Matemaatika ja kaasaeg

TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

MATEMAATIKA JA KAASAEG

XV

ABIMATERJALE MATEMAATIKA ÕPETAJATELE JA ÕPPIJATELE

TARTU 1968

GEOMEETRILISEST MEETODIST DIOFANTILISES ANALÜÜSIS[1]

U. Kaljulaid

II. ALGEBRALISED KÕVERAD

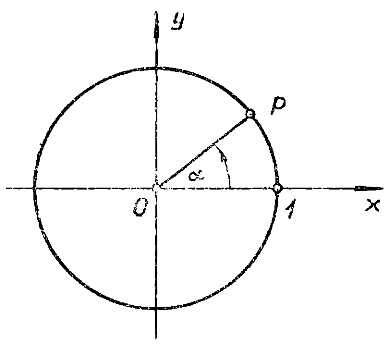
> Matemaatikud on justnagu prantslased: mida Te neile ka ei ütleks, kohe tõlgivad nad selle oma keelde ja juba ongi selles ka hoopis midagi muud...
> Goethe

4. Kõverad ja nende aritmeetika. Vaatleme nüüd, kuidas tõlgendada võrrandi lahendamist teatava geomeetrilise ülesandena. Tasandil me võime vaadelda väga mitmesuguseid punktihulki. Nende hulka kuuluvad ka kõverad. Mis on kõver?

Olgu antud võrrand $p(x, y) = 0$, mille vasakul pool on reaalarvuliste kordajatega polünoom, s. o. võrrand

$$A_m(x)y^m + A_{m-1}(x)y^{m-1} + \ldots + A_1(x)y + A_0(x) = 0,$$

kus $A_i(x) = a_{k_i}^{(i)}x^{k_i} + \ldots + a_1^{(i)}x + a_0^{(i)}$ on reaalarvuliste kordajatega polünoomid. Valime tasandil välja kõik sellised punktid (x, y), mille koordinaadid rahuldavad seda võrrandit. Saadud punktihulk ongi kõver. Näiteks võrrandi $x^2 + y^2 = 1$ lahendeid võime tõlgitseda kui tasandi R^2 punkte $P = (\cos\alpha, \sin\alpha)$, kus $0 \leqslant \alpha < 2\pi$, (vt. joon. 4). Kõvera selline defineerimine on täiesti mõistlik, kuid ta pole täiuslik. Tõepoolest, vaadeldes võrrandit $x^2 + y^2 + 1 = 0$, veendume üllatuseks, et leiduvad «kõverad» ilma ühegi punktita. Sellest ebamugavusest vabanemiseks loeme «seaduslikuks» toiminguks otsida kõvera punkte mitte reaaltasandil, vaid



Joonis 4.

[1] Artikli algus vt. Matemaatika ja kaasaeg, XIV, lk. 22—30.

komplekstasandil C^2. Seega me loeme «lubatuiks» punktid (x, y), kus x ja y on kompleksarvud. Tekib nagu väike segadus: võrrandi kordajad on ühest arvuvallast, otsitavate punktide koordinaadid teisest arvuvallast. Osutub aga, et leidub veel palju teisigi selliseid olukordi. Seda asjaolu arvestades laiendame võrrandi geomeetrilist tõlgendust järgmisel viisil. Vaatleme võrrandeid $p(x, y) = 0$, kus vasakul on polünoom üle suvalise korpuse K, ja otsime seda võrrandit rahuldavaid punkte $(x, y) \in L^2$, kus L/K on korpuse K suvaline laiend. Seega on varem antud tõlgendus erijuht $K = L = R$.

Selleks et oleks võimalik tõlgendada geomeetriliselt diofantiliste võrrandisüsteemide lahendamist, tuleb tutvuda afiinse muutkonna mõistega. Olgu L/K korpuse K mingi laiend. Vaatleme võrrandisüsteemi

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \ldots, x_n) &= 0, \\ f_2(x_1, \ldots, x_n) &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots \\ f_n(x_1, \ldots, x_n) &= 0, \end{aligned}$$

kus f_i on n muutuja polünoomid üle korpuse K. Selle süsteemi lahendid annavad meile ruumis L^n punktihulga, mida nimetatakse *afiinseks muutkonnaks*. Selline geomeetriline tõlgendus sobib siis, kui diofantiline ülesanne seisneb täisarvuliste lahendite leidmises. Kui aga nõutakse ratsionaalarvuliste koordinaatidega lahendite leidmist, siis on parem võrrandisüsteemiga siduda nn. projektiivne muutkond. Tutvumegi nüüd selle uue mõistega.

Olgu $F(x_0, \ldots, x_n)$ polünoom üle korpuse K, s. t. summa

$$F(x_0, \ldots, x_n) = \sum_{\alpha} k_\alpha x_0^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n},$$

kus $k_\alpha \in K$ ja α_i on mittenegatiivsed täisarvud. Avaldisi $k_\alpha x_0^{\alpha_0} \ldots x_n^{\alpha_n}$ nimetame *monoomideks*, täisarvu $\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ nimetame monoomi *astmeks*. Polünoomi F astmeks (tähistame $\deg F$) loeme tema monoomide suurimat astet. Kirjutame polünoomi F kujul:

$$F = H_0 + H_1 + \ldots + H_m,$$

kus sümbolitega $H_i = H_i(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, $i = 0, 1, \ldots, m$, oleme tähistanud kõigi i-astmeliste monoomide summa polünoomis F. Igaüht neist polünoomidest H_i nimetame *i-astme vormiks* ehk i-astme homogeenseks polünoomiks. Seega vorm on polünoom, mis kujutab endast samaastmeliste monoomide summat. Täpsemalt, i-astme vorm on teatava hulga i-astmeliste monoomide summa. Näiteks polünoom

$$2x_0^2x_1^5x_2 + \frac{3}{5}x_0x_1^6x_2 + 12x_0^4x_1^3x_2$$

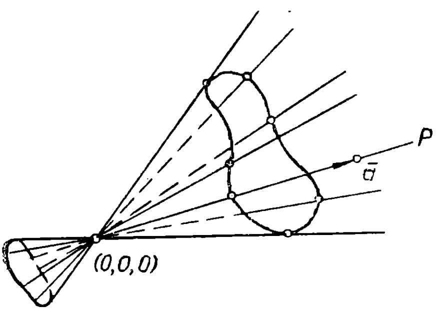
on 8-astme vorm üle korpuse Q.

Vormi H loeme *taandumatuks*, kui ei leidu selliseid vorme P ja Q üle korpuse K, et $H = P \cdot Q$.

Projektiivne algebraline muutkond on punktihulk projektiivses ruumis $P_n(K)$, mis määratakse teatava homogeensete võrrandite süsteemiga

$$H_1(x_0, \ldots, x_n) = 0,$$
$$\ldots \quad \ldots$$
$$H_m(x_0, \ldots, x_n) = 0.$$

Seega kõik polünoomid H_i on siin vormid üle korpuse K. Et iga punktihulk projektiivses ruumis $P_n(K)$ on teatav hulk nullpunkti läbivaid sirgeid ruumis K^{n+1}, siis näeme, et projektiivset algebralist muutkonda võime ruumis K^{n+1} vaadelda kui teatud koonust.



Joonis 5.

Tutvume nüüd sellise muutkonna tähtsa näitega (vt. joon. 5).

Valime projektiivsel tasandil $P_2(K)$ mingi koordinaatsüsteemi (x_0, x_1, x_2) ja kirjutame mingi m-astme vormi üle korpuse K,

$$F(x) = F(x_0, x_1, x_2).$$

Olgu see vorm taandumatu. Olgu $P \in P_2(K)$. Me teame, et punktile P vastab teatav ekvivalentsiklass hulgas $(K^3)^*$, s. o. teatav punkti $(0, 0, 0)$ läbiv sirge ruumis K^3. Kui nüüd selle sirge mõni punkt $a = (a_0, a_1, a_2)$ rahuldab võrrandit $F(x) = 0$, s. o. kui $F(a) \equiv 0$, siis selle sirge P iga teine punkt, $k \cdot a$, $k \in K^*$, rahuldab samuti võrrandit:

$$F(ka) = k^m F(a) = 0.$$

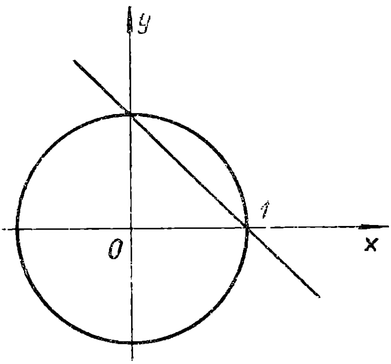
Seega rahuldab võrrandit kogu ekvivalentsiklass, kuhu kuulub punkt a, s. o. vastav projektiivse tasandi punkt. Me võime seega kõnelda projektiivse tasandi $P_2(K)$ nende punktide hulgast, mis võrrandit $F(x) = 0$ rahuldavad. Seda punktihulka projektiivsel tasandil me nimetamegi *m-järku taandumatuks algebraliseks kõveraks*. Korpust K loeme kõvera defineerimiskorpuseks; võrrand $F(x) = 0$ on kõvera võrrand valitud koordinaatsüsteemis.

Iga vorm F üle korpuse K on lahutatav taandumatute vormide korrutiseks üle selle korpuse:

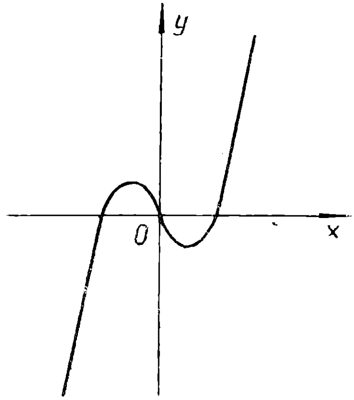
$$F = F_1^{\alpha_1} \ldots F_r^{\alpha_r}.$$

Igale vormile F_i vastab taandumatu algebraline kõver Γ_i. Seda kõverate süsteemi $\{\Gamma_i, \ldots, \Gamma_r\}$ loemegi üldiseks algebraliseks kõveraks, kõveraid Γ_i — tema komponentideks, mittenegatiivseid täisarve α_i komponentide Γ_i kordsusteks.

Vaatleme näiteid. Olgu $K = R$. Lihtsaimaks näiteks taandumatust algebralisest kõverast on sirge $x_1 + x_2 - x_0 = 0$ (vt. joon. 6); 2-järku taandumatuks algebraliseks kõveraks on ringjoon $x_1^2 + x_2^2 - x_0^2 = 0$ (vt. joon. 6); 3-järku taandumatuks algebraliseks kõveraks aga $x_1^3 + x_1 x_0^2 - x_2 x_0^2 = 0$ (vt. joon. 7), jne.



Joonis 6.

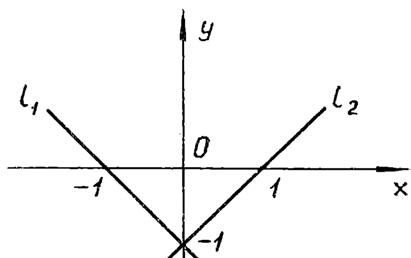


Joonis 7.

Taanduv projektiivne kõver on $x_1^2 - x_2^2 - x_0^2 - 2x_2 x_0 = 0$. Tema komponentideks on sirged l_1: $x_1 + x_2 + x_0 = 0$ ja l_2: $x_1 - x_2 - x_0 = 0$, (vt. joon. 8). Märgime, et kui algebraline kõver Γ on antud üle kompleksarvude korpuse C, siis on temaga seotud teatav pind. Tõepoolest, kui kõver Γ on antud võrrandiga

$$p(x, y) \equiv A_m(x) y^m + \ldots + A_1(x) y + A_0(x) = 0,$$

kus polünoomide A_i kordajad on kompleksarvud, siis võime vaadelda seda võrrandit rahuldavaid algebralisi funktsioone $y = f(x)$. Me teame, et iga sellise funktsiooniga on seotud Riemanni pind.[2] Seda märkust me kasutame hiljem kõvera liigi mõistega tutvumisel.



Joonis 8.

---

[2] Vt. Ü. Lumiste. Riemann topoloogia ja üldise kõvera ruumi geomeetria loojana. — Matemaatika ja kaasaeg, XI, lk. 65—76. Kui me piirdume vaid sidusate, kompaktsete Riemanni pindadega, siis on see algebralise geomeetria seisukohalt taandumatute ja ilma iseäraste punktideta kõverate uurimine.

Mis on kõvera aritmeetika? Tutvume esialgu ühe huvipakkuva erijuhuga. Vaatleme kuupkõveraid üle ratsionaalarvude korpuse Q. Iga selline kõver Γ on ühe kolmandat järku diofantilise võrrandiga antud muutkond projektiivsel tasandil $P_2(K)$, kus K/Q on mingi Q laiend (näiteks võime võtta korpuseks K mingi algebraliste arvude korpuse). Ruumi K^3 ratsionaalpunktideks loeme selliseid punkte (x_0, x_1, x_2), mille koordinaadid x_0, x_1, x_2 on ratsionaalarvud. Loogiliselt on võimalikud järgmised kolm olukorda:

1. Kõveral Γ puuduvad ratsionaalpunktid.
2. Kõveral Γ on lõplik arv ratsionaalpunkte.
3. Kõveral Γ on lõpmata palju ratsionaalpunkte.

Järgmised kolm näidet kinnitavad, et kõik toodud kolm juhtu esinevad tegelikkuses.

Näide 1. Kõveral $x_0^3 + p x_1^3 + p^2 x_2^3 = 0$, kus p on algarv, puuduvad ratsionaalpunktid.

Näide 2. Kõveral $x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 = 0$ on vaid kolm ratsionaalpunkti:

$$(-1, 1, 0); \ (0, 1, -1) \text{ ja } (1, 0, -1).$$

Näide 3. Kõveral $ax_0^3 + bx_1^3 + cx_2^3 = 0$ on ratsionaalpunkte lõpmata palju, kui $(a, b) = (a, c) = (b, c) = 1$, (s. o. kui vastavad arvupaarid on lihtsad), kui $a, b, c > 1$ ja need kolm arvu ei jagu arvudega, mis kujutavad endast mõne teise arvu ruutu [3].

Seoses nende kolme olukorraga pakuvad huvi järgmised küsimused.

1. Leida meetod, mis iga kuupkõvera korral otsustaks, kas tal on ratsionaalpunkte või mitte.

2. Leida meetod, mis iga kuupkõvera korral otsustaks, kas tal ratsionaalpunktide olemasolu korral on neid punkte lõplik või lõpmatu arv.

3. Kui kuupkõveral on ratsionaalpunkte lõpmata palju, kas ei saa siis kõiki neid leida lõpliku arvu teadaolevate ratsionaalpunktide kaudu?

Vastused kahele esimesele küsimusele pole teada. Küll on aga teada vastus kolmandale küsimusele ja see antakse Mordell-Weyli teoreemiga. Sellest teoreemist tuleb lähemalt juttu artikli kolmandas osas.

Vaatleme nüüd üldjuhtu ning esitame järgmise ülesande. Olgu meil antud mingi algebraline muutkond V *üle* korpuse K projektiivses ruumis $P_n(K)$. Kas muutkonnal V on K-ratsionaalseid

---

[3] Näiteks kõver $3x_0^3 + 5x_1^3 + 7x_2^3 = 0$ või kõver $6x_0^3 + 35x_1^3 + 11x_2^3 = 0$. Näidetes toodud faktide tõestused on lihtsad ja lugeja leiab nad kergesti. On kerge kontrollida, et koos ratsionaalpunktiga (x_0, x_1, x_2) on selle kõvera ratsionaalpunktiks ka $(x_0(bx_1^3 - cx_2^3), x_1(cx_2^3 - ax_0^3), x_2(ax_0^3 - bx_1^3))$.

punkte[4], s. o. punkte $x_i/x_j \in K$? Milline on nende punktide hulga struktuur ja omadused? Iga edusamm nende raskete küsimuste lahendamisel pakub otsest huvi diofantiliste võrrandisüsteemide teooria seisukohalt. Esitatud küsimuste uurimisel leiame mõndagi huvitavat juba ühedimensionaalsete muutkondade puhul, s. o. kui meil on tegemist algebraliste kõverategа. Edaspidi tegelemegi selle erijuhuga.

Mõni sõna ajaloost. Diofantilise geomeetria loomine üle suvaliste korpuste toimus aastail 1930—1955 põhiliselt O. Zariski, B. L. van der Waerdeni ja A. Weyli töödes. See polnud üksnes püüe käsitluse suurema üldsuse poole, vaid oli ka püüdeks rakendada diofantilises geomeetrias uusi tehnilisi vahendeid ja meetodeid. Ainult neilt võis loota abi veetlevate, kuid raskete diofantiliste probleemide lahendamisel. Selliseks lootuseks oli alust, kuna algebra on tihti andnud hoopis enam, kui temalt otseselt küsitakse.

5. Algebraliste kõverate biratsionaalne ekvivalents. Mõni sõna selle punkti pealkirjaks toodud mõiste kohta. Kõigi algebraliste kõverate hulgal on võimalik läbi viia klassijaotus, mida nimetatakse kõverate biratsionaalseks ekvivalentsiks. Selle mõistega on seotud biratsionaalne geomeetria, üks algebralise geomeetria klassikalisi osi, mida sajandivahetusel viljelesid peamiselt itaalia matemaatikud. Suurt huvi pakuvad geomeetria seisukohalt sellised objektid, mis on ühised kõigile ühte klassi kuuluvaile kõveraile (või pindadele algebraliste pindade teoorias) — nn. biratsionaalsed invariandid. Kõverate tähtsaimaks biratsionaalseks invariandiks on *liik* e. žanr, mille tõi geomeetriasse B. Riemann. Liik annab võimaluse kõverate klassifikatsiooniks, mille tähtsusest vastavate diofantiliste ülesannete lahendamisel oli juttu sissejuhatuses. Sellele klassifikatsioonile on pühendatud artikli kolmas osa.

Olgu meil võrrandiga $F(x_0, x_1, x_2) = 0$ antud algebraline kõver Γ selline, et $x_0 = 0$ pole tema komponent, s. o. vorm F ei jagu monoomiga x_0. Tähistanud $x_1/x_0 = x$, $x_2/x_0 = y$, saame

$$0 = F(x) = x_0^n F(1, x, y) = x_0^n f(x, y).$$

Et $x_0 = 0$ pole kõvera Γ komponent, siis võrrand

$$f(x, y) = 0$$

annab meile kõvera Γ afiinses koordinaatsüsteemis (x, y).

Olgu taandumatu algebraline kõver Γ antud võrrandiga $f(x, y) = 0$. Vaatleme ratsionaalfunktsioone $\varphi(x, y) = \dfrac{\alpha(x, y)}{\beta(x, y)}$, kus α ja β on polünoomid üle korpuse K ja β ei jagu polünoomiga f. Funktsiooni φ loeme *triviaalseks* kõveral Γ ja kirjutame $\varphi = 0(\Gamma)$, kui f/α (s. o. kui α jagub polünoomiga f).

---

[4] Afiinsel muutkonnal on K-ratsionaalse punkti kõik koordinaadid põhikorpuse K elemendid.

Meid huvitasid algebralise kõvera punktid koordinaatidega põhikorpusest K. Selliseid punkte me nimetasime *K-ratsionaalseiks*. On aga otstarbekas vaadelda ka *K-algebralisi* punkte, s. o. selliseid punkte, mille koordinaadid on korpuse K mingist laiendist. Olgu nüüd $(x_0, y_0) \in \Gamma$ mingi punkt kõveral (ükskõik, kas ratsionaalne või algebraline). Siis on $\varphi(x_0, y_0)$ määratud, kui $\beta(x_0, y_0) \neq 0$. Selliseid punkte $(x_0, y_0) \in \Gamma$, mille jaoks $\beta(x_0, y_0) = 0$, on vaid lõplik arv. Tõepoolest, et β ei jagu f-ga ja f on taandumatu (Γ on taandumatu kõver), siis eliminatsiooniteooria [5] kohaselt on süsteemil

$$\begin{aligned} \beta(x, y) &= 0 \\ f(x, y) &= 0 \end{aligned}$$

lahendite arv $\leqslant (\deg \beta) \cdot (\deg f)$, kus $\deg f$ tähistab polünoomi f astet. Seega $\varphi(x, y)$ on määratud kõveral Γ peaaegu kõikjal, võib-olla lõplik arv punkte välja arvatud.

Osutub, et ratsionaalfunktsiooni triviaalsus kõveral Γ on samaväärne tema triviaalsusega kõvera kõigis algebralistes punktides [6]. Tõepoolest, kui $\varphi = 0(\Gamma)$, siis $\varphi(x_0, y_0) = 0$ leiab aset tänu sellele, et f/α, sest $f(x_0, y_0) = 0$ kõigi punktide $(x_0, y_0) \in \Gamma$ jaoks. Vastupidi, kui kõigi Γ algebraliste punktide (x_0, y_0) korral $\varphi(x_0, y_0) = 0$, aga $\varphi \neq 0$ (Γ), siis α ei jagu f-ga ja süsteemil

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 0 \\ \varphi(x, y) &= 0 \end{aligned}$$

oleks vaid lõplik arv lahendeid. See on aga vastuolu, sest kõveral on lõpmata palju algebralisi punkte.

Toome nüüd ratsionaalfunktsioonide $\varphi(x, y) = \dfrac{\alpha(x, y)}{\beta(x, y)}$ hulgal sisse klassijaotuse. Selleks me loeme ratsionaalfunktsioone $\varphi(x, y)$ ja $\psi(x, y)$ *võrdseiks kõveral Γ*, kui funktsioon $\varphi - \psi$ on kõveral triviaalne. Lugedes kõik kõveral omavahel võrdsed funktsioonid ühte klassi, saame ratsionaalfunktsioonide hulgal klassijaotuse. Selle klassijaotuse iga klassi nimetame *ratsionaalfunktsiooniks kõveral Γ*. Olgu $\bar{\varphi}$ ja $\bar{\psi}$ suvalised kaks klassi ja $\omega \in \bar{\varphi}$, $\tau \in \bar{\psi}$ suvalised ratsionaalfunktsioonid neis klassides. Defineerime klasside liitmise ja korrutamise valemitega:

$$\bar{\varphi} + \bar{\psi} = \overline{\omega + \tau},$$

$$\bar{\varphi} \cdot \bar{\psi} = \overline{\omega \cdot \tau}.$$

Teiste sõnadega: klasside suvaliste esindajate abil toome sisse tehted nende klassidega. On kerge kontrollida, et klasside hulk moodustab nüüd korpuse, mida me tähistame $K(x, y)$. Korpust $K(x, y)$ nimetame *ratsionaalfunktsioonide korpuseks* kõveral Γ.

---

[5] Vt. G. Kangro. Kõrgem algebra. Tallinn, 1962, lk. 280—285.

Näiteks, sirgel $y=1$ on ratsionaalfunktsioonide korpuseks $K(x, 1) = K(x)$. Korpuse $K(x, y)$ iga elemendi $\bar{\varphi}$ saab ühesel viisil avaldada kujul:

$$\varphi = a_0(x) + a_1(x)y + \ldots + a_{m-1}(x)y^{m-1},$$

kus $a_i(x)$ on ratsionaalfunktsioonid ja $m = \deg_y f(x, y)$[7]. Esialgu tundub, et korpuses $K(x, y)$ on meil kaks funktsiooni x ja y «privilegeeritud seisuses», sest nende kaudu saame avaldada kõik teised funktsioonid. See on aga nii vaid näiliselt, sest iga mittekonstantse funktsiooni $x' \in K(x, y)$ jaoks võib leida sellise $y' \in K(x, y)$, et

$$x = \varphi(x', y') \quad \text{ja} \quad y = \psi(x', y'),$$

kusjuures leidub selline polünoom g üle korpuse K, et $g(x', y') = 0$, s. o. $K(x, y) \equiv K(x', y')$.

Kui kahel algebralisel kõveral on samad ratsionaalfunktsioonide korpused, siis nimetame neid *biratsionaalselt ekvivalentseiks*. Näiteid kõverate biratsionaalsest ekvivalentsist leiab lugeja punktis 7.

Olgu antud kõver $\Gamma : f(x, y) = 0$ ja kõver $\Gamma' : g(x', y') = 0$. Osutub, et kõverate Γ ja Γ' biratsionaalseks ekvivalentsiks on tarvilik ja piisav, et leiduksid sellised ratsionaalfunktsioonid φ, ψ, φ', ψ' et $x' = \varphi'(x, y)$, $y' = \psi'(x, y)$, $x = \varphi(x', y')$, $y = \psi(x', y')$.

Kui punkt $(x_0, y_0) \in \Gamma$ on K-ratsionaalne, siis ilmselt on seda ka punkt $(\varphi'(x_0, y_0), \psi'(x_0, y_0)) \in \Gamma'$ ja vastupidi. Me eeldasime siin muidugi, et funktsioonid φ, ψ, φ', ψ' oleksid vaadeldavais punktides määratud. Kuid need neli funktsiooni pole määratud vaid lõplikus arvus kõvera Γ punktides. Seega me jõudsime olulise faktini:

T e o r e e m. Biratsionaalselt ekvivalentsete kõverate K-ratsionaalsete punktide vahel on üksühene vastavus, kui mõlemal kõveral vaatlusest välja jätta teatav lõplik arv punkte (kus funktsioonid φ', ψ', φ, ψ pole määratud).

6. Kõvera iseärased punktid. Vaatleme algebralist kõverat Γ, mis on määratud võrrandiga $f(x, y) = 0$. Polünoomil $f(x, y)$ kui kahe muutuja funktsioonil eksisteerivad tuletised f_x, f_y, f_{xy}, ... Punkti P nimetame kõvera Γ r-kordseks punktiks, kui selles punktis kõik polünoomi f tuletised kuni järguni $r-1$ on võrdsed nulliga, aga mingi r-järku tuletis on nullist erinev; $r > 1$ korral nimetame r-kordset punkti *iseäraseks punktiks*. Selliste iseäraste punktide arv ja kordsus on tõkestatud: kui kordsete komponen-

---

[6] Funktsiooni φ triviaalsus kõvera Γ punktis (x_0, y_0) tähendab, et $\varphi(x_0, y_0)$ on määratud ja $\varphi(x_0, y_0) = 0$. Ratsionaalpunktide jaoks analoogiline väide ei kehti.

tideta n-järku algebralisel kõveral on punkte P_i kordsustega r_i, $i \in I$, siis kehtib võrratus

$$\sum_{i \in I} r_i(r_i - 1) \leqslant n(n-1).$$

Kui kõver on taandumatu, siis kehtib isegi tugevam võrratus:

$$\sum_{i \in I} r_i(r_i - 1) \leqslant (n-1)(n-2).$$

Näitena vaatleme iseäraste punktide küsimust kuupkõverail. Olgu Γ võrrandiga $f(x, y) = 0$ määratud kuupkõver. Võtame kasutusele koordinaatsüsteemi, mille alguspunkt asub kõveral Γ. Siis ei ole polünoomil f vabaliiget ja me kirjutame ta

$$f(x, y) = ax + by + g(x, y),$$

kus polünoom g sisaldab vaid teise ja kolmanda astme monoome. Siit leiame kergesti $f_x(0, 0)$ ja $f_y(0, 0)$:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} = a, \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)} = b.$$

Kui $a = b = 0$, siis punkt $(0, 0)$ on kuupkõvera Γ iseäraseks punktiks, kuna $f_x(0, 0) = 0$ ja $f_y(0, 0) = 0$.

Vaatleme sirge $y = kx$ lõikepunkte kõveraga Γ:

$$0 = f(x, kx) = x\,(a + bk) + g(x, kx) = x(a + bk) + x^2 l(x), \qquad (*)$$

kus $l(x)$ on lineaarpolünoom, s. o. $l(x) = cx + d$. Saadud võrrandist võime x leida. Väärtus $x = 0$ rahuldab toodud võrrandit. Kui $a + bk \neq 0$, siis $x = 0$ on võrrandi (*) ühekordseks lahendiks ja sirget $y = kx$ nimetame sel juhul kõvera Γ *lõikajaks*. Kui $a + bk = 0$, siis $x = 0$ on kahekordne lahend võrrandile (*) ja sirget $y = kx$ nimetame siis kõvera Γ *puutujaks*. Siit näeme, et juhul $a = b = 0$ on iga sirge $y = kx$ kõvera Γ puutujaks ja $x = 0$ on võrrandi (*) kahekordne lahend.

See võimaldab meil tõestada, et kuupkõveral pole üle ühe iseärase punkti. Oletame, et punktid $P_1 = (x_1, y_1)$ ja $P_2 = (x_2, y_2)$ on Γ erinevad iseärased punktid. Valime koordinaatsüsteemi nii, et $(0, 0) \in \Gamma$, ja ühikvektorite suuna nii, et $x_1 = x_2$. Paneme läbi punktide P_1 ja P_2 sirge l ning koostame selle sirge ja Γ lõikepunktide leidmiseks võrrandi. Kuna P_1 ja P_2 on iseärased punktid, siis eeltoodu põhjal $x = x_1$ ja $x = x_2$ peavad mõlemad olema selle võrrandi kahekordsed lahendid. Seega on koostatud võrrandil vähemalt 4 lahendit. See on aga vastuolu, sest võrrandi aste $\leqslant 3$ (kuupkõveral ja sirgel on kõige rohkem kolm lõikepunkti). Väide on tõestatud.[8]

---

[7] Siin $\deg_y f(x, y)$ tähistab polünoomi $f(x, y)$ astet muutuja y suhtes.

[8] Edasisi näiteid Ü. L u m i s t e. Diferentsiaalgeomeetria. Tallinn, 1963, lk. 35.

7. Näide kõverate biratsionaalsest ekvivalentsist. Terve hulga näiteid kõverate biratsionaalsest ekvivalentsist annab meile järgmine tulemus.

Teoreem. Ilma iseärasusteta kuupkõver Γ, millel on vähemalt üks ratsionaalpunkt Q, on biratsionaalselt ekvivalentne kõveraga, mille võrrandiks on

$$y^2 = x^3 + Ax + B, \text{ kus } 4A^3 + 27B^2 \neq 0.$$

Tõestuseks valime koordinaatsüsteemi nii, et selle alguspunkt langeks ühte ratsionaalpunktiga $Q \in \Gamma$. Siis pole kõvera võrrandis $F_3(x, y) = 0$ vabaliiget ja polünoom F_3 on avalduv vormide summana

$$F_3(x, y) = H_1(x, y) + H_2(x, y) + H_3(x, y).$$

Sirge $y = tx$ lõikepunktid kõveraga Γ leiame võrrandist

$$\begin{aligned} 0 = F(x, tx) &= H_1(x, tx) + H_2(x, tx) + H_3(x, tx) = \\ &= xH_1(1, t) + x^2H_2(1, t) + x^3H_3(1, t). \end{aligned}$$

Me näeme, et $x = 0$ on selle võrrandi üks lahend. Ülejäänud lahendid leiame ruutvõrrandist

$$H_1(1, t) + xH_2(1, t) + x^2H_3(1, t) = 0, \qquad (**)$$

millest saame

$$\begin{aligned} x &= \frac{-H_2(1, t) \pm \sqrt{H_2(1, t)^2 - 4H_1(1, t) \cdot H_3(1, t)}}{2H_3(1, t)} = \\ &= \frac{-H_2(1, t) \pm z}{2H_3(1, t)}, \end{aligned}$$

kus ruutjuure tähistasime sümboliga z.

Kuna H_1, H_2, H_3 on t suhtes polünoomid, siis näeme, et x avaldub z ja t kaudu ratsionaalselt; kuna $y = tx$, siis avaldub ka y seega z ja t kaudu ratsionaalselt.

Vastupidi, x avaldis näitab, et z avaldub t ja x kaudu ratsionaalselt. Kuna aga $t = \frac{y}{x}$, siis näeme, et ka z ja t avalduvad x ja y kaudu ratsionaalselt. Toodud arutlused tähendavad, et kõver Γ on biratsionaalselt ekvivalentne kõveraga

$$z = \sqrt{H_2(1, t)^2 - 4H_1(1, t)H_3(1, t)},$$

s. o. kõveraga

$$z^2 = H_2(1, t)^2 - 4H_1(1, t)H_3(1, t) = P_4(t).$$

Leiame nüüd kõverale Γ puutuja läbi antud ratsionaalpunkti Q, mille me valisime ka koordinaatide alguspunktiks. Eelmises punktis me veendusime, et puutuja lõikab kõverat Γ ratsionaalpunktis[9] O. Selle punkti valime uueks koordinaatide alguspunk-

[9] Tõepoolest võrrandist $l(x) = cx + d = 0$ saame $x_3 = -\frac{d}{c} \in K$, mistõttu ka $y_3 \in K$.

tiks. Seega, mingi $t_0 \in K$ korral puutub sirge $y = t_0 x$ kõverat Γ punktis Q ja läbib punkti O. Kuna Q on puutepunkt, siis $t = t_0$ korral on võrrandil (**) kordne lahend, mistõttu selle ruutvõrrandi diskriminant võrdub nulliga; seega $P_4(t_0) = 0$.

Võttes $\tau = t - t_0$, arendame $P_4(t)$ muutuja τ astmete järgi:

$$P_4(t) = S_4(\tau) = a\tau + b\tau^2 + c\tau^3 + d\tau^4 = z^2.$$

Siit saame

$$\left(\frac{z}{\tau^2}\right)^2 = d + c\frac{1}{\tau} + b\frac{1}{\tau^2} + a\frac{1}{\tau^3}.$$

Tähistanud siin $\frac{1}{\tau} = v$ ja $\frac{z}{\tau^2} = u$ ja võtnud $au = \alpha$, $av = \beta$, saame

$$a^2u^2 = a^3v^3 + a^2bv^2 + a^2cv + a^2d$$

ja

$$\alpha^2 = \beta^3 + b\beta^2 + ac\beta + a^2d.$$

Nüüd aga lubab asendus $\gamma = \beta + \frac{b}{3}$ viia selle võrrandi nõutud kujule. Et kõik tehtud muutujate vahetused olid ratsionaalsed, siis on teoreemis toodud väide tõestatud.

(Järgneb)

BRIDŽIÜLESANNE

	♠ 7 6 ♡ 5 3 2 ♢ Ä K ♣ Ä K	
♠ 10 8 ♡ E 10 9 ♢ — ♣ 6 5 4 3	N W O S	♠ 3 ♡ S ♢ 9 8 7 6 ♣ 9 8 7
	♠ — ♡ Ä K 8 7 6 ♢ — ♣ E S 10 2	

Rist on trump. Toodud seisus peab S käigul olles vastaste igasuguse kaitsemängu korral võtma vähemalt 7 tihi. (Lahendus on toodud leheküljel 144).

DIFERENTSIAALVÕRRANDITE TEOORIA OLEMUSEST JA KUJUNEMISEST

T. Sõrmus

Põhilised meetodid kõrgema matemaatika rakendusteks loodusteadustes annab teatavasti matemaatiline analüüs. Seetõttu on loodusteaduste ja matemaatika vaheline seos eriti tihe matemaatilise analüüsi puhul, kusjuures see seos on iseloomulik analüüsi nii klassikalistele kui ka kaasaegsetele arvukatele harudele ja toimib mõlemas suunas — loodusteaduste areng mõjustab ja suunab nii analüüsi meetodite kui ka teooria täiustamist, samal ajal kui on täheldatav ka vastupidine protsess.

Peatselt pärast matemaatilise analüüsi tekkimist 17. sajandil omandab selles kindlad piirjooned kõrgema matemaatika uus distsipliin — diferentsiaalvõrrandite teooria, mille uurimisobjektiks on diferentsiaalvõrrandid. Algebralistest võrranditest erinevad need eeskätt selle poolest, et otsitavaks on neis funktsioon, kusjuures võrrandid sisaldavad ka vähemalt ühte otsitava funktsiooni tuletist. Kõne all olev teooria on tunduvalt tihedamini kui matemaatilise analüüsi mistahes teine haru seotud inimkonna praktilise tegevusega mitmel elualal. Põgusal tutvumisel teosega, mis käsitleb diferentsiaalvõrrandeid ja nende rakendusi füüsikas, on sageli raske teha vahet, kas on tegemist mingi füüsikaprobleemi lahendamisega või matemaatikaprobleemi lahenduse füüsikalise tõlgendusega. Aine erakordselt tihe seos rakendustega on seletatav sellega, et enamasti just diferentsiaalvõrrandid võimaldavad kirjeldada loodusseadusi matemaatilistes sümbolites, mistõttu nad on kujunenud füüsikas, inseneriteadustes jm. esinevate probleemide lahendamise üheks põhivahendiks. Kinnituseks nendele väidetele toome kaugeltki mitte täieliku loetelu probleemidest, mis kõik kuuluvad diferentsiaalvõrrandite teooria rakendusvalda. Selle teooria vahendite abil uuritakse rakettide ja Maa tehiskaaslaste liikumisseadusi ja lennutrajektoore, pendli ja membraani võnkumisi, elektrotehnikat ja raadioasjandust, laevaehituse ja lennundustehnika probleeme, seismilisi võnkumisi ja valguse leviku seadusi, soojusjuhtivust ja sisepõlemismootorite teooriat, radioaktiivse aine kiirguse ja bakterite paljunemisseadusi, kandekonstruktsioonide ja toereaktsioonide tugevust, arvutatakse kosmoselendude esimesi, teisi ja kolmandaid kosmilisi kiirusi jne.

Diferentsiaalvõrrandite teooria niigi juba ulatuslik rakendusvaldkond avardub pidevalt. Käesoleval ajal tegeleb terve teadlaste ja inseneride armee maailma paljudes ülikoolides, uurimisinstituutides, laboratooriumides ning konstruktsioonibüroodes loodusseaduste järjest sügavama uurimisega, nende seaduste esitamisega ja rakendamisega diferentsiaalvõrrandite abil. Edasine töö loodusnähtuste tunnetamisel nõuab saadud võrrandite uurimis- ja lahendusmeetodite pidevat täiustamist, uute uurimismeetodite loomist jpm.

Käesolev kirjutis avab meie kogumiku veergudel diferentsiaalvõrrandite teooria problemaatikat ja selle meetodeid valgustava artiklite sarja.

1. Diferentsiaalvõrrandite teooria põhimõisted

Alustame diferentsiaalvõrrandi mõistest. Diferentsiaalvõrrandi nimetust kannab võrrand, mis seob otsitavat funktsiooni tema tuletistega ja sõltumatute muutujatega.

Näiteks radioaktiivse aine lagunemisprotsessi kirjeldab diferentsiaalvõrrand

$$\frac{dm}{dt} + km = 0, \tag{1}$$

kus otsitavaks on funktsioon $m(t)$, mis iseloomustab vaadeldava aine hulga $m(t)$ sõltuvust ajast t; k on radioaktiivset ainet iseloomustav positiivne konstant. Võrrandi (1) tuletamisel lähtutakse radioaktiivse aine eksperimentaalselt kindlakstehtud lagunemisseadusest, mis ütleb, et vaadeldava aine lagunemiskiirus $\frac{dm}{dt}$ ajahetkel t on võrdeline selle aine hulgaga m samal hetkel. Seega võime kirjutada, et

$$\frac{dm}{dt} = -km,$$

mis annabki diferentsiaalvõrrandi (1).

Diferentsiaalvõrrand on aluseks ka sputnikut orbiidile viiva mitmeastmelise kanderaketi liikumiskiiruse $v(t)$ arvutamisel. Orbiidile viimise teelõigu lõpus liigub rakett niisugusel trajektooril, kus raketi liikumisel võib praktiliselt jätta arvestamata raskusjõu ja kiirusvektori sihi erinevustest tingitud kiiruskao. Nendes lihtsustatud tingimustes on raketi liikumiskiirus vaadeldaval teelõigul määratud võrrandiga

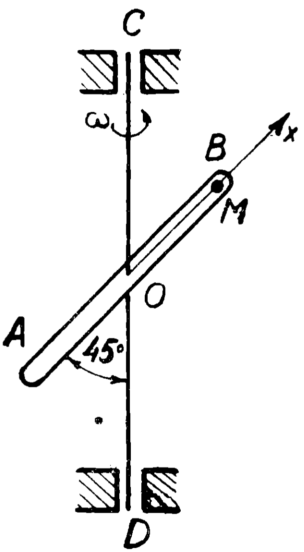
$$\frac{G}{g_0}\frac{dv}{dt} = P - X - \frac{G}{g_0} g_h \sin\vartheta, \tag{2}$$

mis on kiirusfunktsiooni $v(t)$ diferentsiaalvõrrandiks. Selles esinevatest suurustest $G(t)$ fikseerib raketi üldkaalu (koos kütusega) ajahetkel t, $P(t)$ on reaktiivjõud, $x(t)$ ja $\vartheta(t)$ iseloomustavad vastavalt aerodünaamilist takistust ja kiirusvektori sihi kaldenurka horisondi suhtes, g_0 ja g_h aga tähistavad raskuskiirendust vastavalt Maa pinnal ja raketi poolt saavutatud kõrgusel $h(t)$.

Klaastoruke AOB (vt. joon. 1) pöörleb konstantse nurkkiirusega ω vertikaalse telje CD ümber ja moodustab selle teljega nurga CD, on 45°. Torukeses liigub kuulike M massiga m. Kuulikese liikumisseadus, hõõrdumistakistust arvestamata, avaldub järgmise diferentsiaalvõrrandiga

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg\cos 45^\circ + m\omega^2 x\cos^2 45^\circ, \qquad (3)$$

kus m on kuulikese M mass, x — kuulikese M keskpunkti koordinaat x-teljel (vt. joon. 1), $m\omega^2 x\cos^2 45^\circ$ — tsentrifugaaljõud ja $mg\cos 45^\circ$ — raskusjõu projektsioon x-teljele.



Joonis 1.

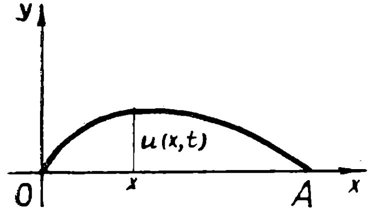
Võrrand (3) on saadud Newtoni II liikumisseaduse põhjal. Selle kohaselt peab kuulikese M massi m ja kiirenduse $\frac{d^2x}{dt^2}$ korrutis võrduma kõigi vaadeldavale massile rakendatud liikumise sihis mõjuvate jõudude (meie näites tsentrifugaal- ja raskusjõu) resultandiga.

Esitatud näidetes sõltub otsitav funktsioon ühest muutujast (vaadeldud juhtudel ajast). Niisugusel juhul räägitakse *harilikust diferentsiaalvõrrandist.*

Paljudel juhtudel on loodusnähtuse matemaatiliseks karakteristikuks mitme muutuja funktsioon, mis sõltub nii ajast kui ka ruumi koordinaatidest. Sisuliselt uurime niisugusel juhul loodusnähtuse kulgu ajas ja ruumis. Märgime, et loodusnähtusi kirjeldavad mitme muutuja funktsioonid osutuvad lahenditeks võrranditele, mis seovad vaadeldavat funktsiooni tema teatud järku osatuletistega ja argumentidega. Niisugused võrrandid kannavad *osatuletistega diferentsiaalvõrrandite* nimetust. Viimaste näiteks toome horisontaalselt pingule tõmmatud homogeense keele väikesi vertikaalsihilisi omavõnkumisi kirjeldava diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0. \qquad (4)$$

Siin on eeldatud, et keele otspunktid O ja A (vt. joon. 2) asuvad x-teljel; loetakse, et keele asend ajahetkel t on funktsiooni $u(x, t)$ graafikuks (fikseeritud t korral). Suurus a, mis iseloomustab keele pinget lähteasendis, on konstant.



Joonis 2.

Oletagem, et füüsik jõuab oma eksperimentide seeria ja uurimuste teatud etapil momendini, mil ta paneb kirja uuritavat nähtust iseloomustava protsessi mingi diferentsiaalvõrrandi abil. Kuid nii saadud ja matemaatiliselt väljendatud seadus on vaid teaduslik hüpotees ja jääb selleks seniks, kuni ta on kas praktikas kinnitatud või ümber lükatud. Just nimelt ülalmärgitud uurimuste etapil lülituvad vaadeldava nähtuse uurimistesse matemaatilised, täpsemini küll diferentsiaalvõrrandite teooria meetodid. Nende vahendusel tuleb selgitada kirjapandud võrrandi lahendi kui nähtust iseloomustava funktsiooni omadusi. Seega tuleb saadud võrrand lahendada või siis osata võrrandi enda kuju ja liiki uurides sellest välja lugeda temaga määratud funktsiooni omadusi. Me jõudsimegi oma arutelus diferentsiaalvõrrandite teooria põhiprobleemide juurde — diferentsiaalvõrrandite lahendamise ja lahendite omaduste uurimise juurde. Meetodid nende põhiprobleemide lahendamiseks sõltuvad oluliselt uuritavate võrrandite liigist. Kaasajal on diferentsiaalvõrrandite teooria jagunenud rohkearvulisteks harudeks nii aine kui ka võrrandite liikide järgi. Eeskätt märgime, et temas on eraldunud kaks suurt haru: harilike diferentsiaalvõrrandite teooria ja osatuletistega diferentsiaalvõrrandite teooria. Edaspidi vaatleme ainult harilikke diferentsiaalvõrrandeid ja nimetame neid lühidalt diferentsiaalvõrrandeiks.

Diferentsiaalvõrrandite liigitamise üheks aluseks on *võrrandi järgu* mõiste. Viimane defineeritakse kui suurim diferentsiaalvõrrandis esinevatest otsitava funktsiooni tuletiste järkudest. Eespool esitatuist on võrrandid (1) ja (2) esimest, võrrandid (3) ja (4) aga teist järku diferentsiaalvõrrandid. Üldkujul esitatud võrrand

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{5}$$

on aga n-järku diferentsiaalvõrrand.

Nagu märgitud, on diferentsiaalvõrrandite teooria üheks peaülesandeks antud võrrandiga määratud funktsiooni leidmine, s. o. võrrandi lahendamine. Võrrandi (5) lahendiks vahemikus (a, b) on iga funktsioon $y = \varphi(x)$, mis rahuldab antud võrrandit samaselt argumendi x suhtes vahemikus (a, b). Nii on funktsioon $y = \sin x$ diferentsiaalvõrrandi

$$y'' + y = 0 \tag{6}$$

lahendiks kogu reaalteljel $(-\infty, \infty)$, sest valemi $(\sin x)'' =$

$-\sin x$ põhjal kehtib vahemikus $(-\infty, \infty)$ argumendi x suhtes samasus $(\sin x)'' + \sin x = 0$. Kuid samas vahemikus rahuldavad võrrandit (6) ka kõik funktsioonid

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x, \tag{7}$$

kus C_1 ja C_2 on suvalised konstandid. Seega on võrrandil (6) lõpmata palju lahendeid. Sealjuures saab näidata, et valem (7) sisaldab võrrandi (6) kõik lahendid. Ka eespool nimetatud lahendi $y = \sin x$ saame hulgast (7), valides $C_1 = 1$ ja $C_2 = 0$.

On lihtne kontrollida, et esimest järku diferentsiaalvõrrandi (1) lahendite hulga vahemikus $(-\infty, \infty)$ moodustavad funktsioonid

$$m(t) = Ce^{-kt}, \tag{8}$$

kus C on suvaline konstant. Konstandi C erinevatel väärtustel saame siit terve hulga võrrandi (1) erinevaid lahendeid.

Üldiselt määrabki iga diferentsiaalvõrrand terve hulga funktsioone, mis kõik on tema lahenditeks. Et nende seast ühte konkreetset, antud probleemile vastavat lahendit leida, tuleb arvestada teatud lisaandmeid ehk lisatingimusi. Viimased on sageli katsetulemused. Praktikas esineb lisatingimusi mitmel kujul. Vaatleme siin kahte sagedamini esinevat juhtu. Kui võrrandi (5) lahendit otsitakse lisatingimustel

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \tag{9}$$

kus $x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$ on mingid kindlad arvud, siis räägitakse *algtingimustega ülesandest*. Tingimused (9) kannavad sealjuures *algtingimuste* nimetust. Kui võrrandile (5) kaasnevad lisatingimused kujul

$$G_i(y(a), y'(a), \ldots, y^{(n-1)}(a);\ y(b), y'(b), \ldots, y^{(n-1)}(b)) = 0,$$
$$i = 1, 2, \ldots, n, \tag{10}$$

kus lisatingimused seovad otsitavat funktsiooni $y(x)$ tema esimest, teist jne. järku tuletise väärtustega vaadeldava lõigu $[a, b]$ otspunktides, siis öeldakse, et tegemist on *rajatingimustega ülesandega* ehk *rajaülesandega*. Tingimusi (10) nimetatakse vastavalt *rajatingimusteks*.

Diferentsiaalvõrrandi (6) puhul näiteks vastab lahend $y = \cos x$ algtingimustele $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, kuna rajatingimustele $y(0) - 1 = 0$, $y'(\pi) - 2 = 0$ vastab lahend $y = \cos x - 2 \sin x$.

Diferentsiaalvõrrandite teoorias eritletakse võrrandi *üld-* ja *erilahendite* mõisteid. Võrrandi (5) üldlahendiks nimetatakse niisugust n suvalisest konstandist sõltuvat lahendit $y = f(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, mis sobival konstantide $C_1, C_2, \ldots, C_n$ valikul rahuldab algtingimusi (9). Lahendid, mis saadakse üldlahendist konstantide $C_1, \ldots, C_n$ fikseeritud väärtuste korral, kannavad selle võrrandi erilahendite nimetust. Peale nende võib mõningate võrrandite puhul esineda veel nn. *iseäraseid* ehk *singulaarseid* lahendeid, millest lähemalt räägitakse sarja ühes järgnevas artiklis. Üldiselt on algtingimustega ülesanded üheselt lahenduvad, s. o. antud diferentsiaalvõrrandil on parajasti üks lahend, mis rahuldab juurdelisatud algtingimusi. Erinevalt sellest ei tarvitse rajatingimustega ülesanne olla üheselt lahenduv. Nii on rajaülesandel $y'' + \pi^2 y = 0$, $y(0) = 0$, $y(1) = 0$ lõpmata palju lahendeid $y = C \sin \pi x$.

Diferentsiaalvõrrandite teooria valdkonda kuuluvad eespool sõnastatud küsimused alg- ja rajatingimustega ülesannete ühesest lahenduvusest, võrrandi üld- ja erilahendite leidmisest ning sageli ka küsimused sellest, kas üldlahend hõlmab võrrandi kõik lahendid või mitte.

2. Diferentsiaalvõrrandi lahendamise geomeetriline interpretatsioon

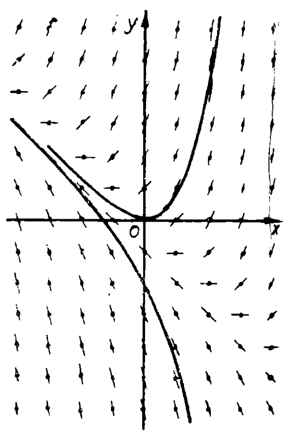
Diferentsiaalvõrrandi lahendamise geomeetrilisel interpreteerimisel piirdume esimest ja teist järku võrranditega.

Mistahes võrrandi

$$y' = f(x, y) \tag{11}$$

lahendi $y = \varphi(x)$ kui funktsiooni graafikuks xy-tasandil on kõver, mida nimetatakse selle võrrandi *integraalkõveraks*. Eelneva põhjal teame, et üldiselt määrab iga diferentsiaalvõrrand terve pere integraalkõveraid. Teatavasti määrab funktsiooni $\varphi(x)$ tuletis $\varphi'(x)$ kõvera $y = \varphi(x)$ igas punktis $(x, \varphi(x))$ puutuja tõusu. Et diferentsiaalvõrrandi (11) iga lahendi $y = \varphi(x)$ puhul kehtib samasus $\varphi'(x) - f(x, \varphi(x)) = 0$ x-telje teatud vahemikus (a, b), siis määrab diferentsiaalvõrrand (11) integraalkõvera $y = \varphi(x)$ igas punktis (x, y) seose selle kõvera puutuja tõusu y' ja vastava punkti koordinaatide x ja y vahel.

Mida võib öelda diferentsiaalvõrrandi põhjal tema integraalkõverate kohta, kui võrrand on veel lahendamata? Fikseerime xy-tasandil funktsiooni $f(x, y)$ pidevuse piirkonna D ja kanname selle igasse punkti (x, y) tükikese sirgest tõusuga $f(x, y)$. Saadud kujundit — punkti koos teda läbiva sirge tükikesega, mille määrab täielikult $(x, y, f(x, y))$, nimetatakse *diferentsiaalvõrrandi joonelemendiks* punktis (x, y). Joonelement näitab, et integraalkõver $y = \varphi(x)$ läbib punkti (x, y) tõusu $f(x, y)$ sihis ja tema puutujaks selles punktis on joonelementi $(x, y, f(x, y))$ kuuluv sirge. Kui täita kogu piirkond D joonelementidega, siis saame antud võrrandi *joonelementide diagrammi* ehk *sihivälja*. Geomeetrilises tõlgenduses tähendab diferentsiaalvõrrandi lahendamine niisuguste joonte leidmist, mis piirkonna D punkte läbivad nendes punktides antud joonelementidega määratud sihtides. Joonisel 3 on kujutatud diferentsiaalvõrrandile $y' = x + y$ vastav joonelementide diagramm. Piirkonnaks D on siin kogu xy-tasand. Samuti on joonisele kantud kaks integraalkõverat. Viimaste võrranditeks on $y = e^x - x - 1$ ja $y = -e^x - x - 1$.



Joonis 3.

Algtingimustega ülesande $y' = f(x, y)$ $y(x_0) = y_0$ lahendamise geomeetriliseks tõlgenduseks on niisuguse integraalkõvera leidmine, mis läbiks algtingimustega antud punkti (x_0, y_0).

Diferentsiaalvõrrandile kaasnevate rajatingimustega püstitatakse integraalkõverate kohta teatud nõudmised antud lõigu otspunktides. Võrrandile (6) kaasnenud rajatingimustega $y(0) = 1$ ja $y'(\pi) = 2$ näiteks nõutakse, et integraalkõver läbiks lõigu alguspunkti $x = 0$ ordinaadiga 1, lõigu lõpp-punktis $x = \pi$ aga oleks kõvera puutuja tõusuks 2.

Teist järku diferentsiaalvõrrandi

$$y'' = f(x, y, y') \tag{12}$$

lahendamist tõlgendatakse järgmiselt. Matemaatilisest analüüsist on teada, et kaks korda diferentseeruva funktsiooni $y = \varphi(x)$ graafiku kõverus k on määratud valemiga [1]

$$k = \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}}.$$

Sealjuures on kõvera kumerus (üles või alla) määratud y'' märgiga antud punktis [2]. Seega on teist järku diferentsiaalvõrrandiga (12) antud iga tema integraalkõvera $y = y(x)$ suvalises punktis (x, y) seos selle kõvera punkti koordinaatide x, y, kõvera puutuja tõusu y' ja joone kõverust ning kumerust määrava suuruse y'' vahel samas punktis. Integraalkõverateks on siin need antud punkti (x, y) sihis y' läbivad kõverad, mille kumerus ja kõverus antud punktis on määratud vastavalt funktsiooni $f(x, y, y')$ märgiga ja arvuga

$$k = \frac{f(x, y, y')}{[1 + (y')^2]^{3/2}}.$$

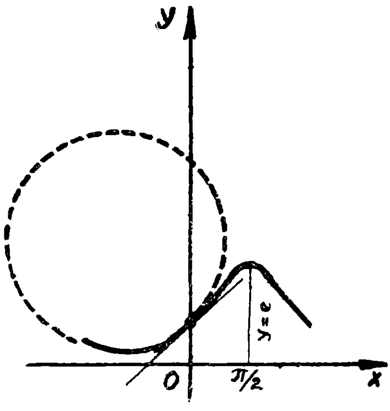
Diferentsiaalvõrrandi $y'' = y' \cos x - y \sin x$ puhul on näiteks suvaliste (x, y, y') väärtuste korral integraalkõvera kõverusraadius $\varrho = \frac{1}{k}$ määratud valemiga

$$\varrho = \frac{[1 + (y')^2]^{3/2}}{y' \cos x - y \sin x}.$$

Algtingimuste $y(0) = y'(0) = 1$ puhul otsime siin niisugust integraalkõverat,

---

[1] Vt. näit. G. K a n g r o. Matemaatiline analüüs I, Tln. 1965, lk. 287.
[2] Samas, lk. 263.



Joonis 4.

mis punkti (0, 1) läbiks puutuja tõusuga $y'(0) = 1$, asuks punkti (0, 1) küllaldaselt väikses ümbruses ülalpool puutujat, s. o. oleks kumer alla (sest $y''(0, 1, 1) > 0$) ning mille kõverusraadiuseks oleks punktis (0,1)

$$\varrho = \frac{2\sqrt{2}}{1-0}, \quad \text{s. o.} \quad \varrho = 2\sqrt{2}.$$

Joonisel 4 on kujutatud selle võrrandi joonelement punktis (0, 1) ning punktiiriga joonestatud ring, millel on sama joonelement, kumerus ja kõverus antud punktis. Pideva joonega on kujutatud algtingimustega ülesandele vastav integraalkõver $y = e^{\sin x}$.

3. Diferentsiaalvõrrandite teooria tekkeloost

17. sajandi esimene pool on matemaatilise analüüsi arengus iseloomustatav perioodina, mil toimub tema kahe meetodi — diferentseerimise ja integreerimise intensiivne kujunemisprotsess. Sellel perioodil ei tunnetata veel seost diferentseerimise ja integreerimise vahel, mistõttu need meetodid sisuliselt arenevadki esialgu iseseisvalt. Alles 1670. aastal näitab J. Barrow, et integreerimine ja diferentseerimine on teineteise pöördoperatsioonid. Väite põhjendamisel tugineb Barrow geomeetrilisele argumentatsioonile ja annab seega intuitiivse ettekujutuse matemaatilise analüüsi põhioperatsioonide vahelisest seosest.

Täielikule arusaamisele sellest seosest jõuavad I. Newton ja G. W. Leibniz 17. sajandi lõpul. Leibnizi, Newtoni ja J. Bernoulli nimedega on seotud ka diferentsiaalvõrrandite valdkonda kuuluvate esimeste ülesannete lahendamine. Kuid neid käsitletakse siiski veel matemaatilise analüüsi konkreetsete ülesannetena. Seepärast on 17. sajandil vara rääkida diferentsiaalvõrrandite teooriast kui niisugusest.

Diferentsiaalvõrrandi üldine mõiste, nagu paljud teisedki matemaatilise analüüsi mõisted ja sümbolid, pärineb Leibnizilt. Matemaatika uue tärkava haru arengu algetapil lahendati praktikas üleskerkinud diferentsiaalvõrrandeid juhuslike meetoditega. Iga diferentsiaalvõrrandi lahendamine oli siis probleemiks omaette. Puudus veel ettekujutus diferentsiaalvõrrandite erinevatest klassidest, antud klassi võrrandite puhul rakendatavatest lahendusmeetoditest, üld- ja erilahendite mõistetest ja ülesande geomeetrilisest tõlgendusestki.

Iseseisvaks kujuneb diferentsiaalvõrrandite teooria alles 18.

sajandi jooksul. See sajand on läinud loodusteaduste ajalukku tormilise arengu sajandina. Eriti intensiivselt arenesid 18. sajandi esimesel poolel taevamehhaanika, tehniline ning hüdromehhaanika ja teised rakendusmatemaatika alad. Taevamehhaanika probleemidest ootasid lahendamist probleemid, mida Newtoni gravitatsiooniseaduse alusel seni polnud õnnestunud lahendada. Eriti pakiliseks kujunes probleem päikesesüsteemi kehade liikumise iseärasuste põhjendamisest Newtoni klassikaliste mehhaanikaseaduste põhjal. Loomisel oli Kuu liikumist täielikult selgitav teooria, mis oli tollal eriti vajalik navigatsioonis. Samasse uurimisvaldkonda kuulus ka planeetide orbiitide stabiilsuse küsimuse selgitamine ja sellest tulenev vajadus määrata orbiite pika ajavahemiku kohta. Viimase ülesande lahendamine nõudis täiesti uusi matemaatilisi meetodeid, mis loodigi koos analüütilise mehhaanika rangelt põhjendatud alustega L. Euleri, J. d'Alembert'i ja J. L. Lagrange'i töö viljana. On oluline märkida, et just mehhaanika teoreetiliste aluste loomisel langeb otsustav osa harilikele diferentsiaalvõrranditele. Punkti ja punktide süsteemi dünaamika seaduste tuletamisel üleskerkinud probleemid määrasid diferentsiaalvõrrandite teooria iseseisva arengu esimesel etapil terve arengusuuna. Selleks kujunes mitmesuguste teist järku mittelineaarsete[3] diferentsiaalvõrrandite ja võrrandisüsteemide lahendusmeetodite väljaarendamine. Niisuguste võrrandite lahendamisega olid nimetatud perioodil seotud veel mitmed teised probleemid nagu geodeetiliste joonte määramine, punkti liikumine takistavas keskkonnas, mitmesugused mehhaanika, füüsika ja geomeetria ekstremaalülesanded jmt.

Teiselt poolt omandas 18. sajandi esimesel poolel väga suure tähtsuse materiaalsete punktide nii lõpliku kui ka lõpmatu vabadusastmetega süsteemide väikeste võnkumiste teooria. Tõuke nende küsimuste uurimiseks andis ühelt poolt astronoomilisteks vaatlusteks vajalike täpsete pendelkellade ehitamine ja teiselt poolt täpsete vahendite konstrueerimine esimesteks gravimeetrilisteks mõõtmisteks. Seega tõusis päevakorda matemaatiliste ja füüsikaliste pendlite teooria loomine, see aga omakorda viis lineaarsete (peamiselt esimest ja teist järku) diferentsiaalvõrrandite teooria loomisele. Samal perioodil jõuti võnkuva keele ja hääle leviku seaduste uurimisel ka esimeste osatuletistega diferentsiaalvõrranditeni.

Mitmesuguste taevamehhaanika probleemide lahendamine viis tol perioodil paradoksaalsena näiva olukorrani, et uuritavatele loodusseadustele vastavaid diferentsiaalvõrrandeid ei õnnestunud lahendada elementaarfunktsioonides. Järgides Newtonit otsiti siin esialgu väljapääsu võrrandite lahendamises astmeridade abil.

[3] Otsitava funktsiooni ja tema tuletiste suhtes lineaarne võrrand kannab lineaarse diferentsiaalvõrrandi nimetust. Kõik teised diferentsiaalvõrrandid on mittelineaarsed.

Kuid ei Newton ega tema kaasaegsed ei uurinud seejuures vaadeldavate astmeridade koonduvuse küsimust ega selgitanud astmeridadega teostatavate tehete lubatavust (tol perioodil puudus isegi rea koonduvuse mõiste). On loomulik, et niisuguse teoreetiliselt põhjendamata lahendusmeetodiga kaasnesid ebakõlad rakendustes ja omad paradoksidki. Sellega jõuti ühelt poolt diferentsiaalvõrrandite lähislahendamise lähtekohtadeni, teiselt poolt hakati diferentsiaalvõrrandi lahendiks lugema iga funktsiooni, ka mitteelementaarset, mis rahuldab diferentsiaalvõrrandit ja mille avaldises esineb lõplik arv integraale elementaarfunktsioonidest (teisiti öeldes — mis avaldub kvadratuurides).

Nii kaasnes diferentsiaalvõrrandite teooriale esitatud probleemide ja ülesannete kuhjumisega selle tärkava distsipliini hargnemine kitsamatesse suundadesse. Peamiseks kujunes sel perioodil diferentsiaalvõrrandite klassifitseerimise ja suuremate võrrandiklasside üldiste lahendusmeetodite väljatöötamise tendents. Järjest suuremat tähtsust hakkasid omandama ka ligikaudse lahendamise meetodid. Juba selles staadiumis hargnesid need kaheks — analüütilisteks ja numbrilisteks meetoditeks. Esimeste puhul otsitakse lähislahendit funktsioonina, mis teatud punkti ümbruses vähe erineks täpsest lahendist (näit. astmeridade meetod), teiste puhul otsitakse ühe konkreetse lahendi numbrilisi väärtusi tabelina (näit. Euleri meetod).

Üldtunnustatuks on kujunenud arvamus, et uue aine metoodilise käsitluse ja teooria aluste järjekindel väljaarendamine saab alguse (18. sajandi keskpaiku) esimeste süstemaatiliste uurimustega nn. *Riccati võrrandi* kohta. Selle nime all tuntakse võrrandit

$$y' + \varphi(x)y + \psi(x)y^2 = \chi(x),$$

kus $\varphi(x)$, $\psi(x)$ ja $\chi(x)$ on teatavas vahemikus $a < x < b$ määratud funktsioonid. Diferentsiaalvõrrandite teooria rajajatest teenekamateks loetakse L. Eulerit, J. d'Alembert'i, A. Clairaut'd ja J. L. Lagrange'i. Kuigi mõningate küsimuste (näit. lineaarsete diferentsiaalvõrrandite teooria) käsitlemisel jõuti 18. sajandil lõplike tulemusteni, peab üldiselt siiski ütlema, et kirjeldataval perioodil loodud teoreetiline materjali käsitlus ei tugine veel rangetele loogilistele alustele. Alles 19. sajandi algul loodi, peamiselt A. L. Cauchy uurimustega, diferentsiaalvõrrandite rangelt põhjendatud teooria, milles keskne koht kuulub mistahes vaadeldava diferentsiaalvõrrandi lahendi olemasolule. Siin uuritakse küsimust, millised nõuded funktsiooni $f(x, y)$ kohta tagavad võrrandi

$$y' = f(x, y) \tag{11}$$

lahendi olemasolu iga algtingimuse $y(x_0) = y_0$ korral, kui (x_0, y_0) on funktsiooni $f(x, y)$ määramispiirkonna punkt. Niisugune probleem tulenes võrrandite ligikaudse lahendamise vajadustest. Järjest sagedamini jõuti olukorrani, kus diferentsiaalvõrrand ei ole lahendatav ei elementaarfunktsioonides ega kvadratuurides. Seega jääb ainsaks võimaluseks võrrandi ligikaudne lahendamine. Edasine töö lähislahendiga on sisuliselt mõeldav alles pärast seda, kui ollakse veendunud otsitava lahendi olemasolus. Koos lahendi olemasoluga kerkib peatselt esile ka küsimus lahendi ühesusest antud algtingimuste korral. Täpsemalt öeldes tuleb näiteks võrrandi (11) puhul selgitada, missugused funktsiooni $f(x, y)$ omadused tagavad selle, et algtingimust $y(x_0) = y_0$ määravat punkti (x_0, y_0) läbib parajasti üks võrrandi (11) integraalkõver.

Esimesed teoreemid diferentsiaalvõrrandi lahendi olemasolust ja ühesusest pärinevad 19. sajandi esimesest poolest ja kuuluvad Cauchyle.

Seega kujunesid uues distsipliinis tema arengu kahe esimese sajandi jooksul välja teooria põhisuunad.

4. Diferentsiaalvõrrandite teooria aine alajaotus

Harilike diferentsiaalvõrrandite teooria areng on jaotatav kaheks perioodiks — diferentsiaalvõrrandite teooria arengu klassikaliseks ja kaasaegseks perioodiks. Esimene algab Newtoni ja Leibniziga, ulatudes 19. sajandi teise poolde, mil S. Lie' rühmateooriale tuginevate töödega algab diferentsiaalvõrrandite teooria kaasaegne arenguperiood. Esimese perioodi peaülesandeks oli võimalikult laiade diferentsiaalvõrrandite klasside lahendusmeetodite leidmine ja täiustamine. Diferentsiaalvõrrandite üldise teooria loomine langeb põhiliselt arengu kaasaegsesse perioodi. Käesoleval ajal jaotatakse diferentsiaalvõrrandite teooria järgmiseks neljaks põhisuunaks:

A. *Diferentsiaalvõrrandite lahendusmeetodid.* Neid meetodeid võib jaotada omakorda nelja klassi.

1° Võrrandite klassifitseerimine elementaarfunktsioonides või kvadratuurides integreeruvateks klassideks ja nende lahendusmeetodite väljatöötamine. Kõige ulatuslikumaks ja täiuslikult läbiuuritumaks kujuneb lineaarsete diferentsiaalvõrrandite ja võrrandisüsteemide klass. Teiste klasside puhul kasutatakse muutujate asendust (eesmärgiks on uue muutuja niisugune sidumine vanaga, et diferentsiaalvõrrand muutub uue muutuja suhtes võimalikult lihtsamini lahenduvaks), järgu alandamist (eesmärgiks on muutujate sobiva asendusega taandada võrrand madalamat järku diferentsiaalvõrrandiks), integreeruvustegureid (diferentsiaalvõrrandi korrutamist niisuguse funktsiooniga, et teisendatud võrrandi mõlemal pool on mingite funktsioonide täisdiferentsiaalid), integraalteisenduste ja operaatormeetodeid. Märgime, et kvadratuurides lahenduvate diferentsiaalvõrrandite klass on küllaltki piiratud. Seetõttu on vägagi olulised diferentsiaalvõrrandite lahendamise ligikaudsed meetodid, mis võimaldavad põhimõtteliselt lahendada kõiki praktikast kerkinud diferentsiaalvõrrandeid.

2° Ligikaudse lahendamise analüütilised meetodid, mille puhul otsitakse niisugust funktsiooni, mis teatud piirkonnas (näit. punkti (x_0, y_0) ümbruses) küllalt vähe erineks lahendatava diferentsiaalvõrrandi lahendist. Kirjeldatud omadusega funktsioon on lähendiks diferentsiaalvõrrandi lahendile. Lähendite leidmiseks kasutatakse mitmesuguseid meetodeid nagu lahendi arendamine Taylori ritta või trigonomeetrilisse ritta, iteratsiooni ehk järkjärgulise lähendamise meetod, antud diferentsiaalvõrrandi asendamine konkreetsetele nõuetele vastava lähendvõrrandiga (viimane peab olema suhteliselt lihtsalt lahenduv) ja mitmed teised meetodid.

3° Ligikaudse lahendamise numbrilised meetodid. Kaasajal, mil on võimsad arvutid, leiavad numbrilised lahendusmeetodid eriti ulatuslikku rakendust. Nende puuduseks on üldreeglina kaasnevad ulatuslikud arvutused, mida kroonib vaid ühe erilahendi arvuliste väärtuste saamine. Teise lahendi väärtuste leidmisel tuleb kõik arvutused teostada uuesti.

Ligikaudsetele nii analüütilistele kui ka numbrilistele meetoditele on iseloomulik see, et geomeetriliselt toimub siin täpsete lahendite kui integraalkõverate asendamine lihtsamate kõveratega, näiteks polügonaalsete, polünomiaalsete, sinusoidaalsete jt. kõveratega. Sealjuures on lähendused seda paremad, mida lähemale tulevad lähendavad kõverad integraalkõveratele.

4° Ligikaudse lahendamise graafilised meetodid. Need on üldreeglina rakendatavad siis, kui uuritavas probleemis pole eriti täpsed tulemused olulised ning vajatakse vaid lahendi kvalitatiivsete omaduste üldpilti.

Kõikide lähendusmeetodite üheks oluliseks küsimuseks on lähendite vea hindamismeetodite täiustamine.

B. *Diferentsiaalvõrrandite lahendite olemasolu* ja *ühesus*. Lahendi olemasolu selgitamine on eriti oluline enne võrrandi ligikaudset lahendamist. Isegi siis, kui diferentsiaalvõrrand, millele otsitakse ligikaudseid lahendeid, kajastab mingit loodusnähtust, ja seega lahend, mis seda nähtust kirjeldab, peab ilmselt eksisteerima, tuleb vaadeldava diferentsiaalvõrrandi lahendi olemasolus eelnevalt veenduda. Nimelt ei tohi ju unustada, et matemaatilistes sümbolites kirjapandud loodusseadus — uuritav diferentsiaalvõrrand, on siiski ainult reaalsuses esineva nähtuse idealiseering.

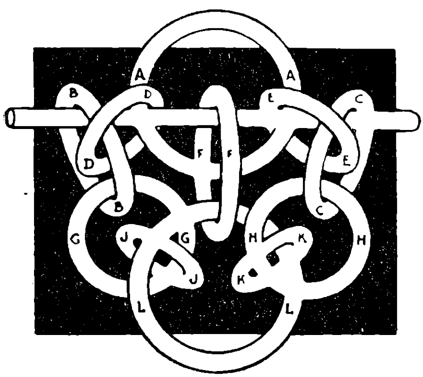
C. *Diferentsiaalvõrrandite kvalitatiivne teooria.* Eelmiste harude kõrval langeb diferentsiaalvõrrandite teoorias ja selle rakendustes, eriti viimasel ajal, kaaluv osa nendele küsimustele, mis kajastavad võrrandite lahendite kvalitatiivseid omadusi vaadeldava diferentsiaalvõrrandi määramispiirkonnas või selle osades. Käesoleval ajal ongi lahendite kvalitatiivse teooria probleemid juhtprobleemideks diferentsiaalvõrrandite üldises teoorias.

Lahendite kvalitatiivne teooria hargneb omakorda kitsamaid probleeme uurivateks harudeks. Sageli näiteks vajab selgitamist küsimus, kas võrrandi need lahendid, mis oma väärtustelt on lähedased antud punktis, jäävad lähedasteks ka argumendi mistahes väärtuste korral. Selliste küsimuste lahendamise teoreetilised alused ja meetodid kuuluvad diferentsiaalvõrrandi *lahendite stabiilsuse teooria* valdkonda. Pärast A. M. Ljapunovi ja A. Poincare esimesi fundamentaalseid töid on nendes küsimustes eriti suuri teeneid nõukogude matemaatikutel I. G. Petrovskil, N. G. Tšetajevil, I. G. Malkinil jt.

Küllaltki ulatuslikuks on kujunenud lahendite kvalitatiivse teooria see haru, mis tegeleb *lahendite ostsilleeruvuse* küsimustega. Siin selgitatakse lahendite nullkohtade esinemise sagedust antud lõigul. Seejuures öeldakse, et lahend on antud lõigul ostsilleeruv, kui tal on enam kui üks nullkoht sellel lõigul. Samas hinnatakse lahendite nullkohtade võimalikku kaugust teineteisest, otsitakse tunnuseid, mis võimaldavad võrrelda erinevate võrrandite lahendite ostsilleeruvuse sagedust jm.

Diferentsiaalvõrrandite kvalitatiivne teooria uurib peale selle lahendite sõltuvust algtingimustest, diferentsiaalvõrrandite iseäraseid punkte (s. t. punkte, kus võrrandi lahendi olemasolu ja ühesuse teoreemi tingimused pole täidetud), integraalkõverate kulgu nende ümber ja mitmeid teisi küsimusi.

D. *Diferentsiaalvõrrandite analüütiline teooria.* Siin selgitatakse diferentsiaalvõrrandite teooria nii üldisi kui ka kvalitatiivseid küsimusi, tuginedes analüütiliste funktsioonide teooriale, ja vaadeldakse seega diferentsiaalvõrrandeid üldiselt komplekstasandil. Viimane võimaldab uurida võrrandite lahendeid maksimaalse suurusega piirkondades ja lõpmatuspunkti ümbruses, s. o. uurida lahendite asümptootilisi omadusi.



AHEL JA KEPP

Kõrval olev joonis on jäänud lõpetamata. Joonise ülesandeks on kujutada ahelat, mille viit lüli läbib kepp. Kuidas lõpetada joonis? Kas saadav ahel osutub kinniseks või lahtiseks või on koguni mõlemad tulemused võimalikud? Mitu erinevat lahendit on sellel ülesandel?

GRAAFID JA LAUSEÕPETUS

M. Koit

Graafiteooria tähtsust matemaatikas on viimastel aastatel tõstnud tema tulemuste kasutuselevõtt õige mitmes teadusharus. Muuhulgas leiame graafide huvitavaid rakendusi keelealastes uurimustes. Tutvumegi järgnevas graafiteooria kõige lihtsamate mõistete [1] rakendamisega lause struktuuri kirjeldamisel.

Kui lausele või ka pikemale tekstile seada vastavusse graaf, siis võib sellega muuta näitlikuks nii sõnade (sõnarühmade) omavahelised sõltuvused kui ka paigutuse üksteise suhtes. Seejuures jätame arvesse võtmata sõnade individuaalsed omadused ja vaatleme lauset lihtsalt kui lineaarselt järjestatud sõnahulka X.

Koosnegu hulk X n sõnast. Moodustame selle hulga mittetühjade alamhulkade M_k pere $\mathfrak{M}$ nii, et on täidetud kaks tingimust:

1° $\mathfrak{M}$ sisaldab hulka X ennast ja kõiki tema ühesõnalisi alamhulki;

2° kui pere $\mathfrak{M}$ kaks alamhulka M_i ja M_j lõikuvad, siis sisaldub üks neist teises.

Näiteks olgu antud lause

Ühel pilves märtsihommikul istub
puuladvas esimene kuldnokk. (1)

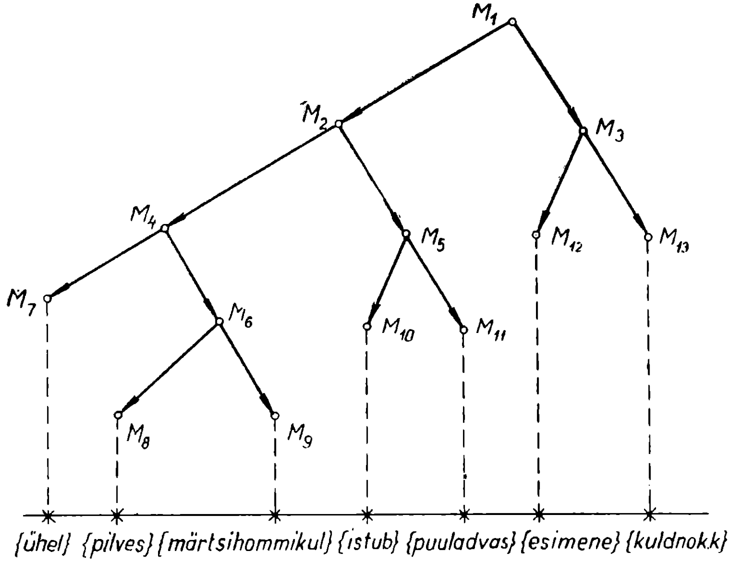
Vaatleme seda lineaarselt järjestatud hulgana X, elementidega x_i $(i=1, 2, \ldots, 7)$, kus x_i tähistab lauses i-ndal kohal seisvat sõna. Koostame pere $\mathfrak{M}$, millesse kuulugu järgmised hulgad:

1) $M_1=\{x_1, x_2, \ldots, x_7\}=X$,
2) $M_2=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$,
3) $M_3=\{x_6, x_7\}$,
4) $M_4=\{x_1, x_2, x_3\}$,
5) $M_5=\{x_4, x_5\}$,
6) $M_6=\{x_2, x_3\}$,
7) kõik hulga X ühesõnalised alamhulgad:
$M_7=\{x_1\}$, $M_8=\{x_2\}$, $\ldots$, $M_{13}=\{x_7\}$.

Kerge on kontrollida, et pere $\mathfrak{M}$ rahuldab tingimusi 1° ja 2°.

[1] Vt. Koit, M. Pilk graafiteooriasse. — Matemaatika ja kaasaeg, XIV, lk. 31—46.

Niisugust peret võime kujutada orienteeritud graafina — puuna, mille tippudele vastavad hulgad $M_k \in \mathfrak{M}$. Tipud M_i ja M_j ühendame kaarega $(M_i \rightarrow M_j)$ parajasti siis, kui hulk M_i sisaldab hulka M_j ning ei leidu sellist hulka $M_k \in \mathfrak{M}$, mille korral kehtiks seos $M_i \supset M_k \supset M_j$. Lausele (1) vastab siis puu joonisel 1.



Joonis 1.

Lihtne on näha, et ühest ja samast tipust M_k väljuvate orienteeritud kaarte lõpp-punktidele on vastavusse seatud hulga X mittelõikuvad alamhulgad. Tõepoolest: kui kaks niisugust alamhulka M_i ja M_j ($M_i \subset M_k$, $M_j \subset M_k$) lõikuksid, siis tingimuse 2^c põhjal sisalduks üks neist teises, näiteks $M_j \subset M_i$, ning graafis ei tohiks olla kaart $(M_k \rightarrow M_j)$. Järelikult esitavad tipust M_k väljuvate kaarte otspunktid (tipud) hulga M_k tükelduse[2]. Neid alamhulki nimetame hulga M_k vahetuteks moodustajateks. Muidugi võivad neil omakorda olla vahetud moodustajad — nende hulkade kohta ütleme, et nad on hulga M_k moodustajad. Puu igale tipule vastab hulga X (lause) mingi moodustaja $M_k \in \mathfrak{M}$, sellepärast nimetame niiviisi konstrueeritud puud ka lause moodustajate puuks.

Käesolevas artiklis vaatleme üksnes nn. binaarseid moodustajate süsteeme, kus igal moodustajal — välja arvatud need, mis koosnevad ühestainsast sõnast — on ainult kaks vahetut moodustajat.

---

[2] Hulga M tükelduseks nimetatakse tema mittetühjade ühisosata alamhulkade niisugust hulka, mille ühend on M.

Lause (1) moodustajaks on iga hulk M_k ($k=2, 3, \ldots, 13$) perest $\mathfrak{M}$. Vahetud moodustajad on hulgad M_2 ja M_3 — alus- ja öeldisrühm. Tippudele, millest ei välju ühtegi kaart (nn. ummiktippudele) vastavad ühesõnalised moodustajad $M_7, M_8, \ldots, M_{13}$.

Unustame nüüd hetkeks, missugustest hulkadest koosneb pere $\mathfrak{M}$. Lause (lineaarselt järjestatud hulga X) ja tema moodustajate puu põhjal, kus tippude juures ei tarvitsegi olla vastavate hulkade tähiseid, võime iga alamhulga $M_k \subset X$ kohta öelda, kas ta kuulub moodustajate peresse $\mathfrak{M}$, s. t. kas moodustajate puus leidub temale vastav tipp.

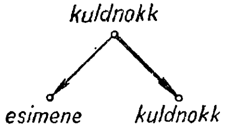
Tõepoolest, mingi alamhulk on hulga X moodustaja parajasti siis, kui moodustajate puus võib leida sellise tipu, millest väljuvate maksimaalse pikkusega orienteeritud teede lõpp-punktidele vastavusse seatud elementide (sõnade) hulk osutub vaadeldavaks alamhulgaks. Näiteks lause (1) moodustajaks on hulk {*istub puuladvas*} $= M_5$, ei ole aga hulk {*märtsihommikul istub puuladvas*}, sest ei leidu moodustajate puu tippu, millest algavad orienteeritud teed lõpeksid kõik selle hulga elementidega ja iga element oleks seejuures mingi tee lõpp-punktiks.

Mispärast on üldse mõtet rääkida lause moodustajatest ja moodustajate puust? Kujutleme, et lause saamine toimub järgmiselt. Olgu antud sõnastik ja terve rida binaarseid seoseid, nagu alus-öeldis (käändsõna ja verbi seos), täiend-alus (kahe käändsõna teatavat liiki seos) jms., kus ühtlasi on määratud komponentide järjekord. Igas seoses teeme vahet põhi- ja laiendsõna vahel. Näiteks loeme seoses täiend-alus põhisõnaks alusena esineva käändsõna, seoses alus-öeldis samuti aluse jne. Lause saamiseks fikseerime kõigepealt ühe sõna mingis vormis, olgu see kas või *kuldnokk*, ja seejärel mingisuguse binaarse seose, näiteks alus-öeldis, mille põhisõnaks sobib valitud sõna. Nüüd valime öeldise kohale mingi sõna (verbi), nagu *vilistab*. Kui lause peab koosnema ainult kahest liikmest, lõpetame valiku sellega. Kui aga on vaja laiendada näiteks alust, siis leiame veel ühe sellise seose (nagu täiend-alus), mille põhisõnaks saab olla laiendatav sõna. Valides seejärel täiendiks kasvõi sõna *esimene*, jõuame lauseni

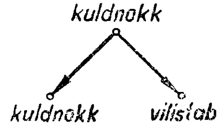
Esimene kuldnokk vilistab. (2)

Seoste ja sõnade järjestikust valikut analoogilisel viisil jätkates võime saada ka pikemaid ning keerukama struktuuriga lauseid. Kujutame seda protsessi graafide abil. Iga binaarne seos valitakse vastavalt varasemal etapil fikseeritud sõnale. Seamegi mistahes seosele vastavusse kolmetipulise puu, mille juureks (s. o. tipp, millesse ei sisene ühtegi kaart) on see varem leitud sõna, ülejäänud kaks tippu aga vastavad seose põhi- ja laiendsõnale. Põhisõnani — selleks jääb sama sõna, mille alusel seose valisime — viigu puus jämedamalt joonistatud orienteeritud kaar.

Näiteks viimati saadud lauses (2) valisime seose täiend-alus sõna *kuldnokk* järgi. Vastav kolmetipuline puu on toodud joonisel 2.



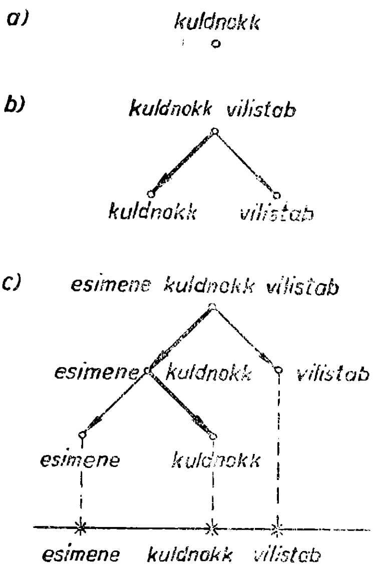
Joonis 2.



Joonis 3.

Lause moodustamine tähendab niisugust liiki graafide ühendamist teataval viisil. Nii saame lause (2) graafi joonisel 2 kujutatud puu ühendamisel joonisel 3 esitatud puuga.

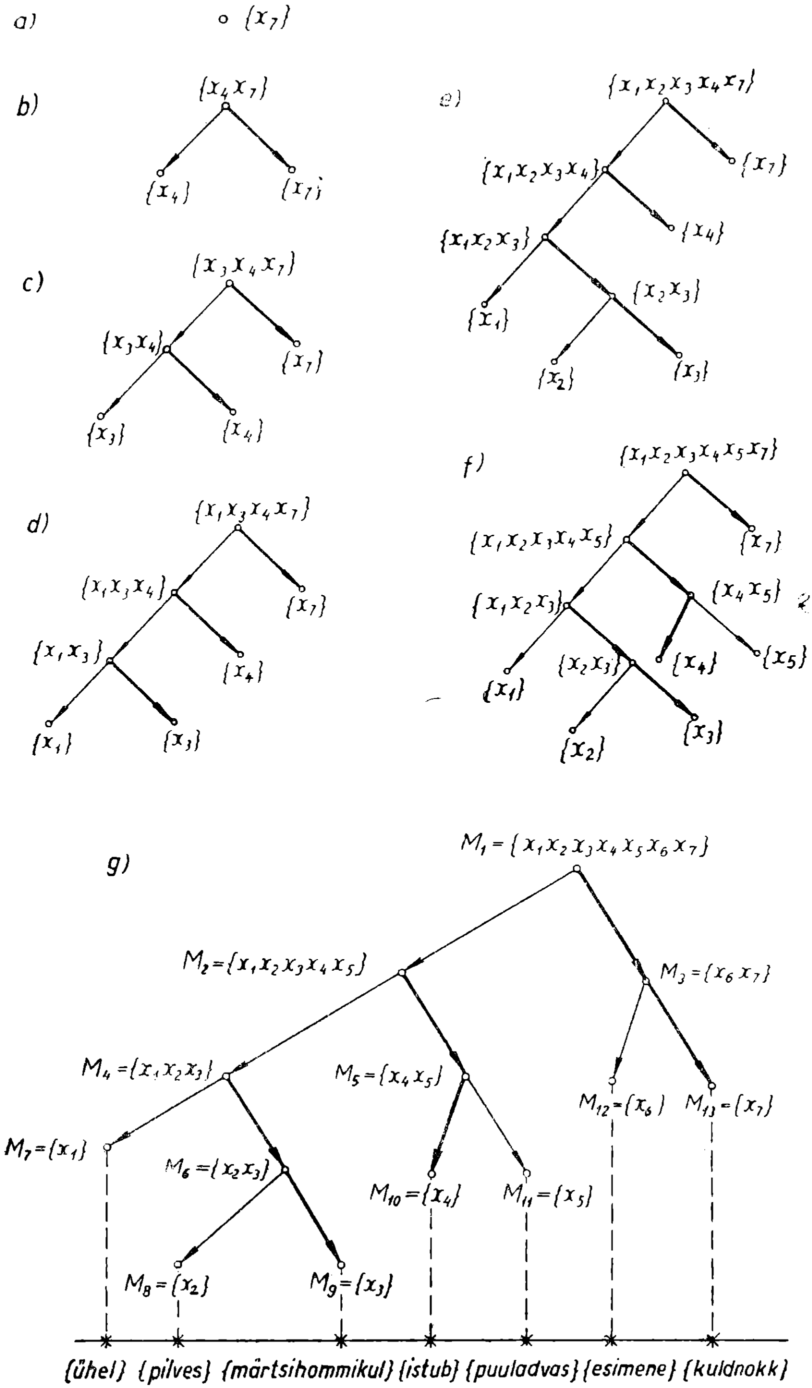
Lepime kokku graafi konstrueerimise käigus täiendada tema tippudele vastavusse seatavate sõnade hulka järgmiselt: valinud mingi seose ja «kinnitanud» tema kolmetipulise puu juure konstrueeritava graafi sellesse tippu, millele vastava sõna järgi valik toimus, lisame ka seose laiendsõna igale sellisele tipule vastavasse hulka, millest on võimalik orienteeritud teed mööda jõuda valitud puu juureni (kaasa arvatud juur ise). Lause (2) graafi saame siis nii, nagu on näidatud joonisel 4.



Joonis 4.

Kõik leitavad hulgad järjestame lineaarselt sel viisil, et lisatava sõna paigutame igas hulgas vahetult tema põhisõna ette või taha, olenevalt komponentide järjekorrast valitud seoses. Lõpuks jõuame graafini, milles kõige esmalt fikseeritud tipule vastab konstrueeritud lause — täpsemini, hulk, mis sisaldab kõik lauses esinevad sõnad õiges järjekorras — igale ülejäänud tipule aga lause mingi moodustaja. Tipuga esialgselt vastavusse seatud sõna võib seega lugeda tipule vastava moodustaja e s i n d a j a k s. Eespool vaadeldud lause (1) saamine on esitatud joonisel 5.

Nii jõuame jälle lause *X* moodustajate puuni, mis nüüd lisaks moodustajate paigutusele ja vahekorrale määrab veel põhi- ja kõrvalkomponendi igas vahekorras. Paneme tähele, et puu mistahes


a)
{x7}
b)
{x4 x7}
{x4}
{x7}
c)
{x3 x4 x7}
{x3 x4}
{x7}
{x3}
{x4}
d)
{x1 x3 x4 x7}
{x1 x3 x4}
{x7}
{x1 x3}
{x4}
{x1}
{x3}
e)
{x1 x2 x3 x4 x7}
{x1 x2 x3 x4}
{x7}
{x1 x2 x3}
{x4}
{x2 x3}
{x1}
{x2}
{x3}
f)
{x1 x2 x3 x4 x5 x7}
{x1 x2 x3 x4 x5}
{x7}
{x1 x2 x3}
{x4 x5}
{x2 x3}
{x4}
{x5}
{x1}
{x2}
{x3}
g)
M1 = {x1 x2 x3 x4 x5 x6 x7}
M2 = {x1 x2 x3 x4 x5}
M3 = {x6 x7}
M4 = {x1 x2 x3}
M5 = {x4 x5}
M12 = {x6}
M13 = {x7}
M7 = {x1}
M6 = {x2 x3}
M10 = {x4}
M11 = {x5}
M8 = {x2}
M9 = {x3}
{ühel} {pilves} {märtsihommikul} {istub} {puuladvas} {esimene} {kuldnokk}

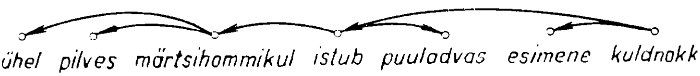
Joonis 5.

tipule esialgu vastanud sõna (moodustaja esindaja) leiame, kui liigume sellest tipust ainult jämedamalt joonistatud kaartest koosnevat orienteeritud teed mööda nii kaugele kui võimalik (ummiktippu). Kui puu tipule vastabki üksainus sõna, siis loeme seda moodustaja esindajaks.

Saadud puud aluseks võttes võime konstrueerida ka lause X nn. sõltuvuste puu, mis kirjeldab otseselt sõnadevahelisi sõltuvusi. Selleks suuname hulgas X iga moodustaja esindajalt x_i orienteeritud kaare $(x_i \to x_j)$ selle moodustaja esindajani x_j, kuhu suundub vaadeldavast moodustajast algav kaar lause X moodustajate puus. Kui me ei ühenda ühtki sõna iseendaga, saame sidusa silmusteta graafi.

Joonis 6.

Näiteks ühendame lause (2) vahetu moodustaja *esimene kuldnokk* esindaja *kuldnokk* moodustaja *esimene* esindajaga (selleks on sõna *esimene* ise). Sõna *kuldnokk*, mis esindab ühtlasi kogu lauset, tuleb ühendada veel lause teise vahetu moodustajaga *vilistab*. Joonisel 6 ongi toodud nii saadud puu. Analoogiline sõltuvuste puu joonisel 7 vastab lausele (1).



Joonis 7.

Muuhulgas paneme tähele, et sõltuvuste puu iga alampuu, mis on Hamiltoni tee, kujutab lauset, milles lausega X võrreldes puudub osa laiendeid. Näiteks lausest (1) võib niimoodi saada laused

Märtsihommikul istub kuldnokk.
Istub puuladvas kuldnokk.
Esimene kuldnokk.

jne.

Lause sõltuvuste puu saame konstrueerida ka otse lause moodustamise käigus. Algul konkretiseerime ühe tipu. Valinud põhisõna järgi mingi binaarse seose ja fikseerinud selle laiendsõna, lisame konstrueeritavale graafile kaare, mis algab laiendatavast sõnast ja suundub laiendini. Võtame näiteks lause

Sinagi võiksid lugeda ajakirja. (3)

Selle moodustamisel valitakse kolm järjestikust seost:

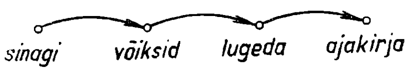
sinagi võiksid,
võiksid lugeda,
lugeda ajakirja

(põhisõnad on alla kriipsutatud). Vastav sõltuvuste puu on kujutatud joonisel 8.

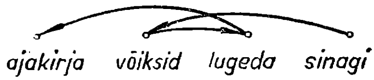
Muudame nüüd lauses (3) sõnade järjekorda:

Ajakirja võiksid lugeda sinagi. (3′)

Koos sellega muutub ka sõltuvuste puu (joonis 9). Märkame, et saadud puu erineb varem vaadeldutest selle poolest, et tema kaks kaart omavahel lõikuvad. Sellega seoses toome sisse sõltuvuste puu projektiivsuse mõiste.



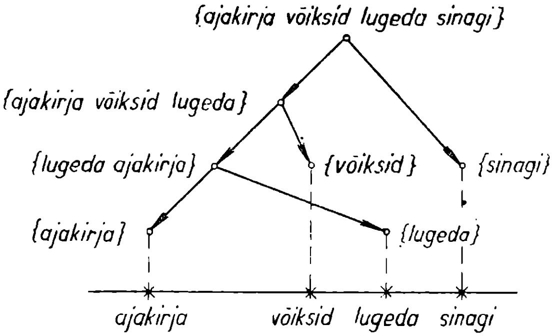
Joonis 8.



Joonis 9.

Nimetame t i p u x r ü h m a k s hulka, mis sisaldab tipu x ja kõik sellised tipud, millesse viib tipust x orienteeritud tee. Sõltuvuste puud, kus iga tipu rühm on lineaarselt järjestatud hulga X lõik[3], nimetame p r o j e k t i i v s e k s.

Joonistel 6, 7 ja 8 esitatud sõltuvuste puud rahuldavad seda tingimust ja on järelikult projektiivsed. Lause (3′) sõltuvuste puus seevastu ei ole tippude *lugeda* ja *sinagi* rühmad hulga (3′) lõigud. Vastav sõltuvuste puu on seega mitteprojektiivne. Lause (3′) moodustajate puus (joonis 10) kajastub sõltuvuste puu mitteprojektiivsus selles, et moodustaja *ajakirja lugeda* ei ole lineaarselt järjestatud hulga (3′) lõik, vaid temasse on kiilutud lause teine moodustaja *võiksid*. Joonisel 10 on seega tegemist nn. k a t k e s t a t u d m o o d u s t a j a t e puuga. Kui aga iga moodustaja on hulga X lõik, öeldakse, et lause X moodustajate puu on m i t t e k a t k e s t a t u d. Niisugused ongi lausete (1), (2) ja (3) moodustajate puud.



Joonis 10.

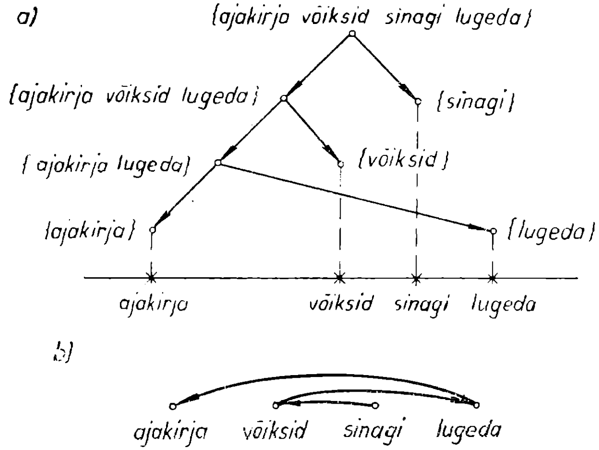
---

[3] Hulga $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ l õ i g u all mõistame tema niisugust alamhulka $\{x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{k-1}, x_k\}$, $1 \leqslant i \leqslant k \leqslant n$, mis on lineaarselt järjestatud nagu hulk X isegi.

Mitteprojektiivsele sõltuvuste puule vastab tingimata katkestatud moodustajate puu, vastupidi aga mitte alati. Näiteks vahetades lauses (3′) sõnad *lugeda* ja *sinagi*, saame lause

Ajakirja võiksid sinagi lugeda, (3″)

mille moodustajate puu on katkestatud, sõltuvuste puu aga sellest hoolimata projektiivne (joonis 11).



Joonis 11.

Lauses (3) võivad sõnad olla järjestatud üldse 4! = 24 erineval viisil. (Muide, niiviisi saadud laused on kõik eesti keelt oskajale arusaadavad ja seega tähendusega.) Võib kontrollida, et vastavatest sõltuvuste puudest on 16 projektiivsed, moodustajate puudest aga ainult 8 mittekatkestatud.

Paneme tähele, et kui lause moodustamisel eespool kirjeldatud viisil (binaarse seose arendamise kaudu) ei ole seatud lisatingimusi sõnade järjestamisele, siis on saadava lause moodustajate puu mittekatkestatud ja sõltuvuste puu projektiivne, koosnedes seejuures ainult joonisel 12 näidatud tüüpi alamgraafidest. On olemas meetodid suvalise sõltuvuste puu taandamiseks niisugust tüüpi puude süsteemiks, sellepärast võime piirdudagi selliste lausete vaatlemisega, mille moodustajate puu on mittekatkestatud ja sõltuvuste puu projektiivne.

Joonis 12.

Lõpuks juhime tähelepanu sellele, et lause (teksti) modelleerimine graafide abil võib olla teatavaks algetapiks keele matemaatilisel kirjeldamisel ja seetõttu leida rakendamist masintõlke probleemide lahendamise juures.

RESERVEERIMINE JA TÖÖKINDLUS

E. Tiit

1. Töökindluse teooria probleemidest. Sama vana kui tehniliste seadmete eneste ajalugu on nende töökindluse probleem. Kuitahes hästi ka ei oleks valmistatud mingi seade, kulub ta aja jooksul alati ning varem või hiljem tekib tõrge — seade on riknenud. Sageli on selle põhjuseks üheainsa suhteliselt lihtsa, kuid olulise detaili rivist väljalangemine.

Suuremat tähelepanu hakati seadmete töökindluse probleemidele osutama käesoleva sajandi esimesel veerandil seoses elektrienergia ülekandesüsteemide projekteerimisega, mille korral tekkis vajadus võimalikult täielikult vältida liinide riketest põhjustatud avariisid. Käesoleval ajal töötavad sellised süsteemid küll juba peaaegu 100%-lise töökindlusega; kuid ometi esineb neis siiski avariisid (meenutagem kasvõi suurt elektriavariid New Yorgis 1965. aastal).

Peale elektrienergia ülekandesüsteemide esineb väga palju teisigi seadmeid, mille riknemine on seotud üpris suurte kahjudega (mitmesugused juhtimisseadmed majanduses, transpordis või sõjaasjanduses; keerukad meditsiiniaparaadid; lennukid, kosmoseraketid jne.). Reeglina koosnevad need seadmed väga paljudest üksikdetailidest. Kuigi iga üksikdetail võib sealjuures olla suure töökindlusega, on nende tohutu hulga tõttu tõenäosus v ä h e m a l t ü h e detaili riknemiseks küllaltki arvestatav; sageli võib sellega kaasneda aga kogu süsteemi avarii või selle töö osaline katkemine.

Eriti aktuaalseks on süsteemide töökindlusega seotud küsimused muutunud alates käesoleva sajandi 40.—50. aastatest; praegu on süsteemide vähene töökindlus sageli just kõige olulisemaks takistuseks uute tehniliste ideede realiseerimisel. Tõepoolest ulatub kaasaegsetes komplitseeritud süsteemides üksikdetailide arv juba sadade tuhandeteni; kujutlegem, et 10^5 detailist koosneva seadme korral on tõenäosus iga üksikdetaili riknemiseks esimese tööpäeva jooksul kõigest 10^{-5}, s. t., et iga 100 000 sellise detaili hulgast rikneb keskmiselt üks esimese tööpäeva vältel. Siis on aga tõenäosus selleks, et vaadeldav seade püsiks töökorras esimese päeva jooksul, kõigest[1]

$$(0{,}99999)^{100000} = 0{,}368,$$

see aga tähendab, et keskmiselt iga kolme sellise seadme kohta lakkab kaks juba esimesel tööpäeval funktsioneerimast.

Selletõttu ongi kaasajal ühe uue uurimissuunana tekkinud töökindluse teooria. Oma eesmärkide poolest kuulub töökindluse teooria kahtlemata inseneride huvideringi; kuid teooria meetodid on matemaatilise iseloomuga. Kasutamist leiab kõigepealt tõenäosusteooria koos tema uuemate harudega (matemaatiline statistika, juhuslike protsesside teooria, informatsiooniteooria, järjekorrateooria), samuti matemaatiline planeerimine. Kokkuvõttes loetakse töökindluse teooriat sageli tehnilise küberneetika valdkonda kuuluvaks.

On huvitav märkida, et töökindluse probleemidega puutume me kokku ka elavas looduses: koosneb ju iga organism arvukatest spetsialiseeritud «detailidest», millest igaühe riknemine ohustab tõsiselt organismi kui terviku funktsioneerimist. Samal ajal on looduses see probleem sageli vägagi otstarbekalt lahendatud: nimelt suudavad organismi ühed osad paljudel juhtudel teisi nende funktsioneerimise lakkamisel paremini või halvemini asendada (ühe silma kaotuse korral asendab seda teine silm; mõlema silma kaotuse puhul tuleb aga teistel meeleorganitel mingil viisil asendada silmade funktsioone).

Lihtsaimaks võimaluseks süsteemide töökindluse suurendamiseks on reserveerimine. Selle meetodi põhiideede tutvustamiseks ongi mõeldud käesolev lühiülevaade.

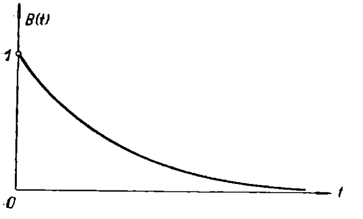
Igas süsteemis leidub peaaegu alati niihästi detaile, mille pidev töötamine on hädavajalik, kui ka detaile, mille lühiajaline tõrge süsteemi tööd oluliselt ei häiri, kuid mille pikemaajaline puudumine võib süsteemile saatuslikuks muutuda. Lõpuks on ka selliseid detaile, mille väljalangemine ei mõjusta üldse süsteemi põhiliste funktsioonide kulgemist. Süsteemi kui terviku töökindluse suurendamise üheks võimalikuks teeks ongi esimest liiki detailide dubleerimine, s. t. ühe detaili asendamine vastavalt kahe paralleelselt töötavaga (samal põhimõttel, nagu inimesel on kaks kõrva või kaks ninasõõret, paigaldatakse lennukile kaks või rohkem mootorit). Teist liiki detailide korrasolekut tuleks aga perioodiliselt kontrollida ning viimased tõrgete korral asendada uutega. Et kõik need operatsioonid kulgeksid vajaliku kindlusastmega, on meil tarvis teada kõigi üksikdetailide riknemiste tõenäosusi mistahes ajavahemike jaoks, s. t. detailide riknemise jao-

[1] Tõepoolest, tähistades $(0{,}99999)^{100000} = p$, saame: $100000 \log 0{,}99999 = \log p$, kuid $\log 0{,}99999 \approx 0{,}4343 \ln 0{,}99999 = 0{,}4343 \ln(1 - 0{,}00001) \approx 0{,}4343(-0{,}00001 - 0{,}00001^2 - \ldots) = -0{,}000004343$; seega $\log p = 100000(-0{,}000004343) = -0{,}4343 = \bar{1}{,}5657$ ja $p \approx 0{,}368$.

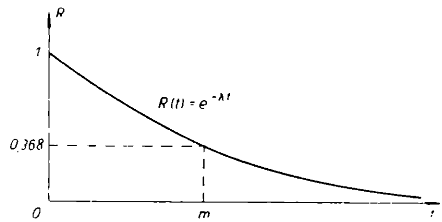
tusseadusi nii töö- kui ka reservolukorras, detaili kontrollimise ning vahetamise jaoks vajalikku aega, ümberlülitite töökindlust jne. Võib esineda võimalusi detailide remontimiseks süsteemi töötamise vältel; sel juhul on meil olukorra kirjeldamiseks tarvis teada remondi jaoks vajalikku aega, samuti «remondibrigaadide» arvu. Peale selle on kahtlemata vaja teada iga liiki reservdetailide koguseid. Kõiki neid lähteandmeid arvestades on võimalik arvutada mitmesuguseid süsteemi töökindlust iseloomustavaid näitajaid: keskmist tõrgeteta töötamise aega, töökorras oleku tõenäosust igaks ajamomendiks, aga samuti planeerida tarviliku töökindluse tagamiseks vajalike reservdetailide arvu, kontrolli sagedust jm.

2. **Bloki töökindlus ja seda iseloomustavad suurused.** Blokiks peame kas üksikdetaili või mitmest detailist koosnevat süsteemi, mida antud probleemi puhul vaatleme tervikuna. Oletame, et vaadeldav blokk töötab alates ajamomendist $t = 0$, kuid mingisugusel ajamomendil $t > 0$ lakkab see blokk töötamast. Vaatleme mingit suvaliselt valitud konkreetset momenti t ja tähistame sümboliga $P(t)$ tõenäosuse[2], et uuritav blokk momendil t veel töötab; suurust $P(t)$ nimetame siis bloki töökindluseks. Sageli on otstarbekas kasutada bloki iseloomustamiseks ka tõenäosust, et ta on kuni momendini t riknenud; tähistame selle tõenäosuse sümboliga $Q(t)$. Ilmselt on $P(t)$ t suhtes monotoonselt kahanev, $Q(t)$ aga monotoonselt kasvav funktsioon (vt. joonised 1 ja 2), kusjuures igal ajamomendil t kehtib võrdus:

$$Q(t) = 1 - P(t). \tag{1}$$



Joonis 1.



Joonis 2.

Tähistame sümboliga X uuritava bloki «eluea», s. t. tema tõrgeteta töötamise kestuse. Siis on X juhuslik suurus, mille jaotusfunktsiooniks on $Q(t)$:

$$Q(t) = P(X < t) = F_X(t).$$

[2] Vajalike tõenäosusteooria-alaste mõistetega tutvumiseks vt. näiteks E. Tiit. Mis on tõenäosus? — Matemaatika ja kaasaeg, IX, lk. 74—90, X, lk. 70—88 ja XI, lk. 86—95.

(Tõepoolest, $Q(t)$ oli meil defineeritud tõenäosusena, et blokk on kuni momendini t riknenud, s. t. tema eluiga on lühem kui ajavahemik pikkusega t.) Juhul kui bloki riknemine võib toimuda mistahes ajamomendil, on meil enamasti tegemist pideva ja diferentseeruva funktsiooniga $F_X(t)$ ning me võime leida ka bloki eluiga X iseloomustava tõenäosuse tiheduse

$$f_X(t) = \frac{d}{dt} F_X(t).$$

Üheks bloki töökindlust iseloomustavaks lihtsaks suuruseks on selle bloki keskmine tööaeg EX, mida sageli tähistatakse ka sümboliga T ning mis on arvutatav seosest:

$$T = EX = \int_0^\infty t f_X(t)\, dt. \qquad (2)$$

Integreerimisrajade valikul pidasime silmas asjaolu, et blokk töötab alates momendist $t = 0$, mistõttu t negatiivseid väärtusi ei ole integreerimisel vaja arvestada ($f_X(t) \equiv 0$, kui $t < 0$).

Kasutades ositi integreerimist, saame valemit (2) mõnevõrra lihtsustada; võtame $f_X(t)dt = du$, $t = v$; siis $u = F_X(t) = Q(t) = 1 - P(t)$, $dt = dv$ ja

$$T = t \cdot [1 - P(t)] \Big|_0^\infty - \int_0^\infty [1 - P(t)]dt = -tP(t) \Big|_0^\infty + \int_0^\infty P(t)dt.$$

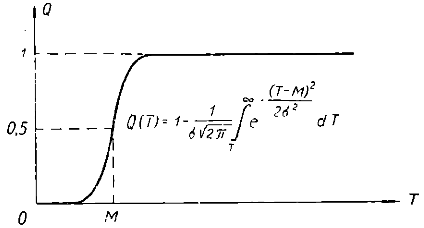
Juhul kui

$$\lim_{t \to \infty} tP(t) = 0, \qquad (3)$$

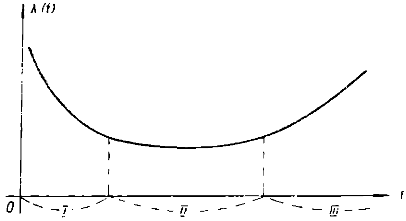
saame edaspidiseks kasutamiseks mugavama seose:

$$T = \int_0^\infty P(t)dt. \qquad (4)$$

3. Eksponentsiaalne jaotusseadus. On selge, et erinevate detailide ja erinevate töötingimuste korral on juhuslik suurus X ning vastavalt ka seda iseloomustavad karakteristikud erinevad (vt. jooniseid 1—4, kus on esitatud mõned tüüpilisemad juhud). Joonisel 1 on kujutatud bloki töökindluse funktsioon, joonistel 2 ja 3 aga bloki eluea jaotusfunktsioon; (joonistel 1 ja 2 on esitatud ühesugusele jaotusele vastavad karakteristikud); joonis 4 kirjeldab bloki eluea tihedusfunktsiooni. Paneme tähele,



Joonis 3.



Joonis 4.

et joonistel 1 ja 2 esitatud juhuslik suurus muutub teatud mõttes ühtlaselt kogu aja t vältel; joonisel 3 esitatud jaotusega blokki iseloomustab esialgu suur töökindlus (riknemise tõenäosus on kaunis pika perioodi vältel praktiliselt võrdne nulliga), millele järgneb kindel riknemine suhteliselt lühikese ajavahemiku vältel. Sageli esineb blokkide korral ka joonisel 4 esitatud olukord: tööperioodi alguses on bloki riknemise tõenäosus suhteliselt suur (varjatud defektide ilmnemise arvel), sellele järgneb teatud stabiilsuseperiood, mille vältel bloki töökindlus on suur, seejärel algab bloki «vananemine», mil riknemise tõenäosus jälle suureneb.

Mõningatel juhtudel on aga varjatud vigade ning «vananemise» mõju bloki töökindlusele niivõrd väike, et me võime selle arvestamata jätta.

Leiame näitena bloki töökindluse funktsiooni eeldusel, et selle bloki riknemine ajavahemiku $[t_1, t_2)$ jooksul sõltub üksnes selle ajavahemiku pikkusest $t_2 - t_1$ ning ei sõltu bloki senise töö kestusest t_1.

Vaatleme mingit kolme ajamomenti t_1, t_2, t_3, kus $0 \leqslant t_1 < t_2 < t_3$. Sündmus, et detail ei rikne ajavahemiku $[t_1, t_3)$ vältel, on (eelduse põhjal) kahe sõltumatu sündmuse korrutis; nendeks sündmusteks on detaili töökorras püsimine ajavahemike $[t_1, t_2)$ ja $[t_2, t_3)$ jooksul. Tähistame sündmusele, et detail püsib töökorras ajavahemiku $[t_i, t_j)$ vältel, vastava tõenäosuse sümboliga $G(t_j - t_i)$, seega $1 - P(t_i \leqslant X < t_j) = G(t_j - t_i)$ $(i, j = 1, 2, 3;\ i < j)$. Tõenäosuste korrutamise teoreemi põhjal saame seose:

$$G(t_3 - t_1) = G(t_3 - t_2) \cdot G(t_2 - t_1). \tag{5}$$

Pole raske näha, et seost (5) rahuldab ühe lihtsama funktsioonina funktsioon $G(x) = e^{-\lambda x}$:

$$G(t_3 - t_1) = e^{-\lambda(t_3 - t_1)} = e^{-\lambda(t_3 - t_2) - \lambda(t_2 - t_1)} =$$
$$= e^{-\lambda(t_3 - t_2)} \cdot e^{-\lambda(t_2 - t_1)} = G(t_3 - t_2)\, G(t_2 - t_1),$$

kust leiame:

$$P(t) = G(t - 0) = e^{-\lambda t}.$$

Selleks, et funktsiooniga $G(x)$ väljendatud suurus oleks tõenäosus, (s. t. $0 \leqslant G(x) \leqslant 1$, kui $x > 0$), tuleb nõuda veel, et $\lambda > 0$. Siis

$$Q(t) = 1 - P(t) = 1 - e^{-\lambda t} \qquad (t > 0)$$

ning juhusliku suuruse X tõenäosuse tiheduseks on

$$f_X(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t > 0; \\ 0 & , \ t < 0. \end{cases}$$

Niisugust juhusliku suuruse X jaotust nimetatakse eksponentsiaalseks jaotusseaduseks. Eksponentsiaaljaotusega bloki keskmise eluea leiame valemist (4):

$$T = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, dt = \frac{1}{\lambda}; \tag{6}$$

siit ilmneb, et bloki keskmine eluiga on pöördvõrdeline parameetriga λ, mida nimetatakse bloki **riknemise intensiivsuseks**.

4. Bloki kuum reserveerimine. Oletame, et meil on tegemist mingi süsteemi funktsioneerimise seisukohalt väga olulise elemendiga, mille riknemise tõenäosuse mingi fikseeritud ajavahemiku vältel peame muutma küllaldaselt väikeseks. Üheks kõige enam kasutatud võimaluseks selle eesmärgi saavutamisel on vaadeldava elemendiga paralleelselt mingi arvu n samasuguste elementide töösserakendamine (vt. joonis 5). Kui kõik need blokid töötavad ühesuguses režiimis, siis ütleme, et meil on tegemist kuuma reserviga. Vaadeldavast $n+1$ blokist (ka elemendist) koosnevat süsteemi nimetatakse ka reservsõlmeks. Leiame reservsõlme töökindluse $P_{n+1}(t)$ suvalisel ajamomendil t ning sõlme keskmise eluea.

Kuna üks blokk riknes ajamomendini t tõenäosusega $Q(t)$, kõik blokid aga töötavad sõltumatult, siis tõenäosus selleks, et kuni momendini t rikneksid kõik blokid, on $[Q(t)]^{n+1}$, ning tõenäosus selleks, et reservsõlm (s. t. vähemalt üks blokk) ajamomendil t veel töötaks, on

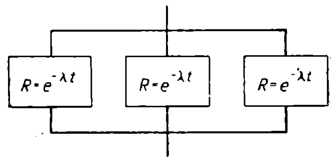
$$P_{n+1}(t) = 1 - [Q(t)]^{n+1}.$$

Leiame $P_{n+1}(t)$ väärtuse eksponentsiaaljaotusega blokkide korral:

$$P_{n+1}(t) = 1 - [1 - e^{-\lambda t}]^{n+1}$$

ja kasutades valemit (4) arvutame ka reservsõlme keskmise eluea:

$$T_{n+1} = \int_0^\infty [1 - (1 - e^{-\lambda t})^{n+1}]dt.$$



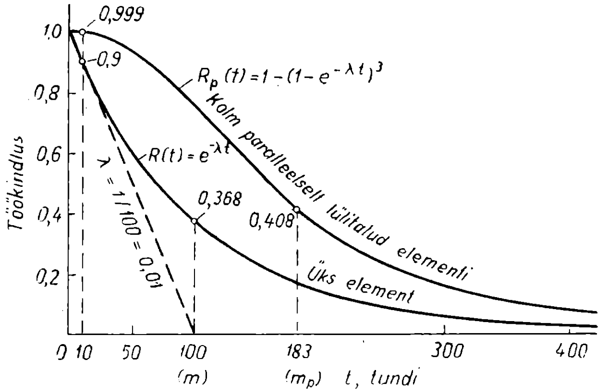
Joonis 5.

Teostades muutuja vahetuse $1 - e^{-\lambda t} = z$; $dz = \lambda e^{-\lambda t} dt$; $dt = \frac{1}{\lambda}\frac{dz}{1-z}$, saame:

$$T_{n+1} = \frac{1}{\lambda}\int_0^1 \frac{1-z^{n+1}}{1-z}dz = \frac{1}{\lambda}\int_0^1 (z^n + z^{n-1} + \ldots + 1)dz = \frac{1}{\lambda}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n+1}\right). \tag{7}$$

Näeme, et valemis (7) paremal asuv summa võib saada kuitahes suureks piisava hulga liidetavate korral[3], seega saab kuuma reserveerimise abil muuta reservsõlme töökindlust kuitahes suureks. Selleks on aga vaja suurt arvu paralleelselt töötavaid blokke, sest iga üksiku bloki lisamine (eriti nende suure arvu korral) muudab sõlme keskmist tööaega väga vähe (vt. joonis 6). Seetõttu on kuum reserveerimine küllaltki vähe ökonoomne ning leiab kasutamist eeskätt vaid sellistel juhtudel, kui bloki lühiajalinegi väljalangemine ei ole lubatud.

[3] Vt. E. Tiit. Arvridadest. — Matemaatika ja kaasaeg, VII, lk. 58—68.



Joonis 6.

5. Bloki soe reserveerimine. Teine võimalus bloki töökindluse suurendamiseks on tema nn. soe reserveerimine. Sel puhul ei tööta reservelemendid täie intensiivsusega ning nende riknemise tõenäosus on sedavõrd väiksem ja keskmine eluiga pikem. Pärast põhibloki riknemist lülitub tema asemel töösse reservblokk, mis selleks läheb kergendatud koormuselt üle täiskoormusega tööle.

Leiame reservsõlme töökindluse n sooja reservbloki korral, kusjuures eeldame, et ka reservblokkide eluiga $F(t)$ on eksponentsiaaljaotusega

$$F(t) = 1 - e^{-\nu t}$$

ning sooja reservi töösselülitumine toimub absoluutselt kindlasti ning kaduvväikese ajavahemiku jooksul. Tõenäosus reservsõlme riknemiseks kuni hetkeni t avaldub korrutisena:

$$(1 - e^{-\lambda t})(1 - e^{-\nu t})^n,$$

kust leiame valemi (4) abil ka sõlme keskmise tööaja:

$$\overline{T}_{n+1} = \int_0^\infty [1 - (1 - e^{-\lambda t})(1 - e^{-\nu t})^n]\, dt = \int_0^\infty [1 - (1 - e^{-\nu t})^n]\, dt +$$

$$+ \int_0^\infty (1 - e^{-\nu t})^n e^{-\lambda t}\, dt.$$

Esimese integraali saame leida valemist (7); teise liikme arvutame:

$$\int_0^\infty (1 - e^{-\nu t})^n e^{-\lambda t} dt = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \int_0^\infty e^{-(\nu k+\lambda)t}\, dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \frac{1}{\nu k + \lambda} > 0,$$

seega

$$\overline{T}_{n+1} = \frac{1}{\nu}\left(1 + \ldots + \frac{1}{n}\right) + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \frac{1}{\nu k + \lambda}.$$

Võrdlus valemiga (7) näitab, et kui reservbloki riknemise intensiivsus ν on oluliselt väiksem kui tööbloki riknemise intensiivsus λ, siis on sooja reserviga sõlme keskmine eluiga küllalt palju suurem kuuma reserviga sõlme keskmisest elueast. Peamiseks puuduseks sooja reservi rakendamisel on asjaolu, et detailide automaatseks vahetamiseks läheb tarvis lisaseadmeid, mille riknemisvõimalus vähendab reservsõlme töökindlust. Ülalvaadeldud mudelis eeldasime kontrollseadmete ja ümberlülitite absoluutset töökindlust — see eeldus aga pole üldiselt õigustatud.

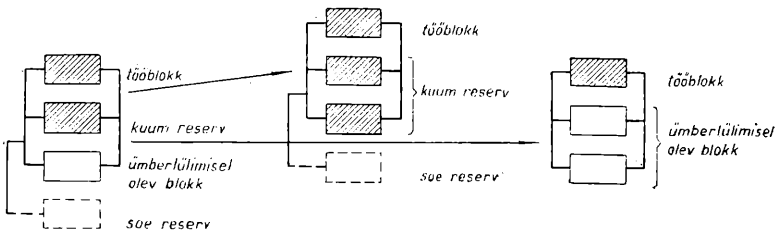
6. **Bloki külm reserveerimine.** Erijuhu soojast reservist moodustab külm reserv, s. t. reservblokid, mida me vaatleme absoluutselt töökindlatena kogu reservis viibimise aja vältel, nii et rikneda võib üksnes põhiline tööblokk. Eeldades (nagu eelnevalgi juhul) ka kontrollseadmete ja ümberlüliti absoluutset töökindlust, saame n külma reservblokiga sõlme keskmise eluea leida lihtsalt keskväärtuste summana:

$$T_{n+1} = (n+1)T = \frac{n+1}{\lambda}.$$

Kahtlemata on selline reserveerimise moodus keskmise tööaja seisukohalt ökonoomseim; kahjuks ei ole aga tegelikult üldse võimalik luua absoluutselt töökindlat reservi isegi mitte blokkidest, mida üldse ei koormata. Pealegi pole külm reserveerimine mõeldav blokkide korral, mille rivist väljalangemine ei ole lubatav, sest ka hetkeline vahetus pole tegelikult realiseeritav.

7. **Reservide taastamine.** Mõningate reservsõlmede puhul on võimalik sõlme töötamise aja vältel remontida riknenud blokk, taastada (enam või vähem täielikult) selle endised omadused ning lülitada ta uuesti töösse (harilikult esialgu reservblokina, hiljem aga vastavalt vajadusele põhiblokina). Selliste reservsüsteemide töökindlus on kahtlemata suurem kui sama reservblokkide arvuga mittetaastatavate reservsõlmede töökindlus, kus reservi pideva kahanemise tagajärjel see varem või hiljem täielikult ammendatakse ning siis blokkide riknemine põhjustab juba paratamatult sõlme avarii. Tuleb aga märkida, et taastatava reserviga süsteemide matemaatiline kirjeldamine on mõnevõrra keerukam, sest süsteemi töö sõltub veel blokkide remondi ajast (see on samuti juhuslik suurus; mõnikord sõltub remondi aeg veel täiendavalt bloki «järjekorras» ootamise ajast enne remondi algust jne.). Taastatava reserviga süsteemis tekib avarii ka siis, kui juhuslikult rikneb üksteise järel mitu blokki, nii et reserv ammendatakse, või viibivad reservblokid liiga kaua remondis. Selliste sõlmede töökindluse tõstmiseks on peale reservi arvukuse suurendamise võimalik kiirendada ka blokkide remonti, vajaduse korral suurendades «remondibrigaadide» arvu. Mõningatel juhtudel (näiteks liikuvad objektid — lennukid, autod,

raketid) ei ole taastatav reserv aga praktiliselt rakendatav. Käesolevas ülevaates ei ole meil ruumi piiratuse tõttu sellele reservitüübile võimalik rohkem tähelepanu pühendada.



Joonis 7.

8. **Kombineeritud reserviga süsteem.** Sageli kasutatakse süsteeme, kus töötab paralleelselt p ühesugust blokki, kusjuures kõigi funktsioneerimine on süsteemi normaalse töö jaoks tarvilik. Sel juhul on otstarbekas luua kõigile neile blokkidele ühine reserv, kust üksiku tööbloki väljalangemise korral see (järjekorras esimese) reservblokiga asendatakse (vt. joonis 7). Tuleb jällegi eeldada, et kontrollsüsteem ja ümberlüliti töötavad absoluutse kindlusega (või arvestada süsteemi kirjeldamisel ka nende riknemise võimalust).

Vaatleme näitena süsteemi, mis koosneb k tööblokist, m blokist kuumas reservis ning n blokist soojas reservis. Eeldame, et kontroll- ja lülitusseadmed on absoluutselt töökindlad. Olgu blokkide eluead eksponentsiaaljaotusega, kusjuures töörežiimis olgu riknemise intensiivsus λ, reservrežiimis $\nu < \lambda$. Reservbloki üleminek soojast režiimist kuuma režiimi toimub mingi juhusliku aja Z vältel, mille jaotust me süsteemi täielikuks iseloomustamiseks peame teadma; samuti tuleb arvestada seda, et blokk võib ka ümberlülitamise vältel rikneda. Kui eeldada, et vahetus toimub üldiselt lõpliku pikkusega ajavahemiku vältel, tuleks arvestada ka vahetuse ajal riknemise tõenäosust. Arvutuste lihtsustamiseks eeldame siin aga, et vahetus toimub hetkeliselt.

Süsteemis mingil ajamomendil t säilinud reservblokkide arvu iseloomustame süsteemi teatava olekuna. Olukorda, et süsteem sisaldab (vaadeldaval momendil) q kuuma ja l sooja reservblokki, väljendame, öeldes, et süsteem on olekus A_{ql}. Ülalkirjeldatud süsteemi jaoks on võimalikud järgmised olekud:

$$A_{m,n} \text{ (lähteolek)},\ A_{m,n-1}, \ldots, A_{m,1},\ A_{m,0},\ A_{m-1,0}, \ldots,$$
$$\ldots, A_{1,0},\ A_{0,0},\ B \text{ (avariiolek)},$$

kusjuures süsteem saab igast olekust minna üksnes järgneval kohal asuvasse olekusse ning läbib aja jooksul paratamatult kõik kirjeldatud olekud (hargnematu protsess). Siinjuures ei sõltu süsteemi järgmine olek sellest, milline blokk rikneb järgmisel sammul: kas põhiline, kuuma või sooja reservi kuuluv. Teisiti oleks olukord siis, kui blokkide paigaldamine toimuks mingi lõpliku pikkusega ajavahemiku vältel, siis on alati süsteemi jaoks mitu erinevat arenguvõimalust: esiteks on võimalik, et enne järjekordse sooja reservi kuuluva bloki kuuma reservi režiimi lülitumist rikneb järgmine põhiline või kuuma reservi blokk, teiseks on võimalik, et enne järjekordse bloki riknemist jõuab kuum reserv taastuda (vt. joon. 7).

9. Kombineeritud reservsüsteemi töökindlus. Leiame vaadeldava süsteemi jaoks ühest olekust teise ülemineku tõenäosused. Selleks arvutame tingliku tõenäosuse bloki riknemiseks ajavahemiku $[t, t+\Delta t)$ vältel tingimusel, et see blokk töötas momendil t.

Tingliku tõenäosuse arvutamiseks kasutame valemit[4]

$$P(A/B)=\frac{P(AB)}{P(B)},$$

kus A on sündmus, et ajavahemikul $[t, t+\Delta t)$ blokk riknes, B aga sündmus, et hetkeni t oli blokk korras. Siis

$$P(B)=1-P(X<t)=e^{-\lambda t};\quad P(A)=P(AB)=P(t\leqslant X<t+\Delta t)=$$
$$=e^{-\lambda t}-e^{-\lambda(t+\Delta t)}.$$

Seega

$$P(A/B)=\frac{e^{-\lambda t}-e^{-\lambda(t+\Delta t)}}{e^{-\lambda t}}=\frac{e^{-\lambda(t+\Delta t)}-e^{-\lambda t}}{\Delta t}\cdot\frac{-1}{e^{-\lambda t}}\Delta t\approx(e^{-\lambda t})'\cdot\frac{-1}{e^{-\lambda t}}\cdot\Delta t=\lambda\Delta t.$$

Samal viisil näeme, et soojas reservis oleva bloki ajavahemikul $[t, t+$ $+\Delta t)$ riknemise tõenäosus on $\nu\Delta t$. Et süsteem, mis viibib olekus A_{ql}, sisaldab q blokki kuumas reservis ja l blokki soojas reservis, saab olekusse A_{ql-1} minna kas ühe tööbloki, kuuma reservi bloki või ka ühe sooja reservi bloki riknemise tagajärjel, siis

$$P(A_{ql}\rightarrow A_{q,l-1})=[(q+k)\lambda+l\nu]\Delta t+o(\Delta t).$$

Arvestame siin, et tõenäosus kahe bloki riknemiseks sama ajavahemiku $[t, t+\Delta t)$ vältel on ajavahemiku Δt suhtes kõrgemat järku lõpmata väike suurus.

Saame leida ka tingliku tõenäosuse selleks, et süsteem oleks olekus A_{ql} ajamomendil $t+\Delta t$, kui ta on olnud selles olekus ajamomendil t:

$$P(A_{ql}\rightarrow A_{ql})=1-P(A_{ql}\rightarrow A_{q,l-1}).$$

Tähistame tõenäosuse, et süsteem oleks ajamomendil t olekus A_{ql}, sümboliga $P_{ql}(t)$. Siis saame:

$$P_{ql}(t+\Delta t)=P_{ql}(t)[1-P(A_{ql}\rightarrow A_{q,l-1})]+P_{q,l+1}(t)\cdot P(A_{ql+1}\rightarrow A_{ql}),$$

ning asendades üleminekute tõenäosused nende väärtustega, leiame:

$$P_{ql}(t+\Delta t)-P_{ql}(t)=-P_{ql}(t)[(q+k)\lambda+l\nu]\Delta t+$$
$$+P_{q,l+1}[(q+k)\lambda+(l+1)\nu]\Delta t+o(\Delta t). \qquad (9)$$

---

[4] Vt. A. Iher. Mõnda informatsiooniteooria põhimõistetest. — Matemaatika ja kaasaeg, XIII, lk. 27—34.

Jaganud võrrandi (9) mõlemad pooled suurusega Δt ja teostanud piirprotsessi $\Delta t \to 0$, saame:

$$P_{ql}'(t) = -P_{ql}(t)[(q+k)\lambda + l\nu] + P_{q,\,l+1}[(q+k)\lambda + \\ +(l+1)\nu]. \qquad (10)$$

Analoogilise võrrandi saame leida iga süsteemi tööoleku A_{ql} tõenäosuse kirjelduseks sõltuvalt ajast t. Ka süsteemi avariioleku tõenäosuse $Q(t)$ momendil t võime leida:

$$Q'(t) = P_{00}(t)k\lambda. \qquad (11)$$

Võrranditest (10) ja (11) koosneva süsteemi integreerimisel leiame süsteemi iga oleku A_{ql} jaoks selle tõenäosuse aja t funktsioonina. On lihtne näha, et vastav tõenäosus avaldub kujul

$$P_{ql}(t) - a^1_{ql}e^{-[(k+m)\lambda+n\nu]t} + a^2_{ql}e^{-[(k+m)\lambda+(n-1)\nu]t} + \ldots \\ \ldots + a^s_{ql}e^{-[(k+q)\lambda+l\nu]t} + A, \quad (s = m + n - (l+q)),$$

kus a_{ql}^i ja A on reaalarvud, mis sõltuvad λ ja ν konkreetsetest väärtustest. Samuti on pärast kõigi tõenäosuste $P_{ql}(t)$ leidmist võimalik leida süsteemi töökindlus mistahes ajamomendil t:

$$P(t) = 1 - Q(t) = b^1e^{-[(k+m)\lambda+n\nu]t} + b^2e^{-[(k+m)\lambda+k\nu]t} + \ldots \\ \ldots + b^{m+n}e^{-k\lambda t} + B.$$

Siinjuures tuleb võrrandisüsteemi lahendamisel kasutada loomulikke algtingimusi:

$$P(0) = 1,$$

s. t. süsteemi töölerakendamise momendil on tema töökindlus 1, ja

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = 0,$$

sest lõpmata pika ajavahemiku möödumisel rikneb süsteem kindlasti.

Praktiliseks kasutamiseks rakendatakse süsteemi töökindluse määramiseks mingi reservide kombinatsiooni jaoks arvutatud kordajate a^i ja b^i tabeleid. Näitena toome siin kordajate väärtused juhul $m = 1$, $p = 1$, $n = 0$, 1, 2, kusjuures on eeldatud, et bloki üleminek soojast reservist kuuma reservi toimub juhusliku aja vältel, mis allub eksponentsiaaljaotusele $F(t) = 1 - e^{-\mu t}$ (vt. tabelid 1 ja 2). Sageli kasutatakse süsteemi töökindluse määramisel vastava arvutustöö komplitseerituse tõttu ka graafikuid ning nomogramme.

Leidnud süsteemi töökindluse $P(t)$, saame lahendada mitmesuguseid praktilisi ülesandeid. Näiteks võime valemist (4) leida süsteemi keskmise eluea; olgu meil teada, et süsteem peab funktsioneerima mingi ajavahemiku $[0, T]$ vältel; meil on võimalik leida tõenäosus selleks, et see süsteem selle aja vältel tõrgeteta töötab. Võib ka esineda vastupidine ülesanne: süsteem peab töötama töökindlusega, mis on suurem kui $1 - \varepsilon$; võime leida aja, mille jooksul süsteem on võimeline sellise töökindlusega funktsioneerimiseks.

Mõnevõrra komplitseeritumad probleemid tekivad seoses reservide planeerimise ja optimiseerimisega. Olgu näiteks antud ajavahemik $[0, T]$, mille vältel süsteem peab töötama töökindlusega $P(T) > 1 - \varepsilon$. Ülesandeks on määrata reserv, mis tagaks vastava töökindluse, olles sealjuures teatud mõttes (kas hinna, kaalu vm. suhtes) optimaalne. Esitatud probleem kuulub täisarvulise planeerimise valdkonda [5] ning selle lahendamine on sageli seotud tõsiste matemaatiliste raskustega; seetõttu kasutatakse sageli ligikaudseid (intuitiivselt või graafilisel teel leitud) lahendeid.

Töökindluse, sealhulgas ka reserveerimisprobleemide suure rakendusliku tähtsuse tõttu toimub praegu selles valdkonnas intensiivne uurimistöö, kusjuures rakendatakse laialdaselt kaasaegse matemaatika mitmesuguste harude tulemusi ning moodsaimat arvutustehnikat.

Tabelis 1 vaatleme juhtu, kus bloki üleminek soojast reservist kuumreservi toimub juhusliku aja vältel, mis olgu eksponentsiaaljaotusega $\mu e^{-\mu t}$; m on tööblokkide arv, p — kuuma reservi ja n — sooja reservi blokkide arv.

Tabel 1.

$m = 1,\ p = 1,\ n = 0.$

$$Q(t) = e^{-2\lambda t} - 2e^{-\lambda t} + 1.$$

$m = 1,\ p = 1,\ n = 1.$

$$Q(t) = B_{01}e^{-(2\lambda+\nu)t} + B_{10}e^{-(\lambda+\mu+\nu)t} + B_{11}e^{-2\lambda t} + B_{20}e^{-\lambda t} + 1;$$

$$B_{01} = -\frac{2\mu\lambda^2}{\nu(\mu-\lambda)(\lambda+\nu)}; \qquad B_{10} = -\frac{2\mu\lambda^2}{(\mu-\lambda)(\mu+\nu)(\lambda-\mu-\nu)};$$

$$B_{11} = -\frac{[2\mu\lambda - \nu(\lambda-\mu-\nu)]}{\nu(\lambda-\mu-\nu)}; \qquad B_{20} = -\frac{2[\mu\lambda + (\lambda+\nu)(\mu+\nu)]}{(\lambda+\nu)(\mu+\nu)}.$$

$m = 2,\ p = 1,\ n = 0.$

$$Q(t) = 2e^{-3\lambda t} - 3e^{-2\lambda t} + 1.$$

$m = 2,\ p = 1,\ n = 1.$

$$Q(t) = C_{01}e^{-(3\lambda+\nu)t} + C_{10}e^{-(2\lambda+\mu+\nu)t} + C_{11}e^{-3\lambda t} + C_{20}e^{-2\lambda t} + 1;$$

$$C_{01} = \frac{-6\mu\lambda^2}{\nu(\mu-\lambda)(\lambda+\nu)}; \qquad C_{10} = \frac{-6\mu\lambda^2}{(\mu-\lambda)(\mu+\nu)(\lambda-\mu-\nu)};$$

$$C_{11} = \frac{-2[3\mu\lambda - \nu(\lambda-\mu-\nu)]}{\nu(\lambda-\mu-\nu)}; \qquad C_{20} = \frac{-3[2\mu\lambda + (\lambda+\nu)(\mu+\nu)]}{(\lambda+\nu)(\mu+\nu)}.$$

Tabelis 2 vaatleme külma reservi juhtu: blokid riknevad üksnes tööolekus või kuumas reservis viibides. Üleminek külmast reservist kuuma toimub samuti kui tabelis 1 vaadeldud juhulgi.

Tabel 2.

$m = 3,\ p = 1,\ n = 0.$

$$Q(t) = 3e^{-2\lambda t} - 2e^{-3\lambda t}.$$

---

[5] Vt. Ü. Kaasik, E. Tamme. Laadimisülesanded. — Matemaatika ja kaasaeg, XII, lk. 64—72.

$m = 3,\ p = 1,\ n = 1.$

$$Q(t) = -[A_0 + A_1 t]e^{-3\lambda t} - D_0 e^{-(2\lambda+\mu)t} + Ge^{-2\lambda t};$$

$$A = \frac{2(4\mu^2 - 8\lambda\mu + \lambda^2)}{(\mu-\lambda)^2}; \quad A_1 = \frac{6\lambda\mu}{\mu-\lambda}; \quad D_0 = \frac{6\lambda^2}{(\mu-\lambda)^2}; \quad G = 9.$$

$m = 3,\ p = 1,\ n = 2.$

$$Q(t) = -[A_0 + A_1 t + A_2 t^2]e^{-3\lambda t} - [D_0 + D_1 t]e^{-(2\lambda+\mu)t} + Ge^{-2\lambda t};$$

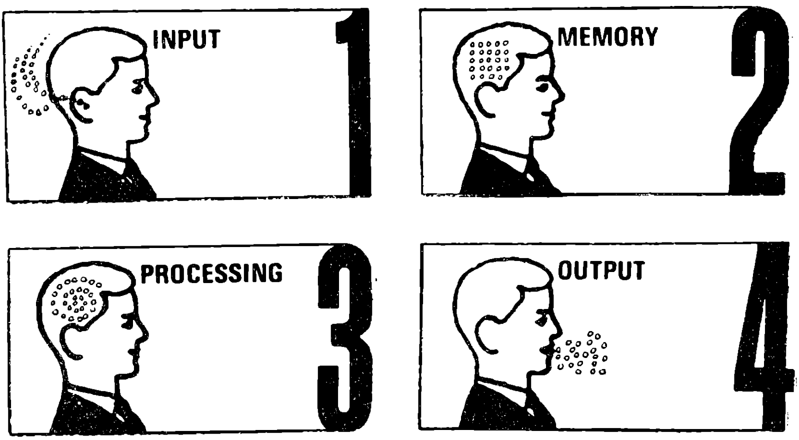
$$A_0 = \frac{2(13\mu^4 - 52\lambda\mu^3 + 75\lambda^2\mu^2 - 10\lambda^3\mu + \lambda^4)}{(\mu-\lambda)^4};$$

$$A_1 = \frac{6\lambda\mu(4\mu^2 - 11\lambda\mu + \lambda^2)}{(\mu-\lambda)^3}; \quad A_2 = \frac{9\lambda^2\mu^2}{(\mu-\lambda)^2};$$

$$D_0 = \frac{6\lambda^2(\mu^2 - 14\lambda\mu + 4\lambda^2)}{(\mu-\lambda)^4}; \quad D_1 = \frac{18\lambda^3\mu}{(\mu-\lambda)^3}; \quad G = 27.$$

INIMENE ~ ARVUTI

Siin toodud skitsid on võetud ajakirjast «*Life*», kus arvuti töö põhietappe kirjeldades võrreldakse neid inimaju tegevusega (etappide nimetused on skitsidel jäetud tõlkimata selle kurva asjaolu rõhutamiseks, et eesti keeles pole vastavad — ja paljud teised — terminid veel välja kujunenud).



1. Samuti nagu inimesele, tuleb ka arvutile kõigepealt anda ülesanne ning selle lahendamiseks vajalik informatsioon (*input* — sisseviimine, sisendamine?). 2. Kogu vajalik informatsioon salvestatakse sobivalt korrastatud kujul vastavas seadmes (*memory* — mälu, salvesti?). 3. Ülesande lahendamine toimub informatsiooni töötlemise teel; siin erinebki arvuti ja inimaju tegevus kõige rohkem: arvuti töötleb informatsiooni vaid programmeerija poolt antud loogika kohaselt (*processing* — töötlemine, ... ?). 4. Olles ülesande lahendanud, teatab arvuti tulemused kas trükkimise, perforeerimise vms. teel (*output* — väljaandmine, väljundamine?).

KAKS PÄHKLIT MAJANDUSKÜBERNEETIKALE KATKIHAMMUSTAMISEKS

R. Mullari

Umbes veerand sajandit tagasi, kui olin veel vaid mõni verssok üle meetri pikk, oli mul üks suur probleem — «tünniprobleem». Ma ei suutnud kuidagi mõista, kuidas on küll võimalik suhteliselt lihtsate tehniliste vahenditega teha tünne ehk teiste sõnadega sobitada kõveraid lauajuppe peaaegu absoluutse täpsusega teineteisega kokku, nii et vesi vahelt läbi ei tule? Teatavasti imbub vesi läbi ju pisimastki praost, tünne tehakse aga juba ammust ajast ja sugugi mitte ainult kõige arenenuma tehnikaga maades. Kui ma seda asja mõne «suure» inimese käest küsisin, kehitas see tavaliselt arusaamatuses õlgu ja ütles, et «selleks on olemas vastavad riistad».

Läks hulk aega ja mõttetööd enne, kui ma aru sain, et tegelikult on asi päris lihtne ja mingit «peaaegu absoluutset täpsust» pole siin vaja. Olin oma kogenematuses jätnud kahe silma vahele ühe olulise teguri — puu paisumise niiskumisel, mis iseenesest pressib kinni kõik mitte eriti suured praod tünnilaudade vahel. «Suurtele» inimestele oli see paisumine aga niivõrd loomulik nähtus, et nad ei suutnud lihtsalt kujutleda, nagu võiks see kellelegi märkamatuks jääda.

See lugu on õpetlik selle poolest, et analoogilisse olukorda võib sattuda iga teoreetik, kui ta hakkab lahendama otsese praktilise tähtsusega ülesandeid. Tarvitseb teoreetikul jätta vaid üks praktikas oluline tegur arvestamata või arvestada seda mitte küllaldaselt, ebaõigesti, kui kogu tema poolt loodud teooria (olgu see kuitahes teravmeelne ja seesmiselt range) jääb antud küsimuses — mille jaoks ta õieti loodud oligi — praktiliselt peaaegu väärtusetuks, võib-olla isegi naeruväärseks. Ja harva suudab siin mõni igipõline praktik, kes oma igapäevases töös-tegevuses ilma sügavamalt järele mõtlemata, sageli lihtsalt pärandatud kogemusi kasutades mitteteadlikult arvestab enam-vähem vastuvõetavalt kõiki olulisi tegureid, teoreetikule kätte näidata, mida see just on kahe silma vahele jätnud. Praktik ei suuda mõista, et keegi võib temale nii ilmseid või harjumusepäraseid asju mitte märgata. Ja üldse on talle väga võõrastav teoreetiku kogu ülesandeseade, lähenemisviis ning terminoloogia. Võib ütelda, et nad kõnelevad erinevaid keeli.

Kujutleme korraks, et ma oleksin poisikesepõlvest alates asunud looma vastavat «tünnitootmise teooriat» (puu paisumist, elastsust jms. arvestamata) ning sellest lähtudes konstrueerinud ka vastavad kallid ja keerulised tehnilised seadmed. Kas see teooria, — kui ta oleks tulnud ka seesmiselt väga range ja vasturääkivusteta — oleks võinud pretendeerida nimetusele «teaduslik tünnitootmise teooria»? Ja millist kasu oleks üldse olnud kogu sellest teooriast ning tehnikast?

Alaks, kus minu arvates võib-olla kõige rohkem puututakse kokku mitmesuguste seda laadi «tünniprobleemidega», on matemaatiliste meetodite rakendamine majanduse, üksikute ettevõtete töö jms. juhtimisel. Siin on tegemist väga mitmetahuliste nähtustega, mis sõltuvad üpris paljudest asjaoludest. Kes oskaks küll ära näidata, missugused neist on just olulised ja kuivõrd nad seda on ning kuidas tuleks neid matemaatilises vormis praktikale vastuvõetaval kujul kirja panna! Liiatigi on majanduse juhtimine praegu veel peaaegu täielikult praktikute pärusmaa, teaduslike meetodite poolt söötis.

Üpris sageli on asi nii, et teoreetik, võttes aluseks oma küllaltki üldise ja ebatäieliku ettekujutuse majanduse juhtimise tegelikest ülesannetest, koostab vastava matemaatilise mudeli, uurib seda, tõestab mõne teoreemi ja avaldab oma töö teadusliku artiklina. Võib olla kaunikesti kindel, et ta oma mudeli koostamisel kõike olulist vajalikul määral arvestada ei osanud või midagi hoopiski kahe silma vahele jättis, mille tulemusena tehtud töö osutub järjekordseks «tünniteooriaks». Tõelist väärtust saab sellel tööl olla vaid puhtmatemaatilisest küljest, ning sedagi ainult siis, kui vastava matemaatilise mudeli uurimisel on kasutatud uut lähenemist või uusi teravmeelseid võtteid. Tavaliselt aga saavad niisugused tööd tunduvat hinnaalandust just selles osas, tänu oma «suurele praktilisele väärtusele» (!).

Kuidas siiski jõuda selgusele, kas me mõnda ülesannet lahendades tegeleme «tünniteooria» loomisega või mitte? Selguse saab anda ainult kontroll praktikas, ja mitte niivõrd tagantjärele, kui just töö enda käigus. On ju nii, et kui «tünniteooria» on juba valmis, siis ei piisa asja parandamiseks ainult mõnede täienduste sisseviimisest, vaid üldiselt tuleb kõik uuesti teha. Seega on majanduse juhtimise matemaatiliste meetodite rakendamine praktikas ühtlasi ka nendesamade meetodite teoreetilise väljatöötamise eelduseks. Et pääseda siin tekkivast «surnud ringist», tuleb kogu töö nende meetodite väljatöötamisel jaotada etappidesse. Esimestesse etappidesse on tarvis koondada lihtsamate, tagasihoidlikumate, vähemale pretendeerivate, enamasti vaid puhtinformatiivset laadi ülesannete lahendamine, hilisematesse etappidesse aga tõsisemad «pähklid», mille katkipuremine nõuab juba sügavamat asjatundmist, eelnevast tööst saadud kogemusi. Siinjuures on mõtet järgmise etapi tööde üksikasjalikule teostamisele asuda vaid pärast eelmise etapi tööde tegelikku rakendamist praktikasse — alles siis, kui oleme veendunud, et vähemalt siiamaani ei ole meil tegemist «tünniteooriaga».

Põhimõttelisest küljest on see kõik muidugi väga lihtne, kui me aga hakkame siin visandatud programmi ellu viima, muutub olukord vastupidiseks. Sellel on mitmeid põhjusi. Kõige olulisemaks ja määravamaks on raskused, mis tekivad pärast iga etapi ülesannete teoreetilist lahendamist saadud tulemuste rakendamisel tegelikku praktikasse. Kui näiteks füüsik ja keemik saavad üldiselt ning suhteliselt kerge vaevaga ise luua endale käepärase «miniatuurse praktika» laboratoorsetes tingimustes, siis majandusküberneetiku praktikaks saab olla põhiliselt ikkagi ainult majandus ise. Vaese majandusküberneetiku osaks langeb kõndida mööda ettevõtteid ja asutusi, veendes praktikuid oma ettevõtmiste õigsuses, näha (üldreeglina) kurja vaeva mitte küllalt korras olevate algandmete massiividega ja, ka mitte küllalt töökindlate või mitte küllalt võimsate elektronarvutitega, jääda lisaks sellele hõlmapidi kinni nii mõnegi paragrahvi konksu otsa, komistada mitmesugustele määrustele, stimuleerimissüsteemidele jne.

Kõige hullem on aga see, et sellistes toimetustes on kerge kaotada puude tagant metsa pilt hoopiski silmist ja lõpeks hakata pidama just «tünniteooriate» loomist selleks õigeks teadusetegemiseks. Kehtib ju selline oma lihtsuses otse kütkestav valem: pliiats + paber + matemaatika + majandusalane terminoloogia = majanduslik «tünniteooria» (optimaalne). Lisame siia juurde veel matemaatiliste arutelude ranguse, ilu, nende v a s t u r ä ä k i m a t u s e ja — mis eriti oluline — laialt levinud ning nii mitmegi autoriteedi poolt toetatava arvamise, et matemaatika uurib tegelikkust, et matemaatiline tõde on samaaegselt ka «päris» tõde [1]. Ja lõppeks, kellele ei meeldiks siis hakata otsemaid koostama optimaalseid, s. t. parimaist parimaid plaane ja arvutama välja seda tohutut majanduslikku efekti, mis saadakse sellisel juhul, kui . . . (Selle kõrval tundub Saaty küll üsna armetuna oma väitega [2], et operatsioonianalüüsi abil püütakse teha halvasti seda, mida muidu tehakse veelgi halvemini!).

Samaaegselt on aga üpris raske mõista, miks näiteks kosmoseuurijad küll otsekohe optimaalset kosmoselaeva piki optimaalset trajektoori Kuule ja tagasi ei saada, vaid sooritavad enne suurel hulgal p r a k t i l i s i katseid, läkitades välja rakette küll inimestega, küll ilma, küll ümber Kuu, küll ümber Maa, küll kõva, küll pehme kuundumisega. Ei tahaks kuidagi uskuda, et majanduse kui tohutult suure ja komplitseeritud süsteemi kõigiti harmoonilise ning efektiivse töö tagamine oleks põhimõtteliselt lihtsam kui kosmoselaeva läkitamine Kuule ja tagasi.

---

[1] Vt. «Kiri «Matemaatika ja tegelikkuse» autorile» käesolevas kogumikus (lk. 127).

[2] Vt. Matemaatika ja kaasaeg, II, lk. 46.

* *
*

Meenub aeg, kui me põllumajandus oli veel suhteliselt nigelal järjel ning päevakorras seisis organiseerimisvõimeliste majandusjuhtide ja üldse mitmesuguste tublide spetsialistide suunamine mahajäänud kolhoosidesse. Tollal oli küllaltki sageli käibel peaaegu üldmõisteks kujunenud väljend «kõige mahajäänuma rajooni kõige mahajäänum kolhoos» (edaspidi lühendatult *kmrkmk*). Sellega taheti rõhutada kolhoosi äärmist mahajäämust, allakäimist, laostumist. Kui sagedased olid siis filmid, kus peakangelane — noor võimekas kõrgema õppeasutuse lõpetanud spetsialist palub end määrata tööle mitte pealinna, vaid suunata «*kmrkmk*-sse». Need filmid panid mind tollal pisut muigama. Arvasin, et «terve mõistuse» seisukohalt oleks olnud hoopiski mõjusam (igal juhul mitte vähem mõjus) ütelda *kmrkmk* asemel hoopis lihtsamalt — «kõige mahajäänum kolhoos» (edaspidi *kmk*).

Kas aga ilmselt ebaratsionaalse väljendi *kmrkmk* kasutamist saab põhjendada ainult tavalise inimliku loogikaahtrusega või on sel nähtusel hoopiski sügavamad juured? Ja kas ta üldse ongi ebaratsionaalne?

Nendele küsimustele vastamiseks tuleks kõigepealt analüüsida, kuidas kolhoosidevahelist paremusjärjestust (ja seega ka mahajäämust) tegelikult üldse määratakse. Kui on tegemist üpris paljude objektide (näiteks vabariigi kolhooside) järjestamisega, tehakse seda üldiselt ikka mingi kindla, kvantitatiivselt hõlpsasti avaldatava kriteeriumi järgi. Kolhooside puhul võetakse aluseks näiteks normipäevatasu. Kus viimane on kõige väiksem, see kolhoos on kõige mahajäänum. Lihtne!

Suhteliselt väikese hulga objektide (näiteks vabariigi rajoonide või antud rajooni kolhooside) «paremusjärjestuse» määramisel hinnatakse neid aga juba mitte enam niivõrd formaalselt kui sisuliselt, ja järelikult õigemini, arvestatakse oluliselt rohkem asjaolusid. On ju väiksemast hulgast hõlpsam saada igakülgset ülevaadet.

Ja nii ei ole midagi imestada, kui võib tekkida näiteks selline paradoksaalne olukord, et *kmk* on *kmk* just sellepärast, et seal teostati ulatuslikke maaparandustöid vms. Normipäevatasu sel puhul muidugi väheneb oluliselt, kuid selle vähenemise põhjused otseselt antud formaalse kriteeriumi korral arvesse ei läinud. Niisugune kolhoos tegelikult ei pruugi sugugi olla eriti mahajäänud, ta võib koguni olla oma rajoonis isegi esirinnas.

Nii siis võib — vastupidi «tervele mõistusele» — välja tulla, et *kmrkmk* on üldiselt rääkides siiski mahajäänum kui *kmk*. Ja, järelikult, väljend «*kmrkmk*» ei olegi nii ebaratsionaalne, loogikaaher.

Majandusküberneetika üldisemate küsimustega on see lugu seotud selles mõttes, et just siin on tegemist näiteks plaanide järjestamisega mitmesuguste formaalsete optimaalsusekriteerimide järgi. Majandust ennast huvitavad aga tegelikult, s. t. sisuliselt parimad plaanid. Plaanide sisulist (kui kõikvõimalikke asjaolusid arvestavat) paremust ei osata ega suudeta aga kaugeltki mitte otsekohe formaalsete kriteeriumidega küllalt hästi hinnata. Pealegi võib igasugune praktiline eksperimenteerimine siin üpris kalliks maksma minna. Ja kes annaks üldse piisavalt võimalusi sellisteks eksperimentideks? Ainult sisuline lähenemine võib siin lõpuks viia küllalt heade formaalsete kriteeriumideni.

Seega, kui me ei taha luua «tünniteooriaid», kui tahame, et teadus tõesti oleks tootlik jõud — aga majandusküberneetika nagu pretendeeriks sellele —, peame pahatihti tooma oma ranguses ja ilus suurepärased formaalloogilised arutelud ohvriks sisulistele aruteludele, ei tohi jäägitult usaldada isegi kõige lihtsamaid loogilisi mõttekäike, peame kõigesse suhtuma kriitiliselt.

Kahtlen, järelikult olen olemas, nagu ütles Descartes.

RÜNNO

MULLARI

7. XII 1931.—2. XII 1968.

«Matemaatika ja kaasaja» käesolev number oli juba laotud, kui saabus kurb sõnum artikli autori surma kohta. Üksikasjalikuma ülevaate R. Mullari elust ja tööst avaldame «Matemaatika ja kaasaja» järgmises numbris.

KES-ON-KES TÜÜPI ÜLESANDED

(Kuidas lahendada keerdülesandeid I)

Ü. Kaasik

Üsna paljude ajakirjade ja muude väljaannete veergudel pakutakse sageli lahendamiseks mitmesuguseid keerdülesandeid. Neid lahendavad meeleldi (või vähemalt püüavad lahendada) nii noored kui vanad, nii matemaatikahuvilised kui ka matemaatikaga hoopis vaenujalal seisjad. Ja ega niisuguste ülesannete lahendamiseks vajalik nuputamine pole ainult ajaviide. Koos raske ülesande lahendamisel saadava rahuldustundega on lahendaja enamasti alati ka midagi õppinud. Eriti käib see just nn. loogiliste keerdülesannete kohta, mille lahendamine aitab harjutada ranget järjekindlust mõtlemisel, annab vilumusi keerulises olukorras orienteerumiseks, varustab kogemustega asjade omavaheliste seoste leidmiseks ja ... ühe sõnaga, õpetab loogiliselt mõtlema. Juba üksnes seetõttu on ka täiesti mittematemaatilistel keerdülesannetel siiski tihe side matemaatikaga.

Keerdülesannete lahendamine õpetab seega meile mõndagi, kuid nende ülesannete lahendamist ennast kahjuks kuskil ei õpetata ja ega seda sõna otseses mõttes ei saagi õpetada. Ei saa nimelt anda üldisi reegleid, mille abil võiks kohe mistahes keerdülesande lahendamisele asuda. Kuid veidi järele mõteldes näeme, et selliste reeglite puudumine polegi nii halb! Tõepoolest, kui iga keerdülesande lahendamiseks tarvitseks vaid vastav reegel meelde tuletada (või käsiraamatust järele vaadata), siis poleks nende lahendamine enam sugugi nii huvitav.

Kuigi keerdülesannete lahendamise täpsed eeskirjad puuduvad, saab siiski anda väga mitmesuguseid kasulikke näpunäiteid. Selliseid näpunäiteid on aga eestikeelses trükisõnas seni üsna napilt ilmunud.[1] Sellepärast alustamegi käesolevaga veidi ulatuslikumate artiklite sarja, mis seab oma eesmärgiks vähemalt

---

[1] Mõningaid niisuguseid näpunäiteid võib leida näiteks raamatus: B. Kordemski. Matemaatilisi pähkleid. Tln., 1960 ja artiklites: Ü. Kaasik. Loogilised keerdülesanded. — «Noorus» 1963, nr. 5, lk. 49—52; Ü. Kaasik. Loogiliste keerdülesannete lahendamisest. — Mittestatsionaarne matemaatikakool, 1966, nr. 6 ja 7.

keerdülesannetė mõningate levinumate liikide puhul kasutatavate tüüpilisemate lahendusvõtete tutvustamise. Erilisi matemaatilisi teooriaid nendes artiklites küll esitada ei kavatseta, kuid matemaatikaga vahete-vahel ikka kokku puutuda tuleb.

* *
*

«Kes-on-kes» tüüpi ülesanded moodustavad nähtavasti keerdülesannete ühe levinuma liigi. Nendes ülesannetes tuleb mõningate näiliselt väheütlevate ning üsna laialipaisatud andmete järgi leida isikute ametid, elukohad, sugulussidemed või midagi muud taolist. Lahendamise kogu raskus seisneb sealjuures enamasti just andmetevaheliste seoste lahtimõtestamises ning ülesande n.-ö. «nõrga koha» ülesleidmises (viimane osutub küll tegelikult keerdülesannete peaaegu kõikide liikide puhul kõige olulisemaks). Eriti raskeks teeb aga lahendamise see, et nii andmeid kui ka otsitavaid on reeglina väga palju — kipub kaduma igasugune ülevaade.

Ülevaate kadumise oht viitab vajadusele leida sobiv meetod andmete ja otsitavate vaheliste seoste süstematiseerimiseks. Tavaliselt kasutatakse selleks otstarbeks mitmesuguseid graafilisi meetodeid, eeskätt tabeleid, skeeme või jooniseid. Suhteliselt kõige tuntumaks nendest meetoditest on ülesandes esinevate näitajate vaheliste vastavuste tabeli koostamine. Alustamegi sellest.

Eriti lihtsaks osutub vastavuste tabeli koostamine selliste ülesannete korral, milles vastavusse seatavaid näitajaid on ainult kaks, näiteks nimed ja elukutsed. Sel juhul omandab tabel näiteks joonisel 1 esitatud kuju, kus iga lahter vastab ühele nime ja elukutse paarile. Kui vahetult andmetest või lahenduse edasises käigus selgub, et mingi paar pole võimalik (s. t. vastava nimega isikul ei saa vastavat elukutset olla), siis kriipsutame selle lahtri läbi. Kui aga mingi paar on kindlaks tehtud (s. t. ühe isiku elukutse on selgitatud), siis märgime vastava lahtri näiteks ringikesega. Niipea kui mingisse lahtrisse on kantud ringike, võib vastava rea ja veeru kõik ülejäänud lahtrid kohe läbi kriipsutada. Kui mõnes reas või veerus on jäänud veel vaid üks läbikriipsutamata lahter, siis tuleb see varustada ringikesega.

	praaker	rätsep	sepp	tisler
Põld				
Raba				
Soo				
Tänav				

Joonis 1.

Ainult tabeli sellise järkjärgulise puhtmehhaanilise täitmise teel saab lahendada vaid üsna lihtsaid ülesandeid. Tavaliselt aga jõuame ikka olukorrani, kus vähemalt teatud hulgas ridades ja veergudes on veel kaks või enam vaba lahtrit ning mingit vahetut võimalust ühegi lahtri täitmiseks enam ei õnnestu leida. Sel juhul tuleb hakata hüpoteese püstitama ja selgitama, kas nendest tuleneb mingi vastuolu lähteandmetega. Ka selles faasis on tabelist tavaliselt palju kasu, sest ta aitab hüpoteese süstematiseerida ning kiirendab kas vastuolu avastamist või selle puudumise põhjendamist.

Et kahe näitajate rühma korral võib vastavuste tabeli kasutamist vist enam-vähem üldtuntuks lugeda, siis piirdume siin vaid näiteülesande esitamisega, jättes lahendamise (s. t. joonisel 1 oleva tabeli täitmise) täielikult lugeja hooleks.

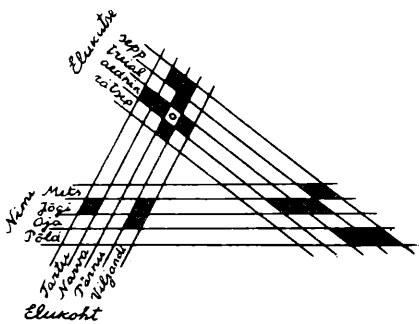
Ülesanne 1. Põld, Raba, Soo ja Tänav on neli meest, kelle elukutsed (mingis järjekorras) on praaker, rätsep, sepp ja tisler. Leida igaühe elukutse, kui on teada, et:

1) Soo ja Raba on naabrid ning sõidavad alati koos tööle;
2) Soo saab rohkem palka kui Tänav;
3) peaaegu alati, kui Põld ja Raba malet mängivad, on viimane võidukas;
4) praaker läheb tavaliselt jalgsi tööle;
5) sepp ja rätsep elavad teine teises linna ääres;
6) tisler ja rätsep on ainult ühe korra teineteist näinud;
7) rätsep saab nii tislerist kui ka sepast rohkem palka.

Kui ülesandes esinevaid näitajate rühmi on rohkem, siis tuleb juba koostada enam kui kahe sisendiga vastavuste tabel. Selliste tabelite kasutamise meetoditega tutvumiseks vaatlemegi kõigepealt üht üpris lihtsat näidet.

Ülesanne 2. Neli endist koolivenda — Mets, Jõgi, Oja ja Põld elavad nüüd neljas erinevas linnas ning neil on erinevad elukutsed. Leida nende meeste elukohad ja elukutsed, kui on teada, et:

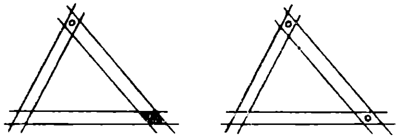
1) rätsep on küll Pärnus sündinud, aga praegu elab seal hoopis aednik;
2) samal ajal kui Jõgi sõitis oma Tartus ja Viljandis elavaid koolivendi külastama, tulid talle endale külla aednik ja treial;
3) sepa nimi ei ole Mets ja ta ei ela Narvas;
4) Põld ei ole treial ega sepp;
5) Oja ei ela Viljandis.



Joonis 2.

Ülesande lahendamiseks valmistame joonisel 2 kujutatud kolme sisendiga «tabeli» ja kanname sinna vahetud järeldused andmetest. Nimelt kriipsutame läbi (joonisel mustad) lahtrid, mis vastavad kombinatsioonidele Jõgi-Tartu, Jõgi-Viljandi, Jõgi-aednik, Jõgi-treial, sepp-Mets, sepp-Narva, Põld-treial, Põld-sepp ja Oja-Viljandi. Samuti aga kanname ringikese lahtrisse aednik-Pärnu ning kriipsutame muidugi läbi kõik teised aednikule ja Pärnule vastavad lahtrid tabeli osas elukutse-elukoht. Nende sissekannete tulemus ongi kujutatud joonisel 2.

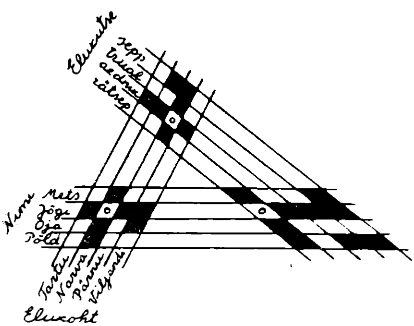
Kui andmete vahetud järeldused on niimoodi tabelisse kantud, vaatame, kas tabelis leidub joonisel 3 esitatud konfiguratsioone, s. t. kolmnurki, mille ühes tipus paikneb ringike, teine tipp on täitmata ja kolmas tipp kas läbi kriipsutatud (joonis 3, *a*) või varustatud ringikesega (joonis 3, *b*). Kui selliseid kolmnurki leidub, siis võib ilmselt kohe täita ka nende kolmandad tipud vastavalt kas läbikriipsutamisega (juht *a*) või ringikesega (juht *b*). Nimetame tabeli niisugust täitmist taandamiseks.[2]



a) b)

Joonis 3.

Antud juhul leidub tabelis ainult üks taandatav kolmnurk (tüüpi *a*), selle moodustavad read aednik-Jõgi-Pärnu. Seega võib lahtri Jõgi-Pärnu läbi kriipsutada (seda pani vähegi hoolikas lugeja muidugi tähele juba ülesandega tutvumisel, kuid tuleb arvestada, et me ei kirjelda siin mitte lihtsaimat viisi antud ülesande lahendamiseks, vaid üldist meetodit). Nüüd on aga tabeli osas nimi-elukoht jäänud ritta Jõgi ainult üks vaba lahter. Kanname sinna ringikese (s. t. Jõgi elab Narvas) ja kriipsutame ühtlasi selles tabeli osas läbi kõik teised Narvale vastavad lahtrid.

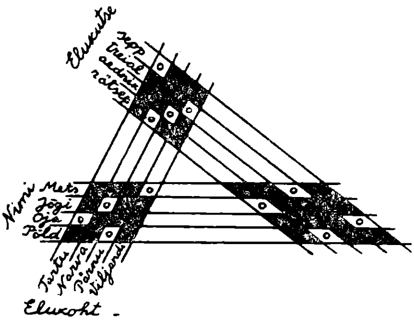


Joonis 4.

Uue ringikese lisamisega tekkis aga kohe uus tüüpi *a* kolmnurk (mille moodustavad read Narva-sepp-Jõgi) ja taandades võib lahtri sepp-Jõgi seega läbi kriipsutada. Ühtlasi saame lahtrisse Jõgi-rätsep nüüd kanda ringikese ning tabel omandab joonisel 4 näidatud kuju.

Ka edasi kulgeb lahendamine täiesti automaatselt. Joonisel 4 leiame kohe tüüpi *b* kolmnurga Jõgi-rätsep-Narva ja järelikult rätsep elab Narvas. Samuti võib otsekohe kanda ringikese lahtrisse Põld-aednik, seejärel lahtritesse Mets-treial ja Oja-sepp. Taandades võib nüüd ilma mingi vaevata täita ka kõik ülejäänud

[2] Juhime tähelepanu sellele, et kui tabelis esineb kolmnurk, mille kahes tipus paiknevad ringikesed, kolmas on aga läbi kriipsutatud, siis peab kas lahendamisel olema tehtud viga või osutuvad ülesande tingimused ise vastuolulisteks. Samuti tuleb tähele panna, et kui kolmnurga kaks tippu on läbi kriipsutatud, siis sellest ei järeldu veel kolmanda tipu läbikriipsutatus.



Joonis 5.

lahtrid, millega tabel omandab joonisel 5 esitatud lõppkuju. Vastuse väljakirjutamine täidetud tabeli järgi ei tohiks aga kellelegi enam raskusi valmistada.

Vaadeldud lihtsa ülesande lahendamine poleks ka ilma vastavuste tabeli koostamiseta nähtavasti erilisi raskusi pakkunud, kuid tabel aitas meil siiski tööd lihtsustada ja süstematiseerida. Eriti oluline oli aga tutvumine tabeli täitmise põhivõtetega. Neid võtteid saab nimelt edukalt ära kasutada ka hoopis raskemate ülesannete lahendamisel, kuigi seal lahendamine ei tarvitse enam piirduda tabeli niisuguse automaatse täitmisega. Toomegi nüüd ühe veidi keerulisema näite.

Ülesanne 3. Kiirrongi kupees istuvad kuus teadlast: Kask, Lepp, Mänd, Paju, Saar ja Tamm. Kõik nad sõidavad Teaduste Akadeemia üldkoosolekule, kus neil tuleb esineda ettekannetega oma teaduslikust tööst. Igaüks andis oma ettekande teksti tutvumiseks ühele kaasreisijaist. Leida nende teadlaste erialad, kui on teada, et:

1) Paju on küll füüsiku parim sõber, kuid istub hoopis bioloogi ja ajaloolase vahel;

2) Lepp istub nurgas ja võttis talle algul pakutud matemaatilise ettekande asemel tutvumiseks hoopis bioloogia-alase ettekande;

3) Mänd oli jõudnud keemiku ettekandega juba varem tutvuda ja võttis nüüd ühe teise ettekande;

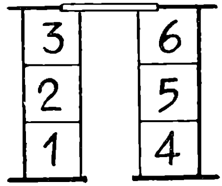
4) Saar istub geoloogi kõrval ja loeb ajaloolase ettekannet;

5) Tamm istub füüsiku vastas ja loeb geoloogi ettekannet:

6) Kask loeb enda vastas istuja ettekannet;

7) bioloog istub matemaatiku vastas.

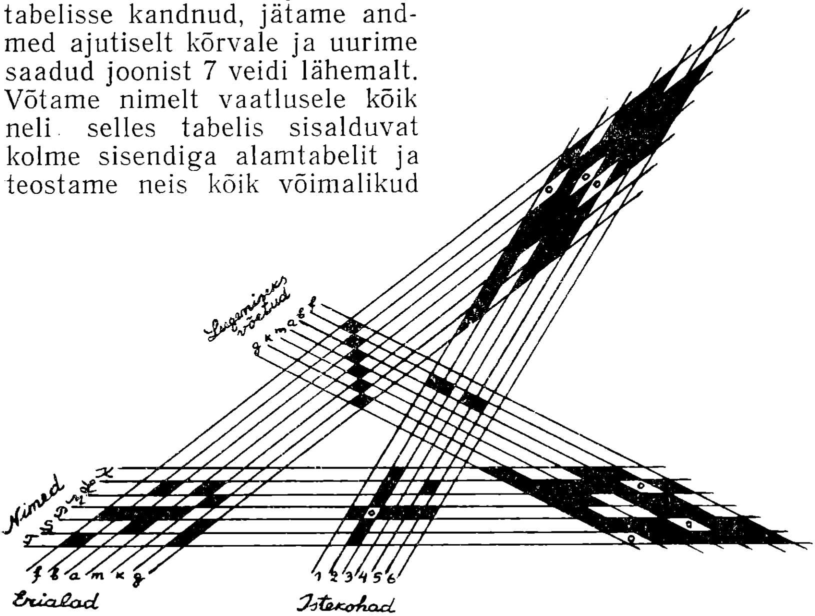
Selle ülesande lahendamiseks tuleb koostada juba nelja sisendiga tabel, sest tegemist on nelja näitajaga: nimed, erialad, istekohad ja lugemiseks võetud ettekanded. Istekohtade eristamiseks nummerdame nad näiteks joonisel 6 esitatud skeemi järgi. Kohtade sümmeetriat arvestades võime ühtlasi kokku leppida, et bioloog istugu kohal 1, Paju kohal 2, ajaloolane kohal 3 ja matemaatik seega kohal 4. Joonisel 7 toodud tabelis ongi seda juba arvestatud (jooniste lihtsustamiseks on seal nimed ning erialad asendatud esitähtedega). Ühtlasi on tabelisse kantud aga ka kõik teised ülesande andmetest enam-vähem vahetult järelduvad asja-



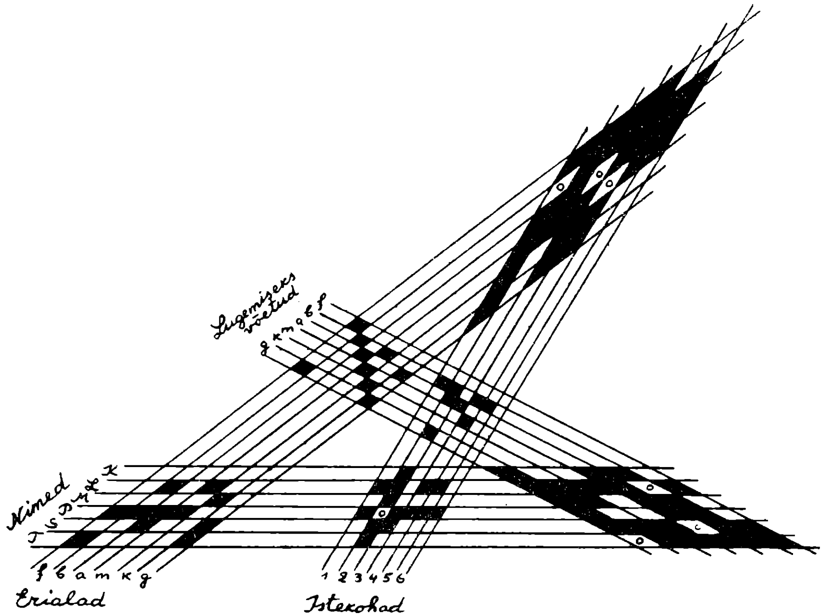
Joonis 6.

olud: kolme nime puhul on teada, mida nad lugemiseks võtsid, samuti tuleneb andmetest terve rida võimatuid kombinatsioone.

Olles need ilmsed järeldused tabelisse kandnud, jätame andmed ajutiselt kõrvale ja uurime saadud joonist 7 veidi lähemalt. Võtame nimelt vaatlusele kõik neli selles tabelis sisalduvat kolme sisendiga alamtabelit ja teostame neis kõik võimalikud



Joonis 7.



Joonis 8.

taandamised. Nende alamtabelite läbivaatamist tuleb korrata seni, kuni enam pole võimalik teostada ühtki taandamist. Nii saame lõpuks joonisel 8 kujutatud tabeli.

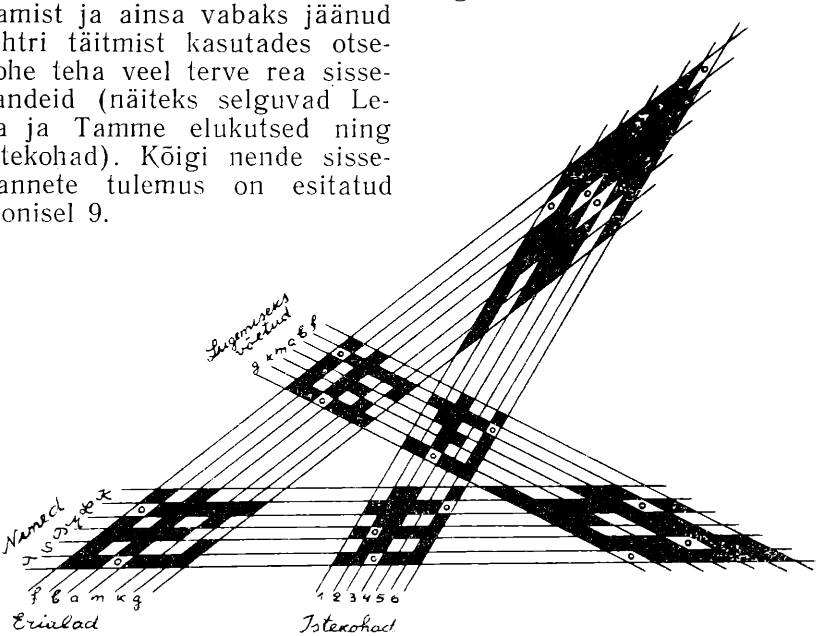
Pöördume nüüd jälle ülesande andmete poole ja eraldame sealt kõik veel tabelisse kandmata seosed. Neid on kokku kolm:

1° Saar istub geoloogi kõrval;

2° Tamm istub füüsiku vastas;

3° Kask loeb enda vastas istuja ettekannet.

Seoseid 1° ja 3° esialgu veel arvestada ei õnnestu (nii Saare, geoloogi kui ka Kase istekohtade osas on tabelis üsna suur vabadus), küll aga seost 2°. Tabelist nimelt näeme, et füüsik peab istuma kas kohal 5 või 6, seega Tamm vastavalt kohal 2 või 3. Neist on Tamme jaoks lubatav veel vaid koht 3 ning järelikult füüsik istub kohal 6. Kandes need ringikesed tabelisse saame taandamist ja ainsa vabaks jäänud lahtri täitmist kasutades otsekohe teha veel terve rea sissekandeid (näiteks selguvad Lepa ja Tamme elukutsed ning istekohad). Kõigi nende sissekannete tulemus on esitatud joonisel 9.



Joonis 9.

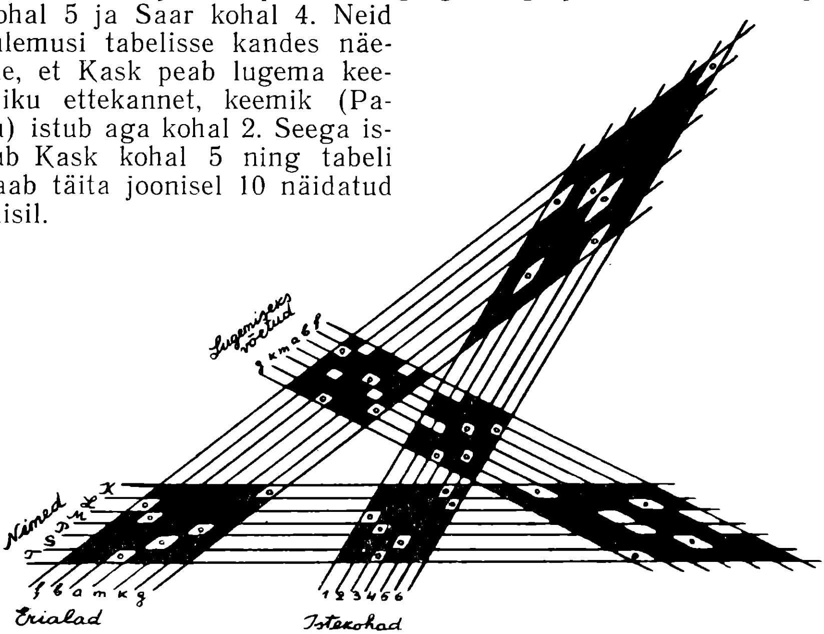
Võttes nüüd uuesti vaatlusele veel arvestamata seosed 1° ja 3° näeme, et geoloog saab istuda vaid kas kohal 2 või 5, Saar aga vaid kohal 1, 4 või 5. Viimane variant langeb seose 1° tõttu küll välja (selle lahtri võib läbi kriipsutada), kuid järele jääb siiski kaks võimalust:

kas geoloog istub kohal 2 ja Saar kohal 1

või geoloog istub kohal 5 ja Saar kohal 4.

Kui neid võimalusi arvestades teha hüpotees, et geoloog istub kohal 2 ja Saar kohal 1, siis peab Kask istuma kas kohal 4 või 5.

Vastasistmeks on seega 1 või 2, kus oletuse kohaselt istub kas Saar (kes sel juhul osutub bioloogiks) või geoloog. Kuid tabeli järgi saab Kask lugeda vaid kas füüsiku, matemaatiku või keemiku ettekannet, mis on vastuolus seosega 3°. Järelikult ei pea püstitatud hüpotees paika ning geoloog peab istuma hoopis kohal 5 ja Saar kohal 4. Neid tulemusi tabelisse kandes näeme, et Kask peab lugema keemiku ettekannet, keemik (Paju) istub aga kohal 2. Seega istub Kask kohal 5 ning tabeli saab täita joonisel 10 näidatud viisil.



Joonis 10.

Lahenduse leidmine tabelist jäägu jälle lugeja hooleks. Juhime ainult tähelepanu asjaolule, et täitmata jäänud lahtrid tabelis tähendavad ülesande andmete ebapiisavust selle selgitamiseks, kuidas on matemaatiku ja füüsiku ettekanded Paju ja Männi vahel jaotatud.

Viie sisendiga vastavuste tabelit on otstarbekohane kasutada näiteks järgmise ülesande lahendamisel.

Ülesanne 4. Ratsavõistlusele registreerus kuus võistlejat ja nende vahel loositi välja numbrid ühest kuueni. Viimasel minutil aga üks neist loobus ning võistlusest võtsid seega osa vaid Kask, Paju, Palm, Pärn ja Tamm. Selgitada iga võistleja number, tema hobuse nimi, saavutatud koht ja võistlusrada (rajanumbrid ühest viieni), kui on teada, et:

1) Pärna number langes kokku tema rajanumbriga;

2) ainult Tornaado sai koha, mis võrdus tema rajanumbriga;

3) Orkaani ratsaniku number võrdus saavutatud kohaga ning oli ühe võrra suurem Paju kohast;

4) Orkaani rajanumber oli sama suur nagu koht, mille saavutas Keeris;

5) Keerise ratsaniku number oli ühe võrra suurem saavutatud kohast;

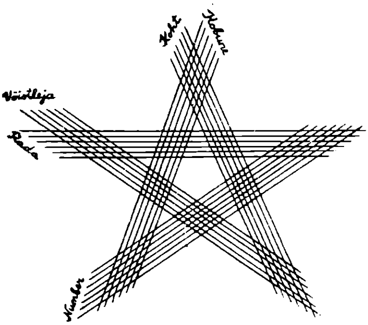
6) Mistraal jooksis rajal, mille number oli ühe võrra väiksem saavutatud kohast;

7) Pööris jooksis rajal, mille number oli ühe võrra suurem saavutatud kohast;

8) vähima numbriga võistleja tuli kolmandaks, võistleja nr. 6 aga neljandaks;

9) teiseks tuli see ainus võistleja, kelle nimi algab sama tähega mis tema hobuse nimi;

10) Tamm tuli esimeseks ja Kask jäi viimaseks.



Joonis 11.

Lootes, et vastavuste tabeliga opereerimine nüüd enam erilisi raskusi ei valmista, jätame selle ülesande lahendamise täielikult lugeja hooleks (vastava tabeli skeem on esitatud joonisel 11). Tuleb ainult tähele panna seda, et erinevalt eelmistest ülesannetest on siin sisendi «number» puhul tegemist ühe ülearuse reaga, s. t. lõpptulemuses peavad mingi ühe rea kõik lahtrid olema läbi kriipsutatud.

Enam-vähem samasuguste kõrvalekaldumistega kirjeldatud üldisest skeemist puutume kokku üsna mitmetes keerdülesannetes. Vahel on aga veel tegemist ka teist laadi kõrvalekaldumistega, mis seisnevad selles, et mõnedes (või kõikides) ridades peab esinema enam kui üks ringike. Sellise olukorraga on tegemist näiteks järgmises ülesandes, mille kahe sisendiga vastavuste tabeli igas reas (mis vastavad nimedele) peab paiknema täpselt kaks ringikest, ühes veergudest (mis vastavad keeltele) kolm ringikest, teistes veergudes aga mitte enam kui kaks.

Ü l e s a n n e 5. Moskva ülikooli tuli neli uut üliõpilast: Ahmed, Bruno, Carl ja David. Et nad on kõik erinevatest riikidest, siis on neil raskusi keeltega. Igaüks neist kõneleb täpselt kaht keelt järgmisest neljast: inglise, prantsuse, saksa ja vene. Ühtki nendest keeltest ei räägi nad kõik, on aga siiski üks keel, mida räägivad kolm nendest. Leida, milliseid keeli igaüks nendest neljast üliõpilasest kõneleb, kui on teada, et:

1) keegi neist ei kõnele korraga saksa ja prantsuse keelt;

2) kuigi Ahmed ei räägi inglise keelt, on ta tavaliselt tõlgiks, kui Bruno ja Carl tahavad omavahel rääkida;

3) Bruno kõneleb saksa keelt ja saab rääkida ka saksa keelt mitte oskava Davidiga;

4) Ahmed, Carl ja David ei saa korraga ühes keeles juttu ajada.

Jätame ka selle (üsna lihtsa) ülesande lahendamise lugejatele.

Enam kui viie sisendiga vastavuste tabeleid on juba üsna tülikas joonistada, pealegi kipub neis kaduma tabelite peamine eelis — ülevaatlikkus. Seetõttu kasutatakse niisuguste (vahel aga ka väiksema sisendite arvuga vastavuste tabelit nõudvate) ülesannete lahendamisel mitmesuguseid koondtabeleid. Demonstreerime sellist moodust ja sellega kaasnevaid täiendavaid võtteid näiteks järgmise ülesande korral, mille lahendamisel ülalkirjeldatud metoodika järgi tuleks vaatlusele võtta kuue sisendiga vastavuste tabel.

Ülesanne 6. Ühe tänava viies eri värvi, aga järjestikku paiknevas majas elavad erinevate nimedega isikud. Igaüks neist kasvatab erinevat kodulooma, suitsetab erinevaid sigarette ja joob erinevat jooki. Leida, kes kasvatab siili ja kes joob vett, kui on teada, et:

1) Kask elab punases majas;
2) Lepp kasvatab koera;
3) rohelises majas juuakse kohvi;
4) Mänd joob õlut;
5) valge maja paikneb rohelisest vahetult vasakul;
6) sigarette «Tallinn» suitsetatakse selles majas, kus kasvatatakse lehma;
7) kollases majas suitsetatakse sigarette «Priima»;
8) keskmises majas juuakse piima;
9) Tamm elab kõige vasakpoolsemas majas;
10) rebast kasvatatakse selle maja kõrval, kus suitsetatakse sigarette «Astra»;
11) selles majas, kus suitsetatakse sigarette «Vana Toomas», juuakse teed;
12) sigarette «Priima» suitsetatakse selle maja kõrval, kus kasvatatakse hobust;
13) Paju suitsetab sigarette «Leek»;
14) Tamm elab sinise maja kõrval.

Selle ülesande lahendamiseks varustame majad, alates vasakult, järjekorranumbritega 1 kuni 5 ja asume täitma joonisel 12 esitatud tabelit, kus iga rea kõrvale (tabelist paremale) on kirjutatud sellesse ritta paigutatavate sõnade esitähed, veergude kohale aga majade numbrid. Joonisele 12 on juba kantud enam-vähem vahetud järeldused ülesande tingimustest (et tingimuste 1 ja 9 kohaselt ei saa esimene maja olla punane ning tingimuste 5 ja 14 järgi ei saa ta olla ka roheline ega valge, siis on esimene maja kollane ja tingimuse 7 tõttu suitsetatakse seal sigarette «Priima»).

	1	2	3	4	5	
Elaniku nimi	T					K, L, M, T, P
Maja värv	k	s				p, r, v, k, s
Jook			p			k, õ, p, t, v
Sigaretid	P					T, P, A, V, L
Koduloom		h				k, l, r, h, s

Joonis 12.

Tingimuse 5 kohaselt saab punane maja olla kas kolmas või viies. Proovime kõigepealt teist võimalust. Sellest oletusest järeldub otsekohe, et: Kask elab viiendas majas (tingimus 1), kolmas maja on valge ja neljas roheline (tingimus 5), kohvi juuakse neljandas majas (tingimus 3), õlut juuakse teises majas ja seal elab Mänd (tingimus 4), viiendas majas juuakse teed ja suitsetatakse sigarette «Vana Toomas» (tingimus 11). Kõiki neid tulemusi tabelisse kandes omandab see joonisel 13 esitatud kuju.

	1	2	3	4	5
Elaniku nimi	T	M			K
Maja värv	k	s	v	r	p
Jook		õ	p	k	t
Sigaretid	P				V
Koduloom		h			

Joonis 13.

	1	2	3	4	5
Elaniku nimi	T		K		
Maja värv	k	s	p	v	r
Jook			p		k
Sigaretid	P				
Koduloom		h			

Joonis 14.

Jooniselt 13 näeme, et Paju ja Lepp peavad elama kolmandas ja neljandas majas. Seega kasvatatakse ühes nendest majadest koera (tingimus 2), teises aga suitsetatakse sigarette «Leek» (tingimus 13). See aga tähendab, et enam pole võimalik rahuldada tingimust 6, sest ei leidu veergu, kus sigarettide ja kodulooma lahtrid oleksid mõlemad täitmata. Järelikult ei saa viies maja olla punane ja kõik selle hüpoteesi alusel tehtud sissekanded tuleb kustutada (koondtabelite kasutamisel lisandub seega kustutamise «operatsioon»). Pöördudes tagasi joonisel 12 esitatud tabeli juurde võime sinna nüüd märkida, et kolmas maja on punane. Siis on aga neljas maja valge ja viies roheline (tingimus 5), Kask elab kolmandas majas (tingimus 1) ning viiendas majas juuakse kohvi (tingimus 3). Seega omandab tabel joonisel 14 näidatud kuju.

Mänd saab elada kas teises või neljandas majas. Proovime kõigepealt teist võimalust. Sellest oletusest järeldub, et: neljandas majas juuakse õlut (tingimus 4), teises majas juuakse teed ja suitsetatakse sigarette «Vana Toomas» (tingimus 11), viiendas majas elab Lepp, kes kasvatab koera (tingimus 2). Tabel omandab seega joonisel 15 toodud kuju, mille kohaselt teises majas peab elama Paju. Siis ei ole aga võimalik täita tingimust 13,

	1	2	3	4	5
Elaniku nimi	T		K	M	L
Maja värv	k	s	p	v	r
Jook		t	p	õ	k
Sigaretid	P	V			
Koduloom		h			k

Joonis 15.

	1	2	3	4	5
Elaniku nimi	T	M	K	L	P
Maja värv	k	s	p	v	r
Jook		õ	p	t	k
Sigaretid	P	A	T	V	L
Koduloom	r	h	l	k	

Joonis 16.

sest sigarettide lahter on teises veerus juba täidetud. Järelikult ei saa Mänd elada neljandas majas.

Et Mänd elab teises majas, siis saab tabelisse 14 juba päris lihtsalt terve rea uusi sissekandeid teha, mille tulemusel jõuame lõpuks joonisel 16 esitatud tabelini, kus kaks vaba lahtrit tähendavadki, et siili kasvatab Paju ja vett joob Tamm.

Peale mitmesuguste tabelite (nende kõikide võimalike erikujude juures pole siin kahjuks võimalik peatuda) kasutatakse kes-on-kes tüüpi ülesannete lahendamisel sageli ka muid abivahendeid, eeskätt skeeme ja graafe. Nii on see näiteks sellistes ülesannetes, kus olulist osa etendavad mingid sugulussidemed. Illustreerimegi üht niisugust võtet järgmise ülesande lahendamise käigus.

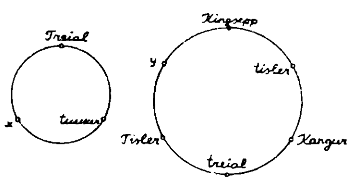
Ülesanne 7. Turismigrupi moodustavad üheksa erinevate elukutsetega meest. Imelikul kombel on neil kokkuvõttes samad perekonnanimed mis elukutsedki, ainult teisiti jaotatud. Koos puhkust veetma ajendas neid nähtavasti asjaolu, et nende üheksa hulgas leidub ühtlasi ka igaühe õemees.

Grupi liikmete sugulusvahekordade täpsustamisel selgus, et Treiali naisevend on tuuker, kelle naine on aga Treiali õemehe õde. Edasi selgus veel, et Kingsepp on tisleri õemees, kuid tisleri naine ei ole Kingsepa õemehe õde, vaid hoopis Kangru õde, Kangru naisevend treial on aga abielus Tisleri õega. Telgid jaotati Möldri ja koka ettepanekul loosimise teel. Loosimisest ei võtnud osa Müürsepp, kes otsustas magada autos. Esimese telgi said tema «nimekaimu» (s. t. müürsepa) naisevend ja õemees, teise Kangru naisevend ja õemees, kolmanda kingsepp ja maaler ning neljanda Maaler ja Mölder. Huvitav on veel märkida, et koka perekonnanimi langeb kokku Koka elukutsega samanimelise mehe elukutsega. Samasugune seos leiab aset ka tisleri ja Tisleri vahel.

Leida iga mehe elukutse ning selgitada, kes on tema õemees.

Selle ülesande võiks lahendada kas kolme või nelja sisendiga vastavuste tabeli abil (jätame niisuguse lähenemisviisi proovimise lugejaile harjutamiseks, kuigi tegemist on üsna raske «pähkliga»), aga hoopis lihtsamaks osutub antud juhul kahe sisendiga vastavuste tabeli kasutamine, kui sellele lisada sobiv sugulussidemete skeem.

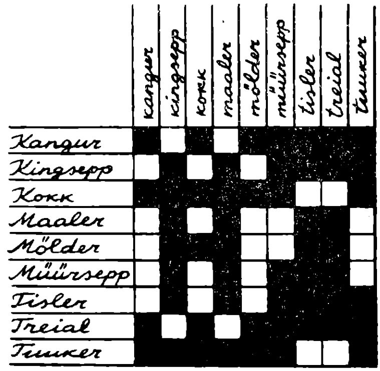
Järjestame mehed kõigepealt nii, et iga järgmine oleks eelmise naisevend. Selline järjestamine peab andma kas ühe või mitu kinnist ringi ehk tsüklit, kusjuures iga tsükkel sisaldab muidugi vähemalt kaks meest (keegi ei saa olla iseenda naisevend). Esimesest tingimusest näeme, et ühe niisuguse tsükli moodustavad Treial, tuuker ning viimase naisevend (tähistame teda ajutiselt x-ga), kes on ju ühtlasi Treiali õemees.



Joonis 17.

Teist tsüklit alustab Kingsepp, kellele järgneb tisler, siis Kangur, treial ja Tisler. Et üle on jäänud veel vaid üks mees (tähistame teda y), siis peab ka tema siia tsüklisse kuuluma, s. t. olema Tisleri naisevend ning ühtlasi Kingsepa õemees. Nii saamegi kaks joonisel 17 kujutatud tsüklit, kus igaühe naisevend on märgitud temast kellaosuti liikumise suunas järgmisena.

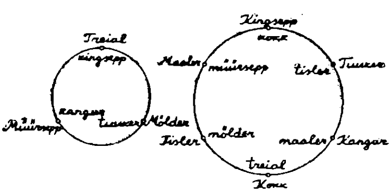
Jooniselt näeme, et teises telgis elavad treial ja tisler. Neljanda telgi elanikud Maaler ja Mölder ning autos magav Müürsepp peavad seega olema x, y ja tuuker (mingis järjekorras). Teise telgi elanike nimed on siis aga järelikult Kokk ja Tuuker. Esimese ning kolmanda telgi elanikeks jäävad nüüd Treial, Kingsepp, Kangur ja Tisler. Neist ainult Kingsepp ja Tisler saavad olla vastavalt müürsepa naisevend ja õemees — seega y elukutse on müürsepp ning Kangur ja Treial on kingsepp ja maaler (või maaler ja kingsepp). Järelikult Kingsepa, Tisleri ja x elukutseteks saame mölder, kangur ja kokk (mingis järjekorras).



Joonis 18.

Kanname nimede ning elukutsete vahel leitud seosed joonisel 18 kujutatud vastavuste tabelisse, kus lisaks saadud tulemustele on vahetult ülesande tingimustest arvestatud veel seda, et Mölder ei saa olla kokk ning Müürsepp ei saa olla müürsepp.

Arvestame nüüd asjaolu, et koka perekonnanimi langeb kokku Koka elukutsega samanimelise mehe elukutsega ning et tisleri perekonnanimi langeb kokku Tisleri elukutsega samanimelise mehe elukutsega. Et Tisler saab tabeli kohaselt olla kas kokk, kangur või mölder ja tisler saab olla kas Kokk või Tuuker, siis seega peab Koka, Kangru ja Möldri hulgast üks olema kas kokk või tuuker. Tabelist näeme, et ainsa võimalusena neist saab vaid Mölder olla tuuker. Järelikult on Tisler mölder, Mölder on tuuker ja Tuuker on tisler. Tabelit nende tulemustega täiendades näeme nüüd kohe, et Kokk on treial ja Maaler on müürsepp.



Joonis 19.

Et Treiali elukutse (mis tabeli järgi saab olla kas kingsepp või maaler) peab nüüd kokku langema koka perekonnanimega (mis saab olla kas Kingsepp või Müürsepp), siis järelikult on Treial kingsepp ja Kingsepp kokk. Lõpuks on lihtne näha, et Müürsepp saab olla vaid kangur ja Kangur maaler.

Kõigi sugulussidemete esiletoomiseks täiendame joonisel 17 toodud skeemi leitud tulemustega, millega see omandab joonisel 19 esitatud kuju.

Toodutega ei ole kes-on-kes tüüpi ülesannete lahendamise võtted muidugi kaugeltki ammendatud, kuigi suurema osa ülesannete puhul saab ka juba nende võtetega (kas hästi või halvasti) hakkama. Arvestagem aga, et igaühe võtete arsenal suureneb eeskätt ikka vastavaid ülesandeid võimalikult sagedamini lahendades. Ja seejuures mitte ainult lahendades, vaid otsides ühtlasi lihtsaimat või ilusaimat teed lahenduse juurde jõudmiseks. Toomegi lõpuks veel paar veidi raskemat ülesannet harjutamiseks, mis pakuvad ka mõningat materjali uute võtete või nende kombinatsioonide vaatlusele võtmiseks.

Ülesanne 8. Rahvusvahelises organisatsioonis töötab kokku seitse tõlki — hispaanlane, inglane, jaapanlane, prantslane, rootslane, sakslane ja venelane. Igaüks neist kõneleb peale oma emakeele veel täpselt kaht keelt. Viie puhul on mõlemad need keeled äsjanimetatute hulgast, üks räägib lisaks itaalia keelt ja üks soome keelt. Selgitada, milliseid keeli iga tõlk kõneleb, kui on teada, et:

1) ükski tõlkidest ei räägi kaht sellist keelt, mille nimed algavad ühesuguse tähega;

2) kaht keeltest räägivad ainult vastavast rahvusest tõlgid;

3) sakslane ja rootslane tulid selle organisatsiooni tenniseesivõistlustel segapaarismängus võitjateks;

4) naistõlgid räägivad kõik vene keelt, kuid ükski neist ei räägi jaapani keelt;

5) vene keelt räägivad kokku neli tõlki (sealhulgas inglane ja rootslane), samuti neli tõlki räägivad inglise keelt;

6) ainult üks nendest tõlkidest, kes räägib hispaania keelt, räägib ühtlasi ka vene keelt;

7) kolm tõlki on vallalised ja ükski abielus tõlkidest ei kõnele hispaania keelt;

8) tõlkide hulgas on üks abielupaar, kusjuures nad saavad omavahel kahes keeles kõnelda;

9) tõlkide hulgas on ka üks kihlatute paar, nad mõlemad kõnelevad prantsuse keelt, peigmees räägib pruudi emakeelt, kuid pruut peigmehe emakeelt mitte;

10) venelase naine kõneleb hispaania keelt;

11) prantslase poeg on kihlatud sakslase tütrega ja prantslase tütar on kihlatud jaapanlase pojaga.

Ülesanne 9. Malemeeskonda kuulub üheksa võistlejat — Aednik, Kokk, Lukksepp, Maaler, Pagar, Rätsep, Sepp, Treial ja Velsker. Nende meeste elukutsed on kokkuvõttes samad mis perekonnanimedki, ainult teisiti jaotatud. Leida iga võistleja elukutse, kui on teada, et:

1) Kokal ja veel ühel võistlejal on kummalgi üks tütar, teistel tütreid ei ole;

2) velsker on maalri äi;

3) Velsker on kihlatud lukksepa tütrega, kes varem lükkas tagasi aedniku ja pagari abieluettepanekud;

4) Aednik on vallaline ja oma elukutsega samanimelise mehe tavaline treeningupartner;

5) Sepa treeningupartneriks on tema väimees;

6) Aedniku isa on Pagari naise vend;

7) treial ja kokk on teineteise õemehed;

8) treiali perekonnanimi langeb kokku Koka elukutsega samanimelise mehe elukutsega ja koka perekonnanimi langeb kokku Sepa elukutsega samanimelise mehe elukutsega.

LOBATŠEVSKI GEOMEETRIA

K. Ariva

II. Sirgete teooria Lobatševski geomeetrias

Selle artikli eelnevates osades[1] püüdsime lugejas tekitada kahtluse kooligeomeetria ühe kõige fundamentaalsema lause — paralleelsirgete aksioomi suhtes. Näitasime, et see aksioom on vaid oletus, seni tõestamata teaduslik hüpotees. Nagu märkisime, põhineb veendumus, et tegemist on tõese lausega, suurelt osalt dogmaatiliseks eelarvamuseks kujunenud harjumusel, mida tingib meie kogemuste piiratus. Kool, vaikides täielikult maha Lobatševski ideed, loob vankumatu aluse sellele veendumusele ja piirab õpilase kujutluse aegade hämaruses avastatud Eukleidese maailmaga.

Muidugi, milleski kahelda ei tähenda veel seda eitada, lause hüpoteetilisus ei ole samaväärne selle mittetõesusega. Kuid kahtlus sunnib uurima ka muid mõeldavaid hüpoteese. Seda teed läkski Lobatševski. Ta asendas paralleelsirgete aksioomi tema päevil ainukese mõeldava alternatiivse hüpoteesiga — lausega, mida me nüüd nimetame Lobatševski aksioomiks. Tehes sellest üha uusi loogilisi järeldusi ehitas ta uue geomeetria, mis oma sisulise rikkuse, s. o. geomeetriliste detailide rohkuse poolest ületab tunduvalt Eukleidese süsteemi.

Esimesel tutvumisel Lobatševski geomeetriaga tuleb endas ületada mitte ainult üks eelarvamus, vaid terve eelarvamuste, harjumuste, tõekspidamiste ja kujutluste müriaad, mis pärineb igapäevastest kogemustest ja kooliõpetusest. Selleks, et kergendada lugejal niisugust «enesevõitmist», soovitame edasiste mõttekäikude jälgimisel silmas pidada järgmisi asjaolusid:

(1) Tegemist ei ole lihtsalt seniste, koolis õpitud tõdede eitamisega ja uute ainukehtivate tõdede püstitamisega. Jutt on ainult teise võimaluse, t e i s e h ü p o t e e s i uurimisest. Asetame küsimuse nii: O n v õ i m a l i k, et ruum ei ole täpselt[2] selline, nagu õpetas Eukleides; o l e t a m e, et ta ei ole selline, missugune ta v õ i b siis olla?

---

[1] Vt. Matemaatika kaasaeg, XII, lk. 73—90, XII, lk. 71—87, XIV, lk. 78—83.

[2] Rõhutame, et Lobatševski ei heitnud kõrvale mitte kogu Eukleidese õpetust, vaid ainult ühe põhilause ja loogilised järeldused sellest.

(2) Lobatševski geomeetria on loogiline konstruktsioon, nagu seda on iga geomeetria, ka Eukleidese oma. Eksperiment ja kujutlus ei ole siin tõestamisvahendeiks[3]. Kui aluseks võetud Lobatševski hüpotees on tõene, siis on tõene ka iga sellest loogiliselt tehtud järeldus. Huvitav on märkida, et Eukleidese ja Lobatševski geomeetriad osutuvad loogiliselt samaväärseiks, s. t. kui üks neist ei sisalda mingit loogilist vasturääkivust, siis ei saa seda olla ka teises, ja vastupidi, kui ühes süsteemis leidub loogiline viga, siis peab olema loogiliselt defektne ka teine. Puhtloogilisest aspektist ei ole seega võimalik eelistada üht süsteemi teisele — lugeda üht tõeseks ja teist vääraks. Küsimusele, kumb süsteemidest vastab paremini ruumi tegelikule struktuurile, ei saa aga geomeetria vahendite abil vastata. Seda probleemi on põhimõtteliselt võimalik lahendada ainult vaatluse, s. t. füüsikalise eksperimendi abil.

(3) Lobatševski süsteemi lausete kõige iseloomulikumaks jooneks on nende terav vastuolu harjumuspäraste geomeetriliste kujutlustega. Kuid veidi järele mõeldes saab iga lause puhul veenduda, et see vastuolu ei ületa lubatavat piiri: Lobatševski geomeetria ei ole vastuolus kogemustega. Selleks, et lämmatada proteste, mida esitab kujutlus, on kasulik alati meeles pidada paralleelsirgete probleemi puhul sooritatud arutlusi. Selle probleemi kogu raskus seisneb ju vaieldamatus tõsiasjas, et me ei tea, kuidas sirged «käituvad» väga suurtes kaugustes, ehk üldisemalt — milline on ruumi struktuur väga kaugetes piirkondades. Lobatševski geomeetria efektid, kõrvalekalded kooligeomeetriast ilmnevad nimelt sellistes kaugustes, kuhu kogemus ei ulatu ja kus kujutluse põhjal otsustada ei ole lubatav. Nagu edaspidi näeme, saab neid kaugusi hinnata arvestades mõõtmiste tänapäevast täpsuse astet.

(4) Lobatševski ideede tunnustamine ei tähenda mingil määral Eukleidese geomeetria tarbetuks kuulutamist. Eukleidese õpetus ei kao kunagi kooli õppeplaanist, sest selle praktilist osa meid ümbritseva lähema ruumi tunnetamisel ei saa millegagi asendada. Tänapäevase teaduse seisukohalt ei sisalda Eukleidese geomeetria absoluutset tõde ruumi struktuuri kohta. Iga teaduslik teooria on suhtelise kehtivusega; suhteliselt tõene on ka Eukleidese süsteem. Ta on tõene ligikaudselt, kusjuures tema täpsus on küllaldane igapäevase elu, tootmise ja tehnika vajaduste jaoks — inimkonna arengu praegusel etapil. Eukleidese geomeetria on reaalse ruumi esimene loogiliselt täiuslik lähendmudel. Ajalooliselt teiseks, suurema täpsusega mudeliks on Lobatševski geomeetria. Alles viimase tundmine võimaldab selgitada Eukleidese õpetuse olemuse ja piirid.

---

[3] Vt. Matemaatika ja kaasaeg, XII, lk. 80.

Need juhtmõtted, mille võtame kaasa järgnevale ekskursioonile Lobatševski maailma, kõlavad siin mitmeti põhjendamatult. Me pöördume nende juurde aga tagasi pärast tutvumist Lobatševski geomeetriaga.

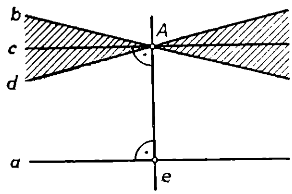
Oletame, et õpik eksib

Jah, oletame, et Eukleidese paralleelsirgete aksioom ei ole tõene iga sirge ja iga sellest väljaspool asetseva punkti korral. Seega loeme tõeseks järgmise lause:

Leidub selline sirge a ja temast väljaspool asetsev punkt A, et nendega määratud tasandil saab läbi punkti A tõmmata vähemalt kaks sirget, mis ei lõika sirget a.

See lause ongi Lobatševski aksioom.

Kahtlemata saab läbi punkti A tõmmata ühe sirget a mittelõikava sirge [4], nimelt sirge c, mis on risti sirge a ristsirgega e (joon. 1). Vastavalt Lobatševski aksioomile läbib punkti A veel vähemalt üks sirget a mittelõikav sirge. Olgu selliseks sirge b. Muidugi, joonisel 1 kujutatud sirge b pikendamine viib silmaga nähtavalt lõikumiseni sirgega a. Selleks, et joonis oleks «usutav», tuleks sirgete b ja c vahelist nurka kujutada õige väiksena. Joonise väikese ulatuse tõttu osutub sellise olukorra kujutamine aga praktiliselt võimatuks — sirged b ja c sulaksid ühte. Sellepärast esitame aksioomi tingimuse tublisti liialdatult.



Joonis 1.

Teeme Lobatševski aksioomist rea vahetuid järeldusi:

(1) Läbi punkti A saab tasandil tõmmata lõpmata palju sirgeid, mis ei lõika sirget a. Kolmandaks mittelõikajaks on sirge d, mis on sümmeetriline sirgega b sirge e suhtes. Sirget a ei lõika ükski sirge, mis läbib punkti A ja asetseb joonisel 1 viirutatud tasandi osas, mida piiravad sirged b ja d. (Viimase asjaolu päris range tõestus vajab veel mõningaid lisaarutlusi, kuivõrd me ei tohi seda välja lugeda jooniselt. Need arutlused eeldavad aga aksioomide süsteemi põhjalikumat tundmist.)

(2) Lobatševski aksioom kehtib iga sirge ja sellel mitteasuva punkti korral. Tõepoolest, kui oletada, et leidub mingi sirge a' ja punkt A', mille puhul nendega määratud tasandil kehtib Eukleidese paralleelsuse aksioom, siis peab sirge a' mistahes kahe punkti B ja C abil tekitatud kolmnurga $A'BC$ sisenurkade summa olema π [5]. Legendre'i II ja III

---

[4] Vt. Matemaatika ja kaasaeg, XII, lk. 82.

teoreemist tuleneb siis omakorda, et paralleelsuse aksioom peab kehtima iga sirge ja punkti paari korral, muuseas ka a ja A puhul. Tekib vasturääkivus Lobatševski aksioomiga, seepärast on tehtud oletus väär.

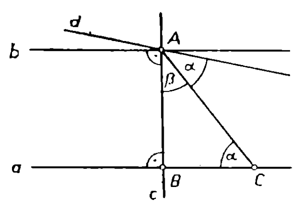
(3) Ei leidu sarnaseid kujundeid. Selles veendumiseks tarvitseb vaid meenutada, et sarnaste kujundite olemasolu on samaväärne paralleelsuse aksioomi kehtivusega (Wallise ekvivalent!). Kuid Lobatševski aksioom eitab paralleelsuse aksioomi, sellepärast ka selle iga ekvivalenti.

Sarnasuse puudumist on oluline silmas pidada moonutuste mõistmiseks, mis esinevad Lobatševski geomeetriat illustreerivail joonistel. Nagu märkisime, avalduvad Lobatševski geomeetria kõrvalekalded harjumusepärasest kooligeomeetriast märgatavalt tasandi ja ruumi väga suurtes piirkondades. Kujutada suuri piirkondi joonistel ilma moonutusteta on aga võimatu, sest sarnasuse puudumise tõttu tingib kujundite vähendamine paratamatult nende omaduste muutumise.

(4) Erinevatel kolmnurkadel on erinev sisenurkade summa. Selle väite saab kergesti tõestada, kui meenutada artikli esimese osa esimeses harjutusülesandes esitatud väärarutlust. Viimases eeldati vaikides, et kõigil kolmnurkadel on ühesugune sisenurkade summa ($\Sigma_\Delta = \text{const}$) ja siit tulenes vahetult, et $\Sigma_\Delta = \pi$.

(5) Paarikaupa kongruentsete nurkadega kolmnurgad on kongruentsed. See lause järeldub kahest eelnevast. Et koolis õpitud kongruentsuse tunnused kehtivad ka siin, sest nad ei sõltu paralleelsuse aksioomist (meenutada nende tõestuskäike!), siis esineb Lobatševski geomeetrias neli kolmnurkade kongruentsuse tunnust.

(6) Iga kolmnurga sisenurkade summa on väiksem kui sirgnurk. See on vahetu järeldus kolmnurga nurkade summa seosest paralleelsuse aksioomiga. Huvitav on ühtlasi märkida, et see lause on Lobatševski aksioomi ekvivalent, s. t. tema tõesusest järeldub omakorda Lobatševski aksioomi kehtivus. Selles veendumiseks vaatleme tasandil sirgeid a ja b, millel on ühine ristsirge c ja mis seetõttu ei saa lõikuda (joon. 2). Et $\Sigma_{ABC} < \pi$, siis $\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$, seepärast sirge d, mis läbib punkti A ja moodustab sirgega AC nurga α, erineb sirgest b. Samal ajal ei saa sirge d kolmnurga välisnurga lause põhjal lõigata sirget a. Järelikult leidub kaks sirget b ja d, mis ei lõika sirget a.



Joonis 2.

---

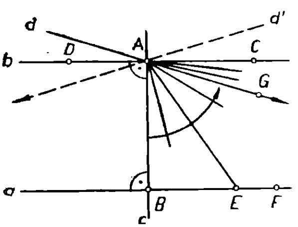
[5] Vt. Matemaatika ja kaasaeg, XII, lk. 79.

(7) Tasandil sirgest ühel pool ja temast võrdsetel kaugustel olevate punktide hulk ei moodusta sirget. Selle väite tõestamiseks meenutame paralleelsuse aksioomi Proklose ekvivalenti: Kahe paralleelsirge vaheline kaugus on tõkestatud suurus. Et Lobatševski aksioom eitab ka Proklose ekvivalenti, siis ei saa sirgete *a* ja *b* (joon. 2) vaheline kaugus olla tõkestatud, ammugi siis konstantne. Seepärast ei saa punktid, mis on sirgest *a* ühel ja samal kaugusel, kuuluda ühele sirgele — järelikult peavad nad asuma mingil kõverjoonel. Viimase iseloomu selgitame edaspidi.

(8) Ei leidu ristkülikuid. Teisiti saab selle lause sõnastada ka nii, et kahel sirgel ei saa olla kaht ühist ristsirget. Et lugu on nõnda, see tuleneb vahetult lausest (6). Ristkülikute puudumisest järeldub aga omakorda, et Saccheri ja Lamberti nelinurkades kehtib teravnurga hüpotees. Vastupidi, teravnurga hüpoteesi tõesusest järeldub (6) abil Lobatševski aksioom. Seega on Saccheri ja Lamberti teravnurga hüpoteesid samaväärsed Lobatševski aksioomiga, mis tähendab seda, et Saccheri ja Lambert arendasid oma töödes — endale sellest aru andmata — uut geomeetriat, mis nüüd kannab Lobatševski nime.

Paralleelsus, millest koolis ei räägita

Ei ole otstarbekas iga kaht ühel tasandil olevat sirget, mis omavahel ei lõiku, nimetada paralleelseteks. Osutub, et üht punkti läbivail sirgeil, mis ei lõika antud sirget, on erinevad omadused. Sellepärast eraldas Lobatševski selliste sirgete lõpmatust hulgast ainult kaks sirget, mida ta nimetas antud sirgega paralleelseiks. Esitame vastava mõttekäigu lihtsustatud kujul.



Joonis 3.

Vaatleme sirgeid *a* ja *b*, millel on ühine ristsirge *c*, ja punktist *A* nurka *BAC* tõmmatud poolsirgeid (joon. 3). Et *b* ei ole ainus sirge, mis ei lõika sirget *a*, siis leidub nende poolsirgete hulgas selliseid, mis samuti ei lõika sirget *a* (täpsemalt: niisuguseid poolsirgeid peab leiduma vähemalt ühes täisnurkadest *BAC* ja *BAD*; oletame arutluse üldsust kahandamata, et neid on nimelt nurgas *BAC*). Muidugi leidub seal ka selliseid poolsirgeid, mis lõikavad sirget *a*. Järjestame kõik nurgas *BAC* asuvad poolsirged, s. t. vaatleme neid ümber punkti *A* näiteks kellaosutile vastupidises suunas pöörleva poolsirge järjestikuste asenditena ja räägime nende puhul vastavalt läbimise järjekorrale eelnevaist ja järgnevaist poolsirgeist.

Kerge on mõista, et kui mingi poolsirge sellest hulgast lõikab sirget a, siis teeb seda ka iga temale eelnev poolsirge; vastupidi, iga mittelõikavale poolsirgele järgnev poolsirge peab samuti olema mittelõikaja. Kõik lõikajad eelnevad igale mittelõikajale, kõik mittelõikajad järgnevad igale lõikajale. Ütleme, et need poolsirged jagunevad kahte klassi. Et pöörlev poolsirge liigub pidevalt, s. t. läbib iga vahepealse asendi, siis peab leiduma selline poolsirge, millest ühele poole jäävad ainult lõikajad ja teisele poole mittelõikajad. Muidugi peab ta ise kuuluma ühte klassidest, s. t. olema kas viimane lõikaja või esimene mittelõikaja. Kuid viimast lõikajat olla ei saa, sest kui oletada, et mingi poolsirge, näteks AE on viimane lõikaja, siis satume vasturääkivusele: ka iga parempoolset punkti F läbiv poolsirge lõikab sirget a, samal ajal aga järgneb ta poolsirgele AE. Järelikult peab leiduma esimene mittelõikav poolsirge. Nimelt selle poolsirgega määratud sirget nimetaski Lobatševski paralleelseks sirgega a.

Paneme tähele üht harjumusele võõrast asjaolu: sooritatud arutluse põhjal on paralleelsus seotud kindla suunaga — sirge paralleelsuse määrab üks tema poolsirgetest. Arvestades seda defineerime paralleelsuse järgmiselt: Sirget d nimetatakse paralleelseks sirgega a oma poolsirge AG suunas, kui on täidetud kaks tingimust:

1) sirged a ja d ei lõiku,

2) iga poolsirge, mis on tõmmatud punktist A nurka BAG (mille määrab lõik $AB \perp a$), lõikab sirget a.

Paralleelsust märgime sirgele lisatud noolega, mis osutab ühtlasi paralleelsuse suunda.[6]

Ilmselt rahuldab ka koolis õpitud, s. t. eukleidiline sirgete paralleelsuse mõiste seda definitsiooni. Kuid mittelõikava sirge ainsuse tõttu (paralleelsuse aksioom!) on tingimus 2) seal tarbetu, samuti pole seal vaja rääkida, millises suunas esineb paralleelsus. Siin, vastupidi, on paralleelsuse mõiste lahutamatult seotud suunaga: vastassuunas sirge d ei ole paralleelne sirgega a. Hiljem näeme, et selline kõiki harjumusi eitav arusaam on põhjendatud, nimelt «käitub» sirge d sirge a suhtes erinevais suundades erineval viisil.

Sooritame nüüd peegelduse a ja b ühise ristsirge c suhtes. Sellejuures jääb peegelduse telg c muutumatuks, sirgete a ja b poolsirged vahetuvad, need sirged ise aga jäävad paigale, kuid sirge d teiseneb sümmeetriliselt sirgeks d' (joon. 3). Samal vii-

---

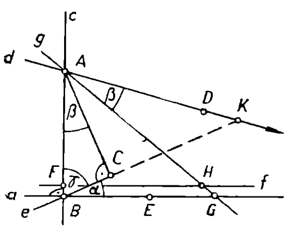
[6] Olgu täpsustavalt lisatud, et küsimusele päris rangel lähenemisel tuleks ütelda, et eelneva arutluse põhjal on sirge d paralleelsus sirgega a seotud veel nurgaga BAG ja eriti selle tipuga A. Sellepärast tuleks definitsioonis lisada, et tingimused 1—2 määravad sirge d paralleelsuse tema punktis A. Kuid sellest kitsendusest on võimalik vabaneda: saab tõestada, et sirge d on paralleelne sirgega a märgitud suunas igas oma punktis.

sil peegelduvad kõik nurka BAC tõmmatud poolsirged poolsirgeiks nurgas BAD ja d' osutub seal esimeseks mittelõikajaks. Järelikult on sirge d' samuti paralleelne sirgega a, nimelt joonisel 3 noolega näidatud suunas. Rohkem paralleelsirgeid, s. t. sirgeid, mis rahuldaksid antud definitsiooni, sirgele a läbi punkti A tõmmata ei saa. Sirge a seisukohalt on d ja d' temaga paralleelsed vastassuundades. Näeme, et antud suunas saab sirgele läbi antud punkti tõmmata ainult ühe paralleelsirge.

Ristlõigu AB ja paralleelsirge d vahelist nurka BAG, mis sisaldab ainult lõikavaid poolsirgeid, nimetatakse p a r a l l e e l s u s e n u r g a k s; ristlõiku AB nimetatakse p a r a l l e e l s u s e l õ i g u k s. Nende mõistetega puutume korduvalt kokku edaspidi. Paneme siinkohal vaid tähele, et paralleelsusenurk on alati terav.

Kerge on märgata, et paralleelsuse definitsioon sisaldab üht ebaolulist kitsendust: võib loobuda nõudest, et sirge AB on sirgega a risti. Tõepoolest, kui teine tingimus on täidetud ristsirge suhtes, siis on ta täidetud ka iga lõikaja suhtes, ja vastupidi — kui ta kehtib iga lõikaja puhul, siis muidugi ka ristsirge korral. Peame seda märkust edaspidi silmas.

Pöörame nüüd tähelepanu veel ühele mitteharjumuspärasele asjaolule. Paralleelsuse definitsioonis on sirgetel a ja d erinevad osad; definitsioon ei ole, nagu öeldakse, sümmeetriline nende sirgete suhtes. Teisiti: defineeritud on tingimused, mille korral d on paralleelne sirgega a, kuid ei ole selge, kas sel juhul ka a on paralleelne sirgega d. Tõepoolest, ehkki tingimus 1) on rahuldatud ka a puhul (see tingimus on sümmeetriline sirgete suhtes), ei ole ometi veel teada, kas on rahuldatud ka tingimus 2), s. t. kas iga poolsirge nurgas ABE lõikab sirget d. Näitame, et see on nii.



Joonis 4.

T e o r e e m 1. *Kui sirge d on paralleelne sirgega a mingis suunas, siis on ka sirge a paralleelne sirgega d samas suunas.*

T õ e s t u s. Vaatleme mingit sirget e, mis on tõmmatud läbi punkti B nurga ABE sisepiirkonda nii, et nurk α, mille ta moodustab sirgega a, on väiksem kui nurk BAD (joon. 4). Olgu $AC \perp e$. Tähistame $B\widehat{A}C = \beta$ ja $A\widehat{B}C = = \gamma$. Siis $\alpha + \gamma = \frac{\pi}{2}$ ja $\beta + \gamma < \frac{\pi}{2}$ (sest $\Sigma_{ACB} < \pi$), seepärast $\beta < \alpha$.

Et $AC < AB$ (kaatet on väiksem hüpotenuusist), siis leidub A ja B vahel punkt F nii, et $AF = AC$. Tõmbame läbi punkti F sirge $f \perp c$; f ei lõika sirget a.

Tõmbame läbi punkti A sirge g nii, et ta moodustab sirgega d nurga β. Sirge g suundub nurga BAD sisepiirkonda, sest $\beta < \alpha < \widehat{BAD}$. Et d on paralleelne sirgega a vaadeldavas suunas, siis lõikab sirge g sirget a mingis punktis G.

Sirge f lõikab kolmnurga ABG üht külge AB, ei läbi aga selle kolmnurga tippe, seepärast peab ta läbima veel teise külje sisepunkti[7]. Et ta ei saa lõigata külge BG, siis peab ta lõikama külge AG mingis punktis H.

Valime sirgel d paralleelsuse suunas punkti K nii, et $AK = AH$ ja ühendame punktid C ja K sirglõigu abil.

Konstruktsiooni põhjal on kolmnurgad ACK ja AFH kongruentsed ($AC = AF$, $AK = AH$, $\widehat{CAK} = \widehat{FAH}$), seetõttu on ka kolmnurk ACK täisnurkne, s. o. $\widehat{ACK} = \frac{\pi}{2}$. Niisiis asub lõik CK sirgel e, mis näitabki, et e lõikab sirget d.

Meenutame sirge e valiku tingimust: $\alpha = \widehat{(a, e)} < \widehat{BAD}$. Seda tingimust rahuldab iga sirge, mis suundub läbi B nurka GBC, s. t. iga selline sirge lõikab sirget d. Muidugi lõikab siis sirget d ka iga sirge, mis suundub nurka ABC.

Nüüd on selge, et sirge a korral on täidetud ka paralleelsuse teine tingimus sirge d suhtes, seega on a tõepoolest paralleelne sirgega d. Nagu näeme, on nende paralleelsusel ühine suund.

Arvestades paralleelsuse äsja tõestatud sümmeetriat kasutame tema märkimiseks harilikku sümbolit $a \parallel d$.

Näitame, et sirgete paralleelsusel on veel teine kooligeomeetriast tuntud omadus: kui kaks sirget on paralleelsed kolmandaga, siis on nad seda ka omavahel — tingimusel, et jutt on ühesugusest suunast. Seda omadust nimetatakse paralleelsuse transitiivsuseks.

Teoreem 2. *Kui $a \parallel b$ ja $b \parallel c$ ühes ja samas suunas, siis ka $a \parallel c$ sellessamas suunas.*

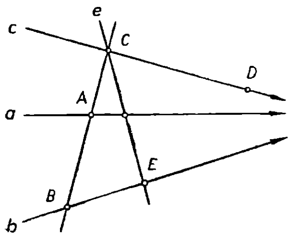
Tõestus. Paneme esmalt tähele, et sirgete a ja c korral on rahuldatud paralleelsuse tingimus 1). Tõepoolest, vastasel juhul saaks läbi nende lõikepunkti tõmmata kaks sirget, mis on ühes ja samas suunas paralleelsed sirgega b; nagu teame, on see võimatu.

Niisiis ei ole kolmel sirgel ühiseid punkte, s. o. üks neist asetseb kahe ülejäänu vahel. Uurime kaht võimalikku oluliselt erinevat juhtu.

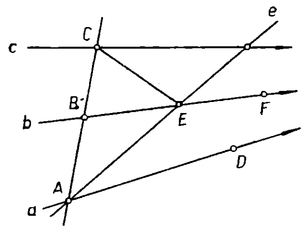
1) Olgu b ja c teine teisel pool sirget a (joon. 5). Valime sirgetel b ja c mingid punktid B ja C. Need punktid on teine teisel pool sirget a, seepärast lõikab sirge BC sirget a mingis punk-

[7] See lause on sõltumatu paralleelsuse aksioomist ja võetakse sageli tõestamata algtõeks, s. o. aksioomiks.

tis A. Olgu D sirge c mingi punkt paralleelsuse suunas. Et $c \parallel b$, siis lõikab iga nurka BCD tõmmatud sirge e sirget b mingis punktis E. Punktid C ja E on teine teisel pool sirget a, seepärast lõikab sirge e ka sirget a. Seega lõikab iga nurka ACD tõmmatud sirge sirget a: ka teine paralleelsuse tingimus on täidetud. Järelikult on c paralleelne sirgega a vaadeldavas suunas ja teoreemi 1 põhjal on ka a paralleelne sirgega c selles suunas: $a \parallel c$.



Joonis 5.



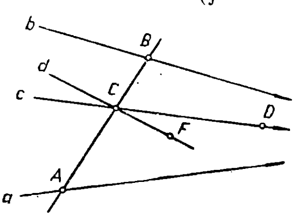
Joonis 6.

2) Olgu b ja c mõlemad ühel pool sirget a, näiteks olgu b sirgete a ja c vahel (joon. 6). Fikseerime sirgetel a ja c mingid punktid A ja C ning sirgel a veel teise punkti D paralleelsuse suunas. Sirge AC lõikab sirget b mingis punktis B. Vaatleme suvalist sirget e, mis on tõmmatud nurka DAC. Et $a \parallel b$, siis lõikab e sirget b mingis punktis E. Olgu F sirge b mingi punkt paralleelsuse suunas. Et $b \parallel c$, siis lõikab nurka FEC suunduv sirge e ka sirget c. Nüüd võime kinnitada, et $a \parallel c$.

Edaspidi osutub kasulikuks veel järgmine teoreem:

T e o r e e m 3. *Kui a ja b on teatud suunas paralleelsed sirged, siis on iga nende vahel asuv sirge nendega paralleelne selles suunas.*

T õ e s t u s (joon. 7). Eelduse kohaselt ei lõika c ei sirget a ega b — paralleelsuse tingimus 1) on täidetud. Lõikame sirgeid a ja b mingi sirgega AB. See sirge lõikab ka sirget c mingis punktis C. On tarvis näidata, et iga sirge, mis on tõmmatud nurka DCA, lõikab sirget a. Oletame vastuväiteliselt, et see pole nii; siis leidub nende sirgete hulgas selline sirge d, et $d \parallel a$. Transitiivsuse tõttu siis ka $d \parallel b$. Paralleelsuse definitsiooni põhjal peab siis iga sirge, mis on tõmmatud nurka FCB, lõikama sirget b. Järelikult peab ka c lõikama sirget b, mis on vastuolus eeldusega. Niisiis on tehtud oletus väär, ja iga sirge, mis on tõmmatud nurka DCA, lõikab sirget a. Seega $c \parallel a$ ja transitiivsuse tõttu ka $c \parallel b$.

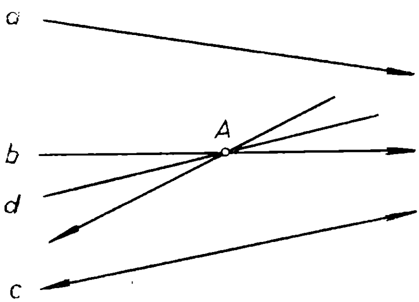


Joonis 7.

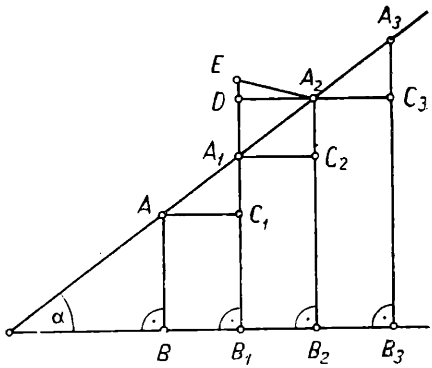
Ehkki tõestatud laused on oma sisult sellevõrra harjumuspärased, et tuleb ennast pingutada nende tõestamise vajaduse mõistmiseks, ei ole paralleelsus Lobatševski mõttes siiski päris kooskõlas koolis omandatud kujutlusega. Toome mõned näited erinevuste kohta.

1) Kaks sirget, mis on paralleelsed kolmandaga, ei ole alati paralleelsed omavahel. Näiteks joonisel 3 on $d \parallel a$ ja $d' \parallel a$, kuid d ja d' lõikuvad punktis A. Lugeja muidugi märkab, et transitiivsus läheb kaotsi, kui paralleelsused ei ole samasuunalised.

2) Sirge, mis lõikab üht paralleelsirgetest, ei lõika alati teist. Näiteks joonisel 3 lõikab sirge b küll sirget d ja ehkki $d \parallel a$, ei lõika b sirget a.



Joonis 8.



Joonis 9.

3) Sirge, mis lõikab kaht paralleelsirget, ei lõika alati kolmandat. Näiteks sirge d joonisel 8 lõikab sirget b. Ta peab lõikama ka sirget a, sest vastasel juhul saaks punktist A tõmmata samas suunas veel teise paralleelsirge sirgele a. Kuid sirge d ei lõika sirget c.

Tasandit tuleb kujutleda kõverana

Eelnevaist mõttekäikudest tuleneb, et kahel erineval sirgel võib tasandil esineda kolm erinevat vastastikust asendit:

1) sirged lõikuvad, s. t. neil on üks ühine punkt (Eukleidese aksioom, et kaht punkti läbib parajasti üks sirge, kehtib ka siin; seega kahel erineval sirgel ei saa olla kaht ühist punkti);

2) sirged on teatud suunas paralleelsed;

3) sirged ei lõiku ega ole paralleelsed; sellisteks sirgeteks on näiteks b ja a joonisel 3 (paralleelsirged koolikäsitluse järgi!) ja samuti kõik sirged, mis asuvad koos sirgega b samades sirgetega d ja d' määratud tippnurkades.

Lisanduval kolmandal juhul nimetatakse sirgeid teineteise suhtes hajuvaiks. Nende asendite lähemaks uurimiseks tõestame esmalt ühe abilause.

Lemma 1. *Kui punkt eemaldub teravnurga tipust mööda haara, siis kasvab tema kaugus teisest haarast Lobatševski geomeetrias kiiremini kui Eukleidese geomeetrias.*

Tõestus. Vaatleme mingit teravnurka α (joon. 9). Moodustame selle ühel haaral kongruentsete lõikude jada $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots$ ja langetame nende lõikude otspunktidest ristlõigud AB, A_1B_1, A_2B_2, ... teisele haarale. Määrame lõikudel A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, ... punktid C_1, C_2, C_3, ... nii, et $C_1B_1 = AB$, $C_2B_2 = A_1B_1$, $C_3B_3 = A_2B_2$, jne. Nüüd võime öelda, et kui haara punkt liigub asendist A asendisse A_1, siis kasvab tema kaugus teisest haarast lõigu $A_1B_1 - AB = A_1C_1$ võrra, lõigu A_1A_2 läbimisel $A_2B_2 - A_1B_1 = A_2C_2$ võrra, jne.

Eukleidese geomeetrias on need juurdekasvud võrdsed: $A_1C_1 = A_2C_2 = A_3C_3 = \ldots = AC_1 \tan \alpha$. Näitame, et Lobatševski geomeetrias $A_1C_1 < A_2C_2$, $A_2C_2 < A_3C_3$, jne. Piisav on tõestada üks selline võrratus, näiteks esimene.

Pikendame lõiku B_1A_1 ja valime pikendil punkti D nii, et $A_1D = A_1C_1$. Ühendame D ja A_2 sirglõiguga. Kolmnurgad A_1C_1A ja A_1DA_2 on kongruentsed (tunnus KNK). Määrame lõigu B_1A_1 pikendil veel punkti E nii, et $EB_1 = A_2B_2$. Eukleidese geomeetrias $A_2C_2 = A_1C_1 = A_1D$ ning punktid D ja E ühtivad. Lobatševski geomeetrias ilmneb aga, et D ja E ei ühti, vaid D on A_1 ja E vahel.

Tõepoolest, $A_1\widehat{D}A_2 = A_1\widehat{C_1}A > \frac{\pi}{2}$, sest ABB_1C_1 on Saccheri nelinurk, seega $A\widehat{C_1}B_1 < \frac{\pi}{2}$, kuid $A\widehat{C_1}B_1$ ja $A\widehat{C_1}A_1$ on kõrvunurgad. Samal ajal $A_1\widehat{E}A_2 < \frac{\pi}{2}$, sest $B_1EA_2B_2$ on Saccheri nelinurk. Niisiis on $A_1\widehat{E}A_2$ terav- ja $A_1\widehat{D}A_2$ nürinurk. See on võimalik ainult siis, kui D on A_1 ja E vahel, s. t. $EA_1 > DA_1$ ehk $A_2C_2 > A_1C_1$.

Seda arutlust saab korrata iga järgmise juurdekasvu korral. Ilmnebki, et punkti eemaldudes nurga tipust mööda haara vastavad võrdseile läbitud lõikudele haaral üha suuremad punkti kauguse juurdekasvud teisest haarast.

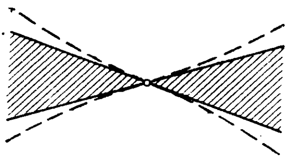
Paneme nüüd tähele, et me ei kasutanud tõestuskäigus kusagil nurga tippu, s. o. asjaolu, et haaradega määratud sirged lõikuvad. Seepärast saab tõestatud lemma sõnastada veidi üldisemal kujul: *kui sirge a suvalisest punktist mingile teisele sirgele b tõmmatud ristlõik moodustab sirgega a mittevõrdsed nurgad, siis kasvab nürinurga haaraks oleva poolsirge punkti kaugus sirgest b punkti eemaldumisel nurga tipust Lobatševski geomeetrias kiiremini kui Eukleidese geomeetrias.*

Kasutame tõestatud lemmat sirgete vastastikuste asendite iseloomustamiseks.

T e o r e e m 4. *Lobatševski geomeetrias eemalduvad lõikuvad sirged lõikepunktist kaugenedes teineteisest kiiremini kui Eukleidese geomeetrias.*

Teoreem on lemma 1 vahetu järeldus.

Väärib märkimist, et meil on oma harjumuste tõttu väga raske kujutleda, kuidas selline eemaldumine on võimalik. Tundub, et see ei «mahu» tasandile, et tasandil on selleks liialt «vähe ruumi». Toimuvat ei õnnestu kujutada ka joonisel. Kui katsuda sirgete «kiiremat eemaldumist» kujutada näiteks nii, nagu seda on tehtud joonisel 10 viirutatud tippnurkade haarade puhul punktiirjoonte abil, siis tekib vastuolu viirutamata tippnurkades, kus punktiirjooned eemalduvad nüüd «aeglasemalt», ehkki see ka siin peaks toimuma pidevaist haaradest «kiiremini».

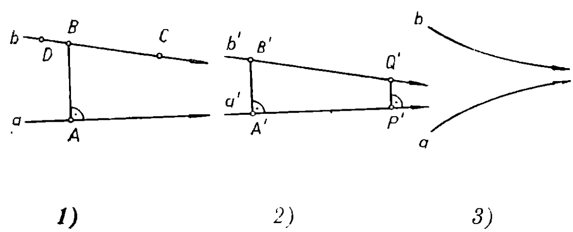


Joonis 10.

Tuleb arvata, et me ei suuda tasandit tervikuna õieti ette kujutada: me püüame kujutlust, mille oleme omandanud lõikepunkti suhteliselt väikese ümbruse uurimisest, kus «punktiirsirgete» käitumine võib erineda märgatamatult vähe pidevate omast, üle kanda tasandi kaugetele piirkondadele, kuhu meie kogemus ei ulatu. Raskus on ületatav ainult ühel teel, nimelt kujutledes, et tasand on teatud viisil kõver pind, kusjuures tema kõverus on sellevõrra väike, et meile nähtavas osas me seda ei märka.

T e o r e e m 5. *Lobatševski geomeetrias lähenevad paralleelsirged paralleelsuse suunas teineteisele tõkestamatult, vastassuunas aga eemalduvad teineteisest — samuti tõkestamatult.*

T õ e s t u s. Vaatleme sirgeid a ja b, mis on teatud suunas paralleelsed (joon. 11, 1). Langetame sirge b mingist punktist



Joonis 11.

B ristlõigu BA sirgele a. $\widehat{ABC}$ on siis paralleelsusenurk, seepärast terav. Tema kõrvunurk on nüri, seega eemaldub sirge b sirgest a paralleelsusele vastassuunas tõkestamatult (lemma 1 teise sõnastuse põhjal). Lemmast tuleneb koguni, et see eemaldumine on kiirem kui lõikuvate sirgete puhul Eukleidese geomeetrias.

On selge, et paralleelsuse suunas peavad sirged a ja b — vähemalt esialgu — lähenema teineteisele. Kas see lähenemine toimub kogu ulatuses ja kas ta on tõkestamatu, see lemmast vahetult ei järeldu.

Teoreemi tõestamiseks pöörame tähelepanu mingile kolmandale sirgele a' (joon. 11, 2). Tõmbame tema mingist punktist P' ristlõigu $P'Q'$, mis on väiksem kui AB. Asetame läbi punkti Q' paralleelsirge b'. Äsja tõestatu põhjal kasvab sirge b' punkti kaugus sirgest a' paralleelsusele vastassuunas tõkestamatult, seepärast leidub sirgel b' selline punkt B', et sellest tõmmatud sirge a' ristlõik $B'A'$ on kongruentne lõiguga BA.

Asetame nüüd sirge a' sirgele a nii, et ühtivad punktid A' ja A ning samuti nooltega näidatud suunad. Siis peavad ühtima ka lõigud $A'B'$ ja AB ning sirged b' ja b (antud suunas tõmmatud paralleelsirge ühesuse tõttu). See aga tähendab, et sirgel b peab leiduma selline punkt Q, et sellest sirgele a langetatud ristlõigu QP puhul $QP = Q'P'$. Et lõiguks $Q'P'$ võib valida kuitahes lühikese lõigu, siis nähtub siit, et sirge b punkti kaugus sirgest a kahaneb tõkestamatult, kui punkt liigub mööda sirget b paralleelsuse suunas.

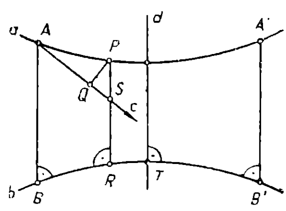
Hoolimata sirgete a ja b piiramatust lähenemisest teineteisele ei saa nad paralleelsuse definitsiooni kohaselt lõikuda. Niisugust ühe joone lähenemist teisele nimetavad matemaatikud a s ü m p t o o t i l i s e k s. Sirgete a ja b käitumist on püütud kujutada joonisel 11, 3). Soovitame lugejal siinkohal meenutada vastavaid arutlusi artikli esimeses osas.[8]

T e o r e e m 6. *Hajuvatel sirgetel on parajasti üks ühine ristsirge, millest kaugenedes sirged eemalduvad teineteisest tõkestamatult.*

T õ e s t u s. Teame juba, et kahel sirgel ei saa olla üle ühe ühise ristsirge. Tuleb näidata, et hajuvail sirgeil selline sirge tõepoolest leidub.

Olgu sirged a ja b hajuvad. Kujutluse paremaks juhtimiseks esitame need sirged joonisel 12 kõverjoontena. Langetame a mingist punktist A ristlõigu AB sirgele b. Kui see lõik on risti ka sirgega a, on ühine ristlõik leitud. Eeldame sellepärast, et juhuslikult tõmmatud lõik AB ei ole risti sirgega a. Siis tekivad punkti A juures mittevõrdsed kõrvunurgad. Nürinurga suunas eemalduvad sirged a ja b teineteisest tõkestamatult; vastassuunas peavad nad siis — vähemalt esialgu — teineteisele lähenema.

Et a ja b hajuvad, siis saab nurka BAP tõmmata sirge c, mis on paralleelne



Joonis 12.

[8] Matemaatika ja kaasaeg, XII, lk. 83—84.

sirgega b. Langetame a mingist punktist P ristlõigud PQ ja PR vastavalt sirgeile c ja b. Sirge PR lõikab sirget c mingis punktis S, mis peab olema punktide P ja R vahel. Kolmnurk PQS on täisnurkne. Seega $PQ < PS < PR$. Lemma 1 põhjal on PQ tõkestamatult kasvav suurus, seepärast peab PR, mis punkti P eemaldudes punktist A küll esmalt kahaneb, hakkama kasvama ja edaspidi suurenema tõkestamatult. Järelikult läbib punkt P liikudes paremale kord sellise asendi A', et sellest langetatud ristlõik $A'B'$ on kongruentne lõiguga AB.

Sel viisil tekib Saccheri nelinurk $ABB'A'$. Nagu teame, on selle ülemised nurgad võrdsed. Tõmbame aluse keskpunktist T ristsirge d. Nelinurk on sümmeetriline sirge d suhtes, sest $TB = TB'$, $A\hat{B}T = A'\hat{B'}T$, $AB = A'B'$ ja $B\hat{A}P = B'\hat{A'}P$. Niisiis moodustab sirge d sirgega a võrdsed kõrvunurgad, s. t. on sellega risti. Oleme leidnud sirgete a ja b ühise ristsirge.

Ühtlasi selgus siit, et kehtib järgmine lause: *Saccheri nelinurga alumise külje keskristsirge on ka vastaskülje keskristsirgeks.*

Lisame mõned harjutusülesanded artikli käesolevas osas käsitletud materjali kohta:

1) Tõestada, et paralleelsusenurk kasvab paralleelsuselõigu liikumisel paralleelsuse suunas.

2) Tõestada, et ühe punkti suhtes sümmeetrilised sirged on hajuvad.

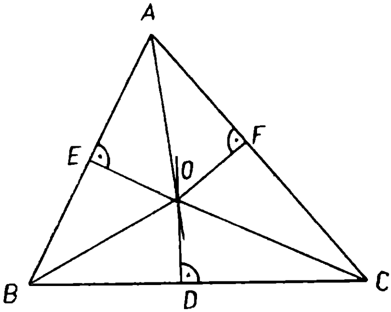
3) Tõestada, et kui kahe sirge lõikamisel kolmandaga tekkinud põiknurgad on võrdsed, siis sirged hajuvad.

4) Milline on kolmnurga kahe külje keskpunkte läbiva sirge asend kolmanda küljega määratud sirge suhtes?

(Järgneb)

KÕIK KOLMNURGAD ON VÕRDHAARSED

T. Roosinupp



Olgu O kolmnurga ABC külje BC keskristsirge OD lõikepunkt tipust A tõmmatud nurgapoolitajaga AO. Tõmbame lõigu OE risti küljega AB ja lõigu OF risti küljega AC. Ühendame punktid B ja C punktiga O. Kolmnurgad AEO ja AFO on kongruentsed, sest nad on täisnurksed kolmnurgad, millel on hüpotenuus ühine ja teravnurgad tipu A juures konstruktsiooni põhjal võrdsed. Samuti on kongruentsed kolmnurgad OBD ja OCD kui täisnurksed kolmnurgad, millel üks kaatet on ühine ja teised kaatetid on konstruktsiooni põhjal võrdsed. Nendest kongruentsustest järeldub, et $OE = OF$ ja $OB = OC$. Siis on aga täisnurksed kolmnurgad OEB ja OFC kongruentsed. Et seega $AE = AF$ ja $BE = CF$, siis $AB = AC$ ja seega kolmnurk ABC on võrdhaarne. Et kolmnurga külgede ja samuti nurkade kohta ei ole mingit tingimust seatud, siis kehtib tõestus iga kolmnurga kohta ning seega

k õ i k k o l m n u r g a d o n v õ r d h a a r s e d.

LOOGILISELT SAMAVÄÄRSED LAUSED

O. Prinits

Üheks olulistes lõiguks matemaatilises loogikas[1] on teema «Loogiliselt samaväärsed laused». Oskus eristada antud lausete hulgast loogiliselt samaväärseid on kaheldamatult hea loogilise mõtlemisvõime tunnuseks. Sageli ollakse arvamisel, et koolimatemaatika arendab küllaldaselt õpilaste loogilise mõtlemise võimet. Nagu aga näitavad W. Walschi ja H. Bocki katsed Saksa Demokraatlikus Vabariigis[2], ei aita koolimatemaatika kaasa loogiliselt samaväärsete lausete äratundmisele. Käesolevas artiklis käsitletakse lühidalt loogiliselt samaväärsete lausete mõistet nii lause- kui ka predikaatarvutuses. Samuti tutvustatakse W. Walschi ja H. Bocki katse metoodikat ning tulemusi.

1. Lausearvutuse põhimõistetest

Uute lausete moodustamine antutest toimub lausearvutuses nn. loogiliste operatsioonide teostamise teel. Põhilisemateks nendest on eitus, konjunktsioon, disjunktsioon ja ekvivalents, samu nimetusi kasutatakse aga ka vastavate operatsioonide tulemuste puhul. Et järgnevas on implikatsioonil ja ekvivalentsil teistest operatsioonidest suurem tähtsus, meenutame, et **implikatsioon** on liitlause, mis moodustatakse antud lausetest sõnade «*Kui* ..., *siis* ...» abil ühendamise teel. Näiteks lausetest

«Päike paistab» ja *«Väljas on valge»*

saame implikatsiooni

«Kui päike paistab, siis väljas on valge».

Kui antud lauseid tähistada vastavalt tähtedega p ja q, siis nende implikatsiooni tähistatakse sümboliga

$$p \rightarrow q.$$

---

[1] Matemaatilise loogika elemente on eesti lugejaskonnale tutvustatud näiteks õpikutes I. Kull. Matemaatiline loogika. Tln., 1964. P. Hanko. Täiendavaid teemasid koolimatemaatikale. Tln., 1967, lk. 133—176 ja artiklis A. Tauts. Matemaatilise loogika põhimõisteid. — Matemaatika ja kaasaeg, II, lk. 3—7.

[2] Vt. H. Bock, W. Walsch. Möglichkeiten zur logischen Schulung im Mathematikunterricht. — Mathematik in der Schule, Nr. 6, 1964, lk. 416—428 ja Nr. 8, 1964, lk. 594—599.

Ekvivalentsiks nimetatakse liitlauset, mis on moodustatud antud lausetest väljendi *«siis ja ainult siis»* vahelelülitamise abil. Implikatsiooni juures näidetena toodud lausetest saame moodustada ekvivalentsi:

«Päike paistab siis ja ainult siis, kui väljas on valge»

ning kasutades lausete märkimiseks ka samu tähti, tähistame ekvivalentsi sümboliga

$$p \leftrightarrow q.$$

Kordamata siin eituse ($\neg$), konjunktsiooni ($\wedge$) ja disjunktsiooni ($\vee$) definitsioone, esitame kõigi viie operatsiooni tulemuste tõeväärtused tabelis 1, kus *t* tähendab *tõene* ja *v* — *väär*.[3]

Tabel 1

p	q	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\neg p$	$\neg q$
t	t	t	t	t	t	v	v
t	v	v	v	v	t	v	t
v	t	t	v	v	t	t	v
v	v	t	t	v	v	t	t

Ka matemaatilised teoreemid kujutavad endast sageli liitlauseid, koosnedes kahest osalausest — eeldusest ja väitest. Me ütleme, et teoreem on tõene, või et eeldusest järeldub väide, kui väiteks olev lause on tõene kõigil neil juhtudel, mil eelduseks olev lause osutub tõeseks.

Olgu näiteks antud kaks lauset $p \leftrightarrow q$ ja $p \rightarrow q$, kus esimest loeme eelduslauseks ja teist väiteks. Meid huvitab küsimus, missugusel juhul võime öelda, et eeldusest järeldub väide. Vaatleme lausete p ja q tõeväärtuste kõikvõimalikke kombinatsioone ja esitame antud lausete vastavad tõeväärtused tabelis 2. Sellest näeme, et lause

Tabel 2

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \rightarrow q$
t	t	t	t
t	v	v	v
v	t	v	t
v	v	t	t

$p \rightarrow q$ on tõene kõigil neil juhtudel, mil lause $p \leftrightarrow q$ on tõene. Seega lausest $p \leftrightarrow q$ järeldub lause $p \rightarrow q$.

[3] Lähemalt vt. näiteks raamatust Кемени Дж. и др. Введение в конечную математику. М., 1963.

Lausest $p \to q$ aga ei järeldu lause $p \leftrightarrow q$, sest lause $p \leftrightarrow q$ pole tõene kõigil neil juhtudel, kui lause $p \to q$ on tõene. Lugejale jääb näidata, et lausest $\neg p \wedge q$ järeldub lause $\neg p \leftrightarrow q$ ja et lausest $\neg p \leftrightarrow q$ järeldub lause $p \vee q$.

Lauset nimetatakse loogiliselt tõeseks, kui ta on tõene kõigi loogiliste võimaluste korral. Tabelis 3 on esitatud lause $(p \leftrightarrow q) \to (p \to q)$ puhul esineda saavad loogilised võimalused. Näeme, et see lause on loogiliselt tõene.

Tabel 3

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \to q$	$(p \leftrightarrow q) \to (p \to q)$
t	t	t	t	t
t	v	v	v	t
v	t	v	t	t
v	v	t	t	t

Olenevalt lausete sisust võib osutuda, et mõni tõeväärtuste kombinatsioon ei kuulu loogiliste võimaluste hulka. Kui näiteks implikatsiooni korral juht (t, v) ei kuulu loogiliste võimaluste hulka, siis selle kitsendusega osutub implikatsioon loogiliselt tõeseks lauseks. Vahe tegemiseks nimetatakse lauset niisugusel juhul mitte loogiliselt, vaid faktiliselt tõeseks.

Lauset nimetatakse loogiliselt vääraks, kui ta on väär kõigi loogiliste võimaluste korral. Loogiliselt väär on näiteks lause $(p \wedge \neg q) \wedge (p \to q)$, mille tõeväärtused kõigi loogiliste võimaluste korral on esitatud tabelis 4.

Tabel 4

p	q	$p \wedge \neg q$	$p \to q$	$(p \wedge \neg q) \wedge (p \to q)$
t	t	v	t	v
t	v	t	v	v
v	t	v	t	v
v	v	v	t	v

Järeldus (väite järeldumine eeldusest), kui kahe lause vaheline suhe on esitatav samade sõnade abil, mille abil moodustati implikatsioon. Näiteks *«Kui $p \leftrightarrow q$, siis $p \to q$»*.

Teoreem. Lausest r järeldub lause s siis ja ainult siis, kui implikatsioon $r \to s$ on faktiliselt tõene.

Tõestus. Eeldades, et lausest r järeldub lause s, tähendab see, et lause s on tõene kõigil neil juhtudel, kui r on tõene. Tabelist 5 näeme, et sel juhul ei saa kuuluda loogiliste võimaluste hulka juht (t, v).

Tabel 5

r	s	$r \rightarrow s$
t	t	t
v	t	t
v	v	t

ning implikatsioon $r \rightarrow s$ osutub faktiliselt tõeseks lauseks.

Eeldades vastupidi, et implikatsioon $r \rightarrow s$ on loogiliselt tõene lause, tähendab see jällegi, et juht (t, v) ei saa kuuluda loogiliste võimaluste hulka ning seega lausest r järeldub lause s, mida oligi tarvis tõestada.

2. Loogiline samaväärsus

Üheks lihtsamaks lausetevaheliseks suhteks järeldussuhte kõrval on loogiline samaväärsus. Kaht lauset nimetatakse **loogiliselt samaväärseks**, kui iga loogilise võimaluse korral on neil lauseil samad tõeväärtused.

Näide 1. Laused $p \wedge (q \vee r)$ ja $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ on loogiliselt samaväärsed.

Tabel 6

	p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
1	t	t	t	t	t	t	t	t
2	t	t	v	t	t	t	v	t
3	t	v	t	t	t	v	t	t
4	t	v	v	v	v	v	v	v
5	v	t	t	t	v	v	v	v
6	v	t	v	t	v	v	v	v
7	v	v	t	t	v	v	v	v
8	v	v	v	v	v	v	v	v

Tõepoolest, tabelist 6 näeme, et laused $p \wedge (q \vee r)$ ja $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ on mõlemad tõesed kolmel esimesel loogiliselt võimalikul juhul ja ülejäänud viiel juhul väärad. Kasutades lausete loogilise samaväärsuse tähisena sümbolit $\equiv$, võime seega kirjutada, et

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r).$$

Sageli hinnatakse lausete loogilist samaväärsust sisu järgi. Andes viimases näites kasutatud formaalsetele lausetele p, q ja r järgmised tähendused:

p — *«kolmnurk on täisnurkne»,*
q — *«kolmnurk on võrdhaarne»,*
r — *«kolmnurk on isekülgne»,*

saame loogiliselt samaväärsed laused:

$p \wedge (q \vee r)$ — *«Kolmnurk on täisnurkne ja ühtlasi võrdhaarne või isekülgne»,*

$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ — *«Kolmnurk on täisnurkne ja võrdhaarne või ta on täisnurkne ja isekülgne».*

Näide 2. Olgu antud laused:
p — *«liidetavad jaguvad 3-ga»,*
q — *«summa jagub 3-ga».*

Sümbol $p \rightarrow q$ tähendab siis liitlauset

«Kui liidetavad jaguvad 3-ga, siis summa jagub 3-ga».

Selle liitlausega on loogiliselt samaväärne liitlause:

«Ei ole võimalik, et liidetavad jaguvad 3-ga ja summa ei jagu 3-ga».

Sümbolites võib selle samaväärsuse kirjutada valemina

$$p \rightarrow q \equiv \neg (p \wedge \neg q),$$

mille kehtivust saab jällegi kontrollida tõeväärtuste tabeli abil.

Kogemused näitavad, et ekslikult loetakse liitlauseid $p \rightarrow q$ ning $q \rightarrow p$ sageli loogiliselt samaväärseiks. Tõeväärtuste tabelist 7 näeme aga, et need laused pole loogiliselt samaväärsed.

Tabel 7

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$
t	*t*	*t*	*t*
t	*v*	*v*	*t*
v	*t*	*t*	*v*
v	*v*	*t*	*t*

Liitlauset $q \rightarrow p$ nimetatakse implikatsiooni $p \rightarrow q$ konversiooniks ehk pöördeks. Moodustame veel laused $\neg q \rightarrow \neg p$ ja $\neg p \rightarrow \neg q$ ning leiame nende tõeväärtused (vt. tabel 8).

Tabel 8

p	q	$\neg q \rightarrow \neg p$	$\neg p \rightarrow \neg q$
t	t	t	t
t	v	v	t
v	t	t	v
v	v	t	t

Tabelist 7 ja 8 näeme, et

$$p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$$

ja

$$q \rightarrow p \equiv \neg p \rightarrow \neg q.$$

Teoreem on alati esitatav implikatsioonina. Sageli aga tõestatakse antud teoreemiga loogiliselt samaväärne teoreem.

N ä i d e 3. Tõestada Pythagorase teoreemi pöördteoreem: kui kolmnurgas kahe külje ruutude summa on võrdne kolmanda külje ruuduga, siis on see kolmnurk täisnurkne.

Tõestame selle lausega loogiliselt samaväärse teoreemi: kui kolmnurk ei ole täisnurkne, siis ei ole tema kahe külje ruutude summa võrdne kolmanda külje ruuduga.

Pythagorase teoreemi põhjal on täisnurkse kolmnurga kaatetite ruutude summa võrdne hüpotenuusi ruuduga, s. t. $a^2 + b^2 = c^2$. Jätame nüüd kaatetite pikkused endisteks ja suurendame täisnurga nürinurgaks. Siis suureneb ka külg c ja järelikult sel juhul $a^2 + b^2 < c^2$. Vähendades täisnurga teravnurgaks saame, et $a^2 + b^2 > c^2$, millega teoreem ongi tõestatud.

N ä i d e 4. Teoreemile «Arv jagub 3-ga, kui tema ristsumma jagub 3-ga» järgneb õpikutes vahel näide: «Kas arv 5743 jagub 3-ga? Vastus: Ei, sest ristsumma 19 ei jagu 3-ga». Esitatud teoreem ei võimalda aga sellist järeldust. Tõepoolest, kui tähistame

p — *«arvu ristsumma jagub 3-ga»,*
q — *«arv jagub 3-ga»,*

siis toodud lause on implikatsioon $p \rightarrow q$, kuid järelduse tegemiseks kasutatakse tegelikult liitlauset $\neg p \rightarrow \neg q$. Laused $p \rightarrow q$ ja $\neg p \rightarrow \neg q$ pole aga loogiliselt samaväärsed: lauses $p \rightarrow q$ on p piisav tingimus q jaoks ja p mittekehtimisest ei järeldu veel q mittekehtimine.

N ä i d e 5. Laused $p \rightarrow q$ ja $\neg q \rightarrow \neg p$, aga samuti $p \rightarrow q$ ja $\neg(p \wedge \neg q)$ ning $\neg(p \wedge q)$ ja $\neg p \vee \neg q$ on loogiliselt samaväärsed. Viimasest samaväärsusest järeldub, et

$$\neg(p \wedge \neg q) \equiv \neg p \vee q.$$

Seega

$$p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg \mathrm{p} \equiv \neg(p \wedge \neg q) \equiv \neg p \vee q.$$

Andes lausetele p ja q mingi sisulise tähenduse, näiteks

p — *«punkt P asub sirgel s»,*

q — *«punkti P kaugused sirge s suhtes sümmeetrilistest punktidest A ja B on võrdsed»,*

saame koostada järgmised loogiliselt samaväärsed laused:

$p \to q$ — *«Kui punkt P asub sirgel s, siis on punkti P kaugused sirge s suhtes sümmeetrilistest punktidest A ja B võrdsed».*

$\neg q \to \neg p$ — *«Kui punkti P kaugused sirge s suhtes sümmeetrilistest punktidest A ja B ei ole võrdsed, siis punkt P ei asu sirgel s».*

$\neg(p \wedge \neg q)$ — *«Ei ole õige, et punkt P asub sirgel s ja punkti P kaugused sirge s suhtes sümmeetrilistest punktidest A ja B ei ole võrdsed».*

$\neg p \vee q$ — *«Punkt P ei asu sirgel s või tema kaugused sirge s suhtes sümmeetriliste punktideni A ja B on võrdsed».*

3. Loogiliselt samaväärsed laused predikaatarvutuses

Tähistame sümboliga $G(6)$ tõsiasja, et 6 on paarisarv, seega sümbol $G(\ )$ tähistab väljendit *«on paarisarv»* ja sümbol $G(x)$ väljendit *«x on paarisarv».* Viimasel juhul peab olema antud piirkond, kuhu x kuulub, näiteks naturaalarvude hulk. Kui asendame x mingi naturaalarvuga, siis saame lause, mis on kas tõene või väär. Nii on $G(5)$ väär, $G(10)$ aga tõene lause.

Väljendit $G(x)$ võime tõlgendada funktsioonina, sest tähe x igale väärtusele etteantud piirkonnast vastab kindel tõeväärtus, kas t või v. Niisugust funktsiooni $G(x)$ nimetataksegi predikaadiks, suurust x aga indiviidiks. Tähistame piirkonda, kuhu x kuulub, tähega U ja nimetame seda indiviidide hulgaks.

Lauset, mis sisaldab predikaati, nimetatakse predikatiivseks lauseks. Erilist huvi pakuvad kaks predikatiivset liitlauset: *«Iga x puhul kehtib G(x)»* ning *«Leidub vähemalt üks x, mille puhul kehtib G(x)».* Need laused võivad sõltuvalt predikaadist $G(x)$ ja etteantud piirkonnast osutuda kas tõesteks või vääradeks. Näiteks lause *«Iga naturaalarv on paarisarv»* on väär, seevastu aga lause *«Leidub vähemalt üks naturaalarv, mis on paarisarv»* on tõene. Sellise kujuga predikatiivsete lausete sagedat esinemist arvestades on nende lühemaks kirjutamiseks võetud kasutusele erisümbolid ja erinimetused:

$\forall$ on nn. universaalsuse ehk üldisuse kvantor ja asendab sõnu *«iga ... puhul kehtib»;*

$\exists$ on nn. eksistentsi ehk olemasolu kvantor, mis asendab sõnu *«leidub vähemalt üks ..., mille puhul kehtib».*

Üldisuse kvantoriga algav lause $\forall x\, G(x)$ väidab, et predikaat on tõene indiviidi x iga väärtuse korral, mis kuulub hulka U, s. t. et predikaat $G(x)$ on tõene iga loogilise võimaluse korral. Olemasolu kvantoriga algav lause $\exists x\, G(x)$ aga väidab, et hulgas U leidub vähemalt üks niisugune indiviid, mille korral predikaat $G(x)$ on tõene.

Tähistagu sümbol $G(x)$ näiteks väljendit «$f(x) = g(x)$», siis $\exists x\, G(x)$ tähendab lauset

«Hulgas U leidub vähemalt üks niisugune indiviid x, mille korral $f(x) = g(x)$».

ja $\neg\exists x\, G(x)$ tähendab lauset

«Ei ole õige, et hulgas U leidub vähemalt üks niisugune indiviid x, mille korral $f(x) = g(x)$».

Teisiti võime viimase lause sõnastada aga järgmiselt: *«Iga hulka U kuuluva indiviidi x korral $f(x) \neq g(x)$»*, mis on esitatav sümboliga $\forall x \neg G(x)$.

Seega laused $\neg\exists x\, G(x)$ ja $\forall x \neg G(x)$ on loogiliselt samaväärsed, s. t.

$$\neg\exists x\, G(x) \equiv \forall x \neg G(x).$$

Olgu sümbolil $G(x)$ endine tähendus, siis $\forall x\, G(x)$ tähendab lauset:

«Iga hulka U kuuluva indiviidi x korral on $f(x) = g(x)$» ja *«Iga hulka U kuuluva indiviidi x korral on $f(x) = g(x)$»*

ja $\neg\forall x\, G(x)$ tähendab lauset:

«Ei ole õige, et iga hulka U kuuluva indiviidi x korral on $f(x) = g(x)$».

Viimase lause võime aga sõnastada ka nii: *«Hulgas U leidub vähemalt üks niisugune indiviid x, et $f(x) \neq g(x)$». Selle* lause sümboolseks esituseks on $\exists x \neg G(x)$. Seega

$$\neg\forall x\, G(x) \equiv \exists x \neg G(x).$$

Lugeja ülesandeks jääb järgmiste loogiliste samaväärsuste kehtivuse selgitamine:

$$\exists x\, G(x) \equiv \neg\forall x \neg G(x),$$
$$\forall x\, G(x) \equiv \neg\exists x \neg G(x).$$

Näidetena nende juhtude kohta olgu siinkohal esitatud järgmised lausepaarid:

«Leidub vähemalt üks reaalarv x, mis rahuldab võrrandit

$$x^3 - 10x^2 - x - 10 = 0\text{»}$$

ja

«Ei ole õige, et iga reaalarvulise x korral

$$x^3 - 10x^2 - x - 10 \neq 0\text{»}$$

ning

«Iga reaalarvu x korral, kui $x > 1$, siis $x^2 > 1$»

ja

«Ei ole õige, et leidub vähemalt üks reaalarv x, mille korral, kui $x > 1$, siis $x^2 \leqslant 1$».

Igapäevases kõnepruugis kuuleme sageli lauseid, mis pole loogiliselt samaväärsed, kuid mida siiski loetakse samaväärseiks. Näiteks lausega *«Ei ole õige, et kõigil ruutvõrrandeil on reaalsed lahendid»* loetakse mõnikord samaväärseks lause *«Kõigil ruutvõrrandeil ei ole reaalseid lahendeid»*. Samuti lause *«Ei ole*

Tabel 9

Lause	Loogiline struktuur
1. a) Ei ole õige, et iga ruutarv on paarisarv.	$\neg \forall a\, H(a)$
b) Leidub ruutarve, mis ei ole paarisarvud.	$\exists a \neg H(a)$
2. a) Ei ole õige, et iga ruutarv on paarisarv.	$\neg \forall a\, H(a)$
b) Leidub ruutarve, mis on paarisarvud.	$\exists a\, H(a)$
3. a) Ei leidu kolmnurka, mis on võrdkülgne ja täisnurkne.	$\neg \exists x [H_1(x) \wedge H_2(x)]$
b) Iga kolmnurga puhul, kui ta on võrdkülgne, siis ta ei ole täisnurkne.	$\forall x [H_1(x) \rightarrow \neg H_2(x)]$
4. a) Ei leidu kolmnurka, mis on võrdkülgne ja täisnurkne.	$\neg \exists x [H_1(x) \wedge H_2(x)]$
b) Leidub kolmnurki, mis ei ole võrdkülgsed ega täisnurksed.	$\exists x [\neg H_1(x) \wedge \neg H_2(x)]$
5. a) Kui naturaalarvu ristsumma jagub 3-ga, siis jagub ka arv ise 3-ga.	$p \rightarrow q$
b) Kui naturaalarv jagub 3-ga, siis jagub ka tema ristsumma 3-ga.	$q \rightarrow p$
6. a) Kui naturaalarvu ristsumma jagub 3-ga, siis jagub ka arv ise 3-ga.	$p \rightarrow q$
b) Kui üks naturaalarv ei jagu 3-ga, siis ka tema ristsumma ei jagu 3-ga.	$\neg q \rightarrow \neg p$
7. a) Kui naturaalarvu ristsumma jagub 3-ga, siis jagub ka arv ise 3-ga.	$p \rightarrow q$
b) Kui naturaalarvu ristsumma ei jagu 3-ga, siis ei jagu ka arv ise 3-ga.	$\neg p \rightarrow \neg q$
8. a) Kui punkt P asub sirgel g, siis on tema kaugused sirge g suhtes sümmeetriliste punktideni A ja B võrdsed.	$r \rightarrow s$
b) Ei ole võimalik, et punkt P sirgel g asetseb ja tema kaugused sirge g suhtes sümmeetriliste punktideni A ja B ei ole võrdsed.	$\neg (r \wedge \neg s)$

õige, et kõik abituriendid sooritasid eksami» loetakse samaväärseks lausega *«Kõik abituriendid ei sooritanud eksamit».*

Nende lausete loogilist samaväärsust püütakse esile tuua rõhkude paigutamisega vastavatele sõnadele. Kirjas aga rõhkusid ei näidata ja seetõttu ei saa toodud lauseid lugeda loogiliselt samaväärseiks, sest

$$\neg \forall x H(x) \not\equiv \forall x \neg H(x).$$

4. Ühest katsest

Et kindlaks teha, kuidas tulevad 8—10 kl. õpilased toime loogiliselt samaväärsete matemaatiliste lausete äratundmisega, teostati Saksa Demokraatliku Vabariigi mõnedes koolides katse, kus õpilastele anti võrdlemiseks tabelis 9 (vt. eelmine lk.) toodud lausete paarid. Nende kaheksa paari hulgast tuli leida loogiliselt samaväärsete lausete paarid.

Seega oli valik tehtud nii, et neli lausete paari osutusid loogiliselt samaväärseteks. Lugeja proovigu need paarid leida (enne tabeli 10 vaatamist). Iga lausepaari kohta tuli vastata kas «ja», «ei» või «ei tea». 123 õpilase vastuste põhjal on koostatud [4] tabel 10, kus on toodud ka õigete ja valede vastuste suhe $(\tilde{O} : V)$, õigete vastuste protsent $(\tilde{O}\ \%)$ ning tulemuse hindamiseks [5] on

Tabel 10

Nr.	«ja»	«ei tea»	«ei»	$\tilde{O} : V$	$\tilde{O}\ \%$	χ^2	Hinnang
1	102	5	16	102 : 16	83	62,5	+
2	53	5	65	65 : 55	53	1,22	+
3	100	6	17	100 : 17	81	59,5	+
4	41	11	71	71 : 41	58	8,0	+
5	89	20	14	14 : 89	11	55,0	0
6	54	25	44	54 : 44	44	1,02	0
7	44	21	58	58 : 44	47	1,92	0
8	82	22	19	82 : 19	67	39,5	—

arvutatud χ^2. Viimase arvutamisel on lähtutud hüpoteesist, et huupi vastamisel on suhe $\tilde{O} : V = 1$. Hinnangu lahtris ongi märgitud, kas tulemus on sellest hüpoteesist märkimisväärselt kõrvale kaldunud ja kas + või — suunas.

[4] Tabelid 10 ja järgnevad on võetud raamatust H. Bock, W. Walsch, Logik und Mathematikunterricht. — Wissenschaftliche Beiträge. Martin-Luther-Universität, Halle—Wittenberg, 1966/6.

[5] Vajalike matemaatilise statistika alaste mõistetega tutvustame lugejat lähemalt ühes järgmistest «Matemaatika ja kaasaja» numbritest.

Teostatud katse tulemusi võrreldi tunnistuse hinnetega. Selgus, et hinnete ja õigete vastuste arvu vahel pole sõltuvust (korrelatsioonikordaja $r = -0{,}06$). Siit võib teha järelduse, et hindamise aluseks on ikkagi formaalsed teadmised ja oskused, mitte aga loogiline mõtlemisvõime.

Et kindlaks teha, kas õpilaste vead loogiliselt samaväärsete lausete määramisel on põhjustatud lausete loogilisest struktuurist või lause sisust, selleks korraldati täiendav katse uute õpilastega. Tabelis 11 on toodud teises katses esitatud lausepaarid, mille hulgast tuli jälle leida loogiliselt samaväärsed.

Tabel 11

Lause	Loogiline struktuur
1. a) Ei ole õige, et iga ruutarv on paarisarv.	$\neg \forall a\, H(a)$
b) Leidub ruutarve, mis ei ole paarisarvud.	$\exists a \neg H(a)$
2. a) Kui naturaalarvu ristsumma jagub 3-ga, siis jagub ka arv ise 3-ga.	$p \rightarrow q$
b) Kui naturaalarv jagub 3-ga, siis jagub ka tema ristsumma 3-ga.	$q \rightarrow p$
3. a) Kui naturaalarvu ristsumma jagub 3-ga, siis jagub ka arv ise 3-ga.	$p \rightarrow q$
b) Kui naturaalarvu ristsumma ei jagu 3-ga, siis ei jagu ka arv ise 3-ga.	$\neg p \rightarrow \neg q$
4. a) Ei leidu kolmnurka, mis on võrdkülgne ja täisnurkne.	$\neg \exists x [H_1(x) \wedge H_2(x)]$
b) Iga kolmnurga puhul, kui ta on võrdkülgne, siis ta ei ole täisnurkne.	$\forall x [H_1(x) \rightarrow \neg H_2(x)]$
5. a) Kui kolmnurgas on kaks võrdset külge, siis on tal ka kaks võrdset nurka.	
b) Kui kolmnurgas on kaks võrdset nurka, siis on tal kaks võrdset külge.	
6. a) Kui kolmnurgas on kaks võrdset külge, siis on tal ka kaks võrdset unrka.	
b) Kui kolmnurgas ei ole kaht võrdset külge, siis ei ole tal ka kaht võrdset nurka.	
7. a) Ei leidu naturaalarvu, mis on paaritu ja jagub 6-ga.	
b) Iga naturaalarvu korral, kui ta on paaritu, siis ei jagu ta 6-ga.	
8. a) Ei ole mitte nii, et kõik nelinurgad on sümmeetrilised.	
b) Leidub nelinurki, mis ei ole sümmeetrilised.	

Lugeja võib tähele panna, et tabelis 11 on iga loogilise struktuuri kohta toodud kaks lausepaari: lausete 5.—8. hulgast leiame igale neljast esimesest paarist vastava sama loogilise struktuuriga lausepaari.

Teise katse tegid kaasa 224 õpilast (ainult 3. ülesande vastused pärinevad 168 õpilaselt). Tulemused on toodud tabelis 12, kus esitatakse samad näitajad mis tabelis 10.

Tabel 12

Nr.	«ja»	«ei tea»	«ei»	$\bar{O} : V$	$\bar{O}$ %	χ^2	H
1	207	2	166	207 : 15	92,5	15	+
2	183	4	96,8	37 : 183	16,5	37	—
3	46	14	36	108 : 46	64,5	108	+
4	182	5	96,4	182 : 37	81	37	+
5	210	0	171	14 : 210	6,5	14	+
6	70	15	22,8	139 : 70	62	139	+
7	192	6	126	192 : 26	85,5	26	+
8	199	2	135	199 : 23	89	23	—

Esimese katse tulemuste kontrollimiseks sisaldas teine katse samu lausepaare, mis esinesid ka esimeses katses. Nende lausepaaride kohta antud vastuste võrdlemiseks esitame tabeli 13, kus on välja toodud samadele lausepaaridele antud õigete vastuste suhtelised sagedused. Selleks et kindlaks teha, kas nende sageduste kui keskmiste erinevus on märkimisväärne, on arvutatud vastavad t väärtused. 2. juhul on suhtelised sagedused võrdsed, 3. juhul ei ole erinevus märkimisväärne, 1. ja 4. juhul on suhteliste sageduste erinevus märkimisväärne. Siit järeldub, et 1. ja 4. juhul määrati nende lausepaaride loogilist samaväärsust teises katses paremini. Sellele vaatamata on mõlema katse tulemuste vahel hea kooskõla. 1. ja 2. juhul domineerib suurelt õigete vastuste arv, 3. juhul valede vastuste arv ning neljandal juhul on mõlemas katses õigete ja valede vastuste suhe suurem kui 1.

Tabel 13

$N_1 = 123$ $N_2 = 224$ $(N_2{}^* = 168)$

Jrk. nr.	Ülesande nr.	$\bar{O}$	$\frac{N_1}{\bar{O}}$	$\bar{O}$	$\frac{N_2}{\bar{O}}$	t
1)	I, 1; II, 1	102	0,83	207	0,925	2,68
2)	I, 3; II, 4	100	0,81	182	0,81	0
3)	I, 5; II, 2	14	0,11	37	0,165	1,39
4)	I, 7; II, 3*	58	0,47	108	0,645	2,96

Et selgitada, kas loogilise samaväärsuse määramisel on aluseks loogiline struktuur või lause sisu, selleks on tabelis 14 võrreldud sisult erinevate, loogiliselt struktuurilt aga samaväärsete lausete kohta antud vastuseid. Tabelis 14 on näidatud samasuguse loogilise struktuuriga lausete paarid, kui palju anti mõlema lause kohta ühtivaid õigeid, ühtivaid vääraid ja mitteühtivaid vastuseid. Seejärel on toodud ühtivate ja mitteühtivate vastuste suhe ning ühtivate vastuste protsent kõigi vastuste hulgas. Eeldades hüpoteetiliselt, et ühtivate ja mitteühtivate vastuste suhe on 1, on χ^2 abil määratud tegeliku suhte erinevuse märkimisväärsus selle hüpoteetilise suhtega võrreldes. Nagu tabelist näha, on see erinevus kõigil juhtudel märkimisväärne.

Tabel 14

$N = 224$ $(N^* = 168)$

Paar	Ühtivad õiged	Ühtivad valed	Mitte-ühtivad	$Ü : MÜ$	$Ü$ %	χ^2	H
1; 8	189	7	28	196 : 28	87	126	+
2; 5	4	176	44	180 : 44	80	82,5	+
3; 6*	76	38	54	114 : 54	68	21,5	+
4; 7	163	10	51	137 : 51	77	66,5	+

Siit järeldub, et esitatud lausepaaride ekvivalentsuse üle otsustamisel tugineb enamik õpilasi lausete loogilisele struktuurile ja vähem sisule.

Ka teise katse tulemuste puhul osutus korrelatsioon hinnete ja õigete tulemuste vahel väga väikeseks ($r = -0{,}11$). Huvitav on märkida, et korrelatsioon hinnete ja loogiliste struktuuride järgi antud õigete vastuste vahel on samuti suhteliselt väike ($r = -0{,}28$). Korrelatsiooni negatiivsus on tingitud sellest, et Saksa Demokraatlikus Vabariigis on hinnete skaala vastupidine meie omale.

Märkus. Artikli autor, samuti «Matemaatika ja kaasaja» toimetus on huvitatud analoogiliste katsete tulemustest meie koolides. Palume lugupeetud õpetajaid, kes sellise katse oma õpilastega teevad, selle tulemustest asjast huvitatuid informeerida.

ALGKLASSIDE MATEMAATIKA ÕPETAMISEST L. V. ZANKOVI UUE ALGÕPETUSE SÜSTEEMI PÕHJAL

P. Kees

Kogu maailmas katsetatakse innukalt algklasside matemaatika õpetamise uusi meetodeid ning võtteid ja uuritakse programmi sisu muutmise võimalusi. Juhtiv koht on sel alal Nõukogude Liidul, kus algõpetus oli senigi suhteliselt kõrgel tasemel. Juba mitmeid aastaid tegelevad algklasside matemaatika õpetamise probleemiga mitmed tuntud pedagoogikateadlased nagu L. V. Zankov, D. E. Elkonin, V. V. Davõdov jt.

Käesolevas lühiülevaates refereerime kokkuvõtlikult akadeemik L. V. Zankovi seisukohti nimetatud küsimuses. Me ei kõnele siin niivõrd Zankovi üldistest didaktika printsiipidest ja tema katsete teoreetilistest kaalutlustest [1], kuivõrd just matemaatika õpetamise konkreetsest sisust ja selle praktilisest lahtimõtestamisest.

Esitame kõigepealt Zankovi süsteemis ettenähtud algklasside programmid klasside kaupa [2] (selle süsteemi järgi on algõpetus kolme aasta peale jaotatud).

I klass

Arvude nimetused (1—9) ja nende kirjutamine.
Võrdus. Võrdusmärk. Mõisted «rohkem», «vähem». Märgid «$>$» ja «$<$».
Mõisted «rohkem», «vähem». Märgid «$>$» ja «$<$».
Transitiivsussuhted (näiteks: kui $a>b$ ja $b>c$, siis $a>c$).
Võrratus. Märk «$\neq$».
Naturaalarvude loendamine edaspidi ja tagurpidi.
Vastastikused suhted üksteisele järgnevate arvude vahel.
Sentimeeter.
Sirgjoon. Kiir. Sirglõik.
Liitmise mõiste ja vajalikud oskussõnad. Liitmine 9 piires.
Arvu koostis esimese kümne piires (10 välja arvatud). Liitmise tabel.
Sirglõikude liitmine.
Liitmise vahetuvusseadus, selle ülesmärkimine üldkujul ($a+b=c$, $b+a=c$, $a+b=b+a$).
Kilogramm.
Lahutamise mõiste ja vajalikud oskussõnad. Lahutamise seos liitmisega, selle esitamine üldkujul ($a+b=c$; $a=c-b$).

---

[1] Vt. ka artiklit P. Kees. Algklasside matemaatika vajab ümberkorraldamist. — Matemaatika ja kaasaeg XII, lk. 97—101.

[2] Lähemalt võib nendega tutvuda järgmiste algallikate kaudu: Программы средней школы (проект), начальные классы. М., 1965; Новая система начального обучения, I класс (под. ред. Л. В. Занкова). М., 1965.

Sirglõikude lahutamine.
Tekstülesanne. Andmed ja otsitav. Ülesande tingimus ja küsimusülesande lahendamise mõiste. Nimetus.
Kahekohalised arvud. Arv 10, selle saamine ja koostis. Üheliste ja kümneliste järk.
Tundmatu, selle tähistamine tähega $x (4 + x = 9)$.
Nulli liitmine. Selle ülesmärkimine üldkujul ($a + 0 = a$; $0 + a = a$).
Detsimeeter ja meeter.
Korrutamise mõiste ja vajalikud oskussõnad. Korrutamise vahetuvusseadus ja selle ülesmärkimine üldkujul ($a \cdot b = c$; $b \cdot a = c$; $a \cdot b = b \cdot a$).
Täis-, terav-, nürinurk. Ristkülik. Jagamise mõiste ja vajalikud oskussõnad.
Arv 20. Selle moodustamine ühe ühelise lisamisega 19-le. Kahekohalised arvud 20-st kuni 99-ni (viimane kaasa arvatud). Kahekohaliste arvude liitmine ja lahutamine. Ühe- ja kahekohalise arvu lahutamine kahekohalisest arvust.
Liiter.
Korrutamistabel.
Suuline arvutamine kogu õppeaasta kestel.

II klass

Võrdlemine vahe abil. Vastavate tekstülesannete lahendamine.
Sirglõikude võrdlemine nende vahe abil.
Korrutamine ja jagamine (100 piires tabeli abita). Kirjalik korrutamine ja jagamine. Osa leidmine arvust ja arvu leidmine tema osa järgi.
Ajamõõdud: ööpäev, tund, minut, sekund; aasta, kuu. Aja määramine kella järgi. Ringjoon. Raadius. Kaar.
Võrdlemine korrutise abil. Vahe ja korrutise abil võrdlemise kõrvutamine.
Kolmekohalised arvud. Nende kirjalik liitmine ja lahutamine.
Vene arvelaud. Numeratsioon arvelaual.
Kahe- ja kolmekohalise arvu korrutamine ja jagamine ühekohalisega.
Jäägiga jagamine.
Nurgad. Nurga tipp ja haarad. Nurga tähistamine tähtedega.
Nurgakraad. Terav- ja nürinurkade suuruse võrdlemine täisnurga suurusega.
Monotoonsuse omadus. Selle ülesmärkimine tähtedega (kui $a = b$, $c < d$, siis $a + c < b + d$).
Vahe omadused. Summa lahutamine. Täisarv ja murd (algtehted).
Pikkusmõõdud (tabel). Aritmeetiline keskmine. Diagrammi mõiste.
Neli tehet tuhande piires (ülevaade ja üldistus).
Suuline arvutamine kogu õppeaasta kestel.

III klass

Arvud miljoni piires. Järgud ja klassid.
Liitmine ja lahutamine miljoni piires. Liitmise ühenduvusseadus.
Ümardamise teel saadud ligikaudsed arvud.
Meetermõõdustik (üldistamine).
Nimega arvude teisendamise mõiste.
Mitmenimeliste arvude liitmine ja lahutamine.
Korrutamise ühenduvusseadus.
Mitmenimeliste arvude korrutamine ja jagamine.
Ruut. Ruutmõõdud. Ruutu tõstmine.
Tehete järjekord ja sulud.
Arvud miljardini.
Ristküliku diagonaal.
Kolmnurk: selle elemendid ja pindala.
Suuline arvutamine kogu õppeaasta kestel.

Igas klassis on ette nähtud väga palju praktilisi töid. Tuleb teostada kõik praktilised harjutused, mis on vähegi mõeldavad: niidi, raamatu jne. pikkuse mõõtmine; võrdsete ja mittevõrdsete sirglõikude joonestamine; sirglõikude liitmine ja lahutamine; kaalumine; detsimeetri, meetri valmistamine papist ja selle abil mõõtmine; osa leidmine antud sirglõigust ja sirglõigu leidmine tema osa järgi jne. Praktiliste tööde nõudmine on hästi arusaadav, sest ainult loov aktiivsus suudab õpilasi maksimaalselt rakendada ja samaaegselt tagada neile kindlaid teadmisi.

Igasuguse õppesüsteemi efektiivsus on määratud põhiliselt kolme teguriga: didaktiliste printsiipidega, programmiga ja õpetamise metoodikaga. Ükskõik kui ideaalsed poleks ka kaks esimest, ei anna nad halva rakendamise korral soovitud efekti. Võiks ütelda, et programm on seadusandlikuks võimuks, metoodika aga täidesaatvaks. Seepärast vaatlemegi mõningaid kõige iseloomulikumaid metoodilisi põhimõtteid ja võtteid matemaatika õpetamisel uue süsteemi järgi.

Punase niidina läbib metoodikat teadlikkuse, vastastikuste sõltuvuste ning seoste taipamise ja võrdlemise põhimõte. Juba sügisel I klassis, kui tutvutakse esimese kümnega, tuleb laste teadvusse viia see fakt, et igale arvule järgneb temast ühe võrra suurem arv, samal ajal aga igale arvule eelneb temast ühe võrra väiksem arv. Võrratuse mõistega tutvutakse enne kui võrduse mõistega, sest viimane tuleneb eelmisest. Antakse ka vastavad märgid. Võrduse ja võrratuse mõistet süvendatakse praktilises töös sirglõikudega. Liitmine ja lahutamine käsitletakse koos: nad seotakse teineteisega. Niisugune lähenemisviis võimaldab juba I veerandil sisse tuua tundmatu x ja lahendada selle abil kõige lihtsamaid võrrandeid nagu $8-x=3$; $2+x=5$ jne.

Ka arvutusoperatsioonide harjutamisel peab mõte töötama. Näiteks laseb õpetaja klassil sooritada tehted: $4+2$, $6+2$, $2+2$, $5+2$, $7+2$ ja küsib pärast arvutamist: Kuidas muutub summa neis näiteis, alates esimesest? Millest sõltub summa suurenemine või vähenemine? Seejärel laseb õpetaja need vastused kinnistamiseks nii ümber kirjutada, et esimeses reas oleks kõrge väiksem summa ja et see kord-korralt suureneks. Analoogilisi ülesandeid lahendatakse korrutamise ja jagamise käsitlemisel.

Zankovi süsteemi järgi vaadeldakse esimese kümne käsitlemisel esialgu vaid arvusid 1-st kuni 9-ni; kümme tuleb alles siis, kui arvude rida 1, . . . , 9 on igati läbi töötatud. Põhjus peitub selles, et 10 on eelmistest mitmeti erinev arv: lapsed leiavad, et kümmet kirjutatakse juba kahe numbriga. Edasi selgitab õpetaja näiteks, et 10 pulka moodustavad ühe kimbu, ühe terviku, ühe kümneliste järgu, kuid et samaaegselt koosneb see tervik 10-st ühelisest.

Tekstülesannete lahendamise alustamisega ei soovita Zankov kiirustada. Seda võib teha alles I veerandi lõpul. Mõttelaiskuse ärahoidmiseks ei tule sealjuures lahendada järjest palju analoogilisi ülesandeid. Lihtsaid või otseseid ülesandeid on soovitav anda ainult kas nn. pöördkujul või kaudses vormis, sest esimene liik ei arenda peaaegu üldse õpilasi. Selle asemel, et anda näiteks ülesanne: «Ühel riiulil oli 5 raamatut, teisel riiulil 4 raamatut; mitu raamatut oli kahel riiulil kokku?» — antagu seesama sisu näiteks kujul: «Kui riiulilt võeti ära 5 raamatut, jäi sinna alles 4 raamatut; mitu raamatut oli riiulil?» Selliste pöördülesannete arendav osa on nii ilmne, et see autori arvates ei vaja tõestamist. Otseseid ülesandeid soovitab ta kasutada ainult kõrvutamiseks pöördülesannetega.

Väga kasulik on võrdlevalt lahendada ka niisuguseid ülesandeid, mis erinevad ainult konkreetse probleemiseade poolest. Kui jätta isikud, tegevused ja objektid samaks, siis tuleb selgemini esile see asjaolu, kuidas ülesande lahendamise käik sõltub ülesandes sisalduvast situatsioonist. Näiteks ülesanne nr. 1: «Poiss lõikas mõned kepid. Kui ta 3 keppi õele andis, jäi talle endale 15 keppi. Mitu keppi lõikas poiss?»; ülesanne nr. 2: «Poiss lõikas 7 keppi, kuid kokku oli tal vaja lõigata 12 keppi. Mitu keppi jäi tal veel lõigata?»; ülesanne nr. 3: «Üks poiss lõikas 6 keppi, teine poiss lõikas 9 keppi, kuid 2 keppi läks tal nendest katki. Mitu tervet keppi jäi kahele poisile?»

Märgime, et katseklasside jaoks on koostatud ka spetsiaalsed õpikud, kuid matemaatika õpikutest on senini ilmunud ainult 1. ja 2. klassi õpikud [3].

Kui Zankovi süsteemile läheneda kriitiliselt, siis selgub, et enamus on sealt vastuvõetav ja teenib isiksuse maksimaalse arendamise ülesannet. Ainult tühine osa soovitustest ei näi olevat vastuvõetav. Üheks niisuguseks on Zankovi eitav suhtumine ülesannete koostamisse õpilaste poolt. Zankov nimelt väidab, et õpilased koostavad ebareaalseid ülesandeid ja toob näitena [4] sellise: «Miša kohtas metsas 9 karu. Ta tappis viis karu. Mitu karu jäi alles?» Kuid küsigem, kus on siis õpetaja, kes ei juhi tähelepanu selliste ülesannete ebareaalsusele! Pole kahtlust, et õpetaja õige suunamise korral on ülesannete koostamine õpilaste poolt loova iseloomuga mõttetöö.

Lõpetuseks tahaks ütelda, et õpilaste teadmistes peegeldub õpetaja metoodika. Eriti kujukalt peegeldub õpilaste teadmistes aga praeguse algõpetuse metoodika ühekülgsus. Nii näiteks õpitakse teise kümne piirides ainult ühekohalise arvu lahutamist kahekohalisest. Et selline kitsarinnaline ja ühekülgne lähenemine ei tule kasuks ei õpilaste arengule ega ka teadmistele, on tõestatud fakt.

---

[3] Л. В. Занков. Учебник математики для первого класса. М.,, 1965; И. И. Аргинская. Учебник математики для второго класса. М., 1966.

[4] Л. В. Занков. Новое в обучении арифметике в I классе. М., 1964, lk. 61.

MATEMAATIKA- JA FÜÜSIKAÕPETAJATE KAADRIST 1965. AASTAL

J. Reimand, R. Ruut

Olukorra selgitamiseks meie matemaatika- ja füüsikaõpetajate hariduse, vanuse, koormuse, töötasu jms. küsimustes organiseeriti vajalike andmete kagumine ning läbitöötamine. Vastav perfokaart koostati Tartu Riikliku Ülikooli ja ENSV Haridusministeeriumi koostööna, lasti täita HM korraldusel haridusosakondade vahendusel ja töödeldi [1] TRÜ-s.

Perfokaardi pidid täitma [2] kõik isikud, kes 1965. a. märtsis õpetasid vabariigi eesti õppekeelega üldhariduslikes koolides matemaatikat või füüsikat V—XI klassis. Perfokaardid laekusid 96 direktorilt, 79 õppealajuhatajalt ja 1025 õpetajalt. Nii moodustus statistiline kollektiiv [3], kelle algandmeid [4] kasutati järgnenud analüüsimisel. Analüüsimise eesmärgiks oli olukorra hindamine eelkõige jaotumisseaduspärasuste osas, kusjuures lähteaspektideks valiti vanus, sugu, haridus, koormus ja töötasu. Allpool esitataksegi mõningad tulemused sellest tööst.

1. Vanus ja sugu

Andmed vanuse järgi jaotumisest on esitatud tabelis 1. Selles vaadeldakse kogu kollektiivi (veerg 13) ja ta mitmete osahulkade [5] vastavat jaotumist. Selgus, et vanuserühmade erikaal oli küllaltki ebaühtlane (veerg 14). Nii sisaldas kõige arvukam vanuserühm (30—34) 32,4% kogu kaadrist, kuid pensioniea-eelsetest kõige väiksearvulisem (45—49), vaid 2,7%. Seda seaduspärasust (vt. joon. 1) peab edaspidi jälgima kaadri ettevalmistamisel, kuid kaugemaks eesmärgiks peaks siiski olema asenduskontingendi stabiilse suuruse leidmine [6]. Siis oleks kaadri ettevalmistamine kvaliteetsem ja odavam, kõrgematesse koolidesse vastuvõtu täitmine lihtsam jne.

---

[1] Töötlemine toimus käsitsi, mistõttu on võimalikud mõningad loendamisvead (mõni kaart ei kukkunud välja vms.).

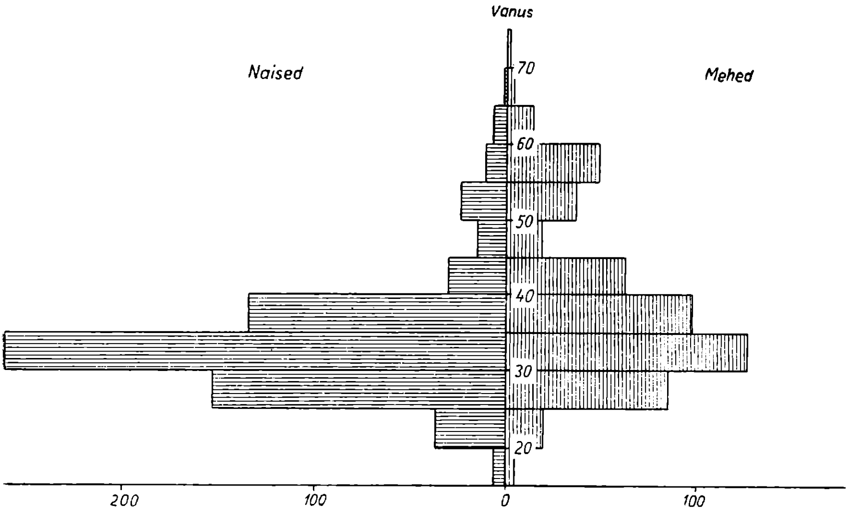
[2] Et puuduvad andmed selle korralduse täitmise täpsuse kohta, siis ei taotle järgnev kokkuvõte täielikkust.

[3] Umbes üks kümnendik ENSV kogu õpetajaskonnast.

[4] Nende õigsust kinnitasid perfokaartide täitjad oma allkirjaga.

[5] Haridust ja eriala tähistavaid lühendeid tutvustatakse järgmises osas.

[6] Asenduskontingendi abil tuleks vähendada ka nn. *amatöörmatemaatikute* ja *-füüsikute* erikaalu (vt. lk. 105).



Joonis 1.

Vaadeldavas statistilises kollektiivis oli naisi 658 ja mehi 515, protsentides 56,9 ja 43,1. Suhteliselt rohkem oli mehi eakamate pedagoogide hulgas. Nad moodustasid vanuse viieaastastes vahemikes (20—60 aastani) kõigist vastavasse vahemikku kuuluvatest isikutest 35, 35, 33, 41, 67, 55, 59 ja 80 protsenti. Mehi rakendati rohkem koolide ja õppetöö juhtimiseks.

Selgus, et 1975. aastaks jõuavad pensioniikka 40 nais- ja 85 meespedagoogi, s. o. 11,4% kaadrist. Kõrgema haridusega pedagooge on viimases kontingendis suhteliselt vähe (21,6%; keskmine 53,8%), kuid mehi palju (68%; keskmine 43%). Et tööleasujate hulgas on mehi suhteliselt vähem, siis kahaneb lähematel aastatel nende osatähtsus reaalainete õpetamisel veelgi. On aga nihkeid, mis viitavad vajadusele uurida niisuguse tendentsi mõju hariduse ja ühiskonna arengule.

2. Haridus

Vaadeldava kollektiivi haridusliku taseme (loomulikult formaalse) hindamine tekitas raskusi üldkehtiva skaala puudumise tõttu. Seepärast lepiti kokku eristada kuut hariduslikku nivood (liiki). Tavalises tähenduses vaadeldi kõrgemat haridust (*K*). Teiseks liigiks võeti mittestatsionaarne õppimine kõrgemas koolis (*Õ*). Kolmanda liigi defineerijaks võeti suhteliselt formaalne näitaja, nimelt õpingute katkestamine kõrgemas õppeasutuses (*KK*). Neljanda liigi moodustas lõpetatud pedagoogiline, kuid mittekõrgem haridus (*MK*), mille andsid õpetajate instituudid ja seminarid, pedagoogilised koolid, klassid ja tehnikumid, pedagoogiumid jt. Viienda liigina eristati veel katkestatud mittekõrgemat (*KMK*) ja kuuendana mittepedagoogilist keskharidust (*H*).

Esitatud jaotuse korral pole ühene *KK* ja *MK* hariduse järjestus. Kõrgemas koolis õppimine võis ju katkeda sealt enamuse või ei millegi omandamisega. Seevastu *MK* paikneb stabiilselt keskhariduse ja kõrgema hariduse vahepeal. Öeldu laieneb ka *Õ* ja *MK* vahekorrale. Nende asjaolude tõttu kasutati eri-

Tabel 1

Haridus	K				MK		KK		Õ		H		Kokku		K		MK		Kokku	
Eriala	*M*	*M* + *F*	*F*	*Ü*	*M* / *M* + *F* / *F*	*Ü*	*M* / *M* + *F* / *F*	*Ü*	*M* / *M* + *F* / *F*	*Ü*	*n*	*m*	Arv	%	*n*	*m*	*n*	*m*	*n*	*m*
Veerg	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
20—24	5	3	3	1	0	5	5	3	9	5	15	12	66	5,5	9	3	2	3	43	23
25—29	59	86	22	11	9	23	6	1	5	6	3	6	237	19,7	125	53	18	14	153	84
30—34	107	79	31	20	87	37	6	5	4	5	3	4	388	32,4	159	78	93	31	262	126
35—39	39	52	23	16	61	28	2	2	1	4	1	5	234	19,5	72	58	60	29	137	97
40—44	20	13	3	8	11	25	2	2	0	0	2	6	92	7,7	12	32	14	22	30	62
45—49	6	2	1	2	7	11	1	1	0	0	2	0	33	2,7	4	7	8	10	15	18
50—54	4	4	1	4	7	37	1	2	0	1	0	0	61	5,1	3	10	20	24	25	36
55—59	2	5	0	4	8	36	0	2	1	0	0	3	61	5,1	1	10	10	34	12	49
60—64	2	3	0	2	2	8	4	0	0	0	0	1	22	1,8	4	3	2	8	7	15
65—69	0	1	0	1	0	3	0	0	0	0	0	1	6	0,5	0	2	1	2	1	5
Kokku	224	248	84	69	192	213	27	18	20	21	26	38			389	256	228	177	685	515
%	20,4	20,6	7,0	5,8	16,0	17,8	2,2	1,5	1,6	1,7	2,2	3,2			32,4	21,3	19,0	14,7	56,9	43,1
Kokku	645				405		45		41		64		1200		645		405		1200	
%	53,8				33,8		3,7		3,4		5,3									
Keskmine vanus	33				40		36		28		30		35		32	35	29	43		

nevaid järjestusi, seejuures kanti liikide ühisosa kõrgemale tasemele. Nii võeti tabelis 1 need edasiõppijad ja katkestanud, kellel oli eelnevalt *MK* haridus, *MK* hulka. Tabelis 2 on aga kõik edasiõppijad ja katkestanud oma liigi juures. Arvude erinevus lahtrites *Õ* ja *KK* (nendes tabelites) näitab, mitmel isikul oli eelnevalt *MK* haridus.

Kõrgema hariduse, selle taotlemise või katkestamise korral eristati veel eriala. Vaadeldi iseseisvalt matemaatiku või matemaatikaõpetaja (M), füüsiku või füüsikaõpetaja (F) ja mõlema aine õpetaja ($M+F$) eriala. Kõik ülejäänud erialad kui üldjuhul mittevastavad, jäeti üksteisest eraldamata ($Ü$). Erialade $M+F$ ja $Ü$ jaotust kasutati ka *MK* hariduse korral, kusjuures $M+F$ eriala omandati ainult õpetajate instituudi vastava osakonna lõpetamisega.

Hariduse omandamise viis võis olla statsionaarne (st.) ja mittestatsionaarne (mst.). Ühtlasi on antud jaotus soo järgi (m ja n).

Vaadeldavas statistilises kollektiivis oli kõrgema haridusega pedagooge 54,1%, kõrgemas koolis edasiõppijaid 9,7%, katkestatud kõrgema haridusega 8,3%, mittekõrgema haridusega 22,6%, katkestatud mittekõrgema haridusega 0,9% ja eriharidusesta pedagooge 4,5% (tabel 2, vt. lk. 102—103).

Füüsika ja matemaatika õpetamiseks sobivate erialadega (M, $M+F$, F) ja kõrgema haridusega pedagoogid moodustasid kogu kollektiivist alla poole, nimelt 48,4%; omandamise viisilt jagunes see veel statsionaarseks ja mittestatsionaarseks (vastavalt 26,4% + 22%). Vaadeldavast (kõrgem sobiva erialaga) haridusest pärines 11,2% TRÜ statsionaarsest ja 1,5% mittestatsionaarsest osakonnast ning 14,3% TPedI statsionaarsest ja 19,7% mittestatsionaarsest osakonnast. Katkestanute ja lõpetanute suhe oli vaadeldava statsistilise kollektiivi andmetel TRÜ mittestatsionaarses osakonnas 31 : 18 ja TPedI juures 12 : 237 (statsionaaris vastavalt 20 : 135 ja 0 : 172).

Statsionaarselt ja mittestatsionaarselt õppinud kõrgema haridusega matemaatikute ja füüsikute jaotumist maale ja linna lõpetatud õppeasutuste kaupa näitab järgnev tabel protsentides (iga rida moodustab terviku). Selgus, et TRÜ ja TPedI statsionaarselt lõpetanud olid jaotunud koolidesse üsna samas proportsioonis. Sellest tabelist ilmnes veel, et mittestatsionaarne õppimine TRÜ-s oli rohkem jõukohane linnade keskkoolide õpetajatele (neid ju ei suunatud tööle).

		Maal		Linnas	
		8-kl.	Kk.	8-kl.	Kk.
TRÜ	st.	20	24	3	53
	mst.	11	6	11	72
TPedI	st.	27	20	2	51
	mst.	31	22	9	38

Tabel 2

Haridus			Töökoht (hariduse omandamise viis)										Kokku		
			Maal				Linnas				Kokku			%	
			8-kl.		Kk.		8-kl.		Kk.						
Liik	Õppis	Eriala	st.	mst.	st.	mst.	st.	mst.	st.	mst.	st.	mst.	Kõik	Liigi Σ-st	1200-st
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
K	TRÜ-s	*M*	21	2	19	1	3	2	41	12	84	17	101	16	8,4
		M + F	3						3		6		6	1	0,5
		F	3		13		1		28	1	45	1	46	7	3,8
		Ü	6	8	6	2		1	2	1	14	12	26	4	2,2
	TPedI-s	*M*	5	40	8	23		12	14	43	27	118	145	22	12,1
		M + F	39	28	24	23	3	8	61	45	127	104	231	35	19,3
		F	3	5	2	6	1	1	12	3	18	15	33	5	2,8
		Ü	4	10	1	3	2	2		1	7	16	23	3	1,9
	Mujal	*M*			2		1		1	3	4	3	7	1	0,6
		M + F							4	6	4	6	10	2	0,8
		F							2		2		2	0	0,1
		Ü	6	1	3		2	1	5		16	2	18	3	1,5
	Kokku		90	94	78	58	13	27	173	115	354	294	648	100	54,1
Õ				62		9		20		25		116	116	100	9,7

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
KK	TRÜ-s	*M*	1	22	1	5			11	4	13	31	44	44	3,7
		F	5		2						7		7	7	0,6
		Ü		7	1				5		6	7	13	13	1,1
	TPedI-s	*M*		2		2		1		1		6	6	6	0,5
		M + F		2		2				2		6	6	6	0,5
		Ü		1	1			1		1	1	3	4	4	0,3
	Mujal	*M*						1		2		3	3	3	0,2
		M + F		2		1						3	3	3	0,2
		Ü	3	8					2	1	5	9	14	14	1,2
	Kokku		9	44	5	10		3	18	11	32	68	100	100	8,3
MK		*M + F*	57	19	9	2	12	1	15	4	93	26	119	44	9,9
		Ü	83	28	14		11		14	2	122	30	152	56	12,7
	Kokku		140	47	23	2	23	1	29	6	215	56	271	100	22,6
KMK			3	6					1	1	4	7	11	100	0,9
Kokku			242	253	106	79	36	51	221	158	605	541	1146	100	95,5
			495		185		87		379		1146		1146	100	
H			43		5		1		5		54		54	100	4,5
Kokku			538		190		88		384		1200		1200		100
%			45		16		7		32		100				

Tabel 3

Haridus			*K*			*Õ*	*KK*			*MK*		*KMK*	Kokku	*H*	Kokku
Eriala			*M, M + F*	*F*	*Ü*	—	*M, M + F*	*F*	*Ü*	*M + F*	*Ü*	—	—	—	(arv)
8-kl. kool	M	st.	12,6	1,1	3,0	0	0,2	0,9	0,6	10,6	15,4	0,6	45,0	8,0	538
		mst.	13,0	0,9	3,5	11,6	5,2	0	3,0	3,5	5,2	1,1	47,0		
	L	st.	8,0	2,3	4,6	0	0	0	0	13,6	12,5	0	41,0	1,1	88
		mst.	25,0	1,1	4,6	22,7	2,3	0	1,1	1,1	0	0	57,9		
Keskkool	M	st.	27,9	7,9	5,3	0	0,5	1,0	1,0	4,8	7,4	0	55,8	2,6	190
		mst.	24,8	3,2	2,6	4,8	5,3	0	0	1,0	0	0	41,6		
	L	st.	32,4	11,0	1,8	0	2,9	0	1,8	3,9	3,6	0,3	57,7	1,3	383
		mst.	28,5	1,0	0,5	6,6	2,4	0	0,5	1,0	0,5	0	41,0		
8-kl. kool kokku			26,7	2,2	6,9	13,1	5,0	0,8	3,2	14,2	19,5	1,4	93,0	7,0	626
Kk. kokku			58,2	11,7	4,2	5,9	5,4	0,4	1,9	5,2	5,2	0,2	98,3	1,7	573

Vaadeldes olemasoleva kaadri jaotumist töökohtade järgi maa ja linna ning 8-klassiliste ja keskkoolide vahel, saadi tabel 3 (protsentides; iga terviku arvuline suurus on antud viimases veerus). Sellest ilmnes, et matemaatika ning füüsika õpetamiseks kõrgema haridusega sobivate erialadega kaadri osatähtsus (nende ainete õpetamisel) koolides suuresti erineb. Keskkoolides moodustasid nad maal kogu vaadeldavast kaadrist 63,8% (st. 35,8% ja mst. 28%) ning linnas 72,9% (st. 43,4% ja mst. 29,5%), kaheksaklassilistes koolides maal aga 27,6% (st. 13,7% ja mst. 13,9%) ning linnas 36,4% (st. 10,3% ja mst. 26,1%). Väärib märkimist, et 8-kl. koolid, võrreldes kohalike keskkoolidega, olid varustatud nõuetekohase kaadriga umbes kaks korda halvemini või rakendasid vähem sobivat kaadrit muudel põhjustel. Maa kaheksaklassilistes koolides moodustas domineeriva kvaliteedi ikkagi mittekõrgem haridus ($MK + KK$), mille osamäär oli 44,6% (linnas 30,6%). Seda olukorda ei suutnud muuta ka edasiõppijad, kes moodustasid maal 11,6% 8-kl. koolide kaadrist (linnas 22,7%). Pealegi õppisid sobivaid erialasid ainult pooled. Üldiselt võib oletada, et kontingendid KK ja MK haridusega ei sisalda enam palju reaalteadustes potentsiaalseid edasiõppijaid (keskmised vanused vastavalt 36 ja 40 aastat). Suhteliselt väike edasiõppijate osa keskkoolis (5,9%) näib väitvat sedasama. (Kõrgema hariduse puudumisega olid rahuldunud keskkoolis 20% ja 8-kl. koolis 51,1% (!) sealsest kaadrist.) Võrdluseks olgu lisatud, et Soome koolides rakendati 1955. a. 41,5% formaalselt mittekompetentseid õpetajaid. Seejuures olid suuremad puudujäägid võõrkeelte ja matemaatika õpetajate osas.

Iseseisva probleemi tõstatasid n.-ö. *amatöörmatemaatikud* ja *-füüsikud*, s. o. isikud mittesobivate erialadega ($Ü$), erihariduseta ja katkestatud mittekõrgema haridusega. Nad moodustasid keskkoolides 13,2% ja 8-kl. koolides 38% (!) sealsest (vaadeldavast) kaadrist. Üks küsimuste tsükkel oleks tutvumine nende teadmistega matemaatikas ja füüsikas, siis sobiv täiendamisprogramm, selle elluviimine ning asjakohane atesteerimine.[7] Teise tsükli moodustaksid aga kõrgema kooli lõpetajate töölesuunamise printsiibid. Selgunud olukord ühest küljest ja mõnede lõpetanute ekslemised töökoha leidmisel juhtisid arvamusele, et suunamisel tuleks kaadrit jaotada mitte direktorite nõudmiste, vaid linnade, rajoonide ja koolide asjakohase koondnäitaja[8] alusel.

Ühiskonna huvid, näiteks vajadus konkurentsi järele matemaatika sisseastumiseksamitega erialadel kõrgemates koolides jne., vist ei luba, et matemaatika õpetamine võiks olla koolidirektori otsuse alusel «äraelamise» vahendiks suvalise haridusega ja

---

[7] Vt. viide 6.

[8] Eelkõige peaks see sõltuma erialasest koormusest ja olemasoleva kaadri arvust, kvalifikatsioonist ning senistest töötulemustest (õpilaste edukus õpetataval alal jne.).

suvalise erialaga inimestele. Peame ju loomulikuks, et lennunduse arenemise käigus otsustaks seda mitte lokaalne ülemus, vaid erialane (perspektiivne ning vajadusi tundev) meditsiiniline komisjon, kes lenduritest sobib reaktiivlennukitele. Esitatud võrdlusnäide on ilmselt rangem, kuid mitte absurdne. Nimelt võib muutuda matemaatilise hariduse puudumine või selle küündimatus matemaatika õpetajate suurel osal piduriks ka koolimatemaatika sisu reformimisel. Koolimatemaatika sisu arengu vajadus tuleneb aga lõppkokkuvõttes ajastu vajadustest (mitte üksikisikute ja komisjonide tegevusest), eelkõige tootmise ja kõrgema hariduse nõudmistest. Tootmise ja kõrgema hariduse areng kandub ka koolimatemaatikasse, kuid ühtlasi sõltub ka sellest.

* *
*

Vaadeldes statistilise kollektiivi jaotumist hariduse järgi vabariikliku alluvusega linnades ja rajoonides (tabel 4), selgus kõrgema haridusega kaadri osamäära suur kõikumine: 31%-lt kuni 78%-ni. Suhteliselt kõige rohkem kõrgema haridusega kaadrit rakendati Tallinnas (78%), Tartus (68%), Pärnus (63%), Harju rajoonis (59%) jne.; suhteliselt kõige vähem aga

Tabel 4

Linn, rajoon	Arv	Haridus %					
		K	KK	Õ	MK(Ü)	KMK	H
Tallinn	138	78	4	7	10(6)	—	1
Tartu	38	68	5	3	24(18)	—	—
Kohtla-Järve	30	57	7	13	23(7)	—	—
Pärnu	43	63	5	21	9(2)	—	2
Narva	5	100	—	—	—	—	—
Haapsalu raj.	46	50	4	9	26(17)	—	11
Harju raj.	78	59	8	13	18(8)	1	1
Hiiumaa raj.	12	42	17	8	33(17)	—	—
Jõgeva raj.	56	34	18	16	30(13)	—	2
Kingissepa raj.	53	53	6	6	22(11)	—	13
Kohtla-Järve raj.	37	57	16	3	16(5)	—	8
Paide raj.	63	51	14	6	18(13)	—	11
Põlva raj.	52	52	13	12	21(10)	2	—
Pärnu raj.	79	48	6	14	22(19)	5	5
Rakvere raj.	111	49	7	7	28(20)	1	8
Rapla raj.	64	51	3	11	30(20)	—	5
Tartu raj.	45	31	18	15	27(16)	2	7
Valga raj.	60	48	10	7	30(12)	3	2
Viljandi raj.	50	56	8	14	20(12)	2	—
Võru raj.	86	41	7	10	29(15)	1	12
Kaugõppe- ja erikoolid	56	59	7	4	30(27)	—	—

Tartu (31%), Jõgeva (34%) ja Võru (41%) rajoonis ning Hiiumaal (42%). Kõrgema haridusega kaadri osas suhteliselt hästi komplekteeritud linnades ja rajoonides rakendati matemaatika ja füüsika õpetamisel võrdlemisi vähe mittesobiva kvalifikatsiooniga õpetajaid[9], näiteks Pärnus, Tallinnas, Harju ja Põlva rajoonis (4%—12%). Kõige rohkem rakendati neid aga Pärnu, Rakvere, Võru, Haapsalu, Rapla, Tartu, Paide ja Kingissepa rajoonis (24%—29%). Arvatavasti tuleks edaspidi eelistada neid rajoone kõrgema haridusega kaadri suunamisel.

Katse korras püüti võrrelda kaadri matemaatika-alase ettevalmistuse taset rajoonide ja koolide kaupa. Selleks võeti kasutusele vastav indeks (õpetajate matemaatikaalase hariduse punktide aritmeetiline keskmine). Eelnevalt hinnati kõigi õpetajate vastavat (formaalset) ettevalmistust 10-punktilises süsteemis järgneva kokkuleppe kohaselt.

Haridus	*K*				*Õ, KK, MK*		*H*
Eriala	*M*	*M + F*	*F*	*Ü*	*M + F*	*Ü*	—
Punkte	10	9	8	4	6	2,5	2

Saadud indeksi alusel järjestati linnad ja rajoonid, samuti koolid linnades ja rajoonides. Niisuguse järjestuse etteotsa sattusid Tallinn, Kohtla-Järve, Pärnu, Harju rajoon, Tartu jt. Järjestuse lõppu aga rajoonidest Tartu, Pärnu, Võru, Haapsalu, Paide jt.

3. Koormus ja töötasu

Käesolevas kokkuvõttes ei esitata andmeid kaadri ja koormuse kohta koolide kaupa. Piirdume vaid andmetega matemaatika ja füüsika nädala tunnikoormuse korrelatsioonitabelist. Koondandmete väljatoomiseks kasutati kokkulepet, et isikud, kelle koormus matemaatika õpetamisest oli suurem või võrdne 18 nädalatunniga või kelle koormus matemaatikas oli küll väiksem 18 tunnist, kuid kes ei õpetanud üle 3 tunni füüsikat, said oma koormuse matemaatika (m) õpetamisest. Samade kokkulepetega määrati ka koormus füüsika (f) õpetamisest. Kõikide ülejäänute koormus loeti moodustuvaks mõlema aine ($m + f$) õpetamisest. Selliste kokkulepete korral näitab koormuse päritolu järgnev tabel.

---

9 Lugedes siia *MK* eriala *Ü*, *KMK* ja *H* (arvestamata jäi veel eriala *Ü* haridusliikide *Õ*, *KK* ja *K* korral).

Kollektiiv		Koormuse päritolu %		
Haridus	Eriala	m	$m+f$	f
K	M $M+F$ F	83,5 60,2 8,8	11,8 22,3 24	4,7 17,5 67,2
Kõik eelmistest ülejäänud		61	19,5	19,5
Kõik koos		62	18,5	19,5

Selgus, et 60%-le kogu kollektiivist andis koormuse matemaatika õpetamine, 20%-le füüsika ja 20%-le mõlema aine õpetamine. Nendest arvudest aga järeldub, et vaatlusmomendil kehtinud õppeplaani tingimustes peaks olema matemaatika- ja füüsikaõpetajate ettevalmistamise suhe (eeldamata eelnevat defitsiiti ühel alal) umbes 3 : 2. Edasi selgub, et vaadeldavates tingimustes piisab matemaatikaõpetajatel üldiselt põhierialast (see võimaldab erialal põhjalikuma ettevalmistuse). Füüsikaõpetajad aga peaksid saama ettevalmistuse ka matemaatika õpetamiseks vähemalt 8-kl. kooli ulatuses. Selline vajadus tuleneb asjaolust, et isegi füüsikaõpetajate tunnustatud puudujäägi tingimustes õpetas umbes üks kolmandik nendest siiski ka matemaatikat.

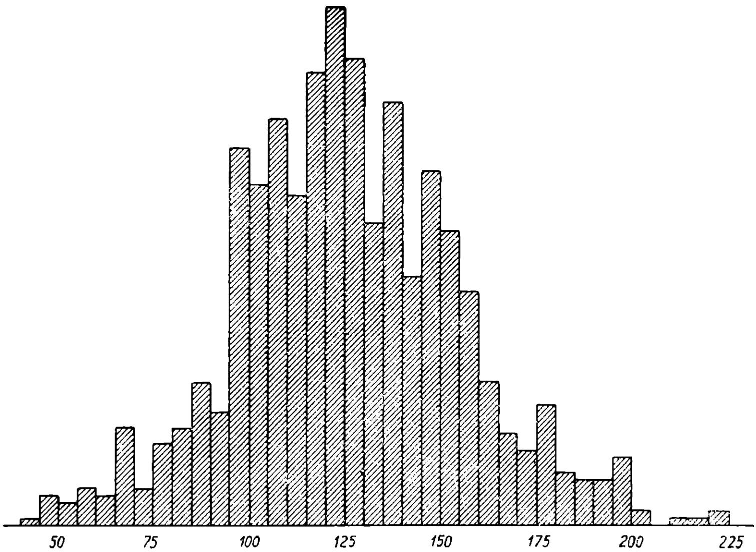
Õpetajate töökoormust otseselt ei vaadeldud. Kaudselt selgus see küll töötasu suurusest, kuigi töötasu oleneb veel, tööstaažist jm.

T ö ö t a s u d e vaatlemisel piirduti vaid keskmiste[10] töötasudega, süvenemata nende tekkimise komponentidesse (koormus, staaž, kohakaaslus, lisatasu erikoolides jm.). Selgus, et kõrgema haridusega õpetajate keskmine töötasu oli 135 rbl. (maal 134, linnas 136, 8-klassilises koolis 128, keskkoolis 138). Kõrgema hariduseta õpetajate keskmine töötasu oli 119 rbl. (maal 118, linnas 123, 8-kl. koolis 116, keskkoolis 129). Nende arvude võrdlemisel selgub näiteks, et kõrgema hariduseta 8-kl. kooli õpetajal on materiaalselt kasulikum taotleda töökohta keskkoolis (129 rbl.) kui kõrgemat haridust koos kohapeale jäämisega (128 rbl.). Õpetajate ($K+MK$) jaotumine töötasu suuruse järgi on esitatud joonisel 2 (vt. lk. 109).

Ülejäänud keskmised töötasud võivad sisaldada rohkem juhuslikkust vaadeldavate kollektiivide väiksuse, täitmisvigade jm. tõttu. Võrreldes siiski kõrgema haridusega õpetajate keskmisi töötasusid erialade kaupa, näeme töötasude kasvamist matemaati-

---

[10] Algul leiti kollektiivi jaotumine kuutöötasu põhjal 5-rublaste vahedega ja siis nende vahemikkude kaalutud keskmine.



Joonis 2.

kutelt füüsikutele. Arvatavasti peegeldub selles suurem koormus, mis tuleneb füüsikaõpetajate vähesusest. Kõrvutades aga ülejäänud erialadega õpetajaid (*Ü*) eelmistega selgus, et nemad olid tasustatud veel kõrgemini. Kui põhjuseks pole suurem koormus või staaž, tähendaks selline olukord sobimatu kvalifikatsiooniga õpetajate eelistamist matemaatika ja füüsika õpetamisel. Olukorra põhjuste selgitamine peaks huvitama juhtivaid organeid.

Maakoolides äratas tähelepanu keskmise töötasu küllalt suur erinevus 8-klassilises koolis ja keskkoolis: kõrgema haridusega õpetajate puhul 16 rbl., kõrgema hariduseta õpetajate puhul aga 15 rbl. (linnas vastavalt 3 rbl. ja 11 rbl.). Jääb mulje, et maakeskkool kompenseerib puudujääke sotsiaalsetes ja moraalsetes tingimustes suurema koormuse võimaldamisega.

*

* *

Sooritatud töö ja käesoleva artikli põhieesmärgiks oli fikseerida kaadri olukord, kes tegeles füüsika ja matemaatika õpetamisega 1965. a. Analoogiline töö tuleks korrata[11] mõne aasta pärast (ka vene õppekeelega koolides). Siis tekiks võimalus muutuste ja arengusuundade selgitamiseks ning mõõtmiseks. Sellised andmed on aga eelkõige vajalikud kaadri ettevalmistamise ja paigutamise planeerimisel.

[11] Töö peaks olema põhjalikum, hõlmates muu hulgas ka andmeid perekonnaseisu, laste arvu, vanuse jm. kohta. Viimaseid on vaja teada kvalifikatsiooni taastamise, säilitamise ja täiendamise kursuste organiseerimisel.

Mitmekülgsete andmete kogumise ja läbitöötamise kaudu tekib edaspidi võimalus suunduda teaduslikule juhtimisele[12] ka pedagoogilises töös. Sellelt seisukohalt lähtudes peaks järgnema hoopis mahukam töö õpetajate töötulemuste (kõige tähtsam!) asjalikul, põhjalikul ja pikaajalisel analüüsimisel. Näiteks matemaatika õpetamise alal tähendaks see vähemalt klassipäeviku, tunnistuste, sisseastumise ja edasiõppimise vastavate hinnete fikseerimist ja läbitöötamist, ankeete õpilastele aine meeldivuse kohta, õpilaste elukutsevalikut. Teiselt poolt tuleks mõõta ka töötingimusi, s. o. «tööobjekti» parameetreid ja häälestust, näiteks õpilaste võimeid (ka geneetika alusel), nende endi, nende vanemate ja ümbruskonna suhtumist edasiõppimisse[13] jm. Alles sellise põhjaliku uurimisega võiks saada usaldatavaid andmeid õpetaja töötulemuste kohta. Ja alles siis tekivad võimalused õpetajate töö põhjendatud võrdlemiseks, järjestamiseks, järkude andmiseks, kvalifikatsioonitasu määramiseks, edutamiseks jm.

Teaduslikult põhjendatud järeldusteni jõudmiseks tuleb kulutada senisest rohkem tööd. Tavaliselt antakse suur osa sellest arvutile. Kuid eelnevalt tuleb vajalikke andmeid koguda ja sobivalt ette valmistada. Muutmist vajaks aruandluse vorm (vähemalt perfokaartidel!). Keskkoolide ja kõrgemate koolide ühe osa aruandluse muutmisega oleks võimalik juba praegugi avastada küllalt üldisi ja olulisi seaduspärasusi, võrrelda linnu, rajoone jm.[14]

Senised tavad anda resoluutseid hinnanguid ja kindlaid järjestusi üksikute koolide ning üksikute õpetajate tööle inspektori subjektiivse arvamuse, ühekordse kontrolltöö, kõrgemate koolide vastuvõtukomisjoni muljete jms. põhjal kuuluvad arengu tõttu juba varsti kõrvaleheitmisele kui küberneetikale eelnenud intuitiivse (juhtimis-) perioodi puudulikud hindamisvahendid.

Lõpuks meenutame, et arengu soodustajaid ja temaga kaasaminejaid ootab kord preemia, mis tavaliselt moodustub mahajäänute trahvidest.

---

[12] Näib, et juba praegu tuleks luua HM juures teadusliku uurimise töörühm või laboratoorium.

[13] Praegu ignoreeritakse neid jt. objektiivseid erinevusi õpetajate töötingimustes vist eelkõige mugavusest. Mahajäämus objektiivsete tegurite mõju uurimisel aga säilitab õpetaja ebaõiglase ülekoormamise, sealhulgas ka moraalsel vastutamisel. Näiteks resultaatide eest, mis tulenevad programmi mittevastavusest õpilase võimetele, sõnalise mõjustamise küündimatusest mõne sotsiaalse teguri vastu jm.

[14] Olgu nimetatud, et ENSV Põllumajandusministeerium kasutab juba mitu aastat TRÜ Arvutuskeskuse teeneid vabariigi lehmade kohta käivate andmete läbitöötamisel.

AKADEEMIK ARNOLD HUMAL

Käesoleval aastal tähistati Eesti NSV Teaduste Akadeemia akadeemiku, Tallinna Polütehnilise Instituudi matemaatika kateedri juhataja professor Arnold Humala 60. sünnipäeva. Arnold Konstantini p. Humal (kuni 1936. a. Tudeberg) sündis 10. märtsil 1908 Tallinnas töölisperekonnas. Ta lõpetas 1925. a. Tallinna Linna Poeglaste Humanitaargümnaasiumi (praeguse Tallinna I Keskkooli), kusjuures küpsustunnistusel esinevad vaid kõrgeimad hinded. Õpinguid jätkas ta Tartu ülikooli matemaatika-loodusteaduskonnas, mille matemaatikaosakonna lõpetas 1929. a. Ka ülikoolis on kõigis õppeainetes tema teadmised tunnistatud maksimaalse hinde vääriliseks. 1930. a. anti talle Tartu ülikooli juures magistrikraad töö eest «Lisandusi ja meetodikriitilisi ääremärkusi mõnele matemaatilisele mõttekäigule».

Aastatel 1928—1931 töötas Arnold Humal ka abijõuna Tartu ülikooli matemaatika instituudis. 1932. a. suunati ta Tartu ülikooli teadusliku stipendiaadina ennast täiendama Göttingeni, kus ta õppis R. Couranti, H. Weyli jt. juures. Pärast neljakuulist viibimist kodumaal 1933. a. suvel siirdus ta uuesti välismaale, sedapuhku Viini, kust naasis 1934. a. algul.

17. veebruaril 1934. a. kaitses 25-aastane Arnold Humal Tartus doktoritöö «Kvadratuurridade teooriast ja rakendusmeetoditest» (*Über die Theorie und die Anwendungsmethoden der Quadraturreihen*, 1933) ning ta tunnistati *doctor philosophiae naturalis* kraadi vääriliseks.

Järgnevatel aastatel töötas Arnold Humal õppejõuna Tartu ülikoolis, algul vanemassistendina, seejärel eradotsendina (1936), dotsendina (1937), praktilise matemaatika adjunktprofessorina (1937) ning matemaatika kateedri juhatajana ja professori kohusetäitjana (1940). Tartus luges ta matemaatikaosakonna üliõpilastele matemaatilise analüüsi põhijooni, kõrgemat algebrat, matemaatika aluseid, matemaatika klassikalisi probleeme ja meetodeid, elementaarmatemaatikat kõrgemalt vaatekohalt. Majandusteaduskonna üliõpilastele õpetas ta finantsmatemaatikat, matemaatilise statistika elemente ja kaubandusaritmeetikat.

Saksa okupatsiooni ajal ei võimaldatud Arnold Humalal enam töötada Tartu ülikoolis. Ta töötas matemaatikaõpetajana Tallinnas (praeguses II keskkoolis).

Kohe pärast nõukogude võimu taaskehtestamist Tallinnas, alates sügissemestrist 1944, asus juubilar tööle Tallinna Polütehnilise Instituudi matemaatika ja teoreetilise mehhaanika kateedri juhatajana. Professorikutse kinnitati 1945. a. ja füüsika-matemaatikadoktori kraad 1946. a.

Kõrvuti õppetööga TPI-s töötas prof. A. Humal aastatel 1947—1950 ka Eesti NSV Teaduste Akadeemia Füüsika, Matemaatika ja Mehhaanika Instituudi direktorina. 1951. a. valiti ta vabariigi TA tegevliikmeks ja 1953. a. ENSV TA asepresidendiks. Viimasel vastutusrikkal ametikohal töötas juubilar 11 aastat.

1953. a. andis prof. A. Humal TPI matemaatika kateedri juhatamise üle dots. A. Särevile, kuid jätkas töötamist kateedri professorina. 1966. a. valiti prof. A. Humal uuesti TPI matemaatika kateedri juhatajaks.

Juubilari teaduslikud uurimused kuuluvad õige mitmesse matemaatika valdkonda.

A. Humal on pidevalt huvi tundnud arvutusmatemaatika probleemide vastu. Doktoritöös (1933) käsitleb ta diferentse sisaldavaid kvadratuurvalemeid võrdsete vahemike tagant paiknevate sõlmedega. Töös on tuletatud seosed kvadratuurvalemite kordajate vahel ja jääkliikmete avaldised ning vaadeldud nende kasutamist. Doktoritööga on seotud ka teine ulatuslik uurimus [1] (1935), milles vaadeldakse ortogonaalseid polünoome ja nende kasutamist interpoleerimisel. Arvutusmatemaatika graafilistele meetoditele on pühendatud A. Humala tööd «Funktsioonide vahe graafiline integreerimine (1947), «Ruutvõrrandi geomeetriline lahendamine» (1947) ja «Algebraliste võrrandite nomograafilisest lahendamisest» (1954).

Geomeetria aluste alal on A. Humal käsitlenud mõiste «vahel» kohta käivaid aksioome (1934) ning koos J. Sarvega ja E. Siidamiga kahes artiklis (mõlemad 1943) voltimiskonstruktsioonide võimsuse küsimust. Esimeses suunas ta jätkas J. Nuudi ja J. Sarve varasemaid töid ning pärast väga põhjalikku ja peent analüüsi taandas «vahel» kohta käivate aksioomide süsteemi maksimaalselt lihtsasse kujju. Märkimist väärib, et A. Humal rakendab sel puhul süstemaatiliselt teatavat sümboolikat, mis ainult tähistuste poolest erineb praegu laialt levinud matemaatilise loogika sümboolikast. Teises suunas õnnestus autoritel tõestada, et voltimiskonstruktsioonide abil saab lahendada nii tavalisi sirkli- ja joonlauaülesandeid kui ka kõiki selliseid ülesandeid, mis taanduvad kuupvõrrandeile või neljanda astme võrrandeile.

---

[1] Arnold Humala teaduslike tööde loetelu (kuni 1963. a-ni) vt. Математика в СССР за тридцать лет, Москва—Ленинград, 1948, lk 1032—1034 ja TRÜ Toimetised, 150, 1964, lk. 51.

A. Humala tööd kujutavas geomeetrias panid aluse TPI juures sellel alal tegutseva uurimisrühma kujunemisele. Koos O. Rünga ja A. Garšnekiga kirjutas ta esimese kujutava geomeetria õpiku eesti keeles (Kujutav geomeetria I—III, 1946—1949), mis sisaldab ka originaalkäsitlusi. Kahes artiklis (1960, 1961) uurib A. Humal Pohlke ülesannet (peaasjalikult paralleelprojekteerimise korral), rakendades ka analüütilist meetodit. Nii on näiteks lahendatud järgmine ülesanne: teades sfääri kolme vastastikku ristuva raadiuse paralleelprojektsioonide ja nende vaheliste nurkade suurusi, määrata sfääri projektsiooni ääristav ellips. Koordinaatide vahendusel on A. Humal tõestanud ka Pompeiu teoreemi üldistuse (1958): kui u, v, w on punkti kaugused võrdkülgse kolmnurga tippudest n-mõõtmelises eukleidilises ruumis (D. Pompeiu piirdus juhuga $n=2$), siis $|u-v| \leqslant w \leqslant u+v$. Võrdusmärgid esinevad siin ainult juhul, kui punkt on kolmnurga ümberringjoonel (sel puhul on tegemist van Schooteni teoreemiga).

Viimasel ajal on juubilar tähelepanu pööranud matemaatilise statistika küsimustele. Nii analüüsis ta (1962) juhuslike suuruste korrutise jaotuse põhjal tegurite jaotust (kusjuures viimaste kohta ei eeldatud sõltumatust). Ta on esitanud meetodi empiirilise funktsiooni tuletisi sisaldavate avaldiste väärtuste arvutamiseks (1966).

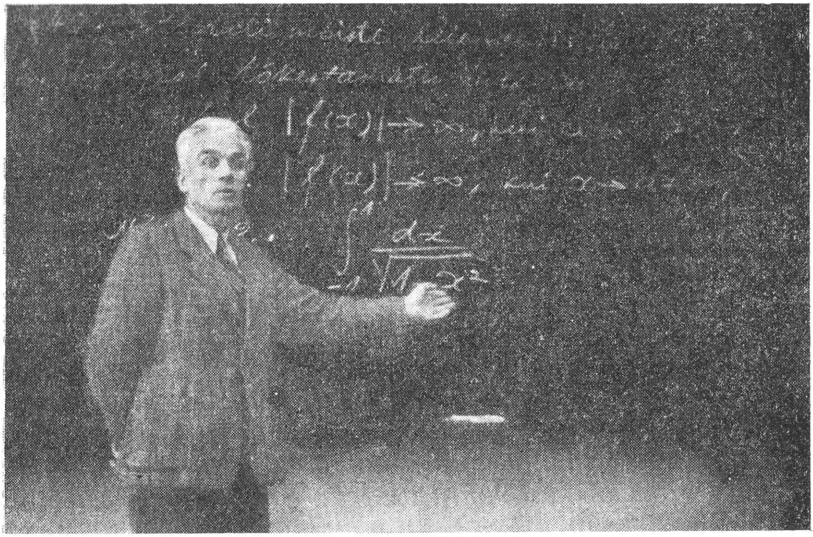
A. Humal on avaldanud ka uurimusi füüsikalise keemia (koos A. Partsiga, 1933) ja füüsika (1936) alalt. Samuti on ilmunud tema sulest ülevaateid matemaatika arengust Eestis ning metoodilisi ja populaarteaduslikke artikleid.

A. Humala teaduslikku loomingut iseloomustab teoreetiliste probleemide järjekindel sidumine praktikaga, põhjalik süvenemine ja täpsus nende käsitlemisel.

Oma põhiliseks kutsumuseks on akadeemik A. Humal kogu oma pika tööaja vältel pidanud siiski pedagoogilist tegevust kõrgemas koolis. Isegi oma vahepealset sunnitud tegevust keskkooliõpetajana luges juubilar õpetlikuks ja vajalikuks enesetäienduseks põhitööle.

Tallinna Polütehnilises Instituudis töötades on Arnold Humal enam kui 20 aasta vältel lugenud kõrgema matemaatika kursusi tulevastele inseneridele. Kuigi loetav materjal kuulub valdavalt matemaatika «klassikalisse» ossa, leiab juubilar sageli ka selle esitamiseks oma originaalse käsitluse, mida iseloomustab praktika vajaduste tunnetamine ja matemaatika elegants. Hinnatav on ka professor Humala püüe pidevalt arvestada arenevate tehniliste teaduste poolt esitatavaid uusi nõudeid matemaatika põhikursustele. Tema loengud avaldavad kuulajale mõju mitte üksnes matemaatilise esituse ranguse, vaid ka sõnastuse täpsuse, lakoonilisuse ja viimistluse poolest.

Akadeemik Humal on oma töödega andnud mõningat lisa ka eestikeelsele originaalsele matemaatika-alasele õppekirjandusele.



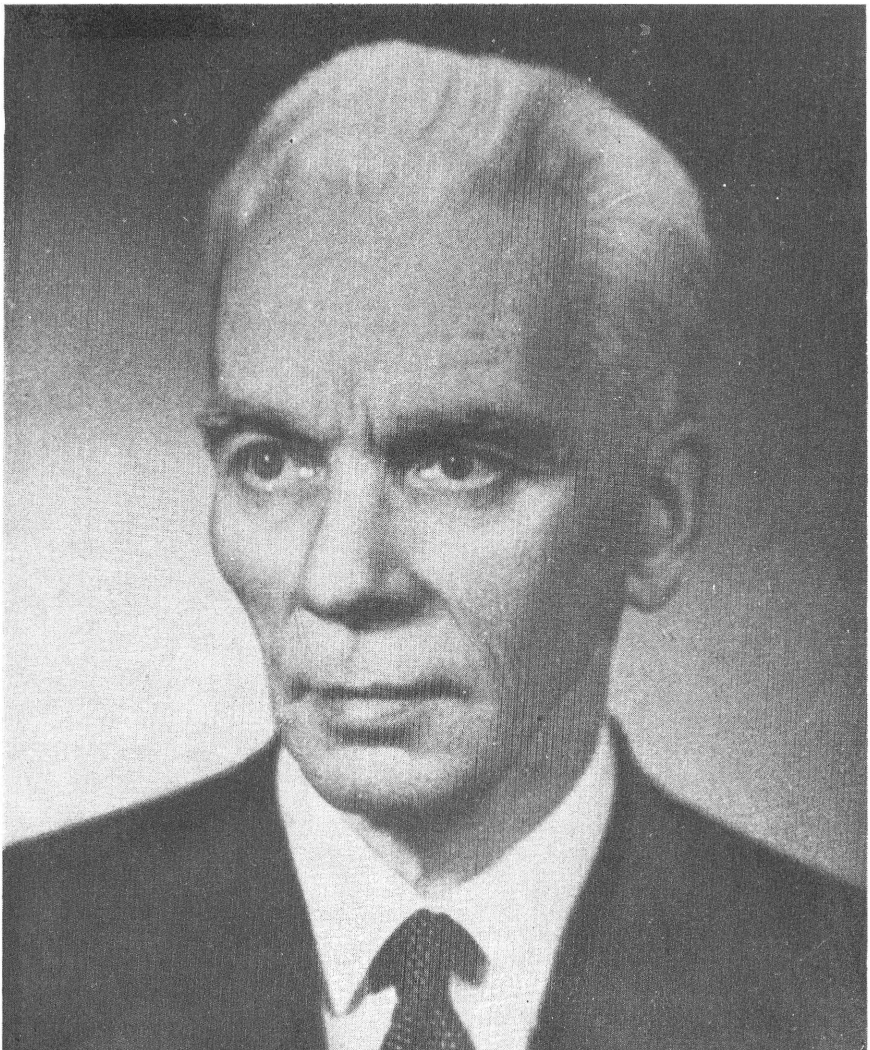
Prof. A. Humal loengul TPI-s (1952).

Peale ülalmainitud «Kujutava geomeetria» tuleks siin märkida ka 1940. aastal ilmunud õpikut «Finantsmatemaatika», mis on mõeldud majandusteaduskonna üliõpilastele ning seetõttu sisaldab materjali eriti elementaarses ja rohkete näidetega selgitatud esituses. TPI üliõpilastele peetud kõrgema matemaatika loengud vormistas juubilar esialgsel kujul loengukonspektidena (I ja II osa paljundati rotaatoril, üks vihik konspekti I osast ilmus 1959. aastal TPI rotaprindi väljaandena pealkirja all «Kõrgem matemaatika III»). 1966/67. õppeaastal paljundati rotaatoril metoodiline abimaterjal kõrgema matemaatika õppejõududele kõrgemates tehnilistes õppeasutustes.

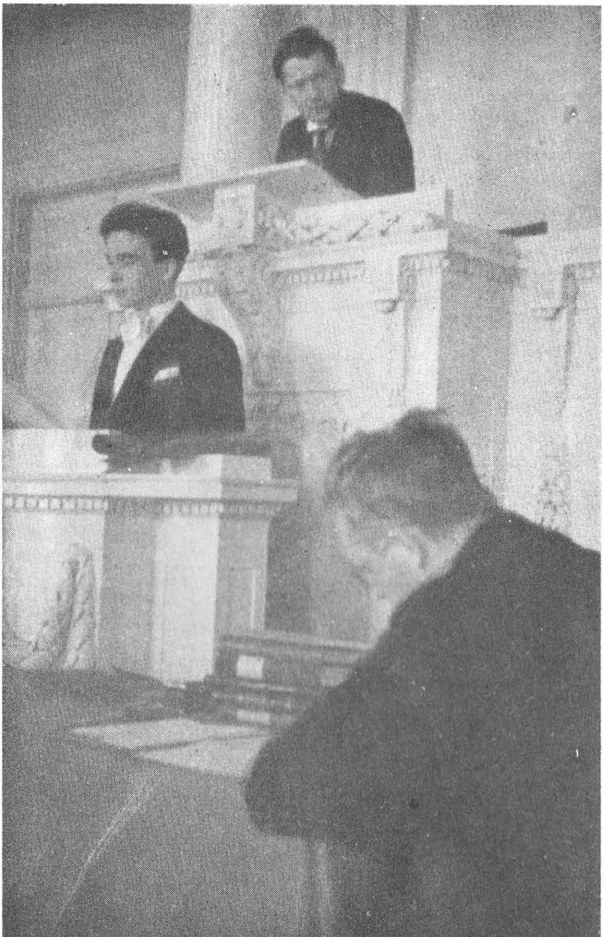
Juubilarile on alati olnud südamelähedased ka matemaatika terminoloogia alased probleemid, mille korraldamisega on ta olnud ühel või teisel viisil seotud juba ligemale nelja aastakümne vältel (käesoleval ajal töötab ta ametkondadevahelises terminoloogiakomisjonis liikmena).

Range õppejõuna tuntud akadeemik on alati abivalmis ega keela kunagi näpunäiteid ei oma noorematele kolleegidele (nende seast mitmele on ta olnud teaduslikuks juhendajaks) ega ka üliõpilastele.

Oma aastatele mittevastava erksuse ja nooruslikkuse säilitamise eest võlgneb juubilar kahtlemata suurelt osalt tänu ka innukale tennisemängule, mida ta praegugi jätkab talle omase enesedistsipliini ja regulaarsusega.



Akadeemik Arnold Humal



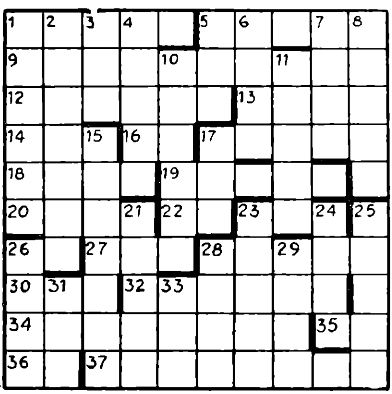
A. Humal doktoridissertatsiooni kaitsmas (1934)

Vastutusrikaste otseste ametikohustuste kõrval on sm. Humal alati viljakalt tegelnud ka ühiskondliku töö rindel. 1940/41. õ.-a. oli ta TRÜ ametiühingukomitee sekretär; ta on olnud ühingu «Teadus» liige selle asutamisest saadik (1947) ning sama ühingu vabariikliku juhatuse esimees (aastail 1953—60), teisel vabariiklikul rahupooldajate konverentsil (1951) valiti ta Eesti NSV Rahukaitsekomitee koosseisu; ta on ENSV TA Toimetiste füüsika-matemaatika ja tehnikateaduste seeria toimetuskolleegiumi esimees, kuulub NSV Liidu teaduslik-metoodilise nõukogu komitee presiidiumisse jpm. Teda on autasustatud medalitega «Töö vapruse eest Suures Isamaasõjas» ja kahel korral Eesti NSV Ülemnõukogu Presiidiumi aukirjaga. Oktoobrirevolutsiooni 50. aasta juubeli puhul autasustati akad. A. Humalat NSV Liidu Kõrgema- ja Keskerihariduse Ministeeriumi aukirjaga.

Soovides juubilarile edaspidiseks raudset tervist ja raugematut tööindu, loodame temalt ühtlasi veel paljude matemaatiliste probleemide lahendamisel kõige sirgemate teede käimist, s. t. kõige teravmeelsemate ideede leidmist.

Kolleegid.

MATEMAATILISED RISTSÕNAD



Paremale: 1. Kreeka täht. 5. Matemaatika-alase tegusõna põhivorm. 9. Funktsioon. 12. Fotomeetri leiutaja. 13. Geomeetriline kujund. 14. Arv (inglise keeles). 16. Funktsiooni tähis. 17. Tõenäosusteooria ülesannetes esinev mõiste (käändes). 18. Vajalik ülesande lahendamiseks. 19. XIX saj. tuntud matemaatiku eesnimi. 20. Sageli kasutatav märk. 22. Arv (hispaania keeles). 23. Arv (saksa keeles). 26. Mõõtühik (lüh.). 27. Mõõde (lüh.). 28. Matemaatik, kelle kirjutis on ilmunud «Matemaatika ja kaasajas». 30. Paljudes matemaatilistes mõistetes eesliitena kasutatav sõna. 32. Matemaatik ja astronoom (1784—1846). 34. Arvu tähis (käändes). 35. 1963. a. Lenini preemia saanud matemaatiku initsiaalid. 36. Eelmisega samanimelise matemaatiku initsiaalid. 37. Mõõtkavata joonised.

Alla: 1. XIX saj. prantsuse matemaatik. 2. Binoomi astendamine. 3. Mõõt (lüh.). 4. Teatud mõõteriistu. 5. XIX saj. matemaatik. 6. Aastail 1805—1865 elanud tuntud matemaatiku rahvus. 7. Mõiste integraalvõrrandite teooriast. 8. Mõiste kõrgemast algebrast. 10. Funktsioon. 11. Arv (käändes). 15. Paljude teoreemide tõestuses esinev sõna. 17. Funktsiooni tähis. 21. Matemaatik (1839—1903). 23. Liiduvabariik, kelle võistkond üleliidulisel matemaatika olümpiaadil 1964. a. saavutas seitsmenda koha. 24. Arv. 25. Binoomi astendamisel saadav tulemus. 26. Mõõtühik. 28. Kreeka täht. 29. Väide. 31. Matemaatiline lühend. 33. A. Borkvelli «Matemaatilise analüüsi kursuse» väljaandnud kirjastus.

(Koostas H. Espenberg)

KALLE VÄISÄLÄ JA TARTU ÜLIKOOL

O. Prinits, E. Tamme

Tartu on küll juba sajandeid tuntud ülikoolilinnana, kuid eesti rahvusliku ülikoolina eksisteerib Tartu ülikool siiski alles 50 aastat. Varasematel perioodidel oli ülikooli õppejõudude ja üliõpilaste hulgas ainult üksikuid eestlasi, õppejõudude-matemaatikute hulgas aga mitte ühtki.

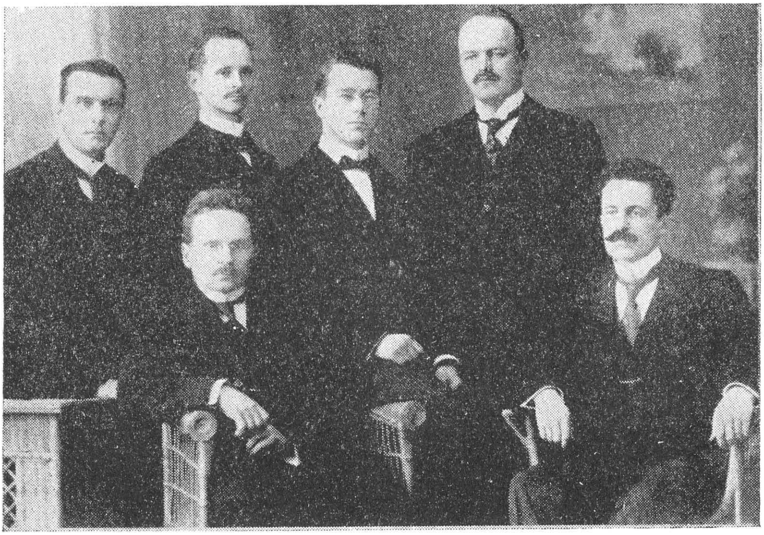
Vene õppekeelega Jurjevi[1] ülikool lõpetas Saksa okupatsioonivõimude survel oma tegevuse 1918. a. mais. Enamik õppejõududest ja vene üliõpilaskonnast evakueeriti Voroneži ning nad jätkasid õppetööd 1918. a. seal avatud Voroneži ülikoolis. 1918. a. septembris avasid Saksa võimud Tartus oma ülikooli. Enamik eesti ja kohalejäänud vene üliõpilastest boikoteeris seda saksa õppekeelega ülikooli. Juba sama aasta novembris oli see ülikool sunnitud oma töö lõpetama.

Kui 21. detsembril 1918. a. Punaarmee vabastas Tartu, siis hakati kohe samme astuma ülikooli taasavamiseks. Ürituse etteotsa asus kuraatori asetäitjana matemaatik Jaan Sarv. Põhiliseks õppekeeleks pidi esmakordselt Tartu ülikooli ajaloos saama eesti keel. Et õppejõududeks saaks kutsuda teadlasi ka välismaalt, otsustati lubada õppetöö läbiviimist siiski ka vene ja saksa keeles. Nõukogude võim kestis sel perioodil Tartus aga vähem kui kuu aega. Eesti kodanlus jätkas ettevalmistusi ülikooli avamiseks ja õppetöö algas 1919. a. oktoobris.

Matemaatika õpetamiseks eraldati Tartu ülikoolis kaks professori kohta ja üks dotsendi koht. Neile lisandus veel üks mehhaanika ja rakendusmatemaatika professuur. Kohtade täitmine polnud aga sugugi lihtne, sest Eestis ei olnud sel ajal ühtki magistrikraadiga matemaatikut. Matemaatikaprofessori kohustetäitjaks määrati Jaan Sarv, dotsendiks Hermann Jaakson. J. Sarv ja H. Jaakson olid matemaatiku kvalifikatsiooni omandanud tsaariaegses Tartu ülikoolis (vastavalt aastatel 1907 ja 1913). Töötanud seejärel keskkooliõpetajana, huvitusid nad ka matemaatikaalasest teaduslikust uurimistööst. Teisele matemaatikaprofessori kohale kutsuti Helsingist noor soome matemaatikadoktor Kalle Väisälä. Mehhaanika ja rakendusmatemaatika professori kohustetäitjaks nimetati 1920. a. suvel Venemaalt Eestisse opteerunud Gerhard Rägo, kes on samuti Tartu ülikooli kasvandik (lõpetanud 1913. a.).

[1] Jurjev — Tartu venekeelne nimetus.

Kauaaegsete ja teenekate matemaatikaprofessorite Jaan Sarve, Hermann Jaaksoni ja Gerhard Rägo kohta on avaldatud materjale «Matemaatika ja kaasaja» varasemates vihikutes [2]. Järgnevas tutvustame põgusalt Tartu eesti ülikooli esimest korralist matemaatikaprofessorit Kalle Väisälät, kes käesoleval aastal sai 75-aastaseks.



Tartu ülikooli soome professorid (1920). Tagareas vasakult: A. M. Tallgren (Eesti ja põhjamaade muinasteadus), K. Teräsvuori (taimekasvatus ja sordiparandus), K. Väisälä (matemaatika), A. R. Cederberg (Eesti ja põhjamaade ajalugu); esireas: L. E. Kettunen (läänemere ja soome keeled), J. G. Granö (geograafia).

KALLE VÄISÄLÄ on sündinud 19. augustil 1893. a. Põhja-Karjalas (Kontiolahtis). Aastatel 1911—1914 õppis ta matemaatikat Helsingi ülikoolis ja pärast lõpetamist sai assistendikoha sama ülikooli juures. 1915. a. avaldas ta koos V. J. Kallioga uurimuse röntgenikiirte neeldumisest mõnedes puidu- ja kivimiliikides.

1916. a. kaitses K. Väisälä Helsingis väitekirja teemal «Algebraliselt lahenduvatest viienda astme võrranditest» (*Über die algebraisch auflösbaren Gleichungen fünften Grades*), mille eest talle omistati doktorikraad. Järgmisel aastal nimetati ta Helsingi ülikooli matemaatikadotsendiks ning valiti Soome Teaduste Akadeemia abiliikmeks. Aastatel 1917—1920 ilmus Soome teaduslikes väljaannetes neli K. Väisälä uurimust algebraliste ja diofantiliste võrrandite teooria alalt.

[2] Vt. Matemaatika ja kaasaeg, III, lk. 68—72, IV, lk. 3—8 ja 76—81; XIV, lk. 87—90.

1919. a. sügisel sai K. Väisälä kutse Tartu ülikooli matemaatikaprofessori kohale. Kirjas ülikooli kuraatorile [3] ta märkis, et ta võiks esialgu lugeda loenguid saksa keeles ning avaldas lootust, et suudab peatselt selgeks õppida ka eesti keele ning viia õppetööd läbi siis juba eesti keeles.

Kalle Väisälä kinnitati Tartu ülikooli matemaatiprofessoriks 1. oktoobril 1919. a. Vastavalt lubadusele hakkaski ta juba 1920. a. algul õppetööd läbi viima eesti keeles. Tartu ülikoolis luges ta 3 aasta jooksul mitmeid loengukursusi (kõrgem algebra, funktsiooniteooria, valitud peatükid uuemast funktsiooniteooriast ja analüütilisest arvuteooriast, elliptilised funktsioonid, diferentsiaalvõrrandid, elementaarmatemaatika kõrgemalt vaatekohalt, esperanto keele kursus). Tema juhendamisel valmis Albert Borkvelli magistritöö «Binoomvõrrandi $z^n - 1$ algebraline lahendamine» (1922).

K. Väisälä (1920).

1920. a. suvel käis K. Väisälä ennast täiendamas Saksamaal (Göttingenis ja Berliinis).

Tartu ülikooli toimetiste I köitest leiame ka K. Väisälä töö «Dirichlet' ridade mõiste üldistamine» (*Verallgemeinerung des Begriffes der Dirichletschen Reihen*, 1921). Selles ta uurib Dirichlet' rea

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$$

absoluutse ja tingimisi koonduvuse piirkonda juhul, kui suurused λ_n on kompleksarvud ja

$$\lim_{n \to \infty} |\lambda_n| = +\infty.$$

1922. a. avati Turus erateel kogutud ressurssidega esimene Soome ülikool [4], milles kogu õppetöö toimus soome keeles. Selle

---

[3] RAKA, f. 2100, nim. 2, s.-ü. 1387.

[4] Soomes töötab 3 ülikooli. Suurim ja vanim neist on Helsingi riiklik ülikool, mis on asutatud 1640. a. Turus ja viidud 1828. a. üle Helsingisse. Kuigi möödunud sajandi teisel poolel hakati selles ülikoolis pidama loenguid ka soome keeles, toimus kuni 1924. a. enamus õppetööd rootsi keeles. 1919. a. avati Turus rootsi eraülikool ja 1922. a. samas ka soome eraülikool.

ülikooli matemaatikaprofessori kohale kutsuti Kalle Väisälä, kes kutse ka vastu võttis ning siirdus 1922. a. suvel tagasi oma kodumaale. Kõrvuti otsese õppetööga täitis ta Turu (soome) ülikoolis mitmesuguseid ülesandeid, olles üliõpilaskonna inspektor (1922—26), ülikooli valitsuse liige (1930—38) ja prorektor (1934—38). 1924. a. valiti K. Väisälä Soome Teaduste Akadeemia liikmeks.

1939. a. läheb K. Väisälä uuesti Helsingisse, kus töötab dotsendina ülikoolis (1939—57) ja professorina tehnikaülikoolis (1939—60). Sellel perioodil kirjutab ta ka rea soomekeelseid õpikuid kesk- ja kõrgematele koolidele: «Algebra õpperaamat» I—II (1945, 1946), «Trigonomeetria» (1947), «Geomeetria» (1948), «Arvuteooria ja kõrgema algebra alged» (1950), «Vektoranalüüs» (1954).


K. Väisälä (1959).

Matemaatikaprofessorina on Kalle Väisälä andnud küllaltki tõhusa panuse nii Eesti kui ka Soome rahvuslike ülikoolide väljakujundamiseks.

Käesoleval ajal elab prof. K. Väisälä Helsingis. «Matemaatika ja kaasaja» toimetusele saatis ta siin avaldatud fotod ning kirjutas muuhulgas: «Tartu aeg oli mulle väga rõõmuline, üks kõige rõõmsamaist minu elus. Veelgi kõlab minu kõrvades üliõpilaste harilik laul: «Noorus ei tule iial tagasi . . .»»

Toimetuselt. *Käesoleva kogumiku ladumise ajal saabus Soomest kurb teade, et prof. Kalle Väisälä suri Helsingis 16. septembril 1968. a.*

JEAN LE ROND D'ALEMBERT — ENTSÜKLOPEDIST, MATEMAATIK, FILOSOOF

M. Tõnnov

250 aastat tagasi ühel novembriööl leidis oma tavalist ringkäiku tegev linnavaht Pariisis Notre-Dame katedraali lähedal asuva väikese Saint Jean le Rond kiriku trepilt hoolikalt sissemähitud vastsündinu. Leitud laps anti lähikonnas eluneva klaassepp Alembert'i perekonda üleskasvatamiseks. Sellistel puhkudel valitsenud tava järgi pandi lapsele leiukoha järgi nimeks Jean le Rond. Kiriku meetrikaraamatu järgi on poisi sünd registreeritud 16. novembril 1717. Hiljem selgusid ka tõelised vanemad. Poja hüljanud ema oli kõrgema seltskonna daam madame de Tencin, selleaegse Lyoni kardinali õde. Isaks oli kahurväekindral Destouches. Mõnede allikate järgi olevat isa ise korraldanud poisi «leidmise», et niiviisi saada võimalust osa võtta oma ebaseadusliku poja kasvatamisest. Tõelise emaga ei ole Jean le Rond kunagi kohtunud, kuid kasuemasse suhtus ta alati väga suure lugupidamisega. Hiljem juba tuntud mehena võttis ta kasuema enda juurde perekonda.

Jean le Rond oli üheksaaastane, kui suri tema tõeline isa, kellelt ta päris küllalt suure aastasissetuleku. Tänu sellele sai Jean le Rond hea kasvatuse ja hariduse. 1735. a. lõpetas nooruk Collège des Quatre Nations bakalaureuse kraadiga ja hakkas siitpeale oma nime kirjutama d'Alembert. Juba kolledžis õppides ilmnesid tema suurepärased võimed matemaatikas ja mehhaanikas. Hiljem õppis ta veel õigusteadust ja meditsiini, kuid peatähelepanu pööras endiselt matemaatikale ja selle rakendustele. Tema esimesed uurimused äratasid tähelepanu ja nii valiti ta aastal 1741 Pariisi Teaduste Akadeemia liikmeks. 1772. a. sai d'Alembert'ist akadeemia sekretär. Ta oli valitud ka mitmete välismaiste akadeemiate, sealhulgas Peterburi Teaduste Akadeemia liikmeks (1764).

Alates aastast 1751 võttis d'Alembert osa prantsuse «Entsüklopeedia ehk teaduste, kunstide ja käsitööde seletava sõnaraamatu» *(Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers)* toimetamisest. D. Diderot' (1713—1784) ja d'Alembert'i toimetamisel avaldati «Entsüklopeedia» esimesed 7 köidet.

Alludes reaktsiooni survele loobus d'Alembert 1757. a. toimetamistööst. Üldse ilmus entsüklopeedia 28-köitelisena ajavahemikul 1751—1772. Hiljem lisandus sellele veel aastatel 1776—1780 viis lisaköidet ja kaks köidet registreid. «Entsüklopeedia» kaastöölisi hakati kutsuma «entsüklopedistideks». Nende hulka kuulusid veel sellised suured XVIII sajandi mõtlejad nagu J. J. Rousseau (1712—1778), F. M. Voltaire (1694—1778), C. A. Helvétius (1715—1771), P. H. Holbach (1723—1789) jt.

D'Alembert'i koostatud on «Entsüklopeedias» matemaatika, mehhaanika, astronoomia ja paljud filosoofia-alased artiklid. Eriti huvipakkuv on tema poolt kirjutatud eessõna «Entsüklopeediale» *(Discours prémilina)*, milles ta annab teaduste klassifikatsiooni, lähtudes peamiselt F. Baconi (1561—1626) printsiipidest. Muuhulgas käsitleb ta selles loogikat, ajalugu, õigusteadust, majandusteadust, poliitilisi teadusi, kirjandust ja kunsti teadustena inimesest. Sellega ta annab tänapäevani püsimajäänud humanitaarteaduse mõiste.

Oma filosoofilisi vaateid on d'Alembert väljendanud «Entsüklopeedia» artiklites ja kõige enam teoses «Filosoofia elemendid» *(Essai sur les éléments de philosophie)*, mis ilmus 1759. a. Preisi kuninga Friedrich Suure tellimisel.[1] Filosoofina oli d'Alembert inimene, kes tunnistas aistingud ainsaks tunnetuse allikaks. Sellest hoolimata eksisteerib tema jaoks jumal kui loov substants. Mõtlemist ei pea ta mateeria omaduseks, tema järgi on vaim ja mateeria lahutatud. D'Alembert'i arvates on asjade tunnetamisel piirid, mida inimene ei ole võimeline ületama. Just agnostitsistlike elementide tõttu, mida ta omalt poolt lisab mehhanistlikule materialismile, taandub ta materialistlikust gnoseoloogiast. D'Alembert'i inkonsekventseid vaateid on Diderot' korduvalt kritiseerinud.

Teisest küljest võib d'Alembert'i iseloomustada kui inimest, kes astus välja seisusliku rõhumise vastu ning kiriku vahelesegamise vastu teaduse ja poliitika asjadesse. Poliitiliste vaadete poolest seisis ta kõige lähemal C. L. Montesquieu'le (1689—1755). Olles kodanliku eraomanduse kaitsja ütleb ta samal ajal, et inimene ei ole õigustatud kasutama rikkusi, kui paljud on kõige hädavajalikumast ilma jäetud.

D'Alembert kuulub XVIII sajandi suurimate matemaatikute hulka. Eelmise sajandi lõpul oli I. Newtoni (1643—1727) ja G. W. Leibnizi (1646—1716) töödes loodud diferentsiaal- ja integraalarvutus. XVIII sajandi matemaatika kõige olulisemaks saavutuseks on selle arvutuse arendamine ja rakendamine loodusteaduse probleemide uurimisel. Matemaatilise analüüsi aparaadi arengu tulemusena kujunesid omaette distsipliinideks diferentsiaalvõrrandite teooria, variatsioonarvutus, kompleksmuutuja funktsioonide teooria jt. Matemaatilise analüüsi meetodite rakendamine loodusteadustes tõi endaga kaasa teoreetilise mehhaanika, geodeesia, optika jt. teadusharude kujunemise.

D'Alembert'i matemaatika-alane pärand on ulatuslik ja mitmekülgne. Talle kuuluvad sügavad uurimused matemaatilise analüüsi, algebra, kompleksmuutuja funktsioonide teooria, teoreetilise mehhaanika ja astronoomia valdkonnas.

Matemaatilise analüüsi alal on d'Alembert'i töödest tähtsaimaks 1746. a. avaldatud «Uurimusi integraali arvutamisest» (*Recherches sur le calcul integral*), mis on pühendatud peamiselt ratsionaalfunktsioonide[2] integreerimisele. Kõige tähtsam ja töömahukam ülesanne ratsionaalfunktsioonide integreerimisel on osamurdudeks lahutamine. Selleks et osamurdudeks lahutamist põhjendada, peab tõestama, et iga reaalsete kordajatega polünoom on avaldatav esimese ja teise astme reaalsete kordajatega polünoomide korrutisena. Viimane väide aga järeldub algebra põhiteoreemist:

---

[1] Friedrich Suur (1712—1786) oli Preisi kuningaks 1740—1786. Ta oli prantsuse kultuuri ja kommete austaja, kirjutas ise prantsuse keeles palju ajaloolisi, poliitilisi ja filosoofilisi töid (30 köidet teoseid).

[2] Ratsionaalfunktsiooniks nimetatakse polünoomide jagatist: $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$.

igal n-astme võrrandil

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

kus a_k *(*$k = 1, 2, \ldots, n$*) on reaal- või kompleksarvud, on vähemalt üks lahend kompleksarvude vallas.*

Seetõttu peab d'Alembert oma ülesande lahendamist alustama selle põhiteoreemi tõestamisest. Veendumust, et niisugune teoreem kehtib ning et igal n-astme algebralisel võrrandil on parajasti n lahendit kompleksarvude korpuses (kui lahendeid arvestada vastavalt nende kordusele), oli esimesena väljendanud juba hollandi matemaatik A. Girard (1595—1632). Teoreemi tõestuskatseid võib leida R. Descartes'i (1596—1650) ja L. Euleri (1707—1783) töödes.

D'Alembert alustab niisugustest väga tähtsatest väidetest, nagu: $\alpha = a + bi$ ja $\bar{\alpha} = a - bi$ saavad reaalsete kordajatega algebralise võrrandi lahenditeks olla ainult samaaegselt, või: kui α on polünoomi nullkoht, siis jagub polünoom teguriga $x - \alpha$. Viimane väide on E. Bezout (1730—1783) poolt hiljem üldistatud praegu hästi tuntud lauseks jäägi kohta, mis tekib polünoomi jagamisel lineaarteguriga. Põhiteoreemi tõestuses etendab d'Alembert'il tähtsat osa väide, mis tänapäeval on tuntud d'Alembert'i lemma nime all: *kui n-astme polünoomi* $f(x)$ *korral (kus* $n \geqslant 1$*) on* $f(x_0) \neq 0$, *siis leidub nullist erinev kompleksarv h, nii et*

$$|f(x_0 + h)| < |f(x_0)|,$$

s. t. $|f(x)|$ *ei või saavutada nullist erinevat miinimumi.*

Kahjuks ei saa d'Alembert'i tõestust lugeda rangeks. Alles 1799. a. annab C. F. Gauss (1777—1855) oma kuulsas doktoritöös täiesti range tõestuse algebra põhiteoreemile.

Samas töös 1746. aastast on d'Alembert uurinud elliptilisi integraale, viies neid sobivate asendustega varem tuntud kujudele. Elliptilisteks nimetatakse järgmist tüüpi integraale:

$$\int f(x, \sqrt{ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e})\,dx,$$

kus f on mingi ratsionaalfunktsioon ning a või b on nullist erinev. Ka mitmed teised XVIII sajandi silmapaistvaist matemaatikuist nagu L. Euler, A. M. Legendre (1752—1833), J. L. Lagrange (1736—1813) jt. on pühendanud elliptilistele integraalidele rohkesti tähelepanu. Asi on selles, et niisugused integraalid üldiselt ei ole avaldatavad elementaarfunktsioonide abil.

Eriti silmapaistvaid tulemusi on d'Alembert saanud kompleksmuutuja funktsioonide teooria valdkonnas. Nii on ta näiteks töös «Mõtisklused tuulte üldistest põhjustest» (*Réflexions sur la cause générale des vents,* 1747) tõestanud, et iga algebraline funktsioon n kompleksset argumendist on esitatav kujul

$$w = u + iv,$$

kus u ja v on reaalsed funktsioonid. Euler, kellele oli teada see d'Alembert'i töö, näitas 1777. a., et kui $f(x+iy) = u(x, y) + i\,v(x, y)$, siis $f(x-iy) = u(x, y) - i\,v(x, y)$. Seda tulemust kasutas Euler järgmise integraali reaal- ja imaginaarosa arvutamisel:

$$\int (u+iv)\,dz = \left(\int u\,dx - v\,dy\right) + i\left(\int v\,dx + u\,dy\right).$$

Teda hämmastas asjaolu, et seejuures oli võimalik valida ainult niisuguseid funktsioone $u(x, y)$ ja $v(x, y)$, et

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{1}$$

Lahendades üht hüdrodünaamika ülesannet leidis d'Alembert juba 1752. aastal, et kui u ja v on diferentseeruva kompleksmuutuja funktsiooni vastavalt reaal- ja imaginaarosad, siis peavad olema võrrandid (1) rahuldatud. Seetõttu nimetatakse viimaseid sageli Euler-d'Alembert'i võrrandeiks. Kompleksmuutuja funktsioonide teooria aluskivideks said nad hiljem A. Cauchy ja B. Riemanni loomingus. D'Alembert märkas ka, et iga diferentseeruva funktsiooni reaal- ja imaginaarosa on harmoonilised funktsioonid, s. t. rahuldavad võrrandit

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0,$$

mis hiljem etendas põhilist osa P. S. Laplace'i töödes ja mida tänapäeval tuntakse Laplace'i võrrandina.

XVIII sajandil toimub diferentsiaal- ja integraalarvutuse sisseviimine paljudesse loodusteadusharudesse, mis tingib omakorda diferentsiaalvõrrandite teooria üha põhjalikuma läbitöötluse. Suured teened diferentsiaalvõrrandite teoorias on L. Euleri, J. L. Lagrange'i, P. S. Laplace'i (1749—1827), A. C. Clairaut' (1713—1765) kõrval ka J. R. d'Alembert'il.

1748. a. leiab d'Alembert erilahendi diferentsiaalvõrrandile

$$y = x\varphi(y') + \psi(y'),$$

mis on praegu tuntud d'Alembert-Lagrange võrrandina ja kujutab Clairaut'i võrrandi[3] üldistust.

D'Alembert andis 1747. a. üldise meetodi lineaarse mittehomogeense diferentsiaalvõrrandi lahendamiseks. Tema meetod seisab selles, et n-järku diferentsiaalvõrrandi lahendamine taandatakse n esimest järku diferentsiaalvõrrandi süsteemi lahendamisele. Niisugusele järeldusele jõuab d'Alembert juba aastal 1743 oma «Traktaadis dünaamikast» *(Traite de dynamique)*.

Mehhaanika põhivõrrandite kasutamine planeetide liikumise

[3] Vt. Matemaatika ja kaasaeg, VI. Trt., 1965, lk. 78.

teoorias, s. t. kolme keha ülesande lahendamisel, viis diferentsiaalvõrrandite ligikaudse lahendamise vajaduseni. Nii vaatleb d'Alembert 1754. a. oma teoses taevamehhaanikast «Uurimusi maailmasüsteemi mõningatest olulistest küsimustest» *(Recherches sur differens points importans du systeme du monde)* planeedi liikumise võrrandi lähislahendina ringorbiiti, kuid hiljem parandab neid lähendeid astmeridade abil. Olgu märgitud, et samuti toimis Euler oma «Kuu teoorias».

D'Alembert'i silmapaistvaks tööks diferentsiaalvõrrandite alal on veel Taylori poolt antud võnkuva keele liikumist väikeste amplituudide korral kirjeldava osatuletistega võrrandi

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

lahendamine. Ta sai üldlahendiks

$$y = \psi(t + x) + \mu(t - x),$$

kus ψ ja μ on mistahes kaks korda diferentseeruvad funktsioonid.

Märkimisväärsed on d'Alembert'i uurimused ridade teoorias. Hästituntud on tema poolt saadud positiivsete liikmetega rea $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ koonduvustunnus: *kui teatud kohast alates* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q < 1$, *siis rida koondub, kui* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant q > 1$, *siis rida hajub.*

Huvipakkuv on ka Taylori valemi tuletamie d'Alembert'i poolt. Ta lähtub võrrandist

$$\varphi(z + \zeta) = \varphi(z) + u,$$

kus ζ on nullile lähedane suurus. Selleks et leida u, ta diferentseerib viimast võrdust ζ järgi:

$$\varphi'(z + \zeta) = u'.$$

Nüüd

$$u = \int_0^\zeta \varphi'(z + \zeta)\, d\zeta,$$

ja

$$\varphi'(z + \zeta) = \varphi'(z) + \int_0^\zeta \varphi''(z + \zeta)\, d\zeta.$$

Selliselt korduvalt toimides saab ta Maclaurin'i rea osasumma:

$$\varphi(z + \zeta) = \varphi(z) + \int_0^\zeta \varphi'(z)\, d\zeta + \int_0^\zeta d\zeta \int_0^\zeta \varphi''(z)\, d\zeta + \ldots$$

$$\ldots + \int_0^\zeta d\zeta \int_0^\zeta d\zeta \int_0^\zeta \ldots \int_0^\zeta \varphi^{(n)}(z + \zeta)\, d\zeta.$$

Väga tähtis on d'Alembert'i printsiip mehhaanikas. Selle esitas ta 1743. a. oma «Traktaadis dünaamikast». Selle printsiibi alusel rakendatakse staatika seadusi dünaamikas. D'Alembert'i printsiipi võib väljendada valemina

$$V + S + H = 0,$$

kus V on masspunktide süsteemile rakendatud välistungide summa, S — süsteemile rakendatud sisetungide summa ja H — inertstung. Inertstung $H = -\sum m \frac{d^2v}{dt^2}$ võimaldab liikumist vaadelda kui tungide tasakaalu juhtu.

D'Alembert pidi mitmetesse «Entsüklopeedia» köidetesse kirjutama artikleid, mis sisaldasid tõenäosusteooria elemente. Niisugusteks artikliteks on näiteks 1754. a. trükitud köites *«Croix on pile»* (Kull või kiri) ja 1757. a. ilmunud köites artikkel *«Gageure»* (Kihlvedu).

Entsüklopedistina on d'Alembert oma artiklites täpne ja kaugelenägev. Võrreldes teiste tolle aja matemaatikute töödega olid d'Alembert'i artiklid «Diferentsiaalne», «Logaritm», «Negatiivne», «Piirväärtus» jt. väga korrektsed. Viimane neist on tähelepanuväärne ka selle poolest, et d'Alembert ühena esimestest rõhutab selles vajadust ehitada matemaatiline analüüs üles piirväärtuse mõiste abil. D'Alembert'i matemaatiline looming on äärmiselt mitmekülgne. Ta ei ole uurinud mitte üksikuid küsimusi, vaid mitmeköitelistes teostes haaranud kogu ala. Kolmeköiteline teos taevamehhaanikast *«Recherches sur differens points importans du systeme du monde»* jääb d'Alembert'i viimaseks matemaatika-alaseks uurimuseks. Edaspidine tegevus on pühendatud teistele teadustele. Mitmeköiteline teos «Mitmesugust kirjandusest, ajaloost ja filosoofiast» (*Mélanges de littérature, d'histoire et de philosophie*) näitab tema huvide ja võimete hämmastavat mitmekülgsust. D'Alembert'i huvi teaduse saavutuste vastu (sealhulgas matemaatika vastu) püsis ka siis, kui ta haiguse tõttu enam ei olnud võimeline töötama.

Jean le Rond d'Alembert suri 29. oktoobril 1783. a. Ka elu viimastel aastatel säilitas ta huumorimeele ja optimismi. Kirjast Lagrange'ile loeme: «Pea on mul muutunud tööks peaaegu kõlbmatuks, kuigi muidu tervisega pole asjad halvad. Kirjutage mulle ometi, palun, midagi oma töödest ja oma tegudest. Minuga on nagu vana nautlejaga, kes ise ei kannata enam midagi, kuid kellele teeb siiski rõõmu näha teisi söömas.»

Matemaatiline põnevaja

KIRI «MATEMAATIKA JA TEGELIKKUSE» AUTORILE[1]

Lugupeetud sm. Kisseljova.

Lugesin äsja läbi Teie raamatu «Matemaatika ja tegelikkus». Pean aga tunnistama, et ma kohe mitte põrmugi ei ole Teiega (ja paljude Teie mõttekaaslastega) päri selles, et matemaatika uurib tegelikkust, et vastupidine seisukoht on tingimata idealistlik jms. Pealegi Te, nagu ma aru sain, pooldate ka Leibnizi arvamust sellest, et matemaatika uurib kõike, mida meie kujutluses on võimalik täpselt määratleda. (Imetlen Leibnizi talenti juba ainuüksi selle määratluse eest!)

Kuidas seda aga mõista? Kõik, mida meil õnnestub täpselt määratleda oma kujutluses, muutub automaatselt «tegelikkuse kvantitatiivseteks suheteks ja ruumilisteks vormideks» (Engels). Kas see on siis materialism? Minu arvates on Leibnizi ja Engelsi poolt antud matemaatika määratlused hoopiski erinevad, vasturääkivad asjad.

Tegelike nähtuste vahel valitsevad ka tegelikud ja seega lõpmatult mitmekesised suhted (mis omakorda jällegi osutuvad tegelikeks nähtusteks) ja me võime kõnelda ainult kvantitatiivsetest aspektidest (mida on lõpmatult palju) nendes suhetes. Kui me aga mõtteliselt eraldame mõned nendest «aspektidest» kogu muust tegelikkusest, arendame nende alusel keerulise puhtformaalloogilise teooria (hoopiski unustades siinjuures sellised mõisted nagu «katse», «praktika» jms., millega matemaatika, nagu teada, ei tegele), siis pole see mitte tegelikkuse, vaid parimal juhul ainult tegelikkuse matemaatilise mudeli uurimine. Küsimus sellest, kas uuritav mudel aga ka vastab tegelikkusele — mis on keskael kohal tegelikkust uurivates ja siinjuures küllaltki sageli ka matemaatikat kasutavates teadustes — põhimõtteliselt hoopiski ei huvita matemaatikut. Teda huvitab ainult saadud tulemuste formaalloogiline vasturääkimatus. (Kui uurime aga meie kujutluses täpselt määratletavaid objekte, on selline vasturääkimatus täiesti saavutatav.)

Näiteks, kui me mõne kolmnurga sisenurkade summa tegelikul mõõtmisel saaksime tulemuse, mis erineb π-st tunduvalt rohkem, kui seda lubaks võimalik mõõtmisviga, ei tooks see kaasa mingeid muutusi Eukleidese geomeetrias. Saadud tulemus näitaks meile ainult seda, et paralleelselt Eukleidese geomeetriaga on nähtavasti võimalik ka teistsuguste geomeetriate olemasolu (mis teatavasti ka nii on). Igasugusele füüsikalisele teooriale näiteks oleks aga selline katseandmete ja teoreetiliste järelduste vastuolu peaaegu et surmahoobiks. Vähemalt sunniks see teooria olulisele muutmisele.

Matemaatika piirdub formaalloogilise vasturääkimatusega, see ei ole aga kaugeltki sama mis vastavus tegelikkusele. Seega on matemaatiline tõde ja «tegelik» (s. t. filosoofilises mõttes) tõde hoopiski erinevad mõisted. Ja kuidas võib siis ütelda, et teadus, mis lõppeks ei seagi oma eesmärgiks «tegeliku» tõe väljaselgitamist, uurib tegelikkust!

Tegelikkuse matemaatiline mudel ei ole seesama mis tegelikkus. Kuidas võib küll patustada selle elementaarse tõe vastu ja — veel enam — nimetada seda (ja ainult seda) materialismiks?! Tõsi, tegelikkuse mudelite uurimisega tegelevad kõik tegelikkust uurivad teadused, kuid nad ei piirdu vaid asja selle ühe küljega.

---

[1] Jutt on raamatust: Н. А. Киселева. Математика и действительность. Изд. Московского университета, 1967 (124 lk.). Järgnev tekst on ebaolulisel määral muudetud tõlge raamatu autorile saadetud kirjast. Mõningaid siin arendatavatest mõtetest on varem avaldatud artiklites: R. Mullari. Matemaatika ja tegelikkus. — Matemaatika ja kaasaeg, VIII, lk. 3—11: Р. Муллари., И. Саарнийт. Производство — управление — ЭВМ. Труды ВЦ ТГУ, № 11, 1967, lk. 3—20.

Matemaatikat võib ainult kasutada tegelikkuse uurimisel, ja seda tingimusel, et vastavad matemaatilised mudelid on küllalt «sarnased» vastavatele tegelikkuse nähtustele. See sarnasus ei ole aga hoopiski mitte matemaatiline probleem.

Kuid matemaatika iseenesest ju üldse ei nõua, et tema poolt uuritavatel objektidel oleksid mingid prototüübid tegelikkuses. Et viimane aga küllaltki sageli tõesti nii on, siis selle põhjused ei tulene matemaatikast endast ja on matemaatika suhtes järelikult välised, juhuslikud, mittemääravad.

Nimetaksin mõningaid sellistest põhjustest. Arvatavasti pidas Engels oma matemaatika määratluses silmas just midagi sellist. Omal ajal tuli ju võidelda isegi selliste (kuigi matemaatika suhtes väliste) matemaatika ja tegelikkuse vaheliste suhete tunnustamise eest. (Tuleb ikkagi arvestada konkreetseid ajaloolisi tingimusi!)

1. Meie fantaasia toitub oma juurtega tegelikkusest. Me lihtsalt ei suuda endale ette kujutada sellist maitset, lõhna, värvi vms., mida me kunagi ei ole tajunud (samuti, näiteks: sirge — valguskiir, tasand — veepind). Kuid sellest hoolimata suudab meie fantaasia kombineerida juba tuntud «elementidest» selliseid objekte, millega me ei ole kokku puutunud või milliseid üldse ei olegi võimalik tegelikkuses kohata (näiteks kentaurid, kuradid, inglid) (aga sellepärast ta ju ongi fantaasia!).

Loomulikult kehtib see ka meie kujutluses täpselt määratletavate objektide kohta. Kuid lõppeks ei ole see ju matemaatika, vaid psühholoogia probleem.

2. Oleme elavad, ühiskondlikud olendid. Elu seab igal sammul meie ette hulga tegelikkuse probleeme. Ja on täiesti loomulik, et me suuname (ja üldiselt isegi oleme sunnitud suunama!) oma teaduslikke otsinguid just nende probleemide lahendamisele. Matemaatikas avaldub see püüdes moodustada uuritavad matemaatilised objektid võimalikult «sarnastena» meid huvitavate tegelike objektidega. Kuid see ei ole matemaatika probleem.

3. Matemaatikas uuritavad objektid on üpris sageli tegelikkuse objektidele «sarnased» ka täiesti juhuslikult. On ju maailm lõpmatult mitmekesine ja seesmiselt ühtne.

Nii et minu arvates ei saa kohe mitte kuidagi ütelda, et kui matemaatika ei uuri tegelikkust, siis tal järelikult ei ole viimasega mitte mingit sidet, et siis ta on midagi täiesti omaette, iseseisvat, ainult «puhta» mõistuse looming jms. Ja kuna matemaatiline tõe mõiste erineb filosoofilisest, ei ole siin ka selles mõttes mingit alust kõnelda Kanti aprioorsetest tõdedest (mida ma tõepoolest nimetaksin idealismiks).

Ma kirjutasin Teile selle kirja põhiliselt sellepärast, et pean Teie poolt levitatavaid vaateid matemaatika ja tegelikkuse vastastikustest suhetest kahjulikeks. Eriti teravalt annab see end tunda matemaatika ja majandusteaduse piirialal. Siin sajad või isegi tuhanded teadlased, raisates oma annet ja riigi raha, koostavad ja uurivad kohati selliseid majanduse matemaatilisi mudeleid, et oi-oi-oi! Kuid kuna majandus on meie elu materiaalne baas ja matemaatika uurimine on (Teie ja paljude teiste arvates) tegelikkuse uurimine, siis üldiselt peetakse seda kõike väga kasulikuks asjaks. Vale!

Teie ideeline vastane

R. Mullari

SUMMEERUVUSTEOORIA-ALANE SUVEKOOL ZARETŠNÕIS

G. Kangro, A. Melentsov

Suvekooli tüüpi kokkutulekud on võitnud teaduslike töötajate, eriti aga kõrgemate koolide õppejõudude seas üldise poolehoiu. Esimene üleliiduline summeeruvusteooria küsimustele pühendatud suvekool toimus 1965. a. augustis Käärikul TRÜ matemaatilise analüüsi kateedri algatusel.[1] Uraali ülikooli funktsiooniteooria kateedri

[1] Matemaatika ja kaasaeg, IX, lk. 101—103.

poolt organiseeriti teine üleliiduline summeeruvusteooria-alane suvekool Sverdlovskist 60 km kaugusel asuvas Zaretšnõi asulas (Bebjarski raj.) 11.—21. juulini 1967. Suvekooli tööst võttis osa 67 matemaatikut, neist 6 doktorit ja professorit (N. Davõdov, A. Dževašeišvili, M. Subhankulov, P. Sujetin, M. Timan, G. Kangro) ning 16 teaduste kandidaati. Osavõtjaid oli 11-st linnast, sealhulgas 36 Sverdlovskist, 12 Tartust, 8 Dnepropetrovskist.

Suvekooli eesmärgiks oli osavõtjate tutvustamine summeeruvusteooria kõige uuemate tulemuste ja aktuaalsemate suundadega. Suvekooli ettekanded kandsid üldiselt ülevaateloengute iseloomu. Kogusummas kuulati ära 18 ettekannet kestusega 1 kuni 4 tundi. Neist 8 ettekannet käsitlesid trigonomeetriliste ja üldiste ortogonaalridadega seotud küsimusi, 7 ettekannet oli pühendatud summeeruvusteooria üldistele küsimustele, 3 ettekannet aga puudutasid summeeruvusteooria naaberala — funktsioonide lähendamise teooria küsimusi. Tartu matemaatikud esitasid suvekoolis 4 ettekannet:

1. Fourier' kordajate omaduste uurimine (van.-õp. M. Tõnnov).

2. Suunatud pered ja nende rakendusi summeeruvusteoorias (dots. E. Reimers).

3. Summeerimismenetluste perfektsushulgad (dots. E. Jürimäe).

4. Harilike ja kahekordsete ridade summeeruvustegurite vahelisest seosest (van.-õp. H. Espenberg).

M. Tõnnov andis oma ettekandes üldise lahenduse küsimusele sellest, missugusesse klassi kuulub Fourier' rida, mille kordajad on teatava klassi summeeruvustegurid või saadakse mingi tuntud klassi Fourier' rea kordajatest nende korrutamisel vastavalt teatava klassi summeeruvusteguritega. M. Tõnnovi teemaga lähedalt seotud oli Kabardiini ANSV ülikooli dotsendi M. Skvortsova ettekanne «Fourier' ridade multiplikaatorid», mis andis hea ülevaate Fourier' ridade multiplikaatorite probleemist tervikuna. E. Reimersi ettekandes oli pearõhk pandud suunatud perede rakendustele ettekandja poolt väljatöötatud kontinuaalsete summeerimismenetluste teooria käsitlemisel. Uraali ülikooli dotsent A. Melentsov, käsitledes oma ettekandes «Summeeruvusteooria topoloogilised alused» loomulikku topoloogiat alumiste kolmnurksete maatriksite ruumis, võttis E. Reimersi ettekande mõjul aluseks jadade asemel suunatud pered Banachi ruumis. Et E. Jürimäe ei saanud suvekooli tööst osa võtta, siis esitas tema ettekande dots. S. Baron. Selles ettekandes anti täielik ülevaade maatriksmenetluste perfektsusega seotud küsimustest koos E. Jürimäe poolt saadud uute tulemustega. H. Espenberg näitas, kuidas summeeruvustegureid määravaist tingimustest ühekordsete ridade korral saab leida vastavad tingimused kahekordsete ridade jaoks, eriti Euler-Knoppi menetluse puhul.

Ettekanded toimusid enamikus vaid hommikupoolsetel tundidel, mõnedel päevadel aga peeti ka pärastlõunaseid ettekandeid kestusega kaks tundi. Vaba aja veetmiseks oli kasutada plaaž, paadisadam jms. Huvitavad olid ekskursioonid Sverdlovski geoloogiamuuseumi ja Belojarski aatomielektrijaama.

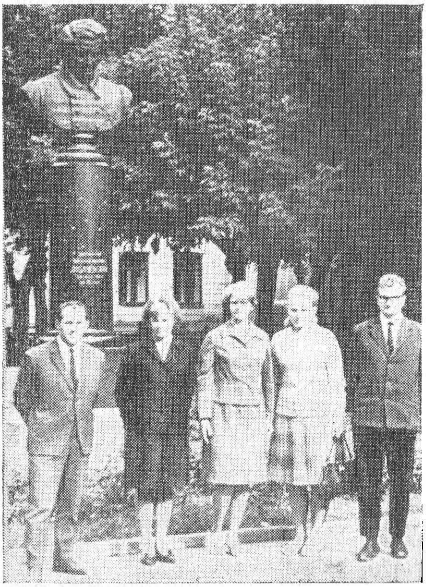
Järjekordne summeeruvusteooria-alane suvekool otsustati korraldada Kabardiini ANSV pealinnas Naltšikis 1968. a. septembris.

KÜLALISTENA LOBATŠEVSKI PAIKADES

R. Kolde

Möödunud sügisel võttis rühm TRÜ matemaatikuid osa III üleliidulisest geomeetria konverentsist 14.—19. septembrini Kaasani V. I. Uljanov-Lenini nimelises Riiklikus Ülikoolis.

Kaasani ülikooliga, mis on Tartu ülikooliga peaaegu üheealine — rajatud 1804. a. — on seotud paljude kuulsate teadlaste ja kultuuritegelaste õpingute- ja tööaastad. Nimetagem siin matemaatikuid N. I. Lobatševskit (kelle sünnist k. a. 1. detsembril möödub 175 aastat), N. G. Tšebotarjovi, P. I. Širokovit; keemikut A. M. Butlerovi; meedikuid V. I. Behterevi ja P. F. Lesgafti; kirjanikke G. R. Deržavinit ja L. N. Tolstoid. Kaasani ülikooli õigusteaduskonnas alustas 1887. a. õpinguid V. I. Lenin, kuid juba esimese semestri lõpul heideti ta revolutsioonilisest liikumisest osavõtu pärast ülikoolist välja ja pagendati; ülikooli diplomi sai V. I. Lenin eksternina Peterburi ülikoolist 1891. a.



Rühm Tartu matemaatikuid Kaasanis N. I. Lobatševski mälestussamba ees. Vasakult: Ü. Lumiste, L. Tuulmets, K. Riives, H. Kilp ja A. Parring (R. Kolde foto).

Kõigepealt kajastus see muidugi konverentsi sisulises töös. Paljud ettekanded, mõned otseselt, enamus aga kaudselt, tuginesid nendele ideedele, mis on geomeetriasse toonud N. I. Lobatševski ja tema töö paljud jätkajad, eriti just Kaasani geomeetria kooli esindajad.

Juba konverentsi avaettekandes «Geomeetria arengust Kaasanis 50 aasta jooksul» rõhutas professor A. P. Norden: «Ei saa rääkida geomeetria arengust Kaasanis, alustamata N. I. Lobatševskist.» Seetõttu on arusaadav, et mitmed konverentsi üritused olid tihedalt seotud N. I. Lobatševski nimega. Konverentsi raames toimus ühine pärjapanek N. I. Lobatševski hauale, samuti ekskursioon ülikooli hoonetesse, mis on põhiliselt ehitatud Lobatševski rektoriks olemise ajal ja tema otsesel eestvedamisel. Väga populaarne oli fotografeerimine ülikooli vastas oleva N. I. Lobatševski mälestussamba ees.

Konverents, mis oli pühendatud Suure Sotsialistliku Oktoobrirevolutsiooni 50. aastapäevale, oli nõukogude geomeetria tõeliseks foorumiks. Esindatud olid kõik tähtsamad geomeetria keskused nagu Moskva, Kiiev, Harkov, Tbilisi, Tomsk, Vilnius jne. Samuti oli arvukalt esindajaid väiksematest keskustest. Üldse võttis konverentsi tööst osa 352 delegaati, nende hulgas 16 külalist Euroopa rahvademokraatiamaadest.

Hommikuti toimusid konverentsil plenaaristungid, kus kuulati ära 33 ettekannet, sealhulgas ka dotsent Ülo Lumiste ettekanne «Indutseeritud seostustest tasandiparvede diferentsiaalgeomeetrias.»

Õhtused istungid peeti kolmes sektsioonis. Esimeses neist — diferentsiaalgeomeetria sektsioonis — esinesid ka Tartu geomeetrid Leida Tuulmets, Kaarin Riives ja Helgi Kilp. Teises sektsioonis käsitleti mitteeukleidiliste geomeetriate küsimusi ning kolmandas relatiivsusteooria küsimusi. Viimase sektsiooni tööst võttis osa ka arvukalt füüsikuid, mistõttu see kongress kujunes märkimisväärseks üleliiduliseks ürituseks ka relatiivsusteooria esindajatele.

Üldse kuulati kolmes sektsioonis ja nende alasektsioonides üle 130 ettekande, millele lisandusid veel ülevaateettekanded ligi 50 töö kohta. Seetõttu oli konverentsi päevakava väga pingeline. Otsuses tehti ettepanek järgmine IV üleliiduline geomeetriakonverents kokku kutsuda 1969. a. sügisel Tbilisis ja suurendada konverentsipäevade arvu seniselt neljalt kuuele.

KOORIKUTE TEOORIA SPETSIALISTID TARTUS

M. Kutser

Õhukeseseinalised konstruktsioonid leiavad tänapäeval laialdast kasutamist, eriti lennuki- ja raketiehituses. Nende töötingimusi iseloomustavad sageli suured kiiresti muutuvad koormised ning kõrged temperatuurid. Seepärast on loomulik, et teadlaste tähelepanu köidavad dünaamikaprobleemid. Praktiline vajadus leida kriteeriumid dünaamilise stabiilsuse ja purunematuse tagamiseks nõuab koorikute deformeerumist kirjeldavate matemaatiliste mudelite pidevat täpsustamist. Tuleb arvestada faktoreid, mille mõju lihtsamais ülesandeis võis hüljata. Selle tagajärjel komplitseerub ülesanne kiiresti, mis omakorda nõuab uusi arvutusmeetodeid. Mainitud probleemide valdkonnas töötab ka grupp eesti teadlasi akadeemik N. Alumäe juhendamisel.

ENSV Teaduste Akadeemia, TRÜ ja TPI initsiatiivil organiseeriti 28. juunist kuni 3. juulini Tartus üleliiduline sümpoosion koorikute dünaamiliste üleminekuprotsesside alal. Viie päeva jooksul kuulati ära 31 teaduslikku ettekannet, kusjuures igal päeval käsitleti üht teemat. Arutlusel oli järgnev temaatika:

1. Üleminekuprotsesside analüüs elastsusteooria võrrandite integreerimise teel.
2. Ligikaudsete arvutusmeetodite kasutusalad ja ligikaudsete arvutusmudelite loomine.
3. Üleminekuprotsesside analüüs ligikaudsete lineaarsete võrrandite baasil.
4. Stabiilsuseprobleem ja üleminekuprotsesside analüüs mittelineaarsete võrrandite baasil.
5. Komplitseerivate faktorite arvestamine üleminekuprotsesside analüüsil.

Teoreetiliste tööde kõrval esitati ka väga huvitavate eksperimentide tulemusi.

Tartusse oli kogunenud koorikute ja plaatide uurijaid kogu Nõukogude Liidust. Esindatud oli 16 linna. Arvukamad delegatsioonid olid Moskvast, Kiievist, Leningradist ja Tallinnast. Ligemale saja osavõtja hulgas oli 15 teaduste doktorit ja 40 kandidaati. Huvi sümpoosioni töö vastu näitas ka asjaolu, et sellest võttis osa rida nimekaid Nõukogude Liidu selle ala eriteadlasi, kellest võiks mainida Ukraina NSV TA akadeemikut G. N. Savinit Kiievist ja Usbeki NSV TA akadeemikut H. A. Rahmatulinit Moskvast, koorikute teooria fundamentaalsete uurimuste autorit professor A. L. Goldenveiserit, rahvusvaheliselt tunnustatud eriteadlasi koorikute stabiilsuse alal professoreid A. S. Volmiri ja V. V. Bolotinit.

Arvuliselt domineerisid sümpoosionil siiski noorema generatsiooni teadlased. Enam kui pooled osavõtjaist olid nooremad kui 35 aastat. Teaduslike uurimisasutuste kõrval olid arvukalt esindatud ka mitmed projekteerimisorganisatsioonid, kes on otseselt huvitatud uurimistöö tulemuste rakendamisest oma töös.

Meie vabariigi teadlastest esinesid ettekannetega Küberneetika Instituudi töötajad füüsika-matemaatikadoktor L. Ainola elastsete koorikute Timošenko tüüpi võrrandeist ja tehnikadoktor U. Nigul ligikaudsete teooriate ja meetodite kasutamisest; TPI dotsent L. Poverus käsitles elastsete lainete levikut silindrilises koorikus mittelineaarse teooria baasil ning Küberneetika Instituudi noorem teaduslik töötaja N. Veksler üleminekuprotsesse telgsümmeetrilistes koorikutes.

Istungid toimusid TRÜ aulas ja auditooriumes ning osalt ka Tõravere observatooriumis. Lisaks päeva esimesel poolel toimunud istungitele organiseeriti mitmeid väljasõite (Pühajärvele, Käärikule, Piirissaarele). Neil valitsenud sundimatu õhkkond lõi soodsad võimalused isiklike sidemete sõlmimiseks ning viljakaiks vaidlusiks väiksemas ringis.

Sümpoosion andis ülevaate koorikute deformatsiooni üleminekuprotsesside alal saavutatust, samuti selgusid probleemid, mille lahendamine nõuab edasisi uuringuid.

Paljude sümpoosionist osavõtnud teadlaste sõnavõttudest lõppistungil jäi kõlama positiivne hinnang Tartus toimunud sümpoosioni teaduslikule kui ka organisatsioonilisele küljele.

MATEMAATIKUD TULEVAD MATEMAATIKAKOOLIST

E. Toom

Matemaatika areneb üha kiirenevas tempos nagu iga teinegi teadus. Matemaatika mõju- ja tööpiirkond laieneb järjest mittematemaatilisematele aladele, suureneb vajadus kvalifitseeritud matemaatikute järele ning teiste alade spetsialistid vajavad senisest põhjalikumat matemaatikaalast ettevalmistust. Seega peaksid tõusma nii ülikooli produktsiooni kvaliteet kui ka kvantiteet. Aga kohustusliku (ja vajaliku) kvantiteedi tõttu kipuvad sisseastumiskonkursid kujunema komplekteerimiseks ning kvaliteedi osas tuleb ülikooli esimestel kursustel sageli koolitarkust üle rehitseda. Nimetatud kitsaskoha kiiremale likvideerimisele püüabki kaasa aidata Tartus loodud kaugõppe matemaatikakool.

Suurim kaugõppe matemaatikakool on loodud Vene NFSV-s ja töötab M. V. Lomonossovi nimelise Moskva Riikliku Ülikooli juures. Kool rajati Vene NFSV haridusministri 20. juuni 1964. a. käskkirjaga ja allutati vahetult koolide peavalitsusele. Matemaatikakooli kümneliikmelise administratiivkoosseisu (direktor, õppealajuhataja, metoodikud jne.) töö tasustatakse haridusministeeriumi poolt nagu tavalises üldhariduslikus koolis.

Matemaatikakooli Õpetatud Nõukogu tööd juhivad MRÜ professorid, NSVL TA kirjavahetajaliige I. M. Gelfand ja A. A. Kirillov.

Õpilaste tööde parandamine, retsenseerimine ja hindamine tehakse peamiselt ühiskondlikus korras. See on umbes viiesajale üliõpilasele alaliseks komsomoliülesandeks.

Tartu matemaatikud hakkasid oma kooli organiseerima 1965. a. sügisel dots. Ü. Kaasiku ja J. Gabovitši eestvõttel. Kuulutati välja konkurss ning 1. jaanuaril 1966 alustas ühiskondlikel alustel tööd Tartu Mittestatsionaarne Matemaatikakool (MMK). Aasta lõpuks leidis ENSV Haridusministeerium võimaluse eraldada koolile direktori ja kahe kantseleitöötaja ametikohad ning väikese eelarve, 6. veebruarist 1967. a. töötab MMK haridusministeeriumi koolivälise asutusena. Õppetöö juhendamine, tööde kontrollimine jne. on endiselt TRÜ õppejõudude ja üliõpilaste ühiskondlikuks hooleks.

Tartu MMK ühiskondliku nõukogu koosseis 1967/68. õppeaastal on järgmine: esimees — J. Gabovitš (NSVL TA Majandusmatemaatika Keskinstituudi Eesti osakonna juhtiv insener); esimehe asetäitja — M. Kilp (TRÜ algebra ja geomeetria kateedri vanemõpetaja); liikmed — O. Prinits (TRÜ matemaatika õpetamise metoodika kateedri juhataja), K. Ariva (TRÜ matemaatika õpetamise metoodika kateedri vanemõpetaja), R. Jürgenson (TRÜ arvutusmatemaatika kateedri dotsendi kohustetäitja), R. Kolde (TRÜ algebra ja geomeetria kateedri aspirant), E. Kolk, (TRÜ arvutuskeskuse noorem teaduslik töötaja), K. Kruse (Tartu I Keskkooli matemaatikaõpetaja) ja E. Toom (Tartu Mittestatsionaarse Matemaatikakooli direktor).

Vene õppekeelega koolide osas töötab Tartu MMK Moskva filiaalina. See tähendab, et tööst võtavad osa 9.—10. klasside õpilased, aluseks on Moskva ülikooli MMK programm ja nende õppematerjalid, mida saadetakse meile tavaliselt piisavas koguses. Kohapeal saadame materjalid laiali, parandame õpilaste kontrolltööd ja esitame Moskvasse ainult tulemused.

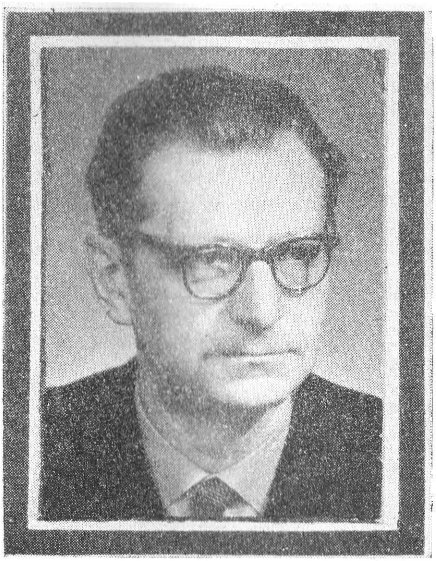
Eesti koolide osas on Tartu MMK iseseisev kooliväline õppeasutus, mis haarab 9.—10. klasside matemaatikahuvilisi. Eeskujuks on muidugi staažikamate matemaatikakoolide kogemused, nende paremad õppematerjalid on tõlgitud ka eesti keelde, kuid tunduva osa brošüüre (seeria «Mittestatsionaarne Matemaatikakool», mida on seni ilmunud juba 15 numbrit) on kirjutanud TRÜ õppejõud ja vabariigi agaramad matemaatikaõpetajad. Tematika haarab keskkooli programmi nii sügavuti — võrratused, absoluutväärtused, funktsioonid ja graafikud jne. kui ka laiuti ning väljub mõneti tavalistest raamidest — loogiliste keerdülesannete lahendamine, tõenäosusteooria, ekstreemumülesanded jne.

MMK õpilased töötavad kas iseseisvalt või rühmades (igaühes 3—10 õpilast). Seisuga 1. november 1967. a. oli Tartu MMK nimekirjas 499 (647) õpilast (esimene arv näitab n.-ö. juriidilisi õpilasi, sulgudes on antud kooli üldine hõlmavus — iga rühm arvestatakse mitte ühena, vaid faktilise liikmete arvuga). Õppekeele ja klasside järgi oli jaotus järgmine: eesti koolid — 9. kl. 147 (235); 10. kl. 68 (92); 11. kl. 74 (90); kokku 289 (417) õpilast; vene koolid — 9. kl. 158 (178); 10. kl. 52 (52); kokku 210 (230) õpilast.

1967. a. kevadel lõpetas Tartu MMK esimene lend — 63 eesti ja 31 vene koolide õpilast, kes samal kevadel lõpetasid ka keskkooli. Neist enamus jätkab õppimist TRÜ-s või TPI-s, paar õpilast ka TPedI-s ning Leningradi ja Moskva kõrgemates õppeasutustes. MMK lõpetajad, praegused TRÜ Matemaatikateaduskonna I kursuse üliõpilased, on juba uuesti lülitunud MMK töösse, kuid nüüd juba kõrgemal tasemel — MMK uute õpilaste tööde kontrollijatena.

TRÜ Matemaatikateaduskonna nõukogus 13. oktoobril 1967 arutati ühe küsimusena ka MMK töö praegust olukorda ja selle arenguperspektiive. Üksmeelselt kiideti heaks MMK põhieesmärgid — äratada noortes huvi matemaatika vastu, avastada andekaid õpilasi ja aidata neid iseseisval enesetäiendamisel, et sellega ette valmistada matemaatikateaduskonna järelkasvu. Kuid puhtalt matemaatikuteks läheb ikkagi vaid üks osa paremaid. Matemaatikakooli mõju peab olema ja ongi tunduvalt laiem — eesmärgiks on tõsta õpilaste üldist matemaatilist kultuuri ja arendada mõtlemisvõimet (arvestades, et matemaatika osa teiste õppeainete ja teaduste arengus järjest suureneb), populariseerida matemaatikat, aga ühtlasi ka aidata selekteerida — näidata liigse populariseerimise «ohvritele», et lähemal ja konkreetsemal kokkupuutel matemaatika probleemidega võib nende huvi ja vaimustus peagi oma paleuselt ära pöörduda. Ja sündigu see ärkamine parem juba keskkoolis kui alles ülikooli viimastel kursustel!

Kroonika



DOTSENT O. RÜNGA MÄLESTUSEKS

19. jaanuaril 1968 suri ootamatult 54. eluaastal Tallinna Polütehnilise Instituudi dotsent, tehnikateaduste kandidaat Ott Rünk.

Ott Jaani p. Rünk sündis 23. juulil 1914. aastal Tallinnas töölisperekonnas. Pärast Tallinna I reaalkooli lõpetamist jätkas ta õpinguid Tartu ülikoolis, mille matemaatikaosakonna ta lõpetas 1938. aastal. Juba üliõpilaspõlves hakkas O. Rünk endale ise ülalpidamist teenima tunniandmisega. Silmapaistva üliõpilasena võeti ta 1937. aastal tööle ajutise abijõuna Tartu Ülikooli Matemaatikainstituuti.

Pärast ülikooli lõpetamist töötas O. Rünk kuni 1944. aastani õpetajana mitmes Tallinna keskkoolis. 1944. aasta sügisel asus O. Rünk tööle TPI-sse, kus algas ka tema pedagoogilise ja teadusliku tegevuse kõige viljakam periood. Ta pidas loenguid kujutava geomeetria alal, oli tegevuses õpikute väljaandmisega, tegeles intensiivselt mitmete kujutava geomeetria probleemide uurimisega jne. 1947. aastal usaldati talle graafika kateedri juhatamine. Sellel ametikohal oli ta kuni 1952. aastani, mil haigestus raskekujuliselt tuberkuloosi ning oli sunnitud kateedri juhatamisest ja ajutiselt ka õppetööst loobuma.

Pärast tervisliku seisukorra paranemist jätkas O. Rünk teaduslikku ja pedagoogilist tööd ning 1956. aastal valmis tal prof. A. Humala juhendamisel väitekiri «Perspektiivaksonomeetria fundamentaalülesanne», mille kaitsmise järele talle anti tehnikateaduste kandidaadi kraad. Kõrgema Atestatsiooni Komisjoni 3. mai 1961. a. otsusega omistati talle ka dotsendi kutse.

Dotsent O. Rünk oli eeskujuks kõigepealt oma suure töökusega. Tema trükis avaldatud tööde nimekiri sisaldab 5 õpikut, 2 ülesannete kogu ja 3 teaduslikku tööd kujutava geomeetria, joonestamise ja matemaatika alal. Peale selle on tema sulest ilmunud ajakirjades ja ajalehtedes terve rida artikleid, mis käsitlevad õppetööd, terminoloogiat ja muid küsimusi. Suurem osa tema varajasemaid uurimusi kujutava geomeetria alal on jäänud trükis avaldamata. Kahe õpiku väljaandmist ei lasknud aga lõpule viia varajane surm.

O. Rünk võttis aktiivselt osa ka ühiskondlikust elust. Ta oli Eesti NSV Haridusministeeriumi vabariikliku matemaatikakomisjoni ja TPI metoodikakomisjoni kauaaegne liige.

Dots. O. Rünga isikus kaotasime suurepärase pedagoogi, kelle loengud kujutava geomeetria alal toimusid alati täisauditooriumi ees. Temalt on teadmisi saanud tuhanded üliõpilased, kes on lõpetanud TPI sõjajärgseil aastail. Dots. O. Rünka tunneb tema õpikute järgi ka suurem osa Eesti NSV matemaatika- ja joonestamisõpetajatest.

Kõigil neil, kes tundsid O. Rünka, jääb temast helge mälestus kui töökast, sõbralikust ja alati abivalmis inimesest.

N. Paluver

VIKTOR ARAK

In memoriam

1967. aasta viimasel päeval lahkus surma tõttu Tallinna Pedagoogilise Instiuudi perest ootamatult füüsika-matemaatika kateedri vanemõpetaja Viktor **Arak.** Lahkunu sündis Tartus 8. veebr. 1907 kantseleiametniku pojana, lõpetas 1925. a. Tartu Poeg-

laste Reaalgümnaasiumi, astudes samal aastal Tartu ülikooli matemaatika-loodusteaduskonda õppima matemaatika erialal. Lõpetanud 1930. a. ülikooli, omandas ta ühtlasi keskkooli matemaatika, füüsika ja kosmograafia õpetaja kutse. Aastatel 1930—1942 töötas ta õpetajana Paldiski, Rapla ja Tallinna keskkoolides. 1942. a. kuni 1948. a. oli ta Tallinna Tehnikumi (praegune Tallinna Polütehnikum) füüsika ja matemaatika õpetaja ning direktori asetäitja õppealal, seejärel 1948. a. kuni 1952. a. töötas Haridusministeeriumis koolide inspektorina kõrgemate ja kesk-eriõppeasutuste alal. Alates 1952. a. kuni surmani töötas Viktor Arak Tallinna Pedagoogilise Instituudi matemaatika kateedri vanemõpetajana, lugedes matemaatilise analüüsi, kõrgema algebra ja kõrgema geomeetria kursusi. Viimastel aastatel tegeles ta programmeeritud õpetamise küsimustega.

Viktor Arak on koostanud järgmised metoodilised tööd:

1) Stereomeetrilised konstruktsioonülesanded.

2) Analüütilise geomeetria elemendid keskkoolis.

3) Integraalarvutuse rakendusi stereomeetriakursuses.

Hoolast ja kohusetundlikku töömeest ning sõbralikku kolleegi mälestavad instituudi matemaatika eriala üliõpilased ja kolleegid.

A. Vihman

UUSI TEADUSTE KANDIDAATE

19. oktoobril 1967 kaitses oma väitekirja «Ökonoomsed ühe- ja kahekordsete integraalide arvutamise algoritmid ja programmid» Eesti NSV TA Küberneetika Instituudi noorem teaduslik töötaja **Reet Pukk.** Väitekirjas

vaadeldakse integreerimisalgoritme, mis arvutavad integraali väärtuse etteantud täpsusega ja kasutavad selleks võimalikult vähe pöördumisi integrandi poole. Tööd juhendas prof. A. Kronrod, oponeerisid prof. J. Landis Moskvast ja dots. L. Võhandu. Eesti NSV TA füüsika-matemaatika ja tehnikateaduste nõukogu otsustas R. Pukile omistada füüsika-matemaatikakandidaadi kraadi.

Reet Pukk on sündinud Tallinnas 7. detsembril 1934. Ta lõpetas 1959. a. Moskva Riikliku Ülikooli matemaatikaosakonna. Aastail 1959—1960 töötas R. Pukk ENSV TA Energeetika Instituudis, alates 1960. aastast aga ENSV TA Küberneetika Instituudis. Aastail 1962—1965 oli R. Pukk sihtaspirantuuris Moskva Teoreetilise ja Eksperimentaalse Füüsika Instituudis, kus nimetatud väitekiri valmiski.

*

23. novembril 1967 kaitses oma väitekirja «Mõningad ekstreemumülesannete lahendamise meetodid ja nende kasutamine optimaalse juhtimise alal» ENSV TA Küberneetika Instituudi noorem teaduslik töötaja **Ernst Raik.** Tööd juhendas prof. A. Ljotov NSVL TA Automaatika ja Telemehhaanika Instituudist, oponeerisid prof. G. Kangro ja dots. Ü. Kaasik.

Väitekirjas vaadeldakse iteratsioonimeetodeid mingi punkti leidmiseks kumerate kinniste hulkade lõikest ja mittelineaarsete planeerimisülesannete lahendamiseks Hilberti ruumis. Uuritakse erinevate meetodite kasutamisel saadud jadade koonduvust. Väitekirja viimases osas on näidatud, et töös esitatud tulemusi saab kasutada optimaalse juhtimise ülesannete lahendamisel, kui sihifunktsionaal on antud integraalina üle lõpliku ajavahemiku.

ENSV TA füüsika-matemaatika ja tehnikateaduste nõukogu omistas E. Raikile füüsika-matemaatikakandidaadi kraadi.

Ernst Raik on sündinud Kingissepas (Leningradi obl.) 24. veebruaril 1938. Ta lõpetas 1956. a. Rakvere I Keskkooli, kus tema matemaatikaõpetajaks oli A. Paju. Hiljem jätkas E. Raik õpinguid Tallinna Polütehnilises Instituudis ja Moskva Energeetika Instituudis, mille lõpetas 1962. aastal. Kõrgema matemaatilise hariduse omandas ta Moskva Riikliku Ülikooli kaugõppeteaduskonnas, mille lõpetas 1966. aastal.

*

19. oktoobril 1967. a. kaitses Leningradis Herzeni-nimelise Pedagoogilise Instituudi Matemaatikateaduskonna nõukogu istungil oma väitekirja «Järjestatud poolrühmad» NSVL TA Majandusmatemaatika Keskinstituudi Eesti osakonna juhtiv insener **Jevgeni Gabovitš.** Ametlikeks oponentideks olid Leningradi matemaatikud prof. J. S. Ljapin ning dots. I. S. Ponisovski. Nõukogu omistas J. Gabovitšile füüsika-matemaatikakandidaadi teadusliku kraadi.

J. Gabovitš sündis 30. augustil 1938 Tartus matemaatiku perekonnas, lõpetas 1956. a. Tartu IV Keskkooli ning 1962. a. TRÜ matemaatikaosakonna. Ta töötas ühe aasta TRÜ algebra ja geomeetria kateedri assistendina ning siirdus seejärel Moskva Riiklikku Ülikooli aspirantuuri, kus tema teaduslikuks juhendajaks oli prof. A. G. Kuroš. Katkestanud 1965. a. algul aspirantuuri, asus J. Gabovitš tööle Majandusmatemaatika Keskinstituudi Tartu laboratooriumi, olles ühtlasi TRÜ mittekoosseisuline õppejõud. Väitekiri «Järjestatud poolrühmad» valmis TRÜ dotsendi J. Hioni teaduslikul juhendamisel.

*

23. novembril 1967 kaitses oma väitekirja «Pöördkoorikute telgsümmeetrilise deformatsiooni üleminekuprotsessid» Eesti NSV TA Küberneetika Instituudi noorem teaduslik töötaja **Naum Veksler.** Tööd juhendas tehnikateaduste doktor Uno Nigul, oponeerisid füüsika-matemaatikateaduste doktor K. Tšernõh (Leningrad) ja füüsika-matemaatikateaduste kandidaat A. Tümanok.

Väitekirjas vaadeldakse nn. Timošenko tüüpi koorikute teooria baasil pöördkoorikute mittestatsionaarseid deformatsiooniprotsesse, mis tekivad kiiresti kasvavate või lühiajaliste dünaamiliste koormiste rakendamise tagajärjel. Uuritakse funktsioonide katkevust lainefrontidel ja koorikute käitumist lainefrontide ümbruses. Töös on tehtud mitmesuguste pöördkoorikute deformatsiooni mittestatsionaarsete protsesside numbriline analüüs.

Eesti NSV Füüsika-Tehnika- ja Matemaatikateaduste osakonna nõukogu otsustas N. Vekslerile omistada tehnikateaduste kandidaadi kraadi.

Naum Veksler on sündinud Kiievis 28. septembril 1937. Ta lõpetas 1955. a. Kiievi 136. Keskkooli ja 1961. a. Tallinna Polütehnilise Instituudi laevaehituse ja -remondi erialal. Aastail 1961—1963 töötas ta konstruktorina samal erialal ja 1963—1966 õppis aspirantuuris TA Küberneetika Instituudis, kus nimetatud väitekiri ka valmis.

ESIMENE LEND LÕPETAJAID TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI MATEMAATIKATEADUSKONNAST

Möödunud aasta detsembris andis uus teaduskond esimese lennu lõpetajaid. 22. ja 23. detsembril kaitsti riigieksami komisjoni ees järgmisi diplomitöid:

1. Ääremaa, Kuldev. Informatsiooni otsimise süsteemid generatiivse grammatika baasil. (Juhendaja dots. I. Kull.)

2. Ermus, Maie. Formaliseeritud keelest õigusnormide kirjeldamiseks. (Juhendaja dots. I. Kull.)

3. Lätt, Kaja. Veahinnangud faktoranalüüsis. (Juhendaja dots. kt. E. Tiit.)

4. Männik, Asta. Ühest tasandiliste graafide leidmise meetodist. (Juhendaja dots. L. Võhandu.)

5. Orlov, Viktor. Vektorväljad Pfaffi süsteemide teoorias. (Juhendaja dots. Ü. Lumiste.)

6. Pau, Reet. Võrkgraafiku kriitilise tee pikkuse hindamine kvantiilide meetodil. (Juhendaja asp. T. Veldre.)

7. Toding, Liina-Mai. Dispersiooni mõiste üldistamisest. (Juhendaja vanemõpetaja R. Tammeste.)

8. Laretei, Anne. Tauberi tüüpi tuumateoreemid. (Juhendaja prof. G. Kangro.)

9. Kranig, Anne. Ühest gradientmeetodist mitme muutuja funktsiooni ekstreemumi leidmiseks. (Juhendaja dots. G. Vainikko.)

10. Metsar, Elsa. Elektonarvuti «Minsk-2» kasutamine variatsioonmeetodite realiseerimiseks elastsusteooria dünaamikaülesannetes.» (Juhendaja füüs.-matem. dokt. L. Ainola.)

11. Mikli, Külli. Ühest klassifikatsioonimeetodist. (Juhendaja dots. L. Võhandu.)

12. Pedak, Maie. Lineaarplaneerimise ülesande lahendi sõltuvus triviaalsetest kitsendustest, skaleerimisest ja simpleksprogrammi parameetritest. (ENSV TA Küb. Inst. van. tead. tööt. M. Tamm.)

13. Leiten, Arnold. Teede profileerimise ülesanne. (Juhendaja dots. kt. L. Kivistik.)

14. Varjas, Malle. Mittelineaarse elliptilist tüüpi diferentsiaalvõrrandi rajaülesande lahendamine. (Juhendaja dots. E. Tamme.)

15. Veeber, Ellen. Universaalsete algebrate mitmekohalised endomorfismid ja m-poolrühmad. (Juhendaja dots. J. Hion.)

16. Sikk, Leiki. Tuumasisalduvus ja -translatiivsus. (Juhendaja prof. G. Kangro.)

17. Orlov, Ivan. (Lõpetas kaugõppe teel.) Применение теории нормированных колец к доказательству спектральной теоремы. (Juhendaja prof. G. Kangro.)

Kõigile nimetatuile omistati matemaatiku kvalifikatsioon.

Bibliograafia

Eesti NSV-s ilmunud matemaatika-alase kirjanduse nimestik

Aprill—detsember 1967

(Koostanud M. Suurväli)

RAAMATUD

Absoluutväärtus. 2. tr. Trt., 1967. 19 lk. (Tartu Riiklik Ülikool. Mittestatsionaarne matemaatikakool. 13) — Trükitud rotaprindil.

Bekker, M. **Kontrolltöö nr. 8.** (Ekstreemumülesanded.) Ülesannete lahendused. Trt., 1967. 18 lk. (TRÜ. Mittestatsionaarne matemaatikakool. 15.) — Trükitud rotaprindil.

Etverk, E. **Vektorarvutus ja ruumi analüütiline geomeetria.** Konspekt kaugüliõpilastele. Tln., 1967. 51 lk. (TPI matemaatika kateeder.) — Rotaprint.

Etverk, E., Garšnek, A., Kass, A., Kass, P., Krusberg, H. ja Teeäär, M. **Harjutusi ja ülesandeid keskkooli matemaatikakursuse kordamiseks.** Abimaterjal sisseastujaile. Tln., 1967. 64 lk. (TPI matemaatika kateeder.) — Trükitud rotaprindil.

Etverk, E., Garšnek, A., Kass, A., Kass, P., Krusberg, H. ja Teeäär, M. **Materjale keskkooli matemaatikakursuse kordamiseks.** Tln., 1967. (TPI matemaatika kateeder.) — 2. osa pealk. t.-l.: Õpik keskkooli matemaatikakursuse kordamiseks. — Trükitud rotaprindil.

1. osa 112 lk.

2. osa. Geomeetria ja trigonomeetria. 128 lk.

Hanko, P., Karu, O., Reimand, J. ja Velsker, K. **Täiendavaid teemasid koolimatemaatikale.** Tln., «Valgus», 1967. 199 lk.

Kaasik, Ü. **Arvutid ja programmeerimine. 2.** Trt., 1967. 156 lk. (TRÜ arvutusmatemaatika kateeder.) — Trükitud rotaprindil.

Kontrolltöö nr. 7. (Võrratused.) Ülesannete vastused ja lahendused. Trt., 1967. 16 lk. (TRÜ. Mittestatsionaarne matemaatikakool. 14.) — Trükitud rotaprindil.

Kujutav geomeetria. Tln., 1967. (TPI.) Pealk. ees autorid: M. Kraaving, N. Paluver, O. Rünk, E. Vallas. Paralleeltekst vene keeles. — Rotaprint.

Harjutusülesanded. 66 lk.

Lisaharjutusülesanded ehituslike erialade jaoks. 20 lk.

Lepamaa, A. **Tõenäosusteooria ja matemaatilise statistika põhijooni.** Konspekt. Tln., 1967. 88 lk. (TPI arvutusmatemaatika kateeder.) — Rotaprint.

Lints, A. **Matemaatika õpetamisest I klassis.** Metoodilisi nõuandeid õpetajaile. Tln., «Valgus», 1967. 80 lk.

Matemaatika ja kaasaeg. Abimaterjale matemaatika õpetajatele ja õppijatele. XII. Trt., 1967. 147 lk. (Tartu Riiklik Ülikool.)

Sisu: G. Kangro, Ü. Lumiste, O. Prinits, E. Tiit. Integraal maailma kohal. — NSVL Teaduste Akadeemia presidendi M. V. Keldõši avasõna kongressil. — Nõukogude akadeemikute mõtteavaldusi kongressi päevilt. — Keeleprobleemid. — Kongressi pudemeid. — Ü. Lumiste. Ruumi mõiste geomeetrias. — J. Hion. Naturaalarvude aksiomaatika. — J. Gaiduk. Taylori valemi tõestusest. — Bridžiülesanne. — I. Kull, M. Tombak. Algoritmid ja lahenduvad hulgad ning nende rakendusi. — Õpetlaste arvamusi küsimuses «Kas masin võib mõtelda?» — Ü. Kaasik, E. Tamme. Laadimisülesanded. — K. Ariva. Lobatševski geomeetria. — Hilja Õiglane. Programmõppest. — P. Kees. Algklasside matemaatika õpetamine vajab ümberkorraldamist. — M. Levin. Mõningaid valemeid kolmnurga geomeetriast. — Veel arvu π geomeetrilisest konstrueerimisest. — J. Depman. Montucla — matemaatika ajaloo pioneer. — J. Gaiduk. Thomas Clausen ja tema matemaatika-alane looming. — Ü. Lumiste. Täiendusi Th. Clauseni biograafiale. — V. Tinn. Üleliiduline majandusmatemaatika-alane konverents Eestis. — E. Lasn. «Ural»-tüüpi arvutite kasutajad Tartus. — J. Hion. Õppeasutustevaheline algebra-alane sümpoosion. — Lenini preemia laureaate: N. V. Jefimov. Jevgeni Gabov i t š. Lenini preemia juhtimissüsteemide sünteesi teooria eest. E. T a m m e. Lenini preemia mittekorrektsete ülesannete lahendusmeetodite väljatöötamise eest. — H. Õ i g l a n e. Dotsent Ü. Kaasik 40-aastane. — L. A i n o l a. Uusi teaduse doktoreid. — Uusi teaduse kandidaate. — Uus lend matemaatikuid Tartu Riiklikust Ülikoolist. — Järjekordsed lennud keskharidusega matemaatikuid. — Bibliograafia. — Ülesandeid.

Matemaatika- ja mehhaanika-alaseid töid. VI. Trt., 1966. 144 lk. (Tartu Riikliku Ülikooli toimetised 192.)

Sisu (vene k., resümeed eesti, saksa ja inglise k.): J. H i o n. Ω-ringoidid, Ω-ringid ja nende esitused. — Ü. L u m i s t e. Eukleidilise ruumi tasandimuutkondade teooriast. — R. M u l l a r i. Kõverusindikatrissid ja normaaltasandite mähispind V_m puhul eukleidilises ruumis R_n. I. — M. T õ n n o v. Fourier' kordajate T-täiendruumid. — M. T õ n n o v. Summeeruvustegurid, Fourier' kordajad ja multiplikaatorid. — G. S o g o m o n o v a. Appelli üldistatud klassi $A^{(k)}$ polünoomide jada integraalne esitus hüpergeomeetriliste funktsioonide abil. — R. T a m m e s t e. Jaotuse entroopia arvutamine momentide abil .— Ü. K a a s i k, E. T a m m e. Erikujuliste mittelineaarsete täisarvuliste planeerimisülesannete lahendamise algoritm. — E. J õ g i. Bimetallist sirge varda arvutamisest. — E. J õ g i. Bimetallist lameda sinusoidaalse riba stabiilsusest.

Matemaatilise analüüsi praktikum. I. Toimet. E. R e i m e r s. Trt., 1967. 250 lk. (TRÜ matemaatilise analüüsi kateeder.) — Pealk. ees autorid: S. B a r o n. E. J ü r i m ä e, E. R e i m e r s, T. S õ r m u s, M. T õ n n o v. — Rotaprint.

P o l y a, G. **Kuidas lahendada ülesannet.** Tlk. Ü. Kaasik. Tln., «Valgus», 1967. 188 lk.

R o o t s, L. ja S o o n e t s, K. **Näidisülesandeid teoreetilisest mehhaanikast.** 1. Punkti mehhaanika. 2. tr. Trt., 1967. 44 lk. (TRÜ teoreetilise mehhaanika kateeder.) — Trükitud rotaprindil.

T a m m e, E. **Arvutusmeetodid. 3.** Funktsioonide lähendamine. Trt., 1967. 111 lk. (TRÜ arvutusmatemaatika kateeder.) — Trükitud rotaprindil.

T a m m e, E. **Arvutusmeetodid. 4.** Lineaarsed võrrandisüsteemid. 2. tr. Trt., 1967. 143 lk. (TRÜ arvutusmatemaatika kateeder.) — Trükitud rotaprindil.

Teoreetiline mehhaanika. Programm, metoodilised juhendid ja kontrolltööd kaugõppeüliõpilastele. Tln., 1967. (TPI teoreetilise mehhaanika kateeder.) — Trükitud rotaprindil.

Keemilise tehnoloogia ja insenermajanduse erialad. 56 lk.

Soojusenergeetika, mäemetallurgia ja elektrotehnika erialad. 92 lk.

V e i n e r, G. **Metoodiline juhend tõenäosusteooria ülesannete lahendamiseks.** Tln., 1967. 40 lk. (TPI arvutusmatemaatika kateeder.) — Trükitud rotaprindil.

Viiekohalised kümnendlogaritmide tabelid. Trt., 1967. 68 lk. (EPA) — Rotaprint.

А й н о л а, Л. Я. **Интегральные вариационные принципы и их применение в динамике упругих оболочек и пластинок.** Автореферат дисс. на соискание учен. степени д-ра физ.-мат. наук. Таллин, 1967. 20 с. (АН ЭССР. Совет физ.-мат. и техн. наук) — Ротапринт.

Б е к к е р, М. **Тригонометрические уравнения.** Таллин, «Валгус», 1967. 87 с. (Респ. ин-т усовершенствования учителей ЭССР. Из опыта работы учителей и воспитателей).

Й ы г и, Э. А. **Некоторые задачи об устойчивости упругих и упругопластических пологих арок.** Автореферат дисс. на соискание учен. степени канд. физ.-мат. наук. Тарту, 1967, 8 с. (ТГУ).

М а у е р, И. В. **Методы нелинейного программирования.** Автореферат дисс. на соискание учен. степ. канд. физ.-мат. наук. Таллин, 1967. 12 с. (АН ЭССР. Отд-ние физ.-мат. и техн. наук).

П у к к, Р. А. **Алгоритмы и программы однократного и двукратного интегрирования, экономящие число обращений и подинтегральной функции.** Автореферат дисс. на соискание учен. степени канд. физ.-мат. наук. Таллин, 1967. 14 с. (АН ЭССР. Совет физ.-мат. и техн. наук). — Ротапринт.

Райк, Э. В. **Некоторые методы решения экстремальных задач и их приложение к проблемам оптимального управления.** Автореферат дисс. на соискание учен. степ. канд. физ.-мат. наук. Таллин, 1967, 15 с. (АН ЭССР. Совет физ-мат. и техн. наук).

Ребане, К.-С., Пальм, У. и Роотс, Л. **Сборник задач по физике, химии и математике.** (Для поступающих в ТГУ). Тарту, 1967, 58 с. (ТГУ.) — Ротапринт.

Роос, Х. О. **Иррациональное число в школьном курсе математики.** Таллин, 1967. 34 с. (ТПИ. Кафедра математики). — Ротапринт.

Труды Вычислительного центра. Вып. 10. Тарту, 1967, 85 с. (ТГУ). — Ротапринт.

Содерж.: А.-А. И. Ягель. Нахождение критических путей методом динамического программирования. — Л. Р. Приск. О применении ЭВМ для составления планов настила и рационального раскроя тканей на швейных фабриках. — А. К. Лоссманн. О применении метода исправления обратной матрицы при алгоритме Гомори. — Т. Х.-Ф. Аккель. О приближенном решении специальных задач линейного программирования. (Задачи составления кормовых рационов). — М. Х. Вийтсо. Программы симплексного метода для ЭВМ «Урал-4». — А. К. Лоссманн. Программа двойственного симплексного метода с двухсторонними ограничениями для ЭВМ «Урал-4».

Труды Вычислительного центра. Вып. 11. Тарту, 1967. 68 с. (ТГУ). — Ротапринт.

Содерж.: Р. Муллари. И. Саарнийт. Производство — управление — ЭВМ. — Р. Муллари. У. Праги. Имитирование работы цеха на ЭВМ.

ARTIKLID

Allik, K. **Matemaatika õpetamise ümberkorraldamisest Tallinna Polütehnilises Instituudis.** — Õppemetoodika küsimusi, 2, 1967, lk. 24—29.

Eesti NSV Teaduste Akadeemia toimetised. Füüsika. Matemaatika. Tln., 1967.

Nr. 2. Matemaatika-alased artiklid (vene k., resümeed eesti, inglise ja saksa k.):

L. Ainola. Variatsiooniprintsiip Schrödingeri võrrandi jaoks. — J. Rebane. Ühetüübiliste algebrate muutkondadest. — S. Ulm. Üldistatud diferentssuhetest. II. — V. Poll. Mõnede mitme muutuja funktsioonide statsionaarsete punktide leidmise meetodite koonduvusest. — I. Keis. Valentine'i meetodi kasutamisest maksimumprintsiibi ülesannete lahendamisel. — E. Raik. Trahvifunktsiooni meetodist. — T. Tobias. Korduv otsustusprobleem ruut-kaofunktsiooni puhul. — I. Mauer. Duaalsusprintsiibist kumerprogrammeerimises

Nr. 3. Matemaatika-alased artiklid (vene ja inglise k., resümeed eesti, inglise ja saksa k.):

G. Kangro. Mõnedest uurimustest summeeruvusteoorias. — B. Tamm. Programmeerimise automatiseerimise probleemid Eesti NSV-s. — E. Raik. Fejéri tüüpi meetodid Hilberti ruumis. — I. Mauer. Optimaalsest unifitseerimise ülesandest. — H. Aben. Lävede teooria ja dünaamiline programmeerimine linnade planeerimisel. — I. Keis. Ühe kinnispunktiga gürostaadi liikumisvõrrandite eri integraalidest. V. Poll. Statsionaarsete punktide leidmise meetoditest.

Nr. 4. Matemaatika-alased artiklid (vene k., resümeed eesti ja inglise k.):

S. Ulm. Iteratsioonimeetodeist pöördoperaatori järkjärgulise aproksimeerimisega. — E. Tamme, I. Sõrmus. Kiirguse ülekandevõrrandi lahendamisest anisotroopse hajumise korral. — R. Pukk. Mõningatest integreerimisprotsessi kiirendavatest võtetest. — V. Salum. TMR spektri konstantide määramine elektronarvutil.

Etverk, E. **Naturaalarvud ja tehted nendega.** — «Nõuk. Kool», 1967, nr. 10, lk. 747—754; nr. 12, lk. 909—917.

Hiie, E. **Kasvatav õpetamine algklasside matemaatikatundides.** — «Nõuk. Kool», 1967, nr. 12, lk. 934—939.

Kuidas me loendame-arvutame. [Arvusüsteemidest.] — «Horisont», 1967, nr. 5, lk. 12—14.

Lints, A. **Esimesed matemaatikatunnid 1. klassis.** [Uue programmi metoodikast.] — «Nõuk. Kool», 1967, nr. 7, lk. 498—504.

Noor, E. **Abstraktsiooniprotsess matemaatikas.** — «Nõuk. Kool», 1967, nr. 6, lk. 408—412.

Nurk kolmeks võrdseks osaks. — «Tehnika ja Tootmine», 1967, nr. 4, lk. 187—188.

Prinits, O. **Matemaatika õpetamise reformimisest Lääne-Euroopas.** — «Nõuk. Kool», 1967, nr. 8, lk. 634—639.

Rootamm, A. **Veel kord ringskaalaga arvutuslükatist.** «Tehnika ja Tootmine», 1967, nr. 7, lk. 333—334.

Toom, E. **Tabelkontroll matemaatikas.** [Keskkoolis.] — Programmõpe, 4, 1967, lk. 30—33. — Kokkuvõte vene keeles.

Usai, M. **Rudolf Kallas matemaatika metoodikuna.** [1851—1913. Raamatust «Mõistlik rehkendaja.» 1874. a.] — «Nõuk. Kool», 1967, nr. 10, lk. 796—799.

Võhandu, L. **Matemaatika.** [Matemaatiline mäng Itaaliast.] — «Horisont», 1967, nr. 8, lk. 76.

Айтсам, А. М. и Асток, В. К. **О расчетных шумах при вычислении статистического спектра смешанной, состоящей из периодических и непериодической составляющих, стационарной в широком смысле случайной функции.** — Труды Таллинского политехн. ин-та. Серия А, № 247, 1967, с. 99—118.

Физика, математика и теоретическая механика. Сборник статей. 2. Таллин, 1967. 51 с. (Труды Таллинского политехн. ин-та. Серия А. № 251).

Статьи по математике: М. Левин, О. Оя. Элементарное решение одной задачи размещения объектов обслуживания. Ф. Вихманн. Некоторые теоремы о формальном умножении несобственных интегралов. — Ф. Вихманн. О формальном умножении двойных несобственных интегралов. — Х. Коппель. Некоторые теоремы о сходимости обобщенного метода Стеффенсена.

Ülesandeid elementaarmatemaatikast

1. Tõestada: kui

$$a^m + a^n = a^p + a^q$$

ja

$$a^{3m} + a^{3n} = a^{3p} + a^{3q} \qquad (a \neq 0, \quad a \neq \pm 1),$$

siis

$$mn = pq.$$

2. Millisel a väärtusel on ruutvõrrand $x^2 - (a-3)x + a + 3 = 0$ lahendite ruutude summa vähim?

3. Leida kõik sellised naturaalarvude paarid, mille summa moodustab 20% nende korrutisest.

4. Trapetsi $ABCD$ diagonaalide lõikepunkt on O. Leida trapetsi pindala S, kui on teada kolmnurkade AOB ja COD pindalad.

5. Leida $\cos(x+y)$, kui

$$\sin x + \sin y = a,$$
$$\cos x + \cos y = b.$$

KOGUMIKU KAHETEISTKÜMNENDA VIHIKU ÜLESANNETE LAHENDUSED

Ülesande nr. 1 lahendus. Et $\angle CEO + \angle ODC = \angle BDO + \angle ODC = 180°$, siis saab nelinurga $ODCE$ ümber joonestada ringjoone. Selle ringjoone keskpunkt asub külgede EC ja DC keskristsirgete lõikepunktis, s. o. lõigu DC keskpunktis. See ringjoon on ühtlasi $\triangle ODC$ ümberringjooneks. Seega $\angle DOC = 90°$ kui diameetrile toetuv piirdenurk.

Ülesande nr. 2 lahendus.

$$S_{np} = n!\left[1 + \frac{(n+1)!}{1!n!} + \frac{(n+2)!}{2!n!} + \ldots + \frac{(n+p)!}{p!n!}\right] =$$

$$= n!\left[\binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \ldots + \binom{n+p}{p}\right].$$

Samasuse $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ põhjal leiame, et nurksulgudes olev summa on $\binom{n+p+1}{p}$. Seega

$$S_{np} = n!\binom{n+p+1}{p} = \frac{(n+p+1)!}{(n+1)p!}.$$

Ülesande nr. 3 lahendus. Et teise võrrandi põhjal $y \geqslant 3$, siis $|y-3| = y-3$ ning süsteem võtab kuju

$$\begin{cases} |x+1| + y = 7, \\ |x+1| - y = -3. \end{cases}$$

Võrrandeid liites saame

$$2|x+1| = 4,$$
$$|x+1| = 2,$$
$$x_1 = -3, \quad x_2 = 1.$$

Seega on süsteemi lahendid

$$\begin{cases} x_1 = -3, \\ y_1 = 5, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = 1, \\ y_2 = 5. \end{cases}$$

Ülesande nr. 4 lahendus. Kuna vaadeldava ruutvõrrandi üheks lahendiks on $x = 1$, siis ruutvõrrandi vasaku poole lahutamisel tegureiks saame võrrandile anda kuju

$$(x-1)(p_2x - p_0) = 0.$$

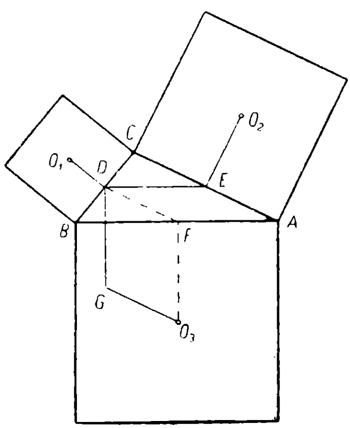
Seega on võrrandi teiseks lahendiks $x_0 = \frac{p_0}{p_2}$. Arvestades tingimust $0 < x_0 < 1$ saame

$$0 < p_0 < p_2.$$

Seega seose $p_0 + p_1 + p_2 = 1$ põhjal

$$p_1 + 2p_2 > 1.$$

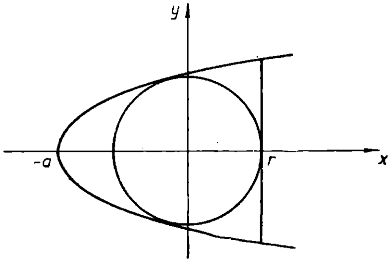
Ülesande nr. 5 lahendus. Olgu kolmnurga ABC külgede AB, AC ja BC keskpunktid vastavalt F, E ja D. Joonestame $DG \parallel O_3F$, $GO_3 \parallel DF$. Siis $O_1D = CD$, $ED = DG$ (sest $ED = BF = FO_3 = DG$), $EO_2 = GO_3$ (sest $EO_2 = CE = DF = GO_3$), $\angle O_1DE = \angle CDG$ ja $\angle DEO_2 = \angle DGO_3$ (kui ristuvate haaradega nurgad). Järelikult murdejooned O_1DEO_2 ja $CDGO_3$ ühtivad, pöörates üht neist $90°$ võrra. Seega on nende murdjoonte sulgejad O_1O_2 ning CO_3 võrdsed ning risti teineteisega. Samuti saab näidata, et $O_1O_3 \perp O_2B$, $O_2O_3 = O_1A$, $O_2O_3 \perp O_1A$.



Ülaltõestatust saame vahetult välja lugeda võimaluse kolmnurga tippude A, B, C konstrueerimiseks punktide O_1, O_2, O^3 põhjal.

Ülesande nr. 6 lahendus.[1] Et vektorid $s_1 = (a, b, c)$, $s_2 = (b, c, a)$, $s_3 = (c, a, b)$ on risti üksteisega ning võrdsete moodulitega, siis $|D|$ võrdub kuubi ruumalaga, mille külje pikkus on $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

Ülesande nr. 7 lahendus. Olgu ringjoone võrrand $x^2+y^2=r^2$ ning parabooli võrrand $y^2=2p(x+a)$, kus $p>0$. Ringjoone ja parabooli puutumise korral



$$p^2-2pa+r^2=0. \qquad (1)$$

Paraboolse segmendi pindala on

$$S=\frac{4}{3}(r+a)\sqrt{2p(r+a)}.$$

Asendades siin a seose (1) põhjal, leiame

$$S=\frac{2}{3}\frac{(p+r)^3}{p}.$$

Tuletise $\frac{dS}{dp}$ võrrutamisel nulliga saame

$$p=\frac{r}{2} \quad \text{ja} \quad p=-r.$$

Kui $p=\frac{r}{2}$, siis $a=-\frac{5r}{4}$ ning seega otsitav parabool on

$$y^2=r\left(x+\frac{5r}{4}\right).$$

Ülesande nr. 8 lahendus. Funktsiooni $y=|x|$ $(-\pi<x<\pi)$ Fourier' rida on

$$|x|=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2},$$

millest $x=0$ puhul saame

$$0=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Seega

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

---

[1] Loodame, et selle ülesande sõnastuses esinenud ilmne trükiviga ei seganud lahendamist.

BRIDŽIÜLESANDE LAHENDUS

(ülesanne vt. lk. 13)

S annab risti emandaga tihi lauda, käib sealt ruutu ässa ja viskab sellele ärtu kuue. W on sunnitud trumpama (vastasel juhul võtab S korra lauast trumpi, trumpab pada kätte, võtab veel kord trumpi ja kaks ärtut) ning käima pada, ärtut või ristit. Näiteks pada käigu korral trumpab S selle risti sõduriga, annab risti kümnega tihi lauda, tuleb sealt ärtuga kätte tagasi ning annab risti kahega tihi O-le (visates lauast ärtut). O on nüüd sunnitud käima ruutut, S viskab ärtu ja W on sundviskes — tuleb ära visata kas viimane pada või teine ärtu. Kui W käib kolmandaks käiguks ärtut või ristit, siis kulgeb mäng põhimõtteliselt samuti, ainult kolmanda, neljanda ning viienda käigu järjekord muutub.

IX RAHVUSVAHELINE MATEMAATIKAOLÜMPIAAD.

Cetinjes (Jugoslaavias) toimus 3. kuni 12. juulini 1967 IX rahvusvaheline matemaatikaolümpiaad. See olümpiaad oli nii osavõtjate-õpilaste kui ka osavõtvate riikide arvu poolest rekordiline. Kui 1966. a. augustis Moskvas toimunud rahvusvahelisel matemaatikute kongressil ütles Inglismaa esindaja, et ka nende maal on alustatud koolinoorte matemaatikaolümpiaadidega ning nad ei kavatse pealtvaatajaks jääda rahvusvaheliste matemaatikaolümpiaadide suhtes, siis pidasid nad ka sõna ja saatsid oma esindajad Jugoslaaviasse. Väljastpoolt sotsialismileeri maid olid seni matemaatikaolümpiaadidest osa võtnud ainult Soome kooliõpilased. Seekord lülitusid ülesannete lahendamise võistlusesse 13 riigi esindajad, nende hulgas 4 kapitalistliku riigi õpilased. Täisarvuliste võistkondadega (8 õpilast) olid kohal Bulgaaria Rahvavabariik, Tšehhoslovakkia Sotsialistlik Vabariik, Saksa Demokraatlik Vabariik, Jugoslaavia Sotsialistlik Föderatiivne Vabariik, Mongoolia Rahvavabariik, Poola Rahvavabariik, Rumeenia Sotsialistlik Vabariik, Nõukogude Liit, Ungari Rahvavabariik, Inglismaa ja Rootsi. Itaalia võistkonnas oli 6 õpilast ja hilinemisega kohalejõudnud (lahendasid ülesandeid ainult teisel võistluspäeval) Prantsusmaa võistkonnas 5 õpilast. Seega oli osavõtjaid kokku 99, neist 1 tütarlaps. Kõige noorem osavõtja sakslane Wolfgang Burmeister oli 8. klassi õpilane.

Osavõtvate riikide arvu suurenemisest tingituna toimus Jugoslaavias olümpiaadi ajal nõupidamine olümpiaadi korraldamise küsimustes, arvestades selle ürituse populaarsuse suurt kasvu. Eelnevalt teatasid saabunud Belgia, Taani, Norra, Soome ja Austria esindajad, et nad kavatsevad järgmisele, s. o. X matemaatikaolümpiaadile saata ka oma võistkonnad. Nõukogude Liidu esindajatele tehti ülesandeks välja töötada rahvusvaheliste matemaatikaolümpiaadide põhimäärus, mis tuleks arutusele X matemaatikaolümpiaadil, mis korraldatakse 1968. a. suvel Moskvas.

Olümpiaad Cetinjes toimus president Josip Broz Tito protektsiooni all. Olümpiaad avati ja lõpetati linna raekojas ning Jugoslaavia haridusminister korraldas kõigile osavõtjaile piduliku vastuvõtu. Ekskursioonidel nautisid õpilased Jugoslaavia ilusat loodust.

Ülesannete lahendamine toimus kahel päeval á 4 tundi. Kummalgi päeval anti lahendamiseks kolm ülesannet. Ülesanded olid järgmised:

Esimene päev

1. (6 punkti). Rööpkülikus $ABCD$ on külje AB pikkus a, külje AD pikkus 1 ning nurk DAB on α. Kolmnurk ABD on teravnurkne. Tõestada: Ringid K_A, K_B, K_C ja K_D raadiusega 1 ja keskpunktidega rööpküliku tippudes

A, B, C ja D katavad rööpküliku siis ja ainult siis, kui

$$a \leqslant \cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha.$$

2. (7 punkti). Tetraeedris on ainult üks serv, mis on pikem kui 1. Näidata, et siis on tetraeedri ruumala $V \leqslant \frac{1}{8}$.

3. (8 punkti). k, m ja n on positiivsed täisarvud, kusjuures $m+k+1$ on algarv, mis on suurem kui $n+1$. Tähistame $c_s = s(s+1)$. Tõestada, et korrutis

$$(c_{m+1} - c_k)(c_{m+2} - c_k)\ldots(c_{m+n} - c_k)$$

on jaguv korrutisega $c_1 c_2 \ldots c_n$.

Teine päev

4. (6 punkti). On antud kaks teravnurkset kolmnurka $A_0B_0C_0$ ja $A'B'C'$. Konstrueerida kolmnurk ABC, mis on sarnane kolmnurgaga $A'B'C'$ (sealjuures vastavad punktidele A, B ja C punktid A', B' ja C' antud järjekorras) ja mis on kolmnurgale $A_0B_0C_0$ ümberjoonestatud kolmnurgaks (sealjuures läbib AB punkti C_0, BC punkti A_0 ja CA punkti B_0). Konstrueerida kõigist niisugustest kolmnurkadest see, millel on suurim pindala.

5. (7 punkti). Vaadelda jada $\{c_n\}$:

$$\begin{aligned} c_1 &= a_1 + a_2 + \ldots + a_8 \\ c_2 &= a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_8^2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_n &= a_1^n + a_2^n + \ldots + a_8^n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

kusjuures $a_1, a_2, \ldots, a_3$ on reaalarvud, millest vähemalt üks on nullist erinev. On teada, et selles jadas $\{c_n\}$ on lõpmata palju liikmeid c_n, mis on võrdsed nulliga. Teha kindlaks, missuguste n väärtuste korral on $c_n = 0$.

6. (8 punkti). Ühel spordivõistlusel jagati n päeva jooksul ($n > 1$) m medalit:

1. päeval jagati 1 medal ja $\frac{1}{7}$ ülejäänud $m-1$ medalist,

2. päeval 2 medalit ja $\frac{1}{8}$ nüüd ülejäänud medalitest jne.

n-ndal päeval jagati viimased n medalit.
Mitu päeva kestis võistlus ja mitu medalit jagati neil võistlustel välja?

Et IX olümpiaadi ülesanded olid mõnevõrra raskemad kui eelmise olümpiaadi omad ning et osavõtjate arv oli suurem, siis oli ka ülesannete lahendamise protsent nüüd väiksem. Võimalikust maksimaalsest punktide kogusummast saadi 53 protsenti (eelmisel aastal 75). Ainult 5 õpilast said maksimaalse arvu (42) punkte (eelmisel aastal 72 osavõtjast 11). Tabelis 1 (vt. lk. 146) on toodud iga ülesande kohta selle eest saadud keskmine hinne absoluutselt ja protsentides.

I auhinna omandamiseks pidi võistleja saama vähemalt 37 punkti, II auhinna saamiseks 30—36 punkti ja III auhinna saamiseks 22—29 punkti.
Parima tulemuse saavutasid olümpiaadil Nõukogude Liidu kooliõpilased. Nad võitsid 3 esimest, 3 teist ja 2 kolmandat auhinda ning saavutasid 81,8% võimalikust maksimaalsest punktide arvust. Teise koha saavutasid Saksa Demokraatliku Vabariigi võistkonna liikmed, kes võitsid 3 esimest, 3 teist ja 1 kolmanda auhinna ning said 76,5% võimalikust maksimaalsest punktide arvust.

Tabel 1

Ülesanne	Punktide arv	Saadud keskmine punktide arv	
		absoluutselt	protsentides
1	6	3,59	60
2	7	3,93	56
3	8	3,03	38
4	6	4,14	69
5	7	3,13	45
6	8	4,48	56

Kolmanda koha võitsid Ungari koolinoored 2 esimese, 3 teise ja 3 kolmanda auhinnaga ning 74,7%-ga punktide kogusummast.

Hästi esinesid ka Inglismaa ja Rumeenia võistkonnad, kes said vastavalt neljanda ja viienda koha. Ülevaate auhindade jagunemisest üksikute võistkondade vahel ja võistkondade paremusjärjestusest annab tabel 2.

Tabel 2

Võistkond	Auhinnad			Saadud punktide koguarv	Saadud punktide suhe punktide koguarvusse protsentides
	I	II	III		
1. Nõukogude Liit	3	3	2	275	81,8
2. Saksa DV	3	3	1	257	76,5
3. Ungari RV	2	3	3	251	74,7
4. Inglismaa	1	2	4	231	68,8
5. Rumeenia SV	1	1	4	214	63,7
6.—7. Bulgaaria RV	1	—	1	159	47,3
Tšehhoslovakkia SV	—	1	3	159	47,3
8. Jugoslaavia SFV	—	—	3	136	40,5
9. Rootsi	—	—	2	135	40,2
10. Poola RV	—	—	1	101	30,1
11. Mongoolia RV	—	—	1	87	25,9
Prantsusmaa	—	—	—	41	39,0
Itaalia	—	1	1	110	43,7

SISUKORD