Matematika ja kaasaeg

TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

MATEMAATIKA JA KAASAEG

XIV

ABIMATERJALE MATEMAATIKA ÕPETAJATELE JA ÕPPIJATELE

TARTU 1968

RUUMI MÕISTE GEOMEETRIAS[1]

Ü. Lumiste

Geomeetria ja teisenduste rühmad

Eelmise sajandi 70. aastad tõid kaasa murrangu matemaatikute laiade hulkade arusaamistes geomeetria olemusest ja arenguvõimalustest. Üksteise järele ilmusid tööd, mis põrutasid julgelt vanade kivinenud traditsioonide pihta, murdes neid ja avades uusi perspektiive. Jõuti Lobatševski ja Bolyai loomingu epohhiloova tähenduse tunnetamiseni, selgusid nende poolt rajatud geomeetria seosed Riemanni üldiste seisukohtadega ning lisaks kõigele sellele rikastati geomeetriat veel ühe uue viljaka ideega. Nii muutuski sajandi viimasel veerandil «uus geomeetria», nagu teda tollal nimetati, üheks kõige moodsamaks matemaatiliseks distsipliiniks.

Täpsemalt öeldes algas see vananenud arusaamade murdumise ajajärk geomeetrias 1868. aastal, mil ilmus korraga neli silmapaistvat uuest vaimust kantud uurimust — E. Beltrami kaks tööd Lobatševski geomeetria tõlgendamisest, B. Riemanni esikloengu tekst ning H. Helmholtzi uurimus liikumiste erilisest osast geomeetrias. Kahe esimese autori töödest oli juttu käesoleva artiklite sarja eelmises osas. Juba nendes leidus viiteid sellele, et eukleidilise, Lobatševski ning elliptilise tasandi või ruumi geomeetria erineb üldise kõverpinna või kõverruumi geomeetriast selle poolest, et neil tasandeil ja neis ruumides leiab aset kujundite vaba liikuvus. Selle fakti erilist tähtsust geomeetria ülesehitamisel rõhutas esimesena saksa silmapaistev füüsik, matemaatik ja füsioloog Hermann Helmholtz (1821—1894) oma töös «Faktidest, mis on geomeetriale aluseks» (*Über die Thatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen*). Kuigi see töö on oma ideede poolest lähedane Riemanni esikloengule, asetab Helmholtz siiski raskuspunkti teisale. Kui Riemann esitas üldise kõverruumi geomeetria idee, võttes selle arendamisel aluseks meetrilise vormi ds^2 ning ainult möödaminnes märkis, et konstantse kõverusega ruumides on võimalik kujundite vaba lii-

[1] Järg, algus vt. Matemaatika ja kaasaeg, XI, lk. 3—9; XII, lk. 19—32; XIII, lk. 3—18.

kuvus, siis Helmholtz lähtus just viimasest nõudest. Seadnud rea täiendavaid hüpoteese, ta näitas, et viimaste kehtimise korral osutub selline vaba liikuvusega kolmemõõtmeline ruum alati Riemanni konstantse kõverusega ruumiks (s. t. on kas eukleidiline, Lobatševski või elliptiline ruum). See tulemus avas uue võimaluse geomeetria rangeks põhjendamiseks.

Helmholtzi ideed arendasid ulatuslikult edasi kaks silmapaistvat noort matemaatikut — norralane S o p h u s L i e (1842—1899) ja sakslane F e l i x K l e i n (1849—1925). Kohtunud 1870. aasta suvel Pariisis ja uurinud koos C. Jordaniga (1838—1922) viimase lõpetamisel olevat monograafiat substitutsioonirühmadest ja Galois' teooriast, taipasid nad rühmateooria erilist osa matemaatikas ning pühendusid selle rakendamisele geomeetrias, diferentsiaalvõrrandite teoorias ja mujal. Geomeetria seose rühmateooriaga avas erilise selgusega F. Klein oma kuulsas avaloengus «Uusimate geomeetriliste uurimuste võrdlev käsitlus» (*Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen. Programm zum Eintritt in* [. . .] *der Universität zu Erlangen*), mille ta pidas 23-aastaselt, asudes 1872. a. tööle Erlangeni ülikooli professorina. Selles ettekandes, mida rohkem tuntakse «Erlangeni programmina», avas Klein geomeetria ees veel ühe uue arenguperspektiivi, näidates samal ajal üldise seisukoha varem tuntud geomeetriate ühtseks käsitlemiseks.

Eukleidiline, Lobatševski ja elliptiline geomeetria ning neid kõiki erijuhtudena haarav Riemanni geomeetria polnud sellal enam ainsateks matemaatikute poolt uuritud geomeetriateks. Kõrvuti nende loomise ja kujunemisega arenes, esialgu veel märkamatult, traditsioonilise geomeetria enda rüpes uus suund, mis täie jõuga puhkes ja nõudis endale iseseisvat eluõigust XIX sajandi esimesel poolel. Jutt on perspektiiviõpetuse ja kujundite projekteerimisel säilivate omaduste uurimise arengust iseseisvaks projektiivseks geomeetriaks, mis osutus suuteliseks haarama nii eukleidilist kui ka Lobatševski ja elliptilist geomeetriat.

F. Kleini tähtsaks teeneks ongi vahekorra selgitamine projektiivse geomeetria ja varem tuntud geomeetriate vahel. Tema idee järgi määrab ühe või teise geomeetria aine sellele geomeetriale omane liikumiste rühm — see, missuguseid kujundeid loetakse erinevateks ainult oma paiknemise poolest, missuguseid aga lisaks sellele ka oma sisemise ehituse poolest. Uus idee, mis lisandus projektiivse geomeetria arengus, seisneb selles, et kujundite erinevust üksnes paiknemise poolest ei pea tingimata mõistma kujundi kui jäiga keha liikumise mõttes, vaid seda võib mõista ka üldisemalt — näiteks selles mõttes, et üks kujund on saadav teisest projekteerimiste abil. Selline üldisem vaatekoht viis tasandi või ruumi üldise teisenduse mõisteni.

Kõneldakse, et on antud punktihulga t e i s e n d u s α, kui hulga igale punktile X on vastavusse seatud selle hulga mingi teine punkt X', nii et ühele punktile vastab ainult üks punkt ja erinevatele punktidele vastavad erinevad punktid (s. t. kui vastavus on, nagu kõneldakse, üksühene). Sel puhul kirjutatakse $X' = \alpha X$ ehk $X = \alpha^{-1}X'$. Teisendust α^{-1}, mis toimib vastupidises suunas, nimetatakse teisenduse α pöördteisenduseks. Antud hulga kahe teisenduse α ja β abil võib moodustada uue teisenduse, mis saadakse nende järjest sooritamisel: kui $\alpha X = X'$ ja $\beta X' = X''$, siis teisendust, mis viib punktid X kohe punktideks X'' tähistatakse $\beta\alpha$ ja nimetatakse teisenduste α ja β korrutiseks, s. t.

$$(\beta\alpha)X = \beta(\alpha X).$$

Osutub, et antud hulga kõik teisendused moodustavad selliselt defineeritud korrutamise operatsiooni suhtes rühma[2]. Tõepoolest, niisugune korrutamine on alati assotsiatiivne, sest nii

$$[(\gamma\beta)\alpha]X = (\gamma\beta)[\alpha X] = \gamma(\beta[\alpha X])$$

kui ka

$$[\gamma(\beta\alpha)]X = \gamma[(\beta\alpha)X] = \gamma[\beta(\alpha X)],$$

ning et sulgude tähendus ei sõltu nende välisest kujust, siis on hulga suvalise punkti X korral $[(\gamma\beta)\alpha]X = [\gamma(\beta\alpha)]X$, s. t.

$$(\gamma\beta)\alpha = \gamma(\beta\alpha).$$

Lisaks sellele on teisenduste hulgas olemas korrutamise suhtes neutraalne element — selleks on nn. ühikteisendus ε, mis määratakse eeskirjaga $\varepsilon X = X$ ja mille korral ilmselt $\alpha\varepsilon = \alpha$, sest $(\alpha\varepsilon)X = \alpha(\varepsilon X) = \alpha X$ — ning iga teisenduse α korral leidub teisendus α^{-1}, nii et $\alpha\alpha^{-1} = \varepsilon$ (sest $(\alpha\alpha^{-1})X' = \alpha(\alpha^{-1}X') = \alpha X = X'$). Tähendab, rühm tõesti tekib.

Geomeetrias pakuvad huvi mitte mistahes punktihulga mistahes teisendused, vaid tasandi või ruumi sellised teisendused, mis on oma loomult lähedased liikumistele. Kui tasandi või ruumi puhul on antud teatav hulk sedalaadi teisendusi, siis rühmaks on see hulk — nagu on kerge kontrollida — parajasti siis, kui hulga iga kahe teisenduse korrutis ja hulga iga teisenduse pöördteisendus kuuluvad samasse hulka. Olgu nüüd tasandil või ruumis antud mõni selline teisenduste rühm, nii et hulgas leiduvate teisendustega saab iga punkti viia igasse teise punkti. Siis sellele teisenduste rühmale vastavaks geomeetriaks nimetab F. Klein teooriat, mis uurib kujundite niisuguseid omadusi ja selliseid kujunditega seotud arvulisi suurusi — nn. invariante, mis jäävad muutumatuiks selle rühma teisenduste korral.

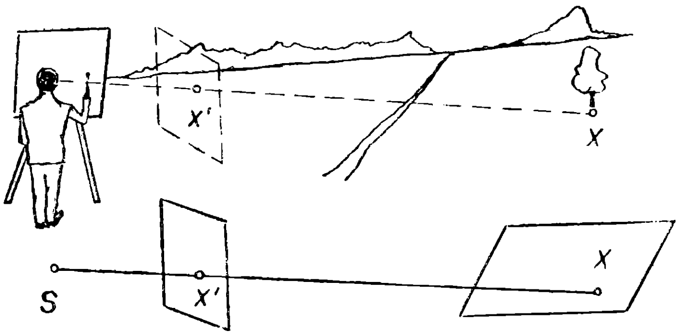
F. Kleini selle väga viljaka idee sisu lahtimõtestamist on sobiv alustada projektiivsete teisenduste uurimisest, millest see idee õieti omal ajal välja kasvaski.

---

[2] J. Gabovitš. Algebra põhimõisteid II. — Matemaatika ja kaasaeg, VII, lk. 14—27.

Projektiivsete teisenduste rühm

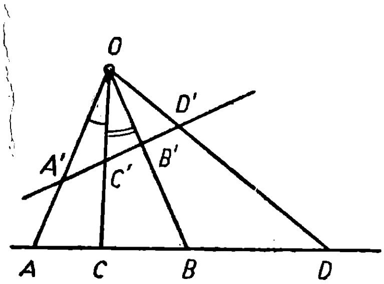
Kujundite projekteerimisel ilmnevad seaduspärasused huvitasid kunstnikke juba ammu. On ju näiteks tasase pinna lõuendile kandmisel tegemist sisuliselt sellega, et punktid kujutatakse ühelt tasandilt teisele antud punkti S (kunstniku silma) läbivate sirgete $SX'X$ (valguskiirte) abil (joon. 1). (Pööre, mis on vaja-



Joonis 1.

lik, et lõuend ei varjaks vaatevälja, on siin ebaoluline ega muuda pilti mingil määral.) Juba renessansiaja kunstnike seas leidus isikuid, kes alustasid kujundite sellise ülekandmise matemaatilise teooria arendamist. Kunstiloomingu poolest tuntumateks on nendest Leonardo da Vinci (1452—1519) ja A. Dürer (1471—1528), uurijana aga ületas neid sajand hiljem G. Ubaldi oma «Kuues raamatus perspektiivist» (*Perspectivae libri sex*, 1600).

Esimesel pilgul näib, et moonutused kujundite projekteerimisel ühelt tasandilt teisele, esimese suhtes tugevasti kaldu olevale tasandile, on sedavõrd suured, et vaevalt saab siin juttu olla sel puhul säilivate omaduste vähegi sügavamast matemaatilisest teooriast. Et see sugugi nii ei ole ja et praktilisi vajadusi rahuldav perspektiiviõpetus sisaldab tõeliselt sisuka teooria algeid, seda näitasid XVII sajandi keskel prantsuse arhitekt Gerard Desargues (1593—1662) ja prantsuse matemaatik ja füüsik Blaise Pascal (1623—1662), kes tõestasid mitu sel puhul kehtivat sisukat teoreemi. Ulatuslikumalt arendasid projektiivset geomeetriat kui eukleidilise geomeetria osa, mis uurib kujundite projekteerimisel säilivaid omadusi, J. V. Poncelet (1788—1867), J. Steiner (1796—1863) ja M. Chasles (1793—1880). Nende töödes kasutatakse veel otseselt eukleidilise geomeetria mõisteid. Nii näiteks defineeritakse lõikude pikkuste abil ühe sirge nelja punkti A, B, C ja D liitsuhe $(ABCD)$ järgmiselt:



Joonis 2.

$$(ABCD) = \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}$$

ning näidatakse, et see suurus ei muutu projekteerimisel. Selle fakti elementaarne tõestus on järgmine (joon. 2). Vaatleme kolmnurki, mille alusteks on lõigud AC, CB, AD, DB ning ühiseks kolmandaks tipuks punkt O. Lõikude suhe on ilmselt võrdne nendele toetuvate kolmnurkade pindalade suhetega. Näiteks kolmnurga $\triangle ACO$ pindala on aga teiselt poolt võrdne $^1/_2\ OA \cdot OC \sin \alpha_{AC}$, kus α_{AC} on nurga $\angle AOC$ suurus. Seega

$$(ABCD) = \frac{^1/_2\, OA \cdot OC \sin \alpha_{AC}}{^1/_2\, OC \cdot OB \sin \alpha_{CB}} : \frac{^1/_2\, OA \cdot OD \sin \alpha_{AD}}{^1/_2\, OD \cdot OB \sin \alpha_{DB}} =$$

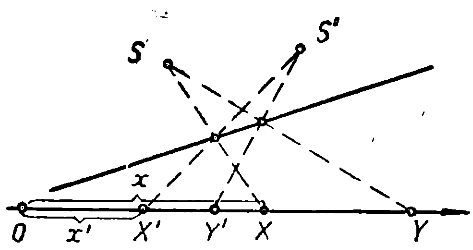
$$= \frac{\sin \alpha_{AC}}{\sin \alpha_{CB}} : \frac{\sin \alpha_{AD}}{\sin \alpha_{DB}}.$$

Rakendades seda valemit punktide A', B', C' ja D' korral, saame paremal pool täpselt samasuguse suuruse, sest nurgad tulevad sel puhul samad. Seega

$$(A'B'C'D') = (ABCD)$$

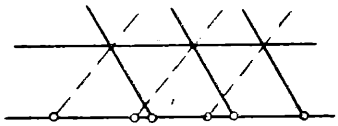
ning liitsuhe jääb projekteerimisel tõepoolest muutumatuks, kuigi üksikute lõikude pikkused eraldi võttes muutuvad. Arusaadavalt ei muutu liitsuhe ka mitme projekteerimise järjestikusel teostamisel. Sel puhul võib antud sirge punktid viia ka sama sirge punktideks (joon. 3) ja niiviisi korraldada vastavus $X \to X'$ ühe ja sama sirge punktide vahel, s. t. määrata sirge teatav teisendus α.

Nende tähelepanekute alusel andis 1847. a. saksa matemaatik Ch. Staudt (1798—1867) sirge üldise projektiivse teisenduse mõiste järgmiselt: p r o j e k t i i v s e k s t e i s e n d u s e k s sirgel



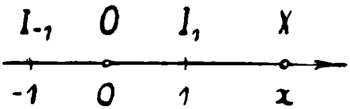
Joonis 3.

nimetatakse iga sellist teisendust, mille puhul säilivad liitsuhete arvulised väärtused, s. t. mille puhul iga nelja punkti A, B, C, D ja neile vastavate punktide A', B', C', D' korral on $(ABCD) = (A'B'C'D')$. Projektiivse teisenduse näiteks on joonisel 3 korraldatud vastavus $X \to X'$, sest see on saadud kahe projekteerimise järjestikusel teostamisel, kummagi puhul aga liitsuhe säilib. On võimalik tõestada, et iga projektiivne teisendus sirgel on saadav kolme projekteerimise järjestikuse teostamise tulemusena. Projektiivse teisenduse eriti lihtsaks näiteks on liikumine sirgel, mille korral säilivad kõikide lõikude pikkused ja ammugi siis liitsuhe. Ka sellise liikumise, mida võib kujutleda sirge kui jäiga varda nihutamisena mööda iseennast, võib saada projekteerimiste järjestikusel teostamisel (joon. 4).



Joonis 4.

Tuletame järgnevalt sirge projektiivse teisenduse puhul nn. teisendusvalemi — seose, mis võimaldab iga punkti X abstsissi x järgi arvutada vastava punkti X' abstsissi x'. Selleks vaatleme lisaks punktile X veel kolme punkti O, I_1 ja I_{-1} vastavalt abstsissidega 0, 1 ja —1, mis kandugu teisenduses punktideks K, L ja M vastavalt abstsissidega k, l ja m. Seejuures, nagu on kerge kontrollida (joon. 5)



Joonis 5.

$$(I_{-1}I_1OX) = \frac{I_{-1}O}{OI} : \frac{I_{-1}X}{XI} = \frac{0-(-1)}{1-0} : \frac{x-(-1)}{1-x} = \frac{1-x}{1+x},$$

$$(MLKX') = \frac{MK}{KL} : \frac{MX'}{X'L} = \frac{k-m}{l-k} : \frac{x'-m}{l-x'},$$

mistõttu liitsuhte säilimisest järeldub, et

$$\frac{1-x}{1+x} = \frac{(k-m)(l-x')}{(l-k)(x'-m)}.$$

Siit saamegi x' avaldamisel soovitud valemi:

$$x' = \frac{a_{10} + a_{11}x}{a_{00} + a_{01}x} \tag{1}$$

kus

$$a_{11} = k(l+m) - 2lm, \quad a_{10} = k(l-m),$$
$$a_{01} = 2k - l - m, \quad a_{00} = l - m$$

ja $\begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{vmatrix} = a_{00}a_{11} - a_{01}a_{10} = 2(k-l)(l-m)(m-k) \neq 0,$

sest punktid K, L ja M kui erinevate punktide O, I_1 ja I_{-1} kujutised on samuti erinevad, nii et $k \neq l \neq m \neq k$. Vahetu arvutamise teel on võimalik kontrollida, et iga teisendus sirgel, mis määratakse valemiga (1), kus $a_{00}a_{11} - a_{01}a_{10} \neq 0$, säilitab iga nelja punkti liitsuhte ja on seetõttu projektiivne teisendus.

Sirge iga kahe projektiivse teisenduse korrutiseks on samuti projektiivne teisendus, sest ta säilitab koos kahe antud teisendusega kõik liitsuhted. Samal põhjusel on projektiivse teisenduse pöördteisenduseks samuti projektiivne teisendus. Seetõttu moodustavad sirge projektiivsed teisendused rühma.

Analoogiliselt saadakse projektiivsete teisenduste rühm tasandil ja ruumis. Näiteks tasandil koordinaatidega x_1 ja x_2 nimetatakse projektiivseks iga teisendust α, mis punktile (x_1, x_2) seab vastavusse punkti (x_1', x_2') valemite

$$\left.\begin{aligned} x'_1 &= \frac{a_{10} + a_{11}x_1 + a_{12}x_2}{a_{00} + a_{01}x_1 + a_{02}x_2}, \\ x'_2 &= \frac{a_{20} + a_{21}x_1 + a_{22}x_2}{a_{00} + a_{01}x_1 + a_{02}x_2} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

järgi, kus kordajatest a_{ij} moodustatud determinant on nullist erinev:

$$\begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{3}$$

Selline teisendus α on määratud täielikult, kui on teada kordajate maatriks [3]

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Seejuures vastab maatriksile $\lambda A = [\lambda a_{ij}]$, kus λ on nullist erinev reaalarv, sama teisendus α (sest teguriga λ on korrutunud teisendusvalemite paremates pooltes iga kordaja a_{ij}, mistõttu see tegur taandub välja).

Ka tasandi projektiivsed teisendused moodustavad rühma. Tõepoolest, valemitega (2) antud teisenduse α korrutamisel teise sellise teisendusega α':

$$\left.\begin{aligned} x''_1 &= \frac{a'_{10} + a'_{11}x'_1 + a'_{12}x'_2}{a'_{00} + a'_{01}x'_1 + a'_{02}x'_2}, \\ x'' &= \frac{a'_{20} + a'_{21}x'_1 + a'_{22}x'_2}{a'_{00} + a'_{01}x'_1 + a'_{02}x'_2} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

[3] Vt. J. Gabovitš. Algebra põhimõisteid III. — Matemaatika ja kaasaeg, VIII, lk. 18—33.

(s. t. x'_1 ja x'_2 asendamisel siia valemite (2) järgi) on tulemus jällegi samalaadne teisendus $\alpha''=\alpha'\alpha$, kusjuures vahetu arvutamisega võib kontrollida, et uus kordajate maatriks $A''=[a''_{ij}]$ on teisenduste α' ja α maatriksite $A'=[a'_{ij}]$ ja $A=[a_{ij}]$ korrutis [3]:

$$A''=A'\cdot A.$$

Kui teha teisendus α vastupidises suunas, s. t. avaldada valemitest (2) suurused x_1, x_2 suuruste x'_1, x'_2 kaudu (tänu tingimusele (3) on see alati võimalik), on tulemuseks samalaadsed valemid teatava uue maatriksiga $A^*=[a_{ij}^*]$ (kontrollida!). Antud teisenduse α ja sellele vastupidise teisenduse α^{-1} järjestikune teostamine annab ilmselt samasusteisenduse $x''_1=x_1$, $x''_2=x_2$, mille maatriksiks on ühikmaatriks

$$E=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Seega

$$A^*A=E,$$

mistõttu A^* osutub maatriksi A pöördmaatriksiks. Sellest kõigest nähtubki, et koos teisendustega α ja α' on projektiivsed ka teisendused $\alpha'\alpha$ ja α^{-1} — tähendab tasandi projektiivsed teisendused moodustavad tõepoolest rühma. Ühtlasi selgub, et see rühm on tihedalt seotud [4] regulaarmaatriksite rühmaga ehk täieliku lineaarse rühmaga.[3]

Milline on projektiivsete teisenduste geomeetriline iseloomustus? Osutub, et nende kõige iseloomulikumaks omaduseks on see, et nad teisendavad kõik sirged jällegi sirgeteks. Võrdlemisi lihtne on kontrollida, et valemitega (2) antud teisendusel α on tõepoolest selline omadus. Iga sirge tasandil määratakse teatavasti lineaarse võrrandiga

$$A_1x_1+A_2x_2+A_0=0.$$

Selle sirge kujutise määrava võrrandi saamiseks tuleb siia teha asendus teisenduse α^{-1} valemitest

$$x_1=\frac{a_{10}^*+a_{11}^*x'_1+a_{12}^*x'_2}{a_{00}^*+a_{01}^*x'_1+a_{02}^*x'_2},$$

$$x_2=\frac{a_{20}^*+a_{21}^*x'_1+a_{22}^*x'_2}{a_{00}^*+a_{01}^*x'_1+a_{02}^*x'_2}.$$

---

[4] Selleks seoseks on homomorfism: $A \to \alpha$. Tõepoolest, $A'A \to \alpha'\alpha$, $A^{-1} \to \alpha^{-1}$, kuid isomorfismiks see ei osutu, sest iga $\lambda \neq 0$ korral $\lambda A \to \alpha$. Homomorfismi tuumaks on skalaarmaatriksite alamrühm $R=\{\lambda E\}$, mistõttu projektiivsete teisenduste rühm on isomorfne täieliku lineaarse rühma faktorrühmaga selle alamrühma R järgi.

Tulemuseks on võrrand

$$A_1 \frac{a_{10}^* + a_{11}^* x'_1 + a_{12}^* x'_2}{a_{00}^* + a_{01}^* x'_1 + a_{02}^* x'_2} +$$

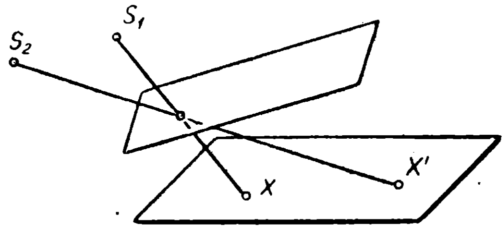
$$+ A_2 \frac{a_{20}^* + a_{21}^* x'_1 + a_{22}^* x'_2}{a_{00}^* + a_{01}^* x'_1 + a_{02}^* x'_2} + A_0 = 0,$$

millest pärast lihtsustamist (ühise nimetajaga korrutamist ja liikmete ümberkorraldamist) saame lineaarse võrrandi

$$A'_1 x'_1 + A'_2 x'_2 + A'_0 = 0.$$

Järelikult on iga sirge kujutiseks jällegi sirge!

Hoopis raskem on näidata, et iga teisendus tasandil, mis kannab kõik sirged jällegi sirgeteks, on esitatav valemitega (2). Selle fakti tõestus on sedavõrd keerukas, et ei mahu kuidagi käesoleva kirjutise raamidesse. Seetõttu võtame siin lihtsalt teatavaks, et tasandi projektiivseteks teisendusteks on kõik sellised teisendused, mis säilitavad punktide sirgjoonelise asetuse.

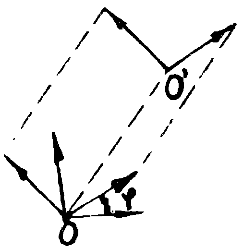


Joonis 6.

See asjaolu võimaldab seostada projektiivseid teisendusi projekteerimistega, millelt nad on saanud oma nime. Äsjamainitud omadus on ju ilmselt igal projekteerimisel. Veel enam: on võimalik näidata, et tasandi iga projektiivne teisendus on saadav järjest tehtud projekteerimiste tulemusena, kui projekteerimisi teha sobivalt valitud punktidest. Kuigi alati ei piisa kahest projekteerimisest (joon. 6), võib siiski näidata, et üle nelja projekteerimise pole tarvis kunagi kasutada.

Tähtsamad alamrühmad projektiivsete teisenduste rühmas

Tasandi projektiivsete teisenduste rühm on üsna avar rühm. Iga selle rühma teisenduse määramiseks tuleb anda väärtusi kokku kaheksale parameetrile (kordajate maatriksi $A = [a_{ij}]$ üheksa elemendi kaheksale omavahelisele suhtele). Projektiivse teisenduse võrdlemisi spetsiaalseks erijuhuks on tavalisest eukleidilisest geomeetriast tuntud l i i k u m i n e — teisendus, mille



Joonis 7.

puhul säilib iga kahe punkti vaheline kaugus. Liikumise korral peab ju iga sirge kui kahest punktist võrdsetel kaugustel olevate punktide hulk kujutuma jälle sirgeks, mistõttu liikumine on tõepoolest projektiivse teisenduse erijuht. Analüütilises geomeetrias tõestatakse, et iga liikumise tasandil saab esitada pöörde ja rööplükke korrutisena (joon. 7); kui pööre tehakse punkti O ümber nurga φ võrra ja rööplüke viib punkti $O(0,0)$ punktiks $O'(a_1, a_2)$, siis määratakse vastav liikumine teisendusvalemitega

$$\left.\begin{aligned} x'_1 &= a_1 + x_1 \cos\varphi - x_2 \sin\varphi, \\ x'_2 &= a_2 + x_1 \sin\varphi + x_2 \cos\varphi. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Need valemid on tõesti valemite (2) erijuhuks, kusjuures kordajate maatriksiks $A = [a_{ij}]$ on nüüd maatriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ a_2 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix},$$

mille determinant on $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1 \neq 0$, nii nagu vaja.

Liikumised moodustavad rühma, mis on seega projektiivsete teisenduste rühma alamrühmaks. Selle väite kontrollimiseks tuleb antud liikumist korrutada mõne teise liikumisega, mis määratagu näiteks valemitega

$$\begin{aligned} x''_1 &= a'_1 + x'_1 \cos\psi - x'_2 \sin\psi, \\ x''_2 &= a'_2 + x'_1 \sin\psi + x'_2 \cos\psi. \end{aligned}$$

Kokkuvõttes tekib siis teisendus $(x_1, x_2) \to (x''_1, x''_2)$, mille valemid erinevad valemeist (5) ainult selle poolest, et φ on asendunud nurgaga $\varphi + \psi$, suurused a_1 ja a_2 aga suurustega

$$a''_1 = a_1 \cos\psi - a_2 \sin\psi + a'_1, \quad a''_2 = a_1 \sin\psi + a_2 \cos\psi + a'_2$$

(kontrollida!). Tähendab, kahe liikumise korrutis on jälle liikumine. Seejuures pöördenurgad, nagu näha, liituvad. Kui valemeist (5) avaldada x_1 ja x_2, on tulemuseks samalaadsed valemid, ainult et φ on asendunud nurgaga $-\varphi$ ning a_1 ja a_2 suurustega

$$a_1^* = -a_1 \cos\varphi - a_2 \sin\varphi, \quad a_2^* = a_1 \sin\varphi - a_2 \cos\varphi$$

(kontrollida!). Tähendab, liikumise α korral on ka teisendus α^{-1} liikumine. Nagu näha, moodustavad liikumised tõepoolest rühma. Selle rühma iga teisenduse määramiseks tuleb väärtusi anda kolmele parameetrile — nurgale φ ja punkti $O(0,0)$ uue asendi O' koordinaatidele a_1 ja a_2.

Samasuguse parameetrite arvuga alamrühmi on projektiivsete teisenduste rühmas veel teisigi. Seame näiteks maatriksile $A = [a_{ij}]$ järgmise tingimuse: tema korrutamine vasakult maatriksiga A', mis erineb temast ainult ridade ja veergude ümberpaigutuse poolest, andku tulemuseks ühikmaatriksi, s. t. olgu $A'A' = E$. Tegemist on seega nõudega

$$\begin{bmatrix} a_{00} & a_{10} & a_{20} \\ a_{01} & a_{11} & a_{21} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

mis maatriksite korrutamise eeskirja ja võrduse definitsiooni põhjal[3] on samaväärne kuue sõltumatu seosega

$$\begin{aligned} a_{00}^2 + a_{10}^2 + a_{20}^2 &= 1, & a_{00}a_{01} + a_{10}a_{11} + a_{20}a_{21} &= 0, \\ a_{01}^2 + a_{11}^2 + a_{21}^2 &= 1, & a_{01}a_{02} + a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} &= 0, \\ a_{02}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 &= 1, & a_{02}a_{00} + a_{12}a_{10} + a_{22}a_{20} &= 0 \end{aligned}$$

maatriksi A üheksale elemendile. Vabaks jääb just parajasti kolm elementi. Et siin maatriksi A asendamine maatriksiga λA on nõude $(\lambda A)(\lambda A)' = E$ tõttu võimalik ainult $\lambda = \pm 1$ korral, siis on need kolm parameetrit vastava teisenduse (2) määramisel kõik olulised. Maatrikseid A, mis rahuldavad tingimust $AA' = E$, nimetatakse ortogonaalmaatriksiteks. Nad moodustavad rühma[5], mistõttu teisendused (2) selliste maatriksitega A moodustavad tasandi projektiivsete teisenduste alamrühma kolme parameetriga.

Analoogiliselt saab moodustada veel ühe projektiivsete teisenduste kolme parameetriga alamrühma, millel on eriline tähtsus Lobatševski geomeetria tõlgendamisel. Asendame eelmises nõudes $A'A = E$ maatriksi A' sellise maatriksiga A^*, mis saadakse temast esimese rea ja esimese veeru elementide korrutamisel arvuga -1. Siis saame nõude $A^*A = E$ ehk

$$\begin{bmatrix} a_{00} & -a_{10} & -a_{20} \\ -a_{01} & a_{11} & a_{21} \\ -a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(element a_{00} korrutub arvuga -1 kaks korda!), millest järeldub, et

$$\begin{aligned} a_{00}^2 - a_{10}^2 - a_{20}^2 &= 1, & a_{00}a_{01} - a_{10}a_{11} - a_{20}a_{21} &= 0, \\ -a_{01}^2 + a_{11}^2 + a_{21}^2 &= 1, & -a_{01}a_{02} + a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} &= 0, \\ -a_{02}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 &= 1, & -a_{02}a_{00} + a_{12}a_{10} + a_{22}a_{20} &= 0. \end{aligned}$$

Ka siin jääb vabaks parajasti kolm parameetrit, kusjuures seatud nõuet rahuldavad maatriksid — nn. pseudoortogonaalmaatriksid — moodustavad samuti rühma[6]. Vastavate projektiivsete teisenduste alamrühm on huvipakkuv selle poolest, et

[5] Vt. G. Kangro. Kõrgem algebra. Tallinn, 1962, lk. 439—441.

[6] Vt. näit. Ü. Lumiste. Geomeetria alused I. Tartu (TRÜ rotaprint), 1964, § 26.

selle alamrühma teisendused säilitavad ringjoone $x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$. Selle tõestamiseks asendame x'_1 ja x'_2 valemeist (2) avaldisse $x'^2_1 + x'^2_1 - 1$. Tulemuseks on:

$$x'^2_1 + x'^2_2 - 1 = \left(\frac{a_{10} + a_{11}x_1 + a_{12}x_2}{a_{00} + a_{01}x_1 + a_{02}x_2} \right)^2 +$$

$$+ \left(\frac{a_{20} + a_{21}x_1 + a_{22}x_2}{a_{00} + a_{01}x_1 + a_{02}x_2} \right)^2 - 1 =$$

$$= \frac{1}{(a_{00} + a_{21}x_1 + a_{02}x_2)^2} [(a_{11}^2 + a_{21}^2 - a_{01}^2)x_1^2 +$$

$$+ (a_{12}^2 + a_{22}^2 - a_{20}^2)x_2^2 + (a_{10}^2 + a_{20}^2 - a_{00}^2) +$$

$$+ 2(a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} - a_{01}a_{02})x_1x_2 +$$

$$+ 2(a_{10}a_{11} + a_{20}a_{21} - a_{00}a_{01})x_1 +$$

$$+ 2(a_{10}a_{12} + a_{20}a_{22} - a_{00}a_{02})x_2] =$$

$$= \frac{x_1^2 + x_2^2 - 1}{(a_{00} + a_{01}x_1 + a_{02}x_2)^2}.$$

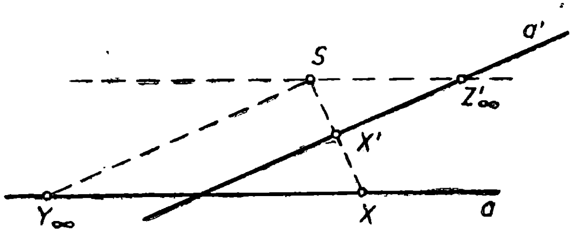
Siit järeldubki, et $x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$ ja $x'^2_1 + x'^2_2 - 1 = 0$ on samaväärsed nõuded. Tähendab, vaadeldava ringjoone punktid tõepoolest teisenevad sama ringjoone punktideks. Samaväärsed on ka nõuded $x_1^2 + x_2^2 - 1 < 0$ ja $x'^2_1 + x'^2_2 - 1 < 0$; seega säilib ka ringjoone sisemus, mis järelikult kujutub teataval viisil iseendaks.

Piirdume esialgu nende näidetega projektiivsete teisenduste rühmas sisalduvatest huvitavamatest alamrühmadest ja püüame järgnevalt selgitada, milles seisneb nende geomeetriate sisu, mis F. Kleini «Erlangeni programmi» järgi peavad vastama nii projektiivsete teisenduste rühmale kui ka selle ülalnäidatud alamrühmadele.

Projektiivne ruum ja projektiivne geomeetria

Kõigepealt tuleb kõrvaldada üks üpris oluline, kuid seni varjatud puudus ülaltoodud käsitluses. Tähelepanelik lugeja võib-olla juba taipas, et projektiivsete teisenduste puhul me korduvalt patustasime selle nõude vastu, et teisendus peab korraldama üksühese vastavuse sirge või tasandi punktide vahel. Tõepoolest, juba lihtsa projekteerimise korral (joon. 8) on sirgel a punkt Y_∞, millele sirgel a' ei vasta ühtegi punkti; samuti on sirgel a' punkt Z'_∞, mis ei vasta sirge a ühelegi punktile. Teisendusvalemis

$$x'_1 = \frac{a_{11}x_1 + a_{10}}{a_{01}x_1 + a_{00}}$$



Joonis 8.

kajastub see asjaolu üldisemal kujul selles, et kui x_1 rahuldab tingimust $a_{01}x_1 + a_{00} = 0$, siis temale vastav arv x'_1 pole leitav. Samasugune olukord esineb tasandi projektiivsete teisenduste korral. Ka nende puhul pole arvud x'_1 ja x'_2 leitavad valemeist (2), kui x_1 ja x_2 rahuldavad võrrandit $a_{01}x_1 + a_{02}x_2 + a_{00} = 0$, s. t. kui punkt (x_1, x_2) asub teataval sirgel.

Ainsaks mõistlikuks viisiks tekkinud raskuste kõrvaldamiseks on sirgete a ja a' täiendamine teatavate uute (esialgu fiktiivsete) punktidega Z_∞ ja Y'_∞, mille ainsaks ülesandeks on olla vastavuses punktidega Z'_∞ ja Y_∞. Neid uusi punkte võib soovi korral tõlgendada sirgete a ja a' «lõpmata kaugete punktidena». Seejuures tuleb aga tähele panna, et projekteerimisel võib selline «lõpmata kauge punkt» kujutuda päris tavaliseks punktiks. Seetõttu pole põhjust lugeda teda viimasest halvemaks. Sel viisil jõuame projektiivse sirge mõisteni: projektiivne sirge on punktihulk, mis saadakse tavalisest sirgest, kui sellele lisatakse üks uus punkt — «lõpmata kauge punkt», mida loetakse samaväärseks sirge ülejäänud punktidega. Näitlikult öeldes: projektiivne sirge nagu sulgub selles uues punktis ja moodustab seega kinnise joone. Projektiivse tasandini jõudmiseks tuleb tavalist tasandit täiendada uue sirgega — «lõpmata kauge sirgega», mis 1) seatakse teisenduses (2) vastavaks sirgele $a_{01}x_1 + a_{02}x_2 + a_{00} = 0$, 2) millele loetakse kuuluvaks kõik sellel tasandil asuvate sirgete «lõpmata kauged punktid» ja 3) mida peetakse samaväärseks tasandi kõigi teiste sirgetega. Analoogiliselt saadakse projektiivne ruum tavalise eukleidilise ruumi täiendamisel «lõpmata kauge tasandiga», lugedes viimast samaväärseks kõigi teiste tasanditega.

Projektiivsel sirgel ja tasandil on projektiivsed teisendused juba eranditult üksühesed vastavused. Valemite (1) ja (2) puhul tekib aga lisaraskus: pole olemas arvu x_1 ega arvupaari (x_1, x_2), millega saaks määrata «lõpmata kauge punkti» ja «lõpmata kauge sirge».

Ka sellest raskusest on võimalik üle saada. Selleks tuleb võtta kasutusele nn. **homogeensed koordinaadid** —

sirgel arvupaar (ξ_0, ξ_1), nii et oleks $x_1 = \frac{\xi_1}{\xi_0}$, tasandil aga arvukolmik (ξ_0, ξ_1, ξ_2), nii et oleks $x_1 = \frac{\xi_1}{\xi_0}$, $x_2 = \frac{\xi_2}{\xi_0}$. Sel korral läheb näiteks tasandil vastavuse üksühesus punktide (x_1, x_2) ja arvukolmikute (ξ_0, ξ_1, ξ_2) vahel muidugi kaotsi — kolmikule $(\lambda\xi_0, \lambda\xi_1, \lambda\xi_2)$ vastaks iga $\lambda \neq 0$ korral sama punkt (x_1, x_2), kuid see-eest on võimalik esitada ka «lõpmata kaugeid punkte» — iga selline määratakse kolmikuga $(0, \xi_1, \xi_2)$, kus ξ_1 ja ξ_2 pole korraga nullid. Avaneb võimalus defineeridagi projektiivne tasand kui niisugune hulk objekte (mida tavaliselt nimetatakse punktideks), nii et selle hulga objektid on seatavad sellisesse ühesesse vastavusse reaalarvude järjestatud kolmikutega (ξ_0, ξ_1, ξ_2) (kus kõik arvud pole korraga nullid), milles kolmikutele $(\lambda\xi_0, \lambda\xi_1, \lambda\xi_2)$ ja (ξ_0, ξ_1, ξ_2) vastab alati üks ja sama objekt.

Projektiivse ruumi definitsioon erineb projektiivse tasandi viimasest definitsioonist ainult selle poolest, et arvukolmikud asenduvad arvunelikutega $(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$.

Projektiivsed teisendused kui juba eranditult üksühesed teisendused on nüüd näiteks projektiivsel tasandil esitatavad valemitega

$$\begin{aligned} \varrho\xi'_0 &= a_{00}\xi_0 + a_{01}\xi_1 + a_{02}\xi_2, \\ \varrho\xi'_1 &= a_{10}\xi_0 + a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2, \\ \varrho\xi'_2 &= a_{20}\xi_0 + a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2, \end{aligned}$$

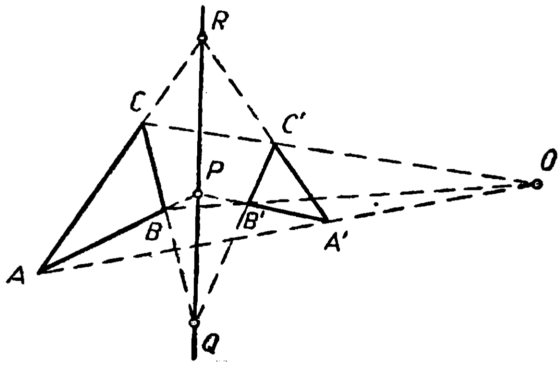
mis saadakse valemeist (2), kui nendes asendada

$$x_1 = \xi_1 : \xi_0, \quad x_2 = \xi_2 : \xi_0, \qquad x'_1 = \xi'_1 : \xi'_0, \quad x'_2 = \xi'_2 : \xi'_0$$

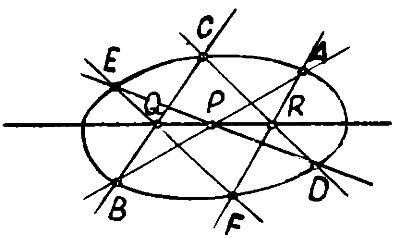
ning paremates pooltes lugejaid ja nimetajaid korrutada arvuga ξ_0 (sin $\varrho \neq 0$ on vabalt võetav võrdelisuse tegur).

P r o j e k t i i v s e g e o m e e t r i a võib nüüd määratleda järgmiselt: ta uurib projektiivsel sirgel, tasandil või ruumis olevate kujundite omadusi ja kujunditega seotud arvulisi suurusi (invariante), mis jäävad muutumatuiks (ehk invariantseiks) projektiivsete teisenduste puhul. Põhilised niisugustest invariantidest on seotud eespool vaadeldud nelja punkti liitsuhtega.

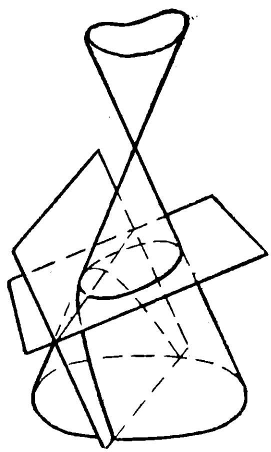
Projektiivse geomeetria lausete näidetena esitame järgnevalt Desargues'i ja Pascali teoreemid — ajalooliselt esimesed selle geomeetria sisukad laused. Desargues'i teoreem väidab järgmist: kahe kolmnurga $\triangle ABC$ ja $\triangle A'B'C'$ tippe läbivad sirged AA', BB' ja CC' lõikuvad ühes punktis O siis ja ainult siis, kui kolmnurkade külgi sisaldavate sirgete AB ja $A'B'$, BC ja $B'C'$ ning CA ja $C'A'$ lõikepunktid P, Q ja R on ühel sirgel (joon. 9). Selle lausega väljendatud kujundite omadus, millel on rohkesti väärtuslikke rakendusi, säilib projekteerimisel (ja üldse projektiivse teisenduse korral), sest ta on seotud ainult punktide asetsemisega sirgel — see vahekord aga teatavasti sel puhul säilib. Huvipakkuv on ka B. Pascali tulemus, mille ta sai juba 16-aastaselt. Selles on juttu kuusnurgast $ABCDEF$, mille tipud asuvad mingil



Joonis 9.



Joonis 10.



Joonis 11.

koonuselõikel (näiteks ellipsil, joon. 10). Samuti nagu korrapärase kuusnurga korral saab siin defineerida vastaskülgede mõiste. Pascal tõestas, et kuusnurga *ABCDEF* vastaskülgi sisaldavate sirgete *AB* ja *DE*, *BC* ja *EF* ning *CD* ja *FA* lõikepunktid *P*, *Q* ja *R* on ühel sirgel siis ja ainult siis, kui kuusnurga tipud on ühel ja samal koonuselõikel. Ka selles lauses näidatud omadus säilib projekteerimisel, sest lisaks punktide asetsemisele sirgetel on siin juttu veel koonuselõikest, mis aga projekteerub alati jälle koonuselõikeks (küll aga võib näiteks ellips projekteeruda paraabooliks või hüperbooliks; joon. 11).

Tavalise geomeetria seisukohalt on mõlemal esitatud lausel mitmeid erandeid. Kui näiteks kuusnurga küljed *AB* ja *DE* on paralleelsed, siis lõikepunkt P tavalises mõttes üldse ei eksisteeri. Siin selgub veel kord lõpmata kauge punkti mõiste sissetoomise otstarbekus — vaadeldaval juhul loeme Desargues'i ja Pascali eeskujul lihtsalt, et P on lõpmata kauge. Kui ka Q on lõpmata kauge, siis annab Pascali teoreem näiteks järgmise tavalise geomeetria lause: kui kuusnurgal on kaks paari paralleelseid vastasküIgi, siis tema tipud on ühel koonuselõikel siis ja ainult siis, kui ka kolmanda paari vastasküljed on paralleelsed. Sirgeks PQR on siis tasandi lõpmata kauge sirge.

Projektiivse geomeetria lausetega tutvumisel tuleb siin sellega piirduda. Püüame nüüd vastata küsimusele: missugused geomeetriad vastavad eespool vaadeldud alamrühmadele projektiivsete teisenduste rühmas? Tavaliste liikumiste (5) alamrühma puhul on vastus arusaadav — selleks on tavaline eukleidiline geomeetria, kus lihtsaimateks invariantideks on kahe punkti vaheline kaugus, kolmnurga pindala jne., lihtsamateks invariantseteks omadusteks aga sirgete paralleelsus ja ristseis, kolmnurkade kongruentsus jne.

Selle alamrühma korral, mille teisendused säilitavad ringjoone $x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$ koos oma sisemusega, pole ka vastuse leidmine eriti raske, kui meenutada käesoleva sarja varasemaid artikleid. Ringjoone sisemuses, nagu selgus, on võimalik tõlgendada Lobatševski geomeetriat, kui sirgetena mõista ringjoone kõõle. Vaadeldava rühma teisendused, mis määratakse valemitega (2), kui nendes kordajate maatriks A on pseudoortogonaalne, kujutavad kõõlud jällegi kõõludeks, sest nad kui eritüüpi projektiivsed teisendused säilitavad muidugi punktide sirgjoonelise paiknemise. Lõigu AB pikkus defineeritakse valemiga

$$AB = k \log\left(\frac{AP}{PB} : \frac{AQ}{QB}\right). \tag{6}$$

Lobatševski geomeetrias[7] on ka parajasti selliste teisenduste invariant, sest logaritmitav avaldis kui liitsuhe on isegi suvalise projektiivse teisenduse invariandiks, punktid P ja Q ringjoonel satuvad aga vaadeldavate teisenduste korral jälle ringjoonele. Sellest nähtub, et meid huvitavad teisendused on liikumised Lobatševski tasandil, mistõttu nende rühmale vastavaks geomeetriaks on Lobatševski geomeetria.

Lõppeks märgime, et ortogonaalse kordajate maatriksiga teisenduste (2) rühmale vastavaks geomeetriaks on elliptiline geomeetria. Nagu näha, võimaldab projektiivne geomeetria haarata ühtsesse skeemi tõepoolest mitmeid erinevaid geomeetriaid. Saab mõistetavaks, mis andis inglise matemaatikule A. Cayley'le, kes esimesena viitas 1859. a. võimalusele lõigu pikkuse defineerimiseks valemiga (6), põhjuse kirjutada: «Projektiivne geomeetria on kogu geomeetria».

---

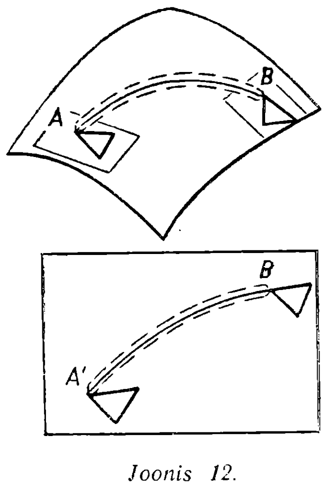
[7] Vt. Matemaatika ja kaasaeg, XII, lk. 27.

F. Kleini «Erlangeni programmis» peituvad võimalused ei ole eespool põgusalt tutvustatud ainestikuga veel kaugeltki ammendatud. Selle viljaka idee mõju ulatub veel tänapäevagi. Huvipakkuvaiks osutuvad järjest uued teisenduste rühmad ja neile vastavad ruumid (nn. Kleini ruumid ehk homogeensed ruumid) ning viimaste geomeetriad.

Ruumi mõiste tänapäeva geomeetrias

B. Riemanni idee iseloomustada geomeetriaid meetrilise vormi ds^2 abil ja F. Kleini idee eristada geomeetriaid nendega seotud teisenduste rühmade abil — kaks üldist XIX sajandil esitatud printsiipi mitmesuguste geomeetriate ühtseks käsitlemiseks — arenesid pikka aega teineteisest sõltumatult ja olid korraga rakendatavad esialgu ainult nn. konstantse kõverusega ruumide puhul. Selle kahe idee süntees teostati alles käesoleva sajandi esimesel veerandil. Alguse sai see 1917. a., kui itaalia matemaatik T. Levi-Civita (1873—1941) tõi Riemanni ruumide geomeetriasse paralleelülekande mõiste.

Selle mõiste näitlikuks tagapõhjaks on järgmine F. Mindingi (1806—1885) poolt juba 1837. a. kasutatud võte pinnateoorias. Kujutleme, et kõverpinna mingid kaks punkti A ja B on ühendatud joonega sellel pinnal ning punktis A võetud puutujatasandil on antud mingi kujund, näiteks kolmnurk (joon. 12). Kuidas oleks võimalik see kujund kanda punktis B võetud puutujatasandile, nii et see kandmine üldistaks tavalist rööplüket kõverpinna juhule? Minding pani ette toimida siin järgmiselt: lõigata mööda antud kõverat pinnast välja ülikitsas riba, laotada see tasandile (kui üldiselt kõverpinda ei saa laotada tasandile, siis ülikitsa riba puhul on see teostatav), kanda tasandil kujund kõvera teise otspunkti tavalise rööplükkega ja seejärel riba koos tema külge kinnitatud kujunditega laotada tagasi pinnale. Minding näitas pinnateoorias, kuidas on võimalik kogu seda protseduuri analüütiliselt kirjeldada, Levi-Civita aga üldistas selle võtte Riemanni n-mõõtmelise ruumi juhule ja töötas selle jaoks välja paindliku analüütilise aparatuuri.



Joonis 12.

Selline «paralleelülekanne» kõverpinnal sõltub, nagu näha, oluliselt sellest, missuguse kõverjoonega on punktid A ja B ühendatud. Sama protseduur teise joone korral viib sama kujundi punktis A üldiselt kõneldes hoopis teiseks kujundiks punktis B. Selles just muide avaldubki pinna kõverus sisemise ehituse seisukohalt. On arusaadav, et kujundid, mis saadakse punktis A antud kujundist paralleelülekandel mööda erinevaid jooni punkti B, erinevad ainult liikumise poolest punktis B võetud puutujatasandil. Tähendab, kõverpinna geomeetria käsitlemisel (ja analoogiliselt ka üldises Riemanni geomeetrias) tuleb tegemist teha teatavate erilisel viisil määratud liikumistega eukleidilisel tasandil (või ruumis). See tähelepanek korraldabki silla Riemanni ja Kleini kahe üldise kontseptsiooni vahel. Siin avanevad võimalused arendati välja käesoleva sajandi kolmandal kümnendil.

Asjade ajalooline areng oli järgmine. Riemanni ideede uuestisünd, nagu juba eespool selgus, algas 1868. a. Siitpeale jätkus «kõverate ruumide geomeetria» areng Riemanni poolt näidatud suunas esialgu pikka aega puhtteoreetiliste huvide ajendil ilma märkimisväärsete rakenduslike seosteta. Erilise huvi objektiks muutusid Riemanni ruumid pärast üldrelatiivsusteooria loomist A. Einsteini poolt 1915. aastal. Einsteini põhiidee kohaselt avaldub gravitatsioonivälja olemasolu eeskätt selles, et neljamõõtmeline aegruum on oma sisemise ehituse poolest kõverruum. Otsides sobivat matemaatilist aparatuuri oma füüsikaliste ideede väljaarendamiseks, leidiski Einstein selle Riemanni geomeetrias. Niiviisi muutus Riemanni geomeetria käesoleva sajandi teisel kümnendil üheks kõige populaarsemaks suunaks matemaatikas, mille areng jätkus nüüd kiirel sammul. Ka paralleelülekande mõiste kasutuselevõtt T. Levi-Civita poolt 1917. a. oli õieti põhjustatud sellest suurenenud huvist ja viis isiklike loominguliste kontaktideni Einsteini ja Levi-Civita vahel.

Üldisemad vaatekohad, mis Einstein seadis aluseks oma püüetele töötada välja ühtne väljateooria[8], põhjustasid vajaduse vaadelda Riemanni ruumidest veelgi üldisemaid kõveraid ruume. Esimese sammu selles suunas tegi 1918. a. šveitsi matemaatik H. Weyl (1885—1955), kes võttis kasutusele nn. afiinse seostusega ruumid. Üldise kontseptsiooni selliste uute seostusega ruumide ühtseks käsitlemiseks andis 1923.—1924. a. prantsuse matemaatik Élie Cartan (1869—1951). Tema lähtekoha võib üldjoontes esitada järgmiselt.

Vaadeldakse teatavat punktihulka (nn. n-mõõtmelist muutkonda), milles iga punkt on määratav n reaalarvulise koordinaadiga $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Selles antakse eeskiri, mis iga hulgas võetud kõverjoone korral võimaldab kanda kujundeid mööda seda joont ühest punktist teise. Kaht antud punkti A ja B võib aga ühendada veel paljude teiste kõverjoontega ja punktis A võetud kujundeid võib seega kanda punkti B mööda paljusid jooni.

[8] Vt. näit. A. Koppel. Albert Einstein ja kaasaegne füüsika. — Matemaatika ja kaasaeg, VII, lk. 75—81.

Nõutakse, et kõik need kujundid, mis saadakse punktis B antud kujundi ülekandmisel, oleksid teisendatavad üksteiseks teatava rühma teisenduse abil. See rühm annab siis nime ka vaadeldavale ruumile. Kui selleks rühmaks on näiteks projektiivsete teisenduste rühm, siis kõneldakse projektiivse seostusega ruumist; kui rühmaks on tavaline liikumiste rühm, siis kõneldakse eukleidilise seostusega ruumist. Viimase tähtsaimaks erijuhuks on Riemanni ruum.

Just sel viisil oli kõige loomulikum ühendada Riemanni ja Kleini üldised seisukohad ühtseks kõikehaaravaks käsitluseks. Nimelt on sellise käsitluse puhul erijuhtudena saadavad mitte üksnes Riemanni ruumid kui teatavad liikumiste rühmale vastavad seostusega ruumid, vaid ka üldised Kleini ruumid (ehk homogeensed ruumid) kui sellised seostusega ruumid, mille nn. kõverus on võrdne nulliga. É. Cartani kontseptsioon ongi jäänud tänapäevani põhiliseks lähtekohaks üldiste ruumide teoorias. Järgnenud arengus on teda mõningates üksikosades küll laiendatud loomuliku loogilise täiuseni, kuid tema põhilised lähtekohad on jäänud muutmatuiks. Selles suunas on ta teaduse praegusel arenguastmel veel küllalt üldine ja olemasolevaid nõudeid rahuldav. .

Vajadus põhimõtteliselt uute lahenduste järele hakkab üha selgemini ilmnema hoopis teises suunas, mitte megamaailma saladuste uurimises, kuhu suundus Einsteini teooria areng, vaid mikromaailma seaduspärasuste järjest parema tundmaõppimise käigus. Siin ütlevad üles nii tavalise geomeetria kui selle seniuuritud üldistuste seadused ega ole veel sugugi selge, missugune peaks olema see geomeetria, mis sobiks kõige paremini ruumi sisemise struktuuri kirjeldamiseks mikromaailmas. On põhjust arvata, et reaalsus peidab endas uusi veel avastamata saladusi ka geomeetria jaoks.

ARVAMUSI MATEMAATIKAST

Kui mineviku matemaatik, nagu Archimedes või isegi Descartes, võiks heita pilgu praegusesse geomeetriasse, siis eeskätt hämmastaks teda konkreetsuse puudumine selles. On olemas terved klassid geomeetrilisi teooriaid, mis saavad läbi mitte üksnes ilma mudelite ja joonisteta, vaid ka ilma ruumilise intuitsiooni märgatava kasutamiseta. Peaasjalikult on selline olukord tingitud just analüütiliste uurimisvahendite suuremast võimsusest, võrreldes puhtgeomeetrilistega.

E. Kasner (1905)

GEOMEETRILISEST MEETODIST DIOFANTILISES ANALÜÜSIS

U. Kaljulaid

«Mis on selle asja mõte?» küsis Jänku. «Noh,» vastas Pukh, «me otsime kogu aeg Maja, aga ei leia. Seepärast mina arvan, et hakkame parem otsima seda Auku, sest me ju teda tingimata üles ei leia, aga siis me võibolla leiame selle, mida me justnagu ei otsinudki. Aga Tema parajasti ongi see, mida me tegelikult otsime.»

A. Miln «Pukh and Others»

Algebraliste võrrandite ratsionaallahendite leidmisega seotud probleemide ja tulemuste valdkonda arvuteoorias on hakatud nimetama diofantiliseks analüüsiks. Selle seadelt elementaarsed probleemid on köitnud paljude uurijate tähelepanu. Näiliselt erinevate ülesannete lahendused aga saadi enamasti igal eri juhul eri võttega, mistõttu selles ainevallas valitses matemaatikute meelest kaua aega «kaos». Suuremat selgust asjasse tõi käesoleval sajandil hoogsalt arenema hakanud algebraline geomeetria, mille põhilisteks uurimisobjektideks on nn. algebralised muutkonnad. Selgus nimelt, et iga algebralise võrrandiga või võrrandite süsteemiga saab siduda teatava algebralise muutkonna, kusjuures võrrandi lahendeid võib tõlgendada selle muutkonna punktidena. Diofantiline ülesanne seisneb nüüd selles, et tuleb leida kõik täis- või ratsionaalarvuliste koordinaatidega punktid sellisel algebralisel muutkonnal.

Võib küsida, mille poolest selline geomeetriline vaatekoht on parem kui diofantilise analüüsi varasemad meetodid? Vastus on järgmine: algebralise muutkonna puhul on tegemist terve rea algebraliste ja topoloogiliste struktuuridega — ta on topoloogiline ruum mitmes eri topoloogias, analüütiline ruum, Lie rühm jne. Viimati mainitud struktuuride teooriad on tänapäeval väga rikkad fundamentaalsete tulemuste ja ideede poolest, mis on koos aritmeetiliste arutlustega edukalt kasutatavad võrrandite teoorias. Algebraline geomeetria annab «keele» selliste lihtsate[1] mõistete

[1] ... ja seega diofantiliste küsimuste seisukohalt täiesti müstilist tähendust omavate...

selgitamiseks, nagu tundmatute arv võrrandis, võrrandite aste, muutujate vahetus jne. Geomeetria meetodid ja ideed tõid diofantiliste ülesannete «kaosesse» süsteemi, klassifitseerides neid vastavate muutkondade invariantide järgi. Näide sellisest invariandist on muutkonnna dimensioon. Artiklis tuleb juttu peamiselt ühedimensionaalsetest muutkondadest, mida traditsiooni kohaselt nimetatakse algebralisteks kõverateks. Me tutvume siin lähemalt algebralise kõvera mõistega ja algebraliste kõverate biratsionaalse klassifikatsiooniga[2]. Suur osa esitatavast faktilisest materjalist on saadud aastail 1920—1930 L. J. Mordelli, A. Weyli ja C. L. Siegeli poolt. Lugeja jõuab siin küllalt sügavate tulemuste ja probleemideni elliptiliste kõverate teoorias.

I. ALGEBRALINE SISSEJUHATUS

— *John, millist teemat te täna koolis matemaatikas käsitlesite?*
— *Liitmist.*
— *Kui palju teeb, kui kahele õunale lisada kolm?*
— *Ei tea. Me tegime seda apelsinidega.*

Inglise anekdoot.

Arvukorpused[3]

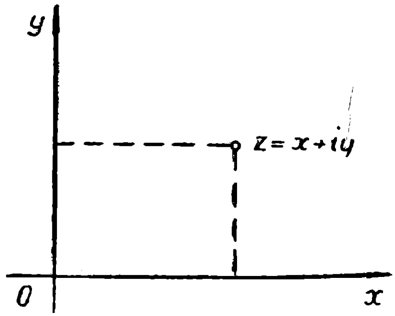
Võrdleme kaht hästi tuntud arvuvalda — täisarvude hulka ja ratsionaalarvude hulka. Tähistame neid arvuvaldu edaspidi vastavalt Z ja Q. Teostades liitmis-, lahutamis- ja korrutamistehteid täisarvudega, saame tulemusena jälle täisarvud. Selles mõttes kõneldakse, et täisarvude vald on mainitud kolme aritmeetilise tehte suhtes kinnine. Kui kõnelda täpsemalt, siis on arvuvald Z kommutatiivne ring[4]. Kuid jagamine pole täisarvude vallas alati teostatav. Et küsimus: «kas täisarv b jagub täisarvuga a» on samaväärne küsimusega: «kas võrrandil $ax = b$ on täisarvuline lahend», siis on täisarvude ring Z näide kommutatiivsest ringist, kus mitte igal võrrandil $ax = b (a \neq 0)$ ei ole lahendit, mis oleks samuti selle ringi element. Olukord on teistsugune ratsionaalarvude valla Q puhul, mis on kinnine ka jagamise suhtes. Selles arvuvallas Q on igal võrrandil $ax = b (a \neq 0$, $a, b \in Q)$ lahend $x = \frac{b}{a} \in Q$. Olemegi jõudnud nn. korpuse ühe lihtsa näiteni.

K o r p u s on selline kommutatiivne ring, milles kõik võrrandid $ax = b (a = 0)$ on üheselt lahenduvad; ehk teisiti, selline ühikelemendiga kommutatiivne ring, milles igal nullist erineval elemendil on olemas üheselt määratud pöördelement[4].

---

[2] Vt. ka käesolev kogumik lk. 108—109.
[3] Rohkem ettevalmistatud lugeja võib alustada kolmandast punktist.
[4] Vt. J. G a b o v i t š. Alegbra põhimõisteid I—V. — Matemaatika ja kaasaeg, VI—X.

Korpuse näideteks on ratsionaalarvude vald Q ja reaalarvude vald R, samuti ka kõigi kompleksarvude hulk $C = \{a + bi \mid a, b \in R,\ i = \sqrt{-1}\}$. Kompleksarve samastatakse tavaliselt reaaltasandi punktidega (vt. joon. 1).



Joonis 1.

Tutvustame siin veel üht vähem levinud kompleksarvude esitusviisi, mis võimaldab hästi selgitada korpuse mõningaid omadusi. Kompleksarve võib vaadelda kui teatavaid erikujulisi teist järku ruutmaatrikseid. Tõepoolest, vaatleme teist järku reaalsete ruutmaatriksite ringi

$$R_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ kus } a, b, c, d \in R \right\}.$$

Korraldame nüüd üksühese vastavuse:

$$a + bi \leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Näiteks reaalarvule a vastab nn. skalaarmaatriks:

$$a \leftrightarrow \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix},$$

imaginaarühikule i aga maatriks

$$i \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Kasutades maatriksite ja kompleksarvude liitmise ja korrutamise eeskirju [4], veendume, et see vastavus on kompleksarvude valla C kui ringi (iga korpus on ring) isomorfism teatava alamringiga A maatriksite ringis R_2. Et see alamring on isomorfne korpusega C, siis ta on samuti korpus.

Samal ajal aga pole terve maatriksite ring R_2 kaugeltki korpus. Tõepoolest, temas leiduvad nullitegurid:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow 0,$$

üheski korpuses aga nullitegureid ei tohi olla. Viimast väidet on muide kerge põhjendada: kui mõnes korpuses oleks $ab = 0 (a \neq 0,\ b \neq 0)$, siis sellest järelduks, et $b = a^{-1}ab = a^{-1}0 = 0$, s. o. $b = 0$.

Näiteis toodud korpustel Q, R ja C on lõpmata palju elemente. Lihtsaim lõplik korpus koosneb kahest elemendist — nullelemendist 0 ja ühikelemendist e, kusjuures

$$0 \cdot 0 = 0,\ 0 \cdot e = e \cdot 0 = 0,\ e \cdot e = e,$$
$$0 + 0 = 0,\ 0 + e = e + 0 = e,\ e + e = 0.$$

Rea näiteid lõplikest korpustest annavad **j ä ä g i k l a s s i k o r p u s e d** $Z/(p)$, kus p on suvaliselt fikseeritud algarv. Need defineeritakse järgmiselt.

Täisarvude vallas Z viiakse läbi klassijaotus, milles ühte klassi loetakse kõik need täisarvud, mis jagamisel algarvuga p annavad ühe ja sama jäägi. Nii saadakse p erinevat klassi $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \ldots, \overline{p-1}$; siin tähistatakse sümboliga $\bar{k}$ klass, mis koosneb täisarvudest $p \cdot n + k$. Saadud klasside liitmine ja korrutamine defineeritakse valemitega

$$\bar{m} + \bar{n} = \begin{cases} \overline{m+n}, \text{ kui } m + n < p, \\ \overline{m+n-p}, \text{ kui } m + n \leqslant p; \end{cases}$$

$$\bar{m} \cdot \bar{n} = \bar{r}, \text{ kui } mn = p \cdot q + r,\ 0 \leqslant r < p.$$

Näiteks $Z/(3)$ koosneb klassidest $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}$, kusjuures

$$\bar{0} + \bar{0} = \bar{0},\ \bar{0} + \bar{1} = \bar{1},\ \bar{0} + \bar{2} = \bar{2},\ \bar{1} + \bar{1} = \bar{2},\ \bar{1} + \bar{2} = \bar{0},$$
$$\bar{2} + \bar{2} = \bar{1};$$

$$\bar{0} \cdot \bar{0} = \bar{0},\ \bar{0} \cdot \bar{1} = \bar{0},\ \bar{0} \cdot \bar{2} = \bar{0},\ \bar{1} \cdot \bar{1} = \bar{1},\ \bar{1} \cdot \bar{2} = \bar{2},\ \bar{2} \cdot \bar{2} = \bar{1}.$$

Jätame lugejale kontrollida, et sellisel viisil määratud liitmis- ja korrutamisoperatsioonide puhul osutub klasside hulk $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \ldots, \overline{p-1}\}$ korpuseks, mida tähistataksegi $Z/(p)$.

Vaatleme nüüd suvalist korpust K. Tema ühikelemendi — võrrandi $ax = a (a \neq 0)$ lahendi — tähistame e. Et korpus K on kinnine liitmise ja lahutamise suhtes, siis on ühikelemendi täisarvulised kordsed $0, \pm e, \pm 2e, \pm 3e, \ldots, \pm ne, \ldots$ samuti korpuse K elementideks.

Vaatleme esialgu juhtu, kus kõik elemendid ne on erinevate kordsuste n korral omavahel erinevad. Sel korral kõneldakse, et korpuse K **k a r a k t e r i s t i k o n 0**. Võib korraldada vastavuse $e \to 1$ ning veenduda, et ring $0, \pm e, \pm 2e, \ldots$ on siis isomorfne täisarvude ringiga Z. Seetõttu võib lugeda, et korpus K karakteristikuga 0 sisaldab täisarvude valda, s. o. $Z \subset K$. Kuid korpus on kinnine ka jagamise suhtes ja seega sisaldab korpus K ka kõiki jagatisi $\frac{m}{n}$, $m, n \in Z$. Teiste sõnadega: kui korpuse K karakteristik on 0, siis $Q \subset K$. See tulemus ütleb meile, et kõik korpused karakteristikuga 0 on lõpmatud. Näiteks korpustest karakteristikuga 0 on tuntud arvuvallad Q, R ja C.

Teine loogiliselt võimalik juht on selline, kus mingite $m \neq n$, $m, n \in Z$ korral $me = ne$. Olgu näiteks $m > n$. Siis $(m - n)e = 0$, millest me järeldame, et leidub naturaalarv u, nii et $ue = 0$.

Olgu p vähim naturaalarv, mille korral $pe = 0$. Võib kergesti veenduda, et p on algarv, kui kasutada asjaolu, et korpuses pole nullitegureid. Korpust K nimetatakse sellisel juhul korpuseks *karakteristikuga* p. Samal viisil nagu eespool võib nüüd veenduda, et iga korpus karakteristikuga p sisaldab jäägiklassikorpust $Z/(p)$. Ühtlasi on korpus $Z/(p)$ lihtsaimaks näiteks korpusest karakteristikuga p.

Olgu antud mingi korpus K. Iga korpust E, mis sisaldab antud korpust K ($K \subset E$), nimetatakse korpuse K *laiendiks* ja tähistatakse E/K. Laiendit E/K nimetatakse *lõplikuks* laiendiks, kui leiduvad $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in E$ selliselt, et iga $\alpha \in E$ on ühesel viisil kirjutatav kujul

$$\alpha = p_1\alpha_1 + \ldots + p_m\alpha_m, \text{ kus } p_i \in K.$$

Seega võib lõplikku laiendit E/K vaadelda kui lõplikumõõtmelist vektorruumi üle põhikorpuse K.

Vaatleme näidet. Reaalarvude hulk $\{p + q\sqrt{2}$, kus $p, q \in Q\}$ osutub korpuseks, s. o. kinniseks liitmise, lahutamise, korrutamise ja jagamise suhtes (kontrollida!). Seda korpust tähistatakse $Q(\sqrt{2})$. Kui siin võtta $q = 0$, siis selgub, et $Q \subset Q(\sqrt{2})$. Laiend $Q(\sqrt{2})/Q$ on lõplik, sest teda võib vaadelda kui 2-mõõtmelist vektorruumi üle korpuse Q. Selle vektorruumi üheks baasiks on $\{1, \sqrt{2}\}$.

Vaatleme nüüd uuesti lõplikke korpusi. Et üheski lõplikus korpuses E ei saa kõik kordsed ne olla omavahel erinevad, siis peab iga selline korpus olema mingi lõpliku karakteristikuga $p > 0$. Seega peab lõplik korpus E sisaldama jäägiklassikorpust $Z/(p)$ ning olema järelikult korpuse $Z/(p)$ laiendiks, mis saab muidugi olla ainult lõplik laiend. Seega võib iga lõplikku korpust E vaadelda kui lõplikumõõtmelist vektorruumi üle jäägiklassikorpuse $Z/(p)$. Olgu E mõõtmeks n: $\dim E = n$. Siis on kerge veenduda, et vastav n-mõõtmeline vektorruum sisaldab p^n elementi (sest korpus $Z/(p)$ koosneb p elemendist). Sellest on näha, et elementide arv lõplikus korpuses on karakteristiku mingi aste. Tõesed on ka vastupidised väited: iga arvu $q = p^n$ jaoks, kus p on algarv, leidub lõplik q elemendist koosnev korpus F_q; kõik sellised q elemendist koosnevad korpused on q iga konkreetse väärtuse korral omavahel isomorfsed.

Algebraliste arvude korpused

Vaatleme võrrandit $p(x) = 0$, kus $p(x)$ on ratsionaalarvuliste kordajatega polünoom. Kui sellise võrrandi aste on n, siis järeldub algebra põhiteoreemist, et võrrandil on korpuses C n lahendit. Need lahendid aga ei pea üldiselt sugugi olema ratsionaalarvud. Kompleksarve, mis on mõne sellise võrrandi lahendeiks, nimetame *algebralisteks arvudeks*.

Nii on näiteks algebraliseks arvuks iga ratsionaalarv, sest iga $q \in Q$ on võrrandi $x - q = 0$ lahendiks. Arvud $\sqrt[n]{q} (q \in Q)$ on samuti algebralised, olles võrrandite $x^n - q = 0$ lahendeiks.

Kerge on tõestada, et algebraliste arvude summa, vahe, korrutis ja jagatis on jällegi algebralised arvud. Seega moodustavad kõik algebralised arvud korpuse, mis sisaldab ratsionaalarvude korpust. Tähistame selle korpuse Ω. Osutub, et kui kompleksarv z on mingi võrrandi $P(z) = 0$ lahendiks, kus $P(z)$ on polünoom, mille kordajad on algebralised arvud, siis arv z on ka algebraline arv. See tulemus näitab, et kõigi algebraliste arvude korpus Ω on algebraliselt kinnine korpus, s. o. kõigi üle selle korpuse võetud polünoomide $P(z)$ puhul kuuluvad võrrandite $P(z) = 0$ lahendid ka sellesse korpusesse. Lisame siinkohal, et algebraliselt kinnise korpuse näiteks on ka kõikide kompleksarvude hulk C.

Vaatleme laiendit Ω/Q. See laiend pole enam lõplik, kuid osutub, et Ω sisaldab alamkorpusi A, mis on juba korpuse Q lõplikeks laiendeiks. Sellise alamkorpuse näiteks on korpus $Q(\sqrt{2})$. Kitsamas mõttes nimetatakse algebraliste arvude korpuseks korpuse Q iga lõplikku laiendit, mille kõik elemendid on algebralised arvud. Seega, iga algebraliste arvude korpuse A korral

$$Q \subset A \subset \Omega \subset C.$$

L. Kroneckerile kuulub tähelepanuväärne tulemus algebraliste arvude korpuste kirjeldamisel. Ta tõestas, et iga algebraliste arvude korpus on isomorfne mõne polünoomide jäägiklassikorpusega $Q[x]/(f(x))$. Viimase mõiste selgituseks olgu öeldud järgmist. Siin tähistab $Q[x]$ ratsionaalarvuliste kordajatega polünoomide hulka, mis, nagu on kerge kontrollida, osutub ringiks. Ka selles ringis, samuti nagu täisarvude ringis Z, ei tarvitse iga element (polünoom) jaguda iga teise elemendiga (polünoomiga), mistõttu siin samuti võib kõnelda jagamisel tekkivast jäägist. Algarvudega analoogilises osas on ringi $Q[x]$ puhul nn. taandumatud polünoomid — polünoomid, mis ei ole esitatavad kahe madalama astmega ratsionaalarvuliste kordajatega polünoomide korrutistena. Ka siin tekivad jäägiklassid polünoomi $f(x)$ järgi, millede hulk $Q[x]/(f(x))$ taandumatu polünoomi $f(x)$ korral osutub samuti korpuseks. Just sellistest korpustest ongi juttu Kroneckeri tulemuses. Näiteks korpus $Q(\sqrt{2})$ on isomorfne korpusega $Q[x]/(x^2 - 2)$.

Märgime täiendavalt, et taandumatu polünoomi mõiste ja jäägiklasside korpuse sellise polünoomi järgi võib sisse tuua ka reaalarvuliste kordajatega polünoomide ringi $R[x]$ puhul. On võimalik näidata, et kompleksarvude korpus C on isomorfne jäägiklasside korpusega $R[x]/(x^2 + 1)$. See annab veel ühe võimaluse kompleksarvude defineerimiseks.

Igas algebraliste arvude korpuses A leidub selline arv $\Theta \in A$, et iga $\alpha \in A$ on avaldatav kujul

$$\alpha = a_0 + a_1\Theta + \ldots + a_{n-1}\Theta^{n-1}, \text{ kus } a_i \in Q$$

ja n on minimaalne sellise polünoomi aste, mille lahendiks on Θ.

Lõpuks veel mõned lisamärkused. Leidub terve hulk arve, mis pole ühegi ratsionaalarvuliste kordajatega polünoomi $p(x)$ puhul võrrandi $p(x) = 0$ lahendeiks. Sellised arvud kannavad transtsendentsete arvude nime. Nende olemasolu tõestas 1844. a. J. Liouville. 1874. a. tõestas G. Cantor, et transtsendentseid arve on tublisti rohkem kui algebralisi: algebraliste arvude hulk on loenduv, transtsendentsete arvude hulk aga kontiinuumi võimsusega. Transtsendentsete arvude näideteks on hästi tuntud $\pi = 3{,}14159\ldots$ ja $e = 2{,}718281\ldots$ Terve hulga uusi näiteid transtsendentseist arvudest annab A. O. Gelfondi teoreem, mis väidab arvu α^β transtsendentsust, kui α ja β on algebralised arvud, kusjuures α ei ole 0 ega 1 ning β on irratsionaalne. Selle teoreemi tõestusega andis A. Gelfond 1936. a. lahenduse D. Hilberti kuulsale probleemile.

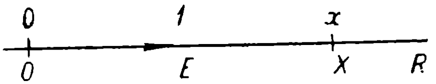
Arvuteooria ja diofantilise geomeetria jaoks on erilise tähtsusega just algebraliste arvude korpused. Edaspidi mõistetakse käesolevas kirjutises korpusena peaaegu alati mõnda algebraliste arvude korpust.

Projektiivne n-mõõtmeline ruum

Olgu K suvaline korpus. Edaspidi tuleb sageli vaadelda «n-ikute» hulka K^n, s. o. hulka

$$K^n = K \times \ldots \times K = \{(k_1, \ldots, k_n), \text{ kus iga } k_i \in K\}$$

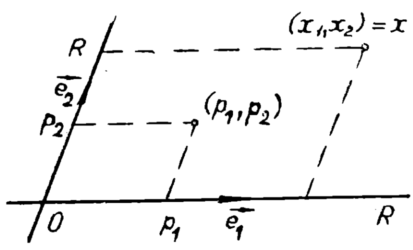
või mõnda selle hulga alamhulka. Kuidas tuua hulka K^n geomeetria elemendid? Vaatleme esialgu kaht erijuhtu.



Joonis 2.

On hästi teada, et reaalarvude hulk R on üksüheses vastavuses sirge punktidega. See vastavus korraldatakse järgmiselt. Sirgel valitakse vabalt alguspunkt O ja ühikvektor $\overrightarrow{OE} = \vec{e}_1$ (joon. 2); loetakse, et arvule 0 vastab punkt O, arvule 1 — punkt E, suvalisele reaalarvule x aga vektori $\overrightarrow{OX} = x \cdot \overrightarrow{OE}$ otspunkt X.

Analoogiliselt saab tasandil nn. reeperi $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ abil korraldada üksühese vastavuse reaalarvude paaride (x_1, x_2) ja tasandi punktide vahel (joon. 3). Sageli tasandi punktid ja reaalarvude paarid $(x_1, x_2) = x$ lihtsalt samastatakse. Reaalarvuliste komponentidega paaride hulka $R \times R$ tähistatakse R^2. Selles vastavuses vastab paaridele (p_1, p_2), p_1, $p_2 \in Q$ teatav punktide alamhulk tasandil, mida tähistatakse Q^2. Selgub ühtlasi, et hulka Q^2 võib vaadelda kui teatavat kahemõõtmelist vektorruumi.



Joonis 3.

Üldiselt vaatleme n-mõõtmelist vektorruumi $V^n(K)$ üle suvalise korpuse K. Selle elemente nimetame jällegi punktideks. Olgu $e_1 \ldots e_n$ selle vektorruumi mingi baas. Siis saab vektorruumi iga elemendi $x \in V^n(K)$ ühesel viisil avaldada kujul

$$x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n, \quad \text{kus iga } x_i \in K. \tag{1}$$

Korraldame vastavuse

$$x \to (x_1, \ldots, x_n).$$

Valemist (1) on näha, et $V^n(K)$ elementide x ja «n-ikute» $(x_1, \ldots, x_n)$, kus $x_i \in K$, vahel tekib üksühene vastavus $x \leftrightarrow \leftrightarrow (x_1, \ldots, x_n)$. Vektorruumi $V^n(K)$ punkte võib saadud üksühese vastavuse tõttu samastada K^n elementidega $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Edaspidi kõnelemegi ruumist K^n ja tema punktidest $x = = (x_1, \ldots, x_n)$. Erijuhul $n = 2$ räägitakse tasandist K^2 ja selle punktidest.

Vaatleme nüüd ruumi K^{n+1}. Selle ruumi nullpunktist $(0, \ldots, 0)$ erinevate punktide hulga tähistame $(K^{n+1})^*$. Korpuse K nullist erinevate elementide hulga tähiseks olgu K^*. Defineerime ruumi $(K^{n+1})^*$ punktide korrutamise korpuse elementidega järgnevalt. Kui $k \in K^*$ ja $(x_0, \ldots, x_n) \in (K^{n+1})^*$, siis loeme, et

$$k \cdot (x_0, \ldots, x_n) = (kx_0, \ldots, kx_n).$$

Me näeme, et $(K^{n+1})^*$ punktide korrutamine K^* elementidega annab meile jällegi $(K^{n+1})^*$ punktid. Seega oleme defineerinud kompositsiooni $(k, x) \to kx$, s. o. kujutuse

$$K^* \times (K^{n+1})^* \to (K^{n+1})^*.$$

See kompositsioon võimaldab punktihulgal $(K^{n+1})^*$ läbi viia järgmise klassijaotuse. Loeme punkte $x = (x_0, \ldots, x_n)$ ja $y = = (y_0, \ldots, y_n)$ ekvivalentseteks, kui leidub $k \in K^*$, nii et $x = = ky$, s. o. kui $x_0 = ky_0, \ldots, x_n = ky_n$. Tähistame saadud ekvivalentsuse tähega $\mathcal{E}$. Kõik omavahel ekvivalentsed punktid loeme ühte klassi kuuluvaiks. Me saame punktihulgal $(K^{n+1})^*$ klassijaotuse, mille klasside hulka $(K^{n+1})^*/\mathcal{E}$ nimetatakse n-mõõtmeliseks projektiivseks ruumiks $P_n(K)$. Ekvivalentsi $\mathcal{E}$ klasse (s. o. ruumi $P_n(K)$ punkte) võib, nagu näha, tõlgendada nullpunkti läbivate sirgetena ruumis K^{n+1}. Erijuhul, kui $K=R$ ja $n=2$, annab see algebraline konstruktsioon tavalise projektiivse reaaltasandi [5], nii et meil on tegemist projektiivse tasandi mõiste üldistusega suvaliste korpuste ja suvalise mõõtme juhule. Projektiivsete ruumide $P_n(K)$ vaatlemist nõuavad meilt diofantilise geomeetria ülesanded.

(*Järgneb*)

KUIDAS PÜÜDA KÕRBES LÕVI?

Lisaks «Matemaatika ja kaasaja» lugejatele juba tuntud lõvijahi teoreetilistele meetoditele (vt. Matemaatika ja kaasaeg, I, lk. 12—13) esitame veel mõned jahimeetodid raamatust «Физики шутят», M., 1966.

Projektiivse geomeetria meetod. Üldsust kitsendamata võime kõrbe lugeda tasandiks. Projekteerime tasandi sirgele, sirge aga puuris asetsevasse punkti. Siis projekteerub ka lõvi samasse punkti.

Ridade teooria meetod. Teeme loomuliku eelduse, et kõrb on separaabel ruum. Siis ta sisaldab kõikjal tiheda punktihulga, millest võib valida suvaliseks punktiks koonduva jada. Valime jada, mille piirväärtuseks on lõvi asukoht. Seejärel võtame kaasa vajaliku varustuse ning hiilime mööda neid punkte lõvini ja püüame ta kinni.

Topoloogia meetod. Märgime, et lõvi keha sidusus pole kindlasti väiksem kui toori sidusus. Paigutame kõrbe neljamõõtmelisse ruumi. Selles ruumis võib teatavasti lõvi pidevalt deformeerida nii, et peale tagasitoomist kolmemõõtmelisse ruumi osutub lõvi sõlme seotuks. Et selline lõvi on abitu, siis ei paku tema kinnipüüdmine enam raskusi.

Kompleksmuutuja funktsioonide teooria meetod. Vaatleme lõvi analüütilise funktsioonina $f(z)$ ning kirjutame integraali

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-\gamma}\,dz,$$

kus C on kõrbe piirav kontuur, aga γ punkt, milles asub puur. Peale integreerimist saame $f(\gamma)$, s. t. lõvi on puuris.

Tõenäosusteooria meetod. Alati on olemas positiivne (nullist erinev) tõenäosus selleks, et lõvi on juba puuris. Juhul, kui lõvi pole puuris, vaatleme sirget, mis ühendab lõvi ja puuri. Lõvi liikumist võib vaadelda osakese juhusliku ekslemisena sellel sirgel. Et osake läbib (tõenäosusega 1) lõpmatu arv kordi kõiki selle sirge punkte, siis satub ta ka lõpmatu arv kordi puuri. Tema tabamiseks tuleb puur vaid õigeaegselt sulgeda.

Termodünaamika meetod. Paigutame läbi kõrbe poolläbilaskva kile, mis laseb läbi kõike peale lõvide. Selle abil õnnestubki lõvi tabada.

Teoreetilise füüsika meetod. Teatavasti on metsikud lõvid kõrbes mittevaadeldavad. Järelikult on kõik kõrbes vaadeldavad lõvid tehislõvid. Et viimaste püüdmine ei valmista põhimõttelisi raskusi, siis jätame selle lugejale koduseks ülesandeks.

---

[5] Vt. käesolev kogumik, lk. 16.

PILK GRAAFITEOORIASSE

M. Koit

Küllap teab igaüks oma kogemustest, et joonist kasutades osutub ühe või teise probleemi lahendamine sageli hoopis hõlpsamaks. Paber ja pliiats käepärast, kujutame juba harjumuslikult punktide või sõõridena asulaid, inimesi, keemiliste elementide aatomeid — olenevalt sellest, missuguse ülesande juures parajasti pead murrame — ja ühendame neid joontega, tähistades niiviisi nende objektide vahelisi seoseid. Selliseid skeeme võib kohata mitmel pool ja väga mitmesuguste nimetuste all: vooluahelad, võrgud, diagrammid, genealoogilised graafid jms.

Arvestades niisuguste skemaatiliste jooniste üldkasutatavust, kerkis loomulikult vajadus nende lähemaks uurimiseks. Nii kujuneski uus matemaatika distsipliin — g r a a f i t e o o r i a.

Graafiteooriale pani tegelikult aluse juba L. Euler oma 1736. a. ilmunud töös. Esialgu suhtuti uue teooria algmetesse aga üsna umbusklikult, sest pika aja vältel leidsid graafid rakendamist põhiliselt vaid meelelahutustes (ülesanne Königsbergi sildadest, malendite paigutamine, ratsukäiguga liikumine jms.). Käesoleva sajandi alguseks kerkis aga esile terve rida teoreetilise ning praktilise tähtsusega probleeme, mis olid otseselt või kaudselt seotud graafidega — selliseid probleeme tekkis nii keemias, elektrotehnikas, sotsioloogias kui ka algebras, topoloogias ja hulgateoorias. Termin «graaf» sai üldtunnustatuks pärast D. Königi monograafia ilmumist 1936. a., kus abstraktselt vaadeldakse graafe kui iseseisvaid matemaatilisi objekte. Õieti oli just see töö aluseks ühtsete meetodite väljatöötamisele graafiteoorias ning tema edasisele tulemusrohkele arengule.

Käesolevas artiklis tutvustamegi mõningaid lihtsamaid mõisteid, mille teadmine võiks eelneda graafiteooria süvendatud tundmaõppimisele.

1. Mis on graaf? Toimugu mingis asutuses maleturniir. Püüame joonisel kujutada võistluste käiku. Seame igale võistlejale vastavusse ühe punkti tasandil ja ühendame joonega need punktipaarid, mis vastavad omavahel juba võistelnud mängijatele. Võime eeldada, et objektiivsuse huvides peab iga võistleja iga ülejäänud võistlejaga mängima kaks mängu. Mingiks täht-ajaks lõppenud kohtumist kujutab siis skeem joonisel 1. Niisugune skeem ongi graaf. Ta koosneb punktidest, mida nimetame graafi **tippudeks**, ja neid ühendavatest joontest — graafi **kaartest**.

Üldiselt: ütleme, et on antud **graaf** $G = (X, U)$, kui on antud

1) mittetühi (tippude) hulk X,

2) paaride $u = (x, y)$ (kaarte) hulk U, kus $x \in X$, $y \in X$.

(Eeldame, et iga tipupaari ühendab ülimalt lõplik arv kaari.) Hulk X võib olla lõpmatu — siis kõneldakse lõpmatust graafist. Edaspidi vaatleme siiski põhiliselt lõplikke graafe.

Huvitagu meid toodud näite puhul nüüd ainult võistlejate b, c ja d omavahelised mängud. Joonisel 1 vastab neile nn. alamgraaf (ümbritsetud punktiiriga).

Graafi (X, U) **alamgraafiks** nimetame graafi (A, U_A), kus A on tippude hulga X mingi alamhulk ja U_A kõigi niisuguste kaarte $(x, y) \in U$ hulk, mille mõlemad tipud x ja y kuuluvad hulka A.

Graafi (X, Y) **osagraafi** all mõistame graafi (X, U'), kus $U' \subset U$, s. t. graafi, milles osa lähtegraafi (X, U) kaartest on ära jäetud.

Joonisel 1 näidatud graafi üheks osagraafiks on näiteks graaf, mis vastab olukorrale, kus ühelgi võistlejal ei ole peetud rohkem kui üks mäng. Samal ajal on joonisel toodud graaf omakorda kogu turniiri lõpptulemust kujutava graafi osagraafiks.

Graafina võib vaadelda ka ENSV kõigi maanteede kaarti. Selle üks alamgraaf on Tartu rajooni maanteede kaart, osagraafi moodustavad aga näiteks ENSV kõik I klassi maanteed.

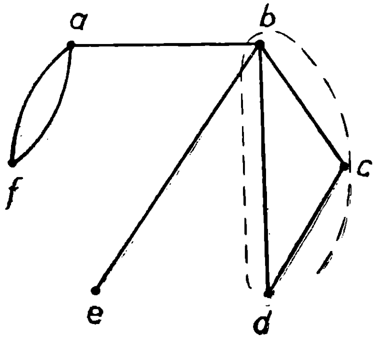
Ütleme, et kaarte jada $\mu = [u_1, u_2, \ldots]$ on **tee** graafis (X, U), kui igal lähispaaril selles jadas on ühine tipp. Kui $u_i = (x_i, x_{i+1})$, siis tähistame teed ka $\mu = (x_1, x_2, \ldots)$. Rõhutame, et tee võib koosneda ka ainult ühest kaarest.

Kontuuriks nimetame lõplikku teed $\mu = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, kus algustipp ühtib lõpptipuga: $x_1 = x_n$. Kontuuri saab moodustada ka ainult üks kaar (x, x) — nn. **silmus**.

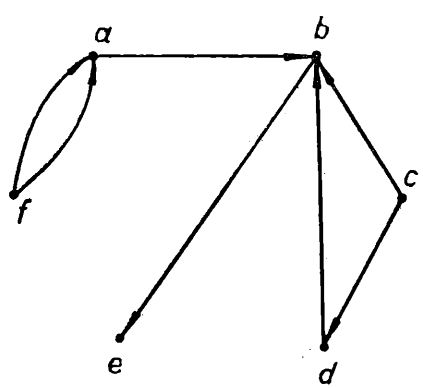
Joonisel 1 kujutatud graafis leidub näiteks tee (f, a, b, c, d); (b, c, d, b) on aga kontuur.

Ütleme, et graaf (X, U) on **sidus**, kui iga tema kahe tipu x ja y korral võib leida tee $(x, \ldots, y)$. Joonisel 1 kujutatud graaf on sidus. ENSV kõiki maanteid kujutav graaf aga ei ole sidus: ei leidu maanteede jada, mis ühendaks näiteks Tartut Kingissepaga. Samal ajal koosneb see graaf muidugi alamgraafidest, mis on sidusad (nn. sidusad komponendid).

Graafi (X, U) kaarte hulk U võib olla ka tühi. Sel juhul saame nn. **nullgraafi**, mis koosneb ainult isoleeritud tippudest. Nullgraafina võib kujutada näiteks Venemaa raudteede võrku



Joonis 1.



Joonis 2.

1836. aastal. (Esimene raudtee Venemaal — Peterburist Tsarskoje Selooni — ehitati teatavasti 1837. a.)

Teiseks äärmiseks juhtumiks on täielik graaf, mille iga kaks tippu on ühendatud kaarega. Malevõistlusi kujutav graaf oleks täielik siis, kui iga võistleja oleks juba mänginud vähemalt korra igaühega ülejäänud võistlejatest. Graaf joonisel 1 ei ole täielik: näiteks mängija a on küll kohtunud mängijaga b ja kaks korda mängijaga f, kuid kohtumised mängijatega c, d ja e seisavad tal veel ees.

Jooniselt 1 paraku ei selgu, missuguse tulemusega lõppesid mängud. Puuduva informatsiooni võime suurema vaevata lisada, kui orienteerime graafi kaared: varustame nad nooltega, mis on suunatud võitjalt kaotajale. Vastaku võistluste seisule vaadeldaval momendil joonisel 2 kujutatud orienteeritud graaf.

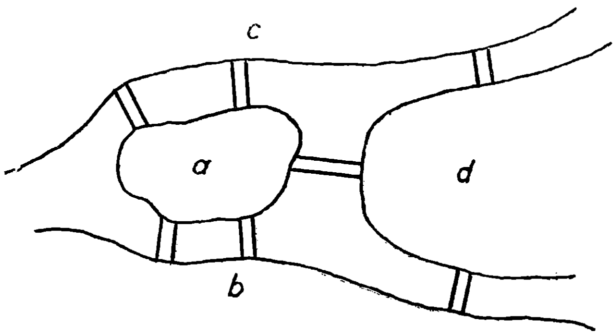
Tähistame eristamiseks orienteeritud graafi kaari $\bar{u} = (x \to y)$ ja kaarte (järjestatud paaride) hulka $\bar{U}$. Hulk $\bar{U}$ määrab tippude hulga X kujutuse f iseendasse: iga tipu kujutiseks loeme nende tippude hulka, millesse suunduvad nooled vaadeldavast tipust (mõne tipu kujutis võib olla tühi hulk). Sellepärast saame orienteeritud graafi defineerida ka kujutuse f kaudu ja vastavalt tähistada (X, f). On selge, et orienteeritud graafi alam- ja osagraafid on samuti orienteeritud.

Teeks orienteeritud graafis (orienteeritud teeks) nimetame kaarte jada $[\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots]$, kus iga järgneva kaare algustipp ühtib eelneva kaare lõpptipuga. (Analoogiliselt defineeritakse orienteeritud kontuur.) Orienteeritud teed tippude järgi tähistades kirjutame $(x_1 \to x_2 \to x_3 \to \ldots)$.

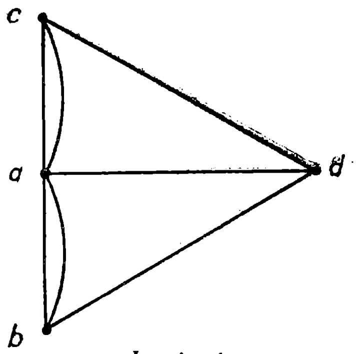
Graafis joonisel 2 on üheks pikemaks orienteeritud teeks $(f \to a \to b \to e)$. Märgime, et vastavas mitteorienteeritud graafis (joonisel 1) leidub pikem tee (f, a, b, c, d). Kinnine tee (b, c, d, b), mis on küll kontuur, ei ole orienteeritud kontuur.

Kasutatakse graafe, mis sisaldavad samaaegselt nii orienteeritud kui orienteerimata kaari. See võimaldab vaadeldud maleturniiri näites kujutada ka viigiga lõppenud mänge: lepime kokku ühendada tipud orienteerimata kaarega siis, kui vastavad võistlejad mängivad viiki.

2. Huvitavad jooned graafis. Vaatleme ülesannet, millega algab esimene graafiteooria-alane töö. See ülesanne on seotud Königsbergi sildadega. Königsbergi linn asus jõe kahel kaldal ja kahel saarel. Erinevad linnaosad olid ühendatud seitsme sillaga (joonis 3). Küsiti, kas saab korraldada niisuguse jalutusretke, mis algaks ja lõpeks samas kohas ning mille jooksul läbitaks seitsmest sillast igaühte täpselt üks kord.



Joonis 3.



Joonis 4.

Joonisel 4 on kujutatud graaf, mille tippudeks on linnaosad *a*, *b*, *c*, *d* ja kaarteks nendevahelised sillad. Euler näitas, et selline graaf ei moodusta ühtset kontuuri. Ühtse kontuuri korral peaks igasse graafi tippu sisenema sama palju kaari, kui sealt väljub, s. t. graafi igas tipus peaks olema paarisarv kaari. Et joonisel 4 kujutatud graaf seda tingimust ei rahulda, tuleb ülesandes esitatud küsimusele vastata eitavalt.

Oma töös püstitas Euler tegelikult üldisema probleemi: missugune graaf on selline kontuur, mis sisaldab graafi kõiki kaari ja igaüht neist täpselt üks kord? Niisugust kontuuri nimetame Euleri kontuuriks.

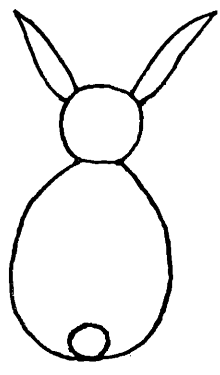
Selleks, et graaf oleks Euleri kontuur, peab ta olema lõplik ja sidus. Samuti on selge, et iga Euleri kontuur peab sisenema igasse tippu ja väljuma sellest üks ja sama arv kordi. Nimetame mingisse tippu sisenevate või sealt väljuvate kaarte arvu selle tipu astmeks. Seega: kui graaf on Euleri kontuur, siis peab graafi iga tipu aste olema paarisarv. Euler tõestas, et need tingimused — graafi lõplikkus, sidusus ja kõigi tippude astmete paarisarvulisus — on ühtlasi piisavad.

Näitame seda. Oletame, et alustame teed μ mingist tipust a ja jätkame seda niikaugele kui võimalik, läbides iga kord kaare, mida me veel ei ole läbinud. Kaarte arv on lõplik ja sellepärast lõpeb selline protsess kunagi. Igas tipus on paarisarv kaari, seetõttu on igast tipust, välja arvatud algustipp, olemas ka väljapääs. Järelikult peab tee μ lõppema tipus a. Kui μ sisaldab graafi kõik kaared, siis ongi ta otsitav. Kui aga leidub tipp b, mis kuulub küll teesse μ, kuid millest väljuv kaar tees μ ei sisaldu, siis saame tingimata leida ka niisuguse teesse μ mittekuuluva kaare, mis siseneb tippu b, sest kõikide tippude astmed on paarisarvud. Alustame nüüd tipust b uut teed μ', kasutades ainult neid kaari, mis teesse μ ei kuulu. See tee lõpeb tipus b. Siis aga saame moodustada suurema kontuuri: liigume tipust a mööda teed kuni tipuni b, seejärel läbime kontuuri μ' ja, pöördunud tagasi tippu b, läbime ülejäänud osa teest μ kuni tipuni a. Kui osutub, et on veel läbimata kaari, võime saadud teed uuesti laiendada, kuni lõpuks leiame Euleri kontuuri.

Graaf, mis kujutab mingi näituse plaani, on tavaliselt Euleri kontuur: näituseruumidesse võib paigutada märgid, mis reguleerivad näitusekülastaja liikumist nii, et viimane vaataks iga eksponaati täpselt ühe korra.

Terves reas nuputamisülesannetes on nõutud mingi kujundi joonestamist ühe joonega. Ühtki jooneosa ei tohi seejuures tõmmata mitu korda, kuid üldiselt ei pea selline joon algama ja lõppema samas punktis. Niisuguse ülesande lahendamine tähendab mingis graafis tee leidmist, mis läbiks iga kaare täpselt üks kord. Sellist teed nimetatakse Euleri teeks, graafi aga, mis osutub Euleri teeks, nimetatakse unikursaalseks. Eelneva põhjal on lihtne näha, et graaf on unikursaalne parajasti siis, kui ta on sidus ning sisaldab ülimalt kaks paarituastmelist tippu: üks neist on Euleri tee algus, teine lõpp.

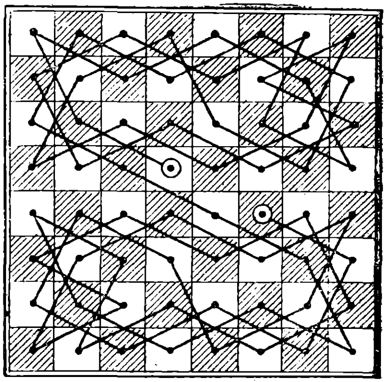
Joonis 5 kujutab graafi, mis pole Euleri tee. Teiste sõnadega: seda jänest ei saa joonistada ühe joonega, läbimata ühtki kaart üle ühe korra. Seevastu joonisel 6 toodud portreed (ühe vana ülesannete kogu andmeil kujutavat see Inglise kuningat Edward Kolmandat) on võimalik niiviisi joonistada.



Joonis 5.

Huvi pakub ka järgmine ülesanne: leida graafis tee, mis läbib graafi iga tippu täpselt üks kord. Seda nimetatakse Hamil-

Joonis 6.



Joonis 7.

t o n i t e e k s. Olgu näiteks vaja läbida ratsuga kogu malelaud, viibides igas ruudus üheainsa korra. See tähendab teatava 64-tipulise graafi jaoks Hamiltoni tee leidmist. Ülesande üks lahendus on näidatud joonisel 7.

Vaatamata analoogiale Euleri teega, on Hamiltoni tee leidmine tunduvalt raskem probleem. Saab siiski näidata, et lõplikus täielikus graafis eksisteerib alati Hamiltoni tee.

T õ e s t u s (König). Vaatleme orienteeritud graafi $(X, \overline{U})$ (kui täielikus orienteeritud graafis leidub Hamiltoni tee, siis leidub see muidugi ka vastavas orienteerimata graafis). Olgu $\mu = (a_1 \to a_2 \ldots \to a_p)$ orienteeritud tee, mille kõik tipud on erinevad, ja olgu x tipp, mis ei kuulu teesse μ. Näitame, et võib konstrueerida tee $\mu_k = (a_1 \to a_2 \to \ldots \to a_k \to x \to a_{k+1} \to \ldots \to a_p)$. Oletame väitevastaselt, et ei leidu niisugust naturaalarvu k, $0 \leqslant k \leqslant p$, et $(a_k \to x) \in \overline{U}$ ja $(x \to a_{k+1}) \in \overline{U}$. Sel juhul $(a_k \to x) \in \overline{U}$ korral $(x \to a_{k+1}) \overline{\in} \overline{U}$, kuid graafi täielikkuse tõttu $(a_{k+1} \to x) \in \overline{U}$. Kui ei eksisteeri teed $\mu_0 = (x \to a_1 \to \ldots \to a_p)$, siis see tähendab, et $(x \to a_1) \overline{\in} \overline{U}$, järelikult $(a_1 \to x) \in \overline{U}$ ja tehtud oletuse põhjal $(a_2 \to x) \in \overline{U}$. Analoogiliselt jätkates saame, et $(a_3 \to x) \in \overline{U}, \ldots, (a_p \to x) \in \overline{U}$ ning seega eksisteerib tee $\mu_p = (a_1 \to \ldots \to a_p \to x)$. Saadud vastuolu näitabki, et võib järk-järgult konstrueerida tee, mis sisaldab graafi kõik tipud.

Sellest tulemusest võime näiteks järeldada, et kui võistlustel ükski kohtumine ei lõpe viigiga, siis saab võistlejaid alati järjestada nii, et iga eelnev oleks võitnud temale vahetult järgnevat.

3. **Puu. Genealoogiline graaf.** Nimetame *puuks* lõplikku sidusat graafi, mis ei sisalda ühtki kontuuri.

Kui graaf on küll mittesidus, kuid temas ei leidu kontuure, siis on iga tema sidus komponent puu; niisugust graafi nimetatakse *metsaks*.

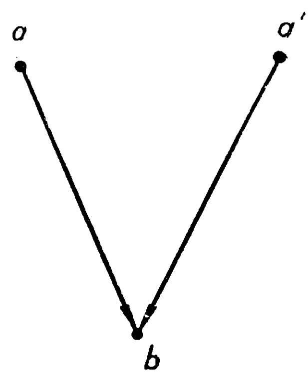
Puuna saab kujutada näiteks ametialast hierarhiat, kui ühendame kaarte abil iga ülemust tähistava tipu tema vahetutele alluvatele vastavate tippudega. Tõepoolest: kui niisuguses graafis oleksid kontuurid, siis võiks see viia vasturääkivate korraldusteni.

Lihtsaim puu koosneb kahest tipust ja ühestainsast neid ühendavast kaarest. Suvalise puu saame sellest lähtudes konstrueerida, lisades järjest kaari. Iga kord, kui lisame ühe kaare, lisandub ka tipp, järelikult on n tipuga puul $n-1$ kaart.

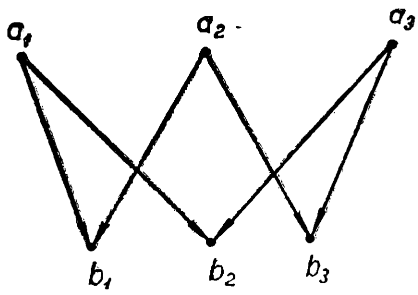
Olgu näiteks tegemist n linnaga, mis tuleb omavahel ühendada naftajuhtmete võrguga. Iga linnade paari jaoks olgu teada ka neid ühendava juhtme maksumus. Odavaima võrgu graaf peab olema puu, sest kui ta sisaldaks kontuuri, võiks eemaldada selle kontuuri ühe kaare, ja linnad oleksid ikka ühendatud. Järelikult tuleb n linna ühendamiseks ehitada $n-1$ juhet. Otsitava puu võib moodustada nii, et kõigepealt paigaldame juhtme, mille maksumus on kõige väiksem. Igal järgneval sammul lisame puule odavaima lülidest, mis ei tekita kontuuri (kui on mitu sellist lüli, siis valime neist suvalise).

Huvi pakub veel üks eriliik orienteeritud graafe, mis ei sisalda kontuure — nn. *genealoogilised graafid*. Nimetus on tulnud sellest, et neid kasutatakse sugupuude uurimisel. Kaar $(a \to b)$ sellises graafis näitab, et b on a poeg või tütar. Et igal indiviidil on kaks vanemat, isa ja ema, siis peab igasse tippu üldiselt sisenema täpselt kaks kaart (joonis 8). Meie teadmised väga kaugete esivanemate kohta on tavaliselt ebatäielikud ja seetõttu jõuame graafi koostamisel lõpuks olukorrani, kus me ei tea kas üht või mõlemat vanemat. Sellepärast lepitaksegi kokku, et genealoogilise graafi igasse tippu siseneb kas kaks kaart või vähem.

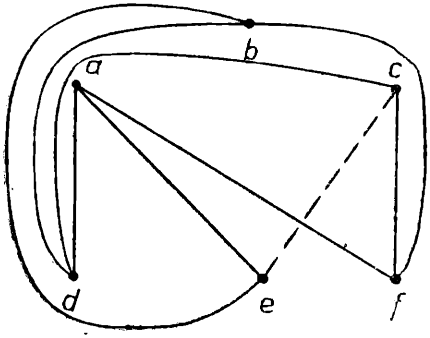
Olgu antud niisugune orienteeritud graaf, kus igasse tippu siseneb ülimalt kaks kaart. Kas võib lugeda seda graafi genealoogiliseks, s. t. kas saab tema tipud jaotada kahte klassi — isade klass I ja emade klass E — nii, et iga tipu jaoks moodustaksid kaks temasse sisenevat kaart joonisel 8 näidatud kujundi, kusjuures $a \in I$ ja $a' \in E$? Jooniselt 9 näeme, et alati ei ole see võimalik. Oletame näiteks, et a_1 kuulub isade klassi I. Siis peab



Joonis 8.



Joonis 9.



Joonis 10.

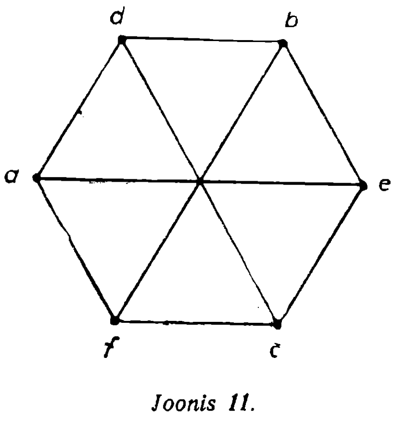
a_2 kuuluma klassi E, sest tema laps b_1 on ühtlasi ka a_1 laps. Seega b_3 on b_1 poolvend või poolõde: neil on ühine ema a_2. Sellepärast peab a_3 kuuluma klassi I. Nüüd aga selgub, et b_2 mõlemad vanemad — a_1 ja a_3 — kuuluvad klassi I. Analoogiliselt jõuame vastuoluni, kui oletame, et a_1 kuulub klassi E.

4. Tasandiline graaf. Olgu antud kolm linna a, b ja c, nende ühine veetorn d, gaasitehas e ja elektrijaam f. Iga linn olgu ühendatud iga varustusallikaga. Kas saab kujutada joonisel linnu, varustusallikaid ja ülekandeliine nii, et ükski joontepaar ei lõikuks mujal kui lõpp-punktis? Vahetud katsed näitavad, et alati saab küll joonestada kaheksa mittelõikuvat ülekandeliini, üheksas aga lõikab vähemalt ühte eelmistest (joonis 10).

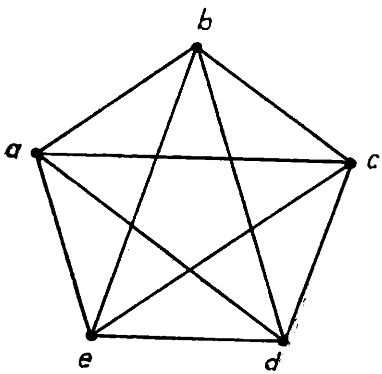
Nimetame graafi, mida saab joonestada tasandile nii, et tema kaartel ei ole graafi tippudest erinevaid lõikepunkte, t a s a n d i l i s e k s. Graaf joonisel 10 ei ole seega tasandiline (kui ka punktiiri (e, c) lugeda kaareks).

Sama graafi saab kujutada veel teisiti (joonis 11). Kaarte lõikepunkt kuusnurga tsentris ei ole graafi tipp: võime kujutleda, et selle punkti läbivad kaared üksteise kohal.

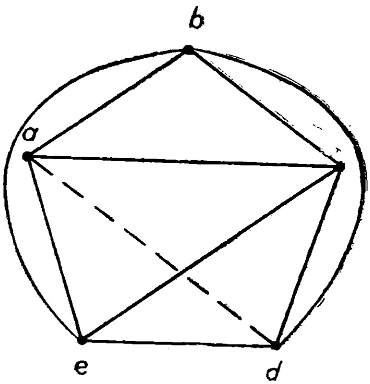
Ka iga linna teede kaarti ei saa pidada tasandiliseks graafiks: kui loeme graafi tippudeks teede niisugused ristumiskohad, milles saab ühelt teelt teisele üle minna, siis võivad ju kaa-



Joonis 11.



Joonis 12.



Joonis 13.

red lõikuda ka tippudest erinevates punktides — kohtadel, kus üks tee kulgeb teise all, näiteks tunnelis.

Tasandiline ei ole ka viietipuline täielik graaf (joonis 12).

Kuidas me ka tasandil seda graafi ei joonestaks, peavad tema tipud moodustama kontuuri (graaf on täielik). Kaare (*a*, *c*) kujutamiseks on kaks võimalust: kas paigutada ta sisse- või väljapoole kontuuri (*a*, *b*, *c*, *d*, *e*). Oletame, et tõmbasime selle kaare kontuuri sees. Tipp *b* peab olema ühendatud tippudega *e* ja *d*. Lõikumiste vältimiseks tõmbame kaared (*b*, *e*) ja (*b*, *d*) väljapoole kontuuri. Kaar (*c*, *e*) võib seega asuda ainult kontuuri sees, sest vastasel korral lõikuks ta kaarega (*b*, *d*). Kui nüüd viimase kaare (*a*, *d*) tõmbame väljaspool kontuuri, siis lõikub ta kaarega (*b*, e), kui aga seespool, siis kaarega (*c*, *e*) (joonis 13).

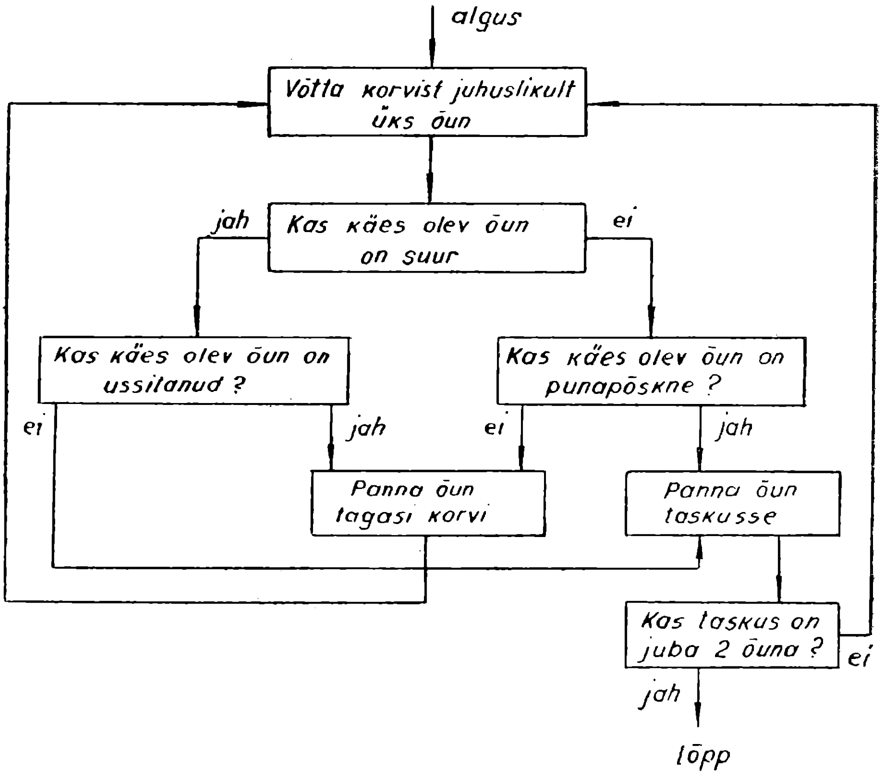
Kui tahame välja selgitada, kas antud graaf on tasandiline, siis saame sageli kasutada joonistel 11 ja 12 kujutatud mittetasandilisi graafe.

Graafi mingitele kaartele lisatippude paigutamist nii, et nende kaarte asemel tekivad mitmest kaarest koosnevad teed, nimetatakse graafi laiendamiseks. Ümberpöördult: kui graaf sisaldab niisuguseid elementaarseid teid, mille vahepealsetest tippudest ei lähtu teisi kaari, siis seda graafi saab ahendada niisuguseks graafiks, millel elementaarsed teed on asendatud kaartega.

Antud mõisted võimaldavad sõnastada järgmise väite: graaf on tasandiline parajasti siis, kui ta ei sisalda ühtegi niisugust graafi, mida saaks ahendada joonisel 12 esitatud viisnurkseks graafiks või joonisel 11 esitatud kuusnurkseks graafiks.

Graafi tasandilisuse probleem kerkib näiteks siis, kui koostame algoritmide blokk-skeeme[1]: kas saab antud blokk-skeemi joonestada nii, et blokke ühendavad nooled ei lõikuks? Iga blokk-

[1] Vt. Ü. Kaasik. Algoritmide blokk-skeemid. — Matemaatika ja kaasaeg, V, lk. 24—36. Kõik seal toodud blokk-skeemid osutuvad tasandilisteks.



Joonis 14.

skeemi võime kujutada orienteeritud graafina, mille tippudeks on blokid ning kaarteks blokkide ühendusnooled. Blokk-skeem joonisel 14 kirjeldab näiteks lapse tegevust, kes tahab võtta korvist kaks tema arvates maitsvat õuna. See graaf ei ole tasandiline, sest seda saab ahendada mittetasandiliseks kuusnurkseks graafiks.

5. Graafiteooria põhilised arvud. Igal geograafilisel (poliitilisel) kaardil värvitakse kõik riigid nii, et neid saaks üksteisest eristada. Missugune peaks olema vähim hulk värve, millest piisaks suvalise geograafilise kaardi värvimiseks? Laialt on tuntud hüpotees, et piisab neljast värvist. Kuigi nelja värvi probleem on matemaatikute uurimisobjektiks juba terve sajandi vältel, ei ole siiani õnnestunud seda hüpoteesi tõestada.[2]

See probleem andis tõuke graafiteoorias uute mõistete sissetoomiseks ja mitmete tähtsate tulemuste saamiseks.

[2] Lähemalt vt. J. Gabovitš. Nelja värvi probleem. — Matemaatika ja kaasaeg, IV, lk. 9—17.

Olgu antud naturaalarv p. Ütleme, et graaf G on p-kromaatiline, kui tema tippe saab värvida p erineva värviga nii, et ükski kaarega ühendatud tipupaar ei ole sama värvi. Vähimat arvu p, mille korral G on p-kromaatiline, nimetatakse selle graafi **kromaatiliseks arvuks** ja tähistatakse $\gamma(G)$.

Graafi kromaatilise arvu leidmisel võib kasutada järgmist mõttekäiku. Oletame, et graafi tipud on juba värvitud värvidega 1, 2, ..., p, kusjuures naabertipud (s. t. kaarega ühendatud tipud) on alati erinevat värvust. Püüame kõrvaldada mingi värvi (nimetame seda värvi kriitiliseks). Selleks fikseerime kõigepealt mingi ühe tipu x, mis on seda kriitilist värvust. Võtame veel vaatlusele ainult mingi kahe mittekriitilise värviga (olgu need j ja k) tippe sisaldava alamgraafi. Olgu selle alamgraafi sidusad komponendid C_1^{jk}, C_2^{jk}, ... Kui nendesse komponentidesse kuuluvad tipud, mis samaaegselt osutuvad tipu x naabertippudeks, ei ole kahte erinevat värvust, siis saame tipu x värvust muuta: võtame eraldi iga komponendi C_i^{jk}, milles sisalduvad tipu x naabertipud on kõik värvitud näiteks värviga j, ning vahetame selles komponendis värvid j ja k (jättes muutmata teiste tippude värvuse). Lõpuks värvime tipu x värviga j.

Vaatleme nüüd orienteeritud graafi $G=(X,f)$. Nimetame hulka $S\subset X$ **seesmiselt stabiilseks**, kui selle hulga ükski tippude paar ei koosne lähistippudest, s. t. kui[3] $fS\cap S=\varnothing$. Tähistame kõikide graafis leiduvate stabiilsete hulkade klassi sümboliga $\mathcal{S}$. Ilmselt $\varnothing\in\mathcal{S}$ (näiteks täielikus graafis ongi tühi hulk ainsaks seesmiselt stabiilseks hulgaks, sest iga kaks tippu on lähistipud). Samuti on lihtne näha, et

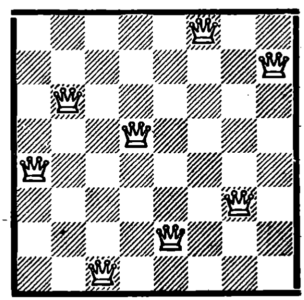
$$\text{kui } S\in\mathcal{S} \text{ ja } A\subset S, \text{ siis } A\in\mathcal{S}.$$

Leiame klassis $\mathcal{S}$ maksimaalse võimsusega hulga. Selle hulga võimsust nimetatakse graafi G **seesmise stabiilsuse arvuks** ja tähistatakse sümboliga $\alpha(G)$:

$$\alpha(G)=\max_{S\in\mathcal{S}}|S|,$$

kus $|S|$ on hulga S võimsus, s. t. elementide arv hulgas.

Graafi seesmise stabiilsuse arvu otsimisele taandub näiteks Gaussi ülesanne kaheksast lipust: kas malelauale saab paigutada kaheksa lippu nii, et ükski neist ei tulistaks ühtegi teist? Selle selgitamiseks vaadeldakse graafi, millel on 64 tippu (malelaua ruudud), kusjuures $y\in fx$, kui ruudud x ja y on erinevad ja asuvad samal vertikaalil, horisontaalil või diagonaalil. Osutub, et vastus küsimusele saadakse jaatav ning ülesandel on kokku koguni 92 lahendit (üks lahend on kujutatud joonisel 15).



Joonis 15.

[3] Sümboliga $\varnothing$ tähistame tühja hulka.

Märgime, et graafi kromaatiline arv $\gamma(G)$ ja seesmise stabiilsuse arv $\alpha(G)$ on seotud võrratusega

$$\alpha(G)\cdot\gamma(G)\geqslant|X|.$$

Tõepoolest, tippude hulga X võib tükeldada $\gamma(G)$ seesmiselt stabiilseks alamhulgaks (ühte alamhulka ühendame kõik sama värvusega tipud). Iga niisuguse alamhulga võimsus m_i $(i=1,2,\ldots,\gamma(G))$ ei ületa muidugi seesmise stabiilsuse arvu $\alpha(G)$. Seega on hulga X võimsus:

$$|X|=m_1+m_2+\ldots+m_{\gamma(G)}\leqslant\gamma(G)\cdot\alpha(G),$$

millega saimegi nõutud võrratuse.

Ütleme, et hulk $T\subset X$ on *väliselt stabiilne*, kui graafi (X,f) iga tipu x korral, mis ei kuulu hulka T,

$$fx\cap T\neq\varnothing,$$

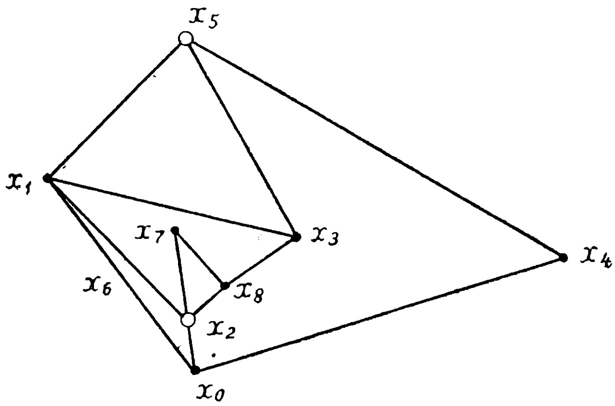
s. t. kui T sisaldab iga T-sse mittekuuluva tipu lähistipu.

Olgu $\mathfrak{T}$ graafi väliselt stabiilsete hulkade klass. Märgime, et kui $T\in\mathfrak{T}$ ja $A\supset T$, siis ka $A\in\mathfrak{T}$. Leiame klassist $\mathfrak{T}$ minimaalse võimsusega hulga ja nimetame selle hulga võimsust graafi *välise stabiilsuse arvuks* (tähistame $\beta(G)$):

$$\beta(G)=\min_{T\in\mathfrak{T}}|T|.$$

Graafi välise stabiilsuse arv tuleb määrata näiteks järgmise ülesande lahendamisel: mitmest valvurist piisaks vanglas, mille plaan on kujutatud joonisel 16? Graafi tippudeks on siin kongid. Tippu y loeme tipu x kujutiseks siis, kui kongi x ees seisev valvur näeb ühtlasi, mis toimub kongis y. (Iga kaar joonisel asendab kahte vastassuunalist kaart.) Minimaalse väliselt stabiilse hulga moodustavad tipud x_2 ja x_5. Seega $\beta(G)=2$, mis ongi ülesande lahendiks.

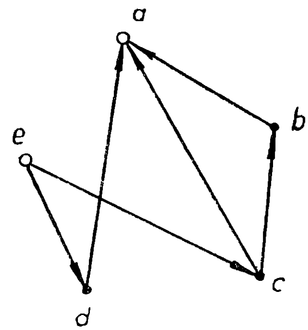
Vaatleme graafi joonisel 17. Tipud a ja e moodustavad selles minimaalse väliselt stabiilse hulga. Paneme aga tähele, et see



Joonis 16.

hulk on ühtlasi seesmiselt stabiilne. Niisugust hulka $S \subset X$, mis on üheaegselt nii seesmiselt kui väliselt stabiilne, nimetatakse graafi tuumaks.

Graafi tuuma mõiste toodi sellisel kujul esmakordselt sisse mänguteoorias. Orienteeritud graaf (X, f) võimaldab nimelt kirjeldada kahe isiku mängu, mille seisudeks on graafi tipud. Algustipp x_0 leitakse loosiga ja vastased mängivad kordamööda: algul valib esimene mängija tipu x_1 hulgas fx_0, seejärel teine mängija tipu x_2 hulgas fx_1, siis jälle esimene mängija tipu x_3 hulgas fx_2 jne. Mängija, kes esimesena valis niisuguse tipu x_n, mille korral $fx_n = \varnothing$, on võitnud.



Joonis 17.

Osutub, et kui graafil on tuum S ja üks mängijatest valis tipu tuumas, siis selline valik kindlustab talle võidu või vähemalt viigi (s. t. olukorra, mil kumbki mängija ei suuda võita). Tõepoolest, kui esimene mängija valis tipu $x_1 \in S$, siis kas $fx_1 = \varnothing$ (sel juhul on esimene mängija võitnud) või teine mängija on sunnitud valima tipu x_2 hulgast $X \setminus S$ ja järgmisel käigul võib esimene mängija tipu x_3 valida jälle tuumast. Kui mäng mingil momendil lõpeb, siis osutub võitjaks esimene mängija, kui aga ei lõpe, siis on vastastel mõistlik leppida viiki.

6. Transpordivõrgud. Mitmesuguste transpordiprobleemide geomeetriline uurimine on arendanud graafiteoorias omaette suuna, mis võimaldab lahendada mitte ainult transpordiülesandeid, vaid ka paljusid puhtmatemaatilisi ülesandeid.

Transpordivõrguks nimetame lõplikku silmusteta graafi (X, f), mille igale kaarele on vastavusse seatud täisarv $c(\bar{u}) \geqslant 0$ (kaare $\bar{u}$ läbilaskevõime) ja millel:

1) eksisteerib parajasti üks niisugune tipp x_0, et $f^{-1}x_0 = \varnothing$ (võrgu sisend);

2) eksisteerib parajasti üks niisugune tipp z, et $fz = \varnothing$ (võrgu väljund).

Olgu U_x^- tippu x sisenevate ja U_x^+ sellest tipust väljuvate kaarte hulk. Ütleme, et kaarte hulgal $\bar{U}$ defineeritud täisarvuliste väärtustega funktsioon $\varphi(\bar{u})$ on voog vaadeldavas transpordivõrgus, kui:

1° $\varphi(\bar{u}) \geqslant 0$ iga $\bar{u} \in \bar{U}$ puhul;

2° $\sum\limits_{\bar{u} \in U_x^-} \varphi(\bar{u}) - \sum\limits_{\bar{u} \in U_x^+} \varphi(\bar{u}) = 0$ iga $x \neq x_0$, $x \neq z$ puhul;

3° $\varphi(\bar{u}) \leqslant c(\bar{u})$ iga $\bar{u} \in \bar{U}$ puhul.

Funktsiooni $\varphi(\bar{u})$ väärtust võib tõlgendada ajaühikus mööda kaart $\bar{u}=(x \to y)$ tipust x tippu y voolava ainehulgana, mis on mittenegatiivne (tingimus 1°) ega ületa kaare $\bar{u}$ läbilaskevõimet (tingimus 3°). Sealjuures igas tipus x, mis ei ole sisend x_0 ega väljund z, võrdub sissevoolava aine hulk väljavoolava aine hulgaga (tingimus 2°).

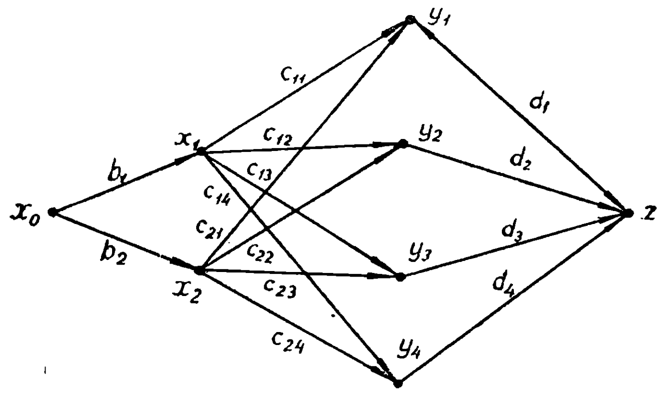
Tingimusest 2° järeldub, et

$$\sum_{\bar{u} \in U_z^-} \varphi(\bar{u}) = \sum_{\bar{u} \in U_{x_0}^+} \varphi(\bar{u}) = \varphi_z,$$

s. t. väljundisse z voolava aine hulk φ_z (nn. v o o s u u r u s) on võrdne sisendist x_0 väljavoolava aine hulgaga.

Kuidas määrata antud transpordivõrgu suurimat võimalikku voogu? Selline ülesanne kerkib näiteks siis, kui tegeleme mingite punktide vaheliste kaubavedude organiseerimisega. Vaatleme konkreetsuse mõttes järgmist situatsiooni. Kaevandatagu punktides $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mingisugust maavara, mille järele olgu nõudmine punktides $y_1, y_2, \ldots, y_m$. Varu punktis x_i olgu b_i, vajadus punktis y_j aga d_j. Tähistame sümboliga c_{ij} maavara koguhulga, mida võib vedada punktist x_i punkti y_j suunduv rong. Kas saab rahuldada kõiki vajadusi ja kuidas planeerida vedusid?

Ühendame punkti x_i punktiga y_j kaare abil, mille läbilaskevõime on c_{ij}. Seejärel ühendame vabalt võetud sisendi x_0 iga ülejäänud punktiga x_i kaare abil, mille läbilaskevõime olgu b_i, ja lõpuks iga punkti y_j vabalt valitud väljundiga z kaare abil, mille läbilaskevõime olgu d_j. Kui nii saadud transpordivõrgus osutub voo suurus φ_z maksimaalseks, siis $\varphi(x_i, y_j)$ tähendab maavara hulka, mis tuleb vedada punktist x_i punkti y_j, et rahuldada vajadusi suurimal määral. Joonis 18 vastab olukorrale, kus $n=2$ ja $m=4$; läbilaskevõimed on märgitud vastavate kaarte juurde.



Joonis 18.

On välja töötatud mitmeid üldisi algoritme suurima voo leidmiseks. Kirjeldame neist üht lihtsamat.

Olgu transpordivõrgus leitud mingi voog $\varphi(x, y)$, mille suurust φ_z me püüame suurendada.

1. Ütleme, et kaar $\bar{u}$ on küllastatud, kui $\varphi(\bar{u}) = c(\bar{u})$. Voogu nimetame täielikuks, kui iga tee sisendist x_0 väljundisse z sisaldab vähemalt ühe küllastatud kaare. Kui voog ei ole täielik, siis leidub tee μ, mille kõik kaared on mitteküllastatud. Võttes nüüd

$$\varphi'(\bar{u}) = \varphi(\bar{u}) + 1, \text{ kui } \bar{u} \in \mu;$$
$$\varphi'(\bar{u}) = \varphi(\bar{u}), \quad \text{ kui } \bar{u} \,\overline{\in}\, \mu,$$

saame uue voo φ', mille suurus

$$\varphi'_z = \varphi_z + 1 > \varphi_z.$$

Seda protseduuri korrates saab iga voo muuta täielikuks.

2. Olgu nüüd $\varphi(x, y)$ täielik voog. Hakkame järk-järgult märkima graafi neid tippe, mille kaudu võib veel suunata täiendava ühiku veoseid. Kõigepealt märgime sisendi x_0 märgendiga 0. Eeldades nüüd, et graafi tipud on kuidagiviisi varustatud indeksitega ja et tipp x_i on juba märgitud, tähistame märgendiga $+i$ kõik need veel märkimata tipud y, mille jaoks $(x_i \to y) \in \bar{U}$ ja $\varphi(x_i, y) < c(x_i, y)$. Märgendiga $-i$ aga tähistame kõik niisugused veel märkimata tipud y, mille korral $(y \to x_i) \in \bar{U}$ ja $\varphi(y, x_i) > 0$. Kui sellise protsessi käigus jõuame lõpuks olukorrani, kus väljund z osutub märgituks, siis eksisteerib vähemalt üks tee μ sisendist x_0 väljundisse z, mille kõik tipud on erinevad ja (täpsusega kuni märgini) märgitud eelnevate tippude indeksitega. Suurema voo saamiseks võtame

$\varphi'(\bar{u}) = \varphi(\bar{u})$, kui $\bar{u} \,\overline{\in}\, \mu$;

$\varphi'(\bar{u}) = \varphi(\bar{u}) + 1$, kui $\bar{u} \in \mu$ ja tee läbimisel sisendist x_0 väljundisse z liigutakse mööda kaart $\bar{u}$ tema orientatsiooni suunas;

$\varphi'(\bar{u}) = \varphi(\bar{u}) - 1$, kui kaar $\bar{u}$ läbitakse tema orientatsiooni vastassuunas.

Lihtne on veenduda, et voog $\varphi'(\bar{u})$ osutub esialgsest suuremaks, nimelt

$$\varphi'_z = \varphi_z + 1.$$

3. Kui mingisugust voogu φ° on võimatu suurendada eelmises punktis antud meetodil, siis see voog ongi suurim. Tõepoolest, olgu $A \subset X$ märkimata tippude hulk. Et $x_0 \,\overline{\in}\, A$ ja $z \in A$, siis

$$\varphi^\circ_z = \sum_{\bar{u} \in U_A^-} \varphi^\circ(\bar{u}) - \sum_{\bar{u} \in U_A^+} \varphi^\circ(\bar{u}) = \sum_{\bar{u} \in U_A^-} c(\bar{u}) - 0 = c(U_A^-).$$

Seega antud transpordivõrgu jaoks

$$\max_{\varphi} \varphi_z = \min_{\substack{x_0 \in A \\ z \in \bar{A}}} c(U_{\bar{A}}).$$

Sellega lõpetame põgusa ülevaate graafidest. Kui toodud näited — enamasti küll mängude ja meelelahutuste vallast — jätsid mulje, nagu oleks graafiteooria rakendusala sellega ammendatud, siis see arvamus on ekslik. Hoopis vastupidi: järjest kasvab nende teadusharude arv, mis hakkavad kasutama graafiteooriat. Siia kuuluvad juba majandusmatemaatika, matemaatiline lingvistika, algoritmide teooria. Muidugi toob rakendamisvõimaluste laienemine kaasa uusi probleeme, mis ootavad lahendajaid.

Rakendusala avardumisega kaasneb ühtlasi graafiteooria enese kiire areng, mis võimaldab leida sügavaid seaduspärasusi näiliselt küllaltki erinevate objektide vahel. Põhjalikuma ülevaate saamiseks graafiteooriast võib soovitada näiteks järgmisi raamatuid.

1. О. Оре. Графы и их применение. М., 1965.
2. К. Берж. Теория графов и ее применения. М., 1962.

VÕTMETEOORIA

Tõeleid Roosinupp

0. Sissejuhatus.

On tehtud üsna mitmeid üldise võtmeteooria loomise katseid (vt. näiteks «Физики шутят», M., 1966, lk. 129—132), kuid kahjuks mitte küllalt kõrgel teaduslikul tasemel. Selle puuduse kõrvaldamiseks ongi mõeldud käesolev artikkel, milles esitatakse täielik aksiomaatiline võtmeteooria võimalikult populaarses vormis.

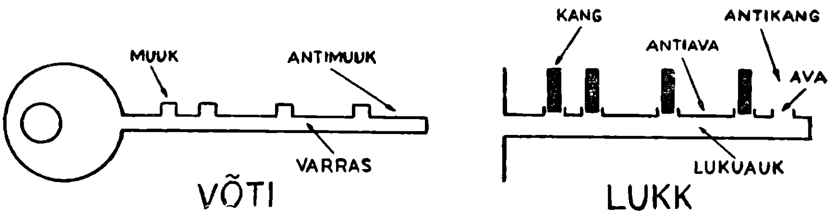
Et matemaatilise teksti kirjapanemise reeglid (vt. Matemaatika ja kaasaeg, XI, lk. 15—16 ja lk. 101—102) nõuavad sisuliselt tarbetute sõnade, valemite, viidete ja muude selliste atribuutide kasutamist, siis ranges kooskõlas nende nõuetega on ka käesolevale populaarsele artiklile väliselt traditsioonilise aksiomaatilise teooria ilme antud.

Võtmeteooria suurt rahvamajanduslikku tähtsust pole vist vaja siinkohal eriti rõhutada — see peaks lugejale niigi selge olema. Rõhutame ainult, et näiliselt lihtsamat tüüpi võtmetega on käesolevas artiklis piirdutud üksnes esituse populaarsuse huvides. Vajalike üldistuste tegemine ei tohiks asjasthuvitatud lugejale nimetamisväärseid raskusi valmistada.

1. Põhimõisted.

1.0. Definitsioonid.

Võti on raudvarras, mille küljes paiknevad muugid (mitte segi ajada muukrauaga, sest see mõiste pole matemaatiline ning järelikult siin käsitlemisele ei kuulu).



Luku põhiosaks on *lukuauk*, mille sees leiduvad *avad* (uuemad uurimused on veenvalt tõestanud, et augu sees võivad avad olla, aga vastupidi mitte) ja avade taga *kangid*.

Nii võtme vardal kui ka lukuaugul on fikseeritud kindlad kohad — *positsioonid*, kus üldse võivad paikneda vastavalt muugid või avad. Positsioonide arv n olgu fikseeritud, kusjuures positsioonid on nummerdatud naturaalarvudega, näiteks vasakult paremale (vt. joonis; samalt jooniselt võib veel näha, et lukuauk on täpselt sama pikk kui võtme varras[1] ja positsioonid asetsevad neil täpselt kohakuti).

Kui mõnel positsioonil puudub muuk (ava), siis ütleme, et seal paikneb *antimuuk* (vastavalt *antiava*). Kui mõne ava taga ei ole kangi, siis ütleme, et seal on *antikang*.

Võtme *keeramisel* lukuaugus ulatuvad muugid läbi avade ja liigutavad avade taga olevaid kange.

1.1. *Aksioomid*.

1.1.1. Selleks, et antud võti antud lukus *pöörduda* saaks, peavad lukul olema avad vähemalt nendel positsioonidel, kus võtmel on muugid (teisiti öeldes: luku iga antiava kohal peab võtmel olema antimuuk).

1.1.2. Selleks, et antud lukk antud võtmega *avaneks*, peab see võti lukus pöörduma, kusjuures luku iga kangi peab liigutama vastava positsiooni kohal paiknev muuk (näiteks joonisel olev lukk avaneb joonisel oleva võtmega).

1.1.3. Selleks, et lukk oleks üldse *avatav*, peab iga tema antiava taga paiknema antikang.

1.1.3.1. Et praktikas pakuvad huvi vaid avatavad lukud, siis edaspidi nimetame *lukkudeks* üksnes neid.

1.2. *Tähistused*.

Seame igale *võtmele* vastavusse üherealise maatriksi

$$V = (m_1\ m_2\ \dots\ m_n),$$

kusjuures $m_i = 1$ tähendab, et positsioonil number i paikneb muuk, $m_i = 0$ aga tähendab, et vastaval positsioonil paikneb antimuuk.

Seame igale *lukule* vastavusse kaherealise maatriksi

$$L = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{pmatrix},$$

kus $a_i = 1$ ($k_i = 1$) tähendab, et positsioonil i paikneb ava (vastavalt kang), $a_i = 0$ ($k_i = 0$) aga tähendab, et seal paikneb antiava (antikang). Aksioomi 1.1.3.1 kohaselt on lukkudeks vaid sellised maatriksid, kus iga i puhul $a_i \geqslant k_i$.

Võti V on lukus L *pööratav* siis ja ainult siis, kui iga i puhul $a_i \geqslant m_i$ (vt. aksioom 1.1.1).

[1] Igapäevases praktikas esineb vahel kahjuks ka lukke, mille lukuauk on võtme vardast lühem (või pikem) — need kõrvalekaldumised on ilmselt tingitud vastavate meistrite lohakusest, kes lihtsalt pole viitsinud lukuauku korralikult välja ehitada (või on defitsiitset materjali tarbetult raisanud).

Defineerime maatriksite korrutise

$$V \times L = (m_1\ m_2 \dots m_n) \times \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{pmatrix} = (\mathfrak{A}^1_{VL}\ \mathfrak{A}^2_{VL} \dots \mathfrak{A}^n_{VL}),$$

kus

$$\mathfrak{A}^i_{VL} = \begin{cases} m_i, \text{ kui } m_i \leqslant a_i \text{ ja } m_i \geqslant k_i \\ 1 - m_i, \text{ ülejäänud juhtudel.} \end{cases}$$

Aksioomi 1.1.2 arvestades a v a b võti V luku L siis ja ainult siis, kui V on maatriksi L omavektor, mis vastab omaväärtusele $\lambda = 1$, s. t. kui

$$V \times L = V.$$

2. Teoreetilised tulemused.

2.1. P õ h i t e o r e e m i d.

2.1.1. Antud lukku L avavate erinevate võtmete arv on

$$v(L) = \aleph' \cdot 2^{\sum_{i=1}^{n} (a_i - k_i)}.$$

2.1.2. Antud võtmega V avatavate erinevate lukkude arv on

$$l(V) = \aleph'' \cdot \left(2^n - 2^{n - \sum_{i=1}^{n} m_i} \right).$$

Nendes teoreemides (ruumipuudusel jätame tõestused siin esitamata) on sümbolitega $\aleph'$ ja $\aleph''$ tähistatud teatavad R o o s i n u p u k o n s t a n d i d, mis antud juhul võrduvad ühega. Teoreemi 2.1.2 puhul on veel vaatlusest välja jäetud kõige triviaalsemad lukud

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

sest nende avamiseks pole üldse võtit vaja: pole ühtegi kangi, mida tuleks liigutada. Et niisuguse lukuga ei saa midagi lukustada, siis nimetame neid a n t i l u k k u d e k s.

2.2. P õ h i p r o b l e e m i d.

Vaadeldava võtmete süsteemi (ja ka toodud põhiteoreemide) puuduseks on asjaolu, et mõningaid lukke võib avada ka võtmega, mis selleks pole määratud. See on võimalik niisuguste lukkude puhul, kus $i > i_0$ korral $k_i = 0$. Nimelt saab selliseid lukke avada vaid osaliselt lukuauku pistetud võtmega. Näiteks $n = 7$ korral saab lukku

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avada ka võtmega (0 1 1 1 1 1 1) ning koguni $p = 6$ erineval viisil. Seda arvu p nimetatakse võtmete süsteemi i s e ä r a s u s e k s. Üks põhiprobleeme seisnebki selles, et muuta võtmete süsteemi iseärasus nulliks.

Sõnastatud probleemi üks võimalikke lahendusi on äärmiselt lihtne: tarvitseb piirduda vaid selliste lukkudega, kus $a_n = k_n = 1$ (loomulikult peab siis ka igal võtmel olema $m_n = 1$).

Hoopis raskemaks probleemiks osutub järgmine. Varustada asutuse uksed lukkudega nii, et mistahes ruumist suvalisse teise ruumi pääsemiseks vajalike võtmete arv oleks maksimaalne (vastav miinimumprobleem ei paku teaduslikku huvi, sest lahendus on triviaalne: kõik lukud peavad olema ühesugused).

Veelgi komplitseeritumaks osutub eelmise probleemi järg: jaotada vaadeldava asutuse töötajate hulk alamhulkadeks ja anda neile võtmed nii, et:

a) ükski alamhulk ei saa avada kõiki neid uksi, mida saab avada mistahes teine alamhulk;

b) alamhulkade transformatsioonid on üksüheses vastavuses isiklikest tutvustest tulenevate võimalustega võtmete laenamiseks.

Võtmete süsteemi täiendava detailiseerimise ning komplitseerimisega seotud probleemid jäävad juba lugeja püstitada ja lahendada.

ELEKTRONARVUTID MÄNGIVAD MALET

L. Roots

Kuigi malemängu leiutamise aeg ei ole teada, on siiski täiesti kindel, et selle mängu ajalugu haarab juba kaugelt pikema kui tuhandeaastase perioodi. Küllaltki vana on ka idee luua niisugune masin, mis oskaks malet mängida.

Paljud lugejatest on arvatavasti kuulnud, et üks malet mängiv automaat ehitati juba XVIII sajandil. Niisuguse automaadi konstrueeris ja demonstreeris esmakordselt 1769. a. paiku Viinis F. Kempelen. Automaat mängis küllalt hästi ja võitis peaaegu alati oma vastase. Leiutaja seletuse järgi oli tegemist mehhaanilise automaadiga; hiljem aga selgus, et asi polnud õige — masina sisse oli lihtsalt peidetud inimene, tugev maletaja.

Käesoleva sajandi kahekümnendail aastail õnnestus hispaania leiduril Quevedol ehitada juba tõepoolest malet mängiv masin, mis oli konstrueeritud elektromehhaaniliste releede abil. See masin ei mänginud küll tervet partiid, vaid ainult lõppmängu — kuningas ja vanker kuninga vastu, mille võitis alati (s. t. matistas vastase kuninga).

Viimase paari aastakümne vältel on tehtud palju tööd eesmärgil panna elektronarvuti malet mängima. Selles suunas on saavutatud ka mõningaid tulemusi: kuigi arvutite mängutase pole veel eriti kõrge, ei või siiski igaüks, kes mängureegleid tunneb, loota neist jagu saada.

Miks on üldse vaja, et arvuti oskaks mängida malet, ja sealjuures veel hästi?

Tuleb märkida, et küsimus ei ole siin mitte üksnes selles, kas masin suudab mängida malet, kabet või mõnda muud mängu, vaid hoopis laiem — kas masin on võimeline (ja kui on, siis missugusel määral) inimese kombel mõtlema. Malemäng ongi üks selline inimeste vaimse tegevuse ala, mis on küllaltki raske, kuid mida inimene on siiski võimeline hästi tegema. Et masinad ei suuda selles veel inimesega võistelda, siis ei ole inimese vaimse töö modelleerimine seega saavutanud vajalikku taset. Kui aga arvuti õpiks hästi malet mängima, siis võiksime juba öelda, et ta lahendab mingisugust ülesannet samuti nagu inimene. Ühtlasi võiksime sel korral teha mitmesuguseid järeldusi ka selle kohta, kuidas üldse toimub inimese mõtlemine. Niisugune küsimus huvitab esmajoones psühholooge; ta on aga oluline ka neile, kes tunnevad huvi inimese mõtlemisprotsessi olemuse vastu mitmesuguste praktikas esinevate probleemide lahendamiseks.

Näiteks majanduse juhtimisel tuleb sageli vastu võtta otsuseid kaalutluste põhjal, mis on teatud määral analoogilised maletaja omadele, kes peab otsustama, milline käik antud seisus teha. Tuleb uurida statistilisi tabeleid, arvestada varasemaid kogemusi (nagu maletaja uurib raamatuid avanguteooria ja lõppmängu kohta), kontrollida võimalikke tagajärgi (mida teadlikult või ebateadlikult teeb ka maletaja, planeerides oma strateegiat käsilolevas partiis ja arvestades variante); üsna märgatav osa otsuse vastuvõtmisel on ka intuitsioonil. Seetõttu on põhjust loota, et arvuti, mis on õppinud malet mängima, võib õppida ka majandust juhtima, haigusi diagnoosima jne.

Esimesena suunas tähelepanu malemängu programmeerimise ülesandele Claude Shannon 1950. aastal, mil temalt ilmus artikkel, kus ta analüüsis tekkivaid probleeme ja visandas võimalusi nende lahendamiseks.

Kõigepealt kerkib muidugi küsimus käikude ja mängureeglite programmeerimisest, kuid see on lahendatav suhteliselt lihtsalt. Kuidas aga tuleks kõigi võimalike käikude seast leida parim või vähemalt niisugune, mis pole täiesti vigane? Üks lihtsaim võimalus on kontrollida järele kõik antud seisus võimalikud variandid küllalt kaugele, näiteks kümne käigu ulatuses. Teoreetiliselt oleks see küll näiliselt võimalik, kuid praktiliselt täiesti teostamatu. Kui näiteks mingis seisus oleks valgetel 10 võimalikku käiku (aga tavaliselt on neid palju rohkem), mustadel igale neist jälle 10 vastust jne., siis juba kõikide variantide arvestamine kolme käigu kaugusele nõuaks kokku miljoni variandi läbikontrollimist. Shannoni hinnangu järgi tuleks aga näiteks juhul, kui keskmängus tahaksime kontrollida kõik variandid kuni lõpuni, läbi vaadata ümmarguselt 10^{120} erinevat varianti.

On selge, et niisugune töö käib ka kõige võimsamale elektronarvutile üle jõu. Ja kas saadav tulemus olekski meile eriti huvipakkuv? Maletaja ju ei mängi nii, seega kõiki variante kontrolliv arvuti ei annaks inimese mõtlemisprotsessi seaduspärasuste tundmaõppimise seisukohalt midagi.

Järelikult tuleb vaadeldavate võimaluste arvu mingisugusel viisil piirata. Näib, et üldiselt piisaks variantide arvestamisest 4—5 käigu peale ette, kuigi mõningatel juhtudel, eriti lõppmängus, pole see veel küllaldane.

Iga variandi lõppseisu peab arvuti oskama mingil viisil hinnata, et oleks võimalik langetada otsust, missugune käik siis lõpuks teha. Selleks on tarvis ette anda teatav hindefunktsioon, mille väärtusi erinevate seisude korral võrreldes saaks leida soodsaima variandi. See funktsioon peab arvesse võtma materjali vahekorda oma ja vastase leeris ning kindlasti ka posit-

Arvuti tegi käigu.

siooni. Täiuslik hindefunktsioon võimaldaks piirata variantide arvestamist ainult ühe käigu peale ette; kuid ilmselt on ka sellise funktsiooni konstrueerimine praktiliselt võimatu.

Suhteliselt lihtne on materjali hindamine. Tuleb vaid omistada igale vigurile mingisugune hind teatud skaala järgi — näiteks ettur 1, ratsu ja oda 3, vanker 5, lipp 9 punkti. Lisaks sellele peab ka kuningale omistama väärtuse ja hästi suure — näiteks 100, et arvuti hoiaks esmajoones kuningat mati eest. On aga selge, et üksnes niisugune materjali vahekorra hindamine osutub ebapiisavaks. Selle järgi on ju näiteks kolmikettur f2, f3, f4 võrdne etturite ahelikuga a2, b3, c4; hea oda — halva odaga (mille liikumist takistavad etturid) jne. Tähendab, hindefunktsiooni peavad mõjutama ka positsiooni elemendid. Siin on aga enam-vähem õigete hinnangute leidmine juba hoopis keerulisem. Kas vaba liin on võrdne poole etturiga ($^1/_2$ punkti) või rohkem? Kui suure arenguparemuse eest võib ohverdada ratsu? Samuti tuleb arvestada, et tsentriettureid peetakse harilikult ääreettureist väärtuslikumaiks, lõppmängus on aga lugu sageli vastupidine. Kuidas õpetada arvutit kõiki neid ja veel kümmetpaarikümmet muud elementi hindama?

Maletaja sageli niisuguste detailide hindamise üle ei mõtle, vaid juhindub kogemustest ja intuitsioonist. Kuivõrd õigeteks osutuvad ta otsused, see määrab oluliselt tema mängutugevuse. Vaevalt praegu üldse leidub maletajat, kes võiks öelda, et talle on teada kõik tegurid, millest sõltub positsiooni hinnang. Veel raskem on aga üksikute elementide suhtelise tähtsuse hindamine. Seetõttu näib, et positsiooni hindamise kriteeriumi püstitamine arvutile koostatavas programmis on küllaltki raske ülesanne.

Niisiis, arvuti töömahtu saab vähendada arvestatavate variantide pikkuse piiramisega, kuid sellest on siiski vähe. Kujutleme näiteks mingit seisu keskmängust, milles nii valgetel kui ka mustadel on käimiseks 40 erinevat võimalust. Variantide hulk, arvestades igaühes 5 käiku ette, oleks siis $40^{10} \approx 10^{16}$, s. t. kümme kvadriljonit. Veidi palju! Ning sealjuures on enamik nendest variantidest sellised, mida ei tasukski üldse vaadelda.

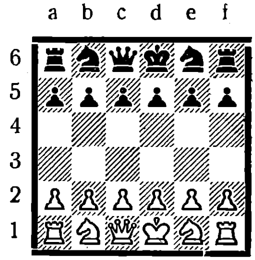
Vastane ründas meie lippu; kas on siis mõtet kaaluda variante, milles me seda rünnakut ei tõrju? Selles ongi asi, et mõnikord, kuigi harva, osutuvad ka need variandid tõepoolest mõistlikeks. Siiski, kui pärast esimest paari käiku tekib suur materiaalne halvemus, mida mingi positsiooniline faktor ei kompenseeri, siis võib niisugused variandid vist kõrvale jätta. Ei ole mõtet teha ka sihituid käike, näiteks käia ühe ja sama viguriga edasi-tagasi, ilma et see tõotaks midagi positsiooni tugevdamise mõttes või oleks vajalik vastase ähvarduste tõrjumiseks. Hea hindefunktsioon peaks võimaldama sellised käigud välja praakida juba enne viienda käiguni jõudmist ja sellega oluliselt piirata arvestatavate variantide hulka. Näib aga, et seda on kergem nõuda kui teoks teha: nagu nähtub ajakirjanduses avaldatud partiidest, ei oska arvutid veel praegusel ajal sellisel viisil mängida.

Esimesed katsed malemängu programmeerimise alal algasid USA-s varsti pärast Shannoni artikli ilmumist. Mõne aastaga loodi programm, mis mängis küll mitte tavalist malet, vaid 6×6 laual mängitavat maletaolist mängu (viguritest puudusid odad, etturid võisid algseisust ainult ühe sammu teha ning vangerdus polnud lubatud). Üksikasju selle programmi kohta, nagu variantide pikkus, hindefunktsiooni kuju jne. käesoleva artikli autorile teada ei ole. Toome aga näitena ühe partii, kus ameerika teadlased S. Ulam ja P. Stein (muide, üsna nõrgad maletajad!) mängisid arvuti vastu (arvutil olid mustad malendid)[1]:

---

[1] Siin ja edaspidi on kasutatud tähistust: ? — nõrk käik, ?? — väga nõrk käik, ! — tugev käik.

1. Rd3 c4 (valgetele oli see käik ootamatu ja nad mõtlesid kaua) 2. Re1 b4 3. d3 d4 4. Ld2 c3 5. bc bc. 6. Lc1 La4 (arvuti takistab tulistamist; üldse näib tal olevat hirm selle ees, kuna programmis oli arvatavasti ette nähtud hoolikalt valvata kuninga kaitset) 7. La3+ L:a3 8. R:a3 Kc6 9. Rf3 Kc5 10. Vb1 Kd6 11. Rc4+ R:c4 12. dc Vc6 13. Vb5 Rc5 14. V:a5 Vb6 15. Vb5 Va6 16. a3 f4 17. R:e5 K:e5 18. V:c5+ Ke6 19. Vd5? Vd6 ?? (mustad «ei näe» jätku 19. ... V:a3! 20. e3 f3 möödapääsematu matiga; nähtavasti on programm üsna ebatäiuslik: valged pidid muidugi mängima 19. Kc1 V:a3 20. Kb1) 20. V:d6+ K:d6 21. c5+ K:c5 22. Kc1 Ve6 23. e3 de 24. fe Ve4? 25. V:f4 V:f4 26. ef Kb5 27. f5 Ka4 28. f6L K:a3 29. Ld4 ja matt järgmise käiguga.



Näib, et see programm arvestas üsna lühikesi variante, võimalik, et ainult ühe käigu ulatuses. Sealjuures on huvitav, et arvuti nagu «kartis» vastast — vahetuse asemel ta kaitses paaril korral lihtsalt oma malendit (esmajärjekorras enesekaitse). Nähtavasti hinnati seisu ainult materjali järgi, võib-olla ka kuninga julgeoleku põhjal (sellest siis tulistamise kartus). Siiski on teada, et selle programmiga õnnestus võita vähemalt üks partii algaja maletaja vastu.

Esimene teadaolev programm tavalise male jaoks loodi Stanfordi ülikoolis (USA) 1958. aastal. Nõukogude Liidus algas töö malemängu programmeerimise alal 1960. aasta paiku Moskva ülikoolis ning NSVL TA Teoreetilise ja Eksperimentaalfüüsika Instituudi matemaatikalaboratooriumis (juhatajaks füüsika-matemaatikadoktor A. Kronrod). Viimases on koostatud programm, mida järk-järgult täiustatakse.

Meie arvutid mängivad järgmise plaani järgi. On ette antud käikude arv, missugusele kaugusele (vaadeldavaks hetkeks kujunenud partiiseisust) arvuti kontrollib peaaegu kõik võimalikud variandid. Praegu on selleks maksimaalselt $2^1/_2$ käiku e. 5 nn. poolkäiku (s. t. valgete või mustade käiku eraldi võetuna). Forsseeritud variante aga uurib arvuti edasi kuni lõpuni (tegelikult küll 15 poolkäigu kaugusele). Forsseeritud variantideks nimetatakse siinjuures niisugustest käikudest koosnevaid variante, mis sunnivad vastast mingil viisil kitsendama oma valikuvabadust käigu sooritamisel — sellised variandid tekivad vigurite ja etturite löömistest, tulistamistest ja etturite muundumistest viimasele reale jõudmisel. Forsseeritud variantide eraldamine võimaldab tunduvalt vähendada arvuti tööd variantide arvestamisel.

Nagu öeldud, vaatleb arvuti esimeste (näit. viie) poolkäikude jooksul «peaaegu kõiki» võimalusi. Seda tuleb mõista nii, et kui teatud käigule järgnevas variandis võib vastane näiteks võita etturi hea seisu juures, siis praagitakse see variant kohe välja. Umbes samuti mängib ka inimene, kes ei ole malemängus eriti tugev — ta kontrollib ette näiteks 2 poolkäiku (ühe käigu), löömiste ja tulistamistega variante veidi kaugemale, ning heidab kohe kõrvale variandid, milles kaotab materjali. Muidugi, kaugele ette arvestatud ohvrikombinatsioonid vahepealsete «vaiksete» käikudega jäävad sellise mängustiili korral leidmata — siin peab arvuti veel palju juurde õppima.

Praegu võtab NSVL TA Teoreetilise ja Eksperimentaalfüüsika Instituudis koostatud hindefunktsioon arvesse küllaltki palju positsioonilisi elemente, nagu tsentri valdamine, etturite kontroll tsentri üle, etturite ahelikkude tugevus või nõrkus, vabaetturid, nõrgad väljad, vigurite üldine liikuvus, vigurite löögid tsentraalväljadele ja kuninga ümbrusesse, vabade liinide ja diagonaalide valdamine jne. See võimaldab arvutil mängida küllalt korralikke partiisid.

Tõepoolest, kes tavalistest maletajatest arvestab partii ajal kõiki variante kolme käigu kaugusele? Asjaga mitte kursis olevad inimesed arvavad mõnikord, et suurmeistrid arvestavad variante väga kaugele ette. Muidugi, suurmeister võib sageli arvestada ette kümne- või enamakäigulise kombinatsiooni, kuid mitte see pole tähtsaim omadus, mis teda eristab reamaletajatest. Meistrite ja suurmeistrite üleoleku põhjus on peamiselt selles, et nad hindavad positsiooni paremini, et nad oskavad antud seisus koostada parema plaani kui tavaline maletaja. Kombinatsioonides esinevad aga enamasti forsseeritud variandid (eespool kirjeldatud mõttes), mida arvuti arvestab küllalt kaugele. Olgu siinjuures märgitud, et suurmeister Bronštein olevat mainitud programmi hinnanud umbes kolmanda järgu vääriliseks, lisades ühtlasi, et talle meeldib arvuti mõttelaad.

Vaatleme nüüd mõningaid partiisid, mida elektronarvutid omavahel on mänginud. Iga partii juures on märgitud, missugusele kaugusele vastav programm variante arvestas.

Arvuti I (2 poolkäiku) — **arvuti II** (1 poolkäik).

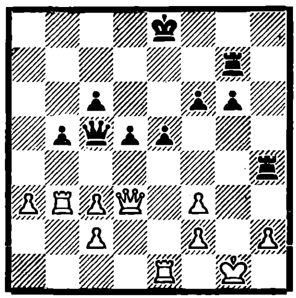
1. d4 d5 2. Rf3 Rc6 (avanguteooriat arvutile õpetatud ei ole ja ta peab kõik «oma peaga» välja mõtlema) **3. Rc3 Rf6 4. Of4 Of5 5. e3 e6 6. Ob5 Ob4 7. O:c6+bc 8. O — O O:c3 9. bc O — O 10. Re5 Re4 11. R:c6 R:c3 12. Le1!** (mustade mäng on selles partiis kaunis algeline, tegelikult nad vaid kopeerivad valgete käike; seetõttu on partii peaaegu klassikaline näide sellest, millele niisugune väärstrateegia viib) **12... Lh4 13. g3 Lf6 14. Oe5 Lh6 15. Re7+!** (arvutile I näib, et järgnev vahetus parandab tema seisu) **15. ... Kh8 16. R:f5 ef 17. L:c3 c6 18. Ld3 f6 19. Od6**

Vfd8 20. Oc7 Vd7 21. Of4 Lh3 22. La6 Ve8 23. f3 (valged ei rutta etturi võtmisega, sest mustad seda kaitsta nagunii ei saa) **23. ... g5?** (mustad otse sunnivad valgeid otsustavale rünnakule asuma) **24. L:c6 gf** (arvuti II võtab arvesse, et parem on kaotada kvalitee kui kaks etturit, kuid ei märka, et ta valitud variandis saab mati — variantide arvestamise piiratud pikkus ei võimalda seda näha) **25. L:d7 V:e3 26. Vab1 fg 27. Vb8+.** Mustad alistusid.

Järgnevas partiis mängis mustadega täiustatud programmiga arvuti, valgetega aga vanema (vähem positsioonilisi faktoreid arvestava) programmiga arvuti.

Arvuti I (3 poolkäiku) — **arvuti II** (3 poolkäiku).

1. e4 Rf6 2. e5 Rd5 3. Rc3 (on huvitav, et arvuti I valib Aljechini kaitses just selle, aga mitte neljaetturi variandi) **3. ... R:c3 4. dc d5 5. Oe3 Rc6 6. Rf3 Of5 7. Od3 Og4 8. Of4 g5 9. Oe3 O:f3 10. gf R:e5 11. O:g5 f6 12. Of4 Rg6 13. Oe3 e5 14. Le2 Ld7 15. 0—0 Vg8 16. O:g6 hg 17. b4 a5 18. a3 b6 19. ba V:a5 20. Oc1 Oc5 21. Vd1 Va4** (mustade seis on juba tunduvalt parem) **22. Ld3 c6 23. Oe3 Le7 24. O:c5 L:c5 25. Vdb1 Vc4 26. Vb3 Vg7 27. Vab1 b5 28. Ve1 Vh4** (vt. diagramm).



Piisab põgusast pilgust diagrammile, et veenduda valgete seisu lootusetuses. Liiga palju on neil nõrkusi, kõik etturid on eraldatud. Praegu ähvardab 29. ... V:h2 ühes L:f2 jne. Niisuguse variandi leiab arvuti otsekohe üles; kuid ka ta vastane on arvuti ning ei näe seda varianti halvemini.

29. Le3 Ld6 (ähvardab 30. ... e4) **30. Lb6** (valged loovad ähvarduse 31. V:b5; käigule 30. ... e4 nad vastaksid 31. f4!) **30. ... Ke7 31. Vb4 Vgh7 32. La7+ Ke6 33. Le3 V:h2.** Valged alistusid.

Mustade programmi üleolek seisnes siin peamiselt selles, et hindefunktsioon võttis tugevasti arvesse etturseisu ja selle nõrkusi; valged hoolitsesid peamiselt materiaalse tasakaalu säilitamise eest (kuni see oli võimalik).

Hiljuti toimus huvitav üritus, malematš Nõukogude Liidu (TA Teoreetilise ja Eksperimentaalfüüsika Instituudi) ning USA (Stanfordi ülikooli) elektronarvutite vahel. Matšis mängitud partiid annavad loodetavasti hinnalist materjali malemängu programmeerijatele, eriti seetõttu, et pooled mängisid märgatavalt erinevate programmide järgi. NSV Liidu poolt kasutatav programm arvestas ette 5 poolkäiku. USA arvuti programmi kohta autoril eriti palju andmeid ei ole, on vaid teada, et variantide arvestamise pikkuseks oli kuni 5 käiku (10 poolkäiku), kuid läbi ei vaadatud kõiki variante, isegi mitte kõiki võimalikke esimesi käike. Igal järgneval kägul arvestatavate vastuste arv vähenes, aga pole teada, missugune printsiip oli võetud valiku aluseks. Näib, et USA poolt kasutatav programm pole eriti täiuslik, sest matši võitis meie arvuti tulemusega 3 : 1 (kaks võitu ja kaks viiki). Esitame esimesena lõppenud partii, mille võitis meie arvuti.

Nõukogude Liit — USA.

1. e4 e5 2. Rf3 Rc6 3. Rc3 Oc5 4. R:e5!

See käik olevat olnud programmi koostajaile üllatuseks, sest arvuti peab vangerduse õigust õige kalliks (seetõttu oodati käiku 4. Oc4). Sellele vaatamata kallutasid saavutatavad positsioonilised paremused otsuse käigu 4. R:e5 kasuks. Antud käigu vastustest pidas meie arvuti tõenäoliselt parimaks mustade jätku 4. ... O:f2+ 5. K:f2 R:e5 6. d4.

4. ... R:e5 5. d4 Od6 6. de O:e5 7. f4.

Selle käiguga koos andis arvuti järgmise kavatsetava variandi 7. ... O:c3+ 8. bc Rf6 9. Ld4.

7. ... O:c3+ 8. bc Rf6 9. e5.

Arvuti plaan muutus, nagu see inimesel-maletajalgi sageli juhtub; eelnevalt oli arvuti kavatsenud mängida 9. Ld4, nüüd aga «näeb» ta kaugemale ja valib teise võimaluse. Käigu 9. Oc4 olevat ta hüljanud variandi 9. ... R:e4 10. O:f7+ Kf8!? tõttu ja ... mustad võidavad etturi, sest ähvardab löömine c3-1 ja Lh4+. (! Näib, et selle mõistatuse lahendus seisneb programmis — ette arvestatakse variant pikkusega 5 poolkäiku.)

9. ... Re4 10. Ld3.

Arvuti andis siin ühtlasi variandi 10. ... d5 11. ed R:d6 12. Oa3.

Programmi autoreid huvitas, missuguse käigu arvuti oleks teinud, kui tema käest oleks nõutud 7 poolkäigu ettearvestamist. Osutus, et siis leidis ta käigu, mis antud seisus tõeliselt tugevaim on, nimelt 10. Ld5! Asi on selles, et variandis 10. ... R:c3 11. Lc4 Lh4+ 12. g3 näib mustadele jäävat materiaalne paremus — ettur. Variandi jätkamine muidugi selgitaks kohe, et materjali võidavad hoopis valged; kuid arvuti seda ei «näe» ja praagib variandi välja.

10. ... Rc5 11. Ld5 Re6 12. f5 Rg5.

Arvuti ootas siin jätku 12. ... c6 13. Ld3 Rc5 14. Ld6.

13. h4 f6 14. hg fg 15. V:h7!

Niisuguse lihtsa taktikalise löögi leiaks arvuti üles ka siis, kui ta arvestaks ette ainult ühe poolkäigu.

15. ... Vf8 16. V:g7 c6 17. Ld6.

Arvuti teatas siin, et temale on näha ainult üks variant, milles must ei saa matti: 17. ... Lf6 18. ef Kd8.

17. ... V:f5 (mustad eelistasid kiiremat lõppu) 18. Vg8+ Vf8.

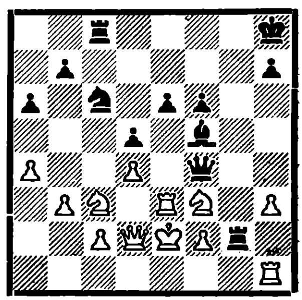
Kui 18. ... Kf7, siis muidugi 19. Oc4×.

19. L:f8×.

* *
*

Paljusid huvitab küsimus: kas elektronarvuti võib saavutada ka malemeistri mängutugevuse ja kui võib, siis kas seda on loota lähemas tulevikus? Selles küsimuses on avaldatud mitmesuguseid arvamusi. Näiteks suurmeister Bronštein arvab, et arvutite mängutugevus ületab peatselt suurmeistri oma. Maletajate hulgas on aga ka palju neid, kes kaitsevad vastupidist vaadet. Viidatakse sellele, et arvuti ei saavat mängida paremini kui tema programmi koostaja (kuidas sellega küll on — auto sõidab ju kiiremini kui inimene jookseb). Samuti väidetakse, et arvuti ei mängivat loominguliselt, vaid etteantud šablooni järgi, nii aga ei ole võimalik kõrgeimat taset saavutada. Näib aga, et sellised arvamused pärinevad siiski eeskätt inimestelt, kes arvutite võimalustega küllalt hästi kursis ei ole. Autor igatahes jagab seisukohta: ei tohiks olla mingisuguseid põhimõttelisi takistusi selleks, et arvuti saavutaks ka suurmeistri taseme. Millal? — Malemängu programmeerimisega tegelejad arvavad, et meistri mängutugevuse saavutavad arvutid umbes kümne aasta pärast.

Muide praegusedki maletajad-arvutid ei mängi eriti šablooniliselt. Šablooni pole neile ju ette kirjutatud! Tavaline maletaja mängib ehk šabloonilisemaltki: ta «teab», et ratsut ei tohi äärele panna, see on halb; kaksikodad on tugevamad kui kaks ratsut jne. Aga kui palju on neist reegleist erandeid!



Vaadake näiteks juuresolevat diagrammi, millel kujutatud seisus arvuti (mustadega mängides) leidis huvitava kombinatsiooni: 1. ... O:c2! (2. L:c2 R:d4+ 3. R:d4 V:f2+ 4. Kd3 V:c2 5. R:c2). Kas lugeja oleks seda näinud? Olgu märgitud, et selle arvuti programm nägi ette vaid variantide arvestamise kolme poolkäigu kaugusele. Seda arvutit šabloonilises mängus küll süüdistada ei saa.

MAJANDUSTEADUSE MATEMAATILINE KÄSITLUS[1]

E. Leinemann

2. Majandusteadus ja majandusalane eksperiment

Kõrge tarbimistasemega tööstusühiskonna arenemise kavandamine on seadnud sotsioloogia ja majandusteaduse ette keerukad ülesanded. Tootmise ja tarbimise kiire kasvamine, mis on tingitud teaduse ning tehnika edenemisest, on muutnud inimeste harjumusi, maitseid ja arusaami ning suurendanud nõudmist tarbimise kõigil aladel. Üha eripalgelisema tarbijaskonna objektiivset käitumist arvestamata pole tänapäeval võimalik majanduse arenemist õigesti kavandada. Seetõttu on nõudlusanalüüs muutunud uurimisalaks, kus viimasel ajal toimuvad ulatuslikud teoreetilised ja statistilised otsingud.

Huvifunktsioonid ja nõudlusanalüüs. Ühiskonna vajaduste vähegi täielikum rahuldamine, maksimaalsest rääkimata, pole võimalik indiviidide huvide põhjaliku eelneva tundmaõppimiseta. Tarbijaskonna nõudluse uurimisel tugineb tänapäeva majandusteadus eelistussuhte ja huvifunktsiooni mõistetele, mille kasutamise otstarbekust on tõestanud üsna pikaajalised statistilised vaatlused.[2]

Postuleerime, et mistahes kahe (m-mõõtmelise) tarbimisvektori Y' ja Y'' korral suudab tarbija alati otsustada, kas ta eelistab tarbimist Y' tarbimisele Y'' või vastupidi või peab neid samaväärseiks. Niisugune otsustusvõime defineeribki tarbija eelistussuhte. Statistilised vaatlused kinnitavad, et tarbija eelistussuhte määrab tarbimise sotsiaalne kasulikkus. Viimase kvantitatiivseks käsitlemiseks defineerime tarbimisvektorite hulgal $\{Y\}$ positiivse funktsiooni

$$U = U(Y),$$

millel on järgmised kaks omadust:

---

[1] Järg, algus vt. Matemaatika ja kaasaeg, XIII, lk. 48—56.

[2] Vt. näit. Ü. Kaasik, Ü. Remmel. Tarbimise matemaatiline uurimine. — Matemaatika ja kaasaeg, X, lk. 30—37. Selles artiklis esitatud mõisteid on siin osaliselt korratud.

1° mistahes kauba tarbimise kasvamisel suureneb tarbimise sotsiaalne kasulikkus ja vastupidi;

2° jääva kasulikkuse korral on mingi kauba tarbimise samale marginaalsele kasvule vastav sotsiaalse kasulikkuse marginaalne suurenemine seda väiksem, mida kõrgem on kauba tarbimise tase ja vastupidi.

Selliste omadustega funktsiooni U nimetatakse tarbija **kasulikkus- ehk huvifunktsiooniks**. Eelistussuhtega peab see funktsioon olema seotud sel teel, et $U(Y') > U(Y'')$ korral oleks tarbimine Y' eelistatavam kui tarbimine Y''. Eeldatakse veel, et funktsioon U on koos oma esimest ja teist järku tuletistega pidev tarbimise $Y = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_m)$ iga koordinaadi järgi. Omaduse 1° põhjal on siis iga $i = 1, \ldots, m$ korral

$$\frac{\partial U}{\partial Y_i} = \lim_{\Delta Y_i \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta Y_i} = u_i > 0. \tag{1}$$

Kasulikkuse mingile jäävale väärtusele $U = C = \text{const}$ vastavat hüperpinda

$$U(Y) = C$$

nimetatakse **ükskõiksusnivooks**. Et huvifunktsioon on kõigi argumentide järgi kasvav, siis asetsevad suurema kasulikkusega nivoopinnad koordinaatide algusest kaugemal. Omadus 2° ütleb, et tarbimise muutumisel mööda mingit nivoopinda $U = C$ on suhe $\Delta U / \Delta Y_i$ argumendi Y_i kahanev funktsioon. Suhte $\Delta U / \Delta Y_i$ kahanemise tõttu kahaneb ka piirväärtus u_i:

$$\frac{du_i}{dY_i} = u_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} u_{ij} \frac{dY_j}{dY_i} < 0, \tag{2}$$

kus

$$u_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial Y_j} = \frac{\partial^2 U}{\partial Y_i \partial Y_j}.$$

Olgu ühtlasi märgitud, et seoses (2) esineva tarbimise diferentsiaalide suhte dY_j / dY_i vastandarvu nimetatakse kauba j **marginaalseks substitutsiooni- ehk asenduskoefitsiendiks** kauba i suhtes.

Indiviidide või nende homogeensete rühmade huvifunktsioonide konstrueerimiseks valitakse tavaliselt mitme muutuja funktsiooni mingi lihtne üldkuju, näiteks sõltuvus kujul

$$U(Y) = \sum_{i=1}^{m} g_i Y_i - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{m} g_{ij} Y_i Y_j \tag{3}$$

ning püütakse statistiliste vaatluste alusel määrata kordajate g_i ja g_{ij} väärtused. Seejuures on otstarbekohane kasutada vähimruutude meetodit ja aproksimeerida mitte huvifunktsiooni U

ennast, vaid selle tuletisi, mille väärtused, nagu selgub, on kasulikkuse maksimumi korral hindade kordsed.

Homogeensete indiviidirühmade huvifunktsioonidest U_i ($i = 1, 2, \ldots, l$) konstrueeritakse sotsiaalne kasulikkus- ehk heaolufunktsioon

$$W = W(U_1, U_2, \ldots, U_l).$$

Sotsiaalse heaolufunktsiooni lihtsaimaks erikujuks on indiviidirühmade huvifunktsioonide kaalutud keskmine

$$W = \sum_{i=1}^{l} \omega_i U_i.$$

Tavaliselt eeldatakse, et sotsiaalsel heaolufunktsioonil on samad põhiomadused, mis indiviidi huvifunktsioonilgi.

Heaolufunktsiooni lihtsamate rakenduste hulka kuulub niisuguse tarbimise leidmine, mis antud hindade h_i ja tarbimisfondi T juures tagaks ühiskonna maksimaalse heaolu. Selleks tuleb lahendada lisatingimusega ekstreemumülesanne:

$$W = \max, \qquad \sum_{i=1}^{m} h_i Y_i = T.$$

Ülesande lahendamiseks Lagrange'i meetodil moodustatakse abifunktsioon

$$F = W - \lambda\left(\sum_{i=1}^{m} h_i Y_i - T\right)$$

ja võrrutatakse nulliga selle osatuletised:

$$\frac{\partial F}{\partial Y_j} = w_j - \lambda h_j = 0,$$

kus $w_j = \partial W / \partial Y_j$. Nii tekib võrrandisüsteem

$$w_j = \lambda h_j \quad (j = 1, 2, \ldots, m, \quad \sum_{i=1}^{m} h_i Y_i = T,$$

millest saab arvutada $m+1$ tundmatu λ ja Y_i ($i = 1, 2, \ldots, m$) väärtused. Maksimumi olemasolu ja ühesuse kindlustab heaolufunktsiooni kumerus:

$$d^2F = d^2W = \sum_{i,j=1}^{m} w_{ij} dY_i dY_j < 0,$$

kus $w_{ij} = \partial^2 W / \partial Y_i \partial Y_j$ ja vähemalt üks $dY_i \neq 0$.

Nõudlusanalüüsi aluseks on tarbimise põhipostulaat: tulu ja hindade igale muutusele reageerib ühiskond niiviisi, et tarbimise sotsiaalne kasulikkus jääb maksimaalseks. Eeldades, et sotsiaalset heaolufunktsiooni W aproksimeerib funktsioon kujul (3), saame uurida nõudluse olenevust tulust, hindadest ja tarbimise sotsiaalsest kasulikkusest.

Majandusteaduse põhiprobleem. Tänapäeva majandusteaduses mõistetakse majandusteaduse põhiprobleemina sotsiaalse optimumrežiimi kavandamist ühiskonna heaolu maksimiseerimise eesmärgil. Majandusteaduse põhiprobleem formuleeritakse järgmiselt:

1) defineeritakse sotsiaalne heaolu- ehk kasulikkusfunktsioon, s. t. loetletakse selle argumendid ja postuleeritakse sõltuvuse iseloom;

2) postuleeritakse argumentide kitsendused, mis defineerivad heaolufunktsiooni määramispiirkonna.

Heaolufunktsiooni defineerimisega on seotud mõned siiani lahendamata küsimused, nagu näiteks järgmine. Kas sotsiaalne heaolufunktsioon sõltub ainult indiviidide huvifunktsioonidest (on näiteks viimaste summa) või peaks see peale indiviidide otsustuste arvestama veel midagi muud (näiteks riigi huvifunktsiooni)? Teisest küljest säilib mõnel juhul nähtavasti vajadus indiviidi eelistussuhte parandamiseks, mis avaldub kas või näiteks selles, et riik sunnib ka neid lapsi koolis käima, kes ei viitsi õppida, või inimesi piirama alkoholitarvitamist.

Heaolufunktsiooni argumentidele postuleeritud kitsendused on enamasti tootmissüsteemiga määratud seosed ja loodusvarade algvarud. Tootmissüsteemiga määratud seosed tähendavad kõige põhilisemaid tootmiseeskirju, kusjuures tootmist mõistame nii üldises mõttes, et see sisaldaks ka valitsemistegevust, mis toodab niisuguseid tarbimisartikleid nagu vaba aeg, tervishoid, haridus, loominguvabadus, isikupuutumatus jne. Nimetatud eeskirjade hulka ei tohiks kuuluda näiteks juhtimise tsentraliseerimise aste, mis on majandusteaduse põhiprobleemis üks otsitavaid. Inimeste maksimaalse heaolu kui ühiskonna arenemise põhieesmärgi saavutamisele aitavad kaasa ka omandisuhted, mis samuti ei saa seetõttu olla ette määratud. Omandisuhete objektiivse käsitluse taustaks on majandusteaduse põhiprobleemi lahendamine. Ainult majandusteaduse põhiprobleemi lahendamise teel saame teaduslikult põhjendada tootmisvahendite ühisomandi vajalikkust. Vihjates majandusteaduse põhiprobleemi puudulikule käsitlusele tänapäeva majandusteaduses, märgib J. Tinbergen, et kahjuks kulutatakse siin jooksva töö pisiülesannete lahendamiseks palju rohkem vahendeid kui põhiprobleemi uurimiseks, millega majandusteadus just tegelema peaks.[3]

Majandusteaduse põhiprobleemi otsitavateks on niisiis sotsiaalse heaolufunktsiooni maksimumpunkti koordinaadid. Viimaseid interpreteeritakse kui sotsiaalseid institutsioone, mis tagavad ühiskonna maksimaalse heaolu.

---

[3] J. Tinbergen. The Significance of Welfare Economics for Socialism. On Political Economy and Econometrics, Essays in Honour of Oskar Lange, Warszawa, PWN, 1964, lk. 597.

Majandusteaduse hindamise kriteerium. Majandusteaduse põhiprobleemi käsitlus põhineb majanduse matemaatilisel teoorial, mille objektiivsuse ainukeseks hindajaks on selle viljakus. Uue teooria viljakust ei saa hinnata selle järgi, kas ta vastab mingile endisele teooriale, mille terminites hindaja on harjunud mõtlema. See ei välista muidugi võimalust, et uuel ja endisel teoorial leidub ühiseid printsiipe või et uus teooria on endise üldistuseks. Uue teooria suuremat viljakust mingi endise teooriaga võrreldes mõõdab see, et uus teooria on võimeline andma tegelikkusega paremini kooskõlas olevaid vastuseid meid huvitavatele küsimustele või vastama suuremale hulgale küsimustele. Kui mingit arenemistempot tagava akumulatsiooninormi arvutamiseks võime uue teooria järgi tuletada valemi, mis arvestab põhivahendite eri liikide ekspluatatsiooniaegu ja investeerimistegevuse viivitusaegu, kusjuures endine teooria niisuguse valemi tuletamiseks võimeline ei ole, siis on see uue teooria suurema viljakuse vaieldamatuks tunnuseks. Uue majandusteooria suurema viljakuse kriteeriumiks on seega võime majanduse arenemist paremini juhtida. Majandusel on vähe kasu niisugusest teooriast, mis on taandunud toimunud majanduslike sündmuste pinnapealseks kirjeldamiseks ega taotle majandusalase tegelikkuse ümberkujundamist majanduse arengu juhtimise teel. Kui majandusteaduse näol on meie käes vahend majanduse arendamiseks mingis soovitud suunas ja selle teaduse poolt dikteeritud juhtimisotsuste vastuvõtmisel saavutatakse tõepoolest seatud eesmärk, siis on ühtlasi kinnitust leidnud majandusteadusliku teooria tõesus — vastavus majandusalasele tegelikkusele. Majandusteadusliku teooria tõesust kinnitab seega majandusalane eksperiment.

Majandusalane eksperiment. Majandus on tegelikkuse ala, kus eksperimenteerimine on üks kulukamaid. Majandusliku eksperimendi ebaõnnestumine näitab eeskätt eksperimendi halba kavandamist, mida võib omakorda põhjustada asjaolu, et teooriat, mille järgi eksperiment on kavandatud, tuntakse puudulikult või see ei vasta majandusalasele tegelikkusele. Kulud eksperimendi teaduslikuks kavandamiseks on aga tuhandeid kordi väiksemad kui ebaõnnestunud eksperimendi kahjum. Majandusalasele eksperimendile peab seetõttu alati eelnema majandusteaduslik eksperiment. Viimase läbiviimiseks moodustatud uurimisrühma erialase koosseisu dikteerib tõsiasi, et majandusteaduse arenemine toimub tänapäeval peamiselt sotsioloogia, majandusteaduse ja matemaatika piirialadel. Siin on võimatu edu saavutada uurijatel, kes peale oma eriala ei tunne küllaldaselt kahte naaberala. Kui probleemi raskus on näiteks matemaatilist laadi, siis N. Wieneri sõnade järgi jõuaks üks matemaatikas asjatundmatu teadlane täpselt sama kaugele kui kümme matemaatikas asja-tundmatut teadlast ja nende koostöö kaotaks mõtte.[4] Nimetatud erialade teadlaste edukas koostöö eeldab vähemalt seda, et majandusteadlane ja sotsioloog oskavad oma ala probleeme matemaatiliselt püstitada ning et matemaatik oskaks deduktsiooni tulemusi sotsioloogia ja majandusteaduse terminites interpreteerida. Halduskorras niisugust teadlaste rühma koos töötama panna ei saa, alluvusvahekorrad võiksid loomingut ainult halvata. N. Wiener arvab, et edukas uurimisrühm peab ühendama oma tegevuses sõltumatuid teadlasi, kes on liitunud soovist, võib-olla isegi vaimsest vajadusest, teatavat valdkonda kui tervikut paremini mõista ja seda mõistmisvõimet üksteisele edasi anda. Rühma liikmed peavad olema harjunud koos töötama ja tundma üksteise vaimseid võimeid. Ükski uurimisrühma liige ei tohi maha suruda teise uusi ideid, vaid peab suutma mõista oma ametivenna uue mõtte tähtsust isegi enne, kui see on täie täpsusega väljendatud. Kui need eeldused ei ole täidetud, võib uurimisrühma teadlaste koostöö muutuda üksteise takistamiseks. Viimasel juhul on teadlaste individuaalne töö isegi tulemusrikkam.

Sobiva uurimisrühma olemasolu korral kavandatakse majandusteaduslik eksperiment üldjoontes järgmiselt:

A. Teadlaste rühm, kuhu kuuluvad majandusteadlased, sotsioloogid ja matemaatikud, 1) valib eksperimendi aluseks mingi majandusteadusliku teooria, interpreteerib seda uuritava majandusalase objekti terminites ja teeb teooria kontrollimiseks esialgseid arvutusi; 2) töötab välja tegevusjuhendi teooria eksperimenteerimiseks vajalike algandmete kogumiseks ja eeltöötlemiseks; 3) kavandab eksperimenteerimiseks arvutusprogrammi.

B. Nimetatud tegevusjuhendi järgi hakkab rühm ökonomiste vastava ala statistikateoreetiku juhtimisel koguma ja eeltöötlema eksperimenteerimiseks vajalikke algandmeid. Seejuures on nõutav, et 1) oleks tagatud algandmete vastavus tegelikkusele; 2) oleksid määratud algandmete absoluutsete vigade ülemtõkked.

C. Programmeerijad valmistavad ja siluvad arvutusmatemaatikute juhendamisel vastavad arvutiprogrammid ning lasevad perforeerida algandmed. Operaatorid sooritavad arvutiprogrammide järgi arvutused ja tagastavad tulemused arvutusmatemaatikutele, kes pärast kontrollimist annavad need üle uurimisrühma teadlastele.

D. Teadlased analüüsivad arvutustulemusi, teevad järeldusi ja võrdlevad neid seniste vaatlustega. Mõnikord võivad järeldused olla kooskõlas seniste vaatlustega, teinekord võib järelduste

[4] N. Wiener. Küberneetika ehk juhtimine ja side loomas ning masinas. Tallinn, 1961, lk. 13.

kontroll nõuda seevastu täiendavaid vaatlusi ja eksperimente. Esimesel juhul kõneleme teooriast, mis varem täheldatud ilminguid seletab, teisel juhul teooriast, mis uusi ilminguid ennustab. Hea kooskõla korral tegelikkusega võetakse teooria soovitused kokku tegevusjuhendiks, mis on võimalikult lihtne ja mugav praktiliseks kasutamiseks.

Hoolikalt läbiviidud ja õnnestunud majandusteaduslik eksperiment rajab aluse vastava teooria järgi tehtud majandusalase eksperimendi tõenäoseks õnnestumiseks.

Majandusalase eksperimendi teadusliku organiseerimisega ei taotle teadlased kontrolli ühiskonna haldus-, majandus- ja tehnikaorganisatsiooni üle. Ometi lasub teadlastel eriline vastutus. Teadlastel peab olema alati julgust näidata, kus teaduse poolt väljaselgitatu tähelepanemata jätmine võib viia ühiskonnale kahjulike tagajärgedeni. Samal ajal peab ühiskond olema suuteline ja tahteline teaduse avastusi hindama ning kasutama. Seda võib saavutada ainult põhjaliku hariduse võimaldamisega kogu ühiskonnale.[5]

Tänapäeval võib matemaatika üheks huvitavamaks rakendusalaks pidada majandusmatemaatiliste mudelite teooriat, mis on moodsa majandusteaduse arenemise aluseks. Et majandusteaduslik mõtlemine on tuginenud ja peabki tuginema mudelitele, siis võib majandusteadust käsitada kui järeldusi majanduse mudelitest. Makromudelite rakendamine majandusteaduses toob kaasa näiteks poliitilise ökonoomia vabanemise praegusest stagnatsiooniseisundist ja arenemise praktiliseks teaduseks, mille järgi hakkame kavandama ühiskonna arenemist.

ARVAMUSI MATEMAATIKAST

Matemaatiliste avastuste kõige viljakamaks allikaks on looduse sügav uurimine. Selgelt määratletud lõppeesmärgi pakkumisega välistab see uurimisviis ebamäärased küsimused ning kasutud arutlused, ta on üks kindlamaid vahendeid analüüsi enda kujundamiseks, meile kõige olulisemate ja loodusteaduse seisukohalt kõige püsivama väärtusega põhimõistete avastamiseks.

*

Antiikaja teadlastele tundmatud analüütilised võrrandid, mida Descartes esmakordselt rakendas kõverate ja pindade uurimisel, ei ole määratud üksnes kujundite omaduste ja ratsionaalse mehhaanika objektiks olevate omaduste kirjeldamiseks, nad on kasutatavad kõigi nähtuste puhul üldse. Ei saa leiduda universaalsemat ja lihtsamat, vigadest ning selgusetustest veel vabamat keelt, mis oleks niiöelda enam kohandatud looduse muutumatute suhete väljendamiseks.

J. Fourier. Théorie analytique de la chaleur (1822)

---

5 J. Bernal. Teadus ühiskonna ajaloos. Tallinn, 1962, lk. 669.

MIDA TEHAKSE TRÜ ARVUTUSKESKUSES

V. Tinn

Alates 1964. aastast, kui TRÜ arvutuskeskuses hakkas tööle endise «Ural-1» asemel sellest peaaegu sada korda kiirem elektronarvuti «Ural-4», on ka arvutuskeskuse tööde maht oluliselt kasvanud.[1] Probleemlaboratoorium, mille koosseisu kuulub nüüd juba 40 inimest, on omandanud «oma näo» vastavalt tema ülesannetele, mis mõnevõrra erinevad enamuse arvutuskeskuste omadest.

Ülikooli matemaatikute, sealhulgas arvutusmatemaatika kateedri ja seega ka tema juurde kuuluva arvutuskeskuse põhiliseks ülesandeks on matemaatikute ettevalmistamine nii rahvamajandusele kui ka teistele arvutuskeskustele. Seda ülesannet on arvutuskeskus oma töö planeerimisel silmas pidanudki. Enamik vabariigi rahvamajanduses või teistes arvutuskeskustes töötavatest matemaatikutest on ju oma esimesed praktilised kogemused saanud ülikooli arvutuskeskuses.

Et TRÜ on praegu ainus Eesti NSV kõrgem õppeasutus, mille lõpetajad saavad matemaatikudiplomi, tuleb siin spetsialiste ette valmistada väga erinevates suundades. See on omakorda tinginud ka arvutuskeskuse töö mitmekesisuse. Järgnevalt peatumegi mõningatel tähtsamatel küsimustel, millega arvutuskeskuses on tegeldud või tegeldakse.

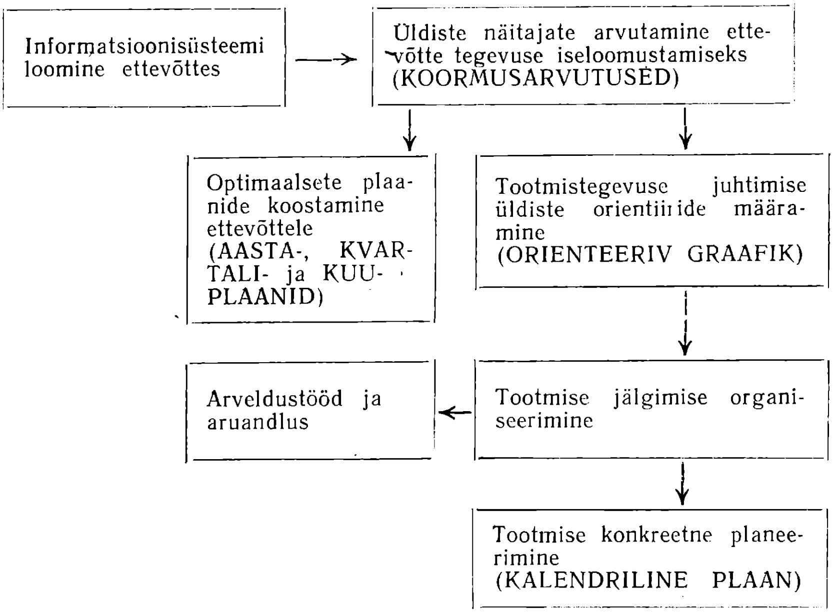
Põhiliseks suunaks on arvutuskeskuses algusest kuni käesoleva ajani olnud majandusmatemaatika-alased uurimused[2]. Oluline koht nende hulgas on ettevõtte töö juhtimise ja planeerimise põhjendatud süsteemi loomisel. See küllaltki suur ja keeruline küsimuste kompleks hõlmab nii metoodilise ja matemaatilise külje kui ka tulemuste tegeliku rakendamise. Kogu probleemi ei saa tema keerukuse tõttu lahendada samaaegselt täies ulatuses. Süsteem tuleb algul projekteerida üldiselt, jaotada etappideks ja kasutades eelmise etapi rakendamisest saadud kogemusi ning silmas pidades esialgse üldise projekti nõudeid, leida lahendustee järgmisele etapile. Käesoleval ajal on TRÜ arvutuskeskuses

---

[1] TRÜ arvutuskeskuses aastatel 1959—1963 teostatud töödest vt. Ü. Kaasik, R. Mullari, E. Saareste. Majandusmatemaatika-alaseid töid Tartu Riikliku Ülikooli arvutuskeskuses. — Matemaatika ja kaasaeg, II, lk. 47—50.

[2] Vt. A. Jägel. Elektronarvutite massilisest rakendamisest majanduslike protsesside juhtimisel. — Matemaatika ja kaasaeg, IX, lk. 52—57.

selles suunas töötatud põhiliselt kahe tehase — Tartu Aparaaditehase ja Võru Gaasianalüsaatorite Tehase materjalide baasil. Seniste kogemuste põhjal võib kogu süsteemi loomise nähtavasti jagada järgmisteks etappideks:



Käesolevaks ajaks on praktiliselt juurutatud koormusarvutuste tegemine esimeses neist ettevõtetest, käsil on üldiste orientiiride — elektronarvutil koostatud tootmisülesande juurutamine. Algust on tehtud ka optimaalsete plaanide koostamise metoodika väljatöötamisega.[3]

Nende probleemide juures kerkib üles terve rida küsimusi (partiide optimaalsete suuruste määramine, tootmise üksikute sõlmede poolt kogu süsteemis põhjustatud häirete uurimine jne.), mille lahendamiseks on tarvis hulgaliselt informatsiooni, mida ettevõttes eksperimente teostamata on praktiliselt võimatu saada. Selle asemel võib aga rakendada ettevõtte või tema osa töö imiteerimist elektronarvutil. Seda teed ongi arvutuskeskuses kasutatud näiteks seadmete optimaalse kompleksi määramisel ning käesoleval ajal toimuvad tööd mehhaanikatsehhi jaoks vajalike parameetrite määramiseks küberneetilise mudeli abil.

Kõrvuti aparaadiehituse tehastega uuritakse samalaadseid küsimusi ka teist tüüpi ettevõtete baasil, et teha kindlaks leitud tulemuste üldkehtivust tootmises. Selles suunas töötatakse koos

---

[3] Vt. Ü. Kaasik, R. Mullari. Kalendrilise planeerimise ülesannete matemaatiline lahendamine. — Matemaatika ja kaasaeg, VII, lk. 40—47.

NSVL TA Majandusmatemaatika Keskinstituudi Eesti filiaali ühe Tartus tegutseva laboratooriumiga (mis, muide, on välja kasvanud arvutuskeskuse ühest töörühmast), kasutades baasina Tartu Õmblusvabrikut «Sangar».[4]

Peale juba nimetatud uurimissuundade on arvutuskeskuses proovitud veel jõudu mõningate ettevõtete töö juhtimise valdkonda kuuluvate küsimustega, nagu arveldustööd (palga, materjalide ja omahinna arvestus), valutsehhi vooluliini kalendergraafiku koostamise metoodika väljatöötamine jne.

Üheks oluliseks probleemiks rahvamajanduse juhtimisel on tootmisharudevahelise bilansi tasakaalumudelite uurimine. Selle ülesande matemaatilise küljega tegeldakse arvutuskeskuses üpris edukalt juba mitu aastat.

Probleemlaboratooriumi algpäevadest alates oli üheks tähtsamaks tööks põllumajandusliku tootmise mudelite koostamine ja rakendamine. Siinkohal võiks märkida optimaalsete söödaratsioonide ja jõusööda retseptide koostamist jne.[5] Sellealased uurimused on võitnud üleliidulise tunnustuse. Käesoleval ajal nende küsimustega aga arvutuskeskuses enam ei tegelda, sest töö edukuse huvides on see teema üle antud Majandusmatemaatika Keskinstituudi Eesti filiaali ühele laboratooriumile. Sinna siirdusid tööle ka arvutuskeskuse vastava töörühma töötajad.

Umbes viis aastat tagasi hakkas praktika vajadustest tingituna arenema matemaatilise statistika suund. Põhiliseks on siiani jäänud katseandmete matemaatiline töötlemine, s. t. näitajatevaheliste korrelatiivsete seoste leidmine, dispersioonanalüüs, faktoranalüüs jne. Põhilisteks «tarbijateks» on siin ülikooli teiste kateedrite ja laboratooriumide töötajad (eriti meedikud, bioloogid, juristid, aga ka kehakultuuriteaduskonna töötajad).

Üheks uudseks, kuid kiiresti arenenud suunaks on arvutustehnika ja matemaatiliste meetodite rakendamine sotsioloogias, s. t. ankeetide analüüs elektronarvuti abil. Sellel valdkonnal on küllaltki suur tulevik, TRÜ arvutuskeskus on aga selle ala pioneere vabariigis.

Peale nende on arvutuskeskuses tulnud lahendada terve rida praktilisemat laadi ülesandeid järjekorrateooria, töökindluse küsimuste, atmosfäärifüüsika, statistika jne. valdkondades.

Kuna olemasolev elektronarvuti «Ural-4» on oma tööaastate jooksul juba jõudnud moraalselt vananeda, pole kõiki seniseid tulemusi veel olnud võimalik juurutada. Sellest kitsaskohast peaks üle saama uue elektronarvuti abil, mida arvutuskeskus loodab peatselt hankida.

---

[4] Vt. Juurdelõikuskaartide koostamine elektronarvutil. — Matemaatika ja kaasaeg, XI, lk. 27—32.

[5] Vt. T. Akkel. Lineaarse planeerimise rakendamisest loomakasvatuses. — Matemaatika ja kaasaeg, VI, lk. 27—37.

GEOMEETRIA — TEADUS MÖÖBLIST JA MÜÜRIDEST[1]

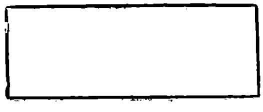
W. W. Sawyer

Nii asus ta uue energiaga täitma oma ülesandeid: uurima geomeetriat, ladina keelt, grammatikat ja murde. Sami hea mälu kergendas grammatika õppimist, ka murrud ei valmistanud erilisi raskusi, aga geomeetria osutus talle hirmsaks katsumuseks. Ta ei suutnud taibata selle aine olemust. Algul edenes asi päris hästi, kuid kui ta Eukleidese esimese raamatu lõpul jõudis «rööpküliku lauseteni» (Olgu needtud nende väljamõtlejad!), muutus asi lootusetuks. Kogu õhtu uuris ta kannatlikult ühte neist lauseist, kuni lõpuks AB langes kokku CD-ga, haaras selle kätest ja nad hakkasid tema silme ees pöörlema tormilises valsihoos. Saabus magamaminekuaeg, kuid puhkamisele polnud võimalik mõeldagi: pikk pahur rööpkülik AH seisis voodipäitsis ja karjus metsiku häälega, ähvardades kogu maja äratada, et ta pole iialgi olnud ega saa ka kunagi võrdseks paksu lustaka ruuduga CK.

Henry Kingsley, «Geoffrey Hamlyn»

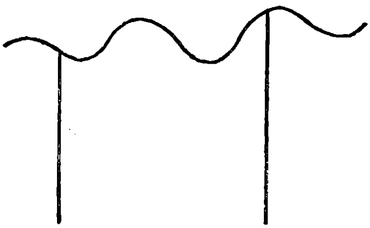
Eelmises peatükis mainiti, et igapäevases elus kasutavad inimesed samu arutlemisvõtteid kui matemaatikud, kuid ei anna ise sellest endale aru.

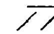
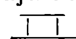
Näiteks väga paljud inimesed nagu kangestuvad, kui paluda neid selgitada ristküliku geomeetrilist konstrueerimist. Aga kui küsida: «Palun selgitage mulle sobivat moodust laua valmistamiseks», siis ei tekita vastamine neile üldse raskusi. Ristküliku all mõeldakse kujundit



[1] Käesolevas avaldame teise peatüki raamatust W. W. Sawyer, *«Mathematician's Delight»* (raamatu esimese peatüki tõlge vt. Matemaatika ja kaasaeg, XIII, lk. 88—90).

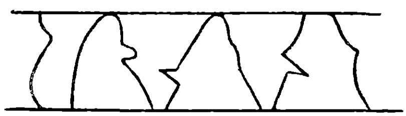
ja keegi ei või öelda teile laua kohta midagi, kuni ta ei tea küllalt hästi, milline on see kujund. Oletame näiteks, et teil on sellise kujuga laud



Kõik taldrikud, teetassid ja piimakannud libiseksid lohkudesse või kukuksid maha ja üldse oleks laua selline kuju väga ebamugav. Inimesed, kes teevad laudu, on üksmeelsel arvamusel, et lauaplaat peab olema tasane, mitte kõver. Isegi kui plaat on tasane, ei tarvitse ta tingimata olla horisontaalne ja võib välja näha näiteks nii  . Kui aga lauaplaat on rõhtne, siis võivad veel lauajalad veidralt olla, näiteks  või  . Neil juhtudel kipub lauaplaadi kaal liitekohti purustama. Selle vältimiseks tehakse lauajalad tavaliselt vertikaalsed ja laud seisab põrandal selliselt  .

Igaüks, kes mõistab, milline peaks näima laud, saab ka aru, mis on ristkülik. Te leiate ristküliku kohta küllalt palju igast geomeetria õpikust, sest ristküliku kuju on praktilises elus väga tähtis — ehkki vanemates geomeetria raamatutes ei mainita põhjust, miks me üldse õpime tundma ristkülikut.

Ristkülikuid kasutatakse ka müüriladumises. Harilikul telliskivil on nii ülemine ja alumine tahk kui ka külgtahud ristkülikukujulised. Miks? Seda on kerge taibata. Tellised tuleb laduda rõhtsalt, kui me ei taha, et nad libiseksid. (Isegi tahumata kividest ehitades püütakse müür laduda rõhtsate kihtidena). Tellised peavad seega olema sobitatud kahe rõhtsa joone vahele. Aga ka sel juhul on võimalik anda kivide otstele kentsakas kuju:



Kuid see sarnaneb juba rohkem piltmõistatusega kui müüriga: vaene müürsepp peaks kulutama poole oma elust sobiva kivi otsimisele. Me soovime, et kõigil tellistel oleks ühesugune kuju. Seda saab teha mitmel viisil — näiteks ////// või ((((((. Kuid selliste telliste puhul osutub müüri serv sakiliseks ja kahe müüri ühenduskohal tekivad tühemed, mida tuleb täita. Tellise tavalise kujuga on kõik need komplikatsioonid välditud.

Kellelgi ei teki niisuguse põhjenduse jälgimisel raskusi. Miks aga inimesed siis ei salli geomeetriat? Osaliselt vist sellepärast, et see aine on nende jaoks müstiline, nad ei saa aru (ja neile ei ole öeldud), kui lähedane on ta igapäevasele elule. Teiseks sellepärast, et matemaatika arvatakse olevat täpne. Geomeetriaõpikuis ei räägita midagi kujunditest, mis on «lähedased kolmnurgale» või «peaaegu ristkülikud», kuigi üsna tavaliselt osutuvad uks või laud õigest kujust veidi erinevateks. Selline pedantne täpsus tõukab inimesi geomeetriast eemale. Te võite mitu korda katsetada lauda valmistada ja iga laud tuleb eelmisest parem. Te õpite kogemustest. Kui aga rõhutada «matemaatilist täpsust», siis võime kergesti sulgeda selle teadmiste omandamise tee, katse ja eksituse tee. Pidades meeles, kui lähedalt on geomeetria seotud puusepatööga, ei tee te sellist viga. Kui teil tuleb lahendada probleem, mis tundub mõistatusena, siis püüate te kõigepealt teha mõned katsed. Olles leidnud meetodi, mis tundub sobivat, võib osutuda võimalikuks leida ka oma meetodile loogiline «täpne» «veatu» õigustus: te suudate tõestada, et meetod on õige. Aga selline täiustamine tuleb alles lõpus, katse toimub alguses.

Esimesed matemaatikud olid seega tavalised töölised — puusepad ja ehitajad. See on avaldanud mõju ka terminoloogia kujunemisele. Mis on «sirgjoon» (*straight line*)? Kui uurite sõna «sirge» (*straight*) tähendust sõnastikust, siis veendute varsti, et see sõna pärineb vana-inglise sõnast «venitama» (*stretched*), kuna aga «joon» (*line*) on peaaegu sama mis «linane niit» (*linen thread*). Niisiis, sirgjoon on järelikult venitatud linane niit, nagu teab igaüks, kes on pannud kartuleid või ladunud müüri.

Eukleides lähenes küsimusele hoopis teisiti. Ta defineeris sirgjoone kui kahe punkti vahelise lühima tee. Aga kuidas leida lühimat kaugust? Kui veame mõõdulindi ühest punktist teiseni ja pingutame ühte otsa nii tugevasti, kui jaksame, nii et kahe punkti vahele jääv mõõdulindi osa oleks võimalikult lühike, siis saamegi lühima kauguse kahe punkti vahel. Mõõdulinti «venitatakse» täpselt samal viisil, nagu seda tegid ehitaja või aednik.

Kui teil kästakse midagi defineerida, siis küsige endalt: «Kuidas ma seda praktikas teeksin?»

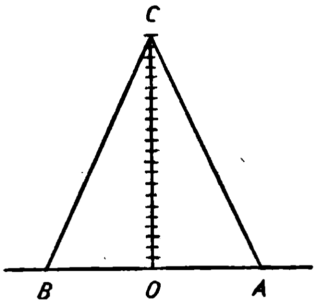
Teilt võidakse nõuda näiteks «täisnurga» defineerimist. «Täisnurk» (juhul kui nimetus osutub teile uueks) on kujund, mis tekib kahe joone lõikumisel L tähe taoliselt (∟). Iga paberilehe nurk kujutab endast täisnurka. Kujundid ∠ ja _/ ei ole aga täisnurgad.

Kuidas saada täisnurka? Oletame, et te tahate rebida paberilehe kaheks korralikuks pooleks — mida tuleb selleks teha? Te murrate paberi kokku ning rebite katki mööda murdejoont, mis moodustabki lehe servaga täisnurga. Kui te murrate hooletult, siis te ei saa täisnurka, vaid midagi taolist: _/_ . Liiga suur osa paberist on jäänud ühele poole ja liiga väike teisele. Me näeme nüüd täisnurgale iseloomulikku tunnust: mõlemal pool murdejoont asuvad pooled näivad ühesugused. Kui meil on tindiplekk ühel pool murdejoont, siis paberit kokku murdes saame peegelduse teisele poolele. Murdejoon nagu kujutaks peeglit. Ja paberi serva peegelduseks (kui on tegemist täisnurgaga) saame teisel pool murdejoont oleva paberi serva.

Te võite seda proovida joonlaua või jalutuskepiga. Me võime keppi hoida nii, et tema peegeldus näib olevat kepi jätkuks. Te võite vaadata piki keppi ja tema pikendust just nagu vaataksite läbi püssitoru. Kepp on sel juhul «täisnurga all» peegliga.

Oletame, et te rajate jalgpalliväljakut ja soovite saada täisnurka. Te ei saa väljakut kokku murda, et leida sobivat murdejoont! Kuid seesama peegli-idee annab tee raskusest ülesaamiseks.

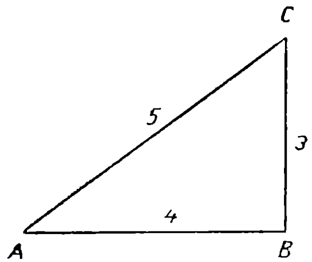
Oletame, et O on väljaku küljejoone punktiks, kust me tahame tõmmata sirge, mis moodustaks küljejoonega OA täisnurga. Me teame juba, et kui OC on õiges asendis, siis ta peegeldab punkti A punkti B, mis asub samuti küljejoonel. Kui me murraksime paberi mööda OC-d kokku, siis satuks tipp A tippu B ja sirge OA kataks parajasti sirge OB ning AC kataks BC.



Aga see annab tee OC leidmiseks. Kui me alustame punktist O, mõõtes mõlemale poole võrdsed kaugused OA ja OB, saame A ja tema peegelduse B. Et BC on AC peegeldus, siis peavad nad olema võrdse pikkusega. Võtame sobiva pikkusega köie ja kinnitame algul köie ühe otsa punkti A ning kraabime teise otsaga maapinnale ringjoone kaare, nii et kõik punktid sellel joonel on köie pikkuse kaugusel punktist A. Kui kordame sama operatsiooni punkti B puhul, saame tekkinud ringjoonte lõikepunkti C, mis asub samal kaugusel nii punktist *B* kui ka punktist *A*. Punkti *C* asetame tiku, tõmbame köie punktist *C* punkti *O* ja lupjame piki seda.

Te näete, et meetodit, mis oli sobiv jalgpalliväljaku jaoks, saab kasutada ka täisnurga konstrueerimiseks sirkli ja joonlaua abil.

Aga on veel teine võimalus, mis väärib tähelepanu. Seda moodust tegelikult kasutataksegi jalgpalliväljakute märkimisel.



Kui te võtate kolm keppi pikkustega vastavalt 3, 4 ja 5 jardi ning asetate nad nii, nagu on näidatud kõrval oleval joonisel, siis osutub, et nurk *B* on täisnurk. Pole sugugi ilmne, et see nii on. Aga see avastus tehti nähtavasti juba 5000 aastat tagasi enam-vähem juhuslikult. Me ei tea avastaja nime, aga võime öelda, et ta oli seotud ehitamisega — töömees või arhitekt. Sellist täisnurga leidmise viisi kasutati, kuid ehitajate oskust ja inimesi ei huvitanud, miks see oli nii, samuti nagu perenaisi ei huvita, miks kasutatakse küpsetuspulbrit. Oli teada, et see meetod andis häid tulemusi ja vanad egiptlased kasutasid seda edukalt püramiidide ja templite ehitamisel.

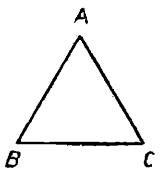
Ei ole teada, kui palju õpetatud egiptlased murdsid oma pead sellele faktile selgituse leidmisel, aga Egiptust külastanud kreeklased leidsid selle meetodi lausa müstilise olevat. Egiptlastest töömehed ei leidnud selles ise midagi tähelepanuväärset ja kui kreeklased küsisid neilt midagi selle kohta, siis said nad arvatavasti järgmise vastuse: «Seda on ju alati nii tehtud, kuidas te seda teisiti teeksite?»

Ja nii läksidki kreeklased ära imestades: «Miks?» Miks 3, 4 ja 5? Miks mitte 7, 8 ja 9? Mis juhtuks, kui me võtaksime 7, 8 ja 9? Või mõned teised kolm arvu?

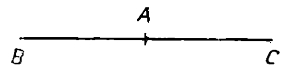
Oleks täiesti loomulik alustada väikestest arvudest ja püüda konstrueerida kolmnurki selliste mõõtmetega nagu (1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 1, 3), (1, 2, 2), (2, 2, 2) jne. Kuidas need kolmnurgad siis välja näevad?

Niipea kui te hakkate selliselt katsetama, hakkate te tegema ka avastusi. Vahel te leiate, et kolmnurka pole üldse võimalik konstrueerida, nagu näiteks juhtudel (1, 1, 3), (1, 1, 4) jne. See on nii siis, kui kolmnurga üks külg (näit. 3) osutub suuremaks kui kaks teist külge kokku $(1+1)$.

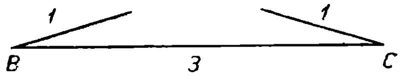
Te märkate, et kolmnurga külgede pikkuste kahekordistamine ei muuda kolmnurga kuju. Näiteks kolmnurk (2, 2, 2) näib üsna sarnane kolmnurgaga (1, 1, 1).



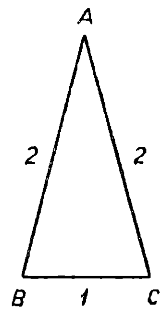
(1, 1, 1)



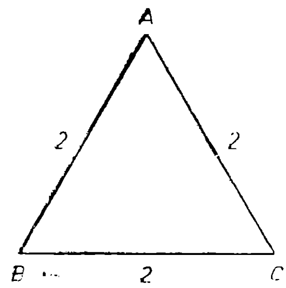
(1, 1, 2)



(1, 1, 3)



(1, 2, 2)



(2, 2, 2)

Kolmnurgal (1, 2, 2) on meeldiv omadus — kui me pöörame ta ümber nii, et B ja C vahetavad kohad, siis saame samasuguse kolmnurga.

Mida rohkem kolmnurki te joonestate, seda rohkem märkate nende omadusi. Mitte kõik need avastused ei ole tegelikult uued. Näiteks ülalpool me nägime, et igas kolmnurgas peab $AB + AC$ olema suurem kui BC ja see ei ole tõesti mingi uudis. Me teame, et sirgjoon BC on lühim tee B-st C-ni ja loomulikult tuleb tee pikem, kui me läheme B-st C-ni A kaudu, s. t. läbime tee, mille pikkus on võrdne AB ja AC summaga. Seega oleksime selle konkreetse tulemuse võinud leida ka loogilise arutelu teel: ta järeldub faktist, et sirgjoon on lühim tee kahe punkti vahel.

Esemete kuju uurides võime me teha kaht asja: 1) me võime avastada terve rea fakte; 2) me võime järjestada need faktid süsteemi, näidates, mis millest järeldub.

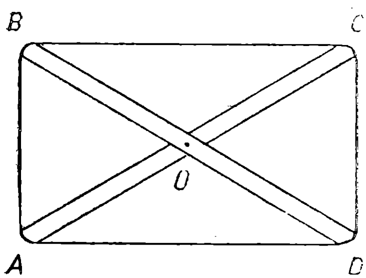
Tõepoolest, seda kahte etappi on kasutanud ka kreeklased. 300 aastat e. m. a. kirjutas Eukleides oma kuulsa raamatu geomeetriast, milles ta kõik tuntud faktid esitas süstematiseeritult. Sellest raamatust leiate vastuse küsimusele, miks kolmnurk külgedega 3, 4 ja 5 on täisnurkne; seal on aga veel näidatud, et ka mõned teised kolmnurgad nagu näiteks (5, 12, 13), (7, 24, 25) või (33, 56, 65) on samal põhjusel täisnurksed.

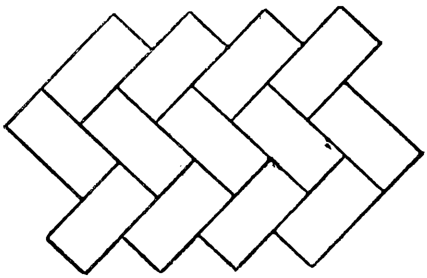
Aga kõigeks selleks kulus aega. Suur püramiid ehitati 3900 a. e. m. a. reeglite järgi, mis baseerusid praktilistel kogemustel. Eukleidese süsteem nägi ilmavalgust alles 3600 aastat hiljem. Oleks täiesti ebaõiglane nõuda, et lapsed hakkaksid õppima geomeetriat sellisel kujul, nagu seda esitas Eukleides. Inimkonna arengu 3600 aastast ei suuda keegi nii lihtsalt üle hüpata. Parim viis geomeetria õppimiseks on käia sama teed, mille inimkond esialgu läbis: teha asju, valmistada asju, märgata asju, järjestada asju ja alles siis arutleda asjade üle.

Kõigepealt tuleb vältida kiirustamist. Matemaatika on teadus, mis ei arene kiiresti. Kõige tähtsam on olla kindel, et te teate, millest räägite: asjadest peab olema selge ettekujutus. Asjadest tuleb mõtelda seni, kuni iga mõiste jaoks kujuneb elav pilt. Olles kord õppinud selgete piltlike ettekujutuste abil mõtlema, on teie areng kiire ja pingutusteta. Saatuslikuks kujuneb kiire edasiliikumine aga siis, kui jätate oma tagalasse vaenlase — mõistete virr-varri. Sel juhul on õigem alustada juba ükskordühest.

Mõned geomeetriaga seotud katsed

1. Poisil on puulatt AC pikkusega 4 jalga. Selle külge tahab ta kinnitada teise lati nii, et kujund $ABCD$, mille moodustab lattide otste ümber tõmmatud nöör, oleks ristkülik. Kui pikk peab olema latt BD, millises punktis O peab ta latid kinnitama? Kas on oluline, millise nurga all ta latid ühendab?

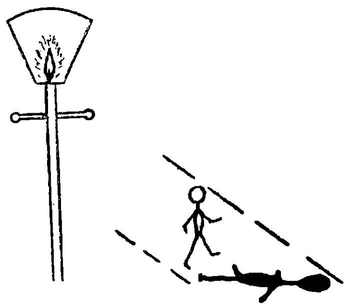




2. Tasane maapinnaosa tuleb katta plaatidega. Kõik plaadid peavad olema sama suuruse ja kujuga, kuid pole oluline, kas väline serv tuleb sakiline või mitte. Katsetage, mitu võimalust te leiate plaatide kuju valimiseks ja ühendamiseks. Üks näide on toodud ülal oleval joonisel.

3. Tänavalatern on maast 12 jala kõrgusel. Kolme jala pikkune laps lõbustab end kõndides nii, et tema pea vari libiseb piki maapinnale tõmmatud joont. Milliseks kujuneb lapse tee, kui maapinnale tõmmatud joon on: 1) sirge,

2) ring, 3) ruut? Milline reegel seob lapse tee kuju maapinnale tõmmatud joone kujuga?

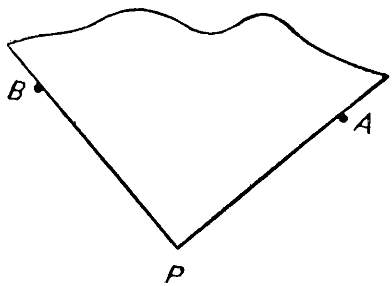


(Märkus. Vastuse pärast ärge astuge kellegagi sõnasõtta enne, kui te ei ole tegelikult katset korraldanud. Katse tegemiseks on sobiv võtta laualamp ja pliiats, mis kujutavad vastavalt tänavalaternat ja last. Pliiats joonistab ise paberile tee, mille ta läbib.)

4. Millised erinevused tekivad, kui eelmises ülesandes on lambi asemel päike?

5. Kuue jala pikkune mees seisab 12 jala kõrgusest laternapostist 10 jala kaugusel. Kui pikk on mehe vari?

6. Matkaja näeb kahte kirikutorni. Üks neist asub otse tema ees, teine aga otsesihis vasakul. Matkajal on kaart, millel on mõlemad kirikud märgitud, aga meie reisimees ei tea, millisest suunast ta neid vaatab: kas on see põhi või lõuna või mõni muu ilmakaar. Kus võib olla matkaja asukoht kaardil? (Juhis: lööge siledasse lauatükki kaks naela. Tähistagu need kirikutorne. Võtke nüüd tükk pappi, mille üks nurk on täisnurk, ja asetage ta naelte vahele, nagu on näha joniselt. Siis *P* on üks matkaja võimalikke asukohti. Kui ta vaatab suunas *PA*, siis jääb *B* temast vasakule. Märkige *P* asend lauatükile. Nihutage pappi ja märkige teine võimalik asend samal viisil. Need märgid asuvad ühel kindlal kõveral. Milline on see kõver?)



7. Väikesele, 25 jardi pikkusele laskerajale soovitakse ehitada liikuvat märklauda, mis kujutaks 20 jala pikkust, 15 jala kõrgust, poole miili kaugusel asuvat ja kiirusega 20 miili tunnis liikuvat veoautot.[2] Laskuri asukoht peab olema selline, et ta näeb veoauto üht külge. Milline peaks olema veoauto mudeli suurus ja kui kiiresti peaks ta liikuma?

8. Ämblik soovib minna telliskivi ühest nurgast *A* vastasnurka *B* lühimat võimalikku teed mööda. Millise liikumistee ta

---

[2] 1 jalg = 30,48 cm; 1 jard = 3 jalga = 91,44 cm; 1 miil = 5280 jalga = 1760 jardi = 1609,33 m.

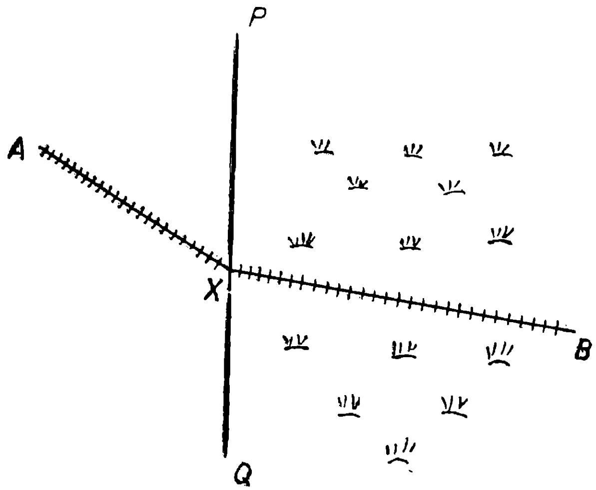
peaks valima? Arvestada tuleb asjaolu, et ämblik liigub mööda telliskivi pinda — läbi kivi ei ole ta võimeline tungima.

(Ülesande lahendamiseks vajalikud materjalid: mitu erineva kujuga telliskivi ning tükk nööri punktist A punkti B tõmbamiseks. Kasulik on telliskivi voltida papist. Pärast lühima tee leidmist ja papile märkimist võib «tellise» jälle laiali laotada — nii saamegi otsitava lühima tee kuju).

9. Võtke gloobus. Tõmmake niit mingi kahe asustatud punkti vahel pingule. Märkige ära kohad, millest niit üle läheb. Märkige need kohad ka maailmakaardile atlases. Pange tähele, kui palju erineb kaardile tõmmatud kahte punkti ühendav sirge kõverjoonest, mille äsjakirjeldatud viisil saime. See asjaolu on eriti oluline meremeestele ja lenduritele, kes läbivad pikki vahemaid.

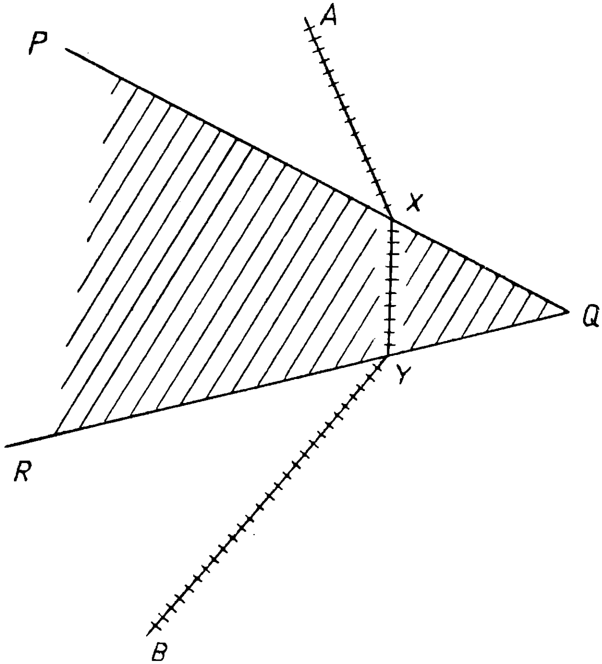
10. Ehitatakse raudteed, mis ühendab kahte linna — A ja B. Maapind paremal pool sirgest PQ on soine, mistõttu ühe miili raudtee ehitamine on seal kaks korda kallim kui vasakul pool joot PQ. Joonestage mõned võimalikud raudtee paiknemise plaanid ja leidke tee, mille ehitamine tuleb kõige odavam.

(Märkus. Ärge vastake sellele küsimusele üksnes arvutamise teel. Joonistage endale plaan, paigutage seal linnad A ja B soovi kohaselt ja mõõtke võimaliku tee pikkus, eeldades, et ühe miili raudtee ehitamine sirgest PQ vasakul maksab 10000 naela. Igapäevases elus püütakse sellistele küsimustele vastust saada iga hinna eest — kas arvutades või katse teel või siis mõlemaid kasutades. Hoopis võib unustada, mida ütles Eukleides 300 a. e. m. a.)



Punktide A ja X vahel on tee maksumus 10000 naela miil, punktide X ja B vahel 20000 naela miil. Leida parim koht punktile X.

11. See ülesanne on eelmisega samalaadne, ainult takistuse kuju on eelmisest erinev. Raudtee ehitatakse A ja B vahele, kusjuures nende linnade vahel on raskesti läbitava maa kiil PQR. Leida parim asukoht raudteele. (Sedalaadi ülesannetel on suur tähtsus raudteede ehitamise praktikas, kui kahe linna vahel on mägine maastik. Sel juhul tuleb eraldada täiendavad summad tee ehitamiseks läbi mägise maa).



Punktide A ja X vahel on tee maksumus 10000 naela miil. Sama on ka kulu tee ehitamisel punktide Y ja B vahel. Punktist X punkti Y aga on maksumus 20000 naela miil. Leida X ja Y parimad asukohad.

LOBATŠEVSKI GEOMEETRIA

K. Ariva

Geomeetrias algab revolutsioon

Käesoleva artikli eelnevates osades[1] andsime ülevaate paralleelsirgete probleemist ja selle ajaloost. Nagu märkisime, viisid probleemi lahendamiseks kahe aastatuhande vältel tehtud pingutused lõpuks uue — esimese mitteeukleidilise geomeetria avastamisele.

«Mitteeukleidilise geomeetria avastamine oli inimese mõttemaailmas suurimaks revolutsiooniks, mida tunneb teaduste ajalugu,» ütles V. F. Kagan selle geomeetria tekkimise sajandale aastapäevale pühendatud ettekandes. Seda revolutsiooni seostatakse esijoones vene matemaatiku Lobatševski tegevusega. Samal viisil, nagu koolis õpitavat geomeetriat nimetatakse Eukleidese geomeetriaks, omistatakse esimesele mitteeukleidilisele geomeetriale Lobatševski nimi. Sellega rõhutatakse asjaolu, et ehkki esimesed sammud uue geomeetria loomisel astusid peaaegu samaaegselt ja üksteisest täiesti sõltumatult kolm matemaatikut — Gauss, Bolyai ja Lobatševski, on viimase osatähtsus uute ideede arendamisel vaieldamatult suurim. Kui Gauss vaikis oma mõtetest ja keeldus avalikult tunnustamast ka teiste vastavasisulisi töid ja kui Bolyai pärast oma ainsa selleteemalise uurimuse ilmumist kibedasti pettununa peaaegu loobus tegelemast matemaatikaga, siis Lobatševski töötas uue geomeetria kallal kogu oma elu ja avaldas selle kohta terve rea ulatuslikke teoseid. Ta arendas uue geomeetriliste lausete süsteemi välja niisama suures ulatuses, kui tunti Eukleidese geomeetriat, ja leidis oma õpetusele hulgaliselt rakendusi kõrgemas matemaatikas.

Pealegi kuulub Lobatševskile vaieldamatu prioriteet uute ideede esimese avaldajana. Nimelt tegi ta vastavasisulise ettekande Kaasani ülikooli füüsika-matemaatikateaduskonna nõukogule 23. veebruaril[2] 1826. (Meenutame, et Bolyai töö ilmus 1832. aastal). Seda daatumit loetaksegi nüüd uue geomeetria sünnipäevaks. Sellel päeval algas revolutsioon muutumatuks ja lõplikult valmiks loetud geomeetrias, — revolutsioon, mille taga-

[1] Matemaatika ja kaasaeg, XII, lk. 73—90; XIII, lk. 71—87.
[2] Lobatševski eluga seotud daatumid on esitatud uue kalendri järgi.

järjed ja tähtsus ületasid kaugelt geomeetria enda raamid ja mis mõjutas sügavalt inimeste maailmatunnetust.

Nikolai Ivanovitš Lobatševski sündis 1. detsembril 1792. tolleaegses Nižni-Novgorodis kehvas ametnikuperekonnas. Tema lapsepõlv möödus vaesuses ja puuduses. Sajandivahetuse paiku kolis perekond Kaasani, et võimaldada lastele kooliharidust vastasutatud Kaasani gümnaasiumis. Lobatševski õpingud viimases algasid 1802. a. Ja kui 1805. a. avati sama gümnaasiumi baasil Kaasani ülikool, siis oli Lobatševski juba 1807. a. selle nimekirjas. Sellest peale oli kogu tema elu seotud Kaasani ülikooliga.

N. I. Lobatševski.
M. Ruberi söejoonis

Juba koolipingis ilmnes Lobatševski matemaatika-alane andekus. Ja ülikoolis pühendaski ta end täielikult matemaatikale. Paari-kolme aastaga töötas ta läbi tohutu hulga sellealast kirjandust ning tegeles samal ajal ka füüsikaga ja astronoomiaga. Tuleb märkida, et tänu mitmele välismaalt kutsutud õppejõule osutus Kaasani ülikoolis kõige paremini komplekteerituks füsika-matemaatikateaduskond, milles töö toimus peaaegu algusest peale tolleaegsete Lääne-Euroopa ülikoolide tasemel.

Ehkki Lobatševski töökus ja andekus leidis ülikoolis üldist tunnustust, tekkis tal tõsiseid raskusi ja kokkupõrkeid valitseva ametliku reaktsioonilise vaimu ja distsipliiniga. Teda süüdistati jumalakartmatuses ja vabameelsuses ning ähvardas isegi oht, et teda ülikoolist välja heidetakse ja sõjaväeteenistusse saadetakse, kus tollal tuli teenida aastakümneid. Ainult mõne professori energiline kaitse päästis Lobatševski sellest.

1812. a. lõpetas Lobatševski ülikooli ja jäeti ette valmistuma õppejõu kutseks. Juba 1814. a. töötas ta dotsendina ja kahe aasta pärast — 24-aastasena — valiti professoriks. Valitsuse ja ülikooli juhtkonna reaktsioonilised meetodid sundisid lahkuma välismaiseid õpetlasi ning peagu kogu füüsika ja matemaatika õpetamise koorem langes noorele Lobatševskile.

Õppetöös puutus Lobatševski paratamatult kokku ka paralleelsirgete probleemiga. Oma käsikirjana säilinud õpikus märkis ta 1823. a., et «ranget tõestust pole sellele tõele senini suudetud leida; neid, mis on esitatud, saab nimetada vaid selgitusteks, kuid ei saa lugeda matemaatilisteks tõestusteks selle sõna täielikus mõttes.» Siit tekkisidki tema mõtisklused sellel teemal. Võib arvata, et algul püüdis ka Lobatševski tõestada paralleelsuse aksioomi, kuid õige varsti jõudis ta uute, originaalsete seisukohtadeni, millest ta rääkiski 1826. a. (prantsuskeelne kirjalik ettekanne ei ole säilinud). Retsensendid ei kiitnud ettekannet heaks ja seda ei esitatud trükis avaldamiseks.

1829. a. avaldas Lobatševski ülikooli poolt väljaantavas ajakirjas artikli «Geomeetria elementidest», milles ta arendas oma ettekande ideid. Tema mõttekäigud on mitmeti analoogilised Saccheri ja Lamberti omadega. Esimesel pilgul näib, nagu tahaks ta tõestada V postulaati vastuväitelisel meetodil. Ta asendab postulaadi uue, seda eitava aksioomiga: «Tasandil saab läbi väljaspool sirget asuva punkti tõmmata rohkem kui ühe sirge, mis ei lõika antud sirget.» Sellest lausest teeb ta (kasutades Eukleidese ülejäänud aksioome) suure hulga järeldusi, s. t. tõestab teoreeme, mis Eukleidese geomeetrias ei kehti ja millest enamus on teravas vastuolus kujutluste ja harjumustega. Erinevalt Saccherist ja Lambertist on Lobatševski aga algusest peale veendunud, et nende teoreemide näiva absurdsuse tingib meie kujutluste ja kogemuste piiratus, mitte aga teoreemide loogiline puudulikkus. Ta teab, et on avastanud täiesti uue geomeetria, mida ta nimetab «kujuteldavaks». Sellele uuele ruumiõpetusele me omistamegi tänapäeval Lobatševski nime.

1835. a. ilmus Kaasani ülikooli teaduslikus bülletäänis Lobatševski ulatuslik teos «Kujuteldav geomeetria», mis kahe aasta pärast avaldati prantsuskeelses tõlkes ka Saksamaal. Hiljem (1836—1855) lisandusid sellele veel neli tööd, milles ta käsitles oma avastust.

Pingelise teadusliku töö kõrval, mis viis täiesti uue teadusharu loomiseni, tuli Lobatševskil kanda veel suurt administratiivtöö koormat ülikoolis. 1827. a. valiti Lobatševski Kaasani ülikooli rektoriks ja ta töötas sellel kohal kuni 1847. aastani. Kaasani ülikool — tollal ainus ülikool Moskvast Vaikse ookeanini — võlgneb väljaarendamise eest väga palju Lobatševski väsimatule energiale ja aktiivsusele. Samal ajal luges Lobatševski mitmesuguseid matemaatika- ja füüsika-alaseid distsipliine ja avaldas ühtlasi suurt mõju ümbruskonna koolide tegevusele.

Ehkki Lobatševski tööd ilmusid trükis, osalt isegi saksa ja prantsuse keeles, ei leidnud tema avastus autori eluajal mingit tunnustust. Liialt vankumatu oli Eukleidese autoriteet tolleaegsete mõtlejate ja matemaatikute jaoks, kes pidasid antiik-kreeklaste ruumiõpetust ainuvõimalikuks. Oldi veendunud selles, mida kirjutas 16. sajandil itaalia matemaatik Cardano Eukleidese «Elementide» kohta: «Vaieldamatu on nende põhitõdede jõud ja niivõrd absoluutne nende täielikkus, et õigupoolest ei saa ühtki teist teost sellega võrrelda; ... nendes peegeldub selline tõe valgus, et nähtavasti suudab ainult see geomeetria keerulistes küsimustes eristada tõelist väärast, kes mõistab Eukleidest.» Veel 19. sajandi keskel ütles inglise matemaatik A. de Morgan, et «mitte kunagi ei leidu geomeetriat, mis erineks oluliselt Eukleidese õpetusest, ja seni, kui ma seda ei näe oma silmadega, ei usu ma, et selline süsteem võiks eksisteerida.»

Sellepärast võtsid kõik tolleaegsed matemaatikud Lobatševski töid vastu vaikimisega. Veelgi enam — tema aadressil ilmusid vene ajakirjanduses pilke- ja laimupamfletid, millele vastamiseks ja vastuvaidlemiseks talle endale ei antud võimalust: tema vastuseid ei trükitud. Nõnda veetis Lobatševski oma elu teaduslikus mõttes täielikus üksinduses, keset ükskõikset, mittemõistvat ja pilkavat maailma. Kuid erinevalt Gaussist jätkus Lobatševskil vaprust üha uute tööde avaldamiseks ja erinevalt Bolyaist ei sattunud ta viljatusse kibestusse, vaid leidis endas jõudu oma ideede järjest laiemaks väljaarendamiseks — järeltuleva põlvkonna jaoks. Ja uus põlvkond võttis tema loomingu vastu ning õppis täiel määral hindama selle suurust — pärast Lobatševski surma 24. veebruaril 1856.

Revolutsioon geomeetrias oli alanud — ehkki seda teadsid veel väga vähesed ja ehkki selle kuulutajad, Lobatševski teosed, ootasid veel avastamist. Tunnustus tuli hiljem — pärast Gaussi surma, kui Gaussi seniavaldamata märkmed uue geomeetria kohta muutusid üldtuntuiks ja pöörasid matemaatikute tähelepanu Lobatševski ja Bolyai töödele.

Kuid sellest tunnustusest ja selle tagajärgedest räägime edaspidi. Nüüd on aeg pöörata tähelepanu uuele geomeetriale endale.

Erinevad geomeetriad — erinevad tõed

Enne Lobatševski õpetuse tähtsamate tõdedega tutvumist on siiski tarvis peatuda veel paaril asjaolul.

Tundub ilmsena, et kahest väitest, mis eitavad teineteist, saab tõene olla vaid üks. Nagu tõestas Legendre, ei saa kolmnurga sisenurkade summa olla suurem sirgnurgast. Järelikult on ta kas võrdne sellega või väiksem sellest — mitte aga mõlemat korraga. Eukleidese geomeetrias on see summa täpselt 180°, Lobatševski geomeetrias osutub ta alati väiksemaks kui 180°. Ja see on vaid üks näide Eukleidese ja Lobatševski geomeetria paljude lausete vastastikusest eitamisest. Siit näib järelduvat: kui tunnustada Lobatševski õpetust, siis tuleb ühtlasi eitada Eukleidese oma — tõene võib neist olla ainult üks, mitte mõlemad.

Ja ometi ütleb geomeeter, et tõesed on mõlemad lausete süsteemid. Kuidas on see võimalik?

Asi on selles, et sõnu «tõde» ja «tõene» saab mõista kahel viisil. Igapäevases praktikas, samuti vahetult reaalsust uurivates teadustes tähendab tõde kooskõla reaalse, teadvusest sõltumatu nähtuse ja selle peegelduse vahel teadvuses. Püstitatud väide tõestatakse siin vaatluse ja eksperimendi abil. Näiteks arvamus, et ka Kuu teisel küljel leidub kraatreid, osutus tõestatuks pärast esimeste fotode saamist kuurakettide abil.

Aksiomaatiliselt ülesehitatud teoorias on tõel teine tähendus. Siin loetakse väide tõeseks, kui ta järeldub aluseks võetud aksioomidest puhtloogilise arutluse teel. Tõestada mingit lauset geomeetria vallast tähendab seega näidata, et see lause on geomeetria aksioomide loogiline järeldus. (Asja ei muuda muidugi see, et vaadeldava teoreemi tõestamisel harilikult ei kasutata vahetult aksioome endid, vaid nende abil juba tõestatud teoreeme). Küsimust, kas tõestatud lause on kooskõlas reaalsete nähtustega, geomeetrias ei püstitata — ega saagi püstitada, sest sellele vastamine tähendaks konkreetsete nähtuste vaatlemist ja nendega eksperimenteerimist, s. t. füüsika meetodite rakendamist, väljumist geomeetria raamest [3].

Kahjuks ei selgitata kehtivais matemaatika õpikuis tõe mõiste sellist kahepalgelisust. Muidugi tuleb õpilast tema esimeste sammude ajal geomeetria vallas 5.—6. klassis veenda katse ja vaatluse meetodil. Et üleminek loogilisele tõestamisele ehk, nagu õpikus [4] öeldakse, «lause õigsuse põhjendamisele varem tundma õpitud lausete abil» ja «antud tõdedest uute tõdede tuletamisele ainult mõtlemise teel», tähendab ühtlasi tõe mõiste muuutmist, seda õpilasele aga ei öelda. Selle tõttu jääb õpilasele geomeetrilise tõe ja laiemas laastus üldse matemaatilise tõe olemus seitsme lukuga suletud raamatuks. Suletuks jääb talle ka tee Lobatševski geomeetria juurde.

Niisiis asjaolu, et Eukleidese geomeetrias kolmnurga sisenurkade summa $\Sigma_\Delta = \pi$ ja Lobatševski geomeetrias $\Sigma_\Delta < \pi$, ei tähenda mingit loogilist vasturääkivust: need laused kuuluvad e r i n e v a i s s e geomeetriaisse ja on tõesed erinevate aksioomide süsteemide põhjal. Nad on mõlemad tõesed, sest nad mõlemad järelduvad loogiliselt vastavaist aksioomidest. Seepärast ei tähenda järgnev Lobatševski õpetuse käsitlemine koolis õpitava geomeetria vääraks kuulutamist, vaid uute, teistsuguste tõdedega tutvustamist.

Muidugi tekib küsimus, kumb neist geomeetriaist kirjeldab täpsemalt reaalset ruumi, s. t. kumb neist on tõesem vastavuse mõttes reaalsusele. Seda küsimust käsitleme artikli lõpposas,

---

[3] Lugejal on siinkohal kasulik meenutada arutlusi artikli esimeses osas. — Matemaatika ja kaasaeg, XII, lk. 79—81.

[4] E. E t v e r k, A. L i n t s, A. V i h m a n. Matemaatika VII klassile. Tallinn, 1964, lk. 67 ja 71.

pärast Lobatševski geomeetriaga tutvumist. Mõtlik lugeja saab vastuse aimata juba eelnevate arutluste põhjal.

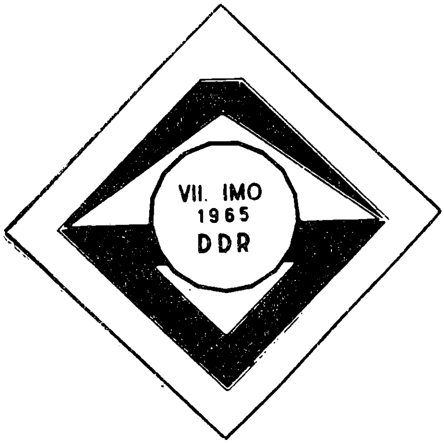
Märgime, et Eukleidese ja Lobatševski aksiomaatikad erinevad ainult ühe aksioomi poolest, mis määrab paralleelsirgete ja, nagu kohe näeme, üldse sirgete vastastikuste asendite teooria; ülejäänud aksioomid on neil geomeetriatel ühised. Siit tuleneb, et neil on ühised ka kõik teoreemid, mille tõestamisel ei kasutata paralleelsuse aksioomi või sellele vastavat põhitõde Lobatševski süsteemist. Selliste lausete hulka — kahe geomeetria ühisosa — nimetatakse J. Bolyai ettepanekul a b s o l u u t s e k s g e o m e e t r i a k s. Meil tuleb Lobatševski geomeetria käsitlemisel sageli viidata absoluutse geomeetria tõdedele, mille tõestamisest me loobume, kuivõrd nad on üldiselt tuntud juba koolikursusest.

Jääb teha veel üks märkus.

Ka Lobatševski geomeetria käsitlemisel on otstarbekas kasutada jooniseid, et illustreerida loogilisi mõttekäike ja teha hõlpsamaks nende mõistmist. Siinjuures tekivad aga mõned lugejale harjumatud raskused. Osutub, et paljusid Lobatševski geomeetria fakte ei saa joonistel kajastada ilma teatud moonutusteta. Näiteks sageli tuleb tõestatava lause sisu piltlikuks kujutamiseks asendada sirge kõverjoonega. Lugejal on sel puhul otstarbekas meenutada eespool märgitut, mille kohaselt joonis ei saa geomeetrias (ka Eukleidese geomeetrias mitte) kunagi olla tõestusvahendiks, vaid ainult kaudseks abinõuks mõtte juhtimisel. Oma olemuselt on loogiline arutelu täiesti sõltumatu igast joonisest.

Ehkki Lobatševski tõed ei põhine kogemustel, vaid loogikal, ei tähenda see ometi, et kujutlus osutub siin täiesti abituks ja ainult segavaks teguriks. Nagu märgib Kagan, «harjub igaüks, kes on omandanud Lobatševski ruumi geomeetria, nägema seal kõike niisama selgesti nagu meie harilikus ruumis», s. t. ruumis, mille mõiste pärineb kooligeomeetriast. Vastupidi Kanti idealistlikule arvamusele ei ole ruumi mõiste ja ruumiliste vahekordade kujunemise oskus sünnipärane ja muutumatu, vaid õige oluliselt süvendatav ja ümberkujundatav.

(Järgneb)



RAHVUSVAHELISED MATEMAATIKA OLÜMPIAADID

N. Veske

VII rahvusvaheline matemaatika olümpiaad[1] toimus 5.—12. VII 1965 Berliinis. Sellest võtsid osa 8-liikmelised võistkonnad 10 riigist. Nendeks olid: Nõukogude Liit, Saksa DV, Ungari RV, Rumeenia RV, Poola RV, Tšehhoslovakkia SV, Bulgaaria RV, Mongoolia RV, Jugoslaavia FSV ja Soome. Olümpiaad toimus kahel päeval, mõlemal korral tuli 4 tunni jooksul lahendada 3 ülesannet, mis žürii valis esitatud 42 ülesande hulgast. Delegatsioonide juhid tõlkisid võistlusülesannete tekstid õpilaste emakeelde ja paljundasid need. Ülesannete lahendamisel kasutasid olümpiaadist osavõtjad vaid sirklit, joonlauda ja kirjutusvahendeid. Esitatud tööd olid nimetud ja šifreeritud, neid vaatasid läbi oma delegatsiooni juht ja selle asetäitja. Lahenduste eest punktide määramine toimus aga kooskõlas žürii poolt nimetatud saksa matemaatikutega. Esmakordselt anti sellel olümpiaadil ka 6 diplomit ühe ülesande eriti elegantsete lahenduste eest.

Osavõtjate vanus oli 13—19 aastat, tütarlapsi oli 80-st võistlejast 11. VII rahvusvahelise matemaatika olümpiaadi embleemil oli korrapärane 17-nurk, sirkel ja kolmnurk. Need olid valitud C. F. Gaussi mälestuseks, kes 18-aastasena tõestas, et korrapärane 17-nurk on konstrueeritav sirkli ja joonlaua abil.

7.—11. VII tutvuti Saksa DV-ga; külastati Potsdamit, Dresdenit, Buchenwaldi ja Weimarit. Järgnevalt esitame olümpiaadi ülesanded[2], millest 3 esimest anti lahendada 1. päeval ning viimased 2. päeval.

1. Leida kõik reaalarvud x lõigul $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, mis rahuldavad võrratust

$$2\cos x \leqslant \left| \sqrt{1+\sin 2x} - \sqrt{1-\sin 2x} \right| \leqslant \sqrt{2}.$$

---

[1] Esimesest kuuest rahvusvahelisest matemaatika olümpiaadist vt. Matemaatika ja kaasaeg, II, lk. 51—58 ja IV, lk. 68—69.

[2] Lahendused vt. Е. А. Морозова, И. С. Петраков, VII Международная математическая. — Математика в школе, 1965, № 6, lk. 73—79.

2. On antud võrrandite süsteem

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0,$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0,$$

mille kordajad täidavad järgmisi tingimusi

a) a_{11}, a_{22}, a_{33} on positiivsed,

b) kõik ülejäänud kordajad on negatiivsed,

c) igas võrduses esinevate kordajate summa on positiivne. Tõestada, et $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ on antud süsteemis ainus lahend.

3. On antud tetraeeder $ABCD$, mille serva AB pikkus on a ja serva CD pikkus b. Kiivsirgete AB ja CD vaheline kaugus on d, nende sirgete vaheline nurk ω. Tetraeeder jaotatakse servadega AB ja CD paralleelse tasandiga ε kaheks osaks. Leida mõlema osa ruumalade suhe, kui sirge AB kaugus tasandist ε on k korda suurem kui sirge CD kaugus tasandist ε.

4. Leida kõik reaalarvude nelikud (x_1, x_2, x_3, x_4), mille puhul kõik ühe arvu ja ülejäänud kolme arvu korrutise summad võrduvad 2-ga.

5. Antud kolmnurgas OAB on nurk $AOB = \alpha < 90°$. Kolmnurga OAB suvalisest punktist $M \neq O$ tõmmatakse ristlõigud MP küljele OA ja MQ küljele OB. H on kolmnurga OPQ kõrguste lõikepunkt. Milline on punkti H geomeetriline koht, kui punkt M asub mistahes punktis

a) lõigul AB,

b) kolmnurga OAB sees?

6. Tasandil on antud $n \geqslant 3$ punkti, iga kahe punkti vaheline kaugus on maksimaalselt d. Nende punktide ühenduslõike, mille pikkus on d, nimetatakse antud punktisüsteemi diameetriteks. Tõestada, et diameetrite arv on ülimalt n.

VIII rahvusvaheline matemaatika olümpiaad toimus 3.—13. VII 1966 Sofias. Sellest võtsid osa kõik VII olümpiaadil esinenud riigid peale Soome. Esitame selle olümpiaadi ülesanded[2], millest ka seekord 3 esimest anti lahendada 1. päeval ning viimased 2. päeval.

1. Olümpiaadil anti 3 ülesannet: A, B ja C. 25 õpilast lahendasid vähemalt ühe ülesande. Õpilastest, kes ei lahendanud ülesannet A, oli B lahendajaid 2 korda rohkem kui C lahendajaid. Õpilasi, kes lahendasid ainult ülesande A, oli ülejäänud ülesande A lahendajatest 1 võrra rohkem. Mitu õpilast lahendasid ainult ülesande B, kui õpilastest, kes lahendasid ainult ühe ülesande, pooled ei lahendanud ülesannet A?

2. Olgu kolmnurga küljed a, b, c ja nende vastasnurgad vastavalt α, β, γ. Tõestada, et kui kehtib võrdus

$$a + b = \tan\frac{\gamma}{2}\,(a \tan\alpha + b \tan\beta),$$

siis on kolmnurk võrdhaarne.

3. Tõestada, et korrapärase tetraeedri ümber kujundatud kera keskpunkti kauguste summa tetraeedri tippudest on väiksem kui mistahes teise punkti kauguste summa selle tetraeedri tippudest.

4. Tõestada võrduse

$$\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \ldots + \frac{1}{\sin 2^n x} = \cot x - \cot 2^n x,$$

kehtivust, kus n on naturaalarv ja $x \neq \frac{\lambda\pi}{2^k}$ $(k = 0, 1, \ldots, n;\ \lambda$ on täisarv).

[2] Lahendused vt. Е. А. Морозова, И. С. Петраков, VIII Международная. — Математика в школе, 1966, № 6, lk. 62—66.

5. Lahendada süsteem.

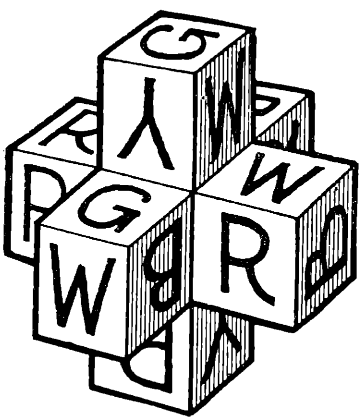
$$\begin{aligned}
|a_1 - a_2|\, x_2 + |a_1 - a_3|\, x_3 + |a_1 - a_4|\, x_4 &= 1,\\
|a_2 - a_1|\, x_1 + |a_2 - a_3|\, x_3 + |a_2 - a_4|\, x_4 &= 1,\\
|a_3 - a_1|\, x_1 + |a_3 - a_2|\, x_2 + |a_3 - a_4|\, x_4 &= 1,\\
|a_4 - a_1|\, x_1 + |a_4 - a_2|\, x_2 + |a_4 - a_3|\, x_3 &= 1,
\end{aligned}$$

kus a_1, a_2, a_3, a_4 on antud erinevad reaalarvud.

6. Kolmnurga *ABC* külgedel *AB*, *BC* ja *CD* võetakse igal küljel suvaliselt üks tipust erinev punkt — vastavalt *M*, *K* ja *L*. Tõestada, et kolmnurkadest *LAM*, *MBK* ja *KCL* vähemalt ühe pindala pole suurem kui $\frac{1}{4}$ kolmnurga *ABC* pindalast.

Vaadeldud olümpiaadidel jaotusid auhinnad järgmiselt:

	VII olümpiaad				VIII olümpiaad			
	I	II	III	Diplom	I	II	III	Eriauhind
Bulgaaria RV	—	—	1	—	—	1	3	—
Jugoslaavia FSV	—	—	2	—	—	2	1	—
Mongoolia	—	—	—	1	—	—	—	1
Nõukogude Liit	5	2	—	—	5	1	1	—
Poola RV	—	1	3	1	1	4	1	—
Rumeenia SV	—	4	3	1	1	1	2	—
Saksa DV	—	2	3	—	3	3	—	2
Tšehhoslovakkia SV	—	1	3	—	—	1	2	—
Ungari RV	3	2	2	2	3	2	1	—
Soome	—	—	—	1	ei võtnud osa			



MÄNGUKLOTSID

Kõrval oleval joonisel on kujutatud seitse ühesugust klotsi (neist paistab küll ainult kuus, seitsmes — sisemine — pole kahjuks nähtav). Kõigi nende klotside tahud on täpselt ühesugusel viisil varustatud tähtedega *W*, *B*, *G*, *R*, *Y* ja *P*. Sisemine (mittenähtav) klots on sealjuures paigutatud nii, et ükski tema tahkudel olevatest tähtedest ei puuduta samasugust tähte naaberklotsil.

Neid andmeid arvestades leidke:

1) kuidas paiknevad tähed klotside tahkudel,

2) millises asendis on sisemine klots.

TEENEKAS MATEMAATIKAPROFESSOR

Ü. Lepik, O. Prinits

Gerhard Rägo, Tartu Riikliku Ülikooli üks vanemaid ja staažikamaid professoreid, sai 5. detsembril 1967 a. 75-aastaseks.

Prof. G. Rägo sünnikohaks on endine Pindi mõis Võrumaal. Räpina algkoolis ja Tartu reaalkoolis omandatud teadmisi täiendas ta ajavahemikus 1909—1913 Tartu ülikoolis, õppides siin matemaatikat. Ülikooli lõpetamisel esitatud töö «Weierstrassi ja Mittag-Leffleri osa ning tähtsus kompleksmuutuja funktsiooni teoorias» kindlustas G. Rägole teadusliku kraadi. Pärast enesetäiendamist Göttingeni ülikoolis ning töötamist matemaatikaõpetajana Tartu kommertskoolis siirdus G. Rägo tööle Novotšerkasskisse Doni Polütehnilisse Instituuti, kus talle omistati ka professori kutse.

G. Rägo (1921).

2. oktoobril 1920 esines noor 27-aastane matemaatikaprofessor Gerhard Rägo Tartu ülikooli aulas esiloenguga teemal «Mis on matemaatika ja milles on tema väärtus». Ta rõhutas, et matemaatika ei ole sugugi mitte lõpmata igav, kõige kuivem ja väsitavam õppeaine, nagu sageli arvatakse. Matemaatika ei ole ju kogu ülesandeid või kogu juhtnööre.

Ei ole tähtis, et näituses $2 \times 3 = 3 \times 2$ iga kord 6 välja tuleb, kuid et siin nähtavale tuleb üldine omadus, mis on omane kõikidele niisugustele korrutistele: vahetatavus.

Mitte näitus ise, ka mitte nende kogu ei ole see, mis meid huvitab: vaid üldine seadus, mis meie mõtlemist valitseb.

Mitte mõttelise sisu poolest tühjade ja huvivaeste ülesannete lahendamises ei peitu matemaatika. Mitte arvutamised ja avalduste teisendamised ei ole tema siht, vaid täpse mõtlemise meetodite arendamine.[1]

Selle loengu lõpuosas rõhutas prof. Rägo:

Oma mõistete teravusega, oma algtõdede lihtsusega, oma mõttekäigu selgusega, oma meetodite üldsusega saab matemaatika eeskujuks igale teisele vaimutöö-vallale.

Sellega, et ta siduma õpetab mõisteid ruumist ja ajast, et ta kindlaks määrab mõisted muutumatusest ja muutuvusest, katkevusest ja pidevusest, juhusest ja seadusest, sellega, et ta suure põhjuste uurimise funktsiooni mõiste pääle rajab, saab ta kogu meie ilmavaate põhipinnaks ja iga ratsionaalse mõtlemise aluseks.[2]

Nendes tsitaatides esiletõstetud põhimõtted on käinud prof. G. Rägoga kaasas kõigis tema loengutes, seminarides ja praktikumides. Neid selgepiirilisi tõdesid on ta üle 50 aasta sisendanud oma õpilastesse-matemaatikutesse, keda kohtame kõigis meie vabariigi teaduslikes asutustes ja koolides. Neid tõdesid kannavad kaasas ka paljud põllumajanduse spetsialistid, metsanduse eriteadlased, majandusteadlased, insenerid, farmatseudid jt., kes on olnud kuulajateks prof. G. Rägo kõrgema matemaatika loengutel. Oma sisukate ja korrektsete loengutega ei ole professor G. Rägo mitte ainult pannud kuulajaid matemaatikat austama, selle probleemide üle järele mõtlema, juurdlema ja uutele tõdedele jõudma, vaid ta on ikka lugu pidanud ka kuulajate esteetilisest kasvatamisest tahvlipildi, seal esitatavate kirjutiste ja jooniste kaudu.

Eriti tähtsaks on prof. G. Rägo pidanud matemaatika õpetamise metoodika küsimusi. Olles Göttingeni ülikooli juures lähemalt tundma õppinud Felix Kleini sellealaseid töid, kuulanud D. Hilberti, R. Courant'i ja C. Caratheodory loenguid, asus ta täie energiaga uusi ideid ja mõtteid realiseerima ka Eestis. Juba 1920. aastal asutati prof. G. Rägo algatusel Tartu ülikooli juurde Matemaatika ja Mehhaanika Instituut, 1923. a. asutati Tartu ülikooli didaktilis-metoodiline seminar, 1924. a. pandi alus Eesti Matemaatika Õpetamise Komisjoni tööle.

Matemaatika õpetamisega seotud küsimustele pööras G. Rägo tähelepanu juba oma esiloengus:

Kui senini ikka veel nii sagedasti arvamist kuuled, nagu oleks matemaatika suur ülesannete kogu, nagu oleks tema sisu arvutamised ja teisendamised, kui isegi haritlaste peres täieline arusaamatus matemaatika vastu valitseb, siis on

---

[1] Prof. Gerhard Rägo. Mis on matemaatika ja milles on tema väärtus. Tartu, 1922, lk. 8.

[2] Samas, lk. 22.

Prof. Gerhard Rägo (1962)

Tartu ülikooli didaktilis-metoodiline seminar 1926/27. õ.-a. Esireas (vasakult): õppejõud H. Perlitz, J. Vilip, H. Jaakson, G. Rägo ja T. Rootsmäe. Teises reas: E. Kask, W. Just, õppejõud J. Nuut ja E. Neugard ning üliõpilased J.-L. Norden ja E. Heinmann. Viimases reas: A. Seitam, E. Mälson, A. Wirro ja E. Sääsk.

see suuremalt jaolt kooli ja õpetamisviisi süü: nii tihti juhatatakse sääl teatavad shabloonid kätte mõnede väljamõeldud küsimuste ja sisuvaeste ülesannete mõtteta mehaaniliseks käsitamiseks ja unustatakse matemaatika õpetamise ülesanne: harida ettekujutuse võimist ja harjutada järjekindlat mõtlemist; kaotatakse silmist suur eesmärk, mille juurde peaks püüdma: meid täpsalt mõtlejateks inimesteks kasvatada.[1]

Selle eesmärgi huvides on prof. G. Rägo koostanud ulatusliku «Matemaatika õpetamise metoodika käsiraamatu», mis ootab trükis avaldamist. Sinna kontsentreeritud tõdesid hakkas prof. G. Rägo propageerima juba oma esimestes matemaatika õpikutes: «Tasapinnalise analüütilise geomeetria põhijooned» (1921) ja «Matemaatilise analüüsi elemendid» (1922). Viimasest loeme:

Käesolev raamat on nõnda kirjutatud, et temast vabalt mõned osad võib välja jätta ja nende asemele teisi temast võtta. Sellega on püütud võimaldada seda vabadust, mis igal koolimehel peab olema. Kui ma midagi temale südamele tohiksin panna, siis on see soov, et ta paneks kõige suuremat rõhku põhimõistete ja põhimõttekäikude seletamise ja selgitamise peale ja et ta nõuaks piinlikku korda ja puhtust ülesannete numbrilisel ja graafilisel läbitöötamisel.[3]

Miski ei mõju matemaatika õpetamisel nii halvavalt, kui tema elusa sisu ettekandmine ärakuivanud ja surnud kujus![3]

Ma pean lubamatuks õpetada lugejat peadpööritavaid avaldusi differentsima ja leidma samasuguseid integraale. Ma ei lahenda ka ühtki nendest keerulistest piiri leidmise ülesannetest, mis kuskil peale vanade ülesannete-kogude ei esine. Kallist aega ei tohi vaimu kurnamiseks tarvitada![3]

Ärgu otsigu lugeja sellest raamatust teaduslikku süsteemi tuhandete väidete ja tõestustega! Esimeseks tutvustamiseks ainega pole võimalik teda nõnda käsitada. Ma usun kindlasti, et selge arusaamine sest ainest nõuab enam tõe näitlikku seletust kui tema kuiva tõestust.[3]

Et aga tol ajal nagu praegugi leidus sellele põhimõttele vastuseisjaid, siis lisas prof. Rägo oma viimasele seisukohale põhjenduse, mille ta võttis kokku kolme punkti:

1. Matemaatilisele tõele jõudmiseks on kaks teed: intuitiivne ja aksiomaatiline. Nii nagu teaduse arenemises nõnda ka õpetamises on esimene teisest viljarikkam olnud.

2. Nendele, kellel and abstraktseks mõtlemiseks puudub, teeb aksiomaatiline mõtlemine ülesaamata raskusi: teistelt nõuab ta kauakestvat erilist vaimu eelharidust.

---

[3] G. Rägo. Matemaatilise analüüsi elemendid. Tartu, 1922, lk. 5—6.

3. Matemaatika õpetamise reformimine nõuab käskivalt intuitsiooni harimist: matemaatika õpetamine ärgu olgu ainult järjekindla mõtlemise harjutamiseks; ta püüdku kasvatada elusat ettekujutust abstraktsetest mõistetest, milledeta eksaktne mõtlemine võimatu; ta püüdku äratada jäävat võimsat matemaatilist tunnet! [4]

Suured teened on prof. G. Rägol ka koolimatemaatika programmide uuendamisel. 1924.—1927. aastani väga intensiivselt töötanud Eesti Matemaatika Õpetamise Komisjon (esimees prof. G. Rägo, liikmed A. Borkvell, J. Kuulberg (Kallak), J. Grüntal ja J. Nuut) töötas välja uued matemaatika õppekavad algkoolidele ja keskkoolidele, milles realiseeriti käesoleva sajandi alguses maailmas laialt levinud koolimatemaatika reformimise ideed. Prof. G. Rägo võttis osa ka uute kooliõpikute koostamisest. Ta kirjutas «Matemaatika tööraamatud I—V» ja oli koos E. Etvergi, J. Grüntali, A. Vihmani ja K. Ratassepaga 1938—1940 aastatel väljaantud matemaatika standardõpikute autoriks. Ajavahemikul 1937—1940 juhatas prof. G. Rägo taas ellukutsutud Eesti Matemaatika Õpetamise Komisjoni tööd.

Pärast nõukogude võimu taaskehtestamist Eestis 1944. aastal õppisid keskkoolide abituriendid matemaatikat G. Rägo koostatud õpikust.

Suure populaarsuse võitis prof. G. Rägo õpik «Kõrgem matematemaatika», mis kordustrükkides on järjest paisunud ja mille viimane, 3-köiteline redaktsioon ootab väljaandmist.

Prof. G. Rägo isikus on meil tegemist laia huvisfääriga õpetlasega. Lisaks kõrgemale matemaatikale ja matemaatika õpetamise metoodikale on ta lugenud mitmeid teoreetilise ja rakendusmehhaanika kursusi, elementaarmatemaatikat kõrgemalt vaatekohalt, variatsioonarvutust, tõenäosusteooriat, statistikat, rakendusmatemaatika numbrilisi ja graafilisi meetodeid. Ta on säilitanud ka oma üliõpilaspäevade huvi matemaatika ajaloo vastu, mille tulemusena ilmus temalt 1955. a. artikkel «Tartu ülikooli nelja silmapaistva matemaatiku elust ja tegevusest» (TRÜ Toimetised, vihik 37, 1955, lk. 74—103).

Prof. G. Rägo on hoolt kandnud ka teadlaste järelkasvu eest. Tema juhendatud kandidaadidissertatsioonid on saanud Kõrgemalt Atestatsioonikomisjonilt hea hinnangu.

Tänapäeval on prof. G. Rägo aktiivsest pedagoogilisest tööst veidi tagasi tõmbunud, kuid Tartu Riikliku Ülikooli professor-konsultandina on tal ikka jätkunud hoolealuseid küll diplomitööd kirjutavate üliõpilaste kui ka väitekirja koostavate nooremate kolleegide hulgas. Peatähelepanu on ta aga koondanud oma teadmiste, kogemuste ja tõekspidamiste talletamisele. Mahukad käsikirjakaustad tema töölaual on selle tunnistajateks.

---

[4] G. Rägo. Matemaatilise analüüsi elemendid. Tartu, 1922, lk. 6.

AXEL HARNACK — F. MINDINGI JA F. KLEINI ÕPILANE[1]

J. Gaiduk

7. mail 1851 sündisid Tartu ülikooli teoloogiaprofessori Theodosius Harnacki (1817—1889) perekonnas kaksikud — vennad Carl Gustav Axel ja Carl Gustav Adolf, kes hiljem kujunesid silmapaistvateks õpetlasteks, kuigi hoopis erinevatel aladel. Käesolevas kirjutises teeme juttu ainult esimesena mainitud vennast — matemaatikust; tema kaksikvenda, tuntud idealistlikku kirikuajaloolast Adolf Harnackit (1851—1930) nimetasime vaid seetõttu, et tänapäeva teaduseajaloolased ajavad neid tihti segi.[2]

Nooruk Axel alustas oma gümnaasiumiõpinguid Baieri linnakeses Erlangenis (koos perekonnaga siirdus sinna tema isa, saanud kateedri sealses ülikoolis), kuid lõpetas juba Tartus (1865. a. naasis Harnackite perekond siia). 1869. a. astus Axel Harnack, kes juba varakult oli ilmutanud kalduvusi täppisteadustele, Tartu ülikooli füüsika-matemaatikateaduskonda. Siin kuulas ta F. Mindingi ja P. Helmlingi loenguid ning sooritas esimesele eksamid arvuteoorias, tõenäosusteoorias, elliptiliste funktsioonide teoorias, sfäärilises trigonomeetrias, teoreetilises mehhaanikas, teisele aga eksamid analüütilises geomeetrias, diferentsiaal- ja integraalarvutuses, determinantide teoorias, kõrgemas geomeetrias, kõrgema astme võrrandite teoorias ning kõverate ja pindade teoorias.[3] Peale selle kuulas Harnack eksperimentaalfüüsikat A. Oettingeni ja astronoomiat L. Schwarzi juures, õppis ka keemiat ja vene keelt. Harnacki hilisema õpilase ja biograafi A. Vossi arvates[4] avaldasid tema arengule üliõpilaspõlves F. Minding ja A. Oettingen eriti soodsat mõju.

---

[1] Artikli on venekeelsest käsikirjast tõlkinud E. Tamme.

Axel Harnacki portree avaldatakse käesolevas kogumikus leheküljel 93, teadaolevatel andmetel, esmakordselt. Portree leidsid artikli autori palvel Dresdeni Tehnikaülikooli kogudest (Technische Universität Dresden, Hochschulfilm- und Bildestelle) K.-R. Biermann ja Schmädicke, kellele autor palub siinkohal avaldada südamlikku tänu.

[2] Nii näiteks on raamatu Леонард Эйлер, Письма к ученым (М.-Л., 1963) nimeregistris märgitud Axel Harnack, kuid peab olema Adolf Harnack, kelle kohta käib vastav lõik tekstis.

[3] ENSV RAKA, f. 402, nim. 2, toimik 8809 — üliõpilane *Axel Harnack.*

[4] A. Voss. Zur Erinnerung an Axel Harnack. Math. Ann., Bd. 32, 1888.

Harnacki suurepärastest edusammudest Tartu ülikoolis kõneleb nii temale kuldmedali omistamine 1872. a. võistlustöö eest teemal «Ellipsi pindala maksimumist ja miinimumist koonuselõigete kimpudes ja sidumites» (*Ueber die Maxima und Minima des Flächeninhalts von Ellipsen in Kegelschnitt-reihen und -netzen*) kui ka 1872.—1873. a. hiilgavalt sooritatud lõpueksamite tulemused: Harnacki vastused kõigile matemaatika-alastele küsimustele — neid oli aga kaks iga õpitud kursuse kohta — on eksaminaatorid Minding ja Helmling hinnanud «väga heaga», kirjaliku eksamitöö teemal «Lühemad jooned kõverpindadel» on Minding arvestanud kui «oma eesmärki rahuldava». Arvestades eksami tulemusi ja võistlustööd (aga ka vene keele professori arvamust Harnacki küllaldasest vene keele oskusest) omistas Tartu ülikooli füüsika-matemaatikateaduskond oma kasvandikule matemaatikakandidaadi kraadi.

Matemaatika uusimate saavutusega tutvumiseks jätkas Harnack pärast Tartu ülikooli lõpetamist õpinguid Erlangeni ülikoolis. Seal oli sellal kujunenud tugev koolkond, milles arendati edasi mõnda aega enne Harnacki Erlangenisse saabumist ootamatult surnud A. Clebschilt (1833—1872) pärinevaid geomeetriaalaseid ideid. Siin sai Harnack mõjutusi sellistelt silmapaistvatelt matemaatikutelt nagu F. Klein ja P. Gordan. Esimesele neist võlgnes ta paljus oma matemaatilise silmaringi laiuse, kiiresti kasvanud huvi matemaatika õpetamise küsimuste vastu ja eriti lähedase tutvuse Riemanni kompleksmuutuja funktsioonide teooria ideedega. Gordan, invariantide teooria spetsialist, viis Harnacki kurssi selle aja algebra aktuaalsete probleemidega. Oma doktoritöö teema «Elliptiliste funktsioonide kasutamine kolmandat järku kõverate geomeetrias» (*Ueber die Verwerthung der elliptischen Funktionen für die Geometrie der Curven dritten Grades*) sai Harnack Kleinilt, kes sümpaatiaga suhtus andekasse noorde teadlasse. Töö eduka kaitsmise järel Erlangeni ülikoolis 1875. a. sügisel omistati Harnackile filosoofiadoktori teaduslik kraad. Järgneval aastal sai ta Leipzigi ülikoolilt seal esitatud töö põhjal «Algebraliste diferentsiaalide ühest tõlgitsusest homogeensetes koordinaatides» (*Ueber eine Behandlungsweise der algebralischen Differentiale in homogenen Coordinaten*) õiguse õpetada kõrgemas koolis. Mõlemad eelnimetatud tööd avaldati 1876. a. ajakirjas «*Mathematische Annalen*», mis oli sellal Kleini suuna matemaatikute häälekandjaks.

1876. a. asus Harnack Leipzigi ülikooli poolt pakutud eradotsendi kohale (geomeetriliste erikursuste lugemiseks), kuid sama aasta lõpul oli ainelistel põhjustel sunnitud üle minema Darmstadti polütehnikumi erakorraliseks professoriks. Järgneval aastal alustas ta juba korralise professorina pedagoogilist tegevust Dresdeni Kõrgemas Tehnikakoolis, kus ta töötas kuni elu lõpuni. Siin sai ta väärikaks järglaseks O. Schlömilchile ja

Axel Harnack
7. V 1851—3. IV 1888

L. Koeningsbergile, kes olid suutnud tõsta matemaatika õpetamise selles õppeasutuses silmapaistvale kõrgusele. Leidnud Dresdenis eest küllaldaselt ettevalmistatud pinnase, ei piirdunud Harnack matemaatika õpetamise juba saavutatud taseme säilitamisega, vaid seadis oma eesmärgiks õpetamise moderniseerimise reaalmuutuja funktsioonide teooria uusimate suundade «vaimu» ja kontseptsioonide juurutamise näol.

Dresdeni professori nende novaatorlike püüdluste kirjalikuks väljenduseks on tema õpik «Diferentsiaal- ja integraalarvutuse elemendid» (*Elemente der Differential- und Integralrechnung*, Leipzig, 1881). Mõõdukamal määral taotles Harnack samu sihte J. Serret tuntud prantsuskeelse diferentsiaal- ja integraalarvutuse kaheköitelise õpiku ümbertöötuses saksa lugejale (tõlge paljude täienduste ja ettepanekutega), mille köited ilmusid 1884. ja 1885. a. Hoolitsedes tulevaste inseneride matemaatilise mõtlemise õiges suunas arendamise eest, pidas Harnack vajalikuks ühelt poolt kindlustada nõutav ranguse tase tema loengutes esitatavates matemaatilistes teooriates, ohverdades selle nimel, kui see oli vajalik pedagoogilistel eesmärkidel, lausete maksimaalse võimaliku üldsuse, teiselt poolt aga taotles rakenduste laialdast käsitlemist vastavates kursustes.

Need Harnacki pedagoogilised vaated tõmbasid endale kaasaegsete tähelepanu. Seoses sellega on eriti iseloomulik tema «Elementide» ingliskeelse tõlke ilmumine[5] 1891. a., mis aitas tutvuda matemaatilise analüüsi esitamise uute suundadega tol ajal selles suhtes veel vägagi konservatiivsel Inglismaal.

Pedagoogiline tegevus, raamatute kirjutamine, aga ka muudatused isiklikus elus (1877. a. Harnack abiellus Tartust pärit Elisabeth Oettingeniga) ei kiskunud teda eemale intensiivsest teaduslikust tööst. Selle põhisuunaks jäi kuni 1880. a. algebraliste kõverate uurimine algebra ja funktsiooniteooria vahenditega. Harnacki tulemustele andis kõrge hinnangu tema kaasaegne Max Noether, kelle töödes kujunes algebraline geomeetria iseseisva distsipliinina. Eriti huvitavaks Harnacki saavutuste hulgas luges Noether uut tõestust Abeli teoreemile, mida ta nimetas lihtsalt suurepäraseks.[6] Harnacki töö tulemustest sellel alal mainime veel tähtsat teoreemi: taandumatu kõver, mille liik on p, ei saa reaalsel projektiivsel tasandil olla rohkem kui $p+1$ komponendiga (1876).

---

[5] Tõlkija Cathcart avaldas raamatu eessõnas sellal juba manalasse varisenud autori kirja, milles muuhulgas oli öeldud: «See suure kiiruga ja mõninga noorusliku kergemeelsusega kirjutatud raamat tundub mulle nüüd paljus mitteküllaldaselt rangena. Pärast selle ilmumist (peetakse silmas saksakeelset väljaannet — *J. G.*) ma koostasin ulatusliku nimekirja parandustest, mida tuleb teha raamatu uuesti väljaandmisel». Autori ootamatu surm kahjuks takistas selle kavatsuse täielikku teostamist ingliskeelse tõlke väljaandmisel.

[6] M. Noether, Carl Gustav Harnack. Z. Math. und Phys., Bd. 33, 1888.

80. aastatel toimus Harnacki huvides oluline nihe, mis viis tema eemaldumiseni algebralise geomeetria koolkonnast. Talle omase analüütilise mõtteviisiga huvitus ta sügavalt uuest, esialgu läbi raskuste teedmurdvast hulgateoreetilisest suunast matemaatilise analüüsi põhjendamisel ja arendamisel. Selle suuna liidriteks olid siis R. Dedekind ja G. Cantor. Ülalmainitud diferentsiaal- ja integraalarvutuse käsiraamatus ja teistes töödes[7] võttis Harnack kasutusele rea uusi mõisteid hulga- ja funktsiooniteoorias ning kasutas neid originaalsete tulemuste saamisel. Märgime näiteks tema poolt kasutuselevõetud «diskreetsete» punktihulkade klassi, mis oli olulise tähtsusega reaalmuutuja funktsioonide teooria arengu algetapil (lineaarset punktihulka nimetatakse diskreetseks Harnacki mõttes, kui teda saab katta lõpliku arvu vahemikega, mille summaarne pikkus on kuitahes väike).

Hulgateoreetiliste meetoditega teostatud uurimustes valis Harnack põhiobjektiks trigonomeetrilised read, jätkates nende omaduste uurimisega Cantori kavatsuste realiseerimist. Oma sellealased uurimused[8] võttis Harnack kokku monograafias «Fourier' ridade teooria» (*Théorie de la série de Fourier*), mis ilmus 1883. a. Pariisis. Mõningaid neist tulemustest täpsustas ja parandas hiljem O. Hölder. Loomuliku täienduse said need Harnacki uurimused tema enda tööde tsüklis (1884), milles uuritakse seost teatavatesse järjest laienevatesse klassidesse kuuluvate funktsioonide ja nende tuletiste vahel. Siin võttis Harnack kasutusele päratu integraali mõiste üldistuse, mis on rakendatav funktsioonidele, millel on lõpmatu katkevus «diskreetsel» punktihulgal. See üldistus leidis omal ajal tunnustamist ja on lülitatud C. Jordani tuntud analüüsi kursusse (*Cours d'analyse de l'Ecole Polytechnique*. Pariis, 1909—1915).

Harnacki viimased eluaastad tõid endaga kaasa tema teaduslike huvide sfääri edasise laienemise. 1885. a. avaldas ta huvitava uurimuse Cauchy integraali teooriast — analüütiliste funktsioonide üldise teooria ühest osast. Selle uurimuse oluliseks tulemuseks on nn. «Harnacki teoreem», mis leidis hinnatavaid rakendusi N. I. Mushelišvili töödes matemaatilise elastsusteooria alal.[9] Formuleerime selle teoreemi lihtsaima juhu: *Olgu L lihtne kinnine kontuur ning jaotagu see tasandi osadeks S^+ ja S^-, milledest esimene on lõplik, teine lõpmatu. Olgu $f(x)$ kontuuri L punkti reaalne pidev funktsioon. Siis võrdusest* $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(t)\,dt}{t-z} = 0$

[7] Neid töid on osaliselt iseloomustatud raamatutes Ф. А. Медведев. Развитие теории множеств в XIX веке. М., 1965; И. Н. Песин. Развитие понятия интеграла. М., 1966.

[8] Lähemalt iseloomustatakse Harnacki töö tulemusi selles suunas artiklis А. Б. Паплаускас. Проблема единственности в теории тригонометрических рядов. Историко-математич. исслед., вып. XIV. М., 1961.

[9] Vt. Н. И. Мусхелишвили. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., 1966, IV ja V ptk.

iga $z \in S^+$ *korral järeldub, et* $f(t) = 0$ *kogu kontuuril* L. *Kui aga* $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(t)\,dt}{t-z} = 0$ *iga* $z \in S^-$ *korral, siis* $f(t) = \text{const}$ *kontuuril* L.

Kõige tähtsamad Harnacki viimastest töödest on siiski tema uurimused matemaatilisest potentsiaaliteooriast, mis paljus säilitavad oma väärtuse ka meie päevil. Siin peame silmas tema ulatuslikku artiklit «Potentsiaaliteooria olemasolutõestused tasandil ja ruumis» (*Existenzbeweise zur Theorie des Potentials in der Ebene und im Raume.* Berichte math. phys. Cl. Sächs. Ges. Wissensch. zu Leipzig, 1886) ning monograafiat «Tasandilise logaritmilise potentsiaali ja ühese potentsiaalifunktsiooni teooria alused» (*Die Grundlagen der Theorie des logaritmischen Potentials und der eindeutigen Potentialfunktionen in der Ebene.* Leipzig, 1887). Selles monograafias on ühisest vaatepunktist süstematiseeritud ja ühendatud H. A. Schwarzi, E. B. Christoffeli, C. Neumanni ja autori enda uued tulemused sellel alal. Harnacki kaasaegse spetsialisti Wangerini arvates [10] on monograafia «selge ja ammendav esitus teooria olukorrast käesoleval ajal». Formuleerime kolm meie tänapäeva käsiraamatutes kõige sagedamini esinevat Harnacki tulemust potentsiaaliteooriast: [11]

1. *Harnacki võrratus*

$$\frac{R-\varrho}{R+\varrho}\,u(M_0) \leqslant u(\varrho, \varphi) \leqslant \frac{R+\varrho}{R-\varrho}\,u(M_0)$$

annab hinnangud positiivse harmoonilise funktsiooni väärtuse $u(\varrho, \varphi)$ jaoks ringi $\varrho < R$ mistahes punktis (ϱ, φ) tema väärtuse kaudu ringi keskpunktis M_0.

2. Kui piirkonnas D harmooniliste funktsioonide jada kasvab monotoonselt, siis piirfunktsioon on kõikjal piirkonnas D kas lõpmatu või harmooniline funktsioon.

3. Kui lahtises piirkonnas D harmooniliste funktsioonide kasvaval jadal on D mingis sisepunktis lõplik piirväärtus, siis see jada koondub kogu piirkonnas D, seejuures ühtlaselt igas viimasesse kuuluvas kinnises piirkonnas.

Harnacki kui õpetlase portree poleks täielik, kui me ei puudutaks tema suhtumist matemaatika ajaloosse. See ei piirdunud mitte ainult passiivse huviga, nagu see sageli esineb aktuaalsetel teadusealadel loominguliselt töötavate matemaatikute juures. Harnacki originaaltöödes kohtame püüet jälgida uuritava küsimuse ajalugu kuni selle algallikateni, samuti oskust leida «mineviku tuha alt» seda varjatud tuld, mida tuleb säilitada oleviku ja tuleviku jaoks. Viimase kohta on iseloomulik näiteks posthuumselt ilmunud artikkel «Cauchy teisest Fourier' rea koonduvuse

[10] Jahrbuch über die Fortschritte der Math., Bd. 19, 1887.
[11] Vt. näit. В. И. Смирнов. Курс высшей математики, т. IV. М., 1953.

tõestusest...» (*Ueber Cauchy's zweiten Beweis für die Convergenz der Fourierschen Reihen*... Math. Ann., Bd. 32, 1888), milles autor mitte ainult tõi välja unustusehõlmast suure prantsuse matemaatiku ühe tõestuse, vaid avas ka selle olulise tähtsuse ja näitas, kuidas seda tõestust saab läbi viia vajaliku rangusega. Lisame, et Harnackile kuulub ere kõne Leibnizi tähtsusest matemaatika ajaloos (1887) ja et Harnack pühendas ühe oma loengukursustest tema poolt originaalsel viisil väljatöötatud geomeetria ajaloole 17. sajandil.

A. Vossi koostatud küllaltki täielik Harnacki tööde bibliograafia sisaldab 42 nimetust.[12]

Raske kopsuhaigus, see paljude mineviku õpetlaste kuri saatus, röövis Axel Harnacki enneaegselt 37. eluaastal — 3. aprillil 1888. Tema surmaga kaotas 19. sajandi lõpu matemaatika õpetlase, kelle loomingulised võimed olid alles õitsele puhkenud, kes sammus epohhi teadusliku liikumise avangardis ja tõotas tulevikus veel palju anda. Axel Harnacki *alma mater* — Tartu ülikool, kes nägi temas mitte ainult endiste aegade väärikat kasvandikku, vaid ka soovitavat järglast manalasse varisenud professor Mindingile (suri 1885. a.), võis täie õigusega võtta seda kaotust omaenda kaotusena.

DAVID HILBERT MATEMAATIKA TERVIKLIKKUSEST

Matemaatika on lahutamatu tervik, organism, mille elujõud seisneb tema osade ühtsuses. Koos matemaatiliste teadmiste mitmekesisusega innustab meid loogiliste vahendite lähedus matemaatika kõigis valdkondades, ideede sugulus temas kui tervikus ja analoogiad tema eri osade vahel. Me märkame samuti, et mida kaugemale üks matemaatika haru areneb, seda harmoonilisemaks ja selgemaks muutuvad tema vaatekohad ja seda rohkem seoseid leitakse sellel harul teaduste teiste harudega. Seega ei kao matemaatika kui teaduse laienedes tema orgaaniline iseloom, vaid tegelikult avaldub veel selgemini.

Kuid küsime, kas matemaatiliste teadmiste laienemine ei tee lõpuks uurijail võimatuks nende arengu jälgimist. Vastuseks märgime, et iga tõeline edu matemaatikas on alati seotud sügavamate, tabavamate, lihtsamate meetodite leidmisega, mis haaravad endasse eelnenu ja heidavad kõrvale endised liiga keerulised arutlused. Seega, kui matemaatik omandab need uued meetodid, on tal võimalik jälgida oma lemmikteaduse arengut ja kergesti leida oma tee paljudes matemaatika harudes.

Artiklist «Mathematical Problems. D. Hilbert's Lecture to ICM, at Paris, 1900.» tõlkinud U. Kaljulaid

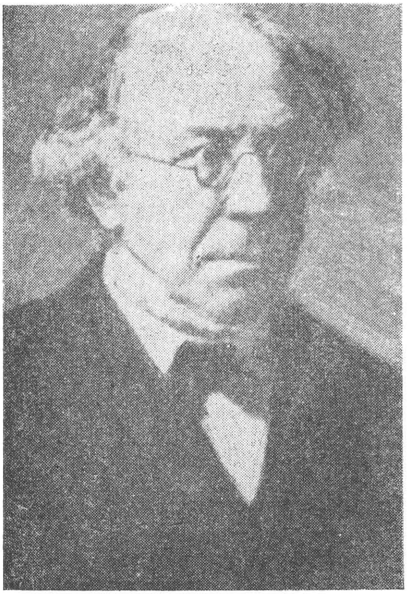
---

[12] Täiendusi sellele (posthuumsed publikatsioonid) vt. J. C. Poggendorff. Biographisch-Literaturisches Handwörterbuch. Bd. 4. Leipzig, 1904.

Matemaatiline päevakaja

150 AASTAT TARTU ÜLIKOOLI MATEMAATIKAPROFESSORI PETER HELMLINGI SÜNNIST

E. Tamme



Möödunud sajandi teisel poolel saavutas matemaatika õpetamine Tartu ülikoolis suhteliselt kõrge taseme.[1] Ülikooli selle perioodi kasvandikest on saanud ülemaailmselt tuntud teadlasteks sellised matemaatikud nagu Axel Harnack, Piers Bohl, Theodor Molien. Nii nende kui ka teiste Tartus sellal oma hariduse saanud matemaatikute kujunemisel on kõige hinnatavamad teened kahel siinsel kauaaegsel professoril — rakendusmatemaatika professoril Ferdinand Mindingil ja puhta matemaatika professoril Peter Helmlingil. Kui F. Mindingi silmapaistev looming on leidnud käsitlemist paljudes töödes, siis tema märksa tagasihoidlikumate teaduslike saavutustega kolleegist on kirjutatud hoopis vähem. Selle lünga täitmiseks on nüüd eriline põhjus — möödus 150 aastat P. Helmlingi sünnist.

Peter Helmling sündis 9. septembril 1817 Erbachis (saksa väikeriigis Hessen-Darmstadtis) talupoja perekonnas. 1837. a. astus ta matemaatikat õppima Heidelbergi ülikooli filosoofiateaduskonda. Pärast ülikooli lõpetamist ei leidnud ta aga tolleaegsel killustatud Saksamaal sobivat tööd ning siirdus Venemaale. Andnud 1844. a. Miitavi (praegu Jelgava) gümnaasiumi juures koduõpetaja eksamid, asus ta seejärel tööle koduõpetajana mitmetes Kura- ja Liivimaa aadliperekondades. 1846. a. sooritas ta Tartu ülikoolis vanemõpetaja eksami matemaatika alal. Sellel perioodil valmis ka Helmlingi uurimus «Polünoomide arendamisest» (*Ueber die Entwicklung des Polynomiums*), mille eest Heidelbergi ülikool omistas talle 1850. a. doktorikraadi. Alates järgmisest aastast on P. Helmlingi tegevus lahutamatult seotud Tartu ülikooliga.

Pärast Karl Eduard Senffi varajast surma 31. detsembril 1849 (vkj.) jäi Tartu ülikoolis vakantseks puhta matemaatika kateeder. Kuigi 1850. a. sügisel loodud füüsika-matemaatikateaduskond alustas F. Mindingi juhtimisel kohe uue sobiva kandidaadi otsimist, ei kandnud püüded esialgu vilja. Tsaarivalitsuse haridusministeerium ei kinnitanud teaduskonna valikut (O. Hesse Königsbergi ülikoolist)

---

[1] Vt. Ü. Lumiste. Lehekülgi matemaatika ajaloost Eestis. — Matemaatika ja kaasaeg, II, lk. 64—76.

ja nõudis uue kandidaadi otsimist Vene impeeriumi piirest. F. Mindingi tähelepanu oli juba 1846. a. oma Tartus sooritatud eksamitega köitnud P. Helmling, kellel oli pealegi Heidelbergi ülikooli doktori kraad. Venemaal aga sellest ei piisanud ja nii tuli Helmlingil 1851. a. sooritada Tartus magistrieksamid ja kaitsta magistritöö «Määratud integraalide teisendamine ja leidmine» (*Transformation und Ausmittelung bestimmter Integrale*). Selle töö sama pealkirja kandva jätku esitas ta sama aasta sügisel habilitatsioonitööna.

Nendes töödes esitab Helmling meetodi päratute integraalide teisendamiseks ning tuletab selle abil üle 150 valemi ühe- ja kahekordsete integraalide leidmiseks. Peamiselt on tegemist integraalidega kujul

$$\int_0^\infty e^{-ax^n} f(x)\,dx,$$

kus n on mingi naturaalarv ja $f(x)$ teatud funktsioon. Mõningatel juhtudel saadakse avaldised määratud integraalide väärtuste jaoks, enamikel juhtudel aga avaldatakse integraalid lihtsamate mitteelementaarsete integraalide kaudu. Nendes töödes ületas Helmling üsnagi suuri tehnilisi raskusi.

Mainitud kahe töö alusel määrati Helmling koosseisuliseks eradotsendiks puhta matemaatika kateedris. Oma avaloengu pidas ta märtsis 1852. Õppejõuna töötas P. Helmling Tartu ülikoolis ühtejärge 35 aastat.

Juba esimestel tööaastatel ülikoolis näitas Helmling end võimeka pedagoogina. Samal ajal jätkas ta teaduslikke uurimusi magistritöö temaatika valdkonnas. 1854. a. valis Tartu ülikooli nõukogu Helmlingi puhta matemaatika kateedri erakorraliseks professoriks, valiku kinnitas ka ministeerium. Järgmisel aastal aga valiti ta juba sama kateedri korraliseks professoriks. Teaduskonna esitises rõhutati, et[2] «Helmling viib väga energiliselt läbi õppetööd üliõpilastega isegi väljaspool loenguaega ning oskab nendes äratada soovi iseseisvaks tööks.» Selle valimise alusel kinnitas haridusministeerium Helmlingi 1856. a. algul professori kohustetäitjaks ning ühtlasi soovitas tal võimalikult kiiresti omandada vene ülikooli doktori kraad. 1859. a. kaitseski Peter Helmling Tartu ülikoolis doktoritöö «Uurimusi teist ja kolmandat järku lineaarsetest diferentsiaalvõrranditest» (*Untersuchungen über die linearen Differentsialgleichungen der zweiten und dritten Ordnung*) ning samal aastal ta kinnitati puhta matemaatika korraliseks professoriks.

Doktoritöös tuletab Helmling rea seoseid lineaarse teist ja kolmandat järku diferentsiaalvõrrandi kordajate ja erilahendite vahel ning annab nende võrrandite üldlahendi avaldised vastavalt ühe ja kahe erilahendi kaudu.

Doktoritööst saab alguse teine põhiline uurimissuund P. Helmlingi loomingus. Järgnevates töödes uurib ta võimalusi teist ja kolmandat järku diferentsiaalvõrrandi teisendamiseks lihtsamale kujule. Seejuures jõuab ta kas täpselt lahenduva diferentsiaalvõrrandini või diferentsiaalvõrrandini, mille lahendi saab esitada reaksarenduse abil. Teisendamisel selgub invariantide oluline osa. Kaugeleulatuvaid tulemusi lineaarse diferentsiaalvõrrandi invariantide uurimise alal saavutas Helmlingi õpilane Piers Bohl Tartu üliõpilasena kirjutatud käsikirjalises võistlustöös «Lineaarsete diferentsiaalvõrrandite invariantide teooria ja rakendused» (1886), mis auhinnati kuldmedaliga ja arvestati kandidaaditööna.

Oma viimases ilmunud teaduslikus töös «Uurimusi 3. järku lineaarsetest diferentsiaalvõrranditest» (*Untersuchungen über die linearen Differentialgleichungen 3-ter Ordnung*, 1881) tuletab Helmling eeskirjad lineaarse kolmandat järku diferentsiaalvõrrandi integreerimiseks juhul, kui võrrandi kordajad on lineaar- ja ruutpolünoomid.

Kokkuvõetult pole P. Helmlingi teaduslik pärand eriti ulatuslik. See koosneb vaid üheteistkümnest tea-

[2] Vt. Г. В. Левицкий. Биографический словарь профессоров и преподавателей Императорского Юрьевского университета 1802—1902, т. 1, Юрьев, 1902, lk. 171.

duslikust tööst, millest enamus on ilmunud Tartu ülikooli poolt väljaantud brošüüridena. Nendest töödest me ei leia uusi eredaid ideid, küll aga sisaldavad nad terve hulga tehnilisi võtteid määratud integraalide arvutamiseks ja diferentsiaalvõrrandite lahendamiseks. Seetõttu on Helmlingi tööd vajunud unustusehõlma.

Hoopis kõrgemalt tuleb hinnata Helmlingit pedagoogina. Tänu Martin Bartelsi ja Ferdinand Mindingi tegevusele oli matemaatika õpetamine Tartu ülikoolis möödunud sajandi keskel saavutanud selle aja kohta küllaltki kõrge taseme. Helmling on seda veelgi edasi viinud. G. Levitski kirjutab[3]: «Helmlingi määramisega Tartu ülikooli professoriks kaasnes ka kõrgema matemaatika õpetamise mõningane areng ja elavnemine. Muuhulgas laiendas Helmling üsna tunduvalt praktilisi harjutusi diferentsiaal- ja integraalarvutuse alal ning viis sisse determinantide teooria õpetamise eraldi kursusena. Peale selle luges Helmling kõrgemat geomeetriat, arvuteooriat, kõverate ja pindade teooriat, analüütilist geomeetriat, algebralist analüüsi jt., aga ka mõningaid erikursusi. Lisaks luges ta esialgu sageli ka elementaarmatemaatika kursusi.»

Helmling oli 1867—1870 füüsika-matemaatikateaduskonna dekaan ning seejärel 3 aastat prorektor.

1877. aastaks oli Helmling töötanud 25 aastat Tartu ülikoolis. Teaduskonna taotlusel jäeti ta aga tööle veel kaheks viisaastakuks. Tema jätmist professorikohale teiseks viisaastakuks 1882. a. motiveeriti muuhulgas sellega, et[4] «Helmling täidab endiselt õppeülesandeid täie pingega ja heade tulemustega, et tal on raugematu mõttevärskus ja reipus; peale selle publitseeris Helmling mitu tööd ja tegeleb praegu tööga «Darstellung einer sehr wirksamen Methode Reihen von langsamer Convergenz zu summieren». 1880. a. omistati Helmlingile teenelise korralise professori nimetus.

1887. a. vabastati Helmling tema omal palvel õppetööst Tartu ülikoolis. Esimesed aastad pärast töölt lahkumist elas ta Tartus, 1890. a. siirdus aga Tallinna tütre perekonna juurde. Peter Helmling suri kopsupõletikku Tallinnas 24. aprillil 1901, maeti aga Tartusse Raadi kalmistule teiste ülikooli professorite kõrvale.

Nekroloogis on Helmlingist muuseas kirjutatud[5]: «Selle akadeemilise õppejõu mõju tugines esmajoones isiklikul vahekorral akadeemilise nooruse ja tema kui õpetaja vahel — see oli aeg, millal meie ülikoolielus valitses deviis «Mehed, mitte abinõud». Selles suhtes oli ta tüüpiline akadeemiline õppejõud oma ajastul, mis 80. ja 90. aastate Tartu üliõpilastel on ikka seotud mälestustega «vanast Helmlingist». Ta oli tolleaegse õpetajate ja õpilaste vahelise elava suhtlemise õhkkonnas vist küll populaarseim õppejõud, kes oma alatise huumoriga oli kohal kõigil suurematel üliõpilaspidustustel ning kelle külalislahke kodu seisis alati lahti ka kõige erinevamate teaduskondade ja korporatsioonide esindajate jaoks».

---

[3] Г. В. Левицкий. Биографический словарь . . . , lk. 135—136.

[4] Г. В. Левицкий. Биографический словарь . . ., lk. 172.

[5] Nordlivländische Zeitung, 11 (24) Aprill 1901.

GODFREY HAROLD HARDY

L. Roots

1967. aastal möödus 90 aastat inglise silmapaistva matemaatiku Godfrey Harold Hardy sünnist.

G. H. Hardy sündis 7. veebruaril 1877 Inglismaal Cranleigh's, Surrey krahvkonnas. Tema vanemad, kes mõlemad olid kooliõpetajad, märkasid tulevase professori juba varases nooruses avaldunud matemaatika-alast andekust ning võimaldasid tal õpingute ajal keskkoolis omandada süvendatud matemaatiline haridus. 1896. aastal astus G. H. Hardy õppima Trinity kolledži Cambridge'is. Seal pettus ta, tema oma sõnade järgi, algul matemaatikas ning selle õpetamise meetodites niivõrd, et olevat kaalunud isegi üleminekut ajaloo õppimisele. Õnneks puutus ta aga sel ajal kokku tuntud rakendusmatemaatiku A. E. Love'iga, kes suunas ta Jordan'i «Analüüsi kursuse» (*Cours d'analyse*) läbitöötamisele; see oli pöördepunktiks Hardy elus — tema tulevik matemaatikuna oli otsustatud.

Hardy üliõpilaspõlv Cambridge'is lõppes aastal 1900. Edasi jäi ta töötama stipendiaadina Trinity kolledži juurde kuni aastani 1906. Sellel aastal sai ta lektoriks samas õppeasutuses, kus luges tavaliselt kursusi matemaatilisest analüüsist ja funktsiooniteooriast.

Loengupidamise kõrval kirjutas ja avaldas Hardy sel perioodil oma kuulsa raamatu «Puhta matemaatika kursus» (*A Course of Pure Mathematics*, esimene trükk 1908), mis hiljem sai üldtuntuks, ilmus paljudes kordustrükkides ja tõlgiti mitmetesse keeltesse.

Teiseks pöördepunktiks Hardy elus oli aasta 1912, mil algas tema koostöö J. E. Littlewoodiga. Koos viimasega on Hardy avaldanud ligi sada artiklit. On huvitav, et Hardy üldse armastas koostööd teiste matemaatikutega; üldiselt tuntud on ka tema viljakas koostöö andeka india matemaatiku-iseõppija Ramanujaniga.

Alates aastast 1919 asus Hardy tööle New College'is, kuhu jäi kuni 1931. aastani, mil siirdus jälle tagasi Trinity kolledži Cambridge'is, kus töötas professorina kuni 1942. aastani. G. H. Hardy suri 1. detsembril 1947. aastal.

Kaasaegsete tunnistuse järgi oli Hardy suurepärane lektor. Peale oma eriala, matemaatilise analüüsi, luges ta ajuti ka muid matemaatika distsipliine, nagu geomeetriat, variatsioonarvutust, samuti matemaatikat filosoofidele.

Cambridge's organiseeris Hardy koos Littlewoodiga seminari, milles arutati küsimusi väga mitmesugustest matemaatika osadest; sel seminaril oli suur mõju kaasaegse inglise matemaatika arengule.

Inglise Kuningliku Ühingu liikmeks valiti Hardy 1910. a. Aastast 1918 oli ta Kuningliku Astronoomiaühingu liige. Ta oli mitmete välismaiste teaduste akadeemiate auliige ning Ateena, Harwardi, Manchesteri, Sofia, Birminghami ja Oslo ülikoolide audoktor. Mõni kuu enne surma valiti ta ka Pariisi Teaduste Akadeemia välismaiseks liikmeks (neid liikmeid oli ainult kümme kõigi rahvuste ja teaduste kohta).

Hardy on rohkem kui 300 teadusliku artikli autor või kaasautor. Tema tööd käsitlevad küsimusi peaaegu kõikidest matemaatilise analüüsi osadest. Avaldatud artiklite põhjal on Hardy kirjutanud rea monograafiaid. Näiteks «Dirichlet' ridade üldine teooria» (*The General Theory of Dirichlet' Series,* koos M. Riesz'iga, 1915), «Võrratused» (*Inequalities,* koos J. E. Littlewoodiga ja G. Polya'ga, 1934) ja «Hajuvad read» (*Divergent Series,* 1949) olid esimesed sellelaadsed monograafiad maailmas, mille tähtsus pole tänapäevalgi kahanenud. Matemaatika arengu seisukohalt Eestis tuleb hinnata eriti viimast monograafiat, sest see on olnud Tartu summeeruvusteooriaga tegelevate matemaatikute esialgseks õpikuks ja käsiraamatuks, kust alguse on saanud paljud uurimused. Hardy monograafiatest kõneldes peaks mainima ka «Arvuteooriat» (*The Theory of Numbers*, koos E. M. Wrightiga 1938) ja koos W. Rogosinskiga kirjutatud väikesemõõtmelist teost «Fourier' read» (*Fourier' Series*, 1944). Ehkki viimane ilmus pärast A. Zigmundi tuntud monograafiat «Trigonomeetrilised read» (*Trigonometrical Series*), on ta ainekäsitluse omapära ja hea ülesehituse tõttu heaks käsiraamatuks neile, kes tegelevad Fourier' ridade teooriaga.

Pole kahtlust, et oma haarde laiuse, töö sügavuse ning viljakuse tõttu tuleb Hardy't lugeda oma aja üheks maailma juhtivamaks matemaatikuks, kes on avaldanud tunduvat mõju kogu matemaatilise analüüsi arengule.

RAAMAT MAJANDUSMATEMAATIKA MEETODITEST

E. Tamme

Majanduselu juhtimise ja tootmise planeerimisega seotud probleemide lahendamisel kasutatakse järjest rohkem matemaatilisi meetodeid. Suurepärase võimaluse vastavate meetoditega tutvumiseks annab **Ü. Kaasiku** hiljuti ilmunud õpik «Matemaatiline planeerimine» («Valgus», 1967, 320 lk.).

Raamatu autor on juba 1959. aastast alates lugenud mitmeid erikursusi majandusmatemaatika meetoditest (eeskätt TRÜ matemaatikaosakonna üliõpilastele). Tema juhtimisel on vabariigi arvutuskeskustes lahendatud mitmesuguseid tööstuse, põllumajanduse ja transpordi alalt pärinevaid praktilisi probleeme ning teostatud ka teaduslikke uurimisi majandusmatemaatika valdkonnas.

Ü. Kaasiku õpikus tutvustatakse matemaatilise planeerimise kõiki põhisuundi. Esimeses, kõige ulatuslikumas peatükis on käsitletud lineaarsete planeerimisülesannete teooriat ja lahendusmeetodeid. Siit leiame ka meetodeid parameetriliste ja täisarvuliste lineaarsete planeerimisülesannete lahendamiseks. Rohkesti esitatakse näiteid majanduselust pärinevate planeerimisülesannete matemaatilisest formuleerimisest. Teine peatükk on pühendatud lineaarse planeerimisülesande ühe lihtsama erijuhu — transpordiülesande ja sellega lähedaste ülesannete käsitlusele. Kolmandas peatükis esitatakse maatriksmängude teooria alused ning selle teooria seos lineaarse planeerimisega. Neljandas peatükis vaadeldakse mittelineaarsete planeerimisülesannete teooriat ja tutvustatakse mõningaid lahendusmeetodeid. Viiendas peatükis on uuritud mõningaid majandusliku tasakaalu staatilisi ja dünaamilisi mudeleid, kuuendas peatükis aga dünaamilise planeerimise meetodeid ning nende rakendamist varude optimaalse taseme määramisel. Õpiku viimases peatükis tutvustatakse massilise teenindamise teooria ehk järjekorrateooria lihtsamaid meetodeid ja mõningaid tulemusi.

Juba esitatud loetelust nähtub, kuivõrd laia probleemide ringi käsitletakse vaadeldavas raamatus, mis esmajoones on mõeldud õpikuks nii TRÜ Matemaatikateaduskonna kui ka TRÜ ja TPI majandusteaduskondade üliõpilastele. Teose autor on suutnud küllaltki õnnestunult ühendada käsitluse matemaatilise ranguse raamatu loetavusega ka suhteliselt väikese matemaatilise ettevalmistuse korral.

Tuleb aga eriti rõhutada, et Ü. Kaasiku teos pole mitte ainult õpik, vaid ühtlasi ka väärtuslik käsiraamat matemaatikutele, majandusteadlastele ning ka kõigi teiste erialade esindajatele, kes tunnevad huvi majandusmatemaatika meetodite vastu. Problemaatika avaruse ning käsitluse ranguse, lihtsuse ja selguse poolest on sellele raamatule raske leida väärikat partnerit ka venekeelsest majandusmatemaatika-alasest kirjandusest.

ILMUS «TÄIENDAVAID TEEMASID KOOLIMATEMAATIKALE»

O. Prinits

Kirjastuse «Valgus» väljaandena ilmus 1967. aasta aprillis **P. Hanko, O. Karu, J. Reimandi** ja **K. Velskeri** koostatud õpik «Täiendavaid teemasid koolimatemaatikale».

Peatükis «Tõenäosusteooria ja matemaatilise statistika elemente» käsitletakse ühendeid ning tõenäosusteooria ja matemaatilise statistika elemente. Ühendid, mis meil ka varematel aegadel on kohustuslikus programmis esinenud, ei leidnud siis olulist rakendamist. Seoses sündmuse tõenäosuse käsitlemisega aitavad aga ühendid oluliselt kaasa vastavate ülesannete lahendamisel. Tõenäosusteooriast tutvustatakse uues õpikus juhuslikku sündmust, sündmuste korrutist ja summat, matemaatilist tõenäosust ja statistilist tõenäosust. Matemaatilise statistika elementide osas on toodud keskmised ja vaadeldakse statistilise rea hajuvust.

Peatükis «Lineaarne planeerimine» käsitletakse algul lineaarvõrratusi ja graafilist planeerimist. Seejärel tutvustatakse lineaarvõrrandisüsteemide lahendamist, sihifunktsiooni mõistet ja lineaarset planeerimist simpleksmeetodil. Esitatakse rida planeerimisülesandeid tööstusest ja põllumajandusest ning tutvustatakse majandusmatemaatika olemust.

Peatükis «Matemaatilise loogika elemente» esitatakse lausearvutuse küsimusi. Tutvustatakse loogilisi tehteid, lausearvutuse valemeid, põhilisi loogilisi samaväärsusi ning rakendusena kontaktskeemide analüüsimist ja sünteesimist.

Peatükis «Arvusüsteemidest» käsitletakse arvutamist kaheksand- ja kahendsüsteemis.

Õpik on mõeldud kasutamiseks XI klassis, kus 1966/67. õ.-a. oli kavas teema vabal valikul. Edaspidi on ette näha, et kooliprogrammides hakatakse ulatuslikumalt reserveerima aega valikteemadele. See annab võimaluse tutvustada õpilasi ka mõningate matemaatika kaasaegsete probleemidega. On kaheldamatult selge, et siis ei piisa enam ühest raamatust, kus käsitletakse matemaatika-alaseid valikteemasid. Eriti kerkib vajadus traditsiooniliselt koolimatemaatika distsipliinidena tuntud algebra- ja geomeetria-alaste valikteemade käsitluste järele. On ju kaasaegne koolimatemaatika reform just selle ainega seotud.

Et valikteema tuleb koolimatemaatika programmi jälle 1968/69. õppeaastal ja et 1966/67. õppeaastal kasutamiseks ilmus raamat liiga hilja, siis oli ostjaskond juhuslik. Kuid siingi täitis raamat oma otstarbe, sest peale «Matemaatika ja kaasaja» väheste eksemplaride pole laiemale lugejaskonnale enam ammu raamatukauplustes matemaatika-alast kirjandust müügil olnud.

SUURVÕISTLUSED MATEMAATIKAS

K. Velsker

1966/67. õppeaasta vabariikliku koolinoorte täppisteaduste olümpiaadi lõppvoor korraldati 20.—30. märtsini 1967 Nõo Keskkoolis.

Kui olümpiaadi vabariiklik komisjon eelnevatel aastatel kutsus õpilased lõppvoorule II vooru tööde põhjal, siis käesoleval aastal võis iga rajoon ja vabariikliku alluvusega linn (Tallinnas iga rajoon) ise saata olümpiaadile kolmeliikmelise võistkonna matemaatikas, füüsikas ja keemias, kuid kokku mitte üle 6 õpilase. Eriklassidega koolid võisid saata vastava aine võistkonna.

Matemaatika olümpiaadi lõppvoorule tuli 23 võistkonda. Osa võttis üldse 79 õpilast (67 poissi ja 12 tütarlast), neist 13 individuaalvõistlejat (3 võistkonda olid kaheliikmelised). Kümme õpilast oli vene õppekeelega koolidest, 16 õpilast kümnendatest klassidest. Esindatud oli vabariigi 40 keskkooli.

Võistlejatel tuli 5 tunni jooksul lahendada järgmised ülesanded :

1. Kolmnurga sisenurgad A, B ja C rahuldavad võrdust

$$\sin B + \sin C + \sin A \cos(A + B) + \\ + \sin A \cos(A + C) = 0.$$

Leida nurk A.

2. Leida kaks naturaalarvu, mille vahe on 66 ja vähim ühiskordne on 360.

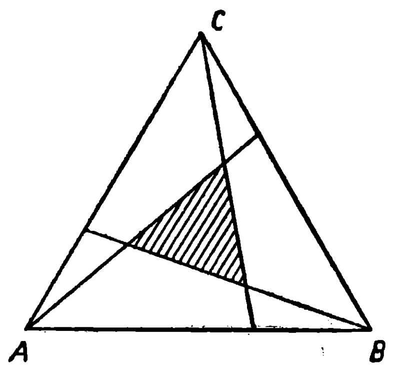
3. Milliste tõkete vahel võib muutuda geomeetrilise progressiooni tegur, kui nõuda, et selle progressiooni kolm järjestikust liiget on mingi kolmnurga külgede pikkusteks?

4. Määrata a kõik väärtused, mille puhul võrrandil

$$\log(ax) = 2\log(x + 1)$$

on ainult üks reaalarvuline lahend.

5. Võrdkülgse kolmnurga ABC küljed on jaotatud kolmeks võrdseks osaks. Iga tipp on ühendatud vastasküljе ühe jaotuspunktiga joonisel näidatud viisil. Avaldada lähtekolmnurga pindala viirutatud kolmnurga pindala kaudu.



Vähemalt rahuldavalt lahendasid 1. ülesande 33 õpilast, 2. ülesande 27 õpilast, 3. ülesande 28 õpilast, 4. ülesande 2 õpilast ja 5. ülesande 32 õpilast. Vähemalt rahuldavalt ei lahendanud ühtegi ülesannet 17 õpilast (neist 6 õpilast said 0 punkti).

Võistkondadest sai esimese koha Nõo Keskkooli võistkond (Tiit Prank, Rein Prank, Mihkel Merivoo), teise koha Tallinna I Keskkooli võistkond (Toomas Täht, Eve Martin, Eduard Eitelberg) ja kolmanda kohta Tartu rajooni võistkond (Otto Teller, Peeter Oja, Enn Silmere).

Individuaalselt parimad olid:

1. Täht, Toomas, Tallinna 1. Keskkooli 11. klass.
2. Kikas, Jaak, Tallinna 2. Keskkooli 11. klass.
3. Teller, Otto, Nõo Keskkooli 10. klass.
4. Papernõi, Sergei Tallinna 15. Keskkooli 10. klass.
5. Prank, Tiit, Nõo Keskkooli 10. klass.
6. Kändler, Tiit, Tallinna 2. Keskkooli 11. klass.
7. Pärna, Kalev, Viljandi 1. Keskkooli 11. klass.
8. Reifman, Semjon, Tartu 4. Keskkooli 10. klass.
9. Vendt, Krista, Rakvere 1. Keskkooli 11. klass.
10. Oja, Peeter, Nõo Keskkooli 11. klass.

* * *

Üleliiduline koolinoorte matemaatikaolümpiaad toimus 1967. aastal Tbilisis. Meie vabariiki esindasid Toomas Täht, Tiit Kändler ja Sergei Papernõi. Neist esimene saavutas ühe neljanda koha 377 osavõtja seast.

Üleliidulise matemaatikaolümpiaadi ülesanded olid klasside kaupa järgmised:

8. klass

1. Teravnurkse kolmnurga ABC suurim kõrgus AH on võrdne mediaaniga BM. Tõestada, et nurk ABC on väiksem kui 60°.

2. Teatud naturaalarvus muudeti suvaliselt numbrite järjekorda. Tõestada, et esialgse arvu ja saadud arvu summa ei võrdu arvuga 999...9 (arvus on 1967 üheksat).

3. Tõestada, et tasandi neljas suvalises punktis paiknevaid prožektoreid, mille valgustusnurk on 90°, saab suunata nii, et oleks valgustatud kogu tasand.

4. Kas saab arve 0, 1, 2, ..., 9 paigutada ringjoonele nii, et mistahes kaks naaberarvu erineksid 3, 4 või 5 võrra?

5. Tõestada, et on olemas arv, mis jagub arvuga 5^{1000} ja mille numbrite hulgas ei esine ühtegi nulli.

9. klass

1. Kas saab arve 1, 2, 3, ..., 13 paigutada ringjoonele nii, et mistahes kaks naaberarvu erineksid 3, 4 või 5 võrra?

2. Sama, mis 8. klassi ülesanne nr. 3.

3. Naturaalarvu numbrid paigutati ümber ning tulemus liideti lähtearvuga. Tõestada, et kui summa on 10^{10}, siis jagus lähtearv 10-ga.

4. Kolmnurgas ABC võrdub kõrgus CK mediaaniga BE ja nurgapoolitajaga AD. Tõestada, et kolmnurk ABC on võrdkülgne.

5. Leida kõik täisarvude paarid x ja y, mis rahuldavad võrrandit:

$$x^2 + x = y^4 + y^3 + y^2 + y.$$

10. klass

1. Positiivsete täisarvude rea iga liige alates kolmandast võrdub kahe eelneva vahe absoluutväärtusega. Kui suur ülimalt võib olla sellise rea liikmete arv, kui ükski liige ei ületa arvu 1967?

2. Tõestada, et kaheksasse suvalisse ruumipunkti paigutatud prožektoreid, millest igaüks valgustab oktanti (ristuvate servadega kolmetahulist nurka), saab suunata nii, et nad valgustaksid kogu ruumi.

3. «Kuningas-enesetapja». Malelaual suurusega 1000×1000 seisab must kuningas ja 499 valget vankrit. Tõestada, et malendite mistahes algasendi puhul saab kuningas minna valge vankri löögi alla valge igasuguse mängu korral. (Käike tehakse nii nagu tavalises males.)

4. Rombi kolm järjestikust tippu asetsevad antud ruudu külgedel AB, BC, CD. Leida kujundi pindala, mille katavad selliste rombide neljandad tipud.

5. Naturaalarvul k on järgmine omadus: kui arv m jagub arvuga k, siis jagub arvuga k ka arv, millel on samad numbrid nagu arvul m, ainult vastupidises järjekorras. Tõestada, et k on arvu 99 jagaja.

Lenini preemia laureaate

Üheteistkümnest Lenini preemiast, mis 1967. a. anti eriti silmapaistvate tööde eest teaduse ja tehnika alal, omistati kaks preemiat järgmistele noortele Moskva matemaatikutele.

1. Sergei Petrovitš Novikovile, NVSL TA korrespondentliikmele, NSVL TA V. A. Steklovi nimelise Matemaatikainstituudi vanemale teaduslikule töötajale — aastail 1964—1966 avaldatud tööde tsükli eest diferentseeruvate muutkondade alal.

2. Juri Ivanovitš Maninile, füüsika-matemaatikadoktorile, NSVL TA V. A. Steklovi nimelise Matemaatikainstituudi vanemale teaduslikule töötajale — aastail 1959—1963 avaldatud tööde tsükli eest algebraliste kõverate ja Abeli muutkondade teooria alal.

NOORIM LENINI PREEMIA LAUREAATIDEST

Ü. Lumiste

1967. aasta Lenini preemiad matemaatika alal omistati tööde eest, mis annavad lahendusi fundamentaalsetele probleemidele matemaatika võrdlemisi abstraktsetes harudes. Üheks probleemirikkaks ja kiiresti arenevaks haruks kaasaja matemaatikas on diferentseeruvate muutkondade topoloogiline teooria ehk lihtsamalt — diferentsiaaltopoloogia. Selles valdkonnas tehtud sügavate uurimuste eest sai noorimaks Lenini preemiaga autasustatud matemaatikuks NSV Liidu Teaduste Akadeemia V. A. Steklovi nimelise Matemaatikainstituudi vanem teaduslik töötaja S. P. Novikov.

Sergei Petrovitš Novikov sündis 20. märtsil 1938. a. Gorki linnas silmapaistva nõukogude matemaatiku, tuntud hulgateoreetiku ja matemaatilise loogika spetsialisti Pjotr Sergejevitš Novikovi pojana. 1960. aastal lõpetas ta Moskva Riikliku Ülikooli ja suunati aspirantuuri V. A. Steklovi nimelise Matemaatikainstituudi juurde Moskvas. Pärast aspirantuuri lõpetamist 1963. a. jäi S. P. Novikov tööle samas instituudis. Kandidaadikraad omistati talle 1964. aastal ning juba 1966. aastal valiti ta NSV Liidu Teaduste Akadeemia korrespondentliikmeks. Käesoleval ajal töötab S. P. Novikov kohakaaslusega veel professorina Moskva Riikliku Ülikooli diferentsiaalgeomeetria kateedris, kus loeb erikursusi, juhendab eriseminare ja aspirante.

S. P. Novikovi uurimuste objektid — diferentseeruvad muutkonnad — esinevad sageli matemaatika mitmesugustes rakendustes. Nendega on tavaliselt tegemist juhtudel, kui vaatluse all on hulgad, mille elemente saab esitada pidevalt muutuvate reaalarvuliste koordinaatidega. Vajalike koordinaatide arvu nimetatakse sel korral muutkonna mõõtmeks. Nii haarab muutkonna mõiste näiteks tavalise sirge, tasandi ja ruumi, samuti ka kõverjoone ja kõverpinna. Esineb ka suurema mõõtmega muutkondi, näiteks neljamõõtmeline aegruum või antud tasandile tõmmatud ellipsite viiemõõtmeline muutkond (ellipsi «koordinaatideks» võib võtta näiteks keskpunkti kaks koordinaati, suurtelje kaldenurga ning kaks pooltelge). Kui mingi mehhaanilise süsteemi asend on määratav n reaalarvuga (n «vabadusastmega» süsteem), siis selle süsteemi kõikvõimalikud asendid moodustavad n-mõõtmelise muutkonna.

On muutkondi, mille punkte pole võimalik ühelainsal viisil koordinaatidega esitada, ilma et tekiks iseärasusi. Lihtsaimaks näiteks on sfäär. Tuntud geograafilised koordinaadid gloobusel on iseärased poolustes — viimastes jääb määramatuks geograafiline pikkus. (See ilmneb selgesti nn. «maailma kaartidel», kus poolused on «laiali veninud» kaardi ülemiseks ja alumiseks ääreks.) On teada, et sfääri korrapäraseks esitamiseks läheb vaja vähemalt kahte tasandilist kaarti. Keerulisemate muutkondade puhul võib selliseid «kaarte» vaja minna veel rohkemgi; kõneldakse kaartide «atlasest». Kaartidel esitatavail piirkondadel on seejuures muutkonnal paratamatult ühiseid osi. Muutkonda nimetatakse d i f e r e n t s e e r u v a k s, kui tema jaoks saab leida niisuguse «atlase», et kaartide ühisosal üleminek ühe kaardi koordinaatidelt teise kaardi koordinaatidele toimub diferentseeruvate funktsioonide abil. (Ühe kaardiga korrapäraselt esitatav muutkond on seega alati diferentseeruv).

Kaht diferentseeruvat muutkonda nimetatakse h o m ö o m o r f s e t e k s, kui nende punktide vahel saab korraldada üksühese vastavuse selliselt, et vastavaid punkte haaravates kaartides on ühe punkti koordinaadid teise punkti koordinaatide pidevad funktsioonid. Kui vastavust saab korraldada nii, et need funktsioonid on lisaks ka diferentseeruvad, siis nimetatakse muutkondi d i f e o m o r f s e t e k s. Pikka aega arvati, et iga kaks homöomorfset diferentseeruvat muutkonda on alati ka difeomorfsed. Kuid 1956. a. konstrueeris ameerika matemaatik J. Milnor näite diferentseeruvast muutkonnast, mis on küll homöomorfne, kuid mitte difeomorfne seitsmemõõtmelise sfääriga (s. t. punktide $(x_1, \ldots, x_8)$ hulgaga, mille korral $x_1^2 + \ldots + x_8^2 = 1$). Niisuguseid muutkondi hakati nimetama «eksootilisteks sfäärideks». Selgus, et seitsmemõõtmelisi «eksootilisi sfääre» on täpselt 28. Hiljuti näitas F. Hirzebruch, et neid saab 10-mõõtmelises eukleidilises ruumis esitada viie kompleksarvulise koordinaadi abil järgmiselt:

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_4|^2 + |z_5|^2 = 1$$

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^3 + z_5^{6k-1} = 0;$$

$$k = 1, 2, \ldots, 28$$

(siin on reaalarvuliste koordinaatide jaoks antud k korral kolm võrrandit).

Need tööd avasid uue uurimissuuna topoloogias. Oli vaja välja selgitada, millistel tingimustel on kaks homöomorfset n-mõõtmelist diferentseeruvat muutkonda alati ka difeomorfsed. S. P. Novikov lähenes probleemile veelgi üldisemalt ja asendas homöomorfismi mõiste teda üldistava homotoopilise ekvivalentsuse mõistega. Oma esimeses silmapaistvas töös, mille ta tegi 1962. aastal, olles veel teise aasta aspirant, lahendas S. P. Novikov järgmise väga komplitseeritud probleemi: *anda tingimused selleks, et kaks homotoopiliselt ekvivalentset diferentseeruvat muutkonda oleksid difeomorfsed.*

Eriti silmapaistva tulemuse sai S. P. Novikov 1965. aastal. Diferentseeruvate muutkondade uurimisel on juba 1942. aastast saadik kasutusel nn. Pontrjagini klassid (nad defineeris esmakordselt nõukogude akadeemik L. S. Pontrjagin). Et nende sissetoomisel tuginetakse muutkonna puutujaruumi mõistele, siis on Pontrjagini klasside invariantsus muutkonna difeomorfsel kujutamisel ilmne. Teiselt poolt on teada, et homotoopiliselt ekvivalentsete diferentseeruvate muutkondade Pontrjagini klassid võivad olla erinevad. Probleem, kas need klassid kahe homöomorfse diferentseeruva muutkonna korral peavad ühtima või võivad olla samuti erinevad, seisis paljude matemaatikute jõupingutustele vaatamata lahtine kümmekonna aasta jooksul. Alles S. P. Novikovil õnnestus tõestada, et ka sel juhul nad peavad ühtima, s. t. *Pontrjagini klassid on invariantsed mitte üksnes difeomorfismide, vaid ka üldiste homöomorfismide korral.* Sellest tulemusest saab teha rea olulisi järeldusi diferentseeruvate muutkondade üldise ehituse kohta.

Sellega on põgusalt tutvustatud ainult S. P. Novikovi tähtsamaid töid. Peale nende kuulub talle veel rida lähedastel teemadel tehtud uurimusi, mille sisu avamine ilma spetsiaalsete mõistete ja tähistuste sissetoomiseta jääks veelgi pinnalisemaks kui ülalkäsitletud tööde puhul. Neid kõiki ühendab diferentsiaaltopoloogia ja homoloogilise algebra kõige kaasaegsema aparaadi virtuooslik kasutamine sügavate probleemide lahendamisel.

LENINI PREEMIA TÖÖDE EEST DIOFANTILISES GEOMEETRIAS

U. Kaljulaid

Tööde eest algebraliste kõverate ja Abeli muutkondade teooria alal autasustati 1967. aastal Lenini preemiaga noort Moskva matemaatikut J. I. Maninit.

Juri Ivanovitš Manin sündis 16. veebruaril 1937 Simferoopolis. 1958. aastal lõpetas ta Moskva Riikliku Ülikooli ning jäi samasse aspirantuuri, kus jätkas teaduslikku tööd prof. I. R. Šafarevitši juhendamisel. 1960. aastal kaitses J. I. Manin kandidaadiväitekirja «Abeli muutkondade teooriast». Selles käsitletakse algebraliste kõverate teooriat üle lõpliku karakteristikuga põhikorpuste ja leitakse rida originaalseid analoogiaid ja seoseid klassikalise juhuga, kus põhikorpuseks on kompleksarvude korpus. Alates 1960. aastast kuni käesoleva ajani töötab J. I. Manin NSV Liidu Teaduste Akadeemia V. A. Steklovi nimelises Matemaatikainstituudis. 1963. a. kaitses ta doktoriväitekirja «Kommutatiivsete formaalsete rühmade teooria lõpliku karakteristikuga põhikorpuste korral». Alates 1965. aastast on J. I. Manin ka professor Moskva ülikoolis, kus ta koos prof. I. R. Šafarevitšiga arendab ulatuslikku tegevust algebralise geomeetria koolkonna rajamisel.

J. I. Manini uurimisvaldkond — diofantiline geomeetria — ulatub juurtega antiikaega, III sajandisse, mil Diofantos seadis täisarvuliste kordajatega mitut tundmatut sisaldava võrrandi ratsionaalarvuliste lahendite leidmise ülesande. Sedalaadi ülesannete süstemaatilise käsitlemisega tehti algust varasel keskajal Hiinas ja Indias, tõsisemad edusammud saavutati aga selliste klassikute nagu Fermat', Euleri, Lagrange'i ja Gaussi töödes. Uus etapp diofantiliste ülesannete uurimisel algas käesoleval sajandil, kui leiti rida võimalusi diofantiliste ülesannete klassifitseerimiseks ja uurimiseks algebralise geomeetria meetoditega. Tekkis diofantiline geomeetria, kus põhiliseks uurimisobjektiks on üle mingi korpuse antud algebralise muutkonna «aritmeetiline» ehitus ja selle sõltuvus korpuse «aritmeetikast». Neid küsimusi peetakse praegu algebralise geomeetria meetodite täiuslikkuse proovikiviks.

Suurt huvi pakub juba ühedimensionaalsete muutkondade e. algebraliste kõverate aritmeetika. Seos diofantiliste ülesannetega on siin järgmine. Igale kahe muutujaga algebralisele võrrandile, mille kordajateks on mingi korpuse elemendid, vastab teatav algebraline kõver (üle selle korpuse). Iga algebralise kõveraga seotakse teatav mittenegatiivne täisarv — kõvera liik. Kõverad liiki 0 on ratsionaalsed kõverad, liiki 1 elliptilised. Kõveraid liiki $\geqslant 2$ nimetatakse mitteelliptilisteks algebralisteks kõverateks. On selgunud, et algebralise kõvera aritmeetika, s. o. vastava diofantilise ülesande iseloom sõltub oluliselt kõvera liigist.

1922. aastal püstitas L. J. Mordell diofantilises geomeetrias järgmise hüpoteesi: mitteelliptilistel kõveratel üle arvukorpuste (s. t. kompleksarvudest koosnevate korpuste) on vaid lõplik arv ratsionaalpunkte (punkte ratsionaalsete koordinaatidega). Real põhjustel omandas selle küsimuse lahendamine diofantilise geomeetria jaoks olulise tähtsuse, kuid vaatamata paljude matemaatikute jõupingutustele ei õnnestunud leida teed sellele probleemile lähenemiseks. Rida tähelepanekuid viisid Mordelli üldistatud hüpoteesini (A. Neron, S. Lang): mitteelliptilistel kõveratel on ka üle lõplikult moodustatud korpuste e. funktsionaalkorpuste (kus osa moodustajaid võib olla transtsendentsed üle põhikorpuse) vaid lõplik arv ratsionaalpunkte. Seda üldistatud hüpoteesi peeti sama ligipääsmatuks kui Mordelli esialgset väidet. Kuid 1961. aastal õnnestus J. I. Maninil tõestada järgmine teoreem·

Igal mitteelliptilisel kõveral üle lõplikult moodustatud korpuse on kas lõplik arv ratsionaalpunkte üle selle korpuse või siis sellise kõvera saab muutuja vahetusega teisendada kõveraks, mille võrrandis puuduvad transtsendentsed kordajad.

See tulemus taandab üldise küsimuse selle erijuhule — arvukorpuse juhule —, mis olemasolevate vahenditega pole tänini haaratav. Manini teoreemi tõestus on üsna komplitseeritud. Selles rakendatakse mitmeid sügavaid algebralisi, topoloogilisi ja analüütilisi meetodeid.

Oma doktoriväitekirjas arendas J. I. Manin välja kommutatiivsete formaalsete rühmade teooria. Viimane on loomulikuks jätkuks lokaalsete Lie rühmade teooriale. On teada, et Lie rühma ühikelemendi ümbruses saame leida reaalarvuliste koordinaatide süsteemi selliselt, et kui elemendid X ja Y on küllalt lähedal ühikuelemendile, siis elemendi $Z = X \cdot Y$ koordinaadid avalduvad elementide X ja Y koordinaatide analüütiliste funktsioonidena; sel viisil saadakse komplekt astmeridu

$$z_i = a_i\ (x_1, \ldots, x_n;\ y_1, \ldots, y_n),\quad i = 1, \ldots, n.$$

See koonduvate astmeridade komplekt, mis rahuldab rühma aksioomidest tulenevaid seoseid, defineeribki lokaalse Lie rühma struktuuri. Formaalse rühma mõiste saadakse siit järgmiselt: jäetakse ära ridade koonduvuse nõue, s. t. vaadeldakse astmeridu kui formaalseid astmeridu, astmeridade kordajaid aga loetakse mingisse lõpliku karakteristikuga korpusesse kuuluvaiks. J. Dieudonné töötas kommutatiivsete formaalsete rühmade uurimiseks välja aparaadi, mis mängib seal umbes samasugust osa nagu Lie algebrad lokaalsete Lie rühmade uurimisel. Neis uurimistes jõudis ta ülesandeni kommutatiivsete formaalsete rühmade klassifikatsioonist isomorfismi täpsusega. Ta tunnistas ülesande keerukust, märkides, et analüüsile ei allu isegi selle ülesande raskus. Manini doktoritöös on see ülesanne lõplikult lahendatud, kusjuures töö sisaldab veel teisigi silmapaistvaid tulemusi.

J. I. Manini nimi on saanud maailma matemaatikute seas juba laialt tuntuks. Teda on korduvalt kutsutud esinema Prantsusmaale ja Itaaliasse. Nõukogude laiem matemaatikaavalikkus tunneb teda ka N. Bourbaki «Matemaatika elementide» algebraraamatute venekeelse tõlke redaktorina ning huvitavaid algebraprobleeme populaarsemalt käsitlevate kirjutiste autorina (vt. näit. Энциклопедия элементарной математики, IV. М., 1963).

Tekib loomulik küsimus, kuidas on võimalik samaaegselt töötada nii mitmes suunas ja tõeliselt raskete probleemide kallal. Manini õpetaja prof. Šafarevitš ütleb selle kohta järgmist [1]:

«Kõiki, kes tunnevad Maninit, hämmastab tema ereda matemaatilise talendi kõrval võime palju ja püüdlikult töötada. Juhtub, et ta on lõpetanud töö, milles tuli ületada suuri raskusi ja mille esitus nõuab kümneid lehekülgi, ning näib, et nüüd saabub vaheaeg ... Aga juba järgmisel päeval on ta täielikult sukeldunud uue ülesande lahendamisse. Arvatavasti tänu erakordsele oskusele töötada ongi seletatav asjaolu, et ta üheaegselt võib tegelda paljude asjadega. Ja need asjad mitte ainult ei sega põhitööd, vaid paistab, et isegi abistavad teda selles».

Manin ise, pöördudes noorte lugejate poole, kirjutab järgmist [1]:

---

[1] Ajakirjast «Молодой коммунист», 1964, № 3.

«Tuginedes oma tagasihoidlikule kogemusele, tahan öelda neile, kes on 16—17 aastased: ärge kartke tõelist teaduslikku kirjandust! Igaüks teist võib aru saada, millest seal on kirjutatud, ja jälgida, mis on teada, mis mitte, milliseid ülesandeid püstitatakse ja missuguste lahendamine on käsil. Kuid ei maksa arvata, et see on kerge. See on raske. Kuid mitte raskem kui tavalise koolitöö kõrval muusikaga või raadioasjandusega tegelemine.»

Kroonika

UUS TEADUSE DOKTOR

27. juunil 1967 kaitses ENSV TA füüsika-matemaatika ja tehnikateaduste nõukogu ees edukalt oma doktoriväitekirja «Integraalsed variatsioonprintsiibid ja nende kasutamine koorikute ja plaatide dünaamikas» ENSV TA Küberneetika Instituudi vanem teaduslik töötaja **Leo Ainola.** Doktoritööd oponeerisid füüsika-matemaatikadoktor prof. A. Goldenveiser (Moskvast), füüsika-matemaatikadoktor prof. K. Galimov (Kaasanist) ja ENSV akadeemik A. Humal (Tallinnast), kes andsid tööle kõrge hinnangu.

L. Ainola on väljapaistev ja tunnustatud spetsialist variatsioonmeetodite alal. Tema sulest on ilmunud üle 20 teadusliku töö, millest enamik on pühendatud variatsioonprintsiipidele ja nende rakendustele, eriti rakendustele plaatide ja koorikute teoorias.

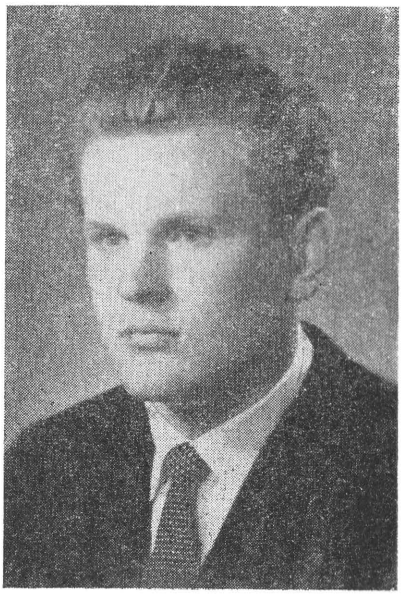
Variatsioonprintsiibid köidavad teadlaste tähelepanu analüütilise mehhaanika rajamisajast tänapäevani ja leiavad laialdast kasutamist. See seletub kahe asjaoluga. Esiteks on variatsioonprintsiibid lihtsalt formuleeritavad väga üldises ja invariantses kujus. Teiseks võimaldavad variatsioonprintsiibid nn. otseste meetodite abil lahendada paljusid keerulisi ülesandeid.

Kuni viimase ajani tunti variatsioonprintsiipe, millele vastavad diferentsiaalvõrrandite rajaülesanded. Staatika ülesanded on just rajaülesanded. Dünaamikas kasutatav Hamilton-Ostrogradski printsiip eeldab alg- ja lõpptingimuste etteandmist, ehkki tüüpilistes mehhaanika ja füüsika ülesannetes on teada ainult algtingimused. Viimastel aastatel on otsitud teid variatsioonprintsiipide formuleerimiseks, mis vastavad algtingimustega ülesandeile. Kõige üldisemate tulemusteni õnnestus jõuda L. Ainolal. Ainola variatsioonprintsiip — sellise termini kasutamisele võtmine trükisõnas on täiesti motiveeritud — baseerub konvulatsioonintegraalide kasutamisel. Tema doktoriväitekirjas on formuleeritud variatsioonprintsiip lõpliku vabadusastmete arvuga süsteemide dünaamika, koorikute teooria ja elastsusteooria algtingimustega ülesannete jaoks. See tähendab, et on moodustatud sellised funktsionaalid, mille statsionaarsus on määratud süsteemi liikumise diferentsiaalvõrranditega, rajatingimustega ja algtingimustega. Neid funktsionaale on väitekirjas rakendatud koorikute teooria mittelineaarsete võrrandite tuletamiseks.

L. Ainola sündis 18. juulil 1929. a. Viljandis teenistujate perekonnas. Lõpetas 1948. a. Viljandi 2. Keskkooli ja asus õppima TPI ehitusteaduskonda, mille lõpetas tsiviilehituse insenerina 1953. a. Peale aspirantuuri lõpetamist kaitses L. Ainola 1957. a. oma kandidaadiväitekirja, mis käsitles samuti variatsioonprintsiipe. Seejärel töötas L. Ainola algul TPI kõrgema matemaatika kateedri dotsendina ja 1961. aastast ENSV TA Küberneetika Instituudi mehhaanika ja rakendusmatemaatika sektori vanema teadusliku töötajana.

U. Nigul
A. Tümanok

UUSI TEADUSE KANDIDAATE



21. märtsil 1967 kaitses oma väitekirja «Summeeruvustegurid Fourier' ridade teoorias» TRÜ matemaatilise analüüsi kateedri assistent **Margus Tõnnov.** Tööd juhendas prof. G. Kangro, oponeerisid prof. A. Turetski Minskist ja dots. S. Baron.

Väitekirjas antakse vastus kaunis keerulisele küsimusele: millal on etteantud arvujada $\{c_n\}$ mingi funktsiooni Fourier' kordajate jada. Osutub, et eksisteerib tihe seos summeeruvustegurite ja Fourier' kordajate vahel. Selle seose kaudu kirjeldataksegi Fourier' kordajate omadusi.

M. Tõnnovile omistati füüsika-matemaatikakandidaadi kraad.

Margus Mihkli p. Tõnnov on sündinud 25. aprillil 1936 Elva rajoonis. Ta lõpetas Elva keskkooli 1955. a. ja TRÜ matemaatikaosakonna 1960. a. Aastatel 1961—1964 oli aspirantuuris TRÜ matemaatilise analüüsi kateedri juures. Pärast aspirantuuri lõpetamist jäi tööle sama kateedri juurde.

9. juunil 1967. a. kaitses kandidaadiväitekirja TRÜ teoreetilise mehhaanika ja astronoomia kateedri vanemõpetaja **Erich Jõgi.** Dissertatsioon oli

pühendatud elastilis-plastsete kaarte stabiilsuse küsimustele. Töö valmis professor Ü. Lepiku juhendamisel. Oponeerisid professor G. Rägo, professor P. Ogibalov Moskvast ja dotsent P. Kuratov Leningradist. Oponendid andsid E. Jõgi tööle hea hinnangu, mida kinnitasid ka meie maa paljudest uurimiskeskustest saabunud arvamused.

Erich Alfredi p. Jõgi sündis 1. augustil 1928 Kohtla-Järve rajoonis Lohusuu külas. Aastal 1950 lõpetas ta Tartu Õpetajate Instituudi ning suunati samasse õppeasutusse õpetajaks. 1951. a. astus E. Jõgi TRÜ matemaatikaosakonda, mille lõpetas 1956. a. mehhaaniku kvalifikatsiooniga. Aastail 1956—1960 töötas ta TRÜ teoreetilise mehhaanika kateedris vanemõpetajana, 1960—1963 õppis sama kateedri juures aspirantuuris.

MEIE KÜLALISI

Mais-juunis 1967. aastal külastas Tartut Novosibirski Riikliku Ülikooli professor ja NSVL TA Siberi osakonna Matemaatikainstituudi sektorijuhataja **Gennadi Šlomovitš Rubinštein.** Prof. Rubinštein on üks NSV Liidu juhtivaid spetsialiste matemaatilise planeerimise teoreetiliste probleemide valdkonnas. Eriti tuntud on tema üldine lähenemisviis duaalsete planeerimisülesannete käsitlemisele, mis võimaldab ühtsest seisukohast tuletada kõik matemaatilise planeerimise põhiteoreemid ning on olnud aluseks paljude uute tulemuste saamisel.

Tartus viibides esines prof. Rubinštein rea ettekannetega TRÜ arvutusmatemaatika kateedri seminaril, tutvustades enda ja oma kaastöötajate uurimuste viimaseid tulemusi matemaatilise planeerimise üldisest teooriast ning planeerimisülesannete mitmesugustest üldistustest.

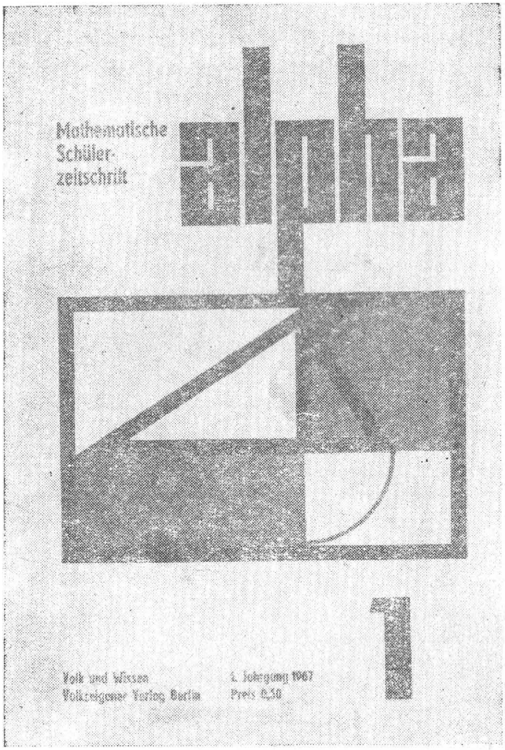
Huvitav on märkida, et planeerimisülesannete üldist teooriat arendades on prof. Rubinštein jõudnud tulemustele, mis osutuvad väga lähedasteks TRÜ geomeetria ja algebra kateedri juhataja dots. Ü. Lumiste tööde tulemustega geomeetria alustega seotud probleemide uurimisel.

Ü. Kaasik

«ALPHA»

Saksa Demokraatlikus Vabariigis hakkas 1967. aasta algul ilmuma matemaatika-alane õpilasajakiri «Alpha», mille eesmärgiks on õpilastes huvi äratamine matemaatika vastu. Aastas antakse välja 6 numbrit. Ajakirjas avaldatakse kirjutisi matemaatika ajaloost, tutvustatakse mitmesuguseid matemaatika rakendusi ning antakse ülevaateid Saksa DV ja teiste sotsialismimaade matemaatika olümpiaadidest. Selles avaldatakse huvitavaid ülesandeid, aga ka ülesandeid, mida saab kasutada olümpiaadideks ettevalmistamisel.

N. Veske



UUSI ÜLIKOOLI LÕPETANUD MATEMAATIKUID

21.—23. juunini 1967. a. lõpetas Tartu Riikliku Ülikooli järjekordne lend matemaatikuid. Matemaatika pedogoogilises osakonnas kaitsti järgmised diplomitööd:

1. Allemann, Arved. Piirväärtuse mõiste käsitlemisest keskkoolis. (Juhendaja dots. E. Jürimäe.)

2. Allemann, Evi. Matemaatilise loogika elemendid koolimatemaatikas. (Juhendaja dots. O. Prinits.)

3. Allikas, Vilve. Konstruktiivse geomeetria elemendid koolikursuses. (Juhendaja van.-õp. K. Ariva.)

4. Eraste, Elle. Matemaatikaõhtud keskkoolis. (Juhendaja dots. L. Kivistik.)

5. Kangro, Maret. Värviline paber matemaatika õpetamise vahendina. (Juhendaja prof. G. Rägo.)

6. Kunder, Raivo. Unaarsetest algebratest. (Juhendaja dots. J. Hion.)

7. Leesi, Maret. Punktikujulise valgusallika poolt väljasaadetud valgusviir matemaatika õpetamise vahendina. (Juhendaja prof. G. Rägo.)

8. Mang, Heli. Gonimeetria küsimused koolimatemaatikas. (Juhendaja dots. O. Prinits.)

9. Mäeks, Mare. Läbipaistev paber, plastikaat ja seebivee kile matemaatika õpetamise vahendina. (Juhendaja prof. G. Rägo.)

10. Palusalu, Heli. Geomeetrilised teisendused keskkoolis. (Juhendaja dots. O. Prinits.)

11. Peets, Siiri. Päikesekiired matemaatika õpetamise vahendina. (Juhendaja prof. G. Rägo.)

12. Ruut, Raivo. Eesti NSV üldhariduslike koolide füüsika- ja matemaatikaõpetajate kaadrist 1965. a. (Juhendaja van.-õp. J. Reimand.)

13. Rõuk, Vaike. Korrelatsioonanalüüsi kasutamine sotsiaalsetes uurimustes. (Juhendaja van.-õp. R. Tammeste.)

14. Sokk, Aldo. Elastsete ja elastsete-plastsete paraboolsete kaarte stabiilsusest. (Juhendaja van.-õp. E. Jõgi.)

15. Veidenberg, Hilda. Optilised petted matemaatika õpetamise vahendina. (Juhendaja prof. G. Rägo.)

16. Übius, Malle. Lobatševski geomeetria elemendid matemaatikaringis. (Juhendaja van.-õp. K. Ariva.)

Riigieksamitega lõpetasid matemaatika pedagoogilise osakonna:

1. Ilves, Elli
2. Ilves, Helvi
3. Paap, Eve
4. Siim, Helgi-Lilian

Nendele diplomandidele omistati matemaatiku ja matemaatikaõpetaja kutse.

Kaugõppe osakonnas kaitsti järgmised diplomitööd:

1. Rõbakov, Leonid. О некоторых вариационных задачах. (Juhendaja prof. G. Kangro).

2. Stšerbakov, Aleksei. Интерпретация алгоритма целочисленной задачи линейного программирования в терминах языка АЛГОЛ-60. (Juhendaja dots. Ü. Kaasik.)

Nendele diplomandidele omistati arvutusmatemaatiku kvalifikatsioon.

Astronoomia erialal kaitsti järgmine diplomitöö:

3. I b r u s, Ürgo. Ülihiidtähe Ho 190603 atmosfääri analüüs 1965. a. spektraalsete vaatluste põhjal. (Juhendaja L. Luud.)

UUED LENNUD KESKHARIDUSEGA MATEMAATIKUID

1967. aasta kevadel andsid lõpetajaid juba kolme meie vabariigi keskkooli matemaatika eriklassid. A. H. Tammsaare nimeline Tartu 1. Keskkool saatis ellu neljanda lennu, Tallinna 1. Keskkool teise lennu ja Nõo Keskkool esimese lennu matemaatikuid-programmeerijaid.

A. H. Tammsaare nimelise Tartu 1. Keskkooli matemaatika eriklassi lõpetasid:

1. E r n i t s, Malle
2. H ü t t, Ann
3. I l v e s, Eva
4. K a r e, Linda
5. K a u k v e r, Urve
6. K õ i v, Reet
7. L a a n s a l u, Merike
8. L i i v, Margit
9. L u h t, Epp
10. L ö ö n r e, Toivo
11. M a n d e r, Ülle
12. N ä r i p ä, Hannes
13. P r e e m, Martti
14. R a t n i k, Tiit
15. S e l l i o v, Leevi
16. S ä ä g i, Agnes
17. Z u b s b e r g, Rein
18. T a n n i, Viia
19. T o m i n g a s, Juhan
20. T ä h n a s, Kadri
21. T ä h t, Tiit
22. U r m, Peeter

Tallinna 1. Keskkooli matemaatika eriklassi lõpetasid:

1. A a r n e, Reet
2. G r o s s, Kaato
3. H a l j a s t e, Tiina
4. J ä n e s, Mart
5. K a l l a s, Rein
6. K a n t e r, Mati
7. K e r g e, Andres
8. K r u u s i a u k, Heda
9. K u u s k, Harri
10. L a u l, Peep
11. L i i k, Aili
12. L o i t, Merike
13. M a r t i n, Eve
14. M e r e, Kaja
15. M e r i l a h t, Peeter
16. N e u m a n n, Vallot
17. O t s, Ester
18. O r r o, Riina
19. P a l l a s, Ats
20. P a v e l s o n, Juss
21. R ä t s e p, Aili
22. T a m m i k, Urmas
23. T e l l i s k i v i, Mart
24. T r u u s m a n n, Merike
25. T ä h t, Toomas
26. U u s m a n, Rein
27. V i i k h o l m, Peeter
28. V i i l u p, Enn
29. V o o g l a i d, Aare

Nõo Keskkooli matemaatika eriklassi lõpetasid:

1. A l t m e t s, Evi
2. E i m r e, Rein
3. E s k u s s o n, Kersti
4. E v e r t, Silvi
5. J e n s e n, Mai
6. K a a r d e, Mare
7. K a l d o j a, Ene
8. K o n d, Lembit
9. L a a s, Maire
10. L e p p m e t s, Lembe
11. L o o g a, Mati
12. M e r i l o o, Mihkel
13. M ä n n i k, Urve
14. M ü r k, Iris
15. N a a b e r, Ilme
16. P e e t s o n, Elle
17. P i n t s, Leida
18. P r a n k, Rein
19. R o k k a, Daissa
20. S a a r, Leini
21. S a l u v e e r, Olev
22. S a l u ä ä r, Tõnu
23. S i i r m a n n, Rein
24. T a m m, Andi
25. U b a, Peep
26. V a i n i k k o, Rita
27. V i r u m a n n, Tiina
28. V ä n t e r, Rein.

Eesti NSV-s ilmunud matemaatika-alase kirjanduse nimestik

Jaanuar — märts 1967

(Koostanud M. Suurväli)

RAAMATUD

Ariva, K. ja Rahula, M. **Analüütiline geomeetria.** 1. osa. Trt., 1967. 92 lk. (TRÜ. Algebra ja geomeetria kateeder.) — Trükitud rotaprindil.

Bekker, M. **Ekstreemumülesanded.** Trt., 1967. 36 lk. (TRÜ. Mittestatsionaarne matemaatikakool. Nr. 11.) — Trükitud rotaprindil.

Espenberg, H. **Integraalarvutus.** [2. tr.] Trt., 1967. 52 lk. (Eesti Põllumajanduse Akadeemia.) — Trükitud rotaprindil.

Gelfand, I., Glagoleva, J. ja Kirillov, A. **Koordinaatide meetod.** Tln., «Valgus», 1967. 68 lk. (Füüsika-matemaatika kooli raamatukogu.)

Harjutuste kogumik füüsika, keemia ja matemaatika alalt. [TRÜ üliõpilaskandidaatidele.] Trt., 1967. 64 lk. (TRÜ.) — Trükitud rotaprindil.

Jürimäe, E. **Kompleksmuutuja funktsioonide teooria. II.** Analüütilised funktsioonid. Trt., 1967. 138 lk. (TRÜ. Matemaatilise analüüsi kateeder.) — Trükitud rotaprindil.

Kontrolltöö nr. 6 («Tõenäosusteooria põhimõisteid») **Ülesannete vastused ja lahendused.** Trt., 1967. 15 lk. (TRÜ. Mittestatsionaarne matemaatikakool. Nr. 12.) — Trükitud rotaprindil.

Matemaatika ja kaasaeg. Abimaterjale matemaatika õpetajatele ja õppijatele. XI. Trt. 1966. 115 lk. (Tartu Riiklik Ülikool.)

Sisu: Ü. Lumiste. Ruumi mõiste geomeetrias. — L. Võhandu. Genereerivad funktsioonid ja kombinatoorika. — A. Oja. Imiteerimine uurimismeetodina. — I. Kull, R. Palm. Uut masintõlke ajaloos. — Juurdelõikuskaartide koostamine elektronarvutil. — S. Riives. Hulktahukate jooniste rakendamisest ruumikujutuse arendamisel. — M. Rahula. Parabooli mõningaid omadusi. — S. I. Zetel. Üldistatud kolmnurkarvud, mis on ühtlasi ruutarvud. — Jevgeni Gabovitš. Mittestatsionaarse matemaatikakooli esimene tööaasta. — E. Tamme. Bernhard Riemanni elust ja loomingust. — Ü. Lumiste. Riemann topoloogia ja üldise kõvera ruumi geomeetria loojana. — Jevgeni Gabovitš. Otto Schmidt — suur nõukogude teadlane. — E. Tiit. Mis on tõenäosus? III. — Ü. Lumiste. Sada aastat V. Aleksejevi sünnist. — E. Mitt. Keskkooliõpilaste 13. täppisteaduste olümpiaad. — Ü. Kaasik, E. Vääri. Matemaatilise teksti õigekirjutusest. — E. Tiit. Tõenäosusteooria ja matemaatilise statistika terminitest. — Kroonika. — Bibliograafia. — Ülesandeid.

Prochnow, D. ja Thiess, W. **Protsentarvutuseks ettevalmistavad harjutused.** Hargprogrammi järgi koostatud õppevihik. Tln., «Valgus», 1967. [6], 45 lk. (ENSV Vabariiklik Õpetajate Täiendusinstituut.)

Roos, H. **Diferentsiaalarvutus.** Konspekt kaugüliõpilastele. Tln., 1966. 72 lk. (TPI. Matemaatika kateeder.) — Trükitud rotaprindil.

Roos, H. **Funktsioonid ja nende graafikud.** Konspekt kaugüliõpilastele. Tln., 1966. 47 lk. (TPI. Matemaatika kateeder.) — Trükitud rotaprindil.

Soonets, K. **Tõenäosusteooria ja matemaatiline statistika.** (Majandusteaduskonna üliõpilastele.) Trt., 1967. 194 lk. (TRÜ. Teoreetilise mehhaanika ja astronoomia kateeder.) — Trükitud rotaprindil.

Sõrmus, T. ja Vainikko, G. **Harilikud diferentsiaalvõrrandid.** Trt., 1967. (TRÜ. Matemaatilise analüüsi kateeder.) — Trükitud rotaprindil.

1. 212 lk.
2. 127 lk.

T a m m e, E. **Arvutusmeetodid. V.** Harilikud diferentsiaalvõrrandid. Trt., 1967. 176 lk. (TRÜ. Arvutusmatemaatika kateeder.) — Trükitud rotaprindil.

Täppisteaduste Rahvaülikool. Õppetöö kalenderplaanid. [1966/67. õ.-a.]. Tln., 1967. 8 lk. (TPI. Täppisteaduste Rahvaülikool.) — Trükitud rotaprindil. — Sama ka vene k.

V a h e r, E. **Logaritmid.** II. **Programmõpik.** Pedagoogilise uurimistöö katsematerjal. Trt., 1966. 153—215 lk. (ENSV Haridusministeerium. ENSV Vabariiklik Õpetajate Täiendusinstituut. TRÜ.)

Võrratused. Trt., 1967. 15 lk. (TRÜ. Mittestatsionaarne matemaatikakool. Nr. 10.) — Trükitud rotaprindil.

Т ы н н о в, М. М. **Множители суммируемости в теории рядов Фурье.** Автореферат дисс. на соискание учен. степ. канд. физ.-мат. наук. Тарту, 1967. 11 с. (ТГУ).

ARTIKLID

Eesti NSV Teaduste Akadeemia Toimetised. Füüsika. Matemaatika. Tln., 1967.

Nr. 1. Matemaatika-alased artiklid (vene k., resümeed eesti ja inglise k.):

U l m, S. Maksimumprintsiibist tulenevate rajaülesannete lahendamisest. — U l m, S. Üldistatud diferentssuhetest. I. — P e t e r s o n, I. Lokaalne optimiseerimine statistilise materjali alusel. — P o l l, V. Mitmemuutuja funktsioonide statsionaarsete punktide leidmise meetoditest. — V i c h m a n n, F. Integraalide formaalsest korrutamisest. — P e t e r s e n, I. ja K i k a s, V. Ehitus-sideainete kõvastumisprotsessi modelleerimine matemaatilise statistika meetoditega.

A k k e l, T. Elektronarvuti valib söödaratsioone. — Edasi, 1967, 21. märts.

A l j a n s k i, Jüri. Parandatud viga. [Pime teadlane, füüsik-matemaatik V. Mjatšin. Leningrad. Ajalehest «Pravda».] — Sirp ja Vasar, 1967, 24. veebr.

A l l i k, K. Tüüpilised vead TPI-sse sisseastujate matemaatika eksameil. — Nõukogude Kool, 1967, nr. 1, lk. 35—38.

J o a s o o n e, R. Veidi stenomeetriast [Ungari matemaatiku L. Molnári loodud kiirarvutamise meetodist.] — Nõukogude Õpetaja, 1967, 11. veebr.

K r a s s, A. Võrrandite koostamine 7. ja 8. klassis. — Nõukogude Kool, 1967, nr. 3, lk. 223—228.

K ä r n e r, M. Kümme aastat hiljem. [ENSV Haridusministeeriumi matemaatikakomisjoni tööst.] — Nõukogude Õpetaja, 1967, 4. veebr.

R e i s b e r g, L. Kust leida aega? [Matemaatika õpetamisest 6. klassis.] — Nõukogude Õpetaja, 1967, 11. veebr.

S a v t š e n k o, G. Hinneteta tund. [Samarkandi ülikooli dotsendi R. Habibi katsetest algklassides matemaatika õpetamisel. Ajalehest «Literaturnaja Gazeta».] — Nõukogude Õpetaja, 1967, 11. veebr.

T e r r i, M. Mõningaid mõtteid arvutamisest koolieelikutega. — Nõukogude Õpetaja, 1967, 25. veebr. (Koolieelne Kasvatus nr. 2.)

U s a i, M. Jutt arvust pii [klassivälises töös]. — Nõukogude Kool, 1967, nr. 2, lk. 152—156.

U s a i, M. Kuidas asja parandada? [Matemaatikaõpetajate ülesannetest õpilaste loogilise mõtlemise arendamisel.] — Nõukogude Õpetaja, 1967, 4. veebr.

Л е в и н, М. Легенда о ханойской башне. [О матем. задаче.] — Молодежь Эстонии, 1967, 2 февр.

Л е в и н, М. Задача кавалера де-Мере и теория вероятностей. — Молодежь Эстонии, 1967, 12 янв.

ÜLESANDEID ELEMENTAARMATEMAATIKAST[1]

1. Ühe muna praadimiseks kulub 3 minutit. Mitu minutit kulub kolme muna praadimiseks, kui pannile mahub vaid kaks muna?

2. Kumb on suurem, kas

$$A=\frac{5678901234}{6789012345} \text{ või } B=\frac{5678901235}{6789012347}?$$

3. Tõestada, et $11^{10}-1$ jagub arvuga 100.

4. Lahendada süsteem

$$\begin{cases} x^{x+y}=y^n, \\ y^{x+y}=x^{2n}\cdot y^n \end{cases}$$

eeldusel, et $x>0$, $y>0$ ja $n>0$.

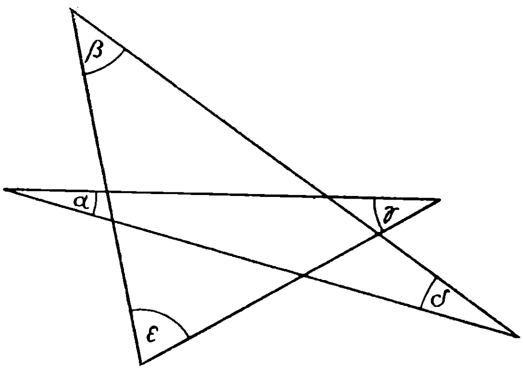
5. Tõestada, et

$$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4.$$

6. Kas on võimalik, et $\sin x=\log\sin x$?

7. Trapetsi alused on a ja b. Leida diagonaalide keskpunkte ühendava lõigu pikkus.

8. Leida arvutuste teel alloleval joonisel märgitud nurkade α, β, γ, δ ja ε summa.



9. Kerasse kujundatud koonuse kõrguse ja kera raadiuse suhe on q. Leida nimetatud kehade ruumalade suhe. Millistes piirides võib muutuda suhe q?

10. Tasandil on antud kolm mitte ühel sirgel asuvat punkti A, B ja C nii, et $AC>BC$. Lõigu AB keskristsirgel valitakse punktid D ja E, nii et nad on samal pool sirget AB kus punkt C, ning $BD=BC$, $AE=AC$. Tõestada, et nurk CBD on suurem kui nurk CAE.

Ülesande 10 koostas **Ü. Lumiste**

[1] Käesoleva aasta vabariikliku ja üleliidulise koolinoorte olümpiaadi lõppvoorude matemaatikaülesanded on toodud lk. 104—105 ning VII ja VIII rahvusvahelise koolinoorte matemaatika olümpiaadi ülesanded lk. 84—86.

KOGUMIKU ÜHETEISTKÜMNENDA VIHIKU ÜLESANNETE LAHENDUSED

Ülesande nr. 1 lahendus. Liites süsteemi kõik võrrandid, saame

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{100} = 0.$$

Liites süsteemi 1., 4., 7., ..., 94., 97. võrrandi, saame

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{99} = 0$$

ning liites süsteemi 2., 5., 8., ..., 95., 98. võrrandi, saame

$$x_2 + x_3 + \ldots + x_{100} = 0.$$

Neist kolmest võrrandist järeldub, et $x_{100} = x_1 = 0$. Nüüd on lihtne leida, et süsteemi lahendiks on

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_{100} = 0.$$

Ülesande nr. 2 lahendus. Võttes võrduses

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n = (x^{10} - x^5 + 1)^{1965}$$

$x = i$, saame

$$(a_0 - a_2 + a_4 - a_6 + \ldots) + (a_1 - a_3 + a_5 - \ldots)i = -i.$$

Seega

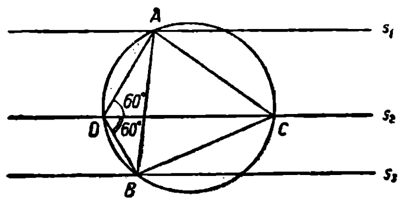
$$a_1 - a_3 + a_5 - a_7 + \ldots = -1.$$

Ülesande nr. 3 lahendus. Kuna $1! = 1$, $1! + 2! = 3$, $1! + 2! + 3! = 9$, $1! + 2! + 3! + 4! = 33$ ja $x > 4$ puhul summa $1! + 2! + ! + \ldots + x!$ väärtuse viimaseks numbriks on 3, siis võib lahendiks olla ainult $x = 1$ ja $x = 3$ (sest y^2 ei saa olla 3-ga lõppev arv). Tähendab, võrrandil on kaks naturaalarvulist lahendit

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \text{ ja } \begin{cases} x = 3 \\ y = 3. \end{cases}$$

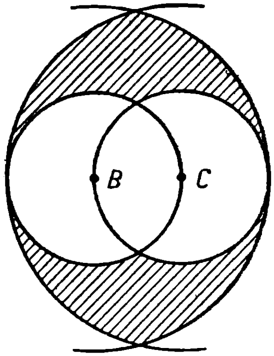
Ülesande nr. 4 lahendus. Tõmbame sirgel s_2 vabalt võetud punktist D lõigud DA ja DB (vt. joon. 1), mis moodustavad sirgega s_2 nurga $60°$. Kolmnurga ABD ümberringjoon lõikugu sirgega s_2 punktis C. Kolmnurk ABC ongi otsitav kolmnurk. Tõepoolest

$$\angle BAC = \angle BDC = 60°,$$
$$\angle ABC = \angle ADC = 60°,$$
$$\angle ACB = 180° - \angle ADB = 60°.$$

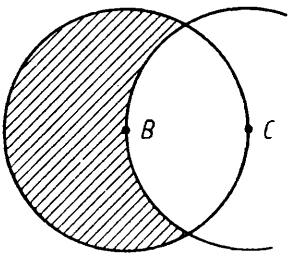


Joonis 1.

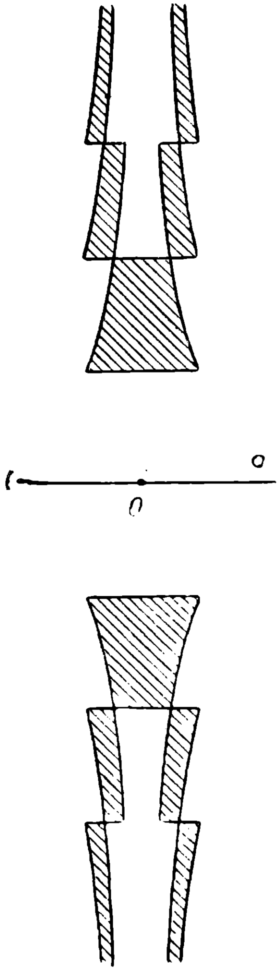
Ülesannete nr. 5—7 lahendused. Joonistel 2—4 on viirutatud piirkonnad, milles võib asuda punkt A vastavalt ülesannetes 5—7 esitatud tingimustel.



Joonis 2.



Joonis 3.



Joonis 4.

BRIDŽIÜLESANNE

Rist on trump ning pärast kuuendat tihi (selle võttis N) kujunes järgmine seis:

	♠ K S ♡ S 7 ♢ E 6 3 ♣ ——	
♠ 10 9 ♡ 10 6 ♢ 10 9 ♣ 8	N W O S	♠ E 8 7 ♡ 8 ♢ K S 2 ♣ ——
	♠ 6 5 ♡ 5 ♢ —— ♣ 9 7 6 5	

Lepingu täitmiseks peab S võtma kõik ülejäänud seitse tihi. Kuidas seda teha? (Lahendus on toodud leheküljel 121.)

LAHENDUS ÜLESANDELE TÕENÄOSUSTEOORIAST

(ülesanne vt. Matemaatika ja kaasaeg, XI, lk. 95)

1. variant. Lahendus, mis sobib matemaatikutele, võiks olla järgmine (vt. joonis).

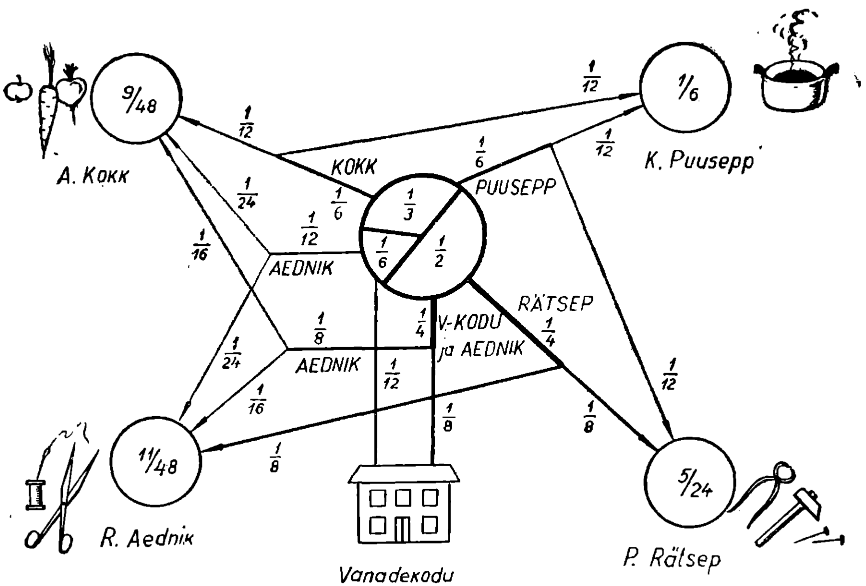
I. Paarikaupa võetult on miljonäril ja KOKAL, miljonäril ja AEDNIKUL ning miljonäril ja RÄTSEPAL kummalgi 50% tõenäosust hilisemaks uppumiseks. Vastavalt sellele tuleb jaotada ka pärandus.

II. Edasi jaotatakse KOKALE kuuluv osa A. Koka ja ameti poolest koka vahel ning analoogiliselt ka teistel juhtudel.

III. Nüüd arvutatakse igale pärijale kuuluv osa, kusjuures iga isik saab nii oma ameti kui ka oma nime järgi.

Päranduse jaotus tuleb järgmine:

1. Aednik A. Koka	pärijad saavad	$\frac{9}{48}$	pärandusest ehk	225 000	naela.
2. Kokk K. Puusepa	„ „	$\frac{8}{48}$	„ „	200 000	„
3. Puusepp P. Rätsepa	„ „	$\frac{10}{48}$	„ „	250 000	„
4. Rätsep R. Aedniku	„ „	$\frac{11}{48}$	„ „	275 000	„
5. Londoni vanadekodu saab		$\frac{10}{48}$	„ „	250 000	„



2. variant. Nagu teada, on juristid väga vormi küljes kinni ja seda eriti Inglismaal, kus vanad traditsioonid on visad kaduma. Pealegi ei nähtu ülesandest, millal laevahukk oli. On põhjendatud kartus, kas Inglismaa ülemkohus üldse tõenäosusteooriat arvestas. Seepärast on mõtet pakkuda ka alljärgnev lahendusvariant, milles eeldatakse, et nii puusepp, rätsep, kokk kui ka aednik ei olnud miljonäri surma ajal enam tema teenistuses. Sellisel juhul saaksime päranduse järgmise jaotuse:

1. Aednik A. Koka	pärijad saavad	$\frac{3}{24}$	pärandusest ehk	150 000	naela.
2. Kokk K. Puusepa	„ „	$\frac{4}{24}$	„ „	200 000	„
3. Puusepp P. Rätsepa	„ „	$\frac{4}{24}$	„ „	200 000	„
4. Rätsep R. Aedniku	„ „	$\frac{3}{24}$	„ „	150 000	„
5. Londoni vanadekodu saab		$\frac{10}{24}$	„ „	500 000	„

J. Milve

Toimetuselt. *J. Milve saadetud lahendusvariantidest tuleks õigeks lugeda 1. variant, sest 2. variandis pole täielikult arvestatud märkust, et kahe võimaluse olemasolu korral loetakse need võrdvõimalikeks.*

BRIDŽIÜLESANDE LAHENDUS

(ülesanne vt. lk. 119)

N käib ruutu emanda, mille O peab kuningaga katma ja S trumpab. S käib nüüd risti üheksa (N viskab pada sõduri ja O parim kaitse on visata pada seitse) ning seejärel veel ühe risti. W ei või nüüd visata ruutut (siis oleks ruutu sõdur lõigatav) ega ärtut ja peab seega viskama ühe pada. N viskab ära ärtu seitsme ning O oma nüüd juba tarbetu ärtu kaheksa. Nüüd käib S ärtu viie, millega O on sundviskes: kui ta viskab pada kaheksa, siis jääb S-il teine pada tegema, kui ta aga viskab ruutu, siis jääb N-il teine ruutu tegema.

RISTARVUD

Täita ruudud numbritega nii, et veergude summad võrduksid vastavates ridades saadud tulemustega. Seejuures ükski arv ei alga nulliga ning tehted tuleb sooritada nende esinemise järjekorras.

100	:	1□	×	□□	+	□	=	3□7
□□	+	□	:	□	+	1	=	3□
□□	−	□	:	9	+	□2	=	□□
□□	+	□	:	□	−	□□	=	□□
□9□	+	□7	+	□□	+	□□	=	□□□

SISUKORD

KROONIKA

BIBLIOGRAAFIA

ÜLESANDEID

Тартуский государственный университет
г. Тарту, ул. Юликооли, 18
МАТЕМАТИКА И СОВРЕМЕННОСТЬ. XIV
Вспомогательные материалы для преподающих
и изучающих математику
Toimetaja E. Tamme
Korrektor E. Oja
Ladumisele antud 30. VIII 1967. Trükkimisele antud 6. VI 1968. Vihikupaber 60×90, 1/16. Kohila Paberivabrik. Trükipoognaid 7,75 + 1 kleebis. Arvestuspoognaid 8,3. Trükiarv 3500. MB-04347. Tellimise nr. 5811. Hans Heidemanni nim. trükikoda, Tartu, Ülikooli 17/19. II.
Hind 35 kop.
2—2