloogiat: funktsiooniks nimetame nii sõltuvat muutujat kui ka sõltuvust ennast (näit. ruutfunktsioon, eksponentfunktsioon, jne.).

oma sisult, sest antud lõik jätab abisirgete valimiseks nii väikese vabaduse, et konstrueeritava nurga suurus sellest ei sõltu. Ja õigupoolest ei ole märgitud pealkirjas midagi ootamatut, sest nurga konstrueerimine ühe sirglõigu abil on võimalik ka Eukleidese geomeetrias. Kui lubada antud lõigu kasutamist küllalt suure arvu eksemplaridena, s. o. lugeda fikseerituks ainult lõigu pikkus, siis määrab lõik etteantud külgede arvuga korrapärase hulknurga ja lõigule vastab viimase sisenurk. Mingit funktsionaalset sõltuvust sel kombel siiski ei teki, sest ühelt poolt saab antud lõigu abil ehitada lõpmata palju erinimelisi korrapäraseid n-nurki ($n = 3, 4, \ldots$), s. t. lõigule vastab lõpmata palju erinevaid nurki, teisest küljest saab need nurgad samal viisil ehitada mistahes teise lõigu abil, sest kõik samanimelised korrapärased hulknurgad on sarnased.

Sõltuvus, mis takistas uue geomeetria tunnustamist

Eriti oluline on tähele panna, et ehkki Eukleidese geomeetrias saab lõigu abil määrata teatud nurga, ei ole vastupidine kuidagi võimalik. Ainult ühe või ka mitme nurga abil ei saa siin mingil viisil konstrueerida lõiku. Põhimõtteliseks takistuseks on asjaolu, et Eukleidese geomeetrias leiduvad sarnased kujundid, mistõttu antud nurgale, näiteks võrdkülgse kolmnurga sisenurgale, ei vasta selle kolmnurga küljena kindla pikkusega lõiku.

Me oleme niisuguse olukorraga sedavõrd harjunud, et peame seda iseendastmõistetavaks. Nimelt see dogmaks muutunud iseendastmõistetavus osutuski üheks kõige suuremaks komistuskiviks matemaatikutele nende esimesel sammul üle Lobatševski maailma läve. Lobatševski geomeetrias ju puudub märgitud takistus lõigu konstrueerimisele nurga abil: siin ei ole sarnaseid kujundeid. Erinevate külgedega samanimelised korrapärased hulknurgad on mittesarnased ja — nagu võib arvata kolmnurkade puhul tehtud tähelepanekute põhjal — nende nurgad on erinevad. Seepärast on loomulik oletada, et antud nurk määrab teatud kindla korrapärase n-nurga ja ühtlasi ka selle külje: nurk määrab lõigu.

Jätame nüüd kõrvale oletused ja näitame, et paralleelsusenurgaks võib olla iga teravnurk ja igale paralleelsusenurgale vastab kindla pikkusega paralleelsuselõik. Sel eesmärgil tõestame esmalt ühe abilause, mis on teravas vastuolus koolis omandatud tõekspidamistega.

T e o r e e m 8. T e r a v n u r g a h a a r a l e t õ m m a t u d r i s t s i r g e d l a k k a v a d t e a t u d k a u g u s e l n u r g a t i p u s t l õ i k a m a s t t e i s t h a a r a.

Oletame vastuväiteliselt, et ühe haara igast punktist tõmmatud ristsirged lõikavad teist haara. Valime esimese ristlõigu aluseks vabalt punkti A_1, teise aluseks punkti A_2 nii, et $A_1A_2 =$

$= AA_1$, kolmandaks aluspunktiks A_3 nii, et $A_2A_3 = AA_2$, jne. (joon. 4). Hindame sel viisil moodustatud kolmnurkade defekte kasutades asjaolu, et kolmnurga defekt võrdub osakolmnurkade defektide summaga.[7]

Olgu $\delta_{AA_1B_1} = \delta_0$; Lobatševski aksioomi põhjal $\delta_0 > 0$. Et $\delta_1 = \delta_{AA_2B_2} = \delta_{AA_1B_1} + \delta_{A_1A_2B_1} + \delta_{B_1A_2B_2} = 2\delta_0 + \delta_{B_1A_2B_2}$ ja $\delta_{B_1A_2B_2} > 0$, siis

$$\delta_1 > 2\delta_0.$$

Samal viisil saame järjestikku võrratused

$$\delta_2 = \delta_{AA_3B_3} > 2^2\delta_0,$$

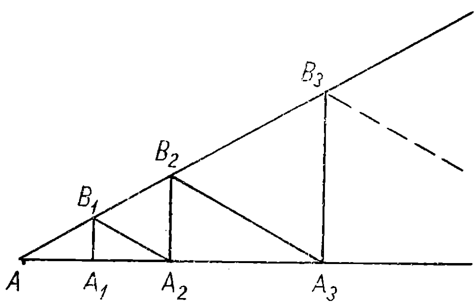
$$\delta_3 = \delta_{AA_4B_4} > 2^3\delta_0,$$

jne.

üldiselt

$$\delta_n = \delta_{AA_{n+1}B_{n+1}} > 2^n\delta_0.$$

Tehtud oletuse kohaselt saab sooritatud konstruktsiooni piiramatult jatkata: iga järgmine ristlõik lõikab nurga teist haara ja



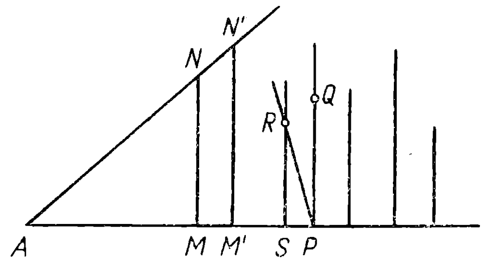
Joonis 4.

tekitab kolmnurga. Seega võib arv n olla kuitahes suur. Et aga $\delta_0 > 0$, siis muutub n-nda kolmnurga defekt juhul, kui n kasvab, tõkestamatult suureks, mis on vastuolus defekti definitsiooniga: $\delta = \pi - \sum < \pi$, s. o. defekt on tõkestatud suurus. Oletus kõigi ristlõikude lõikumisest teise haaraga tekitab loogilise vasturääkivuse, seepärast peab see oletus olema väär ja teoreemi väide omakorda tõene.

Tõestatud teoreemist järeldub, et teravnurga haarale tõmmatud ristsirged jagūnevad kahte klassi. Ühte klassi kuuluvad sirged, mis lõikavad teist haara, teise klassi need, mis ei lõika. Ilmselt on iga lõikaja nurga tipule lähemal kui mistahes mittelõikaja. Sellest järeldame, et vaadeldavate ristsirgete hulgas leidub selline sirge PQ, millest nurga tipu poole jäävad ainult lõi-

[7] Vt. Matemaatika ja kaasaeg, XIII, lk. 78.

kajad, teisele poole aga ainult mittelõikajad (joon. 5).[8] Seega on PQ kas viimane lõikaja või esimene mittelõikaja.



Joonis 5.

Kuid viimast lõikajat ristsirget olla ei saa. Tõepoolest, iga lõikava ristsirge MN korral saab teise haara punktist N', mis on valitud nii, et $AN' > AN$, tõmmata ristsirge $M'N'$, mis on nurga tipust kaugemal kui MN. Niisiis peab sirge PQ olema esimene mittelõikav ristsirge.

Nüüd on kerge märgata, et sirge PQ peab olema paralleelne nurga teise haaraga AN. Kui oletada, et see nii ei ole, siis peaks saama läbi punkti P tõmmata nurga $A\widehat{P}Q$ sisepiirkonda sellise sirge PR, mis ei lõika sirget AN. Sellisel juhul osutuks sirge PR punktist R haarale AM tõmmatud ristsirge RS haara AN mittelõikavaks ja oleks ühtlasi lähemal nurga tipule kui sirge PQ. Et PQ on tipule kõige lähem mittelõikaja, siis on see võimatu.

Muide, sirgete PQ ja AN paralleelsuse saab tõestada veelgi lihtsamalt, kui kasutada lauset, mida sageli loetakse absoluutse geomeetria aksioomiks: sirge, mis lõikab kolmnurga üht külge, kuid ei läbi kolmnurga ühtki tippu, lõikab veel teist külge. Jätame selle otsese tõestuse leidmise lugeja iseseisvaks ülesandeks.

Niisiis $AN \parallel PQ$, vabalt valitud nurk $N\widehat{A}M$ on paralleelsusenurk ja AP on vastav paralleelsuselõik. Oleme leidnud meetodi, mis võimaldab iga antud teravnurga jaoks ehitada vastava sirglõigu, mille pikkus on selle nurgaga üheselt määratud.

Järeldus, mille nüüd oleme sunnitud tegema, on kõige hämmastavam: Lobatševski geomeetrias ei ole pikkuste mõõtmisel tarvis füüsikalist etaloni. Pikkusühiku saab siin fikseerida puhtgeomeetriliselt. Ühikuks võib lugeda näiteks külje sellises võrdkülgses kolmnurgas, mille kõik nurgad on 45°. Võib kasutada ka Lobatševski funktsiooni (kui

[8] Selle sisult korrektse järelduse range põhjendus tugineb pidevuse mõistel ja vastaval aksioomil, mida käesoolevas ülevaates ei käsitleta.

selle valem on teada) võttes ühikuks lõigu x, mille puhul $P(x) = 45°$ jne. Seega on pikkuste mõõtmine Lobatševski geomeetrias absoluutne samas mõttes, nagu seda on nurkade mõõtmine.[9]

Nimelt see asjaolu, mis hämmeldas juba Lambertit, osutus õige tõsiseks takistuseks uuele geomeetriale eluõiguse andmisel. Näiteks Legendre luges absoluutse pikkusühiku olemasolu sellevõrra veidraks ja ebatõenäoseks, et ta arvas siin olevat leidnud kõige tähtsama ajendi Eukleidese geomeetria ja selle V postulaadi ainukehtivuse ja ainuvõimalikkuse tunnustamiseks. Gauss aga suutis vabaneda vastavast kahtlustest alles pärast pikka võitlust iseendaga.

Ka tänapäeval, terve sajand pärast Lobatševski ideede võidukäigu algust, kasutatakse pikkuste mõõtmisel nii igapäevases elus kui ka teaduses ainult füüsikaliselt määratud mõõdupuid — ja Lobatševski absoluut on senini leidmata. Ometi tunnustab nüüd Lobatševski õpetust iga matemaatik. Eitada Lobatševski geomeetriat on samaväärne Koperniku õpetuse eitamisega ja tagasipöördumisega Ptolemaiose ajastusse. Lobatševski ideed võitsid — aga ka Eukleidese süsteem ei osutunud põrmugi kaotajaks pooleks! Tõde osutus keerukamaks, kui seda veel sajandit poolteist tagasi osati aimata.

(Järgneb)

[9] Vt. Matemaatika ja kaasaeg, XIII, lk. 83.

BRIDŽIÜLESANNE

Ärtu on trump ning pärast kolmandat tihi (selle võttis S) kujunes järgmine seis:

	♠ Ä E 5 3 ♡ 3 2 ♢ Ä K 6 3 ♣ —	
♠ K 10 6 ♡ E 7 ♢ 8 5 4 ♣ S 9	N W O S	♠ 9 8 7 ♡ K 8 6 5 4 ♢ 2 ♣ 8
	♠ S 4 2 ♡ Ä S 10 9 ♢ 7 ♣ E 10	

Kuidas peab S nüüd mängima, et O—W igasuguse kaitsemängu korral võtta veel vähemalt 8 tihi? (Et tegemist on üsna komplitseeritud ülesandega, siis esitame lahenduse alles «Matemaatika ja kaasaja» järgmises numbris).

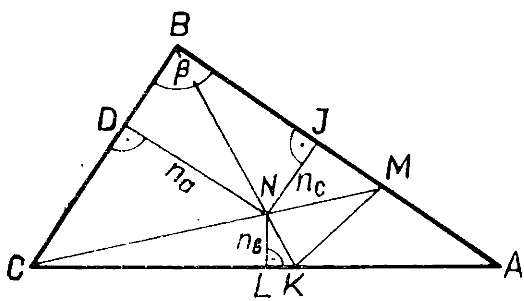
MÕNINGAID VALEMEID KOLMNURKADE KOHTA

M. Levin, R. Troškov

Olgu kolmnurga ABC ($AC \geqslant AB > BC$) külgedel AB ja AC võetud vastavalt punktid M ja K nii, et $BM = CK = BC$.

S. I. Zeteli raamatus «Задачи на максимум и минимум» (Moskva, 1948) ja M. Levini artiklis «Mõningaid valemeid kolmnurga geomeetriast» (Matemaatika ja kaasaeg, 1967, XII) uuritakse kolmnurga omadusi seoses lõiguga MK. Käesolev artikkel on lähedane nende sisuliselt seotud töödega.

Võtame kasutusele tähistused: $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $\angle ABC = \beta$, S — kolmnurga ABC pindala, p — pool ümbermõõtu; r_a, r_b, r_c — vastavate külgejoonestatud ringjoonte raadiused (näiteks r_a on külje BC ning külgede AB ja AC pikendusi puutuva ringjoone raadius).



Joonis 1.

Olgu N lõikude BK ja CM lõikepunkt, n_a, n_b, n_c — kaugused punktist N kolmnurga ABC külgedeni CB, CA, AB.

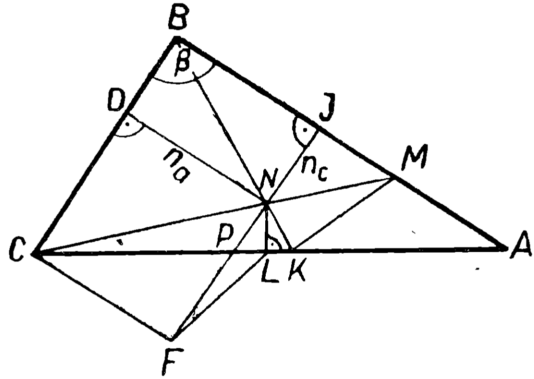
Teoreem 1. Kehtivad valemid

$$\frac{n_b}{n_a} = \frac{c-a}{b}, \tag{1}$$

$$\frac{n_c}{n_a} = \frac{b-a}{c}. \tag{2}$$

Tõestus: Olgu $NL \perp AC$, $ND \perp CB$, $NI \perp AB$ (vt. joonis 1). Pikendame lõiku IN lõigu ND pikkuse võrra ja ühendame saadud punkti F punktidega C ning L. Tähistame lõikude AC ja IF lõikepunkti tähega P.

Võrdhaarsest kolmnurgast CBM järeldub, et $\angle BCM = \frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2}$, kuid siis kolmnurgast CDN saame: $\angle CND = \frac{\beta}{2}$. Et $\angle DNF = \beta$ ($\angle DNF = \angle CBA$ kui vastavalt ristuvate haaradega



Joonis 2.

nurgad), siis $\angle CNF = \frac{\beta}{2}$, järelikult (arvestame, et $NF = ND$) $\triangle CDN = \triangle CNF$. Seega $\angle CFN = \frac{\pi}{2}$. Sellest järeldub, et $\triangle CFP$ on sarnane $\triangle PLN$, s. t.

$$\frac{CP}{PF} = \frac{PN}{PL}.$$

Viimasest võrdusest saame, et kolmnurgad NCP ja FLP on sarnased ja seega $\angle MCA = \angle NFL$. Et $\angle MAC = \angle FNL$ (nagu vastavalt ristuvate haaradega nurgad), siis on kolmnurgad CMA ja FNL sarnased. Siit tänu võrdusele $NF = ND$ (konstruktsiooni järgi) järeldub valem (1).

Analoogiliselt tõestatakse valem (2). Teoreem on tõestatud.

Teoreem 2. Kehtib valem

$$S = (p - a) \cdot n_a. \tag{3}$$

T õ e s t u s. Kirjutame võrdused (1) ja (2) kujul $b \cdot n_b = (c - a) n_a$, $c \cdot n_c = (b - a) n_a$. Liites need võrdused, saame

$$a \cdot n_a + b \cdot n_b + c \cdot n_c = (c + b - a) n_a.$$

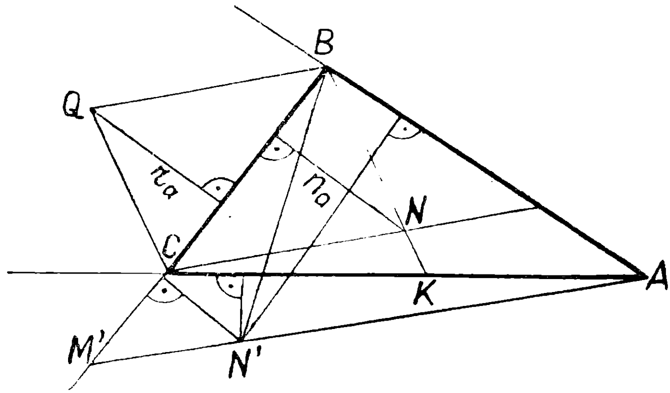
Selle võrduse vasak pool on kolmnurkade CNB, CNA, BNA kahekordistatud pindalade summa (vt. joonis 1), s. t. $2S$. Seega on teoreem tõestatud, sest $c + b - a = 2(p - a)$.

Teoreem 3. Kehtib valem

$$r_a = n_a. \tag{4}$$

T õ e s t u s: Küljele BC külgejoonestatud ringjoone keskpunkt

Q asetseb $\triangle ABC$ välisnurkade B ja C nurgapoolitajate lõikepunktis.



Joonis 3.

Kuna $\triangle CBM$ on võrdhaarne, siis kolmnurga välisnurga kohta käiva teoreemi põhjal saame, et $\angle QBC = \frac{1}{2}(\angle BCM + \angle CMB) = \angle BCN$. Analoogiliselt $\angle QCB = \angle CBN$. Siit $\triangle BQC = \triangle CBN$, s. t. neil on kõrgused võrdsed. Sellega on teoreem tõestatud.

Märkus 1. Valemite (3) ja (4) võrdlemisest saame tuntud valemi: $S = (p - a) r_a$.

Märkus 2. Analoogiliselt ülaltoodud omadustele saame ka järgmised $\triangle ABC$ omadused.

Olgu punktid K' ja M' vastavalt küljel AC ja külje BC pikendusel (üle punkti C) nii, et $AK' = BM' = AB$. Olgu N', sirgete BK' ja AM' lõikepunkt ja n'_a, n'_b, n'_c — punkti N' kaugused vastavalt külgedest CB, CA, AB. Siis kehtivad valemid:

$$\frac{n'_b}{n'_c} = \frac{c - a}{b}, \quad \frac{n'_a}{n'_c} = \frac{b - c}{a}, \quad S = (p - c) n'_c, \quad r_c = n'_c.$$

Kui punktid K'' ja M'' asetsevad vastavalt külgede AB ja CB pikendustel, nii et $AK'' = CM'' = AC$ ja punktis N'' lõikuvad sirged CK'' ja AM'', siis kehtivad valemid

$$\frac{n''_a}{n''_b} = \frac{b - c}{a}, \quad \frac{n''_c}{n''_b} = \frac{b - a}{c}, \quad S = (p - b) n''_b, \quad r_b = n''_b,$$

kus n''_a, n''_b, n''_c on kaugused punktist N'' kolmnurga ABC külgedeni CB, CA ja AB.

Toimetuselt. Artikli üks autoreist, R. Troškov — TPI II kursuse üliõpilane, kes lisaks käesolevas artiklis esitatud tulemustele on andnud veel M. Levini teoreemile 1 (Matemaatika ja kaasaeg XII, lk. 102—105) üldistuse (juhule, kus $BM = CK = \lambda BC$), on nende saavutuste eest autasustatud vabariiklikul noorte üliõpilaste tööde konkursil I preemiaga.

MILLISED ON MATEMAATIKU OMADUSED

W. W. Sawyer

Kõigile matemaatikutele on omane *mõtte julgus*. Matemaatikule ei meeldi, kui temale midagi millestki räägitakse, ta tahab selleni ise jõuda. Saades teada mingist suurest avastusest, huvitub küps matemaatik loomulikult, milles see seisneb, raiskamata aega sama taasavastamiseks. Siin aga pean ma silmas noori matemaatikuid, kellel mõtte julgus avaldub eriti tugevalt. Kui näiteks 9—10-aastastele poistele geomeetriat õpetades öelda, et keegi ei ole siiani suutnud jaotada nurka joonlaua ja sirkli abil kolmeks võrdseks osaks, siis jääb kindlasti paar poissi peale tunde ja püüab leida lahendust. See tõsiasi, et mitte keegi pole suutnud seda ülesannet lahendada kahe tuhande aasta jooksul, ei sega neid lootmast, et nad tulevad sellega toime tunniajalisel lõunavaheajal. Selline suhtumine pole just kuigi tagasihoidlik, kuid ka mitte liigselt enesekindel. Nad on lihtsalt valmis vastama igale väljakutsele. Kuid tegelikult on juba ammu tõestatud, et nurka joonlaua ja sirkli abil kolmeks võrdseks osaks jaotada on võimatu. Nende lahenduste leidmise katse on sama võimatu kui püüe avaldada $\sqrt{2}$ ratsionaalse murru $\frac{p}{q}$ kujul.

Hea õpilane püüab alati kursuse raamidest kaugemale näha. Kui teie selgitate talle, kuidas lahendada ruutvõrrandit täisruuduks teisendamise teel, tunneb ta kindlasti huvi, kas ka kuupvõrrandit võib lahendada täiskuubiks teisendamise teel. Ülejäänud õpilased klassis selliseid küsimusi ei esita. Neile jätkub ruutvõrrandeistki, nad ei otsi lisaraskusi.

See *huvi uurimise vastu* ongi teiseks matemaatikut iseloomustavaks jooneks. See on üks matemaatikat arendavatest jõududest. Matemaatik kasutab teadmisi, mis ta on juba omandanud, ja püüdleb alati uute teadmiste poole.

Seda mõtet võib selgitada näite varal kooli algebra kursusest, kus käsitletakse murruliste astendajatega astmeid. Võib kujutleda, kuidas inimene pealiskaudsel tutvumisel negatiivsete ja murruliste astendajatega imestab, milleks neid üldse on tarvis.

---

[1] Käesolev kirjutis on W. W. Sawyeri raamatust «*Prelude to Mathematics*» (Bristol, 1955). Tõlkinud J. Einpaul.

Nende mõistete kasutuselevõtmisel tuleb ületada terve rida loogilisi raskusi. Mulle aga näib, et see, kes avastas astmed murruliste astendajatega, töötas algul täisarvuliste astendajatega ja leidis sellest tööst nii palju loomingulist rahuldust, et pidi laiendama astme mõistet, kartmata loogilist riski. Uue avastuse puhul kerkib enamasti ikka kõigepealt tema usutavuse küsimus; edaspidi, kui on näha, et ta kehtib, tuleb leida talle ka loogiline põhjendus, mis rahuldab nõudlikumatki kriitikut.

Ma juba mainisin *huvi seaduspärasuste* vastu — kolmandat matemaatiku vajalikku omadust. Seaduspärasustega kohtume juba päris aritmeetika alguses. Näiteks neljast kivist võib moodustada ruudu, aga viiest — mitte. Andekus matemaatikas, samuti kui muusikaski, avaldub väga vara, nelja-aastaselt, vahel varemgi. Üks väikemees ütles mulle kord: «Mulle meeldib öelda sõna sEptEmbEr». Ise ma ei ole kunagi tähele pannud täishäälikute ja kaashäälikute reeglipärast asetust selles sõnas. See sõna on tõepoolest sümmeetriline. Sellisele lapsele hakkab kindlasti aritmeetika meeldima.

Üks seaduspärasuse elementaarne näide on korrutustabelis. Harilikult lapsed armastavad korrutada 2-ga ja 5-ga, sest tulemuse viimast numbrit on lihtne meelde jätta: korrutamisel kahega saame alati paarisarvud, aga korrutamisel viiega, veelgi lihtsam, on lõpunumbriks ikka 0 või 5. Kuid isegi korrutamisel 7-ga on oma seaduspärasus. Kui me vaatleme korrutiste 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, jne. viimaseid numbreid, saame rea

$$7,\ 4,\ 1,\ 8,\ 5,\ 2,\ 9,\ 6,\ 3,\ 0.$$

Arvutame iga arvu ja temale eelneva arvu vahe; saame rea

$$-3\ -3,\ 7,\ -3,\ -3,\ 7,\ -3,\ -3.$$

Selles reas on tunda kindlat rütmi. Kui lugeda seitsmega korrutamisel saadud arvude viimased numbrid vastupidises järjekorras, siis saame kolmega korrutatud arvude viimased numbrid.

Juba algkoolis on võimalik arendada matemaatiliste seaduspärasuste jälgimise harjumust. Paljud Gaussi varastest töödest pärinevad tema harjumusest arvutada ning analüüsida saadud arvutustulemusi. Hermite, üks tuntud prantsuse matemaatikuid, on rõhutanud, et üsna tihti viib matemaatiliste avastusteni vaatlusvõime. Tõsi küll, ainult vaatlusvõimest on vähe, et saada suureks matemaatikuks.

Nii nagu õpilane, kes märkab aritmeetika seaduspärasusi, kasutab neid aritmeetika ülesannete lahendamisel, nii aitab oskus märgata algebra seaduspärasusi vältida vigu ja kirjakomistusi. Näiteks ruutvõrrandi $ax^2+2bx+c=0$ lahendite võrdsuse tingimuseks on: $b^2-ac=0$ (või ruutvõrrandi $ax^2+bx+c=0$ puhul $b^2-4ac=0$). Samasuguse tingimuse võib leida ka kuupvõrrandi lahendite jaoks. Kuupvõrrandil on kolm lahendit; vaatleme, millisel juhul on kaks neist võrdsed.

Võrrandi $ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0$ kahe lahendi võrdsuse tingimuseks on

$$(bc - ad)^2 - 4(ac - b^2)(bd - c^2) = 0.$$

Seda tingimust on võimalik kirjutada ka kujul

$$a^2d^2 - 6abcd + 4b^3d + 4ac^3 - 3b^2c^2 = 0.$$

Analüüsides toodud võrduste vasakuid pooli, märkame järgmisi seaduspärasusi.

1) Igas liikmes on tähtede arv sama. Näiteks avaldise $b^2 - ac$ kumbki liige koosneb kahest tähest, mis on omavahel korrutatud, s. t. iga liikme aste on 2. Kuupvõrrandi kahe lahendi võrdsuse tingimuses koosneb iga liige 4-st omavahel korrutatud tähest, Meenutame, et b^3d on pikemalt kirjutatult $bbbd$. Seega kokkuvõttes — iga liikme aste on neli.

2) Nendes avaldistes on veel teist liiki tasakaal, ehkki see teine seaduspärasus ei ole kohe märgatav: tasakaal tähtede vahel, mis on tähestiku ees- või tagapool. Näiteks tingimuses kuupvõrrandi jaoks on liikmed $abcd$ ja $a^2d^2 =$ aadd. Võrdleme teisel kohal olevaid tähti. Liikmes $aadd$ on a teisel kohal, liikmes $abcd$ on teisena b. Tähestikus on a eespool kui b. Kuid õiglus võidutseb: kui vaadelda kolmandaid tähti, siis näeme, et liikmes $aadd$ on kolmandaks d, liikmes $abcd$ aga — c. Tasakaal on täpne: a on b-st eespool, aga d pärast c-d. See tasakaal säilib kõigis liikmeis. Seda kontrollime järgmiselt. Omistame igale tähele hinna: $a = 0$, $b = 1$, $c = 2$, $d = 3$. Igas liikmes on hindade summa 6:

$$abcd\colon\ 0 + 1 + 2 + 3 = 6; \qquad ac^3\colon\ 0 + 2 + 2 + 2 = 6.$$

Igale liikmele vastavat hindade summat nimetatakse liikme kaaluks; sellisel juhul on iga liikme kaal 6. Avaldises $b^2 - ac$ on iga liikme kaal 2.

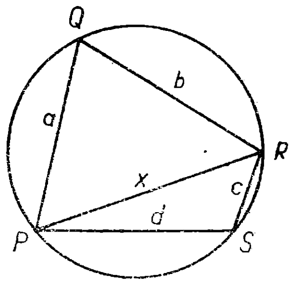
3) Arvuliste kordajate summa on igas avaldises 0. Tõepoolest, avaldises $b^2 - ac$ on kordajateks $+1$ ja -1, nende summa on 0, aga avaldises $a^2d^2 - 6abcd + 4b^3d + 4ac^3 - 3b^2c^2$ on kordajateks 1, —6, 4, 4, —3, mille summa on samuti 0. Teiste sõnadega: kui toodud avaldistes võtta $a = b = c = d = 1$, siis on need avaldised nullid.

Need kolm omadust võimaldavad kontrollida meie tähelepanelikkust ja täpsust. Esimene omadus võimaldab kontrollida, kas me ei eksinud tähtede astendajatega, sest sellise vea tõttu muutub liikmete aste erinevaks (juhul kui me ei tee rohkem vigu teistes liikmetes, mis selle vea kompenseeriks). Teine omadus võimaldab vältida vigu täheliste sümbolite ümberkirjutamisel. Kui näiteks mingisugusel etapil kirjutame d asemel a, siis see muudab liikme kaalu. Kolmas omadus päästab vigadest liitmisel. Oletame, et me unustasime liitmisel ühe liikme. Kui me nüüd anname kõigile tähtedele väärtuseks 1, siis ei saa me summaks 0 ja sellega on kindlaks tehtud vea olemasolu.

Sedalaadi kontrollimine ei võimalda veel heita pilku matemaatika sügavustesse; matemaatik tegutseb siin alateadlikult: vaatab vastust ja teeb kindlaks, kas sel on oodatud sümmeetria ja kaal. Lihtsalt üllatav on, kuivõrd harva õpetatakse lapsi selliselt arutlema. Eksamitel leidub sageli õpilasi, kes annavad ära oma tööd, milles ülesannete vastustel on «vale kuju»: nad lausa karjuvad mõne lihtsa paranduse järele. Põhimõtteline kontroll jääb ülaltoodud spetsiaalse kontrolli puhul kõrvale.

Geomeetrilise seaduspärasuse näide

Geomeetria koolikursuses esineb võrrand $x^2 = \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}$, kus x, a, b, c, d, on joonisel 1 toodud lõikude pikkused. Seda tulemust on kerge tõestada, avaldades $\cos Q$ ja $\cos S$ kolmnur-



Joonis 1.

kade PQR ja PSR külgede kaudu. Nurkade Q ja S koosinuste summa peab võrduma 0-ga, sest $Q + S = 180°$ ja siit $\cos S = -\cos Q$. Saadud võrrand lahendatakse siis x^2 suhtes.

Selles tõestuses pole midagi rabavat, kuid tähelepanuvääriv on tulemuse seaduspärasus.

Neli elementi on võimalik jagada paarideks kolmel erineval viisil. Kui neljakesi mängida bridži, siis A ja B võivad mängida C ja D-ga või A ja C B ja D-ga või A ja D B ja C-ga. Rohkem võimalusi ei ole.

Algebralised avaldised $ab + cd$, $ac + bd$, $ad + bc$ on koostatud samal põhimõttel: jaotada neli elementi paarideks ja need paarid liita. Sellisel rühmitamisel on võimalik koostada neljast elemendist kolm ja ainult kolm avaldist, arvestades muidugi, et $cd + ab = ab + cd$.

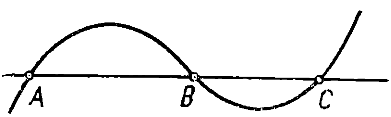
Toodud valemis esinevad kõik kolm avaldist: kaks lugejas ja kolmas nimetajas.

Ma ei kavatse siin lahendada küsimust, miks see valem on just selline, vaid ainult rõhutada, et tänu sellisele seaduspärasusele on see valem meeldejääv.

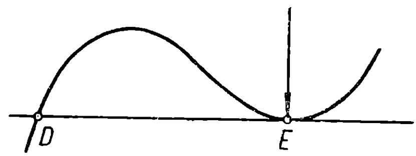
Mõte ja üldistus

Nähes seaduspära mingis kunstiteoses, võime seda tunnetada ning imetleda, kuid me ei suuda seletada, milles seisneb tema tähendus. Parem seda mitte püüdagi teha. Üks poeet on protesteerinud barbaarse kombe vastu sundida lapsi ümber jutustama luulet oma sõnadega. Ta rääkis, et ainsaks luuletuse sisu edasiandmise võimaluseks on kirjutada parem luuletus. Lastelt seda muidugi ei saa nõuda.

Aga matemaatikas on olukord tavaliselt teistsugune. Kui me märkame mingit seaduspärasust, siis küsime tingimata: «Miks ta esineb? Mida ta tähendab?» Ja harilikult me leiame vastuse nendele küsimustele. Niisiis, alati, kui tuleb ilmsiks mingi seaduspärasus, tunneb matemaatik, et ta peab teadma, miks see esineb.



Joonis 2^a.



Joonis 2^b.

Näiteks me võime selgitada, miks on lahendite võrdsuse tingimusel eespool toodud omadused 1—3, toome esile üldidee, jättes ära algebralised üksikasjad (mis on tegelikult päris lihtsad).

Vaatleme kuupvõrrandi, mis lühidalt on kirjutatud kujul $f(x) = 0$, graafikut.

Esimene graafik (joonisel 2^a) kujutab funktsiooni $y = f(x)$, millel on erinevad reaalsed lahendid. Kui seda kõverat nihutada ülespoole, nii et kõvera lõikepunktid teljega B ja C ühtivad, saame kõvera, mis vastab ühe paari võrdsete lahenditega kuupvõrrandile. Muuseas, me võime lahendite võrdsust kontrollida ka arvutusega. Punktis E võrduvad suurused y ja $\frac{dy}{dx}$ 0-ga. On teada, et võrdsed lahendid saame juhul, kui võrrandil $\frac{dy}{dx} = f'(x) = 0$ ja algvõrrandil $f(x) = 0$ on ühiseid lahendeid.

Kujutleme nüüd, et teine kõver (joonisel 2^b) on joonestatud kummile. Oletame, et kummi venitatakse vertikaalsuunas, kusjuures y-telje koordinaadid muutuvad. Kõvera võrrand omandab sel juhul kuju $y = kf(x)$. On selge, et kui esialgne kõver puutub x-telge (nagu see on võrdsete lahendite korral), siis puutub ka uus kõver, mis on saadud vertikaalsel venitamisel, x-telge. Teiste sõnadega, kui võrrandil $f(x) = 0$ on võrdsed lahendid, siis on võrdsed lahendid ka võrrandil $kf(x) = 0$. Vaadeldes teguri k mõju konstantidele a, b, c, d, s. t. hulkliikme $f(x)$ kordajatele, ei ole raske märgata, et lahendite võrdsuse tarvilikuks tingimuseks on esimene omadus — kõik liikmed peavad olema sama järku.

Kõvera üldkujule ei mõju ka venitus x-telje sihis. Kõver jääb endiselt puutuma x-telge. Siit võime teha järelduse, et kui võrrandil $f(x) = 0$ on võrdsed lahendid, siis on võrdsed lahendid ka võrrandil $f(kx) = 0$. Siit tulenebki teine omadus — kõik liikmed on ühekaalulised.

Kolmas omadus osutub kõige lihtsamaks. Kui võtta $a = b = c = d = 1$, siis omandab ruutvõrrand kuju $x^2 + 2x + 1 = 0$, aga kuupvõrrand — kuju $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$ ehk vastavalt $(x + 1)^2 = 0$ ja $(x + 1)^3 = 0$, millest on ilmne, et neil on korduv lahend. (Kõik kolm kuupvõrrandi lahendit on -1, meile piisaks sellestki, kui kaks neist oleksid -1.)

Seega kehtivad omadused (1) *ja* (2) *iga sellise tingimuse puhul, mida ei mõjuta vertikaalne ega ka horisontaalne venitus; omadus* (3) *kehtib iga tingimuse korral, mis rahuldab võrrandit* $(x + 1)^n = 0$.

Need järeldused on suureks sammuks edasi, võrreldes selle momendiga, mil me lihtsalt märkasime omadusi (1), (2), (3). Nüüd suutsime neid põhjendada ja teame, millal ja miks nad kehtivad.

Kõik see võimaldab omadusi (1), (2), (3) kasutada mitte ainult lahendite võrdsuse tingimuse kontrollimiseks, vaid ka muuks otstarbeks. Näiteks kui meil on kolme lahendiga kuupvõrrand, võime uurida, millistel tingimustel asub üks lahend kahe ülejäänud lahendi vahelise lõigu keskpunktis. Antud kõvera korral (joonis 2^a) tähendaks see, et punkt B jaotab lõigu AC pooleks. See omadus kehtib ka siis, kui muuta mastaapi vertikaali või horisontaali suunas. See kehtib ka võrrandi $(x + 1)^3 = 0$ puhul, sest punktid A, B ja C ühtivad ($x = -1$), kusjuures B on A ja C vahelise lõigu (pikkusega 0!) keskpunktiks. Järelikult peavad sellel tingimusel olema omadused (1), (2), (3); osutub, et otsitavaks avaldiseks on:

$$2b^3 - 3abc + a^2d = 0.$$

See on matemaatika arengus ühe kõige olulisema faktori — *üldistuse* — näide. Me alustasime lahendite võrdsuse tingimuse uurimisest, aga lõpetasime printsiibiga, mis on rakendatav hoopis laiemale tingimuste klassile. Niisuguse üldistuse väärtus on ilmne. Mida laiem on küsimuste ring, millele võib rakendada mingit printsiipi, seda sagedamini aitab see meid välja raskustest. Poincaré on öelnud: «Oletame, et tegin keerukaid arvutusi ning jõudsin tulemuseni suurte raskustega; kuid kõik minu jõupingutused osutuksid asjatuiks, kui nad ei aitaks ette näha tulemust teistes analoogilistes arvutustes, kui nad ei annaks mulle võimalust teha neid kindlusega, vältides pimedat kobamist, millega ma pidin leppima esimesel korral».

Peale üldistust muutub resultaat veelgi enam rakendatavaks. Teid võib-olla üllatab, et üldistus lihtsustab peaaegu alati resultaati. Üldisemat järeldust on kergem omandada kui vähem üldist.

Illustratsiooniks võib olla järgmine triviaalne ülesanne: «Ühes klaasis on 10 lusikatäit vett, teises — 10 lusikatäit veini. Tõstame lusikatäie vett esimesest klaasist teise ja segame. Siis tõstame lusikatäie segu esimesse klaasi. Küsitakse, mida on rohkem, kas esimeses klaasis veini või teises vett?»

On ilmne, et sellele küsimusele vastamiseks võib teha järgmised arvutused. Pärast seda, kui oleme lusikatäie vett tõstnud teise klaasi, on seal 10 lusikatäit veini ja 1 lusikatäis vett, s. t. kokku 11 lusikatäit. Järelikult üks lusikatäis segu sisaldab $\frac{10}{11}$ lusikatäit veini ja $\frac{1}{11}$ — vett. Valame lusikatäie segu esimesse klaasi, selles on nüüd $9\frac{1}{11}$ lusikatäit vett, $\frac{10}{11}$ lusikatäit veini, teises klaasis on nüüd $\frac{10}{11}$ lusikatäit vett ja $9\frac{1}{11}$ lusikatäit veini. On näha, et esimeses klaasis oleva veini hulk on võrdne teises klaasis oleva vee hulgaga.

See tulemus võib näida juhuslikuna; muutes aga ülesande tingimusi, veendume, et alati saadakse võrdsed hulgad. Kui on antud x lusikatäit vett ja x lusikatäit veini, siis on veini hulk, mis satub esimesse klaasi, võrdne vee hulgaga, mis satub teise klaasi. Isegi kui alustada ebavõrdsete vedelike kogustega klaasides, näiteks x lusikatäit vett esimeses ja y lusikatäit veini teises klaasis ja selle järel teha samad protseduurid mis esialgses ülesandes, ka siis on lõpuks esimeses klaasis vett samapalju kui teises klaasis veini.

See on halva matemaatilise stiili selgeks näiteks. Hea, piltliku tõestuse korral ei ole tõestuskäigu lõpul saadav tulemus meile üllatuseks, vaid ta oli läbinähtav kogu arutluse vältel.

Ülalpool toodud ülesanne kasutab teatavat maskeeringut. *Selles on antud mittevajalikke andmeid, mida teil pole vaja teada* ja mis hajutavad tähelepanu, suunavad ta kõrvale ülesande sisust. Liigseks tingimuseks on: «Segame segu». Tegelikult on oluline vaid see, et me tõstame lusikatäie vedelikku esimesest klaasist teise ja seejärel lusikatäie segu teisest klaasist esimesse. Üldse pole tähtis, millist vedelikku me ümber kallame, oluline on see, et lõppude lõpuks oleks mõlemas klaasis sama palju vedelikku kui katse alguses. Vedeliku hulgad peavad olema võrdsed, selle kindlakstegemiseks pole vaja ei murde ega algebralisi teisendusi.

Üldkujul on see ülesanne järgmine: on klaas vett ja klaas veini, me teeme nende vedelikkudega rea ümbervalamisi, nii et lõpptulemusena on vedelike kogus klaasides võrdne esialgsega. Siis peab vee hulk, mis satub veinisse, võrduma veini hulgaga vees.

See on niivõrd ilmne, et sellest vaevalt tasub rääkida. Ülesande üldine kuju on hoopis lihtsam kui varem tehtud arvutused. Üldisel kujul antud ülesande rakendusala on küllalt suur. Võib teha ümbervalamisi ühest klaasist teise ja vastupidi kui palju tahes kordi ja ikkagi jääb üldine printsiip kehtima.

Järelikult seisneb ülesande uurimine selles, et heita kõrvale kõik mittevajalikud andmed ja jätta ainult olulised. Mida vähem on andmeid, seda kergem on leida lahendust. Üldine teoreem sisaldab harva midagi keerukat; tema eesmärgiks on *pöörata tähelepanu tähtsatele faktidele.*

Elementaarmatemaatikas kohtame segu igasugustest tähtsatest ja vähem tähtsatest detailidest. Kõrgemas matemaatikas püüame eraldada erinevaid elemente ja uurida neid eraldi. Selles mõttes võib kõrgem matemaatika olla palju lihtsam kui elementaarne.

Tõenäoliselt on kõige tuntum lihtsustuse näide üldistuse kaudu Hilberti teoreem lõplikust baasist. 1868. a. tõestas Gordan töömahukate arvutuste teel olulise teoreemi, mida me siinkohal esitama ei hakka. See väitis, et mõnedel spetsiaalse teooria abil tuletatud kindlatel hulkliikmete hulkadel on teatav omadus. 1890. a. tõestas Hilbert sama omaduse väga lihtsalt ja arvutusteta. See õnnestus tal sellepärast, et ta jättis kõrvale 90% informatsioonist, mida kasutas Gordan. Ta tõestas lisaks, et teoreem ei ole kehtiv ainult nende spetsiaalsete hulkliikmete klasside korral, vaid kõigi hulkliikmete klasside korral üldse!

Me oleme jõudnud naeruväärsest ülevani. Kuivõrd triviaalne ja naiivne on ülesanne veest ja veinist, samavõrd sügav ja kaugeleulatuv on Hilberti teoreem. Need mõlemad näited illustreerivad ühte ja sama printsiipi: «Suurim üldistus ja suurim lihtsus on teineteisest lahutamatud.» Sellega on veel kord näidatud matemaatika suuri võimalusi viia ühe katuse alla täiesti erinevaid asju.

Kuid mingi matemaatilise uurimuse tähtsust ei tohi hinnata üksikute eri küsimuste kaudu. Selle näiteks on topoloogia. Topoloogiat nimetatakse vahel ka «geomeetriaks kummil». Teatavas mõttes on see just nii; ta vaatleb geomeetrilisi kujundeid, mis on joonestatud venivale lehele. Kuid topoloogia tähtsus tuleneb sellest, et kummist lehele kantud lõikudel ei ole jäävat pikkust. Kummil ei saa kehtida Pythagorase teoreemi taolised tulemused; võib teha ainult selliseid järeldusi: «See kõver on pidev, aga too on jaotatud kahte ossa». Pidevus on põhiline omadus, mida uurib topoloogia; siin räägitakse sellistest objektidest, mida võib *järk-järgult teisendada.* Et eksisteerib väga vähe asju, millega ei saa teha selliseid teisendusi, siis haarab topoloogia endasse väga laia küsimuste ringi. Ta kütkestab järjest rohkem nii matemaatikuid kui ka insenere; tema abil võib tõestada rea üllatavaid tulemusi. Ta ühendab endas kõrgeima üldistuse astme maksimaalse lihtsusega.

Unifitseerimine

Kõigel, millest me rääkisime eespool, on eesmärgiks avardada küsimuste ringi, mis allub matemaatikale. Uurimine, seaduspärasuste avastamine, iga seaduspärasuse mõtte selgitamine, juba tuntud seaduspärasuste eeskujul uute tuletamine — kõik need tegevuse liigid laiendavad matemaatika mahtu. Praktilisest küljest muutub väga raskeks jälgida kõiki saadud tulemusi ega saa öelda, et üksteisega mitteseotud teoreemide kuhjumine kujutaks endast rõõmustavat nähtust. Olles üheaegselt nii kunstnikud kui ka asjalikud inimesed, tunnevad matemaatikud vajadust koondada kõik need hajutatud tulemused ühtekokku.

Ei ole üllatav, et kogu matemaatika ajalugu koosneb üksteisele järgnevatest küsimuse «laiendamise» ja «koondamise» protsessidest. Näiteks: mingi probleem paelub matemaatikute tähelepanu; kirjutatakse sadu artikleid, igaüks neist valgustab tegelikkust erinevast küljest. Materjali hulk kasvab. Seejärel keegi geenius, toetudes kõigile suurte raskustega kogutud andmetele, teatab: «Kõik, mis on meile teada, muutub ilmseks, kui vaadata sellele tollelt vaatekohalt ja pidada seda printsiipi silmas». Seejärel ei ole kellelgi peale matemaatika ajaloolaste vajadust lugeda sadu erinevaid artikleid. Mitmesugused tulemused ühendatakse üheks lihtsaks doktriiniks, tähtsad faktid eraldatakse aganatest ja otsene juurdepääs soovitud järeldusteni on avatud kõigile. Andmete maht, mida tuleb õppida, väheneb. Kuid see ei ole veel kõik. Pärast seda, kui uus meetod on saanud kõigile kättesaadavaks, kerkivad uued probleemid, mille lahendamiseks ta ei sobi ja algavad uuesti vastuste otsingud, uuesti publitseeritakse artikleid, uuesti algab «laiendamise» protsess.

Matemaatikut ei rahuldaks, kui ta võiks kõik teadmised koondada kahe üldise seaduse alla. Ta ei rahuneks enne, kui oleks näidatud, et need mõlemad seadused põhinevad ühel printsiibil. Aga ka siis ei oleks ta õnnelik; vastupidi — ta muutuks õnnetuks, sest tal ei oleks enam midagi teha. Kuid sellise seisaku perspektiiv on täiesti ebatõenäone. Elu on selline, et ühe probleemi lahendamine tekitab alati uue probleemi; teisiti oleks elu väljakannatamatu. Alati on ja alati saab olema materjali uurimisel raskusi, mida on vaja ületada.

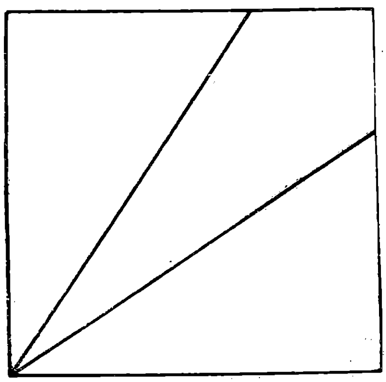
Mil viisil see toimub, võib näha tähelepanuväärsel, umbes 1800. aastasse kuuluval unifitseerimise näitel. Siis ilmnes, et suurem osa varem õpitud funktsioone on ühe väga üldise funktsiooni — hüpergeomeetrilise funktsiooni erandjuhtudeks. Hüpergeomeetriliste funktsioonide teooria oli siis ja on praegugi hajutatud informatsiooni ühendamise võimsaks vahendiks. On avastatud hüpergeomeetrilise funktsiooni uusi vaatekohti. Muuseas tõestati, et tema eriomadused on seotud sellega, et tal on 3 singulaarset punkti (siinkohal ei ole vajadust selgitada, mis on «singulaarne punkt»). Niisiis, lihtsate omadustega funktsioonil on singulaarseid punkte kolm või vähem; just selliste funktsioonidega tegeles klassikaline matemaatika. Aga kohe kerkis siin küsimus: missuguste omadustega on *nelja* singulaarse punktiga funktsioon? Siiani on see küsimus põhiolemuselt lahendamata.

Nii on see alati. Kui osutub, et kogu olemasolev matemaatika vaatleb ainult nähtusi omadustega A, B ja C, siis matemaatikud küsiksid kohe: «Aga mis juhtub, kui mingil esemel oleks ainult mõni või mitte ühtegi nendest omadustest?» Ja nad süveneksid uuesti töösse.

VIGURIGA ÜLESANDEID

7. Farmeril on kolm roosat, neli pruuni ja üks must siga. Mitu nende kaheksa sea hulgast võivad ütelda, et nad on sama värvi mis mõni teine siga selles hulgas?

8. Ruudu külje pikkus on kolm ühikut. Selle ruudu ühest tipust on tõmmatud kaks sirglõiku, mis jagavad ruudu kolmeks pindvõrdseks osaks (vt. joonis). Kui pikad on need sirglõigud?



9. Paigutada viis tuletikku nii, et nad moodustaksid kuubi (murdmine, painutamine ja muud sellised operatsioonid pole muidugi lubatud).

DEKRÜPTEERIMISÜLESANDED

(Kuidas lahendada keerdülesandeid II)

Ü. Kaasik

Keerdülesannete ühe raskema liigi moodustavad mitmesugused salakirjaasjandusega ehk **krüptograafiaga** seotud probleemid. Kõige levinumateks on seda liiki ülesannete hulgas niisugused, kus tuleb «lahti mõistatada» (= tavalisse eesti keelde tõlkida) mingi tundmatu salakirjameetodi abil kirjapandud sõnum. Järgnevas vaatlemegi lühidalt salakirjade koostamise põhivõtteid ja mõningaid vastavate ülesannete lahendamisel otstarbekaiks osutuvaid meetodeid. Sõnastuste lihtsustamiseks peame aga kõigepealt kokku leppima terminoloogias, mistõttu alustame olulisemate terminite kasutamise selgitamisega, pretendeerimata sealjuures vastavate mõistete eriti rangele defineerimisele.[1]

Uuritava sõnumi üldarusaadavalt kirjutatud sisu nimetame lahtiseks tekstiks ehk lihtsalt **tekstiks**, tema salakirjas esitatud kuju aga vastava teksti **krüptogrammiks**. **Šifriks** nimetatakse seda konkreetset meetodit või eeskirjade kogu, mille abil toimub teksti «tõlkimine» salakirja, s. t. esitamine krüptogrammina. Niisuguse «tõlkimise» protsessi ennast nimetatakse **šifreerimiseks**, seega on krüptogramm šifreeritud tekst. Et salakiri oleks praktiliselt kasutatav, peab šiffer muidugi võimaldama ka vastassuunalist «tõlkimist», mida on loomulik nimetada **dešifreerimiseks**. Krüptograafia-alastes keerdülesannetes tavaliselt nõutaksegi just niisugust «tõlkimist», kuid seda tuleb teha ilma vastavat šifrit tundmata. Et dešifreerimiseks sellist tegevust enam nimetada ei saa, siis tuleb siin kasutada terminit **dekrüpteerimine**[2] ja nimetada vastavaid keerdülesandeid **dekrüpteerimisülesanneteks**. Dekrüpteerimine on seega krüptogrammi niisugune teisendamine tekstiks, mille puhul vastav šiffer ei ole ette antud.

Krüptograafia tunneb väga palju erinevaid šifriliike, kuid keerdülesannetena esitatavates dekrüpteerimisülesannetes kasutatakse neist vaid lihtsamaid. Kui jätta kõrvale piltmõistatused ja muud sellised elementaarsed dekrüpteerimisülesanded, siis võib nähtavasti piirduda kolme põhilise šifriliigiga. Nendeks on peitmisšiffer, nihutamisšiffer ja asendamisšiffer. Käesolevate ridade autor igatahes on vaid väga harva näinud keerdülesannete

---

[1] Et krüptograafia-alane terminoloogia pole eesti keeles välja kujunenud, siis tuleb siin toodud ettepanekutesse muidugi kriitiliselt suhtuda.

[2] Inglise keeles näiteks kasutatakse selles tähenduses terminit *decrypt*.

rubriigis dekrüpteerimisülesandeid, milles kasutatud šiffer nimetatud liikide või nende enam-vähem vahetute kombinatsioonide alt välja ulatuks.

Üheks lihtsamaks šifriliigiks on peitmisšiffer, mille korral tõelise teksti tähed (sõnad) on mingil viisil ära peidetud edasiantavas sõnumis esinevate tähtede (sõnade) hulka. Seejuures jätab sõnum reeglina tavalise kirja mulje ega tarvitse isegi tekkida kahtlust, et tegemist on krüptogrammiga.

Nihutamisšifri korral on teksti tähed nende loomulikust järjekorrast välja nihutatud vastavalt mingile etteantud võtmele.

Asendamisšifri kasutamisel jäävad teksti tähed oma loomulikku järjekorda, kuid iga täht on asendatud mingi teise sümboli ehk koodiga. Järgnevas vaatleme lühidalt kõiki neid šifriliike ning nende mõningaid lihtsamaid kombinatsioone, kuid lähemalt peatume just asendamisšifril kui keerdülesannetes kõige sagedamini esineval.

Peitmisšifreid iseloomustab krüptogrammi suhteline pikkus tekstiga võrreldes. See tähendab, et enamik krüptogrammis esinevaid tähti on vaid maskeeringuks ja üksnes üsna väike osa seostub vahetult tekstiga. Peitmisšifri lihtsaimate variantide korral moodustavad teksti näiteks krüptogrammis esinevate sõnade esimesed, teised, viimased või muud fikseeritud tähed.

Põhiline osa dekrüpteerimisest osutub nende šifrite korral teostatuks juba sellega, kui tekib kahtlus, et tegemist on üldse niisuguse šifriga. Selliseks kahtluseks on aga alust siis, kui krüptogrammiks oleva kirja sõnastus tundub kohmakana või otsituna (see asjaolu vihjabki peitmisšifrite peamisele puudusele — üsna raske on teatud etteantud tähtede korral saavutada ladusat sõnastust). Tekkinud kahtluse kontrollimiseks võib näiteks kirjutada krüptogrammi sõnad eraldi paberiribadele ja paigutada need üksteise alla, asetades kohakuti kas sõnade esitähed, lõputähed või keskpaigad. Vaadeldes tekkivate kujundite veerge, tarbekorral aga ka diagonaale või isegi mõningaid siksakilisi teid, avastatakse tekst tavaliselt üsna kiiresti. Harjutamiseks esitame näiteks järgmised kaks lihtsat ülesannet.

Ülesanne 1. Selgitada, kas järgmise kirjaga on püütud edasi anda ka mingit peidetud sisu:

> *Kahjuks seoses kombaini remondiga olen õhtuti maal. Arvatavasti saame selle siiski vist ülehomseks valmis. Saan koju peale nelja.*

Ülesanne 2. Sama küsimus kerkib ka niisuguse kirja puhul:

> *Tervist Margus! Tulen reedel kevad- või maipühi pidama. Karlaga pooleks ostsime konjaki tasku. Pole miskitki parata — muud võtta pole. Ma vististi sõidan bussiga. Jaan.*

Lisaks nimetatud moodusele võib pikemate (enam-vähem ladusa kirja kujul antud) krüptogrammide dekrüpteerimisel proovida veel sellist lihtsat võimalust, et teksti saame näiteks lausete mingeid fikseeritud sõnu kokku lugedes.[3]

Peitmisšifri keerulisemaks variandiks on erilise aukudega šablooni kasutamine (selle šifritüübi autoriks olevat kardinal Richelieu). Sel juhul kirjutatakse tekst vaid šablooni aukude kohale, ülejäänud osa krüptogrammist täidetakse aga mistahes sõnadega nii, et kokku kujuneksid enam-vähem ladusad laused. Kui sellist šifrit keerdülesandes kasutatakse, siis on tavaliselt ühtlasi antud ka lugemiseks vajalik šabloon, näiteks kirjale lisatud maleülesande vms. kujul.

Üsna sageli võib keerdülesandeis kohata veel peitmisšifri niisugust kombinatsiooni asendamisšifriga, kus tähtede koodidena kasutatakse nende järjekorranumbreid tähestikus. Et koode oleks sõnalisse teksti lihtsam ära peita, esitatakse tähtede järjekorranumbrid sageli kas kahend- või kolmendsüsteemis[4] (eesti tähestiku[5] tähtede järjekorranumbrid kümnend-, kahend- ja kolmendsüsteemis on toodud tabelis 1). Numbrimärkide (kahendsüsteemi

Tabel 1

A 1 00001 001	B 2 00010 002	D 3 00011 010	E 4 00100 011	F 5 00101 012	G 6 00110 020	H 7 00111 021	I 8 01000 022
J 9 01001 100	K 10 01010 101	L 11 01011 102	M 12 01100 110	N 13 01101 111	O 14 01110 112	P 15 01111 120	R 16 10000 121
S 17 10001 122	T 18 10010 200	U 19 10011 201	V 20 10100 202	Õ 21 10101 210	Ä 22 10110 211	Ö 23 10111 212	Ü 24 11000 220

korral 0 ja 1, kolmendsüsteemi korral aga 0, 1 ja 2) peitmise üheks võimaluseks on nende asendamine sõnadega nii, et peidetavaks numbriks osutub sõna tähtede arvu ja kasutatava arvu-

[3] Vt. näit. N. Trublaini. «Kuunar «Kolumbus»». Tln., 1956, lk. 228—231.

[4] Vt. E. Tamme. Positsioonilised arvusüsteemid. — Matemaatika ja kaasaeg, IV, lk. 43—50.

[5] Krüptograafias on sageli oluline, et tähestiku tähtede arvul oleks võimalikult rohkem jagajaid. Eesti tähestiku algarvulise pikkuse (23) «parandamiseks» on käesolevas artiklis seetõttu tähestikku lisatud veel täht F.

süsteemi aluse jagamisel tekkiv jääk. Näiteks viiesõnaline lausekatkend

läks jälle tagasi oma majja

tähendab kahendsüsteemi korral sel juhul arvu 01011, mis tabeli 1 kohaselt vastab tähele L. Numbreid võib aga krüptogrammis esitada ka erineva kirjaviisiga (näiteks suurte ja väikeste) tähtede abil, silpide arvuna sõnas, sõnade arvuna lauses (peidetavaks numbriks on näiteks lause sõnade arv miinus kaks) ja mitmel teisel analoogilisel moodusel. Sellise šifreerimisviisi äratundmise harjutamiseks tuleks lahendada kasvõi järgmised lihtsad harjutusülesanded.

Ülesanne 3. Kombineeritud orienteerumisvõistlustel antakse võistkondadele algul järgmine kirjalik instruktsioon:

TulEB MiNNA OtsE vASakULE vÕI kA PArEmALE NiNg sEeJärEL TInGiMAta JOostES üldSE MITTE kuSKiLE.

Mida selle «instruktsiooni» kohaselt tuleb teha?

Ülesanne 4 (eelmise järg). Ühes järgmistest kontrollpunktidest saadakse aga niisugune «õpetus»:

Murdke see leheke üheksaks võrdseks osaks. Kui kolmandal saadud osadest on üks serv roosa aga pole kollane, siis tõmmake see osa lõhki mööda seda kollast joont. Nõnda toimides on teil vist võitmine võimatu.

Mida nüüd teha?

Nihutamisšifrile tuginevaid krüptogramme leidub keerdülesannete rubriigis suhteliselt harva ja enamasti on neile sealjuures mingil viisil lisatud vastav võti, mis näitab, kuidas tuleb krüptogrammi tähti nihutada, et neist moodustuks tekst. Võtmeks on tavaliselt mingi krüptogrammis teatud viisil esile tõstetud (näiteks kuupäevana või allkirjana vms.) sõna või arv. Kui võtit leida ei õnnestu, võib oletada, et tegemist on nihutamisšifri ühe lihtsaima variandiga, mille puhul tarvitseb vaid jaotada krüptogramm ühepikkusteks (tähtede arvu mõttes) osadeks ja kirjutada need ristkülikukujulise tabeli ridadeks või veergudeks. Sellise ristküliku ühe külje pikkuse määrab näiteks krüptogrammi «sõnadeks jaotus», teise külje aga tähtede üldarv krüptogrammis (kui tähtede üldarv osutub kahe algarvu korrutiseks, siis võivad need ollagi ristküliku mõõtmeteks). Kui niisugustest ristkülikutest midagi vahetult välja lugeda ei õnnestu, siis tuleb kas oletada, et tegemist on hoopis näiteks asendamisšifriga, või püüda veel kord võtit üles otsida.

Võtme tähenduse tõlgendamise viisi poolest pakub nihutamisšiffer üsna palju võimalusi. Nimetame siin vaid paari keerdülesannetes kõige sagedamini kasutatavat.

Krüptogrammi korraldamine ristkülikukujuliseks tabeliks võib olla muudetud keerulisemaks sel teel, et ridade või veergude paigutamise järjekord antakse ette võtme abil. Kui võtmeks on arv, siis see võib tähendada veergude (ridade) tabelisse paigutamise järjekorda. Näiteks võtme 316425 üsna loomulikuks tähenduseks on, et krüptogrammis esinevad tähed tuleb jaotada kuueks (= numbrite arv võtmes) võimalikult ühepikkuseks rühmaks ja kirjutada need rühmad võtmega antud järjekorras tabeli ridadeks, s. t. paigutada esimene rühm teiseks reaks, teine rühm viiendaks reaks jne. Näiteks krüptogramm

AHLIS MLPSA MKLLD EDSOT REDUS
KDAKI ANARK EILUT KIAEI MPILE

tuleb niisugusest hüpoteesist lähtudes kirjutada ümber kujul

3	*S*	*O*	*T*	*R*	*E*	*D*	*U*	*S*	*K*
1	*A*	*H*	*L*	*I*	*S*	*M*	*L*	*P*	*S*
6	*A*	*E*	*I*	*M*	*P*	*I*	*L*	*E*	·
4	*D*	*A*	*K*	*I*	*A*	*N*	*A*	*R*	·
2	*A*	*M*	*K*	*L*	*L*	*D*	*E*	*D*	·
5	*K*	*E*	*I*	*L*	*U*	*T*	*K*	*I*	·

Sama tüüpi võtme võib aga anda ka sõnalisel kujul, kusjuures vajalik arv saadakse keerdülesannetes sageli lihtsalt võtmeks oleva sõna tähti tähestiku järjekorras numbritega asendades. Näiteks võti *KAUNIS* (aga samuti ka *KAUNAS*) annab sellise tõlgenduse korral just äsja vaadeldud arvu 316425.

Arvuna antud (või arvule taandatava) võtme teiseks sageli esinevaks tähenduseks nihutamisšifri korral on tähtede «väljanoppimise» järjekorra määramine. Sealjuures võib osa krüptogrammis esinevaid tähti olla lihtsalt täitematerjal, mis sellise väljanoppimise käigus teksti üldse ei satu (eriti sageli on see nii just nihutamis- ja peitmisšifri mitmesuguste kombinatsioonide puhul).

Koos niisugust tüüpi võtmega antakse mõnikord veel ette ka koht krüptogrammis, kust väljanoppimist alustada (samuti ei tarvitse aga ka ristkülikukujulise tabeli moodustamiseks vajalik rühmitamine alata just krüptogrammi algusest). Näiteks võtme *F*3524 üsna tõenäoliseks tähenduseks on, et alates esimesest krüptogrammis esinevast tähest *F* tuleb välja kirjutada kõigepealt kolmas, sealt edasi viies, siis teine, siis neljas, siis jälle kolmas jne. täht, jätkates krüptogrammi lõppedes seda protsessi jälle algusest kuni kas kõikide tähtede ammendamiseni või teksti loomuliku lõpuni.

Lähemaks tutvumiseks nihutamisšifri siin kirjeldatud lihtsamate variantidega tuleks lahendada näiteks järgmised harjutusülesanded.

Ü l e s a n n e 5. Mida on selle kirjaga öelda tahetud?

SRLMEES	*TNGLMEJ*	*EILTITD*	*ATALAMD*
DUIEAEH	*SLGIAAD*	*SLMDAAE*	*ATGTHKA*
IUKIKPT	*IAEIHSK*	*KTIOEÖH*	*AEEEAAE!*

Ü l e s a n n e 6. Millise üldtuntud fakti on autor järgmise krüptogrammi kujul esitanud?

ITTATKAM GSTTTLEM LEKAETVR DABDAUTI AHIAAAIR
MITMAAJS AKSÜEEEI EMASATEV ALPESSBA JAKEAEKO

Ü. KAASIK

Ü l e s a n n e 7. Ettevõtte direktori kätte sattus eksikombel järgmine kiri, mis oli nähtavasti määratud hoopis kellelegi tema alluvaist:

jaanipäeval
Meie Otuga mõtlesime et teeme õige Katset ka
sellel Suvel nagu Ma mullu käisin jälle Kalale
tulla ja et Otul on nüüd Üks Uus Lant ja Mul
samuti siis tahaks neid proovida kui Järve Äärest
Paadi saame Ei ole viga kui vihma sajab siis me
Tuleme Ikka ja meil on mõlemal Oma Õngelatt ligi
nii et ma Arvan et sinu Omasid pole vaja tervitab
Lell

Selles kirjas tundus kahtlasena nii imelik sõnastus, kirjavahemärkide puudumine ja suurte tähtede ebareeglipärane kasutamine kui ka asjaolu, et jaanipäevani oli tegelikult veel üsna palju aega. Päris väikese vaevaga selguski, et kahtlus oli põhjendatud. Mida direktor sellest kirjast välja luges?

Keerdülesannetes kõige sagedamini kasutatavaks šifriliigiks näib olevat just asendamisšiffer, mille puhul teksti kuuluvad tähed säilitavad krüptogrammis oma loomuliku järjekorra, kuid on asendatud kas teiste tähtede või üldse mingite sümbolitega. Sümbolit, millega täht on krüptogrammis kõikjal asendatud, nimetatakse vastava tähe k o o d i k s. Sõnastuste lihtsustamiseks kasutame tähtede ja nende koodide vahelise seose märkimisel edaspidi nurksulge, andes näiteks kirjutisele $\mathfrak{M} = \langle R \rangle$ tähenduse: «sümbol $\mathfrak{M}$ on tähe R kood».

Tähestiku kõikide tähtede ja nende koodide (seega kogu šifri) lühendatud ülesmärkimiseks kirjutame ühte ritta kõik tähed (tähestiku järjekorras) ning vahetult nende alla vastavad koodid. Näiteks kirjutis

A	B	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	R	S	T	U	V	Õ	Ä	Ö	Ü
G	*H*	*I*	*J*	*K*	*L*	*M*	*N*	*O*	*P*	*R*	*S*	*T*	*U*	*V*	*Õ*	*Ä*	*Ö*	*Ü*	*A*	*B*	*D*	*E*	*F*

tähendab niisuguse kokkuleppe puhul, et $G = \langle A \rangle$, $H = \langle B \rangle, \ldots, F = \langle Ü \rangle$. Selles näites torkab silma lihtne seaduspära: tähe koodiks on temast (tsükliliselt korduvas) tähestikus viie koha võrra paremal paiknev täht. Niisuguseid kas tähestiku või tagurpidi järjekorras kirjutatud tähestiku nihutamise teel saadavaid šifreid (nn. Caesari šiffer) kasutatakse keerdülesannetes kaunis sageli. Tihti on sealjuures krüptogrammile lisatud ka võti, mis näitab, mitme koha võrra tuleb tähestikku nihutada (antud näite puhul +5). Eriti sageli lisatakse võti aga siis, kui tähestiku erinevaid osi on erinevalt nihutatud. Näiteks võti 3*K*7 võib tähendada, et tähestiku algusosa on (tsükliliselt) nihutatud 3 koha võrra, lõpuosa, alates tähest K, aga 7 koha võrra.

Juhul kui koodidena kasutatakse tähti, on krüptogrammile üldse sageli lisatud võti, mis mingil viisil kirjeldab tähtede ja nende koodide vahelise vastavuse seaduspära. Näiteks kui võti on antud sõnana *HOBUNE*, siis võib šifri moodustamine ühel lihtsamatest juhtudest toimuda järgmiselt. Võtmesõna järele kirjutatakse tähestiku järjekorras kõik ülejäänud, s. t. võtmes mitte esinevad tähed, jagatakse tekkinud tähestik pooleks ning paigutatakse need pooled kahte ritta:

H O B U N E A D F G I J
K L M P R S T V Õ Ä Ö Ü.

Mingi tähe koodiks on nüüd temaga kohakuti (kas üleval või all) paiknev täht, näiteks $H = \langle \mathrm{K} \rangle$, $K = \langle \mathrm{H} \rangle$, $O = \langle \mathrm{L} \rangle$, $L = \langle \mathrm{O} \rangle$ jne.

Võtme tähendus võib mõnikord ka asendamisšifri korral olla sarnane nihutamisšifri puhul nimetatud tõlgendamisvõimalustega. Mõnedes keerdülesannetes esitatakse võti veel katkendina mingist hinnakirjast, sõiduplaanist vms., kusjuures arvud tähendavad näiteks nendega kohakuti olevate sõnade esitähtede koodide järjekorranumbreid tähestikus (vt. tabel 1).

Võtme tõlgendamise nende ja analoogiliste võimaluste äratundmise harjutamiseks sobivad näiteks järgmised ülesanded.

Ülesanne 8. Maantee äärde puu külge on kinnitatud kiri:

NRRLN MSMÖK KLORL DMTJP
VVÜKV ÕPMÜI JPJOM HRDDK
MUSKETÄRID

Kas selles kirjas sisalduvast informatsioonist ka mingit kasu on?

Ülesanne 9. Kas võib mingit kasu anda niisuguses laimukirjas sisalduv informatsoon?

LAIM

DEL	*RÖB*	*LVA*	*EÕU*	*TDH*
ÜLÕ	*ÄBÖ*	*SEJ*	*LRL*	*SJL*
ÄLS	*ITV*	*REÄ*	*ÕLT*	*TSL*
ÕHH	*ÄNK*	*HSG*	*EFH*	*ÄSL*
LÕÖ	*JÖÕ*	*HBL*	*VAE*	*DÖJ*
HRL	*SHB*	*EÕÖ*	*HLE*	*SSE*

Asendamisšifri abil koostatud krüptogramme saab enamasti (kui krüptogramm just liiga lühike ei ole) dekrüpteerida ka siis, kui koodid on valitud täiesti juhuslikult ja mingit võtit pole antud.

Kui on põhjust arvata, et krüptogramm tugineb asendamisšifrile, kuid võtit vahetult avastada ei õnnestu, siis võetakse dekrüpteerimisel tavaliselt aluseks koodide esinemise sagedused. Statistiline analüüs näitab nimelt, et vaatamata sisust, stiilist jne. tingitud kõikumistele on tähtede keskmised esinemissagedused eestikeelsetes tekstides siiski üsna stabiilsed. Tabelis 2 ongi esitatud rajad, millesse enamasti langevad eesti tähestiku tähtede keskmised esinemissagedused mitmesugustes ulatuslikumates proosatekstides (protsentides).[6]

Tabel 2.

A	B	D	E	F	G	H	I
11,5— —14,0	0,7— —1,0	3,6— —4,7	10,5— —12,4	0— —0,1	1,7— —2,2	1,5— —2,1	8,7— —10,2
J	**K**	**L**	**M**	**N**	**O**	**P**	**R**
1,8— —2,2	4,5— —5,5	5,7— —6,4	3,5— —4,2	4,2— —5,2	3,4— —4,4	1,5— —2,2	2,1— —3,2
S	**T**	**U**	**V**	**Õ**	**Ä**	**Ö**	**Ü**
8,0— —9,6	6,8— —8,0	5,6— —6,7	1,9— —2,6	1,0— —1,5	1,0— —1,5	0,3— —0,6	0,6— —1,0

Tabelit 2 aluseks võttes tuleb dekrüpteerimisel tavaliselt kontrollida vaid suhteliselt üsna väike arv hüpoteese üksikute koodide võimalike tähenduste kohta. Hüpoteeside arvu suurendab mõningal määral siiski asjaolu, et tähtede esinemissageduste esitatud rajad on saadud ulatuslike tekstide analüüsimisel: suhteliselt lühikeste tekstide korral tuleb neid radasid märgatavalt avardada.

Kui asendamisšifri abil koostatud krüptogrammis on säilitatud teksti loomulik sõnadeks jaotus (keerdülesannetes kohtab seda lihtsustust üsna tihti), siis osutub otstarbekohaseks arvestada veel koodide esinemise sagedust sõnade alguses. Statistilisest analüüsist selgub, et sõna esitähena esineb eesti keeles kõige enam K (üle 13% sõnadest), edasi T (11%), S (9%), M ja V (8%), P (7%), E, J, O ja A (6%) jne. Sõna teiseks täheks on aga

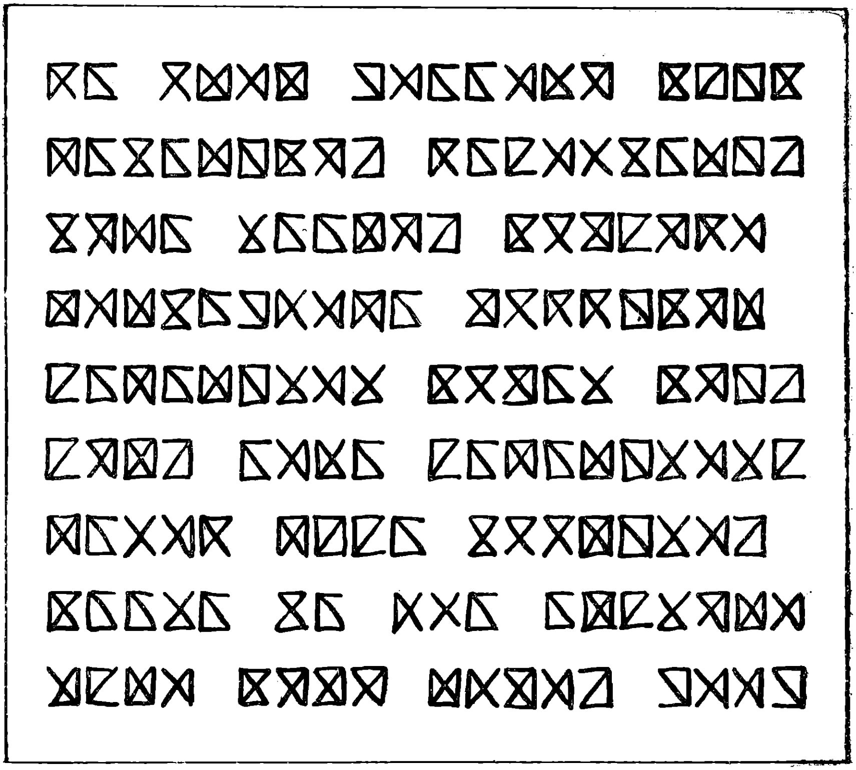
---

[6] Veidi üksikasjalikuma ülevaate tähtede ning tähepaaride esinemissageduste kohta eesti keeles võib leida artiklis: Ü. Kaasik, E. Laugaste. Tähtede sagedus eestikeelsetes tekstides. — «Keel ja Kirjandus» X, 1969.

peaaegu 80% juhtudest vokaal (sealhulgas A üle 20%, E ca 15%, I ca 11%, U ca 10%, O, Ä ja Õ ca 6%, Ö ja Ü 1—2%). Konsonantidest väärivad sõna teise tähena märkimist vaid N ja L (4—5%).

Illustreerime tähtede esinemissageduste kasutamist dekrüpteerimisel järgmise ülesande enam-vähem üksikasjaliku lahenduskäigu esitamisega.[7]

Ü l e s a n n e 10. Selgitada, mida on öeldud joonisel 1 esitatud kirjas.



Joonis 1.

Et tegemist näib olevat asendamisšifri abil koostatud krüptogrammiga, kusjuures teksti sõnadeks jaotus on nähtavasti säilitatud, siis alustame dekrüpteerimist kirjas esinevate sümbolite

[7] Sellist dekrüpteerimismeetodit on ilukirjanduses kirjeldanud juba Edgar Allan P o e («Kuldmardikas») ja Arthur Conan D o y l e («Tantsivad inimesed»).

loendamisega. Joonisel 2 ongi toodud kõigi 22 erineva sümboli loetelu nende esinemissageduse järjekorras: esimene arvude rida sümbolite all tähendab lihtsalt järjekorranumbreid, teise ritta on kirjutatud, mitu korda vastav sümbol krüptogrammis üldse esineb, kolmandasse ritta sõna esitähena esinemiste arv ja neljandasse ritta sõna teise tähena esinemiste arv. Et krüptogrammis kasutatud koodisümboleid on tülikas kirjutada, siis asendamegi nad järgnevas lihtsalt vastavate järjekorranumbritega jooniselt 2.

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*	*16*	*17*	*18*	*19*	*20*	*21*	*22*
27	17	11	10	9	9	9	8	7	6	6	6	6	6	5	4	3	3	2	2	1	1
2	0	0	1	3	1	6	0	0	1	1	3	3	2	1	2	1	0	0	0	1	0
9	4	4	1	1	0	0	0	0	4	1	0	0	0	0	0	1	1	2	0	0	0

Joonis 2.

Loendamise tulemusi tabelis 2 toodud keskmiste andmetega võrreldes võime kohe püstitada terve rea tõepärastena näivaid hüpoteese. Kuna sümbol *1* esineb teistest märgatavalt suurema sagedusega ja on ka kõige sagedamini sõnades teisel kohal, siis võib olla üsna kindel, et tegemist on tähe A koodiga, s. t. *1* = = <A>. Sageduselt järgmine sümbol *2* peaks tabeli 2'kohaselt olema kas tähe E, S või T kood, kuid et ta kordagi ei esine sõna alguses ning esineb suhteliselt palju sõna teise tähena, siis kõige tõenäosema hüpoteesina tuleb kõigepealt proovida võimalust *2* = = <E>. Samadel põhjustel peaks ka sümbol *3* olema veel vokaali koodiks ning järelikult tuleb esmajärjekorras võtta proovimisele hüpoteesid *3* = <I> ja *3* = <U>. Sõna teise tähena esinemise suure sageduse tõttu on ka sümboli *10* puhul nähtavasti tegemist vokaali koodiga, kusjuures arvesse tulevad O ja eelmisest hüpoteesist ülejääv täht. Sõna esimese tähena esinemise suurt sagedust arvestades näib veel kaunis tõepärasena hüpotees *7* = = <K>.

Püstitatud hüpoteeside kontrollimise lihtsustamiseks kirjutame oma krüptogrammi ümber nii, nagu on näidatud joonisel 3: asendame tähed kriipsudega, mille alla on kirjutatud vastavate sümbolite järjekorranumbrid ja peale nende oletatavasti (või kindlasti) teada olevad vasted. Joonisele 3 ongi kantud kõige tõenäosemad hüpoteesid: *1* = <A>, *2* = <E> ja *7* = <K>.

Hüpoteeside kontrollimiseks võtame nüüd vaatlusele need sõnad, kus eriti palju tähti on juba välja kirjutatud. Antud juhul torkavad selles mõttes silma esimese rea kolmas sõna, kuuenda rea teine sõna ja kaheksanda rea esimene sõna. Teises neist näiteks sobivad vabale kohale ainult tähed D ja G. Et tegemist on väga vähe esineva tähega, siis tundub tõenäosemana oletus *20* =

	A				E				E	A	A	E				K			K
14	1		10	4	2	11		16	2	1	1	2	20	3		7	19	8	7
	A		A			K					A		E			A			
12	1	13	1	4	8	7	3	9		14	1	5	2	18	13	1	4	8	9
			A			A	A					K						E	
13	3	22	1		6	1	1	11	3	9		7	10	15	5	3	14	2	
	E			A			E		A							K			
11	2	4	13	1	16	17	2	12	1		15	10	14	14	8	7	3	4	
	A		A				E			K			A			K			
5	1	12	1	4	8	6	2	6		7	10	15	1	6		7	3	8	9
					A	E		A			A		A				E		
5	3	11	9		1	2	20	1		5	1	12	1	4	8	6	2	6	5
	A		E						A								E		
12	1	18	2	14		12	19	5	1		13	10	10	11	8	6	2	9	
K	A	A		A			A				A		A						E
7	1	1	6	1		13	1		17	18	1		1	11	5	6	3	4	2
			E		K								E				E	E	
21	5	4	2		7	3	15	3		4	17	15	2	9		16	2	2	16

Joonis 3.

= <G>. Tõepoolest, esimese rea kolmandaks sõnaks saame sel juhul nähtavasti PEAAEGU, mis pealegi sobib ülaltehtud hüpoteesiga *3* = <U>. Kaheksanda rea esimese sõna ainsale vabale kohale sobib suurema esinemissagedusega tähtedest vist ainult S, mis annab sõna KAASA.

	A				E			P	E	A	A	E	G	U		K			K
14	1		10	4	2	11		16	2	1	1	2	20	3		7	19	8	7
	A		A			K	U				A		E			A			
12	1	13	1	4	8	7	3	9		14	1	5	2	18	13	1	4	8	9
	U		A		S	A	A		U			K				U		E	
13	3	22	1		6	1	1	11	3	9		7	10	15	5	3	14	2	
	E			A	P		E		A							K	U		
11	2	4	13	1	16	17	2	12	1		15	10	14	14	8	7	3	4	
	A		A			S	E	S		K			A	S		K	U		
5	1	12	1	4	8	6	2	6		7	10	15	1	6		7	3	8	9
	U				A	E	G	A			A		A			S	E	S	
5	3	11	9		1	2	20	1		5	1	12	1	4	8	6	2	6	5
	A		E						A							S	E		
12	1	18	2	14		12	19	5	1		13	10	10	11	8	6	2	9	
K	A	A	S	A			A				A		A			S	U		E
7	1	1	6	1		13	1		17	18	1		1	11	5	6	3	4	2
			E		K	U		U					E			P	E	E	P
21	5	4	2		7	3	15	3		4	17	15	2	9		16	2	2	16

Joonis 4.

Täiendades joonist 3 äsja tehtud järeldustega (*20* = <G>, *16* = <P>, *3* = <U> ja *6* = <S>) omandab see joonisel 4 esitatud kuju, kus mingit vastuolu vähemalt esialgu silma ei hakka.

Krüptogrammis kõige rohkem esinevatest sümbolitest on seni lahtiseks jäänud *4* ja *5*, suurema keskmise sagedusega tähtedest on aga vabad veel I, L ja T. Paneme siinjuure tähele, et sümboleist *4* ja *5* ei saa kumbki ilmselt olla vokaali (antud juhul I) koodiks, sest nad esinevad liiga sageli mõne juba teada oleva vokaali kõrval (sümbol *4* üheksal juhul kümnest ja sümbol *5* kuuel juhul üheksast). Et veel sümbol *5* esineb suhteliselt rohkem sõna alguses, siis tuleks kõigepealt proovida võimalust *4* = <L>, *5* = <T>. Ühtlasi peame silmas, et ikka veel lahtiseks jäänud sageli esineva tähe I kood ei tohiks olla suur arv. Eeskätt tuleb arvestada võimalusi *8* = <I> ja *9* = <I>, et aga sümbol *9* esineb juba teada oleva vokaali kõrval neljal juhul seitsmest, sümbol *8* aga vaid ühel juhul kaheksast, siis võtame kõigepealt vaatlusele võimaluse *8* = <I>. Ühtlasi meenutame veel, et sümbol *10* pidi olema vokaali koodiks ja seega nähtavasti *10* = <O>.

Täiendades nende oletustega (*4* = <L>, *5* = <T>, *8* = <I> ja *10* = <O>) joonist 4 omandab see joonisel 5 esitatud kuju.

	A	O	L	E			P	E	A	A	E	G	U		K			K	
14	*1*	*10*	*4*	*2*	*11*		*16*	*2*	*1*	*1*	*2*	*20*	*3*		*7*	*19*	*8*	*7*	

	A		A	L	I	K	U				A	T	E			A	L	I	
12	*1*	*13*	*1*	*4*	*8*	*7*	*3*	*9*		*14*	*1*	*5*	*2*	*18*	*13*	*1*	*4*	*8*	*9*

	U		A		S	A	A		U			K	O		T	U		E
13	*3*	*22*	*1*		*6*	*1*	*1*	*11*	*3*	*9*		*7*	*10*	*15*	*5*	*3*	*14*	*2*

	E	L		A	P		E		A			O			I	K	U	L
11	*2*	*4*	*13*	*1*	*16*	*17*	*2*	*12*	*1*		*15*	*10*	*14*	*14*	*8*	*7*	*3*	*4*

T	A		A	L	I	S	E	S		K	O		A	S		K	U	I	
5	*1*	*12*	*1*	*4*	*8*	*6*	*2*	*6*		*7*	*10*	*15*	*1*	*6*		*7*	*3*	*8*	*9*

T	U				A	E	G	A		T	A		A	L	I	S	E	S	T
5	*3*	*11*	*9*		*1*	*2*	*20*	*1*		*5*	*1*	*12*	*1*	*4*	*8*	*6*	*2*	*6*	*5*

	A		E					T	A			O	O		I	S	E	
12	*1*	*18*	*2*	*14*		*12*	*19*	*5*	*1*		*13*	*10*	*10*	*11*	*8*	*6*	*2*	*9*

K	A	A	S	A			A				A		A		T	S	U	L	E
7	*1*	*1*	*6*	*1*		*13*	*1*		*17*	*18*	*1*		*1*	*11*	*5*	*6*	*3*	*4*	*2*

	T	L	E		K	U		U		L			E			P	E	E	P
21	*5*	*4*	*2*		*7*	*3*	*15*	*3*		*4*	*17*	*15*	*2*	*9*		*16*	*2*	*2*	*16*

Joonis 5.

Nüüd aga ei tohiks vabade kohtade täitmine enam kellelegi raskust valmistada, nii et dekrüpteerimise tulemusena leiame:

MA OLEN PEAAEGU KÕIK VAJALIKUD MATERJALID JUBA SAANUD. KOHTUME NELJAPÄEVA HOMMIKUL TAVALISES KOHAS, KUID TUND AEGA TAVALISEST VAREM. VÕTA JOONISED KAASA JA ÄRA ANTSULE ÜTLE KUHU LÄHED. PEEP.

Kirjeldatud dekrüpteerimismeetodi paremaks tundmaõppimiseks tuleks lahendada veel vähemalt järgmine (eelmisest veidi raskem) harjutusülesanne.

Ülesanne 11. Mida teha, kui sõbrale külla sõites leiate tema ukselt järgmise kirja, kuid kunagi ammu kokkulepitud šifri olete täiesti unustanud?

AIKRLKG HTRUI DIFJBKLLI RN SG LINF LKLLI UKGGIL HNLNDEF ASSF RIKLIF BKKEFKF SFIHN DSFUNGJN DNLRK ATPONL UKRUILEZELI BNENDSFE NFF ANMIBK LIIL VBN EGELRN AVBNLR OVFFI ELR FEDELRNJN GKGZ HTRKR LNUNLLI DSPRN RNZNLK ANGGN

Juhul kui teksti sõnadeks jaotumist pole krüptogrammis säilitatud, muutub dekrüpteerimine mõningal määral raskemaks. Kui veel koodidena on kasutatud tavalisi tähti, siis tuleb kõigepealt muidugi selgitada, kas tegemist on üldse asendamisšifriga. See aga järeldub tavaliselt lihtsalt loendamisest: kui tähtede krüptogrammis esinemise sagedused on enam-vähem kooskõlas tabelis 2 toodud keskmistega, siis on tõenäoliselt tegemist nihutamisšifriga, kui aga kooskõla pole, siis muutub juba tõenäolisemaks asendamisšiffer.

Olles jõudnud arvamisele, et tegemist peaks olema asendamisšifriga, tuleb ka sõnadeks jaotuse puudumise (või ilmselt moonutatud sõnadeks jaotuse) korral hüpoteeside püstitamisel tugineda ikka koodide esinemissagedustele. Et nüüd ei ole võimalik arvestada tähtede esinemise sagedusi sõnade alguses, tuleb kasutada mõningaid töömahukamaid ja kahjuks vähem efektiivseid täiendavaid võtteid. Suurem osa niisugustest võtetest on seotud koodipaaride või isegi -kolmikute vaatlemisega. Nimetame siin vaid üht lihtsaimat neist (mida me tegelikult küll osaliselt kasutasime ka juba ülesande 10 lahendamisel).

Loendades koos iga koodiga ka vahetult tema kõrval paiknevaid koode saab üsna sageli n.-ö. eraldada vokaalid konsonantidest, mis juba tunduvalt lihtsustab hüpoteeside püstitamist. Koodide niisugune rühmitamine on teostatav näiteks järgmisi lihtsaid seaduspärasusi silmas pidades.

Kaksikvokaali (-konsonandi) kõrval paikneb enamasti konsonant (vokaal).

Korduvates koodipaarides on üks tavaliselt vokaali kood.

Enam kui kolme konsonandi järjest paiknemine (ka sõnade liitekohal) on eesti keeles harva esinev nähtus.

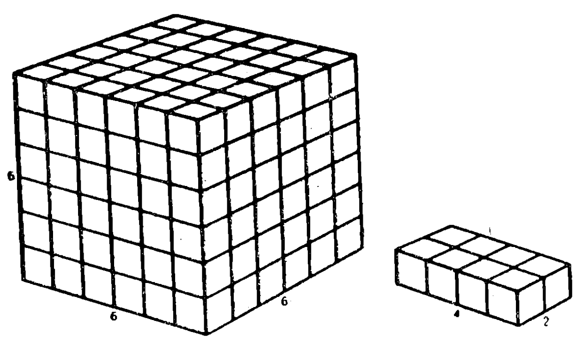
Kui ühe sageli esineva sümboli kohta eeldada, et ta on vokaali kood, siis teine sageli esinev sümbol on tõenäoliselt konsonandi kood sel juhul, kui ta tihti paikneb vaadeldava sümboli kõrval, ja vokaali kood vastupidisel juhul.

Loomulikult ei muuda need reeglid (samuti nagu ka kõik teised käesolevas artiklis esitatud näpunäited) dekrüpteerimist veel täiesti mehhaaniliseks protsessiks. Üsna suur osatähtsus jääb ikka dekrüpteerija taiplikkusele ning oskusele orienteeruda keerulistes olukordades. Et lugeja oma vastavaid võimeid proovida saaks, esitame lõpuks veel ühe märgatavalt raskema harjutusülesande.

Ü l e s a n n e 12. Kui palju aega võtab teilt selle krüptogrammi dekrüpteerimine, teades, et kasutatud on asendamisšifrit?

ALS NKQ QKH QKN GDM KQG BKD MGV SNK ANA LQL
NGK PGG QQG HBK ELD DSN SSN NGS EKC TPG BKG
ELQ KVL NKZ LBL QAL SGK PGQ TAN HQK HBK ALS
MGQ QGA GBK ELD DSC RSE KFV GMK AJH UEK KJS
VSN FNA LNE ETS KNE SJG BLQ MGC GAN USM GMG

VIGURIGA ÜLESANDEID



10. Kas saab kahekümne seitsmest tellisest, igaüks mõõtmetega $1 \times 2 \times 4$, laduda kuubi mõõtmetega $6 \times 6 \times 6$ (vt. joonis)?

Matemaatika ajaloost

KUIDAS ÕPITI LAHENDAMA VÕRRANDEID

M. Vanem, E. Tamme

Algebra, eriti keskkoolis õpitava algebra põhiprobleemid on seotud võrranditega. Võrrandite koostamise ja lahendamise metoodika moodustab küllaltki võimsa relva matemaatika vahendite arsenalis. See võimaldab lahendada keerulisi teaduse ja tehnika, aga ka igapäevase elu probleeme.

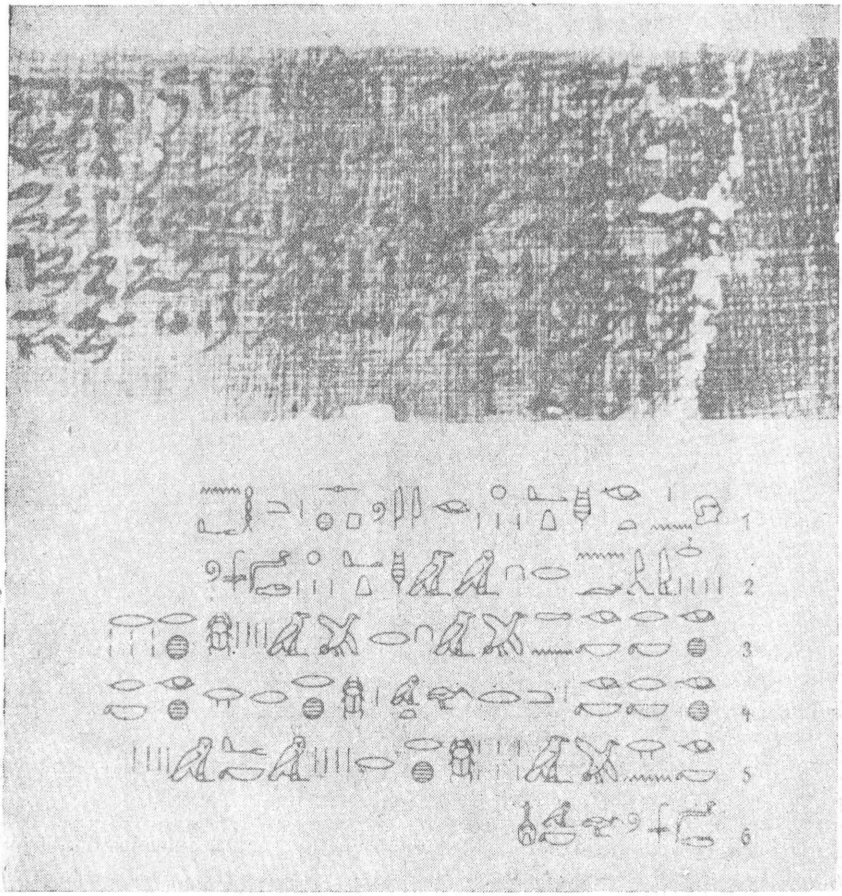
Arvatavasti on paljud kogenud, et pärast võrrandi mõiste ja põhiomaduste tundmaõppimist keskkoolis muutub arvukate, varem suurt mõttepinget nõudnud ülesannete lahendamine mänglevalt kergeks, et võrrandite koostamine avab võimalusi selliste ülesannete lahendamiseks, mida aritmeetika meetoditega on peaaegu lootusetu lahendada. Meile tundub nii lihtsana ja loomulikuna tähistada otsitav suurus näiteks tähega x, koostada selle leidmiseks võrrand ja viimane lahendada. Kuid sellise näiliselt lihtsa aparatuuri kasutuselevõtmine on saanud võimalikuks ainult tänu matemaatilise mõtteviisi pikale ja komplitseeritud arenguteele.

Järgnevatel lehekülgedel peatume matemaatika ajaloo mõningatel joontel ja etappidel, mis on etendanud osa võrrandite teooria tekkimises ja arengus.

Egiptuse papüürused

Inimühiskonna vanimad kultuurikolded kujunesid Egiptuses, Mesopotaamias, Indias jm. Juba kolmandal aastatuhandel e.m.a. ehitati Egiptuses suuri püramiide, templeid, niisutussüsteeme. Selliste suurehituste (umbes 2800 a. e.m.a. ehitatud Cheopsi püramiidi kõrgus oli 146 m) püstitamisel ei olnud võimalik toime tulla ilma matemaatiliste teadmisteta. Kahjuks pole meil Egiptuse selle aja matemaatikast säilinud kirjalikke materjale.

Peamised andmed Egiptuse matemaatika kohta on saadud kahelt matemaatilise sisuga papüüruserullilt, mis on kirjutatud ligi 2000 a.e.m.a. Need on Rhindi ehk Ahmese ja Moskva papüürused. Esimest neist säilitatakse Londonis Briti Muuseumis; selle leidis 1858. a. inglise kollektsionäär A. Rhind, papüürusel säilinud kirjutise autoriks on Ahmes. Teist papüürust säilitatakse Moskvas A. S. Puškini nimelises Kujutava Kunsti Muuseumis, selle leidis vene kollektsionäär Goleništšev 1893. a. Rhindi papüürus on suurem (pikkus 5,5 m, laius 33 cm) ja sisult täjuslikum kui Moskva papüürus (pikkus 5,5 m, laius 8 cm).



Katkend Moskva papüürusest, millel on esitatud hulga leidmise ülesanne. Ülal on originaaltekst demostilises kirjas ning all selle transkriptsioon hieroglüüfkirjas.

Mainitud papüürused ei ole teaduslikud traktaadid meie mõttes, me ei leia neist tõestusi ega isegi reeglite sõnastusi. Neil papüürustel on esitatud rida tüüpülesandeid koos lahendustega (Rhindi papüürusel 85, Moskva papüürusel 25 ülesannet). Suur osa ülesannetest on praktilise sisuga, näiteks töötasu jaotamine tööliste vahel, viljahulga leidmine, mida läheb vaja teatava koguse leiva või õlle valmistamiseks jne. Neilt papüürustelt leiame ülesandeid ka tehete kohta täis- ja murdarvudega, pindalade ja ruumalade arvutamise kohta jt. Selliste papüüruste abil arvatavasti õppisid kõrgemad riigiametnikud — kirjutajad, kes organiseerisid ehitustöid, sõjaväe varustamist jms.

Mainitud papüürustel esineb aga ka teoreetilisi ülesandeid. Omapärase tsükli moodustavad nn. **hulga leidmise** ülesanded; sellised on Rhindi papüürusel 24, Moskva omal 3. Nendes pole tegemist konkreetsete objektidega, vaid otsitavaks on teatav abstraktne arv, nn. hulk. Selle leidmine on sisuliselt **esimese astme võrrandite** lahendamine, milles tundmatuks on otsitav hulk. Egiptlastel oli välja töötatud ka meetod selliste ülesannete lahendamiseks, nn. **vale asendamise meetod**.

Kõik sellised ülesanded olid ühtemoodi sõnastatud. Esitame siin näitena 24. ülesande Ahmese papüüruselt.[1]

Hulk ja tema seitsmendik annavad 19. Leida hulk .

Hulk	7		1	8		1	$2\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{8}$		$16\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{8}$
$\frac{1}{7}$	1		2	16*		2	$4\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{4}$		$2\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{8}$
			$\frac{1}{2}$	4		4	$9\ \frac{1}{2}$		(Kokku) 19
			$\frac{1}{4}$	2*					
			$\frac{1}{8}$	1*		Hulk	$16\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{8}$		

Püüame seda lahenduskäiku dešifreerida. Kui tähistada otsitav x-ga, siis taandub ülesanne sisuliselt võrrandi

$$x + \frac{1}{7}x = 19$$

lahendamisele. On kasutatud «vale asendamise» meetodit. Oletatakse, et otsitav $x_0 = 7$, siis $x_0 + \frac{1}{7}x_0 = 8$ (arvutuskäik on esimeses veerus, tulemus on kirjutatud teise veergu). Tundmatu x leidmiseks kasutatakse asjaolu, et

$$\frac{x}{x_0} = \frac{19}{8} \quad \text{ehk} \quad x = \frac{19}{8}x_0.$$

Teises veerus arvutatakse jagatis

$$\frac{19}{8} = \frac{16+2+1}{8} = 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8},$$

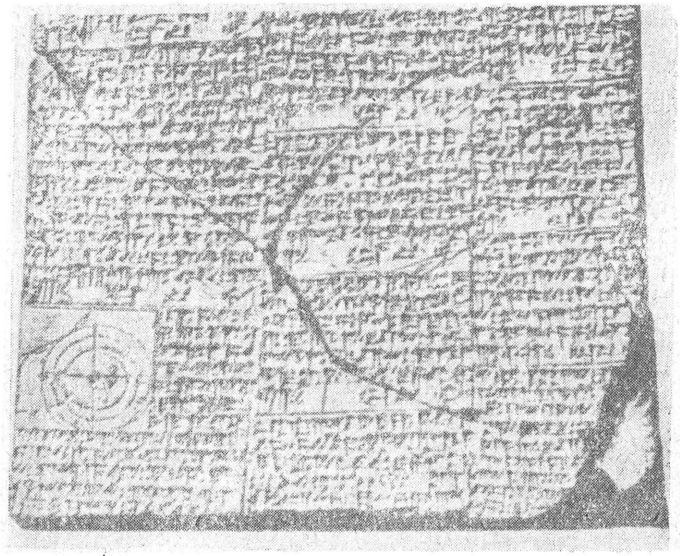
[1] Vt. И. Депман. Рассказы о старой и новой алгебре. Ленинград, 1968, lk. 60. Märgime, et egiptlased tähistasid numbreid hoopis teisiti, kui seda tehakse tänapäeval. Murdudest olid neil sümbolid ainult harilike murdude jaoks lugejaga 1. Näites on kasutatud tänapäeva sümboolikat.

mille leidmisel egiptlased kasutasid kahekordistamist ja poolitamist. Kolmandas veerus on suhe $\frac{19}{8}$ korrutatud 7-ga järkjärgulise kahekordistamise teel, seal leitakse tundmatu $x = 16\frac{1}{2}\frac{1}{8}$. Viimases veerus on kontrollitud, et leitud hulk x rahuldab ülesande tingimusi:

$$x + \frac{1}{7}x = 16 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 19.$$

Babüloonia savitahvlid

Teiseks iidseks kultuurikeskuseks oli kolmandal aastatuhandel e.m.a. kujunenud Babüloonia riik. Babüloonia kultuuri ja ka matemaatika kohta on meieni säilinud hoopis rohkem kirjalikke materjale kui egiptuse kultuuri kohta. Tänapäeva muuseumides säilitatakse umbes 100 000 kiilkirjaga savitahvlit, millest 50 on matemaatilise tekstiga ja ligi 200 matemaatiliste tabelitega. Kirjaliku materjali rohkus on peamiselt seotud asjaoluga, et babüloonlased kasutasid hoopis vastupidavamat kirjutusmaterjali



Babüloonia kiilkirjatahvel pindala arvutustega.

kui egiptlased, nimelt põletatud savitahvleid, millele enne põletamist oli luust või bambusest kolmnurkse otsaga pulgakeste abil kantud märgid nn. kiilkirjas.

Arve esitasid babüloonlased 60-ndsüsteemis. Arvutuste läbiviimisel kasutasid nad nähtavasti rohkesti tabeleid. On säilinud korrutamistabeleid, pöördväärtuste, ruutude, kuupide jt. tabeleid. Tabelite kasutamisega on arvatavasti seotud ka asjaolu, et arvutuskäik on babüloonlastel hoopis lühemalt kirja pandud kui egiptlastel.

Babüloonlased oskasid lahendada mitte ainult lineaarsetele võrranditele taanduvaid ülesandeid, vaid ka mõningaid kõrgema astme võrranditele taanduvaid ülesandeid. Seejuures etendasid jälle olulist osa tabelid. Näiteks ülesanded, mis on seotud võrranditega kujul $x^2 = a$, $x^3 + x^2 = a$, $x^3 = a$, lahendati otseselt vastavate tabelite abil.

Eriti huvipakkuv on asjaolu, et babüloonlased lahendasid mitmesuguseid ruutvõrranditele taanduvaid ülesandeid ja nähtavasti tundsid reeglit, mis vastab ruutvõrrandi lahendusvalemile.

Esitame näitena ühe babüloonia savitahvlil leiduva ülesande[2] koos lahenduskäiguga.

Pikkus, laius. Pikkuse ja laiuse korrutasin ja sain pindala. Seejärel liitsin pikkuse ja laiuse: 27. *Seejärel lisasin pikkuse ja laiuse vahe pindalale, sain* 3,3. *Küsitakse pikkust, laiust ja pindala.*

(Andmed)	27 ja 3,3	
(Tulemus)	15 — pikkus 12 — laius	3,0 — pindala

Tee nii:

27 + 3,3 = 3,30
2 + 27 = 29.

Võta pool 29-st (see on 14; 30)

14; 30 · 14; 30 = 3, 30; 15
3, 30; 15 — 3,30 = 0; 15.

Ruutjuur 0; 15 on 0; 30

14; 30 + 0; 30 = 15 — pikkus
14; 30 — 0; 30 = 14 — laius.

Võta laiusest 14 ära 2, mille lisasid 27-le, 12 on tõeline laius.
Pikkuse 15 ja laiuse 12 korrutasin

15 · 12 = 3,0 — pindala
15 — 12 = 3
3,0 + 3 = 3,3.

Kommenteerime lahenduskäiku.

Kui tähistame pikkuse tähega x ja laiuse tähega y, siis peaksime ülesande lahendamiseks lahendama võrrandisüsteemi

$$xy + x - y = 183,$$
$$x + y = 27.$$

On näha, et autor lihtsustab seda süsteemi, teostades asenduse $y' = y + 2$ ehk

[2] Vt. Б. Л. ван дер Варден. Пробуждающая наука. M., 1959, lk. 87. Ülesande lahendus on esitatud kaasaegsete numbrimärkidega (sama ülesande dešifreering savitahvlilt on nimetatud raamatus lk. 86), kuid 60-ndsüsteemis. Seejuures komaga eraldame kuuekümnelised ühelistest ja semikooloniga murdosa täisosast, näiteks $3,3 = 3 \cdot 60 + 3 = 183$, $14;\ 30 = 14 + \frac{30}{60} = 14\frac{1}{2}$.

$y = y' - 2$. Võrrandisüsteem saab kuju

$$xy' = 183 + 27 = 210,$$
$$x + y' = 27 + 2 = 29.$$

Viimasele süsteemile vastavad originaallahenduses võrdused

$$27 + 3{,}3 = 3{,}30,$$
$$2 + 27 = 29.$$

Edasi opereeritakse lihtsustatud süsteemiga. Lahend saadakse juba kindla reegli abil, mida kasutatakse ka teistes tekstides. Tänapäeva sümbolites võib selle reegli kirja panna järgmiselt. Süsteemi

$$xy = p,$$
$$x + y = a$$

lahendiks on

$$x = \frac{1}{2}a + w, \quad y = \frac{1}{2}a - w, \quad \text{kus} \quad w = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - p}.$$

Viimane eeskiri vastab ruutvõrrandi

$$x^2 - ax + p = 0$$

lahendusvalemile

$$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - p}.$$

Muidugi, mingeid valemeid ega ka sõnastatud eeskirju me babüloonlaste ülestähendustest ei leia. Kuid ülesannete lahenduskäikude jälgimine näitab, et selliste ülesannete lahendamisel kasutatakse korduvalt analoogilist eeskirja.

Egiptlastel, babüloonlastel jt. vana aja rahvastel polnud mingit algberalist sümboolikat. Võrrandite lahendamisest nende juures võime rääkida vaid tinglikult. Vastavate ülesannete lahendamine toimus aritmeetika vahenditega umbes samuti, nagu seda tänapäeval koolis algklassides tehakse.

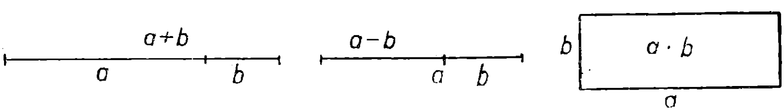
Geomeetriline algebra Vana-Kreekas

6.—5. sajandil e.m.a. kandus maailma kultuurikeskus Kreeka ja tema kolooniate territooriumile. Vana-Kreekas sündis matemaatika kui teadus, kujunes välja tema põhimeetod — tõestusmeetod, mis loogilise arutelu teel võimaldab väiteid põhjendada või ümber lükata. Kui Egiptuses ja Babüloonias lahendati peamiselt aritmeetika ja geomeetria rakenduslikke ülesandeid nähtavasti kogemuste ja katsete abil tuletatud reeglite põhjal, siis Vana-Kreekas saavutas matemaatika suure sisulise rikkuse, siin kujunesid välja ulatuslikud matemaatilised teooriad.

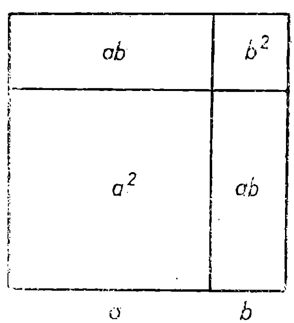
Arvu mõiste ei teinud aga Vana-Kreekas läbi olulist arengut. Arvu all mõistsid kreeklased naturaalarve ja nende suhteid — positiivseid ratsionaalarve. Üks varasemaid Vana-Kreeka teaduslikke koolkondi — Pytagorase koolkond (5. saj. e.m.a.) püüdis kõiki maailma nähtusi kirjeldada naturaalarvude abil. Kuid sellessamas koolkonnas tõestati, et ühikruudu diagonaal ei avaldu naturaalarvude suhtena (sellise ruudu diagonaali pikkus on $\sqrt{2}$), s. t. ühikruudu diagonaali pikkus pole ratsionaalarv. Sellega avastati sisuliselt irratsionaalarvude olemasolu (tõestati $\sqrt{2}$ irratsionaalsus), milleni pole võimalik jõuda mõõtmiste ja katsete abil, sest irratsionaalarvud on kuitahes täpselt lähendatavad ratsionaalarvudega (näit. kümnendmurdudega). Mainitud tulemuseni oli võimalik jõuda ainult loogilise arutelu teel.

Suuruse $\sqrt{2}$ irratsionaalsuse näitamiseks kasutati sisuliselt järgmist mõttekäiku. Kui oletame, et $\sqrt{2}=\frac{m}{n}$, kusjuures m ja n on ühistegurita naturaalarvud, siis siit järeldub, et $2n^2=m^2$, mis aga ei saa kehtida. Tõepoolest, et ainult paarisarvu ruut on paarisarv, siis peab m olema paarisarv. Olgu $m=2p$, kus p on naturaalarv. Asendades saame $2n^2=4p^2$ ehk $n^2=2p^2$. Siit järeldub omakorda, et ka n on paarisarv, mis on vastuolus eeldusega, et m ja n on ühistegurita. See vastuolu näitab, et $\sqrt{2}$ ei saa olla ratsionaalarv.

Nii selgus, et arvude (ratsionaalarvude) hulk on piiratum kui lõikude pikkuste hulk. See tingis matemaatilistes teooriates geomeetria nihkumist esiplaanile. Arvu asendamine lõiguga vastas sisuliselt reaalarvude hilisemale kasutuselevõtmisele. Lõikudega defineeriti ka aritmeetilised tehted: liitmine on lõikude jatkamine, lahutamine — lõigu osa eraldamine, lõikude korrutamisele vastab ristküliku konstrueerimine, mille pindala on ristküliku külgede kui lõikude korrutis:



Geomeetriliselt on põhjendatud ka algebra valemeid. Näiteks kõrvaloleval joonisel on esitatud valemile $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ vastav konstruktsioon.



Nii kujunes Vana-Kreekas välja nn. **geomeetriline algebra**.

Geomeetriline algebra on suurepärases vormis esitatud Eukleidese 13-osalises töös «Elemendid». Töö autorist teame me väga vähe, on vaid kaudseid andmeid, et ta umbes 300. a.e.m.a. on elanud Aleksandrias. Tema põhitöö «Elemendid» kuulub aga matemaatilise kirjanduse kullafondi, selles on kokku võetud suur osa tolle ajani loodud matemaatikast, eeskätt geomeetriast. «Elemendid» on olnud üheks põhiliseks matemaatika õpikuks ja käsiraamatuks umbes 2000 aasta jooksul, see teos on avaldanud olulist mõju geomeetria käsitlemisele ka tänapäeva kooliõpikutes.

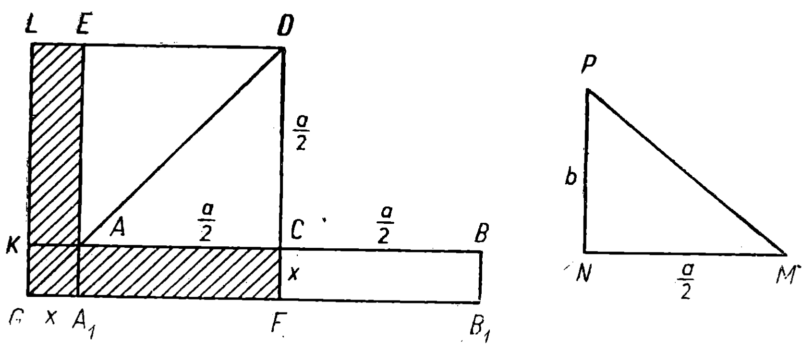
Eukleidese «Elementides» on esitatud ja põhjendatud geomeetrilisi konstruktsioone, mis vastavad mitmesugustele algebralistele teisendustele. Siit leiame ka konstruktsioone, mis vastavad lineaar- ja ruutvõrrandi lahendamise eeskirjadele. Geomeetriline vorm asendas teatava määrani ka puuduvat algebralist sümboolikat. Märgime, et Eukleidese «Elementides» vaadeldi ainult sirkli ja joonlaua abil teostatavaid konstruktsioone.

Vaatleme näitena konstruktsiooni[3], mis annab ruutvõrrandi

$$x^2 + ax = b^2$$

lahendi. Seejuures on a ja b teatavad lõigud, seega positiivsed suurused. Et $x^2 + ax = (x + a)x$, siis taandub ülesanne ruuduga pindvõrdse ristküliku konstrueerimisele, kusjuures ruudu külje pikkuseks on b, ristküliku külgedeks aga x ja $x + a$.

Ülesande lahendamiseks võib kasutada järgmist konstruktsiooni. Poolitame antud lõigu $AB = a$ punktiga C ning konstrueerime lõigule AC kui küljele ruudu $ACDE$ (vt. joonis 3). Eraldi joonisel moodustame täisnurkse kolmnurga kaatetitega $MN = \frac{a}{2}$ ja $NP = b$. Ruudu külje DC pikendusele kanname täisnurkse kolmnurga hüpotenuusi $MP = DF$. Lõik $CF = x$ kujutabki vaadeldava ruutvõrrandi lahendit.



Esitatud konstruktsiooni pole raske geomeetriliselt põhjendada. Et $MP = DF = \frac{a}{2} + x$, siis Pytagorase teoreemi põhjal

$$b^2 = \left(\frac{a}{2} + x\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2. \qquad (1)$$

Seejuures $\left(\frac{a}{2} + x\right)^2$ on ruudu $LDFG$ ja $\left(\frac{a}{2}\right)^2$ ruudu $EDCA$ pindala.

---

[3] Vt. А. А. Колосов. Книга для внеклассного чтения по математике в старших классах. М., 1963, lk. 77. Eukleidese sõnastuse ja põhjenduse ülesandele leiate raamatust «Начала Эвклида», I—VI, М., 1950, lk. 67.

Järelikult võrdub b^2 joonisel viirutatud kujundi $LEACFG$ pindalaga, mis omakorda on võrdne ristküliku KBB_1G pindalaga $(x+a)x$, sest ristkülikud $LEAK$ ja CBB_1F on pindvõrdsed. Seega tõepoolest

$$(x+a)x=b^2.$$

Toodud konstruktsioon vastab ruutvõrrandi lahendivalemile. Tõepoolest, seosest (1) leiame

$$x=-\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+b^2}.$$

Konstruktsioon annab ruutvõrrandi positiivse lahendi. Vaadeldava võrrandi teine lahend on negatiivne ega pälvinud seetõttu kreeklaste tähelepanu.

Seoses sellega, et Vana-Kreekas vaadeldi ainult positiivseid suurusi, tuli näiteks ruutvõrrandi

$$x^2-ax=b^2$$

lahendamiseks kasutada teist konstruktsiooni.[4]

Näidetest hakkavad ilmnema ka geomeetrilise algebra puudused. Võrduse mõlemal poolel peavad olema sama tüüpi suurused, näiteks ruutvõrrandi korral pindalad. Vana-Kreekas vaadeldi reeglina ainult kahe arvu korrutisi. Kolme arvu korrutist on veel võimalik tõlgendada ruumalana. Enam kui kolme arvu korrutisi ei suudetud üldse käsitleda geomeetrilise algebra raamides.

Vähestest Vana-Kreekas vaadeldud kolmedimensionaalsetest probleemidest on eriti kuulsaks saanud nn. kuubi kahekordistamise probleem, s. t. kuubi konstrueerimine, mille ruumala on 2 korda suurem lähtekuubi ruumalast. Kui lähtekuubi serv on a, siis 2 korda suurema kuubi serv tuleb leida kuupvõrrandist

$$x^3=2a^3 \quad \text{ehk} \quad \left(\frac{x}{a}\right)^3=2,$$

mille lahendamiseks on vaja konstrueerida lõik pikkusega $\sqrt[3]{2}$. Vaatamata paljudele katsetele, ei õhnestunud selle probleemi lahendit konstrueerida sirkli ja joonlaua abil.[5] Küll aga esitati selle ülesande lahendi konstruktsioone koonuselõigete abil.

Seega piirdus geomeetrilise algebra rakendusväli võrranditest põhiliselt lineaar- ja ruutvõrranditega.

Märgime, et geomeetrilise algebra meetodeid rakendati peamiselt abstraktsete matemaatiliste probleemide lahendamisel. Praktilistes rakendustes oli geomeetriline algebra küllaltki kohmakas ja aeganõudev. Ülesannete lahendamiseks kaubanduses, ehituses, põllumajanduses, sõjaasjanduses jm. kasutasid kreeklased aritmeetikat, mis on võrreldav egiptuse ja babüloonia matemaatikaga. See eraldus isegi omaette matemaatika haruks —

---

[4] Vt. näiteks Э. Кольман. История математики в древности. М., 1961, lk. 117.

[5] 19. sajandil tõestati, et lõik pikkusega $\sqrt[3]{2}$ pole konstrueeritav sirkli ja joonlaua abil.

l o g i s t i k a k s. Logistikasse kanti tehted täis- ja murdarvudega, juurte leidmine, esimese ja teise astme võrrandite aritmeetiline lahendamine jne. Logistikas ei suudetud anda arvutuseeskirjade ranget loogilist põhjendust. Seevastu geomeetrias ja geomeetrilises algebras saavutasid Vana-Kreeka õpetlased sellise loogilise ranguse taseme, mis kümneteks sajanditeks jäi matemaatilise mõtteviisi ületamatuks eeskujuks.

Diophantos

Kreeka matemaatika arenes tõusujoones kuni 3. sajandini e.m.a. See sajand kujunes kreeka matemaatika hiilgeajaks. Sellest perioodist pärinevad Eukleidese «Elemendid», Archimedese tööd, mis etendasid olulist osa matemaatilise analüüsi kujunemisel 17. sajandil, aga ka Apolloniose tööd koonuselõigetest, millel oli suur osa analüütilise geomeetria kujunemisel samuti 17. sajandil.

Alates 3. sajandist e.m.a. hakkas Rooma ülemvõimu tingimustes kreeka matemaatilise mõtte areng pidurduma. Matemaatika areng toimus nüüd peamiselt rakendusmatemaatika (logistika) valdkonnas, enam tähelepanu hakkas köitma aritmeetika.

Kreeka matemaatika languseperioodi üheks suurkujuks on Diophantos, kellest kui isikust peaaegu midagi ei teata. Arvatakse, et ta 3. sajandil m.a.j. on töötanud Aleksandrias.

Diophantose kohta on avaldatud kreeka antoloogias (6 saj. m.a.j.) luuletus-ülesanne[6], mille sisu on järgmine. Diophantose elust $^1/_6$ oli lapsepõlv, möödus $^1/_{12}$ ja tal hakkas kasvama habe, möödus veel $^1/_7$ elust, kui ta abiellus, 5 aasta järel sündis poeg, poja elu oli poole lühem isa elust, kes suri 4 aastat pojast hiljem. Kui tähistada Diopantose elu pikkus tähega x, siis saame nende andmete põhjal võrrandi

$$\frac{1}{6}x+\frac{1}{12}x+\frac{1}{7}x+5+\frac{1}{2}x+4=x,$$

millest $x=84$ aastat.

Diophantose peatööst «Aritmeetika» on säilinud kuus osa kolmeteistkümnest. Selles töös on loobutud geomeetrilise algebra klassikalistest vormidest ja on vaadeldud tehteid a r v u d e g a. See annab muuhulgas võimaluse käsitleda mitte ainult lineaar- ja ruutvõrrandeid, vaid ka kõrgema astme võrrandeid. Arvude all mõtleb Diophantos, nagu teisedki kreeka autorid, ainult ratsionaalarve.

Loobudes geomeetrilise algebra vahenditest, ei lähe Diophantos täielikult tagasi Egiptuse ja Babüloonia sõnalise väljenduse juurde, vaid esimesena matemaatika ajaloos võtab kasutusele teatava algelise t ä h e l i s e s ü m b o o l i k a. Põhiliselt on see kujunenud välja sõnade lühendamise tulemusena.

---

[6] Vt. Б. Л. в а н д е р В а р д е н. Пробуждающаяся наука. М., 1959, lk. 374.

Tundmatu tähistamiseks on Diophantosel spetsiaalne sümbol, mida on «Aritmeetika» ümberkirjutajad tähistanud mitut moodi. Sageli kasutatakse selle märkimiseks kreeka sõna $\alpha\varrho\iota\Theta\mu o\varsigma$ (arv) lõputähte ς. Seejuures, kui tundmatu esineb ühest suurema kordajaga, siis kirjutatakse see sümbol kahekordselt. Tundmatu astmete jaoks on erisümbolid:

x^2 — δ^υ sõnast $\delta\upsilon\nu\alpha\mu\iota\varsigma$ (ruut),
x^3 — $\varkappa^\upsilon$,, $\varkappa\upsilon\beta o\varsigma$ (kuup),
x^4 — $\delta\delta^\upsilon$, x^5 — $\delta\varkappa^\upsilon$, x^6 — $\varkappa\varkappa^\upsilon$.

(6. astmest kõrgemaid astmeid Diophantos ei vaatle). Tundmatust vaba liikme jaoks on sümbol μ^o sõnast $\mu o\nu\alpha\varsigma$ (ühik). Seejuures on ülaindeksiks nende kreekakeelsete sõnade teised tähed.

Liitmismärki Diophantos ei kasuta, liidetavad kirjutab ta lihtsalt järjest. Lahutamismärgina kasutab ta sümbolit ⋔. Võrdusmärki asendab sümbol ι sõnast $\iota\sigma o\varsigma$ (võrdne). Tundmatute kordajad kirjutati tundmatu sümbolite järele Vana-Kreekas kasutusel olnud alfabeetilises numeratsioonisüsteemis, milles

$$\bar{\alpha} = 1,\ \bar{\beta} = 2,\ \bar{\gamma} = 3,\ \bar{\delta} = 4,\ \bar{\varepsilon} = 5 \text{ jne.}$$

Näiteks võrrand

$$x^3 + 5x^2 + 3 = 2x$$

avalduks Diophantose sümboolikas:

$$\varkappa^\upsilon\bar{\alpha}\delta^\upsilon\bar{\varepsilon}\mu^0\bar{\gamma}\iota\varsigma\varsigma\bar{\beta}.$$

Märgime veel, et Diophantosel ei olnud kõikjal sama sümboolika, vaid see varieerus mõnevõrra.

Nagu näha, pärineb terminoloogia osaliselt geomeetrilisest algebrast. Ka meie ajani on kandunud geomeetrilise algebra termineid, näiteks ruut (x^2), kuup (x^3) jt.

Diophantose töös on sõnastatud põhilised reeglid tehete kohta hulkliikmetega, nagu liitmine, lahutamine, korrutamine jne. Võrrandite lahendamisel kasutab ta liikmete ülekandmist ühelt võrrandi poolelt teisele ühes märgi muutmisega. Neile reeglitele ei anna Diophantos aga loogilist põhjendust.

Oma põhitöös on Diophantos arvukalt lahendanud mitmesuguseid esimese kuni neljanda astme võrrandeid (säilinud kuues osas on 189 ülesannet koos lahendustega). Ta leiab võrrandite positiivseid ratsionaalseid lahendeid, pööramata tähelepanu sellele, kas on leidnud kõik või osa lahendeid.

Diophantose töös pole välja töötatud võrrandite ühtset lahendusmetoodikat. Erinevate ülesannete korral kasutab Diophantos erinevaid võtteid, ilmutades sageli suurt leidlikkust ja teravmeelsust. Kõrvuti üheselt lahenduvate võrranditega esineb Diophantosel arvukalt ka nn. m ä ä r a m a t a v õ r r a n d e i d ja võrrandisüsteeme, milles tundmatuid on rohkem kui võrrandeid, näiteks üks võrrand kahe tundmatuga. Määramatutel võrranditel on üldiselt palju lahendeid. Et aga Diophantos otsib ainult positiivseid ratsionaalseid lahendeid, siis sageli määrab võrrand lahendi üheselt. Näiteks võrrandil $x^2 + y^2 = 25$ on positiivsete ratsionaalarvude hulgas ainult üks lahend: $x = 3$, $y = 4$. Määramata võrrandeid, mille lahendeid otsitakse kas täisarvude või ratsionaalarvude hulgast, on hakatudki nimetama d i o f a n t i l i s t e k s v õ r r a n d i t e'k s.

Lahendame näitena ühe diofantilisele võrrandile taanduva ülesande.[7]

Leida kahekohaline arv, mis on võrdne tema numbrite kahekordse korrutisega.

Olgu otsitavas arvus x kümnelist ja y ühelist. Siis saame ülesande sisu kohaselt koostada võrrandi

$$10x + y = 2xy,$$

millest

$$5 + \frac{y}{2x} = y.$$

Et y peab olema täisarv, siis ka $\frac{y}{2x} = n$ peab olema täisarv.

Asendades $y = 2xn$, saame võrrandile anda kuju

$$5 + n = 2xn \quad \text{ehk} \quad \frac{5}{n} + 1 = 2x.$$

Viimasest võrdusest näeme, et $\frac{5}{n}$ peab olema täisarv, seega kas $n = 1$ või $n = 5$. Kui $n = 1$, siis $x = 3$, $y = 6$; kui aga $n = 5$, siis $x = 1$, $y = 10$. Viimane ei sobi, sest peab olema $y < 10$. Otsitav arv on seega $10x + y = 10 \cdot 3 + 6 = 36$.

Diophantos loobus küll klassikalisest geomeetrilisest mõtteviisist, võttis kasutusele teatava algebralise sümboolika, kuid ei suutnud veel loogiliselt tuletada algebrareegleid, ei suutnud välja töötada algebralist tõestusmetoodikat. Diophantose pärand on etendanud olulist osa algebra ja arvuteooria kujunemisel juba hoopiski hilisemal ajal. Pärast Diophantost katkes peaaegu täielikult matemaatika areng Rooma impeeriumis.

Kokkuvõttes võib öelda, et Vana-Kreekas saavutas suure täiuslikkuse geomeetria. Algebraline mõtteviis, võrrandite lahendamise metoodika jäi tagaplaanile. Kulus veel palju sajandeid, enne kui algebra kujunes võrdväärseks partneriks geomeetriale. Oma panuse sellesse on andnud keskajal Hiina, India ja Araabiamaade kultuur. Algebraline sümboolika omandas aga enamvähem tänapäevase kuju alles 16.—17. sajandil Euroopas.

---

[7] Vt. А. А. К о л о с о в. Книга для внеклассного чтения по математике в старших классах. М., 1963, lk. 82.

VÕRRANDITE LAHENDAMISE AJALOOST

U. Kaljulaid

Käesolevas artiklis tuleb juttu ühe muutujaga algebralisest võrrandist $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n = 0$ $(n \geqslant 1)$, kus kordajaiks a_i on kompleksarvud.[1] Lineaar- ja ruutvõrrandite üldtuntud lahenduseeskirjad olid teada juba antiikajal. Kolmanda ja neljanda astme võrrandite jaoks leiti sellised eeskirjad alles XVI sajandil (Itaalias): $n = 5$ puhul aga jäid kõik lahendusvalemi leidmise katsed viljatuiks.

Kõrgemaastmeliste võrrandite lahendusvalemite leidmise ülesanne avanes hoopis uues valguses kaks sajandit tagasi, kui J. L. Lagrange avastas teisenduste rühma mõiste ja, rakendanud seda võrrandeile, leidis põhiprintsiibid nende lahenduvuse uurimiseks.

Üldkujul lahendas probleemi E. Galois kuuskümmend aastat hiljem. Ta rakendas sealjuures mõttekäike, mis on osutunud viljakaiks mitte ainult algebras, vaid ka geomeetrias (S. Lie', F. Kleini, E. Cartani jt. tööd), diferentsiaalvõrrandite teoorias, algebralises geomeetrias ja mujal. Põhjuseks oli siin arvatavasti see, et Galois oma töödes uuris tähtsaid matemaatilisi struktuure ja nendevahelisi seoseid «puhtal kujul». Esimesena väitis ta, et tulevikumatemaatikaks on *«l'analyse de l'analyse»*, mille eesmärgiks on matemaatiliste struktuuride[2] uurimine. Lugeja märkab, et E. Galois oli kuulsa Nicolas Bourbaki eelkäija. Viimase laialt levinud (kui mitte üldtunnustatud) vaatekoht, et matemaatika on struktuuride hierarhia ja tema (isegi kaasaegse loodusteaduse) tsentraalseks probleemiks on struktuuride ja nendevaheliste seoste uurimine, on sellele väitele kinni-

---

[1] Et kompleksarvud said «eluõiguse» alles 19. saj. algul, siis vaatleme esialgu (punktides 1—4) ainult reaalsete kordajatega võrrandeid ja otsime nende reaalseid lahendeid. Siiski võimaldavad saadavad valemid leida ka nende võrrandite kompleksseid lahendeid.

[2] N. Bourbakile kuulub matemaatilise struktuuri kaasaegne, sügavalt motiveeritud mõiste. Sellega võib tutvuda raamatu Н. Бурбаки. Теория множеств. М., 1965, järgi; vt. ka Matemaatika ja kaasaeg, IX, lk. 3—9.

tuseks. Autor loodab edaspidi lugejat tutvustada (põhijoontes) järgmise fakti tõestusega:

mistahes n-astme algebralisele võrrandile

$$(*) \quad a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + x^n = 0,$$

mille kordajad a_i on sõltumatud muutujad kompleksarvude vallas, ei saa anda üldlahendit radikaalides,

s. t. ei leidu valemit, mis annaks suvalisele n-astme võrrandile lahendi kordajatele a_i lõpliku arvu aritmeetiliste tehete ja juurimiste rakendamise tulemusena.[3] Sealjuures tuleb aga silmas pidada, et võrranditel (*) on muidugi alati lahendeid olemas, kuid nad ei tarvitse avalduda kordajate kaudu «ilusa» valemi abil. Rea konkreetsete erikujuliste võrrandite jaoks on lahendusvalemid radikaalides olemas. Sageli on need valemid küll sedavõrd keerulised, et võrrandi (*) lahendite leidmiseks ja tema rakendusteks vajalike omaduste tundmaõppimiseks kasutatakse ligikaudseid meetodeid.[4]

Radikaalides lahenduvad võrrandid

«Kust pean ma alustama, Teie Kõrgus?» küsis Küülik.
«Alustage algusest, minge edasi kuni jõuate lõpuni — siis peatuge,» vastas Kuningas.
L. Carroll «Alice Imedemaal».

1. Esimesed teated algebraliste võrrandite lahendamisest on pärit Vanast Egiptusest. (Vt. käesolev kogumik, lk. 110.)

Püüded lahendada mittelineaarseid algebralisi võrrandeid näitasid, et lahendit ei saa siis enam alati avaldada võrrandi kordajate kaudu, neile lõplik arv korda aritmeetilisi tehteid (liitmist, lahutamist, korrutamist, jagamist) rakendades; teiste sõnadega: selgus, et siis alati ei saa lahendit avaldada antud suuruste kaudu ratsionaalselt. Näiteks juba ruutvõrrandi $x^2 + px + q = 0$ lahendusvalemist $x = -\frac{p}{2} \mp \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ näeme, et aritmeetilistele tehetele lisandub siin ruutjuure leidmine. Seda valemit tunti aga juba Vanas Babüloonias.

2. Vanas Kreekas taasavastati ruutvõrrandi lahendusvalem, kuid esitati see geomeetrilises vormis. On hästi teada, et antiikmatemaatikuile meeldis taandada algebralise võrrandi lahendamist kahe sobivalt valitud tasandilise abikõvera lõikepunktide leidmisele või siis selle võtte mitmekordsele kordamisele («itereerimisele»). Näiteks võrrandit $y^3 = ab^2$ lahendati kahe koonus-

---

[3] G. Kangro. Kõrgem algebra II, 1950.

[4] Põgusaks tutvumiseks vt. И. Р. Шафаревич. О решении уравнений высших степеней (метод Штурма). М., 1954. M. Levin, S. Ulm. Arvutusmeetodite käsiraamat, Tln., 1966.

lõike, parabooli $y^2 = bx$ ja hüperbooli $xy = ab$, lõikepunkti leidmise teel. Kuubi kahekordistamise ülesanne on selle ülesande erijuhuks, kui $a = 2b$. Ülesanne lõigata sfääri tasandiga nii, et tekkinud segmentide pindalad oleksid etteantud suhtes, viis kuupvõrrandini, mille lahendamiseks kasutati jällegi geomeetrilist meetodit. (Jätame lugejale ülesandeks taastada see kuupvõrrand ja leida vastavad koonuslõiked.)

Peatähelepanu koondus neile juhtudele, mil abikõveraiks olid vaid ring- ja sirgjooned. Iga selline ülesanne — konstruktsioon sirkli ja joonlauaga — taandub kahe sirge, sirge ja ringjoone või kahe ringjoone lõikepunktide leidmisele ja vajaduse korral selle võtte itereerimisele. Kui XVII sajandil koordinaatide meetod kasutusele võeti, sai täiesti selgeks, et käesoleval juhul on geomeetrilise metoodika rakendamine samaväärne lineaar- ja ruutvõrrandite ahela järjestikuse lahendamisega. Teiste sõnadega, nende konstruktsioonide teostatavus seostus algebraliste võrrandite ruutradikaalides lahenduvuse probleemiga.[5]

3. Üldise kuupvõrrandi lahendamiseks tehti keskajal palju katseid; meenutame näiteks tuntud itaalia matemaatiku Leonardo Fibonacci katset 1225. aasta paiku. Lõpuks õnnestus Bologne'i ülikooli professoril Scipione del Ferro'l aastail 1506—1515 avastada võrrandi $a + bx + x^3 = 0$ lahendusvalem. Oma avastust aga hoidis ta saladuses, pühendades sellesse vaid oma õpilase Antonio Maria Fiore. Viimasel tekkis vaidlus oma andeka kaasmaalase Niccolo Tartagliaga, hiljem järgnes sellele ka väljakutse avalikule dispuudile. Tartagliale saadetud ülesanded nõudsid võrrandi $x^3 + ax^2 = b$ lahendusmeetodi leidmist. Tartaglia oli võistluseks hästi valmistunud: ta leidis meetodi mitte ainult võrrandi $x^3 + ax^2 = b$, vaid ka $x^3 + ax = b$ lahendamiseks (1535. a.)! Tulemused avaldas ta algul (1539. a.) pentagrammina ja hiljem ka täie seletusega. Kuid laiemalt tuntuks said nad itaalia matemaatiku Geronimo Cardano kuulsa teose «*Ars Magna, sive de regulis algebraicis*» (Suur kunst või algebra reeglitest, 1545) kaudu. Seetõttu nimetataksegi võrrandi $x^3 + bx + a = 0$ lahendusvalemit

$$x = \sqrt[3]{-\frac{a}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{a}{2} - \sqrt{\Delta}} \quad \left(\text{kus } \Delta = \frac{a^2}{4} + \frac{b^3}{27}\right)$$

Cardano valemiks. Kuna üldine kuupvõrrand $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = 0$ on ratsionaalse muutujavahetusega $x = y - \frac{a_2}{3}$ teisendatav ülaltoodud kujule, siis võimaldab Cardano valem lahen-

[5] Selle küsimuse põhjaliku ja elegantse käsitluse leiab lugeja artiklist Ю. И. Манин. О разрешимости задач на построение с помощью циркуля и линейки. Энциклопедия элементарной математики, т. 4. М., 1963, lk. 205—227.

dada ka üldist kuupvõrrandit. Kõnesolnud muutujavahetus oli arvatavasti Cardanole teada, sest ta teisendas kõik oma kuupvõrrandid kujule, milles puudus ruutliige. Siiski, üldvõrrandi korral teostas Francois Viëta esimesena toodud muutujavahetuse. Hollandlane Jan Hudde lihtsustas 1658. aastal oluliselt Vieta käsitlust, mistõttu kuupvõrrandi lahendamine võttis juba üpris tänapäevase kuju. Selleks kasutas ta oluliselt R. Descartes'i loodud sümboolikat.

4. Mitmeid fakte neljanda astme võrrandite kohta tundis juba Apollonius (IV saj.). Ka keskaja araabia matemaatikud oskasid mõningaid selliseid võrrandeid lahendada. Näiteks võrrandi $x^4 + px^3 = q$ lahendamiseks leiti parabooli $y = x^2$ ja hüperbooli $y^2 + pxy - q = 0$ lõikepunktid.

Pärast saavutatud edu $n = 3$ korral asusid keskaja matemaatikud pingsalt otsima üldise neljanda astme võrrandi lahendusvalemit. Sellega tegeles kaua G. Cardano, kuid otsingud ei kandnud vilja ja ta loobus, suunates uurimist jätkama oma õpilase Luigi Ferrari. 1545. a. jõudis Ferrari soovitud meetodini.

Võrrandi $a_0 + a_1z + a_2z^2 + a_3z^3 + z^4 = 0$ võib muutujavahetusega $z = x - \frac{a_3}{4}$ teisendada kujule $r + qx + px^2 + x^4 = 0$ ehk $(x^2 + p)^2 = px^2 - qx + p^2 - r$. Tuues sisse parameetri y, võime viimase võrrandi esitada:

$$(x^2 + p + y)^2 = (p + 2y)x^2 - qx + (p^2 - r + 2py + y^2).$$

Määrame nüüd y nii, et viimase võrduse parem pool oleks täisruut: teatavasti on see nii parajasti siis, kui

$$4(p + 2y)(p^2 - r + 2py + y^2) = q^2.$$

See on aga kuupvõrrand suuruse y määramiseks. Pärast y leidmist (osutub, et on vaja teada vaid üht kuupvõrrandi lahendit) saame x leidmiseks kaks ruutvõrrandit:

$$x^2 + p + y = Px + Q \quad \text{ja} \quad x^2 + p + y = -(Px + Q).$$

Näeme, et neljanda astme võrrandi lahendamine taandub madalamaastmeliste võrrandite järjestikusele lahendamisele. Ka see meetod sai algebraistidele tuntuks Cardano teose «*Ars Magna*» kaudu.

Märgime, et 4. astme algebralise võrrandi lahendamist võib kergesti ka geomeetrilise ülesandena tõlgendada. Tõpeoolest, võttes

$$y = x^2$$

saame üldvõrrandi kirjutada

$$y^2 + a_3xy + a_2y + a_1x + a_0 = 0.$$

Esialgne algebraline ülesanne taandub nüüd neile võrrandeile

xy-tasandil vastavate teist järku kõverate lõikepunktide abstsisside leidmisele.[6]

Tugeva tõuke võrrandite teooria edasiseks arenguks andis Descartes'i plaan, mille kohaselt algebra pidi tõusma esikohale matemaatikas, et olla adekvaatseks vahendiks geomeetriaküsimuste püstitamisel ja uurimisel. Tõsi küll, pärast matemaatilise analüüsi loomist tõmbus matemaatikute tähelepanu võrrandite teoorialt hoopis kõrvale, kuid mitte kauaks.

Probleemi edukas lahendamine $n = 2, 3, 4$ korral oli seadnud päevakorda küsimuse viienda astme võrrandi lahendusvalemi leidmisest. Keegi ei kahelnud (induktsiooni põhjal) selles, et valem leitakse. Teiste seas tegelesid sellega ka sellised matemaatikud nagu R. Descartes, G. W. Leibniz, E. Bezout, L. Euler. Viimane leidis Ferrari meetodist erineva meetodi 4. astme võrrandi taandamiseks kuupvõrrandile ja tal oli mõte rakendada seda võtet ka 5. astme võrrandile. Katse leida lahendusvalemit tegi ka J. L. Lagrange. Kuid isegi nende kuulsate matemaatikute jõupingutused ei andnud soovitud tulemusi. See tekitas kahtlusi probleemiseade õigsuses ja hakati otsima tõestust 5. astme võrrandi lahenduvuse kohta *à priori*, s. t. lahendusvalemit otseselt leidmata.

Lagrange'i plaan

Alice ei suutnud kaua otsustada, kas lillepärja tegemise mõnu tasub püstitõusmise ja lillede korjamise vaeva.
L. Carroll «Alice Imedemaal».

5. Erakordne tähtsus võrrandite teooria arengule oli J. L. Lagrange'i tööl *«Refléxions sur la théorie algèbrique des équations»* (Mõtisklusi algebraliste võrrandite teooria kohta), mis ilmus aastail 1770—1771. Töö koosneb neljast osast. Kolmes esimeses analüüsib Lagrange kõiki tollal teadaolnud kolmanda- ja neljanda- ning samuti mõnede kõrgemaastemeliste võrrandite lahendusmeetodeid; neljas osa on pühendatud selle analüüsi järeldustele.

---

[6] Kui teha asendus $y = x^2$ võrrandisse $r + qx + px^2 + x^4 = 0$, saame talle anda kuju

$$x^2 + y^2 + qx + (p - 1)y + r = 0.$$

See on võrrandiks ringjoonele, mille keskpunktiks on $\left(-\frac{q}{2}, -\frac{(p-1)}{2}\right)$ ja raadiuseks $R = \sqrt{\frac{q^2}{4} + \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 - r}$. Seega on võimalik neljanda astme üldvõrrandi reaalseid lahendeid leida sirkli abil parabooli $y = x^2$ graafikult.

Lagrange'il õnnestus leida lahendusmeetodite üldine printsiip. Osutus, et kõigi olemasolevate meetodite puhul tuleb lahendada abivõrrand, mille kordajad avalduvad esialgse võrrandi kordajate kaudu ratsionaalselt. Abivõrrandi lahendeiks on teatava ratsionaalfunktsiooni väärtused, kui argumentideks on esialgse algebralise võrrandi lahendid. Seejuures määrab abivõrrandi astme mitte selle funktsiooni kuju, vaid see, mitu erinevat väärtust ta omandab oma argumentide, s. o. esialgse võrrandi lahendite kõikvõimalike ümberpaigutuste (e. substitutsioonide) korral.

Lagrange tuli järeldusele, et algebralise võrrandi lahendusvalemite leidmine taandub ülesandele leida selliseid ratsionaalfunktsioone võrrandi lahendeist, mis lahendeil tehtavate substitutsioonide korral omandaksid võimalikult vähe erinevaid väärtusi. Kui sel puhul tekkiva abivõrrandi aste on väiksem esialgse võrrandi astmest, taandub lahendi leidmine madalama astme võrrandi lahendamisele. Niiviisi võib teatavail tingimustel selle võtte itereerimisega jõuda lähtevõrrandi lahenduseni. Selline on üldjoontes Lagrange'i plaan. Tutvume sellega nüüd detailsemalt.[7]

Olgu antud üldvõrrand $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n = 0$; tema kordajateks a_i on muutujad, mis võivad omandada suvalisi komplekseid väärtusi ja on algebraliselt sõltumatud suurused üle kompleksarvude valla C (s. t. nad ei rahulda ühtki komplekssete kordajatega algebralist võrrandit). Tema lahendeid tähistame $x_1, \ldots, x_n$. Viimaseid võime samuti vaadelda üle C sõltumatute muutujatena, sest Viëta valemite põhjal vastavad igale x_i-de väärtuste hulgale kindlad a_i-de väärtused ja vastupidi.

Vaatleme mingit ratsionaalavaldist $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ võrrandi $f(x) = 0$ lahendeist x_i kordajatega transtsendentsest laiendist[8] $C(a_1, \ldots, a_n)/C$. Paigutame avaldises $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ lahendid x_i omavahel ümber $x_i \to x_{\sigma(i)}$, $\sigma \in S_n$ ja pöörame tähelepanu juhule, kus φ ei muutu, s. t.

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \varphi(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(1)}).$$

Näiteks, $\varphi = x_1x_2 + x_3x_4$ ei muutu talle substitutsiooni

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

[7] Lagrange'i plaani selgitamisel me kasutame üsna mitmeid mõisteid rühmadest ja korpustest, mistõttu võib p. 5 mõnele lugejale valmistada teatavaid raskusi. Sel korral soovitame nende mõistetega tutvuda raamatu G. Kangro. Kõrgem algebra II, Tln., 1950 järgi.

[8] Korpuse $C(a_1, \ldots, a_n)/C$ elementideks on kõikvõimalikud jagatised $\frac{f(a_1, \ldots, a_n)}{g(a_1, \ldots, a_n)}$, $g \neq 0$; siin f ja g on komplekssete kordajatega polünoomid muutujaist $a_1, \ldots, a_n$. Viimaseid me loeme üle C algebraliselt sõltumatuiks suurusteks.

rakendamise[9] korral.

Kerge on näha, et kõik need substitutsioonid, mis ei muuda antud ratsionaalavaldist $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, moodustavad rühma Φ. Näiteks $\varphi = x_1x_2 + x_3x_4$ jaoks on selleks rühmaks järgmine 8. järku substitutsioonirühm:

$$\Phi = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \right.$$
$$\left. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Otsese kontrolliga võib lugeja veenduda, et iga 4. järku substitutsioon, mis asub väljaspool alamrühma $\Phi \subset S_4$, muudab avaldist $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4)$.

D e f i n i t s i o o n. Kui ratsionaalavaldis $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ ei muutu mingi substitutsioonirühma $\Phi(\Phi \subset S_n)$ ühegi elemendi rakendamisel, aga muutub iga alamrühma Φ mittekuuluva n-järku substitutsiooni toimel, siis öeldakse, et avaldis φ kuulub rühma Φ juurde. Näiteks ühikrühma $\Phi = (e)$ juurde kuulub lineaaravaldis $\omega = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$, kus $a_i \in C$ on erinevad.

Kuulugu ratsionaalavaldis $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ alamrühma $\Phi \subset S_n$ juurde. Võttes rühmas S_n suvalise sellise alamrühma G, et $G \supseteq \Phi$ ja rakendades tema kõiki substitutsioone $x_i \to x_{\sigma(i)}$ avaldisele φ, saame komplekti erinevaid avaldisi

$$\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_{s-1},$$

mida nimetame avaldise φ G-kaasavaldisteks. Võttes näiteks $G = S_n$, saame $\varphi = x_1x_2 + x_3x_4$ jaoks järgmised G-kaasavaldised:

$$\varphi = x_1x_2 + x_3x_4, \quad \varphi_1 = x_1x_3 + x_2x_4, \quad \varphi_2 = x_1x_4 + x_2x_3.$$

Võrrandit, mille lahendeiks on antud üldvõrrandi lahendeist moodustatud ratsionaalavaldise kaasavaldised, nimetame abivõrrandiks. Osutub, et rühma Φ juurde kuuluva ratsionaalavaldise φ G-kaasavaldised on $(G:\Phi)$-astmelise[10] abivõrrandi lahendeiks; sealjuures abivõrrandi kordajad on «G-konservatiivsed», s. o. ei muutu ühegi G elemendi toimest.

Plaan tugineb järgmisel Lagrange'i teoreemil: *Olgu antud kaks ratsionaalavaldist $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ ja $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ üldvõrrandi lahendeist x_i. Kui avaldis φ ei muutu lahendite kõigi sel-*

---

[9] Substitutsiooni $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}$ rakendamist avaldisele $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ tuleb mõista «loomulikul viisil»: avaldises $\varphi(x_1, \ldots x_n)$ tuleb muutuja x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ kõikjal asendada muutujaga $x_{\sigma(i)}$.

[10] Olgu lõplike rühmade G ja Φ elementide arvud vastavalt $|G|$ ja $|\Phi|$. Arvu $(G:\Phi) = \frac{|G|}{|\Phi|}$ nimetame alamrühma Φ indeksiks rühmas G.

liste ümberpaigutuste korral, mis ei muuda ka avaldist ψ, siis φ avaldub ratsionaalselt ψ ja üldvõrrandi kordajate kaudu.

Kuidas seda tulemust kasutada?

Olgu meil rühmas S_n antud mingi alamrühmade «torn» (iga «ülemine korrus» sisaldab «alumist» alamrühmana), kusjuures kõrvuti rühmaga seisab mingi tema juurde kuuluv ratsionaalavaldis (vt. joon. 1). Siin on avaldis φ lahendiks $(S_n : G) = n_1$-astmelisele abivõrrandile, mille kordajad avalduvad ratsionaalselt üldvõrrandi kordajate a_i kaudu. Avaldis ψ on lahendiks $(G : H) = n_2$-astmelisele abivõrrandile, mille kordajad avalduvad ratsionaalselt kordajate a_i ja avaldise φ kaudu jne. Lõpuks, ω on lahendiks $(K : E) = |K| = n_k$-astmelisele võrrandile, mille kordajad avalduvad ratsionaalselt kordajate a_i ja avaldiste $\varphi, \psi, \ldots, \chi$ kaudu. Teiselt poolt, kuna avaldis $\tau = x_1$ kuulub rühma $\Phi = S_{n-1} \subset S_n$ juurde (Φ «toimib» kõigil x_i, $i \neq 1$), lubab Lagrange'i teoreem meil τ avaldada kordajate a_i ja suvalise sellise x_i-dest moodustatud ratsionaalavaldise kaudu, mis kuulub rühma Φ või mõne tema alamrühma juurde; et aga lineaaravaldis $\omega = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$ ($a_i \in C$ erinevad), kuulub ühikrühma E juurde ja $E \subset \Phi$, siis võimegi ω valida selliseks avaldiseks. Näeme, et juhul kui kõik $n_i < n$, saame madalamaastmeliste abivõrrandite ahela, mille lahendamine peaks viima lahendusvalemini. Selles oligi Lagrange'i plaani juhtmõte.

$$\begin{array}{cc}
\mathcal{S}_n & a_i \\
| & \\
\mathcal{G} & \varphi \\
| & \\
\mathcal{H} & \psi \\
| & \vdots \\
\vdots & \\
| & \\
\mathcal{K} & \chi \\
| & \\
\mathcal{E} = (e) & \omega
\end{array}$$

Joonis 1.

Lugeja arvatavasti juba märkas, et Lagrange'i lahendusplaani teostatavuse seisukohalt on eriliselt tähtis leida rühmas alamrühmi «võimalikult väikese indeksiga» ehk, mis seesama, «võimalikult suure järguga». Kahjuks pole $n \geqslant 5$ korral tegelikult Lagrange'i plaan teostatav.

Juba P. Ruffini märkas, et kui S_5 alamrühma G korral $(S_5 : G) > 2$, siis peab see indeks olema $\geqslant 5$. A. L. Cauchy üldistas selle tulemuse ja näitas, et substitutsioonirühma (s. t. S_n alamrühma) indeks ei saa ühel ja samal ajal olla suurem kahest ja väiksem suurimast algarvust, mis ei ületa arvu n. Seega ei saa algarvulise n korral rühmal S_n olla alamrühmi niisuguse indeksiga i, et $2 < i < n$. Cauchy püüdis tulemust veelgi üldistada ja tõepoolest, ka $n = 6$ korral see kehtis. Lõpuks õnnestus J. Bertrand'il tõestada teoreem: $n \geqslant 5$ korral ei saa rühma S_n ühegi alamrühma indeks asuda arvude 2 ja n vahel. Näemegi nüüd, miks Lagrange'i plaan ei viinud soovitud tulemustele.

Korrapärasest 17-nurgast ja algebra põhiteoreemist

«Kes Sa oled?» küsis Päevakoer. «Mina?! Vaevalt ma tean. Vähemalt ma tean, kes ma olin, kui ma täna hommikul tõusin, kuid mulle näib, et ma olen sest saadik vist mitu korda muutunud. Ma kardan, et ma ei suudagi enda olemust selgitada, sest vaadake, ma ei ole mitte mina ise», vastas Alice.

L. Caroll «Alice Imedemaal».

6. Üheaegselt Lagrange'i teosega ilmus 1771. aastal A. Vandermonde'i töö *«Mémoire sur la résolution des équations»* (Memuaar võrrandite lahendamisest). Autor jõudis põhiliselt samadele tulemustele mis Lagrange, saavutamata küll viimase esituse selgust. Võrrandi $x^p - 1 = 0$ (p — algarv) uurimisel sai aga Vandermonde rea tulemusi, mis lubasid 1796. aastal C. F. Gaussil lahendada lõpuni ülesande korrapäraste hulknurkade konstrueerimisest sirkli ja joonlauaga. Et võrrandi $x^p - 1 = 0$ lahendamisele vastab korrapärase p-nurga konstrueerimine, oli selge juba A. de Moivre'le, nagu seda tõendab valem $\varepsilon_k = \sqrt[p]{1} = \cos\frac{2\pi k}{p} + i \sin\frac{2\pi k}{p}$, $k = 0, 1, \ldots, p-1$.

Üldtuntud on võtted, kuidas sirkli ja joonlaua abil poolitada ringjoont ning kuidas konstrueerida korrapärast kolm-, viis- ja viisteistnurka. Juba Eukleides oskas sellest saada neli «konstrueeritavat» korrapäraste hulknurkade seeriat (1)—(4) külgede kahendamise teel:

korrapärased	2^n — nurgad	(1)
,,	$3 \cdot 2^n$ — nurgad	(2)
,,	$5 \cdot 2^n$ — nurgad	(3)
,,	$3 \cdot 5 \cdot 2^n$ — nurgad	(4)

$$n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Võis arvata, et (1)—(4) on ainsad konstrueeritavad korrapäraste hulknurkade seeriad. Siiski tõestas C. F. Gauss, et ka korrapärane 17-nurk on konstrueeritav. Täpsemalt, Gauss tõestas järgmise teoreemi:

Korrapärane p-nurk on sirkli ja joonlaua abil konstrueeritav parajasti siis, kui on täidetud üks järgnevast kolmest tingimusest:

(α) *p on algarv kujuga* $2^n + 1$,
(β) $p = 2^k$,
(γ) *arv p on eeltoodud kaht tüüpi arvude korrutis.*

Lugejale, kes selle teoreemiga esmakordselt tutvub, on arvatavasti mõnevõrra müstiline kõnesolnud arvude tähendus. Autor loodab lugejaid meie väljaande veergudel edaspidi tutvustada Galois' kriteeriumiga algebraliste võrrandite lahenduvuse kohta. Tutvunud selle kriteeriumiga ja pidades sealjuures silmas, et kõnesolnud geomeetriline ülesanne on samaväärne küsimusega võrrandi $x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1 = 0$ ruutradikaalides lahenduvusest, kaob see arvude näiv müstika. Seoses Gaussi teoreemiga tuleb tähele panna, et arv $p = 2^n + 1$ ei saa olla algarv, kui arv n omakorda pole kujuga 2^k, k naturaalarv. Tõepoolest, oletades, et $n = 2^k \cdot m$, kus m on paaritu, ja tähistades $2^{2^k} = a$, saame seetõttu, et m on paaritu, võrduse

$$p = 2^n + 1 = 2^{2^k \cdot m} + 1 = a^m + 1 =$$
$$= (a + 1)(a^{m-1} - a^{m-2} + \ldots - a + 1).$$

See aga näitab, et kõigi $m \neq 1$ korral pole p algarv! Kuna arvud $p = 2^{2^k} + 1$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$ on algarvud, siis teoreemi kohaselt on 3—, 5—, 17—, 257—, 65537-nurgad konstrueeritavad (vt. Matemaatika ja kaasaeg, V, lk. 86). Ekslik oleks aga arvata, et arvude seeria $2^{2^k} + 1$ ainult algarvudest koosnebki. Juba $n = 5$ korral on tegemist kordarvuga (L. Euler leidis talle teguri 641). See pole ainus kordarv seerias: näiteks $k = 6, 12, 23, 36$ korral on tegemist kordarvudega. Küsimus on selles, kas seerias $2^{2^k} + 1$ on lõplik või lõpmatu hulk algarve. G. Eisenstein väitis, et neid on lõpmata palju (...ja võib-olla oli tal tõesti olemas ka põhjendus).

7. Vaatleme nüüd algebralise võrrandi lahendite arvu; küsimus on tihedalt seotud kompleksarvu mõiste kujunemisega. Juba Apolloniusele oli teada, et kaks koonuslõiget ei saa lõikuda rohkem kui neljas punktis, s. t. vastaval 4. astme võrrandil on ülimalt 4 lahendit. Cardano hakkas võrrandi $x^4 + 40 = 10x^2$ lahendamisel opereerima arvudega $5 + \sqrt{-15}$ ja $5 - \sqrt{-15}$, nimetades neid «sofistilisteks suurusteks», ja nende korrutamise teel veendus, et on leidnud võrrandile õiged lahendid. Ta kaldus neid «sofistilisi suurusi» «seaduslikeks» pidama, mistõttu jõudis arvamusele, et kuupvõrrandil on kolm, 4. astme võrrandil aga 4 lahendit. Esimene, kes otseselt väitis, et n-astme võrrandil on n lahendit, oli P. Roth (1608. a.) — üks Nürnbergi «rehkendusmeistreist».

Need mõtted olid aluseks silmapaistva algebraisti A. Girard'i samasisulisele hüpoteesile (1629. a.); 1746. aastal tegi J. d'Alembert katset hüpoteesi tõestada ja kuigi see ei õnnestunud, oli ta leidnud väärtusliku idee. 1749. a. püüdis Girard'i hüpoteesi tõestada L. Euler ning seejärel ka J. L. Lagrange.

«Sofistilised suurused» pidid aga läbi tegema veel pika evolutsiooni, kus tuleks nimetada J. Wallise (1673. a.), K. Wesseli (1798. a.) ja J. Argani (1813) nimesid, enne kui jõuti selgepiirilise ideeni kompleksarvudest ja nende graafilisest esitusest.

Esmakordselt võttis kompleksarvud süstemaatiliselt kasutusele C. F. Gauss, rikastades sellega matemaatika aparatuuri oluliselt. Algebras võimaldas kompleksarvu kasutamine Gaussil tõestada Girard'i hüpoteesi üldjuhul. Ta tegi seda oma dissertatsioonis (aastail 1797—1799).

Tuginedes d'Alembert'i tulemustele, tõestas Gauss, et iga naturaalarvu n ja suvaliste kompleksarvude $a_0, a_1, \ldots, a_n$ korral leidub võrrandi $p(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n = 0$ jaoks selline kompleksarv α, et $p(\alpha) = 0$. Sellest nn. algebra põhiteoreemist ja lihtsast väitest (mis oli juba Cardanole teada):

«Arv α on võrrandi $p(x) = 0$ lahendiks parajasti siis, kui polünoom $p(x)$ jagub jäägita lineaarpolünoomiga $x - \alpha$» järeldus otsekohe kinnitus hüpoteesile. Aastal 1849 ilmus Gaussilt tõestuse lihtsustatud variant. Gauss andis põhiteoreemile kokku 4 tõestust, neist 2 on printsipiaalselt esialgsest erinevad.

Noortele lugejatele on arvatavasti küllalt huvitav ja kasulik tutvuda selle teoreemi tõestusega. Esitame Gaussi tõestuse F. Kleini—H. Weberi variandis.

(1) Reduktsioon. Osutub, et piisab, kui tõestada teoreem reaalsete kordajatega võrrandite puhul. Tõepoolest, vaatleme koos polünoomiga

$$f(z) = a_0 + a_1z + \ldots + a_kz^k + \ldots + a_{n-1}z^{n-1} + z^n, \; a_i \in C$$

ka polünoomi

$\bar{f}(z) = \bar{a}_0 + \bar{a}_1z + \ldots + \bar{a}_kz^k + \ldots + \bar{a}_{n-1}z^{n-1} + z^n$, kus sümboliga $\bar{a}_i$ tähistatakse arvu a_i kaaskompleksarvu. Moodustame polünoomi $F(z) = f(z) \cdot \bar{f}(z)$; osutub, et kõik F kordajad on reaalarvud. Tõepoolest, polünoomis F on z^k kordajaks $A_k = \sum\limits_{i+j=k} a_i\bar{a}_j$, ja kuna

$\bar{A}_k = \sum\limits_{i+j=k} \overline{a_i\bar{a}_j} = \sum\limits_{i+j=k} \bar{a}_i\bar{\bar{a}}_j = \sum\limits_{i+j=k} a_j\bar{a}_i = A_k$, siis $A_k \in R$ (nii tähistame reaalarvude valda). Olgu $\alpha \in C$ korral $F(\alpha) = 0$. Siis on täidetud vähemalt üks seostest $f(\alpha)=0$, $f(\bar{\alpha})=0$. Seega $f(\alpha)\neq 0$ korral oleks $f(\bar{\alpha})=0$. Sellega on reduktsioon põhjendatud, mistõttu edaspidi loeme, et kõik $a_i \in R$.

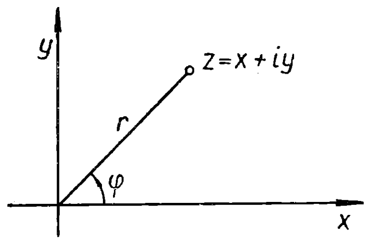
(2) Geomeetria elementide sissetoomine. Olgu $z=x+iy$. Newtoni binoomvalemit kasutades esitame

$$f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y).$$

Kuna xy-tasandil annab kõverate $U: u(x,y)=0$ ja $V: v(x,y)=0$ iga lõikepunkt meile võrrandi $f(z)=0$ lahendi, siis tuleks tõestada, et kõverad U ja V ka tõesti vähemalt kord lõikuvad. Selleks uurime nende kahe kõvera käitumist xy-tasandil.

Vaadeldes polünoome $u=u(x,y)$ ja $v=v(x,y)$ kui kahe muutuja funktsioone, märkame nende pidevust. Seetõttu,

1° kui $v(P)>0$ või $v(P)<0$ mingis punktis P xy-tasandil, siis kehtivad need võrratused ka punkti P küllalt väikese ümbruse igas punktis. Loomulikult kehtib öeldu ka funktsiooni u kohta.



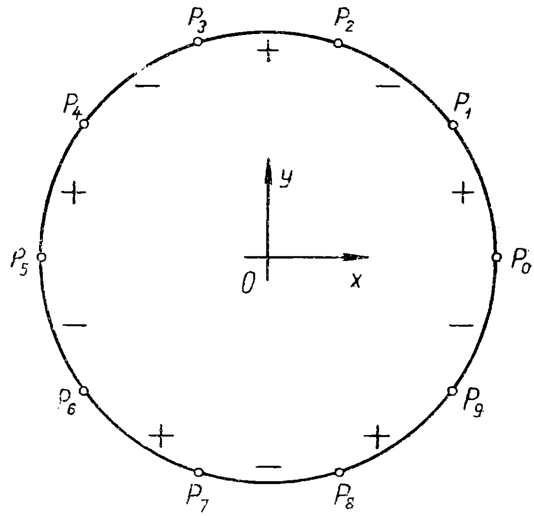
Joonis 2.

2° kui $u(P_1)>0$ ja $u(P_2)<0$, siis leidub igal punkte P_1 ja P_2 ühendaval pideval kõveral selline punkt Q, et $u(Q)=0$. See kehtib ka v kohta.

Võttes xy-tasandil kasutusele polaarkoordinaadid (r,φ) (vt. joon. 2), saame $z=x+iy=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ ja $z^k=r^k(\cos k\varphi+i\sin k\varphi)$ kõigi $k=1, 2, 3, \ldots$ jaoks; u ja v avalduvad

$$u=a_0+a_1r\cos\varphi+a_2r^2\cos 2\varphi+\ldots+a_{n-1}r^{n-1}\cos(n-1)\varphi+$$
$$+r^n\cos n\varphi,$$
$$v=a_1r\sin\varphi+a_2r^2\sin 2\varphi+\ldots+a_{n-1}r^{n-1}\sin(n-1)\varphi+$$
$$+r^n\sin n\varphi.$$

Et $v=r^n\left[\sin n\varphi+\frac{a_{n-1}}{r}\sin(n-1)\varphi+\ldots\right]$, on kerge näha, et *küllalt suure r korral* on igal ringjoonel (r) (nii tähistame ringjoont raadiusega r ja tsentriga koordinaatide alguses) funktsioon $v(x,y)$ samamärgiline avaldisega $\sin n\varphi$; viimase funktsiooni käitumine on aga teada. Märkinud ringjoonel (r) punktid, kus $\varphi=0, \frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \ldots, \frac{(2n-1)\pi}{n}$ vastavalt tähtedega $P_0, P_1, \ldots P_{2n-1}$, saame $2n$ intervalli $(P_0; P_1)$, $(P_1; P_2)$, ..., $(P_{2n-1}; P_0)$, kus $\sin n\varphi$ on vaheldumisi positiivne ja negatiivne (vt. joon. 3). Nende punktide P_k ümbrustes $\left(\frac{\pi}{n}\cdot k-\eta,\ \frac{\pi}{n}k+\eta\right)$, kus $\eta<\frac{\pi}{2n}$, on v kord negatiivne, kord positiivne (pidevuse tõttu). Seega on iga punkti P_k ümbruses funktsiooni v väärtuseks ka 0 (varsti näeme, et $v=0$ kehtib ringjoonel (r) täpselt $2n$ korda.



Joonis 3.

Analoogiliselt oleneb küllalt suure raadiuse r korral $u(x, y)$ märk vaid $\cos n\varphi$ märgist, mistõttu punktides $P_0, P_2, P_4, \ldots, P_{2n-2}$ ja nende ümbruses on $u>0$; punktides $P_1, P_3, P_5, \ldots, P_{2n-1}$ ja nende ümbruses aga $u<0$ (kasutasime $u(x, y)$ pidevust!).

Võttes appi uue muutuja $t=\frac{\varphi}{2}$, saame seoste $\cos\varphi=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin\varphi=\frac{2t}{1+t^2}$ tõttu $z=\frac{(1+it)^2}{1+t^2}$. Kasutades Newtoni binoomvalemit näeme, et

$$u=\frac{\Phi(r, t)}{(1+t^2)^n} \quad \text{ja} \quad v=\frac{\Psi(r, t)}{(1+t^2)^n},$$

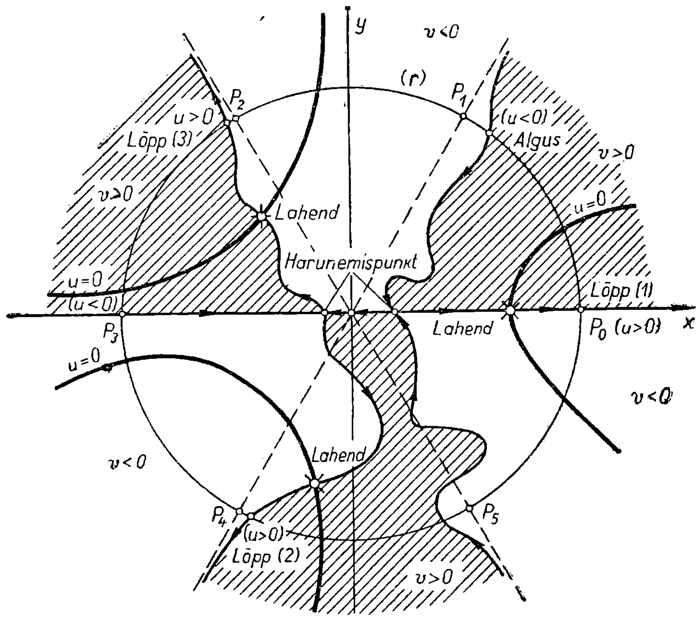
$\deg_t\Phi \leqslant 2n$, $\deg_r\Psi \leqslant 2n-1$, $\deg_r\Phi \leqslant n$, $\deg_r\Psi \leqslant n$.
Siin $\deg_t\Phi$ tähistab polünoomi Φ astet t suhtes, $\deg_r\Phi$ — tema astet r suhtes.

(3) Topoloogilised arutlused. Leidub vaid lõplik arv ringjooni (r), kus $\Phi_t\equiv 0$ või $\Psi_t\equiv 0$, (siin $\equiv$ tähendab «samaselt muutuja t suhtes). Tõepoolest, võrratuste $\deg_r\Phi \leqslant n$, $\deg_r\Psi \leqslant n$

tõttu on kummalgi juhul tegemist ülimalt n-astme algebralise võrrandiga; igal sellisel e i s a a aga olla rohkem kui n lahendit (mitte segi ajada küsimusega nende tegelikust olemasolust, mida me tõestame alles!). Selle fakti (väitevastane) tõestus on triviaalne.

Kerge on ka näha, et neil ringjoontel (r), kus $\Phi \neq 0$ ja $\Psi \neq 0$ (eelnenu põhjal võib väita, et leidub selline r_0, et $r = r_0$ korral on need tingimused täidetud), funktsioonid u ja v saavad nulliks mitte rohkem kui $2n$ korda — seda võrratuste $\deg_t \Phi \leqslant 2n$, $\deg_t \Psi \leqslant 2n$ tõttu. Kasutades nüüd mõlema arutluse tulemusi, näeme, et u ega ka v ei saa olla nullid mingi lõpliku pindalaga tasandi piirkonna punktides (seda on jälle lihtne vastuväiteliselt tõestada). Teiste sõnadega — võib öelda, et tasand jaguneb kaht liiki piirkondadeks (ühtedes on $v > 0$ ja teistes $v < 0$), mis on eraldatud joonega $V : v = 0$.

Edasisi arutlusi illustreerib joonis 4.



Joonis 4.

Et kõver $v = 0$ käitub asümptootiliselt (s. t. küllalt suurte r väärtuste korral) nagu $r^n \sin n\varphi$, siis teame, et piirkonnad $v > 0$ asuvad sektoris

$$\left(\frac{2k\pi}{n}, \frac{(2k+1)\pi}{n} \right),$$

jätkudes ringjoone (r) sisepiirkonda (v pidevuse tõttu!). Vaatlemegi nüüd piirkondade $v > 0$ osi ringjoone (r) sees ja liigume mööda kontuurjoont $V: v = 0$ nii, et need piirkonna osad oleksid meil kogu aeg vasakut kätt. Piirkondade $v > 0$ kontuurjoon võib (r) sees käituda väga mitmeti: ta võib «pöörduda tagasi» samasse sektorisse (vt. sektorit $(P_2; P_3)$), võib liikuda sektorisse tüüpi $\left(\frac{2l\pi}{n}, \frac{(2l+1)\pi}{n}\right)$ ning võib sealjuures isegi hargneda, kusjuures iga haru liigub mõnda eeltoodud tüüpi sektorisse (vt. joon. 4). On aga kerge näha, et kontuurjoon V: $v = 0$ «lahkub» ringjoone (r) sisse paaritu indeksiga jaotuspunktide P_k ümbruses (kus aga $u < 0$) ja «saabub» ringjoonele (r) paaris indeksiga jaotuspunktide $P_{k'}$ ümbruses (kus aga $u > > 0$).[11] Funktsiooni $u = u(x, y)$ pidevuse tõttu peab nüüd kontuurjoonel punktide P_k ja $P_{k'}$ vahel olema selline punkt Q, et $u(Q) = 0$, m.o.t.t.

Oma dissertatsioonis püstitas Gauss hüpoteesi, et kõrgema-astmelised ($n \geqslant 5$) üldvõrrandid radikaalides ei lahendu. Sellele oletusele juhtis ta tähelepanu ka 1797.—1801. aastail ilmunud kuulsas monograafias «*Disquisitiones arithmeticae*» (Aritmeetilised uurimused). Tegelikult võib iga naturaalarvu $n \geqslant 5$ korral näidata n-astme algebralise võrrandi (isegi täisarvuliste kordajatega), mille lahendid radikaalides ei avaldu! Samal ajal on aga äsja tõestatud teoreemi kohaselt igal sellisel võrrandil n kompleksset lahendit. Siit on ka selge, et kõigi algebraliste arvude hulk on palju laiem nende kompleksarvude hulgast, mida saab «radikaalides kirja panna».

Algebralises geomeetrias tuleb sageli vaadelda võrrandeid kordajatega ratsionaalfunktsioonide korpusest; nende võrrandite lahendeiks on algebralised funktsioonid.[12] Sellest tulenevalt vaadeldakse algebralisi võrrandeid ka üle kompleksarvude korpusest erinevate korpuste (muidugi on selleks ka palju teisi põhjusi). Algebra põhiteoreem pole neile võrrandeile rakendatav; ta asendub sellise väitega:

Olgu P — korpus ja $f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n = 0$ algebraline võrrand üle P, s. t. kõik $a_i \in P$. Ei korpuses P ega ka üheski tema laiendis ei saa võrrandil $f(x) = 0$ olla rohkem kui n lahendit. Sealjuures leidub korpusel P selline laiend $F \supseteq P$, et võrrandil $f(x) = 0$ on temas täpselt n lahendit (kordusi arvestades).

[11] Liigume ju kogu aeg nii, et piirkond $v > 0$ oleks vasakul.

[12] Vt. Ü. Lumiste. Riemann topoloogia ja üldise kõvera geomeetria loojana. — Matemaatika ja kaasaeg, XI, lk. 65—76.

Ruffini-Abeli teoreemist

Ajaloo ainsaks eesmärgiks pole sugugi vaid viljatu uudishimu rahuldamine; möödunu tundmaõppimine peab selgitama tulevikku.

P. Tannery.

9. Itaallane Paolo Ruffini püüdis 1799. a. tõestada, et kõrgemaastmelised üldvõrrandid ei lahendu «lõplikus laiendatud aritmeetikas», (Vt. p. 1.). Kuigi tema tõestus osutus lünklikuks ja vaatamata rohkearvulistele katsetele (1801., 1802., 1806., 1813. aastail) ei õnnestunud Ruffinil seda täiendada, olid tõestuse juhtideed õiged ja — mis veelgi olulisem — neis töödes oli rohkesti uusi mõisteid ja fakte, mis tegelikult olid ettevalmistavaks etapiks rühmateooria loomisel. Kahjuks ei saanud P. Ruffini õpik «*Theoria generale delle equazioni, in cui si dimonstra impossibili la soluzione algebraica delle equazioni generali di grado superiore al quarta*» (Üldine võrrandite teooria, milles tõestatakse kõrgemaastmeliste ($n > 4$) üldvõrrandite algebralise lahendamise võimatus) väljaspool Itaaliat eriti tuntuks.

Kõnesoleva õpikuga tutvus siiski A.-L. Cauchy, kes esimesena lõi (1815. a., s. t. mõni aeg hiljem) substitutsioonirühmade tarvis terminoloogia ja tähised. Saanud nende kohta rea olulisi fakte, pani ta oma tööga «*Sur le nombre des valeurs qu'une fonction peut acquérir lorsqu'on y permute de toutes les manières possibles les quantités qu'elle renferme*» (Väärtuste arvust, mida funktsioon võib omandada, kui kõikvõimalikel viisidel ümber paigutada suurusi, mis teda moodustavad) aluse terviklikule teooriale. Näeme, et 19. sajandi alguseks oli Lagrange'i ideede arengus läbitud terve etapp — oli loodud substitutsioonirühmade teooria alused. Tundmata olid aga korpuseteooria põhiprintsiibid.

10. N. E. Abel[13] tegeles 5. astme võrrandi lahendamisega juba nooruses. Kord tundus talle (1812. a.), et ta on ülesande lahendanud; hiljem aga tekkis kahtlus tõestuse õigsuses. Pingsad otsingud viisid Abeli õige tõestuseni (1824. a.) ning 1826. a. ilmus žurnaalis «*Journal für reine und angewandte Mathematik*» (Puhta ja rakendusmatemaatika ajakiri) tema artikkel «*Démonstration de l'impossibilité de la résolution algébrique des équations générales qui passent le quatriéme degré*» (Kõrgemaastmeliste üldvõrrandite algebralise mittelahenduvuse tõestus).

Ülesande seade oli Abelil järgmine. Funktsiooni v lõplikust arvust suurustest $x_1, \ldots, x_n$ loeme algebraliseks, kui v saab $x_1, \ldots, x_n$ kaudu avaldada, «finiitses laiendatud aritmeetikas»; (sealjuures vaatleb Abel ainult algarvulise näitajaga juuri). Käsitledes algebralise võrrandi lahendeid kui algebralisi

[13] N. Abeli biograafiaga võib tutvuda suurepärase raamatu abil: O. Ope. Замечательный математик Н. Х. Абель. М., 1961.

funktsioone võrrandi kordajaist, millega tundmatut võrrandis asendades saab teda rahuldada, mõistab Abel võrrandi lahendamisena selliste algebraliste funktsioonide üldkuju leidmist.

Abeli (-Ruffini) teoreem näitas küll, et kõrgemaastmelised üldvõrrandid ei lahendu radikaalides, kuid tõestus ei öelnud midagi konkreetsete (arvuliste kordajatega) algebraliste võrrandite radikaalides lahenduvuse kohta. Näited kinnitavad, et leidub seeriaid radikaalides lahenduvaid võrrandeid: $x^n + a = 0$, $(x^n + a)^m + b = 0$, $x^{2n} + px^n + q = 0$. Veidi keerukama, kuid huvitavama näite n-astme võrrandist, mis lahendub radikaalides, annab

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (-1)^k \binom{n}{2k} x^{n-2k}(1-x^2)^k = a, \quad a \in R, \ |a| \leqslant 1, \ n \in N; \text{ siin}$$

$[x]$ tähistab arvu x täisosa.

Kasutades valemit $\cos n\alpha + i \sin n\alpha = (\cos \alpha + i \sin \alpha)^n$ ja Newtoni binoomvalemit, saame

$$\cos n\alpha = \cos^n \alpha - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\alpha \sin^2 \alpha + \ldots =$$

$$= \cos^n \alpha - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\alpha(1-\cos^2\alpha) + \ldots$$

Võttes nüüd $\cos n\alpha = a$ ja $\cos \alpha = x$ näeme, et toodud võrrand kirjeldab eeskirja ühekordse nurga koosinuse leidmiseks, kui on teada vastava n-kordse nurga koosinus. Et see võrrand lahendub radikaalides (mitte sugugi aga alati ruutradikaalides!), selgub järgnevast arvutusest:

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha = a + i\sqrt{1-a^2}, \text{ millest}$$

$\cos \alpha + i \sin \alpha = \sqrt[n]{a + i\sqrt{1-a^2}}$. Analoogiliselt $\cos \alpha - i \sin \alpha = \sqrt[n]{a - i\sqrt{1-a^2}}$.

Saamegi

$$x = \cos \alpha = \frac{1}{2}\left(\sqrt[n]{a + i\sqrt{1-a^2}} + \sqrt[n]{a - i\sqrt{1-a^2}}\right).$$

Veelgi enam — jääb isegi võimalus, et iga konkreetne võrrand lahendub võib-olla radikaalides, ainult et igal konkreetsel juhul on vahest lahendusvalemid erinevad, s. t. ei leidu üldist, kõigile n-astme võrrandeile korraga sobivat lahendusvalemit radikaalides.

Aastail 1826—1829 töötas Abel väga intensiivselt nende küsimuste kallal, seades ülesandeks leida võrrandi radikaalides lahenduvuse tingimused. Selle ülesande täieliku lahendamise au kuulub teisele sama erakordsele matemaatikule E. Galois'le. Siiski õnnestus juba Abelil leida Galois' kriteeriumist pool: kui vähemalt üks algebralise võrrandi lahend avaldub radikaalides, siis on võrrandi Galois' rühm lahenduv (muidugi väljendas ta seda teises vormis). Selle viljaka uurimistöö tulemused avaldati kogutud teostes (1839. a.), artiklis *«Sur la résolution algébrique des équations»* (Võrrandite algebralisest lahendamisest).

Suurt huvi pakub ka Abeli *«Mémoire sur une classe patriculiére d'équations résolubles algébriquement»* (Memuaar ühest algebraliselt lahenduvate võrrandite klassist). Selles sisalduvad järgmised 2 teoreemi.

(1) Kui võrrandi $f(x)=0$ iga lahendit saab ratsionaalselt avaldada ühe lahendi kaudu, s. o. kui näiteks $x_j=\theta_j(x_1)$, kus $\theta_j(x_1)$ on ratsionaalfunktsioonid x_1-st ja kui nende funktsioonide jaoks on täidetud nn. «kommutatiivsuse seosed»

$$\theta_i(\theta_k(x_1))=\theta_k(\theta_i(x_1)),$$

siis lahendub võrrand $f(x)=0$ radikaalides.

(2) Kui algarvulise astmega taandamatu võrrandi kahest lahendist üks avaldub teise kaudu, ja vastupidi, ratsionaalselt, siis on see võrrand radikaalides lahenduv.

Et N. Abel oli 1829. a. paiku juba üsna lähedal Galois' resultaatidele, näitab selgesti tema tulemus (kirjas Crelle'le, 18. X 1828. a.): kui algarvulise astmega taandumatu algebralise võrrandi puhul on tema kolm lahendit omavahel seotud nii, et üks neist on ratsionaalselt avaldatav kahe ülejäänu kaudu, siis lahendub see võrrand radikaalides.

11. Kõnesolnud sajanditepikkust algebra arengujoont kroonisid Évariste Galois'[14] saadud tulemused (1831—1832). Võttes kasutusele rea uusi (nüüd fundamentaalseid) matemaatilisi mõisteid, saavutas Galois küsimuste ja ideede käsitlusel erakordse täpsuse ja üldsuse. Et Galois' ise peab oma põhiteoreemi Gaussi teoreemi (vt. p. 6) üldistuseks, siis on edu üheks põhjuseks, et ta erakordselt sügavalt mõistis Vandermonde ja Gaussi tulemusi võrrandi $x^p-1=0$ ruutradikaalides lahenduvuse uurimisel. E. Galois'd tuleb pidada rühmateooria loojaks, sest talle kuulub siin rida sügavaid tulemusi ja mõisteid, mis tänapäevani kuuluvad selle teooria põhifondi.

Neil või teistel põhjustel[15] ei tunnustanud kaasaegsed Galois' uurimuste tulemusi kohe. Alles 1843. a. kirjutab J. Liouville Teaduste Akadeemiale Pariisis: «Ma loodan, et Akadeemial on huvitav teada, et ma leidsin Évariste Galois' käsikirjades sügava ja täpse lahenduse järgmisele ilusale ülesandele: on antud alg-

[14] Л. Инфельд. Э. Галуа — избранник богов. М., 1958.

[15] Arvatavasti ka esituse «struktuurne stiil» (tulevikustiil), silmapaistev sisurikkus ja tihedus, tolle aja kohta erakordne abstraktsus tegi Galois' tulemuste mõistmise kaasaegseile tõsiseks ülesandeks.

arvulise astmega taandumatu algebraline võrrand; on vaja teada, kas ta lahendub radikaalides.» Järgneva aastakümne jooksul algas Galois' ideede taassünd. 1848. a. luges J. A. Serret Pariisis esimese kursuse Galois' teooriast. Galois' teooria esimene sidus esitus ilmus 1852. a. E. Betti'lt — *«Sulla rizoluzione dell' equazioni algebriche»* (Algebraliste võrrandite lahendamine). 1870. a. ilmunud C. Jordani töö *«Traité des substitutions et des équations algébriques»* (Uurimus substitutsioonidest ja algebralistest võrranditest) oli juba suurepäraseks kommentaariks Galois' teooriale. Ideede edasise arengu süstemaatiline jälgimine selle kirjutise raames oleks erakordselt raske ülesanne.[16]

[16] Lugeja leiab selle kohta huvitavat materjali raamatust Н. Бурбаки, Очерки по истории математики. М., 1963.

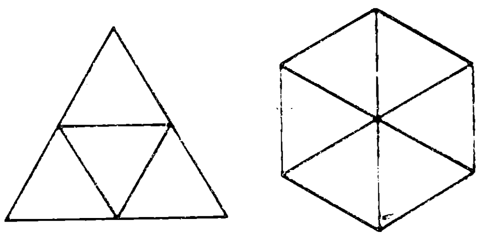
VIGURIGA ÜLESANNETE LAHENDUSED

(Ülesandeid vt. lk. 19, 26, 35, 46, 95, 109)

1. Tulemus on täpselt sama mis esimese konstruktsiooni katkilõikamisel.

2. Kolmnurga ümbermõõt on 20 ühikut, sest $AX = AP$, $BX = BP$ jne. Ülesande sõnastusest aga võib järeldada, et tulemus ei sõltu P asukohast. Seega lastes näiteks $P \rightarrow X$ saame nõutud tulemuse ilma mingi arvutamiseta.

3. Pindalade suhe on 2 : 3, mis selgub otsekohe juuresolevalt jooniselt.



4. Kõik arvud selles jadas on võrdsed, sest tegemist on arvu 16 kirjutistega erinevates arvusüsteemides (alustades kuueteistkümnendsüsteemiga ja lõpetades ühendsüsteemiga). Puuduv arv on seega $16_3 = 121$.

5. Ei ole võimalik, sest niisugune mudel kujutaks endast *perpetuum mobile*'t.

6. Kokku on 800 kõrvarõngast, sest keskmiselt kannab iga naine parajasti üht.

7. Mitte ükski, sest sead ei oska rääkida.

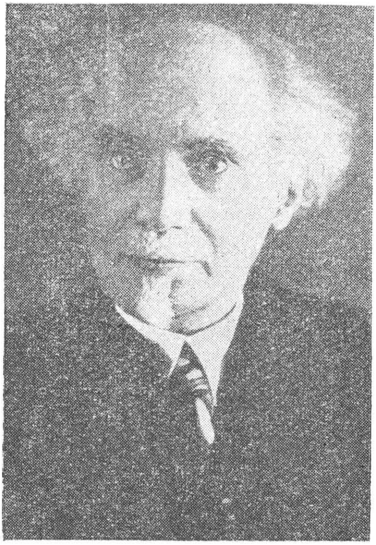
8. Et ruudu pindala on üheksa ühikut, siis on sirglõik niisuguse täisnurkse kolmnurga hüpotenuusiks, mille üks kaatet on 3 ja pindala 3. Seega on lõigu pikkus $\sqrt{13}$.

9. Vt. lk. 150.

10. Ei saa. Selles veendumiseks kujutleme, et $6 \times 6 \times 6$ kuup on koostatud 27-st väikesest $2 \times 2 \times 2$ kuubist, mis on vaheldumisi värvitud valgeks ja mustaks. Paaritu üldarvu tõttu on siis 13 üht ja 14 teist värvi kuupi. Kuidas me nüüd tellist suurde kuupi ka ei paigutaks, ikka satuvad täpselt pooled tema koosseisu kuuluvatest ühikkuupidest valgesse $2 \times 2 \times 2$ kuupi ja pooled musta. Et ühtesid neist on aga rohkem, siis sellest järeldubki kuubi tellistega täitmise võimatus.

90 AASTAT AKADEEMIK L. S. LEIBENSONI SÜNNIST

P. Müürsepp



«Suurim teadlane mehhaanika alal» [2] — nii nimetab NSVL Teaduste Akadeemia preisident M. V. Keldõš omaaegset Tartu ülikooli rakendusmatemaatika professorit Leonid Samuilovitš Leibensoni, kes sellel kohal oli kuulsa mehhaaniku, NSVL Teaduste Akadeemia hilisema korrespondentliikme Guri Vassiljevitš Kolossovi järeltulija ja 1968. aastal meie keskelt lahkunud professor Gerhard Rägo eelkäija.

Kuigi L. Leibenson töötas Tartu ülikooli (tol ajal — Imperaatorlik Jurjevi Ülikool) õppejõuna kolm aastat (aastatel 1915—1918), pole sellele perioodile tema elus mingit tähelepanu pööratud. Ka Tartu matemaatikutest ja füüsikutest teavad vähesed, et niisugune silmapaistev teadlane on olnud meie ülikooli professoriks.

Leonid Leibenson sündis 26. (14.) juunil 1879. aastal Harkovis arsti pojana. Gümnaasiumi lõpetas ta 1897. aastal Tuulas, kuhu perekond kolis 1890. aastal. Leonid õppis keskpäraselt, paistes siiski silma oma erakordse mäluga. Õppeainetest meeldis talle ajalugu, eriti aga geograafia. Gümnaasiumiaastatel oli Leibenson haaratud James Fenimore Cooperi, Thomas Mayne Reidi ja Jules Verne'i romaanidest. Viimased meeldisid talle just selle poolest, et neis olid seiklused ühendatud teadusliku fantastikaga.

Juba siis oli Tuula suur tööstuskeskus. Paljud töölised ja insenerid külastasid Leibensonide perekonda Kommertšeskaja tänavas. Leonid vestles sageli noorte inseneridega tehnika teemadel ja sai neilt raamatuid, kust leidis mitmesuguste masinate töötamise kirjeldusi ja selgitusi. Ka käis nooruk tehastes ja vaatles huviga tööpinkide tööd. Nii tärkaski temas soov saada inseneriks ja ta tegi kindla otsuse astuda juba tol ajal kuulsa Moskva Tehnikakooli insener-mehhaanika teaduskonda.

Leibensoni gümnaasiumi lõputunnistusel olid hinded loodusteaduslikes ainetes head ja humanitaarainetes rahuldavad, geograafia hinne oli aga väga hea. Sisseastumiseksameil Moskva Tehnikakoolis sai Leibenson algebras N. A. Šapošnikovi juures kolme ning kuigi teiste eksamite hinded olid neljad, ei piisanud sellest tehnikakooli õppima pääsemiseks. Nii tuli tal astuda Moskva ülikooli füüsika-matemaatikateaduskonna matemaatikaosakonda.

Vaatamata isa lohutusele kannatas noor Leibenson väga oma ebaõnnestumise pärast. Isa sai Nikolai Jegorovitš Žukovski sugulaste kaudu võimaluse küsida viimaselt nõu. N. J. Žukovski väitis, et füüsika-matemaatikateaduskonna õppeprogrammi läbitöötamine võimaldab saada tavalisest kõrgema kvalifikatsiooniga inseneriks.

Ülikoolis hakkas Leonid õppima ilma erilise vaimustuseta, kuulas aga tähelepanelikult kõiki loenguid. Varsti vaimustus ta füüsikast ja keemiast, alates kolmandast kursusest aga haaras teda täielikult matemaatika. Juba paistis ta oma kursusekaaslaste seas silma andekuse ja teadmiste poolest. Diplomitöö kirjutas ta matemaatikas professor L. K. Lahtini juures ja talle tehti ettepanek jääda ametisse matemaatikakateedri juurde. Leibensoni veetles aga rohkem töö N. J. Žukovski juures, kes oli noort andekat üliõpilast juba märganud.

Pärast ülikooli lõpetamist 1901. aastal veetis Leibenson suve Tuulas vanematekodus, tegeles dünaamika võrrandite integreerimise teooriaga ja kavatses asuda talle pakutud töökohale linnavalitsuse statistikaosakonnas. Isa pealekäimisel ja N. J. Žukovski nõuandel astus ta Moskva Tehnikakooli, kus ta võeti teisele kursusele.

Tehnikakooli üliõpilasena asus Leibenson N. J. Žukovski soovitusel 1904. aastast alates tööle mehhaanikuna aerodünaamika instituudis Kutšinos. Siin võttis ta osa Venemaa esimese aerodünaamilise toru ja lennukipropellerite katsetamise tööpingi ehitamisest. Esmakordselt Venemaal konstrueeris ta aerodünaamilised kaalud, ehitas mudelid ja töötas Žukovski juhendite järgi välja esimesed lennuki aerodünaamilise ja konstruktiivse arvutuse meetodid.[3]

1906. aastal lahkus Leibenson koos Žukovskiga sellest laboratooriumist, sest Žukovskil tekkisid lahkarvamused laboratooriumi omaniku kapitalist Rjabušinskiga.

1906. aastal lõpetas Leibenson Moskva Tehnikakooli insenermehhaaniku kutsega. Aastatel 1906—1908 töötas ta Tuula mehhaanikatehases mehhaanikuna.

Septembrist 1907 kuni aprillini 1908 sooritas Leibenson rakendusmatemaatika magistri eksamid Moskva ülikoolis. Detsembris 1908 kinnitati ta Moskva ülikooli rakendusmatemaatika kateedri eradotsendiks. Ta luges hüdromehhaanika, turbiinide teooria, põrke teooria ja taevamehhaanika kursusi.

1910. aastal ilmusid trükis esimesed Leibensoni teaduslikud tööd elastsusteooria rakendamisest Maa elastsete omaduste uurimisel. Huvi Maa ehituse vastu säilitas Leibenson oma elu lõpuni. Neis küsimustes on ta avaldanud terve rea töid (kuni 1941. aastani).[3]

1911. aastal lahkus Leibenson koos rühma professorite ja teiste õppejõududega Moskva ülikoolist protestiks tsaarivalitsuse reaktsioonilise poliitika vastu ülikoolis. Ta asus tööle ehitusfirma A. V. Bari kontoris Moskvas, projekteeris ja ehitas reservuaare ning naftajuhtmeid kuulsa inseneri, hilisema akadeemiku V. G. Šuhhovi juhtimisel.

Lahkunud septembris 1912 sellelt töökohalt ja asunud elama vanemate juurde Tuulasse, saatis Leibenson oktoobris Imperaatorliku Jurjevi Ülikooli füüsika-matemaatikateaduskonna dekaanile kirja, milles palus lubada kaitsmisele rakendusmatemaatika magistri kraadi saamiseks väitekirja «Elastse sfääri deformatsioon seoses küsimusega Maa ehitusest».

Töö anti retsenseerimiseks rakendusmatemaatika professorile G. V. Kolossovile, kes teatas teaduskonnale, et on nõus andma oma arvamuse. Et ta aga hiljuti on põdenud silmahaigust, ei või ta päevas töötada rohkem kui kaks tundi ja selle tõttu ei ole suuteline retsensiooni esitama enne 1913. aasta algust. Ühtlasi palus Kolossov määrata töö teiseks oponendiks A. J. Orlovi, viimase ärasõidu puhul Odessasse aga K. D. Pokrovski või P. P. Grave.

Märtsis 1913 teatas Kolossov füüsika-matemaatikateaduskonnale, et ta on juba peaaegu lõpetanud Leibensoni dissertatsiooni uurimise, kuid tal on tekkinud kahtlused mõningate tulemuste suhtes, ja palus määrata teiseks oponendiks professor Grave, kes on tööga ka juba tutvunud.

7. mail 1913 esitas Kolossov arvamuse, mis oli pikk ja põhjalik — 8 ulatuslikku masinakirja lehekülge.[4] Viiel leheküljel refereeris retsensent töö sisu, tehes seejuures kriitilisi märkusi.

Olgu siin toodud Kolossovi arvamuse lõpposa: «L. S. Leibensoni dissertatsiooni sisu kirjeldusest nähtub, et töö käsitleb üsna tähtsat ja huvitavat küsimust maakera ehitusest elastsete tõusude ja mõõnade põhjal tema kestas. Seejuures mainib autor rea ülesandeid, millest mõned on tema poolt lahendatud enamvähem korrektselt, kusjuures on tehtud huvitavaid ja tähtsaid järeldusi, kuid autori esitus pole vaba paljudest, mõnikord õige suurtest eksimustest ja vigadest.

Kõige suuremaks etteheiteks, mida tuleb teha L. S. Leibensoni tööle, on esiteks asjaolu, et see on oluliselt maha jäänud käsitletava küsimuse kaasaegsest olukorrast, kuna viimasel ajal on seda probleemi Inglismaal, Ameerikas ja Saksamaal silmapaistvalt edasi arendatud ning tema paljudele külgedele tuleb vaadata hoopis teisest seisukohast. Ma märkisin juba, et I peatüki tulemused leidis samaaegselt dissertatsiooni autoriga (1910. a.) täiesti sõltumatult ameerika teadlane Hoskins. Lõpuks, tundes huvi käesoleva küsimuse vastu, esitas Londoni Kuninglik Ühing Adamsi preemia saamiseks 1910. aastal töö teemal «Matemaatiline pingete uurimine maakeras ja seismiliste lainete levimiskiirus». Preemia anti tuntud inglise matemaatikule A. E. H. Love'ile töö «Some problems of geodynamics» eest, milles autor paljudes küsimustes jõudis L. S. Leibensonist ette. Love'i töö on trükis avaldatud 1911. aastal ning tal õnnestus, muide, lepitada kahte vaadet maakoore ehitusest: geoloogide ning geofüüsikute oma, kes loevad maakoore paksuseks 50—100 versta, ja matemaatikute seisukohta, kes alates W. Thomsonist ja lõpetades Love'i enese uurimustega 1909. aastal oletasid maakoore paksuseks umbes $\frac{1}{3}$ või $\frac{1}{2}$ Maa raadiusest. Asi seisab selles, et Love võtab Maa ehituse matemaatilise teooria aluseks tuntud isostaasi hüpoteesi, mille kohaselt Maa tihedus on jaotatud nii, et nendes kohtades, kus esinevad mäed või kõrgendikud, on Maa tihedus nende all väiksem kui süvendite kohal. Sel teel tuletatakse matemaatiliselt õhuke 100-verstane kest, mille ulatuses tangentsiaalsed jõud tasakaalustuvad ja ülejäänud aine on juba vedela tasakaalu olekus, kuigi ta füüsikalistelt omadustelt polegi vedelik. See hüpotees, mille juba 1865. aastal esitas Pratt, leidis viimasel ajal kinnitust uusimates geodeetilistes uurimustes ja on eriti välja töötatud ameerika teadlaste Dettoni, Titmani ja Hayfordi, aga ka Berliinis Helmerti poolt. Oma uurimuste aluseks võtab Love just selle hüpoteesi, aga töötleb matemaatiliselt ka horisontaalpendli võnkumiste vaatlusi ja kiidab väga Jurjevi seismilise jaama vaatlusi (A. J. Orlov).»

Pärast trükivigade ja eksimuste loetlemist töös tegi professor Kolossov järelduse: «. . . kuigi Leibensoni töö jääb oma resultaatidelt alla Love'i hilisematele uurimustele . . ., võivad paljud näited, millest mõned on väga teravmeelselt valitud, osutuda kasulikeks ja tähtsaiks vaadeldud küsimuse edaspidisel uurimisel. Arvan, et füüsika-matemaatikateaduskond ei eksi, kui ta omistab L. S. Leibensonile selle töö eest rakendusmatemaatika magistri kraadi.»

Füüsika-matemaatikateaduskond oma istungil 7. mail 1913 otsustas: «Lükata kaitsmine edasi kuni väitekirja esitamiseni parandatud kujul trükivigade osas.» [5]

9. septembril 1913. aastal valiti G. V. Kolossov Peterburi Elektrotehnika Instituudi teoreetilise mehhaanika kateedri korraliseks professoriks ja ta lahkus Tartust.

Novembris 1914, töötades Moskva ülikooli teoreetilise ja rakendusmehhaanika eradotsendina, saatis Leibenson Tartu ülikooli füüsika-matemaatikateaduskonna dekaanile kirja, milles ta teatas, et vastavalt Tartu ülikoolilt Moskva ülikoolile esitatud avaldusele ja professor Žukovski ettepanekule soovib ta võtta enda peale mehhaanika kursuse lugemise Tartus ja võib sellega alustada otsekohe, kui teaduskond teatab oma nõusolekust.

Füüsika-matemaatikateaduskonna koosolekul 10. veebruaril 1915 arutati Imperaatorliku Moskva Ülikooli eradotsendi L. S. Leibensoni palvet lubada kaitsmisele *pro venia legendi* * dissertatsioon pealkirjaga «Elastse sfääri deformatsioon seoses küsimusega Maa ehitusest».

Olles ära kuulanud professorite P. P. Grave ja K. D. Pokrovski kirjalikud avaldused, otsustati ühel häälel: 1) lubada L. S. Leibensoni eespool nimetatud dissertatsioon kaitsmisele *pro venia legendi*, 2) määrata ametlikuks oponendiks professor K. D. Pokrovski ja 3) paluda professor G. V. Kolossovi ning astronoom-vaatlejat E. G. Schoenbergi olla ametlikeks oponentideks fakulteedi poolt.[6]

2. juunil 1915 tunnistas Tartu ülikooli nõukogu pärast salajast hääletamist magistrant L. S. Leibensoni valituks rakendusmatemaatika kateedri eradotsendi kohale.

Kerkib küsimus, miks niisugune noor ja andekas teadlane nagu Leibenson valis oma töökohaks just Tartu ülikooli. Sellele küsimusele annab teatud määral vastuse G. V. Kolossovi 20. novembri 1911. a. kiri füüsika-matemaatikateaduskonnale.

G. V. Kolossov kirjutab: «... ühelainsal professoril on raske ja mõnel juhul otse võimatu lugeda täielikult neid mehhaanika osi, mis käesoleval ajal on arenenud laialdasteks ja iseseisvateks harudeks, eriti h ü d r o d ü n a a m i k a t ja e l a s t s u s t e o o r i a t. Sama kehtib mõningate puhta matemaatika osade kohta, mida spetsiaalselt arendatakse analüütilise mehhaanika ja matemaatilise füüsika jaoks: matemaatilise füüsika võrrandite integreerimine, funktsioonide arendamine ritta trigonomeetriliste, Besseli, kera- ja üldse fundamentaalfunktsioonide järgi, mida viimasel ajal on uurinud Poincaré, V. A. Steklov jne.

Seepärast on ülimalt soovitav lugeda kas või mõnda neist osadest ülikooli kursuses. Oleks kõige ratsionaalsem tugevdada mehhaanika ja vastavate matemaatika ning matemaatilise füüsika osade õpetamist uute teaduslik-pedagoogiliste jõudude toomisega Jurjevi ülikooli, kuid ülikooli spetsiaalsete vahendite praeguse olukorra juures osutub see vaevalt võimalikuks.

* Ülikoolis loengute pidamise luba.

Peterburis ja Moskvas viibides rääksin ma paljude pealinna ülikoolide magistrantidega ja eradotsentidega ning ainult kaks neist — Leibenson Moskvas ja Ehrenfest Peterburis — avaldasid nõusolekut tulla Jurjevi ülikooli eradotsentideks. Nad mõlemad on matemaatilise füüsika spetsialistid: Leibenson — N. J. Žukovski õpilane, tegeles spetsiaalselt maakera koore elastsete võnkumistega; Ehrenfest, Göttingeni ülikooli doktor ja eradotsent, on väga andekas ja energiline töötaja matemaatilise füüsika alal, kes on läbi käinud Lääne-Euroopa matemaatika koolist. Kuid, esiteks, mõlemad need isikud on juudid, Leibenson ristitud, aga Ehrenfest mitte, ja seetõttu võib nende kutsumine põhjustada raskusi, ning, teiseks, nad mõlemad keelduvad kategooriliselt sõitmast Jurjevisse, ilma et saaksid kindlat, kas või üsna tagasihoidlikku tasu. Seejuures pole meil vabu koosseisulisi dotsentuure...»[4]

18. detsembril 1915 kaitses Leibenson Moskva ülikoolis väitekirja «Talavabade katete teooriast» rakendusmatemaatika magistri kraadi saamiseks. 26. aprillil 1916 valiti ta vakantse rakendusmatemaatika kateedri erakorraliseks professoriks. Nii sai temast selles kateedris G. V. Kolossovi järglane.

Huvi pakub G. V. Kolossovi 13. veebruari 1916. a. kiri Tartu ülikooli astronoomia professorile K. D. Pokrovskile; selles iseloomustatakse L. S. Leibensoni kui noort teadlast. Kolossov kirjutab:

«Lugupeetud Konstantin Dorimedontovitš! Sain neil päevil Teie 4. veebruari kirja palvega esitada teie teaduskonnale arvamus L. S. Leibensoni tööde kohta, aga eile saatis L. S. ise mulle selle kohta kirja ja palus kiirendada arvamuse saatmist, et see jõuaks Jurjevisse mitte hiljem kui 15. veebruaril.

Muide, olen praegu ülikoolis ja instituudis tööga üle koormatud (kirjutan rea retsensioone dissertatsioonidele), lisaks sellele veel haigestusin, nii et tuleb piirduda üldise arvamusega L. S. tööde kohta, neist viimaseist (magistridissertatsioon) ma ei lugenud kaugeltki kõike.

Kuid ma tunnen neid töid täiesti küllaldaselt, et soovitada teaduskonnal valida L. S. Jurjevi ülikooli rakendusmatemaatika kateedrisse, kuna ta on suhteliselt veel väga noor teadlane, kes kaheldamatult armastab oma ala, ja tulevikus, teaduslikuks tööks soodsatel tingimustel, võib anda teadusele väga palju, võib-olla palju enam kui see, mida juba on jõudnud anda. Kuid oma juba avaldatud töödes näitab ta suurt eruditsiooni rakendusmatemaatika alal, oskust õigesti püstitada küsimusi ja mõnikord neid suure teravmeelsusega lahendada. Mul oli juba võimalus anda teaduskonnale (mais 1913) arvamus tema töö kohta maakoore võnkumistest ja deformatsioonidest, milles mõningate suhteliselt ebaoluliste defektide juures ta kaheldamatult demonstreeris head ettevalmistust ja suuri teadmisi.

Olles kateedri jaoks teoreetiliselt ette valmistatud, on L. S. ühtlasi ka insener-mehhaanik ja suudab tõenäoselt kateedrit elustada rea tehnilise ja rakendusliku iseloomuga kursustega, mis on nii soovitavad ülikoolides õpetamisel. Lisaks sellele tegi L. S. läbi suurepärase kooli N. J. Žukovski juures ja on üheks kõige aktiivsemaks N. J. õpilaseks, aga viimasel ajal aitas L. S. N. J. Žukovskit õppetöös, lugedes rea kursusi Moskva ülikoolis.

Märgin, et ka S. A. Tšaplõgin on L. S. töödest väga heas arvamises ja mõned teaduskonna liikmed arvatavasti mäletavad S. A. telegrammi, mis oli saadetud Jurjevisse (mai 1913) minu nimele, kui oli otsustamisel küsimus L. S. Leibensoni dissertatsiooni kaitsmisele lubamisest Jurjevis. Selles telegrammis nimetab S.A. L.S.-i tõsiseks ja andekaks teaduslikuks töötajaks.

Kõik see sunnib mind veel kord teaduskonnale soovitama valida L. S. Jurjevi ülikooli rakendusmatemaatika professoriks.»[4]

Leibenson suhtus tõsiselt mehhaanika õpetamisse Tartu ülikoolis, nagu näitab tema kiri füüsika-matemaatikateaduskonnale 17. septembril 1916. Selles kirjas nõuab erakorraline professor L. S. Leibenson Tartu ülikooli mehhaanikaprogrammide ühtlustamist mehhaanika õpetamisega teistes Venemaa ülikoolides. Ta kirjutab:

«Praegusel ajal loetakse meil mehhaanikat 8 semestritunni ulatuses, mille tõttu õpetamisel pole üldse võimalik puudutada üsna tähtsaid mehhaanika osi, nagu gravitatsiooniteooria, hüdrostaatika ja hüdrodünaamika. Selle kurvaks tagajärjeks on, et meie üliõpilased-matemaatikud jäävad oma mehhaanika-alase ettevalmistuse poolest maha mitte ainult teiste ülikoolide, vaid ka mõnede eriõppeasutuste üliõpilastest. Peale selle, need kes on valinud erialaks füüsika ja astronoomia, pole praeguse õpetamisprogrammi juures suutelised kuulama erikursusi enne seitsmendat semestrit, samal ajal kui teistes ülikoolides on see võimalik juba viiendast semestrist. Pidades seda lubamatuks nii õppejõu südametunnistuse kui ka riiklikult seisukohalt, on mul au paluda teaduskonda rakendada alates 1917/18. õppeaastast uus mehhaanika õpetamise programm, mis on arvestatud 16 semestritunnile (12 tundi loenguid + 4 tundi harjutusi) teiste Imperaatorlike Vene ülikoolide eeskujul. Esitatav mehhaanika õpetamise programm on kooskõlastatud Imperaatorlike Vene Ülikoolide Katsekomisjoni programmidega.» [4]

Leibenson paneb ette lugeda kolmandal ja neljandal semestril 3 tundi nädalas kohustuslikult: 1) geomeetrilist staatikat, 2) kinemaatikat, 3) lühidalt gravitatsiooniteooriat, 4) punkti dünaamikat; viiendal ja kuuendal semestril 3 tundi loenguid ja 2 tundi harjutusi nädalas: 1) analüütilist staatikat, 2) süsteemi dünaamikat koos väikeste võnkumiste teooriaga, 3) hüdrostaatikat ja hüdrodünaamikat.

Praktilised tööd koosnevad: 1) mehhaanika ülesannete lahendamisest, 2) aparaatide uurimisest mehhaanika kabinetis, 3) mudelite järgi joonestamise algõpetusest.

Leibenson jätkab: «Kui osutuks võimalikuks õpetada mehhaanika erikursusi, siis tuleks kolme semestritunni ulatuses lugeda järgmisi kursusi: 1) dünaamika integraalvõrrandid ja jäiga keha dünaamika, 2) hüdrodünaamika (lained ja keerised), 3) elastsusteooria ja tugevusõpetus, 4) matemaatilise füüsika võrrandid.» [4]

Väärib märkimist, et Leibensonil oli Tartus ka õpilane V. V. Kupffer, kes siin 1920. aastal avaldas töö «Greeni funktsiooni meetodi rakendamisest pika koridori ülesande lahendamisel talavabade katete teoorias» [8, 9], mis on Leibensoni magistritöö otsene edasiarendus. Kupfferi töös määratakse lõpmata pika lõpliku laiusega plaadi paine juhul, kui plaat toetub oma lõpmata pikkadele külgedele ja lisaks sellele veel ühele või mitmele reale tugedele. Siinjuures eeldatakse, et koormus on ühtlaselt jaotatud ja mõjub risti plaadi pinnaga. Ülesande lahendamisel kasutatakse Saint-Venant'i printsiipi, asendades tugede üksikmõjud ühte punkti koondatud reaktsioonitungiga. Nimetatud küsimusega tegeles Kupffer Leibensoni ettepanekul ja juhendamisel.

Huvi pakub dokument, mille on saatnud füüsika-matemaatikateaduskond ülikooli nõukogule juba pärast Suurt Sotsialistlikku Oktoobrirevolutsiooni, veebruaris 1918. aastal. Selles taotletakse vastavalt 19. (6.) veebruaril 1918. aastal teaduskonnas toimunud hääletamistulemustele (9 poolt, vastu — mitte ühtegi) kinnitada L. S. Leibenson rakendusmatemaatika kateedri korraliseks professoriks.[7]

20. (7.) veebruaril 1918 otsustas Jurjevi ülikooli * nõukogu ühehäälselt jääda valiku juurde — vajaduse korral avada ülikooli tegevus Voroneži linnas.[6]

Jurjevi ülikool tegutses Tartus mai lõpuni 1918. aastal, mil Saksa okupatsioonivõimud ta sulgesid. Okupatsiooniväed olid Tartusse jõudnud juba 24. veebruaril 1918. Füüsika-matemaatikateaduskonna viimane istung toimus 26. märtsil. Sellel tegi, muide, dekaan teatavaks, et ülikooli nõukogu valis 22. märtsil astronoomia kateedri erakorraliseks professoriks T. A. Banachiewiczi. Okupatsioonivõimude korraldusel oli vene ülikool Tartus sunnitud oma tegevuse lõpetama 31. mail 1918.

1918. aasta suvel sõitis enamik vene rahvusest õppejõude ja üliõpilasi Voroneži. Viimane ešelon lahkus Tartust veel 31. augustil ja jõudis kohale 7. septembril. Endine Jurjevi ülikool jätkas tööd 1918. aasta sügisel juba Voroneži ülikooli nime all. L. S. Leibenson lahkus Tartust jalgsi 1918. aasta veebruaris, üks päev enne okupatsioonivägede linna jõudmist, aga mitte 1917. aastal, nagu on märgitud akadeemik Sedovi artiklis.[3]

* Sõna «Imperaatorlik» jäeti ülikooli nimetusest ära pärast 1917. aasta Veebruarirevolutsiooni.

1919. aastal valiti Leibenson Tiflisi Polütehnilise Instituudi rakendusmehhaanika professoriks. Samal ajal töötas ta Gruusia Riikliku Ülikooli teoreetilise füüsika professorina. Pedagoogilise töö tulemusena avaldas ta Tiflisis trükis õpikud «Tugevusõpetus» ja «Teoreetiline mehhaanika» (mõlemad 1922. a.).

1921. aastal kutsuti Leibenson Bakuusse Aserbaidžaani Polütehnilise Instituudi mehhaanika ja füüsika professoriks. Siin organiseeris ta Nõukogude Liidus esimese naftatööstuse teaduskonna. Alates 1923. aastast areneb Leibensoni teaduslik ja pedagoogiline tegevus jälle Moskvas. Ta töötas Moskva ülikoolis mehhaanika professorina, Mäeakadeemias naftatöönduse mehhaanika professorina, Tekstiiliinstituudis rakendusmehhaanika professorina. Samaaegselt oli Leibenson trusti Asneft, Naftatööstuse Nõukogu ja alates 1933. aastast ka N. J. Žukovski nimelise Aerodünaamika Keskinstituudi konsultandiks; ta võttis osa Groznõi-Tuapse, Bakuu-Batumi ja paljude teiste naftatööstuse ehituste projekteerimisest.

1933. aastal valiti Leibenson NSVL Teaduste Akadeemia korrespondentliikmeks. 1934. aastal omistati talle tehnikateaduse doktori ja 1936. aastal füüsika-matemaatikadoktori teaduslik kraad.[1] 1943. aastal valiti Leibenson NSVL Teaduste Akadeemia akadeemikuks.

1935. aastal määrati Leibenson tema osavõtul loodud Moskva Riikliku Ülikooli Mehhaanika Instituudi direktoriks. Aastatel 1940—1941 oli ta NSVL TA Teoreetilise Geofüüsika Instituudi direktori asetäitja ja 1941. aastal asendas NSVL TA Mehhaanika Instituudi direktorit.

Leibenson on 115 sisult mitmekesise teadusliku töö autor, mis haaravad paljusid mehhaanika ja rakendusmatemaatika alasid ning tehnilisi distsipliine. Ta tundis hästi teaduste ajalugu ja klassikute teoseid. Eluea kestel avaldas ta rea uurimusi teaduste ajaloo alalt ja tegi suurt tööd N. J. Žukovski, N. P. Petrovi ja S. A. Tšaplõgini kogutud teoste trükis avaldamiseks.

Nimetagem siin Leibensoni töödest teaduste ajaloo alal järgmisi: «Mehhaanika ajalugu NSV Liidus 15 aasta kestel — 1917. kuni 1932. aastani», «Moskva Riikliku Ülikooli mehhaanika ajalugu 1755. kuni 1940. aastani», «V. G. Šuhhov ja naftaasjanduse tehnika» (1924. a.), monograafia N. J. Žukovskist (1947. a.).

1943. aastal anti Leibensoni töödele esimest järku riiklik preemia. Valitsus autasustas Leibensoni kahe Lenini ordeniga ja Töö Punalipu ordeniga.

Leonid Samuilovitš Leibenson suri 15. märtsil 1951. aastal kell 7 hommikul. Ta maeti Novo-Devitšje kalmistule Moskvas.

L. S. Leibensoni tööd jätsid kustumatu jälje nõukogude teadusesse. Tema loodud uusi suundi mehhaanikas arendavad edukalt edasi tema õpilased ja järglased.

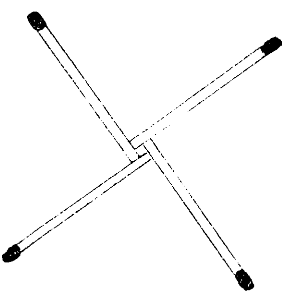
Ajavahemikus 1951 kuni 1955 avaldas NSVL Teaduste Akadeemia L. S. Leibensoni koguteosed neljas köites.

Kirjandus.

1. Юрьев Б. Н. Леонид Самуилович Лейбензон. Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. 1949, № 8.
2. Келдыш М. В. Леонид Самуилович Лейбензон. Академик Л. С. Лейбензон. Собрание трудов, т. I, М., — Изв.-во АН СССР, 1951.
3. Седов Л. И. Основные даты жизни и деятельности Л. С. Лейбензона. Академик Л. С. Лейбензон. Собрание трудов, т. IV, М., — Изд.-во АН СССР, 1955.
4. ENSV RAKA, f. 402, n. 3, sü. 958.
5. ENSV RAKA, f. 402, n. 9, sü. 621.
6. ENSV RAKA, f. 402, n. 9, sü. 622.
7. ENSV RAKA, f. 402., n. 9, sü. 624.
8. Купфер В. В. О приложении метода функции Грина к решению задачи о длинном коридоре в теории безбалочных покрытии. Sitzungsberichte der Naturforscher-Gesellschaft bei der Universität Dorpat, 24. Bd., 1920.
9. Pallas L. Matemaatika ajaloost Tartu ülikoolis XIX saj. lõpul ja XX saj. algul. Diplomitöö. TRÜ geomeetria kateeder. 1959.

VIGURIGA ÜLESANDE LAHENDUS

8. Kui «kuupi» tõlgendada arvuna, siis sobivad lahendeiks VIII, 27 ja 1, mida tikkudest on lihtne moodustada. Geomeetrilise lahenduse idee on näidatud kõrval oleval joonisel (viies tikk tuleb sellele väikesele kuubile katteks peale panna).



TEOREETILISELT JA PRAKTILISELT

Kastil, milles on jänes, on kummaski küljes auk. Jänes pistab pea välja kasti vasakpoolses küljes olevast august. Minut hiljem pistab ta oma pea välja paremal pool küljes olevast august. Pool minutit hiljem pistab ta oma pea välja vasakpoolsest august, veerand minutit hiljem parempoolsest august, kaheksandik minutit hiljem vasakpoolsest. Millal pistab jänes oma pea mõlemast august korraga välja?

ÜLO LUMISTE — FÜÜSIKA-MATEMAATIKADOKTOR [1]

Tartu Riikliku Ülikooli ja kogu Eesti NSV matemaatikute peret rõõmustas TRÜ algebra ja geomeetria kateedri juhataja dotsent Ülo Lumiste, kes 12. mail 1968 kaitses Kaasani ülikoolis edukalt oma doktoriväitekirja «Seostuste teooria homogeensetes kihtkondades rakendustega homogeensete alamruumide parvede geomeetrias» [2]. Oponentideks olid juhtivad nõukogude geomeetrid professorid G. F. Laptev ja V. V. Rõžkov Moskvast ning A. P. Norden Kaasanist. See sündmus näitab, et Tartu on taas kujunenud geomeetria-alase uurimistöö keskuseks; teatavasti oli ta seda möödunud sajandil tänu M. Bartelsi, K. G. Senffi, F. Mindingu ja K. Petersoni tegevusele.

Ülo Lumiste elutee algas 30. juunil 1929 Vändras sidetöötaja perekonnas (tookordse nimega Lunden). Vändras sai ta ka suurema osa oma kooliharidusest (kuni 1941. a. õppis ta Tamsalu ja Paide koolides) ning samas ulatati talle 1947. a. kevadel küpsustunnistus koos kuldmedaliga. Vastse matemaatikadoktori edusammud on tunnustuseks tema kunagiste õpetajate, eriti aga matemaatika ja füüsika õpetaja E. Pillikse tööle.

Tartu Riikliku Ülikooli matemaatikaosakonda 1947. a. sügisel vastuvõetute hulgast paistis Ü. Lumiste silma nii andekuse kui

[1] Käesoleva ülevaate koostamisest võtsid osa K. Ariva, R. Kolde, R. Mullari, A. Parring, O. Prinits ja L. Tuulmets.

[2] Теория связностей в однородных расслоениях с приложениями к геометрии семейств однородных подмногоообразий.

ka erakordse töökuse ja visadusega. Näiteks pidi vajaduse puhul tema ees alistuma C. F. Gaussi ladinakeelne tekst, ehkki noorel tudengil varasemad kokkupuuted Cicero keelega puudusid. Juba viiendal kursusel tuli tal hakata osa võtma kateedri tööst, nimelt asendama oma õpetajat, vanaduspuhkusele siirdunud prof. J. Sarve. Sellest peale on Ü. Lumiste töö ja tegevus lahutamatult seotud algebra ja geomeetria kateedriga. Prof. G. Kangro juhendamisel kirjutatud diplomitööst sai tema esimene teaduslik publikatsioon.

Ülikooli lõpetamisele 1952. a. järgnesid pingelise pedagoogilise tegevuse aastad. Nende vältel kujunes Ü. Lumistest TRÜ üks lugupeetavamaid matemaatikalektoreid, kelle loengutele on iseloomulik nii matemaatiline korrektsus kui ka metoodiline meisterlikkus. Ta loeb korduvalt kõiki geomeetria põhikursusi — analüütilist geomeetriat, diferentsiaalgeomeetriat, kõrgemat geomeetriat ja geomeetria aluseid, kuid nende kõrval ka kõrgemat matemaatikat ja matemaatika ajalugu ning tervet rida eri- ja fakultatiivkursusi nagu Riemanni geomeetria, mitte-eukleidilised geomeetriad, kongruentside teooria, optimaalse juhtimise teooria jt. Huvipakkuvaks kujunes fakultatiivne loengutsükkel matemaatikast Eestis 17. ja 18. sajandil.

1953/54. õ.-a. ja 1956. a. avanes Ü. Lumistel võimalus end täiendada Moskva Riikliku Ülikooli diferentsiaalgeomeetria kateedri juures. Tutvunud seal lähemalt kaasaegse diferentsiaalgeomeetria probleemidega, otsustas ta ka ise nende kallal jõudu proovida. Ja 1958. a. valmiski tal kandidaaditöö, mille kaitses Moskvas.

Järgnes uus periood Ü. Lumiste pedagoogilises töös. Alates 1960. a. on ta dotsent, alates 1962. a. TRÜ algebra ja geomeetria kateedri juhataja. Süveneb töö geomeetrite uue põlvkonna juhendamisel. Arvukad on diplomitööd, mille puhul nõuandjaks ja mõttesuunajaks on Ü. Lumiste. Tema abi ja õhutusega valmisid kolm uut kandidaadidissertatsiooni — edukalt kaitsesid oma tulemusi Rünno Müllari ja Maido Rahula 1964. a. ning Leida Tuulmets 1966. a.; edasi on järjekorras terve rea uute noorte aspirantide juhendamine. Pidevalt töötab kateedri juures diferentsiaalgeomeetria seminar, kus maestro nõuanne ja sõbralik kriitika on käeulatuses igale geomeetriahuvilisele.

Aastatel 1963—65 viibis Ü. Lumiste sageli taas Moskvas, sedapuhku oma doktoritöö lõpuleviimiseks. Ülevaateid uurimistulemustest esitas ta 1966. a. Moskvas toimunud rahvusvahelisel matemaatikute kongressil, samuti mitmel üleliidulisel ja piirkondlikul diferentsiaalgeomeetria-alasel konverentsil. Ametlikule heakskiidule, mis ta tööd Kaasanis kroonis, järgnes vahetult tunnustus piiri tagant kutse näol esineda loengutega Berliini Humboldti-nim. Ülikoolis. Leedumaalt, Palangas toimunud

III Balti geomeetriakonverentsilt sõitiski värske doktor 1968. a. juunis teaduslikke sidemeid looma saksa matemaatikutega.

*

Sellised on mõned kõige tähtsamad piiripostid Ü. Lumiste tööpõllul. Need ei ütle kaugeltki kõike olulist. Katsuda aga lähemalt iseloomustada tema tegevust ja selle vilju ning viimaste kaudu ka autorit, ei osutu lihtsaks ürituseks. Me kohtame siin laialdast ning mitmeti läbipõimunud huvide ja teemade ringi, rohkearvulisi ja sageli nii sügavaid tulemusi, et nendest vähegi tervikliku, süstemaatilise ning laiemale üldsusele arusaadava ülevaate andmine on üsna tõsine ülesanne.

Viljakusest kõnelevad rohkem kui 30 teaduslikku publikatsiooni, millele lisandub teist sama palju populaarteaduslikke artikleid, ettekandeid ja sõnavõtte.

Meie jutt jääks ühekülgseks, kui me põgusaltki ei märgiks, et suur teadusliku ja pedagoogilise töö koorem ei ole Ü. Lumistet takistanud kaasa löömast paljudes üritustes ja täitmast mitmesuguseid ühiskondlikke kohustusi: matemaatikateaduskonna metoodilise komisjoni esimees, «Matemaatika ja kaasaja» toimetuse liige (ja küllap vist selle üks nobedama sulega autoreid), Tartu linna rahvakohtu kaasistuja aastatel 1957—1963, samal ajal ka ENSV TA Loodusuurijate Seltsi täppisteaduste sektsiooni esimehe asetäitja jne.

Vaimuinimene ja — spordimees. Algul kooli võrkpallimeeskond, siis ülikooli sportliku võimlemise rühm, tõstesport, arvukad purjeretked Emajõel, Võrtsjärvel ja Peipsil. Nüüd, ajal, mil käsi sirutas teaduste marssalikepi poole, pühapäevased matkad, suusatamine ja kaks korda nädalas U. Sahva võimlemisrühm sauna ja meestejutuga.

Kaine loogik ja — laulu- ning muusikasõber. Sügavale lugupidamisele helikunsti vastu pandi jällegi alus koolipäevil kaasalöömisega mitmes orkestris, seda süvendati suure laululustiga Tartu Akadeemilises Meeskooris ning viimasel ajal veelgi suurema kaasaelamisega headele kontsertidele TRÜ aulas ja plaatidelt lemmikpalade kuulamisega kodus.

Lubamatu oleks unustada sedagi, et teadusemehel on kodu ja perekond. Kodused rõõmud ja mured — ka nende jaoks peab leiduma aega, ja leidubki.

Ü. Lumiste isikus on ühendatud teadusekantsi vallutamisele innustaja ja selle kantsi väsimatu ründaja, pedagoog ja teadlane. Esimesest kasvab teine, teise mõju aga täiustab esimest. See seos väljendub tema loengutes, millele on omane mõtte iseseisvus ja uute teede otsing. Iga loengutsükli puhul püüab ta käsitlust moderniseerida ja õppeprogrammi materjali lähendada teaduse eesliinile. Tema mõte tahab käsitletavat teemat haarata nii sügavuti kui ka laiuti, näidata selle seost «suure teadusega» ja ühtlasi avastada viise olulise valgustamiseks maksimaalse lihtsuse ja selgusega. Teaduse õpetaja muutub teaduse tegijaks, samal ajal ka teaduse populariseerijaks. Neid kolme aspekti ei saa Ü. Lumiste puhul lahutada; nende ühtsus ja vastastikune tagasiside ongi võti tema pedagoogilise meisterlikkuse juurde ning samuti tema teadusliku loomingu ammendamatu läte.

Lühiülevaadet Ü. Lumiste loomingulisest tegevusest alustame suhteliselt lihtsast probleemide ringist — tema n.-ö. hobbyst. Lugedes ülevaatelist kursust matemaatika ajaloost, hakkas ta unustusehõlmast välja tooma huvitavaid fakte oma eriala arengust Eestis ja muutus ise ajaloo uurijaks. Esimesed kirjutised matemaatika ajaloost avaldas ta aastatel 1959 ja 1962 ajakirjas «Eesti Loodus». Käsitlusel oli N. I. Lobatševski ideede levik Eestis möödunud sajandil ja Lobatševski õpetaja M. Bartelsi ning K. G. Senffi ja F. Mindingu geomeetria-alane tegevus Tartu ülikoolis. Nende tööde alusel pidas Ü. Lumiste ettekande 1960. a. Moskvas toimunud füüsika-matemaatikateaduste ajaloo konverentsil. Konverentsi materjalide hulgas on esmakordselt avaldatud osa juba ajaloo tolmu alla sattunud K. G. Senffi tööst. Selles esitatakse M. Bartelsilt pärinevad valemid, mis kirjeldavad kõveraga seotud liikuva teljestiku muutumist (Frenet' valemid). Ettekande autor soovitab nende valemite puhul Bartelsi prioriteedi tunnustamiseks nimetada neid Bartels-Frenet' valemiteks. Alates sellest konverentsist võimegi rääkida Ü. Lumistest kui laiemalt tuntud matemaatika-ajaloolasest.

Järgnesid esinemised teaduse ajaloo konverentsidel Riias (1962) ja Tartus (1964). Riias käsitles autor Moskva diferentsiaalgeomeetria koolkonna rajaja K. Petersoni tegevust Tartu ülikoolis ning Tartu geomeetria-alaste traditsioonide osa K. Petersoni kujunemisel väljapaistvaks matemaatikuks. Tartu konverentsil on teemaks matemaatikaalane kirjandus Eestis 17. sajandil.

Tunnustusena Ü. Lumiste ajaloouurimustele usaldati talle (koos prof. J. Depmaniga) Tartu ülikooli käsitlevate osade kirjutamine kogumikule «История отечественной математики», millest on senini ilmunud kaks köidet. Eesti keeles on ta seda materjali esitanud kokkuvõtlikult «Matemaatika ja kaasaja»[3] veergudel.

Omaette tsükli Ü. Lumiste loomingus moodustavad uurimused geomeetria aluste valdkonnas. Geomeetria alustele on eesti matemaatikud juba varemgi tõsist tähelepanu pööranud. Lumisteajaloolane ei saanud jätta uurimata J. Sarve, J. Nuudi ja A. Humala selleteemalisi töid. Lumistet-pedagoogi ei rahuldanud geomeetria aluste traditsiooniline käsitlusviis ülikoolikursuses ja

---

[3] Lehekülgi matemaatika ajaloost Eestis. — Matemaatika ja kaasaeg, I, II, IV.

loomulik oli, et Lumiste-teadlane jätkas vanema generatsiooni esindajate otsinguid.

Tema tähelepanu köitis ameerika matemaatiku O. Vebleni 1904. a. püstitatud vahel-suhte aksiomaatika, mida 1934. a. täiustas A. Humal. Nii jätkaski Ü. Lumiste vahel-struktuuri uurimist, kasutades abstraktse algebra ja matemaatilise loogika vahendeid, ning näitas, et 7 aksioomi abil määratud n-mõõtmeline vahelseisu mudel on isomorfne kumera piirkonnaga n-mõõtmelises lineaarruumis üle järjestatud kaldkorpuse. Sel viisil taandas ta vahelseisu mudelite klassifitseerimise lineaarselt järjestatud kaldkorpuste uurimisele.

Vaadeldes vahel-struktuuri mudelite automorfismide rühmi, eraldas ta välja n-mõõtmelise absoluutse geomeetria, s. o. lausete hulga, mis on ühine eukleidilisele ja hüperboolsele (Lobatševski) n-mõõtmelisele ruumile. Põhimõistete süsteem koosneb siin ainult kahest hulgast (punktid, liikumised) ja kahest suhtest (on vahel, paigutab). Kui silmas pidada aksiomaatiliselt ülesehitatud teooria põhimõistete hulga minimaalsuse nõuet, siis on ilmsed selle käsitluse eelised võrreldes Hilberti klassikalise süsteemiga.

Neid tulemusi on käsitletud vastavates artiklites ja ettekannetes, nende ulatuslikuma esitusena ilmus originaalne loengukonspekt.[4]

Ü. Lumiste mõtisklused geomeetria aluste teemadel hõlmavad ka kooligeomeetriat. Ta soovitab anda koolikursuse lõpus ülevaate aksiomaatikaprobleemidest. See abituriendi matemaatilist horisonti oluliselt avardav ettepanek hakkabki nüüd realiseeruma uue õppeprogrammi projekti näol. Ühtlasi osutab Ü. Lumiste liikumise mõiste ja selle korrektse käsitluse tähtsusele kooligeomeetrias.[5]

*

Üleminekul Ü. Lumiste uurimistöö juurde satume uue tunnetuse poole rühkiva teaduse eesliinile, sellele piirjoonele, mis lahutab teadaolevat suurest tundmatust. Tema sellealaseid töid suudab täiel määral mõista ainult vastava ala spetsialist. Selleks aga, et saada neist mingit ettekujutust, peab tundma diferentsiaalgeomeetria algmõisteid vähemalt ülikooli sellenimelise kursuse ulatuses.

Me ei sea siinkohal eesmärgiks anda täielikku ülevaadet kõigist Ü. Lumiste poolt selles valdkonnas saadud tulemustest, vaid püüame näidata mõtete üldisi suunitlusi ja valgustada käsitletavat probleemide ringi.

---

[4] Ü. Lumiste. Geomeetria alused I. TRÜ rotaprint, 1964.

[5] Ü. Lumiste. Liikumiste osast geomeetrias. — Loodus ja matemaatika, nr. 3, 1963.

Võib arvata, et ka diferentsiaalgeomeetria-alaste otsingute suund kasvas välja Ü. Lumiste pedagoogilisest tegevusest; püstitas ju noor õppejõud probleeme ja püüdis neid lahendada põhiliselt iseseisvalt, ilma pideva juhendamiseta. Teaduslike huvide tagasiside õppetööga on igatahes ilmne. Selle tunnistajaks on algupärane õpik[6], mille tagasihoidliku mahu juures hämmastab lugejat sisuline rikkus ja käsitluse selgus. Siingi kajastuvad autori ajalooharrastused (paljudes all- ja kõrvalmärkustes) ja moderniseerimistaotlused. Õppijat tutvustatakse juba esimestel sammudel kaasaegse diferentsiaalgeomeetria ühe võimsama meetodi — Cartani välisvormide arvutusega.

Teaduslikke uurimusi diferentsiaalgeomeetrias alustas Ü. Lumiste pinnateooriast. Kui ülikooli diferentsiaalgeomeetria kursus piirdub nn. klassikalise pinnateooriaga, milles vaadeldakse kahemõõtmelisi pindu kolmemõõtmelises eukleidilises ruumis, siis üldiselt uurib pinnateooria n-mõõtmelisi pindu mitmesuguse ehitusega N-mõõtmelistes ruumides, kus $n < N$. Laias laastus saab siin kõnelda kahest põhilisest uurimissuunast: 1) konstrueeritakse teatud objektid, mis iseoomustavad pinna ehitust, ja uuritakse neid objekte ning nendevahelisi seoseid (näit. klassikalises pinnateoorias on sellisteks objektideks pinna esimene ja teine ruutvorm, normaalkõverus antud sihis, täis- ja keskmine kõverus jt.); 2) uuritakse mingite etteantud omadustega pindade klassi.

Esialgu on Ü. Lumiste otsingud seotud põhiliselt teise suunaga. Tavaliselt järeldub pinna teadaolevatest omadustest terve rida uusi ja huvitavaid, pealiskaudsel vaatlemisel mittetabatavaid asjaolusid. (Näiteks kui kolmemõõtmelise eukleidilise ruumi pinna täiskõverus on igas punktis võrdne nulliga, siis on see pind kas koonus, silinder või mingi kõvera puutujapind). Võib ka juhtuda, et eraldatud klass osutub tühjaks, s. t. ei leidu etteantud omadustega pindu. Üldreeglina tekivad antud klassi pindade olemasolu ja ehituse uurimisel tõsised tehnilised raskused.

Ü. Lumiste tähelepanu köidavad esmajoones pinnad, mille igas punktis leidub mõni eriliste omadustega puutujasihtide süsteem. Näiteks vaatleb ta ühes oma arvukatest artiklitest kuitahes kõrge dimensiooniga päriseukleidilise või pseudoeukleidilise ruumi selliseid kolmemõõtmelisi pindu, millel leidub kolm ortogonaalset asümptootjoonte[7] parve. N-mõõtmelise ($N > 3$) ruumi pindadel asümptootjooni üldiselt ei leidu. Nad võivad esineda vaid teatud pindade klasside korral. Üht sellist klassi uuribki Ü. Lumiste, selgitades täielikult selle klassi pindade ehituse kahel lisaeeldusel: 1) kui asümptootjoonte parved ladestuvad

---

[6] Ü. Lumiste. Diferentsiaalgeomeetria, Tallinn, 1963. Sellega seoses vt. K. Ariva, M. Rahula. Esimene eestikeelne diferentsiaalgeomeetria õpik. – Matemaatika ja kaasaeg, III.

[7] Asümptootjoon defineeritakse siin sellise pinnakõverana, mille kooldumistasand on igas punktis kas määramata või kuulub pinna puutujatasandile.

pinna kolmeks ortogonaalseks kahemõõtmeliste alampindade parveks ning 2) kui kõik vaadeldavad asümptootjooned on sirged.

*

Tehes kõrvalepõikeid mitmesugustele üksikküsimustele vastamiseks jõuab Ü. Lumiste uuritavas probleemide ringis järjest üldisemate ning keerukamate ülesannete püstitamisele ja lahendamisele. Sel viisil valmib tema kandidaadidissertatsioon: «Konjugeeritud või asümptootiliste p-sihiväljadega n-mõõtmelistest pindadest».[8]

Nagu pealkirjast nähtub, vaatleb ta oma töös n-mõõtmelisi pindu (lühidalt: n-pindu), mille iga punktiga on seotud üks või mitu teatud lisatingimusi (konjugeeritus, asümptootilisus) rahuldavat p-mõõtmelist sihti pinna puutujatasandil (s. t. p-mõõtmelist alamruumi puutujavektorruumis).

Konjugeeritud ja asümptootiliste p-sihtide olemasolu eeldamine tähendab jälle teatud pindade klasside eraldamist. Kui konjugeeritud p-sihiväljade täieliku süsteemiga pindadele[9] oli juba eelnevalt pühendatud rida uurimusi (Cartan, Rõžkov jt.), siis iseendaga konjugeeritud, s. o. asümptootiliste p-sihiväljadega pindade teooria seni puudus. Seda lünka täitiski olulisel määral Ü. Lumiste väitekiri.

Töös selgitatakse esmalt selliste pindade üldkarakteristika. Tüüpilisteks tulemusteks on näiteks laused: 1) Pind, millel on k asümptootilisest sihiväljast koosnev täielik süsteem, asub oma $(k-1)$-järku kooldumistasandil, 2) kui seejuures teise kooldumistasandi dimensioon on maksimaalne, siis määrab see süsteem pinna täieliku ladestumise, s. t. mistahes $k-1$ välja alamruumide lineaarsete katete väljal on integraalpindade parv.

Edasi pööratakse tähelepanu eukleidilise ja mitteeukleidilise N-ruumi pindadele, millel on täielik süsteem isotroopsete p-sihtide konjugeeritud välju. Sellist tüüpi pind osutub mitteeukleidilises ruumis (teatud lisatingimuste korral) võimalikuks vaid siis, kui $n=2$, eukleidilises ruumis aga ka siis, kui $n>2$. Viimasel juhul ladestub pind täielikult; ilmneb veel, et on tegemist sihiväljade isotroopsete integraal-alampindade translatsioonipinnaga.

Järgnevalt käsitleb autor ortogonaalsete asümptootiliste p-sihiväljade täielike süsteemidega pindu päriseukleidilises ja elliptilises ruumis. Üksikasjalikult uurib ta juhtu, kui sihivälju on kaks ja pinna esimese kooldumistasandi dimensioon on maksimaalne.

Need põgusad märkused kajastavad vaid mõnda aspekti dissertatsioonist. Viimane kujuneb omakorda uute probleemide alli-

---

[8] О n-мерных поверхностях с сопряженными или асимптотическими полями p-направлений.

[9] p-sihiväljade süsteemi pinnal nimetatakse täielikuks, kui pinna igas punktis on süsteemi väljade alamruumide lineaarseks katteks pinna puutujavektorruum ise.

kaks. Koos üha komplitseeritumate ülesannete lahendamisega tuleb pidevalt kasvavate tehniliste raskuste tõttu sageli seada mitmesuguseid kitsendavaid eeldusi. Sellest tekivad haruprobleemid, mis mitmel juhul kutsuvad esile ulatuslikke lisauurimusi. Puudutame neist kahte.

Üheks loomulikuks kitsenduseks on nõue, et pinna asümptootjooned oleksid sirged. (Muide, pinnal asuv sirge on alati asümptootjoon.) Selle nõude üldistuseks on tingimus, et mitmemõõtmeliste asümptootiliste sihtide välja integraalpinnad oleksid tasandid. Sel viisil jõuab Ü. Lumiste tasandiliste (eri juhul sirgjooneliste) moodustajatega pindade uurimiseni. Ta otsustab nende pindade uurimisel kasutada sirge- ja tasandiparvede teooriat.

Lähtudes 3-ruumi sirgete kongruentsi (kaheparameetrilise parve) meetrilistest omadustest, töötab ta välja eukleidilise ja pseudoeukleidilise 4-ruumi kolmemõõtmeliste joonpindade (joonhüperpindade) üldise meetrilise teooria. Rida kongruentside teooria põhimõisteid kandub joonhüperpindadele üle ilma oluliste muutusteta, kuid sirgeparvede fokaalsed omadused ja ladestumine tasanduvateks alampindadeks (torsideks) nõuavad üldistamist. 1960. a. võtavadki Ü. Lumiste ja tšehhi geomeeter A. Švec teineteisest sõltumatult kasutusele vastavad üldistused — kvaasifookuse ja kvaasitorsi mõisted. Kasutades kvaasifookusi annab Ü. Lumiste 4-ruumi joonhüperpindade klassifikatsiooni. Ta uurib saadud klasse eraldi ja defineerib invariantsete normaalsihtide koonuse, mis võimaldab uurida geomeetriat joonhüperpindadel.

Järgnevalt õnnestub Ü. Lumistel osa saadud tulemusi üldistada eukleidilise ja pseudoeukleidilise N-ruumi n-mõõtmelistele joonpindadele.

Need juhendaja tööd võimaldasid L. Tuulmetsal läbi viia eukleidilise ja pseudoeukleidilise 4-ruumi joonhüperpindade mitmete klasside põhjaliku uurimise, mille ta esitas oma kandidaaditöös.

*

Teiseks uurimuste tsükliks, mis on tihedalt seotud Ü. Lumiste kandidaadiväitekirjaga, on tema artiklid minimaalpindade teooriast. Minimaalne n-pind defineeritakse kui pind, mille iga kinnise $(n-1)$-mõõtmelise kontuuriga hõlmatud osa n-mõõtmelise ruumala variatsioon on võrdne nulliga. (Juhul $n = 2$ on selline omadus näiteks traatkontuuriga piiratud seebikilel.)

Ü. Lumiste teeb rea tähelepanekuid väitekirjas vaadeldud pindade klasside ja minimaalpindade klassi vaheliste seoste kohta. Ühes artiklis uurib ta detailselt eukleidilise N-ruumi n-mõõtmelisi minimaalpindu, millel esineb asümptootiliste $(n-1)$-sihtide väli. Ta vaatleb seal eraldi juhte $n < N-1$ ja $n = N-1$ (hüperpinnad) ja saavutab rea tulemusi, mis üldistavad 3-ruumi minimaalpindade omadusi.

Hoolimata sellest, et kahemõõtmelised minimaalpinnad on pikemat aega olnud geomeetrite huviobjektiks, suudab Ü. Lumiste, vaadeldes selliseid pindu kuitahes kõrge dimensiooniga konstantse kõverusega ruumides, anda siin märkimisväärse panuse. Nii tõestab ta näiteks, et kõik kahemõõtmelise minimaalpinna normaaltasandid (küllalt kõrge dimensiooniga ruumides on pinna punktiga seotud üldiselt mitut järku normaaltasandid) on kahemõõtmelised; välja arvatud kõrgeimat järku normaaltasand, mis sõltuvalt ruumi dimensioonist võib olla ka ühemõõtmeline (sirge). Edasi näitab ta, et kõverusindikatrissid kahemõõtmelistel normaaltasanditel on ellipsid, mille keskpunktiks on pinna vaadeldav punkt; ühemõõtmelisel juhul on indikatrissiks sirglõik, mille jaoks pinna punkt on keskpunktiks. Muuhulgas leiab ta kõik konstantse täiskõverusega minimaalpinnad kuni viiemõõtmelistes ruumides. Siinjuures ilmneb, et selliseid pindu leidub ainult elliptilistes ruumides, kus nad on teatavate liikumisrühmade orbiitideks; viimast asjaolu võib tõlgendada nii, et pinna ehitus on iga punkti ümbruses ühesugune.

Edasi tõestab ta põhiteoreemi minimaalpinna ühesest määramisest tema sisemeetrika, peakõveruste ja mitmesugust järku peasihtidevaheliste nurkadega. Selle teoreemi laiendab ta ka juhule, kui kõverusindikatrissid on ringjooned ja seetõttu on peasihid määramata.

Huvitavaid tulemusi saavutab ta minimaalpindade painutamise osas. Märkida tuleks ka sellist tulemust: kahemõõtmelise minimaalpinna. k-ndatest kooldumistasanditest moodustuv pind on minimaalpind parajasti siis, kui vaadeldava pinna k-ndad kõverusindikatrissid on ringjooned.

Juhendaja tulemustest ideid ammutades valmib R. Mullaril kandidaaditöö eukleidilise ruumi mitmemõõtmeliste pindade kohta.

*

Ü. Lumiste kõige tähtsamaks teaduslikuks saavutuseks senini on tema doktoritöö. Eelnevaga võrreldes toimub selles tõus oluliselt kõrgemale abstraktsuse tasemele. Autor näitab siin, et ta on meister mitte ainult diferentsiaalgeomeetria konkreetsete üksikprobleemide lahendamisel, vaid ka nende ühendamisel ja üldistamisel ning fundamentaalse tähtsusega teooria loomisel.

Püüame anda kujutluse selle töö iseloomust. Muidugi ei paku meie ülevaade täpseid formuleeringuid, vaid piirdub kõnealuse küsimuste ringi ligilähedase kirjeldamisega.

Üleminekul mingilt üldisemalt pindade klassilt tasandiliste moodustajatega pindade klassile toimub uurimistöös oluline lihtsustumine, on ju tasandiliste moodustajatega pinna ehitus tunduvalt korrapärasem «üldise» pinna omast. Teisest küljest kasvab siit aga välja hoopis uut laadi vaateviis. «Üldine» pind on punktide kogum, punktidest koosnev muutkond; tasandiliste moodustajatega pind on tasanditest koosnev muutkond. Seega on teisel juhul «lihtsa» punkti asemel muutkonna algelemendiks oluliselt «keerukam» — tasand. Et tasand on ise punktidest koosnev muutkond, siis jõuame sel kombel muutkonnani, mille elementideks on omakorda muutkonnad.

Niisugune olukord tekib diferentsiaalgeomeetrias sageli, paljude üksteisest lahus seisvate küsimuste uurimisel. Siit tuleneb vajadus ühendada ja üldistada selles suunas tehtud üksikuurimused ning luua sel teel uus perspektiiv praegu olemasolevate teooriate arendamiseks. Sellise ülesande seadiski endale Ü. Lumiste.

Iseloomustame olukorda teisest, mõnevõrra abstraktsemast aspektist. Olgu vaatluse all mingi muutkond, mille elemente nimetame punktideks, ja selle teisenduste rühm (näiteks tasand ja ta liikumiste rühm). Rühma toimet muutkonnal nimetame transitiivseks, kui muutkonna iga kahe punkti korral leidub rühmas selline teisendus, mis viib ühe punkti teiseks (näiteks liikumiste rühm tasandil). Üldiselt võib aga rühma toime muutkonnal olla intransitiivne, s. t. muutkonna iga kahe punkti korral sellist teisendust ei leidu (näiteks pöörded tasandil ümber fikseeritud punkti). Rühma intransitiivse toime korral jaguneb muutkond orbiitideks (kihtideks), millel rühma toime on juba transitiivne. Punkti orbiidiks muutkonnal nimetatakse seejuures nende punktide hulka, mis on saadud sellest punktist rühma kõigi teisenduste toimel (tasandi pöörete korral ümber punkti on orbiitideks kontsentrilised ringjooned). Öeldakse, et rühm toimib kihil efektiivselt, kui kihi kõiki punkte samaaegselt paigalejätvaks elemendiks rühmas on ainult ühikelement. Selline kihtide hulk on vaadeldav uue muutkonnana. Kui kihid on homogeensed teisenduste rühma toime suhtes, nimetame lähtemuutkonda homogeensete kihtidega kihtruumiks ehk kihtkonnaks. Kihtkonna erijuhuks on peakihtruum. Sel korral on rühma toime kihil lihtne, s. o. kihi suvalist punkti paigalejätvaks elemendiks on ainult ühikelement.

Kihtkonna mõiste võtab kokku ja ühtlasi üldistab väga mitmesuguseid diferentsiaalgeomeetrias vaadeldavaid hulki. Kihtkondadeks on näiteks ka tasandiliste moodustajatega n-pinnad N-mõõtmelistes ruumides.

Muutkonda ennast nimetatakse sel korral homogeenseks ruumiks antud rühma suhtes. Öeldakse, et rühm toimib homogeenses ruumis efektiivselt, kui kõiki punkte samaaegselt paigalejätvaks elemendiks rühmas on ainult ühikelement. Näiteks tasand on homogeenne liikumiste rühma ja afiinsete teisenduste rühma suhtes, projektiivne tasand — projektiivsete teisenduste rühma suhtes.

Muutkonda, mis on esitatav ühesuguste homogeensete ruumide muutkonnana, nimetatakse (tõsi küll, teatavate täiendavate lisatingimuste korral) homogeenseks kihtkonnaks.

Nüüd on võimalik juba selgemalt sõnastada dissertatsiooni põhieesmärki: arendada homogeensesse ruumi sisestatud diferentseeruvate muutkondade (laias laastus — N-ruumis sisalduvate n-pindade) üldist teooriat, vaadeldes iga sellist muutkonda homogeensete alammuutkondade parvena mingis teises homogeenses ruumis sama teisenduste rühma suhtes. Uuritav muutkond selles teises homogeenses ruumis on seega kihtkond, mille kihtideks on parve alammuutkonnad.

Kihtruumide teooria on tihedalt seotud diferentsiaalgeomeetria ühe fundamentaalsema mõistega — seostusega, mille uurimisele on dissertatsioonis antud keskne osa.

Klassikalise seostuse mõiste puhul tuleb vaadelda muutkonnaga seotud reeperite kihtkonda. Nimelt saab muutkonna igas puutujaruumis lõpmata paljudel erinevatel viisidel valida reeperi (s. o. n vektorit, mis koos puutepunktiga määravad afiinse koordinaadistiku selles ruumis). Tekib kihtkond — kõigi võimalike reeperite hulk muutkonna kõigis punktides. Iga kahe reeperi korral muutkonna antud punktis leidub struktuurirühmas element (reeperi teisendus), mis viib ühe reeperi teiseks; järelikult osutuvad kihtideks reeperite hulgad üksikuis puutujaruumides. Seostus muutkonnal määrab eeskirja kihtide sidumiseks omavahel, s. o. annab eeskirja muutkonna ühes punktis võetud reeperi kandmiseks lähedase punkti reeperiks. Sellist eeskirja nimetamegi seostuseks reeperite kihtkonnas. Üldisema ehitusega kihtkondades defineeritakse seostus samuti kui teatud eeskiri lähedaste kihtide sidumiseks. Sel juhul seotakse kihtkonna iga punktiga teatav vektorite hulk (nn. horisontaalne koonus), mis vastava kihi puutujatasandiga lõikub vaid vaadeldavas punktis ning mille mõõde täiendab kihi mõõdet kogu kihtkonna mõõtmeni. Seostus tähendab siin punkti sellist liikumist ühest kihist teise, nii et liikumistee igas punktis puutub horisontaalset koonust selles punktis. Juhul kui horisontaalsed koonused on lineaarruumid, nimetatakse seostust lineaarseks.

Üldiste homogeensete kihtkondade jaoks puudus seni ühtne seostuste teooria, täpsemalt öeldes olid läbi töötamata selle teooria üldised alused, mis oleksid võimaldanud ühendada mitmete nimekate geomeetrite (Lichnerowicz, Nomizu, Kobayashi, Ehresmann jt.) vastavasuunalisi uurimusi. Ü. Lumiste doktoritöö põhieesmärgist — käsitleda homogeensete alammuutkondade parve diferentsiaalgeomeetriat — kasvab seetõttu välja uus ülesanne:

arendada üldine seostuste teooria homogeensete kihtkondade jaoks, ühendades seni tuntud eraldiseisvad tulemused sel alal.

Niisiis käsitletakse dissertatsioonis kaht küllalt ulatuslikku ja diferentsiaalgeomeetria jaoks fundamentaalse tähendusega küsimuste ringi. Seostuste teooriale on pühendatud töö neli esimest peatükki; neljas viimases esitatakse selle teooria rakendusi, mille vahendusel toimub samaaegselt eespool juba märgitud põhiproblemaatika käsitlemine.

*

Oma senises uurimistöös on Ü. Lumiste kasutanud prantsuse matemaatiku E. Cartani loodud ja Moskva koolkonnas (S. P. Finikov, G. F. Laptev jt.) oluliselt edasiarendatud välisdiferentsiaalvormide ja diferentsiaalsete jätkamiste meetodit. Nimetatud meetod on muutunud tänu eriti G. F. Laptevi töödele üheks kõige võimsamaks lokaalseks uurimisvahendiks kaasaegses diferentsiaalgeomeetrias (lokaalse käsitlusviisi puhul piirdutakse muutkonna uurimisega punkti ümbruses). Ü. Lumiste omandas selle meetodi peensusteni ja tutvus detailselt samas valdkonnas töötava prantsuse koolkonna (A. Lichnerowicz jt.) uurimustega. Teda köidab ühelt poolt Laptevi mõneti formaalse iseloomuga meetodi sügavus ja teisest küljest välismaal saadud tulemuste geomeetrilisus ning globaalsus (globaalse vaateviisi korral arendatakse geomeetriline teooria välja muutkonna jaoks tervikuna). Ta seabki oma doktoritöö üheks eesmärgiks nende suundade ühendamise.

Arendanud oma töö algosas vajaliku aparatuuri diferentseeruvate kihtruumide, ka kõrgemat järku kihtkondade struktuurirühmade käsitlemiseks, tuletab autor nende ruumide struktuurivõrrandid. Ta näitab viimaste, samuti ka G. F. Laptevi poolt 1961. a. kitsama juhu jaoks saadud struktuurivõrrandite globaalse iseloomu. Toetudes neile võrranditele uurib ta kihtruumi struktuuri ja ehitab üles seostuste teooria selle jaoks; lisaks analüüsib ta lineaarse seostuse määramise tähtsamaid viise. Töös tõestatakse, et seostus kihtkonnas määrab horisontaalse jaotuse abil seostused ka kõigis assotsieeritud kihtkondades, samuti näidatakse siin G. F. Laptevi poolt teataval erijuhul antud horisontaalse jaotuse invariantsuse tarvilike ja piisavate tingimuste globaalsus. Järgnevalt esitatakse jaotuse horisontaalsuse tingimused homogeense kihtkonna jaoks osatuletistega diferentsiaalvõrrandite abil. Lõpuks uuritakse kõveruse ja väände vorme, ka kõrgemat järku kõverusvorme, seda eriti detailselt reduktiivsete kihtidega kihtkondade puhul, näidates muuhulgas seose P. K. Raševski ja K. Nomizu sellealaste tulemuste vahel.

Asudes ülesehitatud teooriat rakendama võtab autor kasutusele kahe homogeense ruumi punktide intsidentsuse mõiste. Nagu ilmneb, on saadud paaride muutkonda võimalik vaadelda homogeensete alammuutkondade parvena, millel on homogeensete kihtidega kihtruumi struktuur. Edasi uurib ta seostuse indutseerimise probleeme selles kihtruumis. Saadud tulemused üldistavad terve rea uurijate paljusid tulemusi mitmesuguste konkreetsete homogeensete alammuutkondade parvede kohta.

Töö lõpposas esitatakse rakendusi konkreetsete muutkondade puhul. Vaadeldakse näiteks m-tasandite parve projektiivses ruumis ja uuritakse projektiivsete kihtruumide mitmesuguseid taglastusi; samuti käsitletakse siin m-sfääride kongruentse.

Prof. G. Kangro õnnitleb värsket füüsika-matemaatikadoktorit.

Ü. Lumiste teaduslik areng on kulgenud nagu mööda treppi aste-astmelt kõrgemale — üldisemate tõdede poole. Iga saavutus tema teaduslikus biograafias on osutunud lähtepunktiks uute ulatuslikumate ülesannete lahendamisele. Avardub horisont, kasvavad probleemid, süvenevad võimed. Kõigile, kes on tuttavad tema teadusliku tegevusega, on selge, et ka doktoritöö ei tähenda peatumist ja et uurija tungimine teaduse piiritutesse kaugustesse jätkub. Need aga, kellel on õnnestunud vahetult jälgida tema kasvu ja kes tunnevad tema ammendamatut optimismi, kaasakiskuvat töölusti ja kustumatut energiat, teavad, et ees ootavad veelgi suuremad saavutused.

PROF. GERHARD RÄGOT MÄLESTADES

27. juunil 1968 suri Tartu Riikliku Ülikooli matemaatika õpetamise metoodika kateedri professor-konsultant Gerhard Rägo.

See oli 1920. aasta sügisel, kui Gerhard Rägo saabus Tartu ülikooli teenistusse Novotšerkasskist, kus ta oli töötanud polütehnilises instituudis professorina matemaatika alal ja veterinaaria instituudis professorina füüsika alal. Ta oli seal lugenud analüütilise geomeetria, matemaatilise analüüsi, kujutava geomeetria ja üldfüüsika kursusi ning juhatanud vastavaid praktikume.

Prof. G. Rägo paistis oma andekusega silma juba kooliõpilasena. Nii anti talle 1908. a. pärast Tartu reaalkooli VI klassi lõpetamist Maarja gildi auhind. 1909. a. kevadel, olles lõpetanud reaalkooli täiendusklassi, sooritas G. Rägo Tartu Aleksandri gümnaasiumi juures ladina keele eksami kogu gümnaasiumikursuse ulatuses, et saada ülikooli sisseastumise õigust. Selleks tuli aga täiendavalt taotleda veel Riia õpperingkonna kuraatorilt eriluba, sest Tartu ülikooli üliõpilaseseisuse taotleja oli tollal alles 16-aastane.

G. Rägo kui üliõpilase töökuse ja andekuse näitajateks on 1910. a. detsembris hõbemedaliga autasustatud uurimus «Weierstrassi ja Mittag-Leffleri lausete osa ning tähtsus moodsas kompleksmuutuja funktsionaalteoorias» ning ülikooli lõpetamine *cand. math.* teadusliku kraadiga 1913. a. kevadel.

Tolleaegsete Tartu ülikooli professorite G. V. Kolossovi ja A. I. Sadovski soovitusel siirdus G. Rägo 1913/14. õppeaastaks Göttingeni ülikooli juurde, kus täiendas end ülemaailmselt tuntud teadlaste Carathéodory, Couranti, Hilberti, Landau ja Runge juures. Erilise tähtsusega G. Rägo edaspidiste kitsamate huvialade väljakujunemise seisukohalt oli aga töötamine Göttingeni ülikooli rakendusmatemaatika instituudis dr. v. Sandeni juhendamisel.

1914/15. õppeaastal oli G. Rägo matemaatikaõpetajaks Tartu kommertskoolis ja Žilova tütarlaste eragümnaasiumis. 1915. a.

sügisel aga siirdus ta prof. Kolossovi soovitusel tööle Novotšerkasskisse Doni polütehnilisse instituuti.

Tartu ülikoolis alustas G. Rägo tööd[1] professori kohusetäitjana rakendusmatemaatika ja mehhaanika alal. 1931. aastal nimetati ta ordinaarseks professoriks samal alal. Aastatel 1938—1940 oli prof. G. Rägo matemaatika-loodusteaduskonna dekaaniks.

Juba esimestest tööaastatest peale ilmnesid prof. G. Rägo head organiseerimisvõimed. Nii oli ta juba Novotšerkasskis mitte ainult tunnustatud lektor, vaid ka kohaliku Eesti Seltsi esimees. Tartu ülikoolis asutati tema initsiatiivil 1920. aastal Matemaatika Instituut ning prof. G. Rägo täitis selle instituudi juhataja ülesandeid kuni 1940. aastani. 1924. a., IV matemaatika ja füüsika kongressil, valiti prof. G. Rägo Eesti matemaatika õpetamise komisjoni esimeheks ning 1926. a., kui Tartus asutati Akadeemiline Matemaatika Selts, selle esimeseks esimeheks. 1926. aastast alates hakkas ta innukalt kaasa töötama ülikooli juures avatud didaktilis-metoodilises seminaris, olles algul selle abijuhatajaks, 1936.—1940. a. aga juhatajaks ning kui 1940. a. seminar ümber organiseeriti pedagoogiliseks instituudiks, sai prof. G. Rägo uue instituudi direktoriks.

Prof. G. Rägo peamiseks eesmärgiks käesoleva sajandi kahekümnendatel ja kolmekümnendatel aastatel oli koolimatemaatika ulatuslik reformimine. Ta koostas vastavad programmid ja õpperaamatud. Samal ajal ei unustanud ta ka matemaatikaõpetajate ettevalmistamise ja kvalifikatsiooni tõstmise vajadusi. Tema tegevus neil aladel on pälvinud kiidusõnu mitte ainult Tartu ülikooli matemaatikutelt, vaid ka mitmed välismaa teadlased, nagu professorid Lietzmann ja von Sanden Saksamaalt, prof. Oseen Rootsist ja Taani päritoluga prof. Westergaard Ameerika Ühendriikidest, on professor Rägole kirja teel tunnustust avaldanud.

Nõukogude võimu kehtestamise järel 1940. aastal jätkas prof. G. Rägo innukat tegevust Tartu ülikoolis. Kui siin hakati ette valmistama kaugõppeosakonna avamist, usaldati selle organiseerimine prof. G. Rägo hooleks. 1941. a. veebruarist kinnitati ta Tartu Riikliku Ülikooli õppeprorektori abiks korrespondentsõpetuse alal ning sama aasta juulist koos professorite Kure, Kipperi ja Koortiga rektori asetäitjateks õppe- ja teadusliku töö alal.

Saksa okupatsioonivõimud tagandasid prof. G. Rägo ülikooli õppejõu kohalt. Pärast pikemaid otsinguid leidis ta endale matemaatikaõpetaja koha Tallinna tehnikumis. 1943. a. lõpul tegi prof. G. Rägo läbi raske operatsiooni ning seejärel ravis ennast Kongutas.

---

[1] Vt. ka Matemaatika ja kaasaeg, XIV, lk. 87—90.

Sõjajärgsel perioodil oli prof. G. Rägo üks agaramaid Tartu ülikooli ülesehitajaid. Juba 25. augustil 1944 kinnitati ta Tartu Riikliku Ülikooli haldusprorektoriks. Sellel kohal töötas ta kaks aastat ning seejärel võttis osa Eesti NSV Teaduste Akadeemia organiseerimisest. Kuni 1950. aastani töötas ta Eesti NSV Teaduste Akadeemia Füüsika-Matemaatika-Mehhaanika Instituudi direktori asetäitjana teadusliku töö alal ja matemaatikasektori juhatajana. Nii haldusprorektorina kui sektorijuhatajana töötas ta aga oma põhitöö, Tartu Riikliku Ülikooli teoreetilise mehhaanika kateedri juhataja professori ülesannete kõrval.

Pärast Eesti Põllumajanduse Akadeemia eraldumist Tartu Riiklikust Ülikoolist 1951. a. aitas prof. G. Rägo noorel õppeasutusel organiseerida matemaatika kateedrit ning oli seejärel mitu aastat sama kateedri juhatajaks ühiskondlikus korras.

1963. a. siirdus prof. G. Rägo pensionile, jätkates tööd professor-konsultandina teoreetilise mehhaanika kateedri juures, ning kui 1965. a. eraldati sellest kateedrist matemaatika õpetamise metoodika kateeder, siis arvati prof. G. Rägo professor-konsultandina uue kateedri koosseisu.

Seega töötas prof. G. Rägo täie energiaga Tartu ülikoolis aastail 1920—1941 ja 1944—1963, s. t. üle 40 aasta. Selle aja jooksul luges ta väga mitmeid kursusi, nagu: matemaatiline analüüs, variatsioonarvutus, teoreetiline mehhaanika, hüdro- ja aero-

Prof. G. Rägo viimaselt teekonnalt.

dünaamika, tõenäosusteooria, kujutav geomeetria, statistilised meetodid, numbrilised ja graafilised meetodid, diferentsiaalvõrrandid, hulgateooria, elementaarmatemaatika kõrgemalt vaatekohalt, kõrgem matemaatika ja matemaatika õpetamise metoodika.

Esimesel tööperioodil (1920—1941) oli prof. G. Rägo töö seotud peamiselt matemaatika õpetamise küsimustega. Rakendusmatemaatika probleemid olid talle südamelähedased kogu tema töö kestel, kuid pakilisemad ülesanded surusid need kõrvale. 1929. a. kirjutaski ta oma kirjas prof. Westergaardile, et ta kavatseb lähemal ajal sõita kuni kaheks aastaks Göttingeni ja Berliini, et töötada teoreetilise mehhaanika alal. Ka vastav stipendium oli talle lubatud. Et aga samale ajale langes koolimatemaatika reformi elluviimise kõrgpunkt, siis ei saanud see sõit teoks.

Teisel tööperioodil (1944—1963) kulutas prof. G. Rägo suurema osa oma energiast organiseerimistööle ning hakkas leevendama õppekirjanduse põuda matemaatika alal kõrgemas koolis.

Matemaatika õpetamise metoodika probleemid jäid prof. G. Rägo teaduslikus töös domineerivaiks. Kokkuvõtet oma sellealasest tööst hakkas ta tegema viimastel eluaastatel, kirjutades matemaatika õpetamise metoodika käsiraamatut, mis jäi aga kahjuks täielikult lõpetamata. Tema intensiivsest töötahtest annavad tunnistust ka käsikirjadena peaaegu valminud «Kõrgem matemaatika III» ning «Statistika käsiraamat».

Prof. G. Rägo tööd on tunnustatud medaliga «За доблестный труд в великой отечественной войне 1941—1945» 27. aprillil 1946 ning Eesti NSV Ülemnõukogu Presiidiumi aukirjaga 4. detsembril 1967.

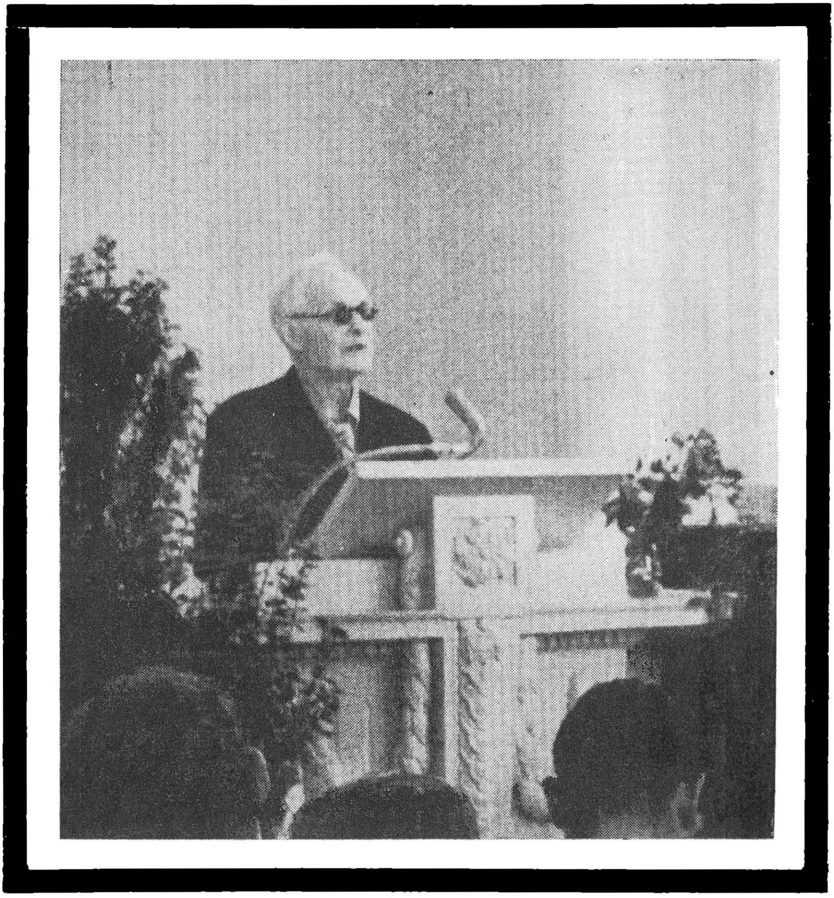
30. juunil 1968 sängitasid prof. G. Rägo endised õpilased, kolleegid ning omaksed tema põrmu maamulda Tartu Raadi kalmistule.

O. Prinits

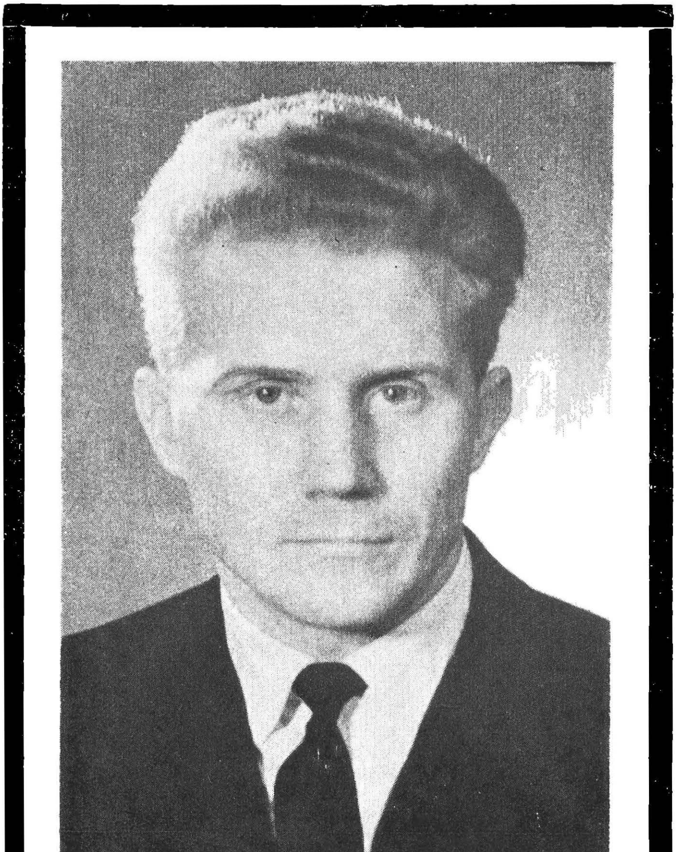
Prof. G. Rägo trükitud tööde nimestik

1. Mis on matemaatika ja milles on tema väärtus. «Noor-Eesti», 1921, 21 lk.
2. Tasapinnalise analüütilise geomeetria põhijooned. «Loodus» 1921, 143 lk.
3. Matemaatilise analüüsi elemendid. «Loodus», 1922, 176 lk.
4. Algkooli matemaatika õppekava projekt. (Kaasaotorid J. Kuulberg ja J. Nuut). — Eesti Matemaatika Õpetamise Komisjoni Toimetused, I, 1925, 30 lk.
5. Matemaatika sümboolika. (Kaasautorid O. Pärli ja J. Sarv). — Eesti Matemaatika Õpetamise Komisjoni Toimetused II, 1925, 31 lk.
6. Keskkooli matemaatika õppekava projekt. Ühes seletuskirjaga. (Kaasautor J. Nuut). — Eesti Matemaatika Õpetamise Komisjoni Toimetused, III, 1926, 86 lk.
7. Matemaatika sõnastiku täiendused ja muudatused. Lisaga: Aruanne matemaatika õpetamiskomisjoni tegevuse kohta ajavahemikus 1924—1927.

(Kaasautorid: O. Pärli, J. Sarv, D. Rootsman, A. Borkvell. — Eesti Matemaatika Õpetamise Komisjoni Toimetused, IV. 1927. 36 lk.
8. Matemaatika tööraamat keskkoolile. I klassi kursus. «Loodus», 1928, 145 lk.
9. Matematika tööraamat keskkoolile. I klassi kursus. 2. trükk. «Loodus», 1930, 157 lk.
10. Matemaatika tööraamat keskkoolile. II klassi kursus. «Loodus», 1928. 95 lk.
11. Matemaatika tööraamat keskkoolile. II klssi kursus. 2. trükk «Loodus», 1930, 95 lk.
12. Matemaatika tööraamat keskkoolile. III klassi kursus. «Loodus», 1929, 126 lk.
13. Matemaatika tööraamat keskkoolile. IV klassi kursus. «Loodus», 1930, 103 lk.
14. Matemaatika tööraamat keskkoolile. V klassi kursus. «Loodus», 1932, 115 lk.
15. Kõrgema tehnilise hariduse korraldamisest Eestis. Tartu Ülikooli väljaanne. «Postimees», 1933, 31 lk.
16. Matemaatika harjutusvihik algkoolile. VI klassi kursus. «Kool», 1935, 32 lk.
17. Matemaatika harjutusvihik keskkoolidele. Algebra. III klassi kursus. «Kool», 1935, 48 lk.
18. Matemaatika tööraamat uuele keskkoolile. «Loodus», 1936, 255 lk.
19. Algebra õpik keskkoolile. (kaasautor J. Grütnhal). «Loodus», 1938, 194 lk.
20. Algebra harjutustik keskkoolile. (Kaasautor A. Vihman). «Loodus», 1938, 210 lk.
21. Matemaatika õpik humanitaargümnaasiumile. (kaasautor E. Etverk). «Loodus», 1939, 360 lk.
22. Matemaatika harjutustik humanitaargümnaasiumile. I klassi kursus. (Kaasautor K. Ratasepp). «Loodus», 1938, 128 lk.
23. Matemaatika harjutustik humanitaargümnaasiumile. II klassi kursus. (Kaasutor K. Ratasepp). «Loodus», 1938, 108 lk.
24. Matemaatika harjutustik humanitaargümnaasiumile. III klassi kursus. (Kaasautor K. Ratasepp). «Loodus», 1939, 100 lk.
25. Matemaatika täiendusõpik gümnaasiumi reaalharu III ja IV klassile. (Kaasautor A. Ruumet). Eesti Kirjastus, 1944, 106 lk.
26. Matemaatika õpik gümnaasiumi V klassile. Eesti Kirjastus, 1943, 244 lk.
27. Matemaatika õpik keskkooli XI klassile. Eesti Riiklik Kirjastus «Teaduslik kirjandus», 1945, 243 lk.
28. Analüütiline geomeetria ja algebra keskkooli XI klassile. Eesti Riiklik Kirjastus «Pedagoogiline kirjandus», 1946, 186 lk.
29. Analüütiline geomeetria ja algebra keskkooli XI klassile. Uus trükk. Eesti Riiklik Kirjastus «Pedagoogiline kirjandus» 1948, 212 lk.
30. Kõrgem matemaatika. Õpik rakendusalaste teaduskondade üliõpilastele. Eesti Riiklik Kirjastus «Teaduslik kirjandus», 1948, 761 lk.
31. Kõrgem matemaatika. Eesti Riiklik Kirjastus «Teaduslik kirjandus», 1952, 758 lk.
32. Из жизни и деятельности четырёх замечательных математиков Тартуского университета. TRÜ. Toimetised, vihik 37, 1955, lk. 74—105.
33. Kõrgem matemaatika I. Eesti Riiklik Kirjastus, 1962, 739 lk.
34. Kõrgem matemaatika II. Eesti Riiklik Kirjastus, 1963, 588 lk.



Prof. G. Rägo viimane avalik esinemine TRÜ Matemaatikateaduskonna avamisel 1. IX 1967.



Rünno Mullari 7. XII 1931—2. XII 1968.

RÜNNO MULLARI

2. detsembril 1968 lahkus meie seast pärast pikka ja rasket haigust TRÜ Arvutuskeskuse vanem teaduslik töötaja, füüsika-matemaatikakandidaat Rünno Mullari. Ülikooli matemaatikute kollektiiv kaotas ühe oma andekama ja viljakama liikme. Vaatamata sellele, et R. Mullari sai ülikooli lõpetamise järel töötada ainult kaheksa aastat ja nendestki oli neli aastat haigevoodis, jõudis ta silmapaistvate tulemusteni kahel erialal — diferentsiaalgeomeetrias ja teoreetilises küberneetikas.

Rünno Mullari sündis 7. detsembril 1931. aastal Tallinnas pangaametniku perekonnas. Lõpetanud 1949. a. Tallinna I Keskkooli, astus ta samal sügisel Tallinna Polütehnilisse Instituuti soojusenergeetika erialale. Õpingud jäid aga pooleli. Neli aastat (1950—1954) möödusid Arhangelski oblasti metsatöölaagrites (hiljem, 1962. a. anti täielik rehabilitatsioon). Pärast vabanemist töötas R. Mullari Tallinnas, algul ehitus- ja transporditöölisena, hiljem tehases «Norma» plekitöölisena, ning astus ühtlasi 1955. a. TRÜ matemaatikaosakonna mittestatsionaarseks üliõpilaseks. Sooritanud suure eduga esimese kursuse eksamid, tuli ta üle statsionaarsesse osakonda, kus peatselt ilmnesid tema harukordsed võimed. Pärast ülikooli lõpetamist 1960. a. suunati R. Mullari tööle TRÜ Arvutuskeskusse. Siin sai temast kiiresti keskuse üks juhtivamaid uurijaid. Mõnevõrra on ta olnud seotud ka ülikooli õppetööga: 1961/62. õ.-a. täitis ta geomeetria kateedris õppeülesannet, lugedes kaugõppe-üliõpilastele diferentsiaalgeomeetriat. See aine kujunes R. Mullari lemmikalaks juba üliõpilaspõlves. Diferentsiaalgeomeetriast olid kirjutatud tema silmapaistvad auhinnatööd ja diplomitöö, sellelt alalt oli tema kandidaadiväitekiri «Uurimusi eukleidilise ruumi mitmemõõtmeliste pindade teooriast», mis valmis töö kõrval kolme aastaga ja mille kaitsmine toimus 1964. a. veebruaris. Samal aastal kinnitati R. Mullari arvutuskeskuse vanema teadusliku töötaja kohale. Juba varem oli temast kujunenud keskuse ühe töörühma juhendaja, kes suunas uurimusi tööstuse planeerimise ja juhtimise matemaatiliste meetodite alal ning kirjutas ise sellesisulisi kaalukaid artikleid. Kuigi R. Mullari jätkas tööd mitmemõõtmeliste pindade teooria probleemide juures ka järgnevail aastail, kujunes tema tegevuse põhisuunaks viimasel neljal aastal teoreetiline küberneetika.

Paljud tema viimastest töödest on koostatud koos juhendatava töörühma liikmetega.

R. Mullari oli aktiivne osavõtja mitmest konverentsist nii geomeetria alal (Kiiev 1962, Vilnius 1963, Harkov 1964, Tartu 1965) kui majandusmatemaatika alal (Moskva 1962, Leningrad 1963 ja 1964, Tartu 1963 ja 1966). Ta on kirjutanud mitmeid eredaid sügava filosoofilise sisuga artikleid matemaatika ja tegelikkuse, mõtlemise ja masinate vahekorrast (vt. [16], [17], [39], [34]), sekkunud julgelt poleemikasse ajakirjanduse veergudel. Oma ennastohverdavat tööd ei katkestanud ta ka haiguse teravnemisel. Kahel korral (1957 ja 1964) tuli tal üle elada keerukas operatsioon. Esimene neist tõi ajutise kergenduse, teine säilitas elu. Viimasel neljal aastal ei saanud ta ise teha sammugi. Kuid isegi voodisse aheldatuna jäi ta arvutuskeskuse juhtivaks uurijaks. Tähtsaimad teaduslikud nõu- ja plaanipidamised keskuse töö küsimustes toimusid sellal R. Mullari haigevoodi juures. Temalt käis abi ja nõu saamas enamik arvutuskeskuse töötajaid. Teda külastanud sõbrad, töökaaslased ja üliõpilased, keda ta juhendas, leidsid ta alati optimistlikuna, täis energiat ja vestlusvalmidust.

Rünno Mullari kursusekaaslaste seas.

Kõiki üllatas ta oma sügavate arutlustega ja uute originaalsete ideedega. Tarka ja tagasihoidlikku suhtumist ellu, kunsti, teadusse elustas sageli varjatud ja peen huumor. Sügavat austust äratasid tema sirgjoonelisus ja mehisus, vankumatu hingejõud ja meelekindlus, millega ta ületas suurimadki raskused. Trotsides kõiki kannatusi suutis ta väheste aastate jooksul endast anda uskumatult palju. Tema elu ja looming oli ning jääb paljusid innustavaks kangelasteoks. Mälestus temast ei kustu sõprade ja töökaaslaste südameis.

*

R. Mullari uurimused diferentsiaalgeomeetrias käsitlevad eukleidilise ruumi mitmemõõtmeliste pindade teooria küsimusi. Juba tema diplomitöö «Pinna peasihtide uurimine» oli küps uurimus, mille mitmed tulemused on avaldatud hilisemates publikatsioonides. R. Mullari märgib, et m-mõõtmelise pinna peasihi mõiste, mille võttis kasutusele J. A. Schouten 1924. a., on leidnud vähe rakendusi. Ta läheneb sellele mõistele uuelt vaatekohalt. Tema käsitlust võib geomeetriliselt iseloomustada järgmiselt. Antud m-mõõtmelise pinna kahes punktis M ja M' tuleb võtta m-mõõtmelised puutujatasandid ja nendel leida sihid, mille vahele jääva nurga koosinusel on statsionaarne väärtus. Kummalgi tasandil moodustub sellistest sihtidest paarikaupa täielikult ortogonaalsete alamruumide süsteem. Selle süsteemi piirasendi alamruumide sihid sõltuvad ainult sihist, milles M' liigub pinnal punktini M, ning Mullari nimetab neid peasihtideks viimase suhtes. Ta leiab algebralise süsteemi nende määramiseks [3]. Siht, mis on peasihiks iseenda suhtes, on iseloomustatud sellega, et pinna normaalkõverusvektori skalaarruut on selles sihis statsionaarne. Kui siin skalaarruut asendada pikkusega, siis on vastav siht peasiht Schouteni mõttes.

Kui puutujatasandi kõik sihid on peasihtideks antud sihi suhtes, siis nimetab Mullari viimast pinna parataktiliseks sihiks, kui aga antud siht on peasiht puutujatasandi iga sihi suhtes, siis — absoluutseks peasihiks. Ta tõestab [1], et kahemõõtmeline absoluutne peasiht ja selle ortogonaalne täiend puutujatasandil moodustavad kaassihtide süsteemi. Tangentsiaalselt mittekõdunud pind sellise süsteemiga on translatsioonipind. Teistest erijuhtudest uurib Mullari lähemalt ühemõõtmeliste absoluutsete peasihtide täieliku süsteemiga pindu, millel selle süsteemi iga kaks sihti on lisaks veel kaassihid. Nende erijuhuks on, nagu selgub, m-mõõtmelised Cliffordi pinnad hüpersfääril (kui elliptilises ruumis).

Vaadeldes pindu, mille punktides kõik sihid on peasihid (kolmemõõtmelises eukleidilises ruumis on sellisteks tasand ja sfäär), jõudis Mullari huvitava pindade klassini, mille pindu ta nimetas maksimaalselt sümmeetrilisteks [4, 5]. Viimased kujutavad endast eukleidilise ruumi R_n liikumiste $\frac{1}{2}m(m+1)$-parameetriliste alamrühmade m-mõõtmelisi orbiite. Sellist orbiiti, mis asub oma k-ndat järku kooldumistasandis, tähistab Mullari $S_m{}^k$. Ta leiab üldise Pfaffi süsteemi, mis määrab pinna $S_m{}^k$ ning integreerib selle juhul $k=1$. Sfääri kõrval saab $S_m{}^1 \subset R_n$ (kus

$n = \frac{1}{2}m(m+3)$, mis asetseb hüpersfääril viimase minimaalpinnana. Juhul $m = 2$ oli sellise S_2^1 varem leidnud O. Boruvka 1928. a. (üldise m puhul, nagu hiljem selgus, ka D. Blanuša ja A. S. Solodovnikov). Mullari uurib lisaks pinnale S_m^1 selle p-mõõtmeliste geodeetiliste alampindade tsentrite poolt moodustatavaid pindu.

TRÜ rektor õnnitleb R. Mullarit väitekirja kaitsmise puhul.

Need tulemused said aluseks R. Mullari kandidaadiväitekirjale [9]. Selle publitseerimata osadest märgime parataktiliste sihtidega pindade uurimist (tulemused on analoogilised absoluutsete peasihtidega pindade puhul saaduile) ja pindu S_m^k määrava Pfaffi süsteemi integreerimist juhul, kui pinna S_m^k 3-ndat järku normaaltasandi mõõde ei ületa arvu 1. Lisaks tasandile ja sfäärile saadakse täpselt neli tüüpi selliseid pindu.

Iseseisvat huvi pakub Mullari poolt kasutatav aparaat — Bartels-Frenet' valemid uuel ja mugaval kujul m-mõõtmelise pinna jaoks (vt. [9], [10] ja [24]; viimases antakse nende üksikasjalik tuletus).

Järgnevates uurimustes pöörab R. Mullari tähelepanu kahele ülesandele. Tunnetanud normaalkõverusindikatrisside olulist osa m-mõõtmeliste pindade teoorias võtab ta nad eraldi uurimise objektiks. Tulemusi esitas ta II üleliidulisel geomeetria konverentsil [13], nende põhjalikum käsitlus antakse töödes [24], [28] ja [35]. Mullari leiab indikatrissi kui algebralise pinna järgu ning tasandi, millel ta asetseb; uurib kõveraid indikatrissil, mis saadakse puutujatasandi sihi pööramisel mingis kahemõõtmelises sihis; annab teoreemi puutujatasandi sellise lineaarkujutuse isomeetrilisusest, mis indutseerib antud järku indikatrissi isomeetria.

Teise ülesandena vaatleb R. Mullari m-mõõtmelise pinna normaaltasandite kongruentsi mähispinda. Esialgse kokkuvõtte tulemustest teeb ta II Balti geomeetria konverentsil [19], üksikasjalikum käsitlus on antud töödes [24], [28] ja [37]. Sellised mähispinnad on tihedalt seotud kõverusindikatrissidega. Selgub näiteks, et mainitud mähispind eksisteerib ainult siis, kui esimest järku normaalkõverusindikatrissi tasand ei läbi pinna vastavat punkti, kusjuures võib anda lihtsa konstruktsiooni tema punkti leidmiseks selle tasandi järgi.

Oma viimases posthuumselt avaldatud töös pinnateooriast [37] ei rahuldu R. Mullari veel oma tulemuste esitustega eelmistes publikatsioonides, vaid töötab need põhjalikult ümber, tehes seejuures mitmeid täiendavaid uurimusi, ning võtab sel viisil kokku olulisema oma kandidaaditööle järgnenud töödest diferentsiaalgeomeetria alal.

Suurem osa R. Mullari trükis ilmunud töödest tutvustab tema küberneetika-alaste uurimuste tulemusi. Eeskätt on need seotud just matemaatiliste meetodite ning kaasaegse arvutustehnika rakendamisega tootmise planeerimisel või juhtimisel.

Oma esimestes töödes selles valdkonnas ([6], [7], [8], [11]) käsitles Mullari vastavate ülesannete matemaatilisel sõnastamisel kerkivaid küsimusi ja selgitas vajalikke põhisõltuvusi. Samal ajal võttis ta aktiivselt osa ka saadud tulemuste järkjärgulisest praktikasse juurutamisest ning üldse elektronarvutite tegelikust kasutamisest tehase või tema üksikute tsehhide töö planeerimisel (ülevaade mõnede selliste tööde tulemustest on avaldatud artiklites [12], [14], [20], [21] [25], [26] ja [35]).

Nende esimeste tööde ning vastava juurutustegevuse käigus kujunesid R. Mullaril ja tema kaastöölistel juba mõningad üldised seisukohad ning kavandusid ka konkreetsemad lähenemisviisid kalendrilise planeerimise ülesannete matemaatilisele lahendamisele (vt. [15], [18], [22] ja [36]). Nende uurimuste käigus väljatöötatud üldise skeemi kohaselt peab üleminek kogemuslik-intuitiivsetelt planeerimis- ja juhtimismeetoditelt matemaatilistele toimuma tingimata etapiviisiliselt, juhtimise üksikelementide järkjärgulise formaliseerimise teel. Üksikasjalikumalt ning täpsustatult esitas R. Mullari need ideed artiklis [30], eriti aga ulatuslikus artiklis [38], mis osalt jäi küll mustandisse ning mille lõplikku vormistamisega tegelevad tema lähemad kaastöölised.

Üheks olulisemaks küsimuseks kalendrilise planeerimise ülesannete lahendamisel on juhuslikkuse osatähtsuse arvestamise viis. Ägedalt võitles R. Mullari niisuguste üsna levinud seisukohtade vastu, mille kohaselt juhuslikkust ignoreerides püüti pikemaiks ajavahemikeks ette koostada rangeid kalendrilisi graafikuid. Mullari näitas, et selliste graafikute täitmise nõue osutub tootmist segavaks, mitte seda soodustavaks faktoriks. Vastukaaluks esitas ta niisuguste nn. orienteerivate graafikute koostamise idee, milles juhuslikke suurusi arvestatakse nende keskväärtuste ja jaotusseaduste kaudu. Vastavate jaotusseaduste selgitamist ning uurimist pidas Mullari esmajärgulise tähtsusega ülesandeks, pühendades viimastel aastatel nendele küsimustele oma põhitähelepanu. Sealjuures toonitas ta korduvalt, et nende seaduspärasuste selgitamine ei saa ega tohi toimuda mingi konkreetse ettevõtte tegeliku tootmise jälgimise teel. Saadavate tulemuste ühekülgsuse vältimiseks otsustas Mullari kasutada tootmise käigu imiteerimist vastavate küberneetiliste mudelite abil. Nende uurimuste tulemustest jõudis ta avaldada artiklid [29] ja [31], kus muuhulgas näiteks antakse ooteaegade hinnangud (mis osutuvad praktikaga paremini kooskõlas olevateks, kui seda on Hintšini tuntud valemist saadavad hinnangud), tõestatakse orienteerivate graafikute meetodi mitmeid eeliseid, uuritakse ning võrreldakse tööde forsseerimise vorme jne.

Peale tehase või tsehhi töö planeerimise ja juhtimisega seotud küsimuste analüüsimise võttis R. Mullari aktiivselt osa ka mitmetest teistest majandusküberneetika-alastest uurimustest. Nii näiteks loodi just tema ideedele tuginedes uus originaalne bilansimaatriksite pööramise meetod (vt. [23], [27]), mis juba mitme aasta vältel leiab tegelikku kasutamist tööstusharudevahelise bilansi koostamisel nii Eesti NSV-s kui ka teistes Balti vabariikides. Samuti võib märkida täisarvuliste planeerimisülesannete uut lahendusmeetodit [32], milles Dantzigi lihtne idee on oskuslikult seostatud mõningate kombinatoorsete võtetega.

Rünno Mullari koos abikaasaga.

Kuigi nimetatud uurimused jätkuvad nüüd juba ilma Rünno Mullari isikliku osavõtuta, võib teda täie õigusega lugeda ka paljude tulevaste tööde kaasautoriks. Niivõrd rohkesti originaalseid ideid jättis ta oma kaastöötajatele, jäädes ise neile alaliseks eeskujuks oma mehisuse, tööarmastuse ja mõttejulgusega.

Ü. Kaasik, Ü. Lumiste

R. MULLARI TRÜKIS ILMUNUD TÖÖD[1]

1. О поверхностях с полями абсолютно главных направлений. TRÜ Toimetised, vihik 102, 1961, lk. 275—288.
2. Matemaatiliste meetodite kasutamisest tehaste juhtimisel ja planeerimisel. ENSV matemaatikute ja füüsikute II teaduslik-pedagoogilise konverentsi lühiettekannete kogumik. Tartu, 1962, lk. 64—67.
3. О главных направлениях m-мерной поверхности. Доклады АН СССР, т. 144, № 5, 1962, lk. 989—992.
4. О максимально симметричных поверхностях многомерного евклидова пространства. Первая всесоюзная геометрическая конференция 25 мая — 2 июня 1962 г. Тезисы и аннотации обзорных докладов и кратких сообщений. Киев, 1962, lk. 73.
5. О максимально симметричных поверхностях многомерного евклидова пространтсва. TRÜ Toimetised, vihik 129, 1962, lk. 63—73.
6. О планировании работы механических цехов. Научные труды (Московский инженерно-экономический институт), 1962, вып. 19, lk. 186—191 (kaasautor Ü. Kaasik).
7. Matemaatiliste meetodite rakendamisest tööstusliku tootmise planeerimisel. — «Eesti Kommunist», 1962, nr. 7, lk. 38—44 (kaasautor L. Võhandu).
8. Matemaatiliste meetodite rakendamisest tehase töö kalendrilisel planeerimisel. Majandusliku analüüsi alane teaduslik konverents 11.—13. okt. 1963. Teesid. Tartu, 1963, lk. 23—25 (kaasautor Ü. Kaasik).
9. Исследования по теории многомерных поверхностей евклидова пространства. Автореферат дисс. на соискание учен. степ. канд. физ.-мат. наук, 1963, 7 lk.
10. Формулы Френе для многомерной поверхности. Тезисы доклада Первой Прибалтийской геометрической конференции по вопросам дифференциальной геометрии. Литовский математический сборник, т. 3, № 2, 1963, lk. 242.
11. К задаче календарного планирования работы цеха. Тезисы докладов межвузовской научной конференции «Применение математики и электронно-вычислительной техники в экономике». Ленинград, 1963, lk. 46—48.
12. Majandusmatemaatika-alaseid töid Tartu Riikliku Ülikooli Arvutuskeskuses. — Matemaatika ja kaasaeg, II, 1964, lk. 47—50 (kaasautorid: Ü. Kaasik, E. Saareste).
13. Индикатрисы кривизны. Тезисы докладов Второй Всесоюзной геометрической конференции. Харьков, 1964, lk. 182—183.
14. Расчеты загруженности станочного парка завода. Труды Вычислительного центра Тартуск. ун-та, 1964, № 4, lk. 3—67 (kaasautorid: S. Luht, M. Rahendi, M. Krull).
15. Kalendrilise planeerimise ülesannete matemaatiline lahendamine. — Matemaatika ja kaasaeg, III, 1965, lk. 40—47 (kaasautor Ü. Kaasik).
16. Matemaatika ja tegelikkus. — Matemaatika ja kaasaeg, VIII, 1965, lk. 3—11.
17. Masinad ja mõtlemine. — Matemaatika ja kaasaeg, IX. 1965, lk. 40—51.
18. Matemaatiliste meetodite rakendamisest tehase töö kalendrilisel planeerimisel. TRÜ Toimetised, vihik 169, 1965, lk. 55—62 (kaasautor Ü. Kaasik).
19. Огибающая конгруэнции нормальных к $V_m \subset R_n$ плоскостей. Материалы Второй Прибалтийской геометрической конференции по вопросам дифференциальной геометрии. Тарту, 1965, lk. 126—129.

[1] Selles nimekirjas on esitatud kõik käesoleva kirjutise autoritele teada olevad trükis avaldatud R. Mullari tööd (peale ajaleheartiklite).

20. Механическое составление производственных заданий. Труды Вычислительного центра Тартуск. ун-та, вып. 6, 1965, lk. 11—31 (kaasautorid: M. Krull, S. Luht).

21. О календарном планировании работы литейного цеха. Труды Вычислительного центра Тартуск. ун-та, вып. 6, 1965, lk. 32—50 (kaasautorid: A. Sikk, V. Tinn).

22. О подходе к математическому решению задач текущего планирования. Труды Вычислительного центра Тартуск. ун-та, вып. 6, 1965, lk. 1—10 (kaasautor Ü. Kaasik).

23. Об одном методе обращения балансовых матриц. TRÜ Toimetised, vihik 177, lk. 159—164 (kaasautor J. Tapfer).

24. Индикатрисы кривизны и огибающие нормальных плоскостей для v_m в евклидовом R_n. I. TRÜ Toimetised, vihik 192, 1966, lk. 47—64.

25. К задаче календарного планирования работы цеха. Труды Ленингр. инж.-экон. ин-та, вып. 58, 1966, lk. 142—145 (kaasautor Ü. Kaasik).

26. Механическое составление производственных заданий. Всесоюзная конференция «Использование математики и вычислительной техники в экономике». Тезисы докладов. Тарту, 1966, lk. 39—40 (kaasautor S. Luht).

27. Расчеты на ЭВМ. Методы составления и анализа вариантов планового межотраслевого баланса республики. Таллин, 1966, lk. 137—142 (kaasautor J. Tapfer).

28. Индикатрисы кривизны и огибающая нормальных плоскостей многомерной поверхности евклидова пространства. II. TRÜ Toimetised, vihik 206, 1967, lk. 22—36.

29. Имитирование работы цеха на ЭВМ. Труды Вычислительного центра Тартуск. ун-та, вып. 11, 1967, lk. 21—67 (kaasautor U. Pragi).

30. Производство — управление — ЭВМ. Труды Вычислительного центра Тартуск. ун-та, вып. 11, 1967, lk. 3—20 (kaasautor I. Saarniit).

31. Форсаж работы и отклонения при запуске детале-партий (имитирование на ЭВМ). Труды Вычислительного центра Тартуск. ун-та, вып. 14, 1968, lk. 3—45 (kaasautor U. Pragi).

32. К решению задач целочисленного линейного программирования. Труды Вычислительного центра Тартуск. ун-та, вып. 14, 1968, lk. 46—59 (kaasautor V. Allsalu).

33. Kaks pähklit majandusküberneetikale katkihammustamiseks. — Matemaatika ja kaasaeg, XV, 1968, lk. 48—52.

34. Kiri «Matemaatika ja tegelikkuse» autorile. Matemaatika ja kaasaeg, XV, 1968, lk. 127—128.

35. Механическое составление производственных заданий. Сборник «Применение экономико-математических методов в ЭВМ в управлении промышленным предприятием». Москва, 1968, lk. 260—264 (kaasautor S. Ermann).

36. О подходе к математическому решению задач текущего планирования. Сборник «Применение экономико-математических методов и ЭВМ в управлении промышленным предприятием». Москва, 1968, lk. 412—416 (kaasautor Ü. Kaasik).

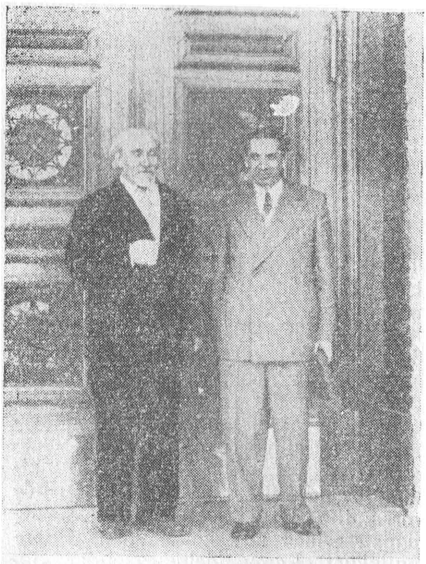
37. К теории многомерных поверхностей евклидова пространства. Индикатрисы кривизны, главные направления, эволюты. Труды Вычислительного центра Тартуск. ун-та, вып. 16, 1968, lk. 3—111.

38. Построение на заводе «машинной» системы текущего управления производством. Труды Вычислительного центра Тартуск. ун-та, вып. 17, 1969,

Matemaatiline päevakaja

PROFESSOR I. K. ANDRONOV 75-AASTANE

J. Gaiduk, O. Prinits



Prof. I. K. Andronov ja dots. J. M. Gaiduk.

3. juunil 1969 sai 75-aastaseks NSVL Pedagoogika Teaduste Akadeemia korrespondeeriv liige, Vene NFSV teeneline teadlane, Moskva oblasti N. K. Krupskaja nim. Pedagoogilise Instituudi professor Ivan Kozmitš Andronov.

I. K. Andronov sündis Novosili linnas Tuula kubermangus. Pedagoogilist tegevust alustas ta juba pärast keskkooli lõpetamist. Erihariduse omandas ta õpetajate instituudis ja Moskva P. G. Šelaputini nim. Pedagoogilises Instituudis. 1920. a. sai temast pedagoogilise õppeasutusena tegutseva Pedagoogilise Akadeemia õppejõud. 1925. a. omistati talle aga juba professori kutse. Alates 1930. a. kuni tänaseni töötab prof. Andronov Moskva oblasti Pedagoogilises Instituudis, juhatades kõrgema algebra, elementaarmatemaatika ja matemaatika õpetamise metoodika kateedrit. Alates 1957. a. on ta Pedagoogika Teaduste Akadeemia korrespondeeriv liige.

Koolimatemaatika areng nõukogude koolis on suurel määral olnud mõjustatud prof. Andronovi tegevusest. Ta on olnud kaastegev juba esimeste koolimatemaatika programmide väljatöötamisel ning viimastel aastatel populaarse matemaatika õpetamise metoodika alase seminari juhatajaks Pedagoogika Teaduste Akadeemia juures, kus arutatakse koolimatemaatika moderniseerimise küsimusi.

Teaduslik produktsioon on prof. Andronovil seotud hulktahukate teooriaga ning matemaatika ja matemaatika õpetamise ajaloo küsimustega. Viimasesse valdkonda kuulus ka tema ettekanne 1966. a. Moskvas toimunud rahvusvahelisel matemaatikute kongressil.

I. K. Andronovi tööd on hinnatud Lenini ja Tööpunalipu ordeni vääriliseks. 75. sünnipäeva puhul autasustati prof. Andronovit N. K. Krupskaja medaliga.

Kuigi prof. Andronov ei ole seotud otseselt koolimatemaatika arenguga Eestis, on tema positiivne suhtumine siinsetesse püüdlustesse selle edasiminekuks siiski kaudselt kaasa aidanud. Am tl'ku ononendina jagas ta kiitust Eesti Põllumajanduse Akadeemia vanemõpetaja Sinaiida Riivese väitekirjale.

Kuigi keeleküsimused mõningaid raskusi valmistavad, nimetab prof. Andronov ennast siiski ka «Matemaatika ja kaasaja» lugejaks.

SERGEI LVOVITŠ SOBOLEV[1]

J. I. Gilderman ja T. I. Zelenjak

6. oktoobril 1968 tähistas matemaatika üldsus silmapaistva nõukogude matemaatiku akadeemik S. L. Sobolevi 60. sünnipäeva ja 40-aastast teaduslikku ja pedagoogilist tegevust.

S. L. Sobolevi hiilgav matemaatiline talent avaldus juba väga varakult. Oma esimese teadusliku töö kirjutas ta Leningradi ülikooli üliõpilasena, kus tema õpetajateks olid Peterburi matemaatikakoolkonna silmapaistvad esindajad professorid N. M. Günter ja V. I. Smirnov. Selle kooli traditsioonid on seotud P. L. Tšebõšovi, A. M. Ljapunovi, V. A. Steklovi, A. A. Markovi, S. N. Bernšteini, I. M. Vinogradovi jt. nimedega. Nende traditsioonide väärikaks jätkajaks kujunes S. L. Sobolev.

S. L. Sobolevi esimene loominguperiood on seotud töötamisega NSVL TA Seismoloogia Instituudis Leningradis. Oma selle aja töödes andis Sobolev normaalselt hüperboolset tüüpi võrrandi Cauchy ülesande lahendamiseks printsipiaalselt uue meetodi, mis kajastab selle ülesande füüsikalist olemust. Ta konstrueeris nõndanimetatud regulaatori, mis võimaldab taandada lähteülesande hoopis lihtsamale ülesandele — Volterra integraalvõrrandi lahendamisele. S. L. Sobolev koos V. I. Smirnoviga lõid uue funktsionaalselt invariantsete lahendite meetodi, mis võimaldas lahendada rea tähtsaid probleeme hüperboolset tüüpi võrrandite kvalitatiivses teoorias.

Neis ja järgnevais uurimustes võttis Sobolev kasutusele matemaatilises analüüsis printsipiaalselt uue mõiste — üldistatud funktsiooni mõiste, määratledes selle kui funktsionaali teatavat arvu tuletistega funktsioonide ruumis. Seda mõistet kasutades andis ta uue meetodi teist järku lineaarsete normaalselt hüperboolset tüüpi võrrandite Cauchy ülesande lahendamiseks üldistatud funktsioonide klassis, luues sellega nende võrrandite tervikliku teooria ja demonstreerides uue kontseptsiooni loomulikkust. Samu ideid rakendas Sobolev edukalt ka difraktsiooniteooria-alastes uurimustes. Tänapäeval etendab üldistatud funktsioonide teooria olulist osa teoreetilises füüsikas, samuti osatuletistega diferentsiaalvõrrandite üldise teooria reas küsimustes.

1934. aastal siirdus S. L. Sobolev Moskvasse, asudes juhtima Teaduste Akadeemia V. A. Steklovi nim. Matemaatikainstituudi diferentsiaal- ja funktsionaalvõrrandite osakonda. Siin jätkas ta osatuletistega diferentsiaalvõrrandite teooria alaseid uurimusi. Tähtsaks panuseks selles teoorias on Sobolevi tööd elliptilist tüüpi diferentsiaalvõrrandite alal. Neis töödes on uuritud seoseid ruumide W_p vahel, mida nüüd nimetatakse Sobolevi ruumideks. Nende ruumide sisestamise

[1] Käesoleva kirjutise saatsid «Matemaatika ja kaasajale» J. I. Gilderman ja T. I. Zelenjak Novosibirskist. Vene keelest tõlkis E. Tamme.

teooria võimaldas Sobolevil variatsioonmeetodite abil püstitada ja lahendada elliptilist tüüpi võrrandite rajaülesandeid, kasutades seejuures üldistatud lahendeid, mis on Lebesgue'i mõttes integreeruvad koos oma tuletistega kuni teatava järguni. Seejuures osutus võimalikuks anda selliste lahendite korral lubatavate rajatingimuste täielik kirjeldus.

Hinnates lahendeid ruumide W_p normides lahendas Sobolev hüperboolset tüüpi kvaasilineaarse võrrandi Cauchy ülesande ja uuris lainevõrrandi segaülesannete kvalitatiivseid omadusi. Ta võttis kasutusele funktsionaalruumid, mis osutusid lahendite aprioorsete hinnangute tuletamisel ja seejärel üldiste funktsionaalanalüüsi meetodite rakendamisel kõige sobivamateks. Sobolevi ruumid W_p osutusid sobivateks ka matemaatilise füüsika võrranditega seotud mitmete probleemide lahendamisel ja nende võrrandite kvalitatiivse teooria loomisel. Funktsionaalruumide sisestamise teooria on tänapäeval tähtis matemaatilise analüüsi osa ja seda kasutavad paljud nõukogude ning välismaa matemaatikud osatuletistega diferentsiaalvõrrandite uurimisel.

S. L. Sobolev on palju tähelepanu pühendanud rakenduslikele ülesannetele. Tema uurimused vedelikuga täidetud õõnsa vurri teoorias viisid uute suundade tekkimisele osatuletistega diferentsiaalvõrrandite alal ja funktsionaalanalüüsis. Vurri stabiilsuse uurimisel kasutas Sobolev oluliselt enesekaasoperaatori mõistet indefiniitse meetrikaga ruumis. Sellega seoses püstitas ta probleemi: konstrueerida vastavate spektraalülesannete üldistatud lahendid ja kasutada neid vastavate evolutsioonivõrrandite kvalitatiivsel uurimisel. Selle problemaatika väljaarendamine etendas edasises olulist osa üldistatud omafunktsioonide järgi reaksarendiste teoorias.

Tähtsal kohal Sobolevi uurimustes on arvutusmatemaatika-alased tööd. Ta oli üks esimesi nõukogude matemaatikuid, kes kasutas elektronarvuteid rakenduslike ülesannete lahendamisel. Tema esitatud sügav analüüs viis arvutusalgoritmi sulundi mõisteni, mis võimaldab hinnata antud algoritmi omadusi.

1958. a. siirdus S. L. Sobolev tööle Novosibirskisse. Neil aastail suundusid tema teaduslikud huvid kubatuurvalemitele kordsete integraalide arvutamiseks. Uurides valemi viga kui funktsionaali mitmesugustes funktsionaalruumides, taandas ta selle funktsionaali leidmise ülesande polüharmoonilise võrrandi lahendamisele, kusjuures võrrandi paremaks pooleks on üldistatud funktsioon. Kasutades enda loodud üldistatud funktsioonide aparaati ja sisestamise teoreeme, selgitas Sobolev optimaalsete kubatuurvalemite iseloomu, tuletas vea funktsionaali normi hinnanguid, mis võimaldas teha rea tähtsaid järeldusi optimaalsete kubatuurvalemite ning nendes valemites kasutatavate võrkude ja kordajate iseloomu kohta. Paljude aastate uurimuste tulemused on koondatud tema trükis olevasse fundamentaalsesse monograafiasse «Теория кубатурных формул».

S. L. Sobolevi teaduslikud saavutused on leidnud laia teadusliku üldsuse tunnustuse. 1933. a. valiti ta NSVL TA korrespondentliikmeks, 1939. a. — tegevliikmeks. Sobolev on Pariisi Teaduste Akadeemia tegevliige, paljude ühingute ja akadeemiate liige, mitmete Nõukogude Liidu ja välismaa ülikoolide professor (1935. aastast on ta Moskva ülikooli professor). Akadeemik Sobolevi kirjutatud monograafiad ja õpikud on terve põlvkonna nõukogude matemaatikute igapäevasteks käsiraamatuteks ning neid on tõlgitud mitmetesse keeltesse. Sealjuures suudab Sobolev intensiivse teadusliku uurimistöö edukalt ühendada ulatusliku pedagoogilise ja ühiskondliku tegevusega.

Ühena Siberi teadusliku keskuse loomise initsiaatoritest organiseeris ta matemaatika instituudi, mis oma olemasolu 10 aasta jooksul on Sobolevi juhtimisel kasvanud üleliiduliseks ja rahvusvahelise tähtsusega matemaatikakeskuseks.

Nõukogude valitsus on kõrgelt hinnanud S. L. Sobolevi teaduslikku, pedagoogilist ja organisaatorlikku tegevust. Ta on riikliku preemia laureaat, sotsialistliku töö kangelane, teda on kuuel korral autasustatud Lenini ordeniga.

AKADEEMIK LEV PONTRJAGIN 60-AASTANE

Ü. Lumiste

Viimastel aastakümnetel võib kogu maailma matemaatika-alases kirjanduses sageli leida termineid — «Pontrjagini duaalsuseseadus», «Pontrjagini klassid», «Pontrjagini maksimumprintsiip» jt. Teadlaseks, kelle nimega on seotud need mõisted, on silmapaistev nõukogude matemaatik, NSVL TA akadeemik Lev Semjonovitš Pontrjagin.

Sündinud 3. septembril 1908 Moskvas ametniku perekonnas, tuli tal oma haridusteed alustada mitte gümnaasiumis, isegi mitte märksa odavamas reaalkoolis, vaid lihtrahvale mõeldud linnakoolis. Noormees oli 14-aastane, kui juhtus suur õnnetus — plahvatuse tagajärjel kaotas ta nägemise, mida ei õnnestunud enam kunagi taastada. Ainult tänu ema ennastsalgavusele, kes faktiliselt võttis oma õlgadele poja isikliku sekretäri kohustused, lugedes talle ette teaduslikku kirjandust, vormistades trükiks tema loomingut, parandades teoste korrektuurpoognaid jms., ei läinud noorukis peituv talent kaotsi nõukogude ja maailma teadusele.

Õnnetus ei pidurdanud õpinguid ja 1925. a. asus L. Pontrjagin juba 16-aastase noormehena Moskva ülikoolis matemaatikat õppima. Kohe ilmnesid tema ainulaadsed võimed ja huvide laius. Erilise tähelepanuga kuulas ta topoloogia, diferentsiaalgeomeetria ja tensoranalüüsi ning algebra loenguid. Hämmastusega jälgisid kaasüliõpilased, kuidas ta jättis meelde tensorarvutuse keerulisemaidki valemeid ainult kuulmise järgi, midagi üles märkimata. Peamiseks huvialaks kujunes tal ülikoolipäevil topoloogia ning lähimaks õpetajaks P. S. Aleksandrov. Eelviimasel kursusel avaldas L. Pontrjagin oma esimesed kaks uurimust, milles andis Alexanderi duaalsuseseadusele esialgu tugevama ning seejärel üldistatud kuju. Siit sai alguse tema esimene topoloogia-alaste uurimuste tsükkel, mille tipuks on 1932. a. — juba pärast ülikooli lõpetamist (1929) tõestatud klassikaline tulemus, mis seob eukleidilise ruumi iga tõkestatud kinnise hulga Betti rühmad selle täiendi Betti rühmadega. Seda tuntaksegi «Pontrjagini duaalsuseseadusena».

Selle seaduse tõestamisel töötas L. Pontrjagin välja kommutatiivsete rühmade karakterite teooria, mille loomine suunas tema teaduslikud huvid uude valdkonda — tollal alles arenevasse topoloogilisse algebrasse. Ka siin saavutas ta silmapaistvaid tulemusi. Ta selgitas täielikult kompaktsete rühmade ja kommutatiivsete rühmade struktuuri, tõestas, et ainsateks lokaalselt kompaktseteks sidusateks kaldkorpusteks on reaal- ja kompleksarvude korpused ning kvaternioonide kaldkorpus. Klassikalises Lie' rühmade teoorias õnnestus tal lahendada E. Cartani poolt seatud ülesanne: arvutada välja nende Betti rühmad.

Pärast ülikooli lõpetamist sai L. Pontrjagini põhitöökohaks NSVL TA Matemaatikainstituut (praegu V. A. Steklovi nimeline) Moskvas. Alates 1935. a. on ta doktor ja ühtlasi ka Moskva ülikooli professor. Oma uurimused topoloogilise algebra alal võttis L. Pontrjagin kokku monograafias «Pidevad rühmad», mis ilmus 1938. aastal ja tõlgiti otsekohe inglise keelde. Suureks tunnustuseks tehtud tööle oli L. Pontrjagini valimine 1939. a. NSVL TA korrespondentliikmeks. Kahe aasta pärast, 1941. a. sai autor mainitud teose eest riikliku preemia laureaadiks. Hiljem, 1954. a. valmis raamatu teine, täiendatud väljaanne, mis tõlgiti ka saksa keelde. See monograafia jääb alatiseks matemaatilise kirjanduse klassika kullafondi.

L. Pontrjaginile kuuluvad väärtuslikud tulemused ka topoloogia dimensiooniteoorias. Mainime siin tema huvitavaid näiteid «dimensioonivaegusega» kontiinumite (ehk nn. «Pontrjagini pindade») kohta, millega ta lükkas ümber hüpoteesi dimensioonide liitumisest mistahes kompaktide topoloogilisel korrutamisel. Sellest peale sai selgeks homoloogilise dimensiooni mõiste otstarbekus ja vajadus arendada selle teooriat. Homotoopilise topoloogia valdkonnas klassifitseeris L. Pontrjagin ($n+k$)-mõõtmelise sfääri kujutused n-mõõtmelisse sfääri, kui $k=1$, 2 ning tõi juhu $k \geqslant 3$ käsitlemisel sisse diferentseeruva muutkonna karakteristlikud klassid, mida praegu tuntakse Pontrjagini klassidena [1].

Alustanud juba 1930. aastail mõne esialgu episoodilise tööga võnkumiste ja reguleerimise teooria alal, organiseeris L. Pontrjagin 1952. aastal seminari selle teooria sügavamaks uurimiseks. Ilmnes tema talendi uus külg — oskus vormistada loodusteaduste ja tehnika vajadustest tulenevaid matemaatilisi ülesandeid. Seminari tuumik saavutas kiiresti edu, mille tulemusena kujunes nn. «Pontrjagini maksimumprintsiibile» tuginev optimaalsete protsesside teooria.

Alates 1958. aastast on L. Pontrjagin NSVL TA akadeemik. Koos kaastöötajatega kirjutatud monograafia «Optimaalsete protsesside matemaatiline teooria» (1961) ilmumisele järgnes 1962. a. Lenini preemia omistamine autorite kollektiivile. L. Pontrjaginit on autasustatud ka mitmete ordenite ja medalitega, sealhulgas Lenini ordeniga.

[1] Hiljuti saavutas noor nõukogude matemaatik S. P. Novikov seoses nende karakteristlike klassidega silmapaistva tulemuse, tõestades, et Pontrjagini klassid on invariantsed diferentseeruva muutkonna mistahes homöomorfismi korral (vt. Matemaatika ja kaasaeg, XIV, lk. 107).

AKADEEMIK SERGEI NATANOVITŠ BERNŠTEIN

M. Abel

27. oktoobril 1968 lakkas tuksumast 20-nda sajandi silmapaistva matemaatikaklassiku füüsika-matemaatikadoktori NSVL Teaduste Akadeemia akadeemiku S. Bernšteini süda.

S. Bernštein sündis 6. märtsil (22. veebruaril) 1880 Odessas teadlase perekonnas. Ta õppis Prantsusmaal Sorbonne'i ülikoolis, mille lõpetas 1899. a. Pärast ülikooli lõpetamist töötas S. Bernštein mõned aastad Pariisis ja seejärel Göttingenis 1905. a. tuli ta tagasi Venemaale, juba teaduste doktorina. Sellele vaatamata tuli tal 1906. a. sooritada Peterburis magistrieksamid ning kaitsta magistriväitekiri, mida ta tegigi Harkovis a. 1908. Füüsika-matemaatikadoktori nimetus omistati S. Bernšteinile 1913. a. 1925. a. valiti S. Bernštein Ukraina NSV Teaduste Akadeemia liikmeks ning 1929. a. NSVL Teaduste Akadeemia akadeemikuks. Alates 1933. aastast elas ta Leningradis, kus töötas kuni Suure Isamaasõjani. Pärast sõja lõppu asus teadlane Moskvasse elama.

Akadeemik S. Bernšteini loomingulised uurimused kuuluvad peamiselt matemaatilise analüüsi, funktsiooniteooriasse ning tõenäosusteooriasse. Kõigis neis matemaatika valdkondades tegeles ta kõige raskemate ja olulisemate probleemidega, tuues uusi, originaalseid ideid.

Akadeemik S. Bernštein on funktsioonide lähendamise teooria looja. Ta on kirjutanud rea töid funktsioonide lähendamisest algebraliste ja trigonomeetriliste polünoomidega. Seejuures ta ei piirdunud üksnes vaadeldava probleemi täieliku lahendamisega, vaid nägi selle probleemi uusi uurimissuundi, näidates funktsiooni $f(x)$ diferentsiaalsete omaduste ja tema parimate lähendite jada $E_n(f)$ kahanemiskiirusevahelist sõltuvust, püstitades ja lahendades terve rea funktsioonide lähendamise teooria põhiprobleeme. Nende uurimustega oli rajatud alus uuele suunale analüüsis, mida akadeemik S. Bernštein nimetas konstruktiivseks funktsiooniteooriaks.

Eriline koht tema töödes on reaalmuutuja analüütiliste funktsioonide uurimisel. Ta näitas, et mistahes analüütiline reaalmuutuja funktsioon on esitatav kahe absoluutselt monotoonse funktsiooni, (s. o. samamärgiliste tuletistega funktsioonide) vahena. Samuti kuulub talle terve rida uurimusi kvaasilineaarsete funktsioonide teooria ja elliptilist tüüpi osatuletistega diferentsiaalvõrrandite teooria vallast. Tema tööd tõenäosusteooriast kuuluvad väga erinevatesse suundadesse, nagu tõenäosusteooria aksiomaatika, normaalse korrelatsiooni põhjendamine üldise korrelatsiooniteooria abil, tõenäosusteooria rakendamine bioloogia ja majanduse küsimustesse ja tõenäosusteoreetiliste meetodite kasutamine funktsioonide lähendamise teoorias.

Akadeemik S. Bernštein võttis aktiivselt osa ka ühiskondlikust elust. Teda on autasustatud Tööpunalipu ordeniga ja Lenini ordeniga.

S. Bernšteini sulest on ilmunud ligi 300 teaduslikku tööd. 1941. a. omistati talle NSV Liidu riiklik preemia. Tema tööde erilist tähtsust rõhutab see, et isegi 20-nda sajandi alguses kirjutatud tööd on säilitanud kaasajal oma aktuaalsuse.

Akadeemik S. Bernšteini valimine Pariisi Teaduste Akadeemia välismaiseks liikmeks 1955. a. (korrespondeerivaks liikmeks juba 1928. a.) näitab ilmekalt tema silmapaistvate uurimuste tähtsust ülemaailmses ulatuses.

NSVL Teaduste Akadeemia otsusega avaldati tema tööd neljaköitelise kogumikuna (1952—1964), kusjuures võõrkeelsed artiklid esitati venekeelses tõlkes.

EESTI NIMEKATEST KOOLIMATEMAATIKUTEST

ehk

4 × 70 1 × 60

E. Luht, E. Meidla, O. Prinits

Eesti koolimatemaatika esimesed võrsed pärinevad möödunud sajandi algusest, kui trükist ilmusid esimesed eestikeelsed matemaatika kooliraamatud. Tolleaegsed pastorid Peter Hinrik Frey ja Otto Wilhelm Masing oma matemaatika kooliraamatutega taotlesid maarahva lastele aritmeetiliste tehete ja tol ajal kehtinud keerukate mõõtude süsteemi õpetamist.[1]

Eesti rahvusliku ärkamisaja perioodil olid matemaatika õpetamise eesmärgid juba avaramad. Ühelt poolt taotleti eestlastele ulatuslikumate matemaatikaalaste teadmiste andmist, mis hõlmasid küsimusi ka algebra ja geomeetria valdkonnast. Teiselt poolt tõusid päevakorrale matemaatika õpetamise metoodikaga seotud

[1] Lähemalt vaata. L. Võhandu. Vanemast eestikeelsest matemaatilisest kirjandusest. — Matemaatika ja kaasaeg, III, lk. 62—67.

probleemid. Vastavate raamatute autoriteks olid nüüd peamiselt koolmeistrid, nagu J. Kapp, J. Kurrik, R. Kallas ja J. Tülk.[2]

Kolmas periood meie koolimatemaatika arengus algab esimese eesti matemaatikakongressiga 1917. aastal ja jätkub Eesti Matemaatika Õpetamise Komisjoni tegevusega käesoleva sajandi kahekümnendatel ja kolmekümnendatel aastatel. Sellel perioodil on koolimatemaatika arengu juhtijaiks ainult kõrgema haridusega matemaatikud, professorid J. Sarv, G. Rägo ja J. Nuut,[2] kelle juhtimisel mitte ainult ei töötatud välja ja rakendatud ellu uued koolimatemaatika programmid koos nende juurde kuuluvate õpikutega, vaid pandi alus ka matemaatikaõpetajate ettevalmistamisele eesti kooli jaoks. Professorite J. Sarve, G. Rägo ja J. Nuudi tööd on jätkanud ja arendanud nende õpilased. Suurt tööd on nad teinud juba 30-ndatel aastatel, eriti aga sõjajärgsel perioodil, mis moodustab neljanda etapi meie koolimatemaatika arengus. Mitmed silmapaistvaist koolimatemaatikuist on käesoleval aastal jõudnud verstapostideni, mis väärivad tagasivaadet.

---

[2] Lähemalt vaata. Ü. Lumiste Lehekülgi matemaatika ajaloost Eestis. — Matemaatika ja kaasaeg, IV, lk. 70—81.

* * *

Elmar Etverk sündis 23. juulil 1899. a. Virumaal Vihula vallas Salatse külas Madi talus. Algharidusе sai ta Vihula ministeeriumikoolis, keskhariduse Viru maakonna Rakvere

reaalgümnaasiumis. Seejärel töötas E. Etverk Vihulas algkooliõpetajana. 1922. aastal astus ta Tartu ülikooli ja lõpetas selle Matemaatika-Loodusteaduskonna 1928. aastal. E. Etvergi edasine pedagoogiline tegevus on seotud Tallinna koolidega, kus ta töötas matemaatikaõpetajana gümnaasiumis ja õpetajate seminaris, oli koolide inspektoriks ja Westhomi-nimelise eragümnaasiumi direktoriks. Pärastsõjajärgsel perioodil on ta töötanud peamiselt kõrgemas koolis. Lühemat aega täitis E. Etverk õppejõu ülesandeid Tartu Riiklikus Ülikoolis ja Tallinna Pedagoogilises Instituudis, pikemat aega aga Tallinna Polütehnilises Instituudis. 1968. a. siirdus E. Etverk pensionile.

E. Etverk on oma otseste pedagoogiülesannete kõrval suurt tähelepanu osutanud koolimatemaatika edasiarendamisele ja matemaatika õpetamise metoodikasse puutuvatele küsimustele. Kolmekümnendatel aastatel oli ta üheks matemaatika töövihikute koostajaks nii algkoolile kui ka keskkoolile. Tema peamiseks huvialaks kujunes pikemaks perioodiks geomeetria õpetamine koolis. Esimesed tema poolt kirjutatud geomeetria kooliraamatud ilmusid 1936. aastal ning neile järgnevate uute trükkide järgi õpetati eesti koolis geomeetriat kuni 1948. aastani. E. Etverk tõlkis eesti keelde D. Perepjolkini «Elementaargeomeetria kursuse» I ja II osa ning koos A. Vihmaniga

V. Bradise matemaatika õpetamise metoodika käsiraamatu. 1957. a. märtsis avaldas E. Etverk pärast tema nimetamist haridusministeeriumi matemaatika ainekomisjoni esimeheks ajalehes «Nõukogude Õpetaja» programmilise artikli «Matemaatika õpetamine nõuab ümberkorraldamist». On suurel määral E. Etvergi teene, et meie koolides likvideeriti tol ajal ülestõstetud kitsaskohad ning on kehtestatud uued programmid ja õpikud. Ka praegu, kus viiakse ellu koolimatemaatikas ulatuslikumat reformi kui kunagi varem, on sm. Etvergi teadmised, oskused ja kogemused need, millele tugineb see reform Eesti koolis. E. Etvergi poolt on trükis avaldatud ca 70 töövihikut (välja arvatud kordustrükid), ca 20 õpikut (välja arvatud kordustrükid), ca 10 metoodikaalast artiklit ja 5 tõlkeõpikut. Nimetagem siinkohal näiteks koos Chr. Brülleri, A. Brülleri, E. Pavelsoni, P. Partsi ja J. Undiga väljaantud «Matemaatika vihikuid» kõigile algkooli klassidele, koos R. Matiiseni, O. Paasi, K. Ratassepa ja J. Grüntaliga kirjutatud harjutusvihikuid «Matemaatika keskkoolis» I, II, III ja IV klassile, koos G. Rägoga koostatud «Matemaatika õpikut humanitaargümnaasiumile», tema geomeetriaõpikuid ning kõrgema kooli üliõpilastele kirjutatud brošüüre «Piirväärtus ja pidevus», «Read», «Vektorarvutus ja ruumi analüütiline geomeetria» ning koos kolleegidega Tallinna Polütehnilisest Instituudist koostatud «Õpik keskkooli matemaatikakursuse kordamiseks», aga samuti mitmeid väga sisukaid artikleid ajakirjas «Nõukogude Kool», nagu «Täheliste kordajatega võrrandite lahendamisest seitsmeklassilises koolis», «Kordamisest matemaatika õpetamisel keskkooli vanemates klassides», «Arvjärjendi ja tema piirväärtuse käsitlemisest 9. klassis», «Trigonomeetriliste võrrandite käsitlus X klassis», «Ruutvõrrandite graafiline lahendamine ja graafiline uurimine», «Hulgateooria elemente koolimatemaatikasse» ja «Naturaalarvud ja tehted nendega».

Akadeemik A. Humal ja teised E. Etvergi kolleegid Tallinna Polütehnilisest Instituudist iseloomustavad sm. E. Etverki tema 70. sünnipäeval järgmiselt:

Oma poolesajandilise tegevuse vältel on teinud juubilar õppetööd väga laias diapasoonis ning on näidanud üles suurt meisterlikkust.

Oma heatahtlikkusega, oma sirgjoonelisusega, oma nõudlikkusega iseenda suhtes, oma eluprintsiibiga kõikides situatsioonides jääda ausaks — on ta võitnud kõige siirama austamise ja täieliku usalduse kõigilt kolleegidelt.

Ja lõpuks veel üks omapära: tema talupoegsus, igas olukorras tahab ta seista maa peal kahe jalaga; siira heameelega näeb ta paranemist ja ta süda lausa valutab, kui läheb halvemini; ja igasugustele palmidele ja rododendronidele eelistab tema kodukandi võsastikku.

* * *

Tallinna Pedagoogilise Instituudi matemaatika ja füüsika kateedri õppejõud sm. **Arnold Vihman** on sündinud 23. märtsil 1899. a. Virumaal Paasvere vallas. Alghariduse sai ta Rahkla külakoolis ja Simuna algkoolis, keskhariduse aga Rakvere poeglaste gümnaasiumis, mille lõpetas 1920. aastal. Samal aastal astus Arnold Vihman Tartu ülikooli matemaatikat õppima. Majandusliku kitsikuse tõttu katkestas ta 1922. a. õpingud ülikoolis ja asus tööle matemaatikaõpetaja kohusetäitjana Väike-Maarja gümnaasiumis. 1927. a. jätkas A. Vihman õppimist Tartu ülikoolis ja lõpetas selle 1930. a. *cum laude*. Järgnesid tööaastad matemaatikaõpetajana Paides, Rakveres ja Tallinnas. Sõjajärgsel perioodil on Arnold Vihmani peamiseks tööülesandeks olnud õpetajate ettevalmistamine ja juba töötavate õpetajate teadmiste ja oskuste täiendamine. A. Vihman töötas 1946. a. Vabariiklikus Õpetajate Täiendusinstituudis metoodikuna. 1947. a. alates aga hakkas ta tööle Tallinna Õpetajate Instituudis ja pärast selle ümberorganiseerimist pedagoogiliseks instituudiks jätkas seal töötamist matemaatika kateedri õppejõuna. Praegugi on A. Vihman Tallinna Pedagoogilise Instituudi üks lugupeetavamaid ja auväärsemaid õppejõude.

Arnold Vihmani tegevus matemaatika õpetamise metoodikuna sai alguse 1936. aastal, kui ta koos A. Borkvelli, A. Kasvandi, F. Laarensi, K. Maasiku ja O. Paasiga kirjutas seeria keskkooli matemaatikaõpikuid. Need olid: «Keskkooli aritmeetika» I ja II osa, «Keskkooli algebra» I ja II osa ning «Keskkooli geomeetria» I, II ja III osa. Sama autorite kollektiivi koosseisus andis A. Vihman välja «Kontrolltöid keskkoolile» I, II, III ja IV osa. Matemaatikaõpikute standardiseerimise perioodil kolmekümnendate aastate lõpul koostas A. Vihman koos prof. G. Rägoga «Algebra harjustustiku keskkoolile». 1940. a. tõlkis ta koos K. Ratassepaga eesti keelde N. Rõbkini trigonomeetria õpiku «Tasapinnaline trigonomeetria».

Sõjajärgsel perioodil ilmusid A. Vihmani poolt koostatud «Matemaatika õpik VI klassile», «Matemaatika õpik VII klassile», «Algebra õpik VIII klassile», «Algebra õpik IX klassile». Kui 1948. a. ühtlustati eesti koolide programmid Vene NFSV koolides kehtivatega, siis tõlkis A. Vihman eesti keelde A. Kisseljovi õpiku «Stereomeetria», N. Šapošnikovi ja N. Valtsevi «Algebra ülesannete kogu» ning 1957. a. koos E. Etvergiga V. Bradise metoodika käsiraamatu «Matemaatika õpetamise metoodika keskkoolis».

1957. a. loodi ENSV Haridusministeeriumi juures matemaatika ainekomisjon ja selle liikmeks nimetati ka A. Vihman. Koos A. Lintsiga avaldas ta 1957. a. mais ajalehes «Nõukogude Õpetaja» programmilise artikli «Geomeetria kursus peab algama 8. klassist». Üldse on A. Vihman avaldanud ca 25 mitmesugust matemaatika õpetamise metoodika, aga ka matemaatika ajaloo valdkonda kuuluvat artiklit. Olgu siinkohal loetletud mõned ajakirjas «Nõukogude Kool» ja ajalehes «Nõukogude Õpetaja» avaldatud artiklid: «7. klassi lõpetajate oskuste tasemest matemaatikas», «Vigade märkimisest matemaatika kirjalikes töödes», «Nimega arvudega arvutuste üleskirjutustest», «Kordamine matemaatikatunnis», «Võrratuste käsitlemisest 7. klassis», «Vaatlused geomeetria õpetamisel», «Omavalmistatud õppevahenditest matemaatika õpetamisel», «Arendada õpilaste ruumilist kujutlusvõimet», «N. I. Lobatševski — suuri vene teadlasi», «135 aastat Tšebõševi sünnist».

Koolimatemaatika reformimisest, mis toimus meil eesti koolis ajavahemikus 1958—1967, võttis A. Vihman aktiivselt osa, olles üheks autoriks uutele õpikutele V kuni X klassini. Eriti populaarseks sai aga tema poolt 1964. aastal koostatud «Arvutuslükatil arvutamise õpetus algajaile». Kokku on A. Vihman seni olnud autoriks ca 25 keskkooli matemaatikaõpikule ja ülesannete kogule.

Juubelitervituses oma kolleegile märgivad Tallinna Pedagoogilise Instituudi matemaatika ja füüsika kateedri õppejõud:

Suur osa vabariigi matemaatikaõpetajaid on A. Vihmani õpilased. Nad õnnitlevad juubilari ja soovivad veel palju viljakaid tööaastaid!

* * *

Mu mütsil on kolm nurka,
kolmnurkne on mu müts.

Sedakorda on aeg 70 a. juubeliks kätte jõudnud meie matemaatikute, eriti koolimatemaatikute peres laialt tuntud pedagoogil **Arvo Lehisel,** kes oma töö- ja kogemusterikka elu juubeli täpseks daatumiks loeb uue kalendri järgi 15. maid 1969. a.

Arvo Lehise õpetajatöö on kestnud juba üle 40 aasta. Algas see töö 1928. a. Võru Õpetajate Seminaris, jätkus 1930. aastal Rakvere Õpetajate Seminaris ja 1932.—1944. a. Tartu Õpetajate Seminaris. Edasi töötas ta 1945.—1950. a. Tartu haridusosakonna inspektorina, seejärel õpetajana Tartu keskkoolides. 1959.—1965. a. täitis A. Lehis Tartu Kaugõppekeskkooli direktori ülesandeid ja praegu töötab samas koolis õpetajana. Koolimatemaatikuna on A. Lehisel tulnud täita rida teisigi ülesandeid. Ta on olnud õpetajate suvekursustel lektoriks, õpetajate täienduskursuste juhatajaks, Tartu matemaatikakomisjoni esimeheks ja ENSV Haridusministeeriumi matemaatikakomisjoni liikmeks. Juba see lühike loetelu iseloomustab A. Lehise töö mitmekesisust ja vitaalset aktiivsust matemaatika õpetamisel ja selle korraldamisel, eriti sõjajärgsel perioodil.

Õpetajana on juubilar oma õpilased viinud matemaatika algtõdede tunnetamiseni järjekindla ja nõudliku töö kaudu. Aga vähe sellest — ta on suutnud oma õpilastele selgeks teha ka niisuguse tõe, et matemaatika abil võib isegi vene keele sõnade käänamise ära õppida. Ja kuigi kõigist juubilari õpilastest pole saanud matemaatikuid, on ta neile jätnud aastaid püsivad matemaatikatõed ja nõudliku vastutustunde enese suhtes.

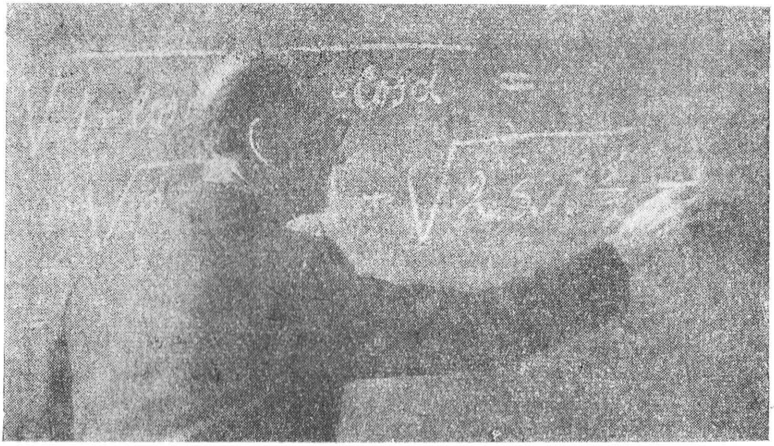
Metoodikuna on juubilar oma kolleegide poolt kõrgelt hinnatud. Aastaid on ta jaganud oma kogemusi nii oma noorematele kolleegidele kui ka tema juures praktikal olnud TRÜ Matemaatikateaduskonna üliõpilastele. Oma metoodilisi kogemusi on ta andnud edasi ajakirjades «Teel Töökoolile», «Nõukogude Kool» ning ajalehes «Nõukogude Õpetaja» ja rakendanud neid 1934. a. ilmunud V—VI kl. «Matemaatika töövihikutes» 1948. a. IV kl. «Matemaatika õpikus» ning koos J. Kallaku ja A. Kasvandiga 1959. a. ilmunud V kl. õpikus «Matemaatika».

Nii õpetajana kui ka metoodikuna on A. Lehis olnud alati abivalmis, lähenenud oma õpilastele ning noorematele kolleegidele inimliku sõbralikkuse ja arusaamisega. Kui sinna juurde lisada veel temas peituv huumorimeel, siis võib kindlalt öelda, et sellisena on ta kas teadlikult või ebateadlikult olnud abiks paljudele nende raskustes ja kõhklemistes.

Kollektiivi liikmena ja kaasõpetajana on juubilar alati hingega osa võtnud ühistest üritustest, aktiivselt hea seisnud ikka selle eest, et töö laabuks järjest paremini. Temale usaldatud ülesandeid on ta täitnud sellise kohusetundlikkusega, mis pole olnud eeskujuks ainult ta õpilastele, vaid ka stiimuliks kolleegidele.

A. Lehist on korduvalt autasustatud aukirjaga. 1957. a. anti talle rinnamärk «Haridustöö eesrindlane» ja 1959. a. ENSV teenelise õpetaja austav nimetus.

* * *



Boris Henrichson sündis 13. III 1899. a. Läti NSV-s Aluksne linnas. Alghariduse ja huvi matemaatika vastu sai Boris Henrichson kaasa vanaisalt, kes oli füüsika-matemaatika õpetaja. 1909. a. alustas B. Henrichson õpinguid Pärnu Gümnaasiumis, I maailmasõja päevil õppis ta kooli evakueerimise tõttu Novgorodis ning 1916.—1918. a. jälle Pärnus. 1918. a. oli B. Henrichson Tartusse evakueeritud Riia Linna Gümnaasiumi õpilane ning 1919. a. sügisel lõpetas ta Tartus Vene Õpetajate Ühingu Gümnaasiumi.

Lapsepõlves tekkinud kiindumus matemaatika vastu ei kadunud ka gümnaasiumi päevil. Seda kasutasid sageli B. Henrichsoni klassivennad, kes tulid temalt abi paluma keerukamate ülesannete lahendamiseks.

20-aastase noorukina alustas B. Henrichson Tartus matemaatika eratundide andmist ja omandas sellel alal kiiresti väga suure tunnustuse. Ta andis tunde vene, eesti, saksa ja juudi keeles. Juubilari enda arvates andis ta Tartus 25 aasta jooksul oa 50 000 eratundi.

1945. a. sügisel kutsuti Boris Henrichson tööle Viljandi II Keskkooli kutselise matemaatikaõpetajana. Töö kõrval õppides lõpetas ta 1955. a. Tallinna Õpetajate Instituudi matemaatika erialal. Kuni käesoleva ajani on tema käe all lõpetanud Viljandi II ja I Keskkooli ca 2500 noort. Kõigile neist on B. Henrichson kaasa andnud paraja hulga teadmisi matemaatikast ning head mälestused inimesest, kes raske aine oskas neile küllalt lihtsaks ja huvitavaks teha. Mitmed tema endistest õpilastest on saanud tunnustatud teadlasteks, nagu Leo Ainola, Raul Üksvärav, Lembit Roots jt.

Boris Henrichson on esinenud paljudel pedagoogilistel lugemistel nii meie vabariigis kui ka Leningradis ja Moskvas. Samuti on ta esinenud Tartu Riikliku Ülikooli matemaatika õpetamise metoodika seminaris. Tema tähtsamateks töödeks on:

1) eksponentfunktsioon arvutusvahendina;
2) tehted juurtega;
3) pöördkehade ruumalade ja pindalade arvutamine Guldini valemite abil;
4) ülesannete lahenduste kontrollimine;
5) ülesannete lahenduste vormistamise nõuded.

Neist 2 esimest on Eesti Vabariikliku Õpetajate Täiendusinstituudi poolt trükis avaldatud. Lisaks eelnevale on Boris Henrichson töölisnoorte keskkooli VIII klassi matemaatika õpiku ja IX kl. kontrolltööde kogumiku kaasautor.

Boris Henrichsonile on omistatud teenelise õpetaja austav nimetus ja teda on autasustatud haridustöö eesrindlase rinnamärgiga.

Tunnustuse on B. Henrichsoni töö võitnud meie kõrgemates õppeasutustes, kus ollakse teadlik, et B. Henrichsoni ja tema kolleegide poolt ettevalmistatud noored on tublid nii vabariiklikel täppisteaduste olümpiaadidel kui ka vastuvõtueksamitel.

Suure lugupidamise on B. Henrichson saavutanud ka spordikohtunikuna.

Vaatamata oma 70 eluaastale töötab Boris Henrichson praegu C. R. Jakobsoni nim. Viljandi I Keskkoolis, kus ta oma tööarmastuse, täpsuse ja huumoriga on eeskujuks kõigile teistele kolleegidele.

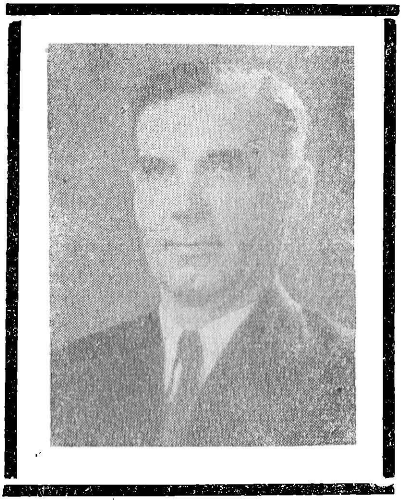
* * *

Meie koolide esimestes klassides on kasutusele võetud uus programm ja sellele vastavad õpikud. Teostatud reformi peamiseks initsiaatoriks ja uute õpikute autoriks on ajalehe «Nõukogude Õpetaja» toimetuse liige **Alfred Lints.** Et kindlustada hulga mõiste ja võrratuste kasutamist algklassides ning võita kõik kahtlused, mis uue aine käsitlemise juures on üles kerkinud, selleks on A. Lints avaldanud artiklite seeriaid ajalehes «Nõukogude Õpetaja» ja olnud lektoriks paljudel algklasside õpetajate nõupidamistel.

Alfred Lints sündis 24. jaanuaril 1909. aastal. Oma alghariduse sai ta Kohila ja Hageri algkoolis. Pedagoogi elukutse omandas ta Tallinna Õpetajate Seminaris, mille lõpetas 1929. aastal. Järgnes töö õpetajana Tallinnas, mille kõrval A. Lints jätkas õpinguid Tartu ülikoolis. 1941.—1946. aastani oli A. Lints Nõukogude armees. Pärast demobiliseerimist töötas ta Haridus- ja Kultuuritööliste Ametiühingu Vabariikliku Komitee esimehena ning Tallinna Keskrajooni TSN Täitevkomitee aseesimehena. Seejärel oli ta ühe aasta Tallinna 13. kooli direktoriks ning 1952. aastast kuni tänaseni töötab ta «Nõukogude Õpetaja» toimetuses, olles täitnud nii vastutava sekretäri, toimetaja asetäitja kui ka osakonnajuhataja ülesandeid. Põhitöö kõrval täitis A. Lints aastatel 1952—1959 Vabariiklikus Õpetajate Täiendusinstituudis matemaatika kabineti metoodiku ülesandeid. Haridusministeeriumi matemaatikakomisjoni asutamisest alates (1957. a.) on A. Lints olnud selle komisjoni sekretär.

A. Lints on osa võtnud 10 matemaatikaõpiku, 10 matemaatika töövihiku ja 5 metoodilise kirja koostamisest. Tema tööd on hinnatud mitme medaliga. Arvestades A. Lintsi suuri teeneid koolimatemaatika arendamisel, autasustati teda 60. sünnipäeva puhul N. K. Krupskaja medaliga.

ENN NURMISTET MÄLESTADES



Üldtuntud haridustegelane ja tehnilise hariduse edasiarendaja Enn Nurmiste suri Tallinnas 3. märtsil 1968. a.

Enn Nurmiste oli iseloomult erakordselt impulsiivne, tema elamusterikas ettekandmisviis matemaatikas lausa sütitas noori. Tal ei puudunud millalgi taktitunne ja tasakaal ka kõige käredamail vaidlusmomentidel. Ta oskas leida õige tee ja juhtida vaidlusi probleemi lahendusele kasuks.

Ei lähe meelest tema praktiline suhtumine oma kutsesse. Kõik oma pikemad välissõidud tehnilise hariduse tundmaõppimise otstarbel tegi ta laeva masinistina-tehnikuna. See näitas tema otsest tööarmastust vaevanõudvates ülesannetes.

Raudteeametniku pojana õppis ta Pihkva eraalgkoolis (1901—1904), Pihkva gümnaasiumis (1904—1912) ja Tartu ülikoolis matemaatika erialal (1912—1918).

Õpetajana on ta töötanud paljudes Tallinna koolides, olnud mitmete aastate vältel Eesti Õpetajate Liidu ja Tallinna Õpetajate Seltsi juhatuses. Peale selle on ta juhatanud Linna tehnikagümnaasiumi (1919—1920), Riigi tehnikagümnaasiumi (1925—1929), Tallinna tehnikumi (1925—1946). Tema viimane töökoht oli Tallinna I Keskkool.

E. Nurmiste on avaldanud rea artikleid ajakirjades ja ulatusliku käsikirja «40 a. Tallinna tehnikumi».

Olgu kadunud koolitegelasele kerge kodumaa muld.

Rühm töökaaslasi ja sõpru.

„Matemaatika ja kaasaja" keelenurk.

KAS «LIIKUMISHULK» VÕI «IMPULSS»?

P. Kard

Mehhaanika arengus tuli esimesena tarvitusele massi ja kiiruse korrutise mv tähenduses termin «liikumishulk». Terminit «impulss» ehk «jõuimpulss» kasutati jõu ja selle mõjumise kestuse korrutise ft (või üldisemalt integraali $\int f dt$) tähenduses. Tänapäeval on terminoloogia muutunud. Sõna «impulss» sai uue tähenduse. Mehhaanikas kehtib teatavasti võrdus $mv = \int f dt$, mis on Newtoni II seaduse integraalne kuju. Vana terminoloogia kohaselt sõnastati seda nii: liikumishulk võrdub jõuimpulsiga. Kuid see seos ei ole universaalne selles mõttes, et mehhaaniline «liikumishulk» ei ole jääv suurus. «Liikumishulk» on olemas ka väljadel (eelkõige elektromagnetväljal), kuid väljale rakendatud jõu mõistet ei ole olemas, seega ei ole ka valem $mv = \int f dt$ väljale rakendatav. Samuti ei avaldu välja «liikumishulk» korrutisena mv, või kui avaldubki, siis ainult korpuskulaarses aspektis. Seega kaob väljaspool mehhaanikat vajadus vahet teha «liikumishulga» ja «impulsi» vahel. Füüsikas ongi hakatud juba ammu kasutama terminit «impulss» selle jääva suuruse tähenduses, mille mehhaanilist vormi nimetati mehhaanikas seni «liikumishulgaks». Et aga mehhaanika elementaarastmel termin «liikumishulk» on veel laialdaselt tarvitusel, võidakse küsida, kas on sellest loobumine «impulsi» kasuks küllalt põhjendatud ja kas ei tule siiski jätta «impulsile» tema endine tähendus, eelistades terminit «liikumishulk» suuruse mv ja selle mittemehhaaniliste üldistuste tähistamiseks. Vastuse andis sellele küsimusele juba tegelik areng. Termin «impulss» universaalse jääva suuruse tähenduses on füüsikasse juba niivõrd sisse juurdunud, et sellest loobumine näib olevat täiesti võimatu. Ka mehhaanikas hakatakse järjest enam kasutama terminit «impulss» vana «liikumishulga» tähenduses, «liikumishulga» muutudes arhailiseks «impulsi» sünonüümiks. Sellise arengu õigustuseks võib lisaks eeltoodule esitada järgmised kaalutlused:

1. Vahetegemisel «liikumishulga» ja «impulsi» vahel mehhaanikas ei ole printsipiaalset tähtsust. Seos $mv = \int f dt$ on ju Newtoni II seaduse integraalne kuju. Kui kirjutame sama seaduse diferentsiaalsel kujul $\frac{d}{dt}(mv) = f$, siis on ühel poolel jõud ja teisel poolel suurus $\frac{d}{dt}(mv)$. Jõud on muidugi võrdne «liikumishulga» tuletisega aja järgi, kuid ei ole mingit vajadust paralleelselt jõu mõistega vaadelda suurust $\frac{d}{dt}(mv)$ kui mingit kindla nimetusega ja vahest kindla omaette defineeritud ühikuga varustatud suurust. See on lihtsalt ühe teise suuruse tuletis aja järgi. Täpselt niisamuti ei ole vajadust suurust $\int f dt$ varustada omaette nimetusega. See on lihtsalt integraal jõust aja järgi. Omal ajal võeti küll tarvitusele termin «jõuimpulss», kuid see osutus tegelikus arengus üleliigseks ning säilib tänaseni ainult inertsi ja traditsiooni mõjul. Omal ajal võisid võrdsuse $mv = \int f dt$ mõlemad pooled näida tähtsuselt samaväärsena, sest siis ei osatud veel jäävusseadustele omistada seda tähtsust, mis neil on tänapäeval. Nüüd on aga selge, et suurus $\int f dt$ ei saa tähtsuselt võistelda suurusega mv.

2. Termin «liikumishulk» on oma sirgjoonelise naiivsuse tõttu sobimatu suurusele, mis liikumise hulk tegelikult ei ole. On ju teada ammune vaidlus liikumise mõõdu kohta: kas on see mv või $mv^2/2$? Tänapäeval teame, et liikumise mõõt ei ole see ega teine üksikult; seega on nimetuse «liikumishulk» rakendamine ühele neist eksitav ning tundub arhaismina.

3. Üldiselt on täiesti ebakohane anda füüsikalistele suurustele nimetused, mis lõpevad sõnaga «hulk». Iga suurus on ju millegi «hulk», aga selle igakordne nimetamine on tarbetu. Kui tänase päevani on veel mõned sellised «hulgaga» lõppevad nimetused säilinud, siis tuleb neist nii kiiresti kui võimalik vabaneda. Nii öeldakse sageli «laenguhulk» või isegi «elektrihulk» seal, kus tuleb ütelda lihtsalt «laeng». Nii püsivad veel füüsikalises terminoloogias «soojushulk», «tööhulk», «energiahulk» jne. Kõik sellised väljendid oleksid ehk lubatavad, kuid mitte füüsikalise suuruse tähenduses, vaid selle suuruse mingi konkreetse väärtuse, selle mingi «hulga» tähenduses. Kui aga omistatakse neile suuruse enda tähendus, siis võivad tekkida sellised keelelised monstrumid, nagu «soojushulga hulk», «liikumishulga hulk» (vrd. «energiahulk») jne.

4. Analüütilises mehhaanikas ja sealtkaudu ka statistilises füüsikas ja kvantmehhaanikas on tähtsal kohal üldistatud koordinaatide ja impulsside mõisted. Suurus mv on selles mõttes impulss vaid erijuhuliselt. Selle nimetamine liikumishulgaks võib tekitada ainult segadust, kui ei taheta sama nimetust rakendada ka üldistatud impulssidele. Ent väljend «üldistatud liikumishulk» on niivõrd kohmakas ja niivõrd võõras üldkasutatavale terminoloogiale, et selle sissetoomine ilmselt kõne alla tulla ei saa.

Kokkuvõttes jõuame otsusele, et «liikumishulk» tuleb mehhaanikas (ka elementaarastmel) asendada terminiga «impulss», nagu see on ainsana tarvitusel mujal füüsikas.

UUSI TEADUSTE KANDIDAATE

8. veebruaril 1968 kaitses oma väitekirja «Mittelineaarse programmeerimise meetodid» Eesti NSV TA Küberneetika Instituudi noorem teadur

duslik töötaja **Ingrid Mauer.** Tööd juhendas füüsika-matemaatikakandidaat I. Petersen, oponeerisid füüsika-matemaatikadoktor prof. G. Kangro ja füüsika-matemaatikakandidaat dots. Ü. Kaasik.

Väitekirjas vaadeldakse mittelineaarse programmeerimise ülesandeid ja esitatakse koonduvad meetodid püstitatud ülesannete lahendamiseks. Nendes meetodites kasutatakse mittelineaarse programmeerimise teoorias hästi tuntud duaalsuseprintsiipi.

Eesti NSV TA füüsika- ja matemaatikateaduste nõukogu otsustas I. Mauerile omistada füüsika-matemaatikakandidaadi kraadi.

Ingrid Mauer on sündinud Tallinnas 13. augustil 1937. Ta lõpetas 1955. a. Tallinna IV Keskkooli ja 1960. a. Tartu Riikliku Ülikooli Matemaatikateaduskonna.

16. veebruaril 1968 kaitses TRÜ Õpetatud Nõukogu ees oma väitekirja «Summeeruvustegurid Euler-Knoppi menetluse puhul» EPA matemaatika kateedri vanemõpetaja **Harry Espenberg.** Tööd juhendas prof. G. Kangro, oponeerisid prof. A. Turetski Minskist ja dots. T. Sõrmus. Dissertandile anti füüsika-matemaatikakandidaadi teaduslik kraad.

Väitekirjas uuritakse astmekujulisi summeeruvustegureid Euler-Knoppi menetluse jaoks nii ühe- kui ka kahekordsete ridade korral. Tulemused on esitatud 90 teoreemina.

Harry Alfonsi p. Espenberg on sündinud 12. juunil 1931 Hiiumaal. Ta lõpetas Tallinna 10. Keskkooli 1949. a. ja TRÜ matemaatikaosakonna 1954. a. Ajavahemikus 1956—1962 töötas ta TRÜ matemaatika kateedrites, alates 1962. a. töötab EPA-s.

Oma kõrgekvaliteetsete loengutega on H. Espenberg pälvinud tunnustuse nii TRÜ kui ka EPA üliõpilaste hulgas. «Matemaatika ja kaasaja» toimetuse liikmena on H. Espenberg hoolt kandnud ülesannete rubriigi varustamise eest huvipakkuvate ülesannetega.

18. aprillil 1968 kaitses oma väitekirja «Taimkatte kiirgusrežiimi matemaatiline modelleerimine» ENSV TA Füüsika ja Astronoomia Instituudi aspirant **Tiit Nilson.** Tööd juhendas

füüsika-matemaatikakandidaat J. Ross, oponeerisid füüsika-matemaatikadoktor E. Feigelson ja füüsika-matemaatikakandidaat R. Jürgenson.

Väitekirjas püstitatakse ja lahendatakse teoreetilisi probleeme, mis on seotud päikesekiirguse režiimi kirjeldamisega taimkattes ja mis taanduvad reale matemaatilistele ülesannetele. Viimastest üheks olulisemaks on nn. kiirgusülekandevõrrandi lahendamisega seotud probleemid. Väitekirjas saadud tulemused võimaldavad teha rea kaalukaid järeldusi mitmesuguste kiirgusrežiimi karakteristikute kohta taimkattes.

TRÜ Füüsika-Matemaatikateaduskonna nõukogu omistas T. Nilsonile füüsika-matemaatikakandidaadi teadusliku kraadi.

Tiit Nilson on sündinud Suure-Jaanis 16. novembril 1939. Ta lõpetas 1958. aastal Viljandi II Keskkooli, kus tema matemaatikaõpetajaks oli B. Henrichson. Tartu Riikliku Ülikooli matemaatikaosakonna lõpetas T. Nilson 1963. aastal.

24. mail 1968 sai pedagoogikakandidaadiks EPA matemaatika kateedri vanemõpetaja **Sinaiida Riives.** Väitekirja «Hulktahukate kujutiste uurimine ja nende rakendamine õppeprotsessis» kaitsmine toimus Moskvas Üld- ja Polütehnilise Hariduse Uurimise Instituudi Õpetatud Nõukogu ees.

Töö juhendajaks oli Nõukogude Liidu tuntumaid spetsialiste kujutava geomeetria alal, S. Ordžonikidze nimelise Moskva Avioinstituudi professor N. F. Tšetveruhhin. Oponeerisid tehnikadoktor S. A. Smirnov ja PTA korrespondeeriv liige professor I. K. Andronov.

Dissertatsioonis käsitletakse ruumiliste kujundite tasandiliste kujutiste probleemi. Ülesanne on eriti tähtis koolimatemaatika vaatekohalt. Õpilastele tavaliselt ei õpetata õigete jooniste tegemist. Isegi geomeetria õpikutes esineb vale jooniseid. S. Riivese väitekirjas on antud lihtne metoodika ruumiliste kujundite õigete tasandiliste kujutiste saamiseks. Dissertandi pedagoogiline eksperiment ENSV keskkoolides kinnitas tema leitud metoodika lihtsust ja arusaadavust.

S. Riives on sündinud 1919. a. Aastal 1945 lõpetas ta TRÜ Matemaatika-Loodusteaduskonna ning hakkas kohe töötama TRÜ õppejõuna. Alates 1952. a., mil loodi Eesti Põllumajanduse Akadeemia, töötab S. Riives selles õppeasutuses kujutava geomeetria õppejõuna (välja arvatud

aastad 1957—1960, mil ta viibis Moskvas aspirantuuris). Ühiskondlikus korras täidab S. Riives viimaste aastate jooksul EPA ühiskondlike elukutsete teaduskonna dekaani kohuseid.

27. juunil 1968 kaitses Tallinna Polütehnilise Instituudi matemaatika kateedri assistent **Heino Koppel** ENSV TA füüsika-, tehnika- ja matemaatikateaduste osakonna nõukogu ees kandidaadiväitekirja «Aitkeni meetodi üldistamine mittelineaarsete operaatorvõrrandite lahendamiseks». Tööd juhendas füüsika-matemaatikakandidaat S. Ulm, oponeerisid prof. G. Kangro ja dots. E. Tamme. H. Koppelile omistati füüsika-matemaatikakandidaadi kraad.

Väitekirjas üldistatakse operaatorvõrrandite lahendamiseks Aitkeni meetod, mis võimaldab kahe antud iteratsioonimeetodi baasil konstrueerida uue kiiremini koonduva meetodi. Tõestatakse rida koonduvusteoreeme nii üldistatud Aitkeni meetodi kui ka selle mõningate erijuhtude, eriti üldistatud Steffenseni meetodi jaoks.

Heino Koppel sündis 23. veebruaril 1931 Pärnu rajoonis Paikusel. Ta lõpetas 1950. a. Pärnu I Keskkooli, kus tema matemaatikaõpetajaks oli V. Naho, ja 1955. a. Tartu Riikliku Ülikooli matemaatikaosakonna. Seejärel töötas ta viis aastat matemaatikaõpetajana Kohtla-Järve ja Tallinna keskkoolides. 1960. a. asus H. Koppel tööle assistendina Tallinna

Polütehnilise Instituudi matemaatika kateedris. Sama kateedri juures oli ta ka aspirantuuris aastail 1964—1967.

KÜLALISLOENGUTEGA BERLIINIS

Berliini Humboldti-nim. ülikooli matemaatikasektsiooni kutsel viibis 11.—20. juunil Saksa DV-s TRÜ algebra ja geomeetria kateedri juhataja dots. **Ü. Lumiste.** Kolmel päeval (12.—14. juunil) esines ta Berliini matemaatikakollokviumi raames loengutega oma uurimistöö tulemustest järgmistel teemadel: 1) «Seostustest kihtkondades homogeensete tüüpkihtidega», 2) «Indutseeritud seostused sisestatud kihtkondades homogeensete tüüpkihtidega», 3) «Eukleidilise *n*-mõõtmelise ruumi tasandiparvede siseseostused». Ülejäänud SDV-s viibitud päevad olid pühendatud teaduslikele vestlustele ning Berliini, Potsdami ja Dresdeni vaatamisväärsustega tutvumisele.

JÄRJEKORDNE LEND MATEMAATIKUID TRÜ MATEMAATIKATEADUSKONNAST

20.—25. juunini 1968 lõpetas TRÜ Matemaatikateaduskonna järjekordne lend matemaatikuid. Matemaatika erialal kaitsti järgmised diplomitööd:

1. Aua, Helle. Kubatuurvalemite ekstremaalülesanded. (Juhendaja dots. S. Baron.)

2. Ese, Urve. Tabelina esitatud hüdro- ja aerodünaamiliste kõverate aproksimeerimisest, arvestades numbrilise programmjuhtimise iseärasusi. (Juhendaja J. Pruuden.)

3. Johannes, Kaja. Neljandat järku mittelineaarse rajaülesande lahendamine diferentsmeetodiga. (Juhendaja dots. E. Tamme.)

4. Koit, Mare. Eestikeelse teksti sünteesist. (Juhendaja dots. Ü. Kaasik.)

5. Kolde, Anne. Konformsete teisenduste alamrühmade orbiite. (Juhendaja dots. Ü. Lumiste.)

6. Laumets, Tiina. Taylori summeerimismenetluse summeeruvustegurid. (Juhendaja dots. kt. T. Sõrmus.)

7. Müür, Helgi. Mittelineaarne planeerimisülesanne, mille sihifunktsioon ja kitsendustes sisalduvad funktsioonid on ühe muutuja funktsioonide korrutised või summad. (Juhendaja dots. L. Kivistik.)

8. Peil, Virve. Ortogonaalridade absoluutne summeeruvus Voronov-Nörlundi menetlusega. (Juhendaja asp. H. Türnpu.)

9. Pleer, Siiri. Polünoomide kasutamine Maa tehiskaaslaste vaatluste täpsuse hindamisel. (Juhendaja ass. M. Liigant.)

10. Reinok, Mari. Võrkgraafikute uurimisest. (Juhendaja dots. L. Võhandu.)

11. Sepping, Anu. Kahekordsete ridade summeeruvustegurid. (Juhendaja dots. S. Baron.)

12. Soomer, Virge. Maatriksmenetluse perfektsusest antud summeeruvuskiiruse korral. (Juhendaja prof. G. Kangro.)

13. Tammeveski, Reet. Ühiklõikude optimaalsest liikumisest eukleidilisel tasandil. (Juhendaja dots. Ü. Lumiste.)

14. Tsirk, Aleksander. Формализация отдельных высказываний. (Juhendaja van.-õp. A. Tauts.)

15. Usai, Epp. Muutujate teisendamisest korrelatsioonianalüüsis. (Juhendaja dots. L. Võhandu.)

16. Virkus, Merike. Kujutiste meetodi kasutamine mittelineaarsete planeerimisülesannete lahendamiseks. (Juhendaja dots. I. Petersen.)

17. Vuurmann, Enda. Bioloogiliste objektide rühmitamine. (Juhendaja dots. kt. E. Tiit.)

Riigieksamitega lõpetasid matemaatikaosakonna:

1. Kauri, Kadrin
2. Mettig, Elvi
3. Rauba, Koidula

Nendele lõpetajatele omistati matemaatiku kvalifikatsioon.

Mehhaanika erialal kaitsti järgmised diplomitööd:

1. Kirs, Jüri. Jäik-plastsete silindriliste koorikute dünaamiline koormamine suurte läbipainete puhul. (Juhendaja prof. Ü. Lepik.)

2. Lellep, Jaan. Jäikplastsete varraste suured läbipainded. (Juhendaja prof. Ü. Lepik.)

Matemaatika pedagoogilises osakonnas kaitsti järgmised diplomitööd:

1. Ariva, Maie. Eesti koolimatemaatika arengust 20. saj. algul. (Juhendaja dots. O. Prinits.)

2. Kiho, Eve. Geomeetria aksiomaatika koolis. (Juhendaja van.-õp. K. Ariva.)

3. Klauks, Hans. Vektorid koolimatemaatikas (Juhendaja dots. Ü. Lumiste.)

4. Kõrtsini, Helve. Matemaatiline andekus matemaatilise kallakuga klasside õpilastel võrreldes tavaliste klasside õpilastega. Juhendaja dots. E. Koemets.)

5. M i l d e r, Mari. Astmed ja juured programmeeritud käsitluses. (Juhendaja van.-õp. K. Velsker.)

6. P i i r, Heli. Eesti NSV kõrgemate koolide sisseastumiseksamite tulemustest. (Juhendaja van.-õp. K. Velsker.)

7. V a i n o, Laine. Elastse-plastse lameda sinusoidaalse kaare paindest temperatuuri mõjul. (Juhendaja van.-õp. E. Jõgi.)

8. V e s k i m e t s, Mare-Lee. Koolimatemaatika ülesannetest. (Juhendaja van.-õp. K. Velsker.)

Riigieksamitega lõpetasid matemaatika pedagoogilise osakonna:

1. A a r i k, Ilme
2. F l o r e n, Lilli
3. K a s k, Laine
4. K u k k, Vilvi
5. M i k k, Silvi-Johanna
6. S i m m, Anne-Monika
7. U n n, Õie

Kõigile nimetatud lõpetajatele omistati matemaatiku, matemaatikaõpetaja kvalifikatsioon.

JÄRJEKORDNE LEND KESKHARIDUSEGA MATEMAATIKUID

25. juunil 1968 lõpetas A. H. Tammsaare nimelise **Tartu I Keskkooli** järjekordne, viies lend programmeerijaid. Matemaatik-programmeerija kvalifikatsiooni omandasid järgmised lõpetajad:

1. A n t r o p o v a, Margareeta
2. A r e n s, Epp
3. H a l l i k, Heia
4. I n s l e r, Toomas
5. K a a s i k, Jaan
6. K a r u, Ann
7. K i i s k ü l a, Tõnis
8. K i v i s i k k, Merle
9. K o t s a r, Katrin
10. L a a s, Helle
11. L e p p, Toomas
12. L i i a s, Uudo
13. L i i v, Maire
14. P a r m o, Reeta
15. P e d o s o n, Enno
16. P ä r i, Imbi
17. S a r a p u u, Raimund
18. T r a a t, Peeter
19. V a h t e r, Mai
20. V a l d s o n, Erika
21. Ö ö v e l, Õnne

Tallinna I Keskkooli matemaatika eriklassi lõpetasid 1968. a. järgmised noored:

1. B l a u h u t, Riina
2. E i t e l b e r g, Eduard
3. H a l l i m ä e, Anne
4. H i n t s, Ülle
5. I n n o, Jaan
6. J a k s e n, Lii
7. K a r i n, Alar
8. K ü t t, Joel
9. K ü t t, Sulev
10. L a i d m e t s, Jaan
11. M a a l d e r, Eha
12. M a a l d e r, Enn
11. M e s e k, Ülo
12. M e r e v ä l i, Maarika
13. M ä n n i l, Mart
14. O e s e l g, Eve
15. O j a v e r, Kersti
16. P u h m, Märt
17. P u t m a k e r, Ülle
18. R e i n e b e r g, Anne
19. S a i d l a, Imbi
20. T a g a s a a r, Jaan
21. T a l t s, Lembe
22. T a m m, Jaak
23. T e r a s, Jüri
24. U r v i k, Malle
25. V a h e r, Heldur
26. V i i e s, Vladimir

See oli Tallinna noorte matemaatikute kolmas lend. Teise lennu matemaatikuid-programmeerijaid saatis ellu **Nõo keskkool.** Nõo keskkooli matemaatika eriklassi lõpetasid 1968. a. kevadel:

1. E h a n d i, Enn
2. H a n i m ä g i, Helje
3. H e e r i n g s o n, Edgar
4. H e r m a n n, Jüri
5. H u r t, Heido
6. J ü r i s s o n, Viive
7. K a u k v e r, Lea
8. K i r j a n e n, Ilmar
9. L i i m a n n, Mart
10. M e r i s a l u, Elve
11. M u g u, Aare
12. M ä g i, Ester
13. P a j u p u u, Tiit
14. P r a n k, Tiit
15. S e i n, Enok
16. T a l l i k a, Ene
17. T i m m e r m a n n, Matti
18. T u i s k, Ljubov
19. V a a r m a n n, Ene
20. V ä h i, Ülle
21. V ä l j a, Lea
22. Õ u n a p u u, Ilme

Bibliograafia

Eesti NSV-s ilmunud matemaatikaalase kirjanduse nimestik

1968. aasta

(Koostanud S. Kiis)

RAAMATUD

Allik, K. ja Lepamaa, A. **Kõrgem matemaatika ökonoomika erialade üliõpilastele.** Tln., 1967. 156 lk. (TPI arvutusmatemaatika kateeder.) — Trükitud rotaprindil.

Ariva, K. ja Rahula, M. **Analüütiline geomeetria.** 1. osa. 2. vihik. Trt., 1968. 151 lk. (TRÜ algebra ja geomeetria kateeder.) — Trükitud rotaprindil.

Ermann, S., Jürgenson, U. ja Lasn, E. **Elektronarvuti «Ural-4».** Õppevahend. Trt., 1968. 128 lk. (TRÜ Arvutuskeskus.) — Trükitud rotaprindil.

Juhtimisarvuti «ВНИИЭМ-3». Abiks programmeerijale. Tln., 1968. 163 lk. — Trükitud rotaprindil.

Jõerüüt, I. **Elektronarvuti rakendamine tootmise juhtimisel.** Abiks lektorile. Tln., 1968. 9 lehte. (ENSV ühing «Teadus». Nr. 19.) — Rotaatorpaljundus.

Kangro, G. **Matemaatiline analüüs.** 2. osa. Õpik kõrgematele koolidele. Tln., «Valgus», 1968. 523 lk.

Keel ja struktuur. 2. Töid strukturaalse ja matemaatilise lingvistika alalt. Trt., 1968. 154 lk. (TRÜ. Eesti keele kateeder).

Sisu: M. Hint. Ortoeepia normeerimise probleem. — R. Kasik. Omastavalise täiendi subjektiivsusest ja objektiivsusest mine-konstruktsioonis. — T.-R. Viitso. Sõnade poolitamisest.

Kraaving, M., Paluver, N., Rünk, O ja Vallas, E. **Kujutav geomeetria.** Harjutusülesanded. Tln., 1968. 64 lk. — Trükitud rotaprindil.

Kraaving, M., Paluver, N., Rünk, O. ja Vallas, E. **Kujutav geomeetria.** Lisaharjutusülesanded ehituslike erialade jaoks. Tln., 1968. 20 lk. — Trükitud rotaprindil.

Kutšma, D. P. **Majanduslikud arvutused.** Õpik kooperatiivkoolidele. Tln., «Valgus», 1968. 200 lk.

Lints, A. **Matemaatika õpetamisest 2. klassis.** Metoodilisi nõuandeid õpetajaile. Tln., «Valgus», 1968. 63 lk.

Lõhmus, A. **Arvutuspraktikumi juhend.** Tln., 1968. 60 lk. (TPI matemaatika kateeder.) — Trükitud rotaprindil.

Majandusmatemaatilised meetodid. 1. Lineaarse planeerimise matemaatilised alused. [Peatükke tšehhikeelsest raamatust «Matematické metody v ekonomii».] Saku, 1968. 84 lk. — Trükitud rotaprindil.

Matemaatika ja kaasaeg. Abimaterjale matemaatika õpetajatele ja õppijatele. XIII. Trt., 1967. 132 lk. (Tartu Riiklik Ülikool.)

Sisu: Ü. Lumiste. Ruumi mõiste geomeetrias. — Ü. Kaasik. Matemaatika õpetamisest Ameerika Ühendriikide ülikoolides. — A. Iher. Mõnda informatsiooniteooria põhimõistetest. — N. Wieneri mõtteid. — A. Riesen. Räägime kujundite eristamisest. — E. Leinemann. Majandusteaduse matemaatiline käsitlus. — L. Liin. Otsustustabelid. — O. Prinits. Matemaatika õpetamisest Hollandi keskkoolides ja ülikoolides. — K. Ariva. Lobatševski geomeetria. — W. W. Sawyer. Aukartus matemaatika ees. — T. Roosinupp. Maagiline aritmeetika. — G. Kangro, Ü. Lumiste, E. Tamme. Jüri Nuudi elu ja teaduslik pärand. — Kilde prof. J. Sarvest. — E. Laugaste. Rahvapärastest mõõtudest ja kaaludest. — Pikkusmõõdud. — Mahu- ehk õõnesmõõdud. —

Raskusmõõdud. — Vedelikumõõdud. — Pinnamõõtudest. — Pulgad laual. — R. Jürgenson. Eestikeelne arvutusmeetodite käsiraamat. — O. Prinits. SDV matemaatikute konverentsilt Berliinis. — E. Toom. Tartu MMK uued koordinaadid. — E. Sakkov. Käärikul «kröbistati» koorikuid. — Kroonika. — Bibliograafia. — Ülesandeid.

Matemaatika ja kaasaeg. Abimaterjale matemaatika õpetajatele ja õppijatele. XIV. Trt., 1968. 123 lk. (Tartu Riiklik Ülikool.)

Sisu: Ü. Lumiste. Ruumi mõiste geomeetrias. — U. Kaljulaid. Geomeetrilisest meetodist diofantilises analüüsis. — Kuidas püüda kõrbes lõvi? — M. Kolt. Pilk graafiteooriasse. — T. Roosinupp. Võtmeteooria. — L. Roots. Elektronarvutid mängivad malet. — E. Leinemann. Majandusteaduse matemaatiline käsitlus. — V. Tinn. Mida tehakse TRÜ Arvutuskeskuses. — W. W. Sawyer. Geomeetria — teadus mööblist ja müüridest. — K. Ariva. Lobatševski geomeetria. — N. Veske. Rahvusvahelised matemaatikaolümpiaadid. — Ü. Lepik, O. Prinits. Teenekas matemaatikaprofessor. — J. Gaiduk. Axel Harnack — R. Mindingi ja F. Kleinti õpilane. — David Hilbert matemaatika terviklikkusest. — E. Tamme. 150 aastat Tartu ülikooli matemaatikaprofessori Peter Helmlingi sünnist. — L. Roots. Godfrey Harold Hardy. — E. Tamme. Raamat majandusmatemaatika meetoditest. — O. Prinits. Ilmus «Täiendavaid teemasid koolimatemaatikale». — K. Velsker. Suurvõistlused matemaatikas. — Lenini preemia laureaate. — Ü. Lumiste. Noorim Lenini preemia laureaatidest. — U. Kaljulaid. Lenini preemia tööde eest diofantilises geomeetrias. — Kroonika. — Bibliograafia. — Ülesandeid.

Matemaatika- ja mehhaanika-alaseid töid. VII. Trt., 1967. 184 lk. (Tartu Riikliku Ülikooli Toimetised. Nr. 206.)

Sisu: (vene k., resümeed eesti, saksa ja inglise k.): A. Tauts. Tõeväärtuste defineerimine valemitena. — Ü. Lumiste. Ladenevad l-paaride parved neljamõõtmelises projektiivses ruumis. — R. Mullari. Eukleidilise ruumi mitmemõõtmelise pinna kõverusindikatrissid ja normaaltasandite mähispind. II — L. Tuulmets. Isotroopse kongruentsi teine keskmähispind ruumis R_4. — E. Jürimäe. Mazur-Orliczi teoreemi üldistusest. — E. Reimers. Kontinuaalsed summeerimismenetlused. — H. Türnpu. Summeeruvustegurid Riesz'i menetluste jaoks. — M. Abel, H. Türnpu. ψ-koonduvustegurid. — T. Sõrmus. Harilike ja kahekordsete jadade absoluutsest summeeruvusest Hausdorffi menetlustega. — L. Kivistik. Ühest polünoomiga seotud mittelineaarsest planeerimisülesandest. — E. Virma. Ristkülikukujuliste plaatide kandevõimest. — Ü. Lepik. Jäik-plastiliste silindriliste koorikute suured deformatsioonid telgtõmbe ning välisrõhu all. — E. Sakkov. Elastilis-plastiliste plaatide pärastkriitilise staadiumi analüüs silindrilisel läbipaindel. — I. Vainikko. Ümmarguste elastilis-plastiliste plaatide läbipaine temperatuuriväljas.

Reimand, J. ja Velsker, K. **Elementaarmatemaatika.** Algpraktikum. I. Trt., 1967. 132 lk. (TRÜ matemaatika õpetamise metoodika kateeder.) — Trükitud rotaprindil.

Renter, R. **Majandusküberneetika rakendamisest tööstuse juhtimisel.** Tln., «Eesti Raamat», 1968. 80 lk.

Riives, S. ja Ruubel, A. **Kujutava geomeetria kontrolltööde metoodiline juhend.** EPA Kaugõppeteaduskonna üliõpilastele. 4 tr. Trt., 1968. 16 lk. (Eesti Põllumajanduse Akadeemia.) — Trükitud rotaprindil.

Perforeerimisjuhend elektronarvutile «Minsk-22». Tln., 1968. 8 lk. (TPI arvutusmatemaatika kateeder.) — Trükitud rotaprindil.

Programme kõigile. Metoodiline materjal. I. Trt., 1968. 44 lk. (TRÜ Arvutuskeskus.) — Trükitud rotaprindil.

Soonets, K. **Tõenäosusteooria ja matemaatiline statistika.** Trt., 1968. 194 lk. (TRÜ teoreetilise mehhaanika kateeder.) — Trükitud rotaprindil.

Tiit, E. **Tõenäosusteooria.** Loengukonspekt. [TRÜ matemaatikaosakonna üliõpilastele] I. osa. Trt., 1968. 320 lk. (TRÜ arvutusmatemaatika kateeder.) Trükitud rotaprindil.

Vallner, H. **Matemaatilised masinad ja programmeerimine.** Programm. Ülesanded. Trt., 1968. 20 lk. (EPA.) — Trükitud rotaprindil.

Гаршнек, А. А. **Линейная алгебра.** Конспект лекций. Таллин, 1968. 71 стр. (ТПИ. Кафедра математики.) — Ротапринт.

Коппель, Х. К. **Обобщение метода Эйткена для решения нелинейных операторных уравнений.** Специальность № 008 — вычисл. математика. Автореферат дисс. на соискание учен. степ. канд. физ.-мат. наук. Таллин, 1968. 16 стр. (АН ЭССР. Совет физ.-техн. и матем. наук).

Нильсон, Т. А. **Математическое моделирование радиационного режима растительного покрова.** (Специальность № 008 — вычислит. математика). Автореферат дисс. на соискание учен. степ. канд. физ.-мат. наук. Тарту, 1968. 28 стр. (ТГУ). — Ротапринт.

Труды Вычислительного центра. Тарту, 1968. (ТГУ). Ротапринт, **Вып. 12.** Р. Пальм, Математическая лингвистика. I. 140 стр.

Вып. 13. 69 стр.
Содерж.: Ю. Каазик, Э. Тамме. Алгоритм решения обобщенной задачи о загрузке. — Э. Тийт. Резервирование без восстановления. — О. Карма. Об определении времени ожидания в ветвящейся системе складов. — А. А. Ягель. Об общих задачах параметрического линейного программирования.

Вып. 14. 61 стр
Содерж.: Р. Муллари, У. Праги. Форсаж работы и отклонения при запуске детале-партий (имитирование на ЭВМ.) — Р. Муллари и В. Аллсалу. К решению задач целочисленного линейного программирования.

Вып. 15. 63 стр.
Содерж.: М. Вийтсо, Е. Габович, Ю. Каазик. О применении математических методов для планирования и управления швейным процессом. — Е. Габович. Алгоритм составления месячных планов для швейного предприятия.

Эспенберг, Х. А. **Множители суммируемости для метода Эйлера—Кноппа.** (Специальность № 001 — матем. анализ.) Автореферат дисс. на соискание учен. степ. канд. физ.-мат. нак. Тарту, 1967. 11 стр. (ТГУ). Ротапринт.

ARTIKLID

Agur, Ustus. **Raalitud pildid.** [Elektronarvutite kujutusoskusest.] — «Horisont», 1968, nr. 7, lk. 29—32.

Eesti NSV Teaduste Akadeemia Toimetised. Füüsika. Matemaatika. Tln., 1968.

Nr. 1. Matemaatika-alased artiklid (vene k., resümeed eesti ja inglise k.):

I. Keis. Statsionaarse sputniku suhtelise tasakaalu optimaalsest asümptootilisest stabiliseerimisest. — I. Keis. Ühe kinnituspunktiga gürostaadi liikumisvõrranditest. — E. Tiit. Lihtstruktuuri määramisest faktoranalüüsis. — N. Veksler. Telgsümmeetrilised mittestatsionaarsed deformatsiooniprotsessid pöördkoorikutes. — M. Levin. Märkus trapetsvalemi ühe omaduse kohta. — M. Levina. Ühest kvadratuurvalemite tuletamise meetodist. — J. Lõhmus. Mõned märkused Lie-rühmade singulaarsete kontraktsioonide kohta. — Akadeemik Arnold Humal 60-aastane.

Nr. 2. Matemaatika-alased artiklid (vene k., resümeed eesti ja inglise k.):

S. Ulm ja V. Poll. Mõnedest miinimumi leidmise meetoditest. — V. Unt. Einsteini võrrandite struktuurist aksiaalsümmeetrilisel juhul. — I. Keis. Gürostaadi integraalidest, kineetilisest momendist ja nurkkiirusest sõltuvas jõuväljas. — S. Ulm ja H. Koppel. Mõningad Aitkeni tüüpi kolmanda järgu koonduvusega iteratsioonimeetodid.

Nr. 3. Matemaatika-alased artiklid (vene k., resümeed eesti ja inglise k.):

E. Raik ja I. Petersen. Kujutiste meetod kitsendustega ekstreemumülesannete lahendamiseks. — B. Tamm. Insenerlike protsesside modelleerimise aspektidest probleemorientatsiooniga programmeerimissüsteemide abil. — A. Siimon. Potentsiaal-impulsses elementide süsteemis olevate loogiliste skeemide analüütilise kirjeldamise keelest. — I. Keis. Vaba gürostaadi suhtelise tasakaalu optimaalsest asümptootilisest stabiliseerimisest. II. — L. Ainola. Koorikute dünaamika teooria variatsioonprintsiipidest. — V. Unt. Aksiaalsümmeetriline elektromagnetiline kiirgus üldises relatiivsusteoorias esimeses lähenduses. — J. Pihlau. Silindrilise magnetkile-elemendi tüürimisvoolude tolerantsid assotsiatiivmälus kasutamise korral.

Nr. 4. Matemaatika-alased artiklid (vene k., resümeed eesti ja inglise k.):

J. Rebane. Universaalsete algebrate esitamisest kahepoolse taandamisega ja taandamisega kommutatiivsetes poolrühmades. — O. Vaarmann. Mõnedest iteratsioonimeetodeist pöördoperaatori järkjärgulise aproksimeerimisega. — A. Siimon. Signaalide eksisteerimise ajakoordinaatide määramine loogiliste skeemide analüütilise kirjeldamise keeles. — J. Lõhmus. Simplektiliste rühmade kontraktsioonid. — J. Lõhmus. Kontraktsioonide üldistamise võimalustest algebraliste süsteemide jaoks. — A. Spilevski. Teoreem üldistatud samastustest n-mõõtmelises tasases ruumis ja nende interpretatsioon.

Etverk, E. Kontrolltöödest kõrgema matemaatika õpetamisel. [Kõrgemast koolist.] Õppemetoodika küsimusi, 3, 1968, lk. 92—100.

Kaps, H. Raalide kasutamise perspektiiv. — Tehnika ja Tootmine, 1968, nr. 12, lk. 626—629.

Kees, P. Arvu mõiste kujunemine lapsel. — Nõukogude Kool, 1968, nr. 4 ,lk. 286—291.

Koljagin, J. Esemete hulgad arvu ja aritmeetiliste tehete mõiste kujundamise alusena. [Matemaatika õpetamisest algklassides. Ajakirjast «Natšalnaja Škola», 1967, nr. 6. Lühendatud.] — Nõukogude Kool, 1968, nr. 3, lk. 183—188.

Lepik, Ülo. Tõenäosuspaberi kasutamisest statistilistes arvutustes. — Eesti Loodus, 1968, nr. 10, lk. 629—631.

Levin, A. Lineaarse planeerimise simpleksmeetod. [Koolimatemaatikast.] Abiks fakultatiivsete ainete õpetamisel. — Nõukogude Kool, 1968, nr. 11, lk. 863—868.

Lints A. Abiks algklasside õpetajale. [Kordamisest matemaatikas 3. klassis.] — Nõukogude Kool, 1968, nr. 7, lk. 546—547.

Lints, A. Abiks algklasside õpetajale. [Matemaatika õpetamisest 3. klassis.] — Nõukogude Kool, 1968, nr. 8, lk. 605—610.

Lints, A. Esimesed matemaatikatunnid 2. klassis. — Nõukogude Kool, 1968, nr. 5, lk. 382—387.

Lints, A. Korrutamise ja jagamise käsitlemisest 2. klassis. — Nõukogude Kool, 1968, nr. 12, lk. 919—927.

Lints, A. Liitmine ja lahutamine 10 piires. Abiks algklasside õpetajatele. — Nõukogude Kool, 1968, nr. 10, lk. 746—752.

Lints, A. Õppeaine vastu huvi äratamiseks. [Matemaatikaülesandeid 1. klassile.] — Nõukogude Kool, 1968, nr. 2, lk. 140—146.

Lõhmus, J. Mis on kõver ruum ja nn. nullruum? — Küsimused ja Vastused, 1968, nr. 11, lk. 27—33.

Löper, V. Arvutustööde mehhaniseerimisest autotranspordis. — Autotransport ja Maanteed, 1967, nr. 6, lk. 1—4.

Martson, Jüri. Meetermõõdustik. [Ajaloost, olevikust ja tulevikust.] — Horisont, 1968, nr. 9, lk. 62—63.

Naan, Gustav. Matemaatika ja kultuur. — Horisont, 1968, nr. 7, lk. 1—8.

IV teaduslik-pedagoogilise konverentsi «Täppisteadused ja haridus» ettekannete resüimeed. Trt., 1968. 38 lk. (TRÜ. ENSV TA Loodusuurijate Selts. ENSV Haridusministeerium.) Matemaatika-alased artiklid:

G. Naan. Matemaatika ja kultuur. — H. Keres. Singulaarsetest kohtadest ajas ja ruumis. — I. Kull. Informatsiooni otsimise süsteemidest. — H. Aben, J. Kajari. Linnaehituse probleemide matemaatilisest käsitlusest. — G. Kangro. Järjestuse tähtsus analüüsis. — Ü. Lumiste. Relatsioon «vahel» geomeetria algmõistena. — B. Tamm. Insenerlike protsesside modelleerimisest spetsiaalsete algoritmiliste keelte abil. — R. Tavast. Inimese ja arvuti koostöö probleemidest tehniliste objektide juhtimisel. — L. Ainola. Variatsioonmeetodid matemaatilises füüsikas. — L. Võhandu. TPI ja elektronarvuti. — O. Prinits. Koolimatemaatika ja kaasaeg.

Prinits, O. Koolimatemaatika tasemest. — Nõukogude Kool, 1968, nr. 1, lk. 33—39.

Puusepp, E. Arvutustööde mehhaniseerimisest maaparanduses. — Põllumajanduse Mehhaniseerimine ja Elektrifitseerimine, 1967, nr. 6, lk. 3—4.

Rozenfeld, I. Majandusküberneetika võidab eluõigust. — Horisont, 1968, nr. 3, lk. 46—48.

Rõvkin, Albert. Marx ja matemaatika. K. Marxi «Matemaatikaalaste käsikirjade» väljaandest. — Horisont, 1968, nr. 5, lk. 25—28.

Talts, V. Tehniliste uuenduste majandusliku efektiivsuse arvutamise metoodikast. — Tehnika ja Tootmine, 1968, nr. 1, lk. 629—630.

Teaduse ajaloo lehekülgi Eestist. 1. Tln., 1968. 276 lk. Matemaatika-alased artiklid (eesti k., resümeed vene ja saksa k.):

Ü. Lumiste. Matemaatika Eestis XVII ja XVIII sajandil. — L. Võhandu. Matemaatika vanemas eestikeelses õppekirjanduses. — J. Depman. Täiendusi matemaatika ajaloole Tartu ülikoolis.

Telgmaa, Arvude jaguvus hulgateoreetilisest vaatekohast. [Matemaatika õpetamisest.] — Nõukogude Kool, 1968, nr. 3, lk. 189—193.

Telgmaa, A. Koolimatemaatika olevikust ja tulevikust. — Nõukogude Kool, nr. 9, lk. 656—660.

Telgmaa, A. Laps õpib matemaatikat. [Vanemate abist koduste õppeülesannete lahendamisel.] — Emale-isale. Tln., 1968, lk. 184—189.

Usai, M. Pütagoras ja tema teoreem. [Käsitlemisest matemaatika tunnis.] — Nõukogude Kool, 1968, nr. 2, lk. 134—139.

Õiglane, Hilja. Praktilisi kogemusi programmõppe rakendamisel kõrgemas matemaatikas. [Eesti Põllumajanduse Akadeemia.] — Programmõpe, 6, 1967, lk. 3—10.

Математика и теоретическая механика, 3. Таллин, 1968. 77 стр. (Труды таллинского политехнического ин-та. Серия А. № 261). Статьи по математике:

О. Сильде и Б. Тийкма. К вопросу о применении в механике теоремы кинетической энергии. — Х. Коппель. Обобщение метода Эйткена для решения нелинейных операторных уравнений. — М. Левин. Замечание о коэффициентах одной квадратурной формулы. — Ю. Ярцев. О сходимости одного метода коллокационного типа для обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений. — Ю. Ярцев. О сходимости метода коллокации. — Ф. Вихманн. О суммируемости формального произведения двойных рядов.

Пости, С. К. Об оценке погрешности ротатабельных математических моделей технологических зависимостей. — Исследование по строительству, 9, 1968, стр. 166—171.

Руубель, А. И. Обобщение методов отображения, применямых в начертательной геометрии. — Сборник научных трудов Эстонской сельскохозяйственной академии, т. 55, 1967, стр. 322—333.

Труды по электротехнике и автоматике. Таллин, 1967. (Труды Таллинского политехнического института. Серия А. № 252). Ротапринт. Статьи по математике:

Я. Вайтмаа, К. Ыуду, И. Яковлев. Метод наложения вероятных моделей как средство расчета и исследования сложных систем со случайными параметрами.

Чернова, Г. В. Некоторые вопросы управления в серийном производстве на основе математических моделей. — Тр. Всесоюз. межвузовской конференции «НОТ и экон. реформа», 2, 1968, стр. 163—178.

Экономико-математические исследования народного хозяйства Эстонской ССР. Таллин, «Валгус», 1968. 302 с. (АН ЭССР. Институт экономики. Статьи по математике:

Ю. Эннусте. Разработки модели межотраслевого баланса. — И. Каганович. Задачи концентрации и размещения с фиксированными доплатами и их решение. — А. Шипай. Экономико-математическая задача специализации железобетонной промышленности.

ÜLESANDEID ELEMENTAARMATEMAATIKAST

1. Jalgpalliturniirist võttis osa seitse meeskonda: A, B, C, D, E, F, G. Finalistideks peeti üht järgmistest paaridest: A ja C, B ja G, C ja E, G ja A, E ja F, A ja D. Osutus, et ühes nendest paaridest on mõlemad meeskonnad nimetatud valesti, ülejäänutes aga on ainult üks meeskond nimetatud valesti. Millised meeskonnad kohtusid finaalis?

2. Milline kahekohaline kümnendsüsteemi arv kirjutatakse viiendsüsteemis samade numbritega nagu seitsmendsüsteemis, ainult vastupidise numbrite järjestusega.

3. Kolmnurga ABC kõrguste lõikepunkt on O. Leida nurk ACB, kui $OC = AB$.

4. Leida jada $\{u_n\}$ piirväärtus, kui jada on antud valemiga

$$u_{n+1} = \frac{2u_n - 1}{2 - u_n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

5. Lahendada võrrand

$$x^3 + (2a - 3)x^2 + (2 - 7a)x + 4a - 2a^2 = 0.$$

KOGUMIKU KOLMETEISTKÜMNENDA VIHIKU ÜLESANNETE LAHENDUSED

Ülesande nr. 1 lahendus. Olgu antud ruutvõrrandite diskriminandid vastavalt $D = p^2 - q$ ja $D_1 = p_1^2 - q$. Siis

$$D + D_1 = p^2 + p_1^2 - q - q_1 = p^2 + p_1^2 - 2pp_1 = (p - p_1)^2 \geqslant 0.$$

Kui nüüd esimese võrrandi lahendid on imaginaarsed ($D < 0$), siis $D_1 > 0$ (s. o. teise võrrandi lahendid on reaalsed).

Ülesande nr. 2 lahendus. Esimese progressiooni üldliige on $a_n = 4n$, teise progressiooni üldliige on $b_m = 5m - 2$. Nad on võrdsed, kui

$$4n = 5m - 2, \quad n = \frac{5m - 2}{4}.$$

Arv n on naturaalarv siis ja ainult siis, kui $m = 2(2k - 1)$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Seega saame antud progressioonide ühesugused liikmed n väärtustel $n = 5k - 3$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Need liikmed moodustavad aritmeetilise progressiooni üldliikmega $c_k = 20k - 12$, kusjuures $c_1 = 8$ ja $c_{50} = 988$. Seega $S_{50} = 24\,900$.

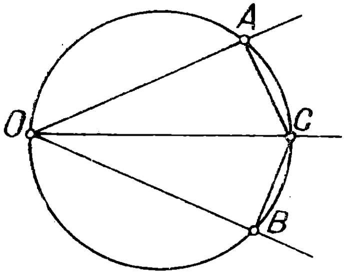
Ülesande nr. 3 lahendus. Lõigaku ringjoon nurga $AOB = \alpha$ haaradelt ja nurgapoolitajalt vastavalt lõigud $a = OA$, $b = OB$ ja $c = OC$. Ptolemaiose teoreemi põhjal võrdub ringi sisse joonestatud nelinurga diagonaalide korrutis vastasküljede korrutiste summaga. Seega

$$OC \cdot AB = OA \cdot BC + OB \cdot AC,$$
$$c \cdot AB = a \cdot BC + b \cdot AC.$$

Et $BC = AC$ kui võrdsetele kaartele toetuvad kõõlud, siis

$$\frac{a+b}{c} = \frac{AB}{AC}.$$

Sõltumatult ringjoone valikust on tekkiv kolmnurk ABC võrdhaarne kolmnurk



tipunurgaga $180° - \alpha$. Kuna võrdse tipunurgaga võrdhaarsed kolmnurgad on sarnased, siis $\frac{AB}{AC} = \text{const}$ ning seega ka $\frac{a+b}{c} = \text{const}$.

Ülesande nr. 4 lahendus. Et $\frac{b}{a} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$, siis

$$A = a\left(\cos 3\alpha - \frac{b}{a}\sin 3\alpha\right) = a\left(\cos 3\alpha - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}\sin 3\alpha\right) =$$
$$= a\frac{\sin \alpha \cos 3\alpha - \cos \alpha \sin 3\alpha}{\sin \alpha} = \frac{a \sin(-2\alpha)}{\sin \alpha} = -2a \cos \alpha.$$

Ülesande nr. 5 lahendus. Võrrandi $f(x) \equiv a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ lahendiks ei saa olla paarisarv $x = 2k$. Kui $x = 2k$, siis võrrandi vasak pool

$a_n(2k)^n + a_{n-1}(2k)^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 2k + a_0$ ei saa võrduda nulliga, kuna ta on paaritu arv (sest eelduse põhjal $a_0 = f(0)$ on paaritu arv). Võrrandi lahendiks ei saa olla ka paaritu arv $x = 2k + 1$. Kui $x = 2k + 1$, siis on võrrandi vasak pool

$$a_n(2k+1)^n + a_{n-1}(2k+1)^{n-1} + \ldots + a_1(2k+1) + a_0.$$

Et Newtoni binoomvalemi põhjal

$$(2k+1)^m = A_m + 1 \quad (m = 1, 2, \ldots, n),$$ kus

A_m on paarisarv, siis teisendub võrrandi vasak pool kujule

$$(a_n A_n + a_{n-1}A_{n-1} + \ldots + a_1 A_1) + (a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0) =$$
$$= (a_n A_n + a_{n-1}A_{n-1} + \ldots + a_1 A_1) + f(1).$$

Siit nähtubki, et võrrandi vasak pool ei saa võrduda nulliga (esimeseks liidetavaks olev suluavaldis osutub paarisarvuks, teine liidetav $f(1)$ on aga eelduse põhjal paaritu arv).

KOGUMIKU NELJATEISTKÜMNENDA VIHIKU ÜLESANNETE LAHENDUSED

Ülesande nr. 1. lahendus. Esialgu paneme pannile 2 muna; 1,5 minuti pärast võtame neist ühe ära. Selle asemele lööme kolmanda muna. 1,5 minuti möödumisel paneme täiesti küpse muna asemele poolküpse muna ning praeme pannil olevaid mune veel 1,5 min. Kogu praadimiseks kuluv aeg on 4,5 min.

Ülesande nr. 2 lahendus. Tähistades murru A sümboliga $\frac{a}{b}$, võime murru B kirjutada kujul $\frac{a+1}{b+2}$. Et $A-B=\frac{a}{b}-\frac{a+1}{b+2}=\frac{2a-b}{b(b+2)}$ ja $2a-b=$
$= 2\cdot 5678901234 - 6789012345 > 0$, siis $A > B$.

Ülesande nr. 3 lahendus. Esitame $11^{10}-1$ kujul $(11-1)\cdot(11^9+11^8+11^7+$ $+\ldots+11^2+11+1)$. Esimene tegur on 10. Et teise teguri iga liidetav pärast astendamist lõpeb arvuga 1 ja liidetavaid on kümme, siis jagub ka teine tegur arvuga 10. Korrutis jagub aga arvuga 100.

Ülesande nr. 4 lahendus. Korrutades võrrandid saame, et

$$(xy)^{x+y}=(xy)^{2n},$$

millest $x+y=2n$ või $xy=1$. Avaldades eelviimasest võrdusest tundmatu y ning asendades süsteemi esimesse võrrandisse, jõuame võrrandini $x^{2n}=$ $=(2n-x)^n$ ehk $x^2+x-2n=0$. Selle lahendeist sobib vaid positiivne $(x>0)$: $x=\frac{1}{2}(\sqrt{8n+1}-1)$. Võrdusest $x+y=2n$ leiame, et $y=$ $=2n-\frac{1}{2}(\sqrt{8n+1}-1)$, mida võime kirjutada ka kujul $y=\frac{1}{4}(\sqrt{8n+1}-1)^2$.

Lähtudes võrdusest $xy=1$ jõuame võrrandile $x^{\frac{x^2+1}{x}}=x^{-n}$. Viimasest $x=1$ või $\frac{x^2+1}{x}=-n$. Et võrrandi $x^2+1=-nx$ lahendid ei ole positiivsed, siis rahuldavad esialgset süsteemi arvupaarid

$$x_1=1 \qquad y_1=1$$

ja

$$x_2=\frac{1}{2}(\sqrt{8n+1}-1) \qquad y_2=\frac{1}{4}(\sqrt{8n+1}-1)^2.$$

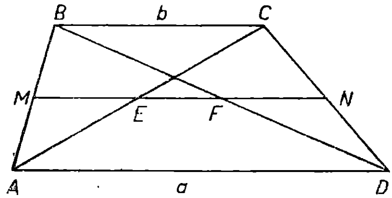
Ülesande nr. 5 lahendus. Tähistame võrduse vasaku poole tähega x. Siis

$$\begin{aligned}x^3 &= 20+14\sqrt{2}+3\sqrt[3]{(20+14\sqrt{2})^2}\cdot\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}+\\ &+3\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{(20-14\sqrt{2})^2}+20-14\sqrt{2}=\\ &=40+3\sqrt[3]{(20-14\sqrt{2})(20+14\sqrt{2})}\cdot(\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\\ &+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}})=40+3\sqrt[3]{400-2\cdot196}\cdot x=40+6x.\end{aligned}$$

Ülesandes esitatud võrdus osutub õigeks, kui võrrandi $x^3-6x-40=0$ lahendiks on arv 4. Ent selles pole raske veenduda.

Ülesande nr. 6 lahendus. Et logaritmitav avaldis peab olema positiivne, siis $0 < \sin x \leqslant 1$. Seega pole ülesandes toodud võrdus kehtiv, sest vasakpoolne avaldis $\sin x$ on positiivne, parempoolne avaldis $\log \sin x$ aga negatiivne.

Ülesande nr. 7 lahendus. Trapetsi $ABCD$ diagonaalide keskpunkte E ja F ühendav lõik asub trapetsi kesklõigul MN. Kuid $ME = FN = \frac{b}{2}$, sest lõigud



ME ja FN on vastavalt kolmnurkade ABC ja BCD kesklõigud. Järelikult

$$EF = MN - (ME + FN) = \frac{a+b}{2} - b = \frac{a-b}{2}.$$

Ülesande nr. 8 lahendus. Viisnurga tippe moodustavate kolmnurkade kõigi sisenurkade summa

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + (\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 + \gamma_1 + \gamma_2 + \delta_1 + \delta_2 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2) = 5 \cdot 180^\circ.$$

Avaldades nurgad $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ vastavate kõrvunurkade $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ ja φ_5 kaudu ning asendades need viimasesse võrdusse, saame

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = 2(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_5) - 900^\circ.$$

Et $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_5 = 540^\circ$ kui kumera viisnurga sisenurkade summa, siis $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = 180^\circ$.

Ülesande nr. 9 lahendus. Vastavate ruumalade suhe on

$$\frac{r^2h}{4R^3},$$

kus h on koonuse kõrgus, r on koonuse põhja raadius ja R on kera raadius.

Arvestades, et $r^2 = h(2R - h)$, saame otsitavaks suhteks

$$\frac{r^2h}{4R^3} = \frac{h}{4R} \cdot \frac{h(2R-h)}{R^2} = \frac{q^2}{4}(2-q).$$

Suurus q peab rahuldama võrratust $0 < q < 2$.

Ülesande nr. 10 lahendus. Ringjoon diameetriga AE asub ringis keskpunktiga A ja raadiusega AE. See ringjoon lõikab sirget AC lõigu AC sisepunktis F. Samal põhjusel lõikab ringjoon diameetriga BD sirget BC lõigu BC sisepunktis G. Mõlemad ringjooned läbivad lõigu AB keskpunkti O, mistõttu $\angle CBD = \angle GOD$ ja $\angle CAE = \angle FOE$. Ülalöeldust järeldub vahetult, et F on nurga $\angle GOD$ sees, seega $\angle GOD$ on suurem kui $\angle FOE$.

SISUKORD

«MATEMAATIKA JA KAASAJA» KEELENURK

KROONIKA

ÜLESANDEID

На эстонском языке

Тартуский государственный университет

г. Тарту, ул. Юликооли, 18

МАТЕМАТИКА И СОВРЕМЕННОСТЬ. XVI—XVII

Вспомогательные материалы для преподающих и изучающих математику

Toimetaja E. Tiit
Korrektor E. Oja

Ladumisele antud 10. III 1969. Trükkimisele antud 10. XII 1969. Paber 60×90, 1/16. Trükipoognaid 13 + kleebis. Arvestuspoognaid 13,5. Trükiarv 3000. MB-08023. Tellimise nr. 1668.

Hans Heidemanni nim. trükikoda, Tartu, Ülikooli 17/19. II.

Hind 60 kop.