0001101

Matemaatika ja kaasaeg

1011000

TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

MATEMAATIKA JA KAASAEG

XIII

ABIMATERJALE MATEMAATIKA ÕPETAJATELE JA ÕPPIJATELE

TARTU 1967

RUUMI MÕISTE GEOMEETRIAS[1]

Ü. Lumiste

Geomeetria kõverpinnal

Üheaegselt esimese mitteeukleidilise ruumi mõiste loomisega ja selle ruumi geomeetria ülesehitamisega N. I. Lobatševski ja J. Bolyai poolt 1820. aastail sai alguse uus suund geomeetria arengus, mis mõne aja pärast viis veelgi suurema üldistuseni — muutuva kõverusega ruumi geomeetriani. Suuna algatajaks oli XIX sajandi alguse silmapaistvamaid matemaatikuid C. Fr. Gauss, kes teatavasti esimesena tajus geomeetria-alase pärandi lahtimõtestamisel uue, mitteeukleidilise geomeetria olemasolu võimalikkust, kuid ei tihanud seda revolutsioonilist avastust avalikkusele veel otse välja ütelda. Oma publitseeritud töödes arendas Gauss probleemi mõnevõrra teises suunas kui Lobatševski ja Bolyai. Ta jättis puudutamata ruumi geomeetria klassikalised põhiseisukohad, kuid kahemõõtmelise geomeetria ees avas ta sootuks uued arenguperspektiivid, mis hiljem B. Riemanni loomingus avanesid ka ruumi geomeetriale.

Aastatel 1820—1830 oli Gaussi teaduslikus tegevuses valdavaks geodeesia. Tõuke selleks sai ta talle antud ülesandest koostada Hannoveri piirkonna detailne kaart. Keeruka ettevõtte praktilise külje organiseerimise kõrval süvenes Gauss temale omase läbinägelikkusega ülesande teoreetilistesse alustesse.

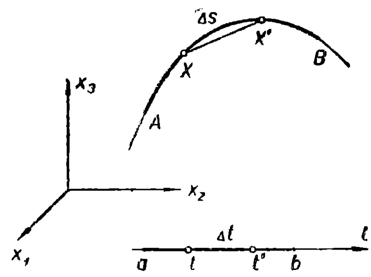
Geodeesia tegeleb teatavasti maapealsete objektide vaheliste kauguste ja nurkade mõõtmisega ning uurib seega seda geomeetriat, mis kehtib Maa pinnal. Seejuures kerkivate teoreetiliste probleemide lahtimõtestamisel kasutati kuni XIX sajandini Maa pinna mõnda lihtsustatud mudelit — kas sfääri või pöördellipsoidi. Gauss seadis eesmärgiks arvestada sel puhul täpsemini Maa tegelikku kuju ja pani ette võtta pinna teoreetilise mudelina aluseks raskusjõu potentsiaali tasemepind.[2] See pind, millele J. B. Listing andis 1873. a. nimeks geoid, ei ühti enam mõne varem uuritud lihtsa pinnaga, mistõttu need vahendid, millega varem käsitleti

[1] Järg, algus vt. Matemaatika ja kaasaeg, XI, lk. 3—9; XII, lk. 19—32.

[2] s. t. pind, mille praktiliselt realiseerib rahuliku ookeani pind, kui see mõttes laiendada ka maismaa alla (võib näiteks kujutleda, et antud punkti läbib ookeanidega ühendatud kanal).

geomeetriat sfääril või ellipsoidil, ütlesid sellisel üldisel lähenemisel üles. Oli vaja välja töötada meetodid üldisel kõverpinnal kehtiva geomeetria — selle pinna niinimetatud sisegeomeetria teoreetiliseks kirjeldamiseks ja analüüsimiseks. Selle ülesande lahendas Gauss hiilgavalt oma 1827. a. avaldatud ulatuslikus töös *«Disquisitiones generales circa superficies curvas»* (Üldisi uurimusi kõveratest pindadest).

Püüame alljärgnevalt põgusalt tutvustada Gaussi põhiideid ja -tulemusi. Nende vähegi sügavam esitamine on mõeldamatu ilma vastava analüütilise aparatuurita, mistõttu meil tuleb kõigepealt tähelepanu pöörata viimase arendamisele. Lugejalt eeldatakse siin matemaatilise analüüsi mõningate mõistete tundmist.



Joonis 1.

Kaugusi pinna kahe punkti vahel saab mõõta neid punkte pinnal ühendavaid kõveraid mööda. Seetõttu on esmajoones vaja selgitada, kuidas on võimalik leida kõvera kaare pikkust. Viimast mõistame siin intuitiivselt kui kaarele paigutatud niidi pikkust pärast selle sirgeks tõmbamist ja joonlauale asetamist [3].

Olgu ruumis antud punkte A ja B ühendav kaar, mida võib kujutleda kui arvtelje lõigu $[a, b]$ pideva deformatsiooni tulemust (joon. 1). Sel korral igale reaalarvule t sellelt lõigult vastab teatav punkt X vaadeldaval kaarel, sellega on aga omakorda üheselt seotud kaare $\widehat{AX}$ pikkus s. Tekib vastavus $t \to s$, nii et s on muutuja t teatav funktsioon $s = s(t)$. Seejuures peab funktsioon $s(t)$ rahuldama järgmist tingimust: kui kaare punkt X', mis vastab muutuja väärtusele $t' = t + \Delta t$, liigub mööda kaart punktini X, siis on kaare $\widehat{XX'}$ pikkuse Δs ja kõõlu XX' pikkuse $|XX'|$ piirväärtuseks arv 1:

$$\lim_{X' \to X} \frac{\Delta s}{|XX'|} = 1.$$

See nõue väljendab seda näitlikku tõsiasja, et väga väike kaar langeb praktiliselt ühte oma otspunkte ühendava kõõluga.

Võtame nüüd kasutusele ristkoordinaadid ruumis. Sel korral vastab punktile X kolm arvu x_1, x_2, x_3, nii et kokkuvõttes tekib kolm vastavust: $t \to x_i$, $i = 1, 2, 3$. Järelikult x_i on muutuja t funktsioon: $x_i = x_i(t)$. Et punkti X' koordinaatideks on $x_i(t')$, siis ana-

[3] Täpsema käsitluse võib asjast huvitatud lugeja leida näiteks õpikust: Ü. Lumiste. Diferentsiaalgeomeetria. ERK, Tallinn, 1963, lk. 50—54.

lüütilisest geomeetriast tuttava kahe punkti vahelise kauguse valemi järgi:

$$|XX'| = \sqrt{[x_1(t') - x_1(t)]^2 + [x_2(t') - x_2(t)]^2 + [x_3(t') - x_3(t)]^2}.$$

Siin on kasulik tähistada $x_i(t') - x_i(t) = \Delta x_i$; tingimuse saame siis kirja panna järgmiselt:

$$\lim_{t' \to t} \frac{\Delta s}{\sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + (\Delta x_3)^2}} = 1.$$

Jagades piirväärtuse märgi all oleva murru lugejat ja nimetajat suurusega $\Delta t = t' - t$, pidades silmas piirväärtuse omadusi ja arvestades, et $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = s'(t)$, $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x_i}{\Delta t} = x'_i(t)$ (kus paremal on funktsioonide tuletised), saame tingimusele kuju

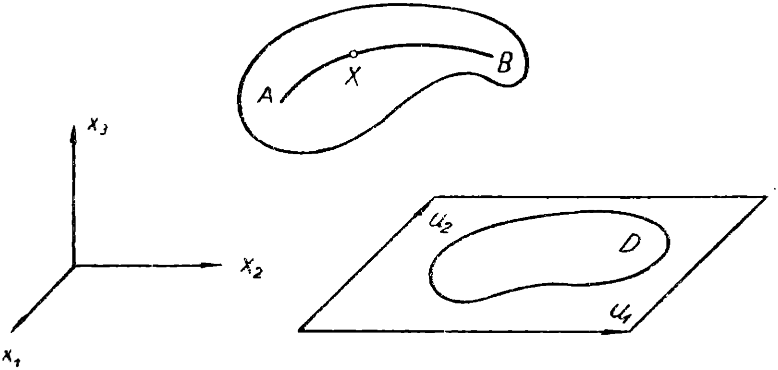
$$\frac{s'(t)}{\sqrt{[x'_1(t)]^2 + [x'_2(t)]^2 + [x'_3(t)]^2}} = 1.$$

Siit saame avaldada otsitava funktsiooni $s(t)$ tuletise ja selle integreerimisel ka funktsiooni enda:

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{[x'_1(t)]^2 + [x'_2(t)]^2 + [x'_3(t)]^2}\, dt.$$

Ühtlasi saame avaldada diferentsiaali $ds = s'(t)\,dt$; et $x'_i(t)\,dt = dx_i$, siis

$$ds = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}. \qquad (1)$$



Joonis 2.

Vaatleme nüüd järgnevalt teatavat pinda, mida võib kujutleda kui mingi u_1u_2-tasandil antud piirkonna D pideva deformatsiooni tulemust, ja sellel kaart AB (joon. 2). Piirkonna D igale punktile (u_1, u_2) vastab siis teatav punkt X pinnal, sellele aga omakorda kolm koordinaati x_i, $i = 1, 2, 3$. Tekivad vastavused $(u_1, u_2) \to x_i$, milledest igaüks määrab funktsiooni $x_i = x_i(u_1, u_2)$. Kui pinnal on antud kõvera kaar AB — t-telje lõigu $[a, b]$ pideva deformatsiooni tulemus —, siis on lisaks eelnevale määratud ka funktsioonid $u_1 = u_1(t)$, $u_2 = u_2(t)$, kusjuures piki kõverat on

$$x_i = x_i(u_1(t),\ u_2(t)).$$

Liitfunktsiooni diferentseerimise eeskirja arvestades leiame, et

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial x_i}{\partial u_2} du_2.$$

Kaare pikkuse diferentsiaali ds arvutamiseks saame seega valemi:

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial x_i}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial x_i}{\partial u_2} du_2 \right)^2 =$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial x_i}{\partial u_1} \right)^2 \right] du_1^2 + 2 \left[\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial x_i}{\partial u_1} \frac{\partial x_i}{\partial u_2} \right] du_1\, du_2 +$$

$$+ \left[\sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial x_i}{\partial u_2} \right)^2 \right] du_2^2,$$

milles du_1^2, $2du_1du_2$, du_2^2 kordajad tähistatakse tavaliselt g_{11}, g_{12} $(= g_{21})$, g_{22}, nii et lõplikult

$$ds^2 = g_{11}\, du_1^2 + 2g_{12}\, du_1\, du_2 + g_{22}\, du_2^2$$

ehk

$$ds^2 = \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} g_{\alpha\beta}\, du_\alpha\, du_\beta. \tag{2}$$

Selles valemis nimetatakse paremal pool olevat erilist avaldist — nn. diferentsiaalruutvormi — pinna meetriliseks vormiks. Kõige lihtsam kuju on sellel vormil tasapinna $x_3 = 0$ korral — siis võib võtta $x_1 = u_1$, $x_2 = u_2$, $x_3 = 0$ ja valemist (1) järeldub, et $ds^2 = du_1^2 + du_2^2$. Üldiselt on paremal pool kordajateks $g_{\alpha\beta}$ muutujate u_1, u_2 teatavad funktsioonid. Näiteks sfääri korral on $= R\cos\frac{u_1}{R}\cos\frac{u_2}{R}$, $x_2 = R\cos\frac{u_1}{R}\sin\frac{u_2}{R}$, $x_3 = R\sin\frac{u_1}{R}$ (kus $\varphi = \frac{u_1}{R}$ ja $\psi = \frac{u_2}{R}$ on tavalised geograafiline laius ja pikkus) ning

$$ds^2 = du_1^2 + \left(\cos\frac{u_1}{R} \right)^2 du_2^2.$$

Gaussi põhiliseks teeneks geomeetrias on järgmise fakti kindlakstegemine: geomeetria pinnal — selle pinna nn. sisegeomeetria määratakse täielikult pinna meetrilise vormiga, kusjuures pinnast polegi õieti muud vaja teada kui ainult seda vormi. Teisiti öeldes: pinna meetrilise vormi teadmine võimaldab määrata kõiki pinna sisegeomeetria mõisteid ja suurusi. Näiteks funktsioonidega $u_\alpha(t)$ määratud kõvera kaare pikkus s väärtustele $t = a$ ja $t = b$ vastavate punktide vahel on arvutatav valemist

$$s = \int_a^b \sqrt{\sum_{\alpha, \beta=1}^{2} g_{\alpha\beta}(u_1(t), u_2(t)) \, [u'_\alpha(t)] \, [u'_\beta(t)]} \, dt,$$

mis on võrduse (2) vahetu järeldus. Kahe lõikuva kõvera vaheline nurk a pinnal on arvutatav valemist

$$\cos a = \frac{\sum\limits_{\alpha, \beta=1}^{2} g_{\alpha\beta} \, du_\alpha \delta u_\beta}{\sqrt{\sum\limits_{\alpha, \beta=1}^{2} g_{\alpha\beta} \, du_\alpha \, du_\beta} \sqrt{\sum\limits_{\alpha, \beta=1}^{2} g_{\alpha\beta} \delta u_\alpha \delta u_\beta}},$$

(mille paremal pool tuleb kõik suurused arvutada lõikepunktis, seejuures du_α piki üht ja δu_α piki teist kõverat), piirkonnale D vastava pinnaosa pindala S avaldub kujul

$$S = \iint_D \sqrt{g_{11} g_{22} - g_{12}^2} \, du_1 \, du_2$$

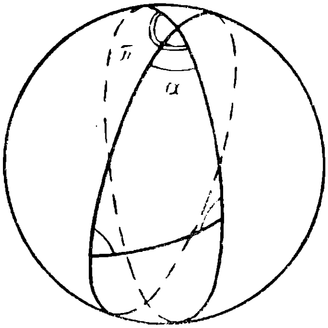
jne.[4]

Nende valemite näitlikku tähendust võib H. Helmholzi järgi piltlikult selgitada järgmiselt. Oletame, et pinnal eluneb kujuteldav mõistuslik olend, kes on kahemõõtmeline ja seetõttu ei ole ümbritsevat ruumi üldse võimeline tajuma. See fiktiivne olend, liikudes pinnal ringi pikkusi, nurki ja pindalasid mõõtes, kujundaks endale nähtavasti mingi geomeetria, mis kirjeldab tema kahemõõtmelist «kõverat» maailma. Seejuures ühtivad väärtused, mida ta saab pikkuste, pindalade jne. jaoks, nende väärtustega, mis määratakse eespool toodud valemitega.

Tutvustame veel mõningaid pinna sisegeomeetria mõisteid. Ühest punktist teise võib liikuda väga mitmesuguste kõverate kaari mööda. Seda kaart, mida mööda liikumistee on lühim, nimetatakse geodeetiliseks kaareks. Tasapinna sisegeomeetrias (eukleidilises planimeetrias) on selliseks kaareks sirglõik, sfääri sisegeomeetrias suurringjoone kaar jne. Kolme punkti korral võib tõmmata neid punkte paarikaupa ühendavad geodeetilised kaared ja sel viisil moodustada nn. geodeetiline kolmnurk. Sfääril-gloobusel

[4] Viimase kahe valemi põhjenduse võib leida allviites[3] mainitud õpikust, lk. 124—128.

moodustavad sellise kolmnurga näiteks kahe meridiaani kaared poolusest kuni ekvaatorini ja nende otspunkte ekvaatoril ühendav kaar. Eespool toodud valemid võimaldavad antud meetrilise vormi järgi arvutada geodeetilise kolmnurga pindala S ja sisenurgad α, β, γ. Sisenurkade summa ei tarvitse seejuures enam võrduda sirgnurgaga π. Näiteks see kolmnurk sfääril-gloobusel, millest oli juttu eespool, on kahe täisnurkse sisenurgaga, millele lisandub kolmanda sisenurgana nurk meridiaanide vahel poolusel. Suurust $\delta = \alpha + \beta + \gamma - \pi$ nimetatakse geodeetilise kolmnurga nurgadefektiks. Tasandil see suurus on alati võrdne nulliga (nagu näidatakse juba koolis), sfääril aga osutub positiivseks ja võrdeliseks geodeetilise kolmnurga pindalaga S:



Joonis 3.

$$\delta = \frac{1}{R^2} S.$$

Viimast väidet ei ole raske põhjendada. Olgu sfääril antud kaks suurringjoont, mis moodustagu oma lõikepunktis nurga α (joon. 3). Nende suurringjoonte tasandid lõikavad kerast välja kaks «viilu», mille kummagi pindala σ sfääril suhtub poolsfääri pindalasse $2\pi R^2$ nagu $\alpha : \pi$, s. t. $\sigma : 2\pi R^2 = \alpha : \pi$; siit $\sigma = 2\alpha R^2$. Kahe «viilu» pindala kokku on siis $2\sigma = 4\alpha R^2$. Vaatleme nüüd selliseid «viile» geodeetilise kolmnurga kõikide sisenurkade korral. Nende kogupindala on ühelt poolt $4\alpha R^2 + 4\beta R^2 + 4\gamma R^2 = 4R^2(\alpha + \beta + \gamma)$. Lihtne on veenduda, et «viilud» katavad kogu sfääri, seejuures antud kolmnurga ja temaga diametraalselt vastupidise kolmnurga kummagi kolmekordselt. Seega on nende kogupindalaks teiselt poolt $4\pi R^2 + 4S$, nii et kokkuvõttes

$$4R^2(\alpha + \beta + \gamma) = 4\pi R^2 + 4S.$$

Siit, tõepoolest

$$\delta = \frac{1}{R^2} S.$$

Võrdetegurit $K = \frac{1}{R^2}$ nimetatakse sfääri täiskõveruseks ehk Gaussi kõveruseks. Saadud seosest nähtub muide, et sfääri sisegeomeetrias puudub sarnasus — kui selles kahel kolmnurgal on ühesugused sisenurgad, siis on neil ka ühesugune pindala!

Üldise pinna sisegeomeetrias ei ole geodeetilise kolmnurga nurgadefekt seotud nii lihtsalt kolmnurga pindalaga ja etteantud küljepikkuste korral võib oluliselt sõltuda ka kolmnurga asendist (kongruentsuse mõiste pinna sisegeomeetrias üldiselt puudub). Seetõttu eelistatakse siin vaadelda suhte $\delta : S$ piirväärtust eeldusel, et geodeetiline kolmnurk (tähistame selle näiteks Δ) tõmbub kokku punktiks X. Seda piirväärtust $\lim\limits_{\Delta \to X} \frac{\delta}{S} = K$ nimetatakse pinna Gaussi kõveruseks, sest Gauss oli esimene, kes näitas 1827. aastal, kuidas on võimalik suurust K arvutada pinna meetrilise vormi kaudu.

Üldisel kujul on Gaussi valem kõveruse K jaoks üpris keeruline. Suhteliselt lihtne on ta juhul, kui meetrilisel vormil on kuju

$$ds^2 = du_1^2 + G\, du_2^2;$$

seejuures näitas Gauss, et sellisesse kujju saab meetrilise vormi teisendada iga pinna korral. Siis

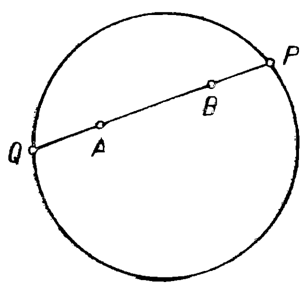
$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u_1^2}. \tag{3}$$

Veendume näiteks, et sfääri korral saame sellest valemist tõepoolest tulemuseks, et $K = \frac{1}{R^2}$. Selleks meenutame sfääri meetrilist vormi ja märgime, et selles $G = \left(\cos \frac{u_1}{R}\right)^2$; järelikult $\sqrt{G} = \cos \frac{u_1}{R}$, $\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u_1^2} = -\frac{1}{R^2} \cos \frac{u_1}{R}$. Siit saamegi kohe soovitud tulemuse. Sfäär kannab endal seega positiivse konstantse kõverusega sisegeomeetriat. Niisuguseid geomeetriaid, milles kõverus on kõikjal positiivne, nimetatakse üldiselt elliptilist tüüpi geomeetriateks.

Lobatševski tasandi kõverus

Lobatševski tasandi jaoks on meil eespool konstrueeritud mudel eukleidilise tasandi ringjoone sees. Punktide A ja B vaheline kaugus $|AB|$, teisiti öeldes, meetrika Lobatševski tasandil, on selles mudelis määratud erilise valemiga (joon. 4)

$$|AB| = k \log\left(\frac{AP}{AQ} : \frac{BP}{BQ}\right).$$



Joonis 4.

Gaussi tulemust kahemõõtmelise geomeetria kõveruse arvutamise kohta võib nüüd kasutada ka Lobatševski tasandi kõveruse leidmiseks. (Kõverus ise on siin muidugi tõlgendatav täpselt samuti nagu pinna sisegeomeetrias kolmnurga nurgadefekti ja pindala suhte piirväärtusena.)

Kõigepealt tuleb leida Lobatševski tasandi meetriline vorm — kaaredifferentsiaali ruudu ds^2 avaldis koordinaatide ja nende diferentsiaalide kaudu. Koordinaatideks võib esialgu valida ristkoordinaadid eukleidilisel tasandil. Nendes koordinaatides on Lobatševski tasandi mudelit ääristava ringjoone võrrandiks $x_1^2+x_2^2=r^2$.

Esimeseks etapiks teel eesmärgile on kahe punkti $A(a_1, a_2)$ ja $B(b_1, b_2)$ vahelise kauguse $|AB|$ avaldamine nende punktide koordinaatide kaudu. Siin aitab meid järgmine tähelepanek. Kauguse valemi paremas pooles oleva logaritmitava avaldise võib kirjutada kujul

$$\frac{AP}{PB}:\frac{AQ}{QB};$$

ta on järelikult kahe lihtsuhte jagatis, millest kumbki näitab, missuguses suhtes punkt P või Q jagab lõigu AB. Seda lõiku suhtes λ jagava punkti X koordinaadid avalduvad teatavasti kujul

$$x_\alpha=\frac{a_\alpha+\lambda b_\alpha}{1+\lambda}, \quad \alpha=1, 2.$$

Meid huvitavad punktid P ja Q asuvad ringjoonel võrrandiga $x_1^2+x_2^2=r^2$, nende puhul peab suhe λ seetõttu rahuldama võrrandit

$$\left(\frac{a_1+\lambda b_1}{1+\lambda}\right)^2+\left(\frac{a_2+\lambda b_2}{1+\lambda}\right)^2=r^2.$$

Siit saame λ jaoks ruutvõrrandi

$$\sigma_{BB}\lambda^2+2\sigma_{AB}\lambda+\sigma_{AA}=0,$$

kus $\sigma_{XY}=r^2-x_1y_1-x_2y_2$. Vajalik lihtsuhete jagatis, mille logaritmimine annab suuruse $\frac{1}{k}|AB|$, on selle võrrandi lahendite suhe, mistõttu

$$|AB|=k\log\frac{-\sigma_{AB}-\sqrt{\sigma_{AB}^2-\sigma_{AA}\sigma_{BB}}}{-\sigma_{AB}+\sqrt{\sigma_{AB}^2-\sigma_{AA}\sigma_{BB}}}.$$

Olemegi saanud $|AB|$ jaoks avaldise A ja B koordinaatide kaudu. Edaspidise huvides on kasulik seda avaldist mõnevõrra teisendada. Läheme selleks üle naturaallogaritmidele, kasutades asjaolu, et alati leidub konstant R, nii et $k\log a=\frac{1}{2}R\ln a$ iga reaalarvu $a>0$ korral. Viimasele võrdusele võib siis anda kuju

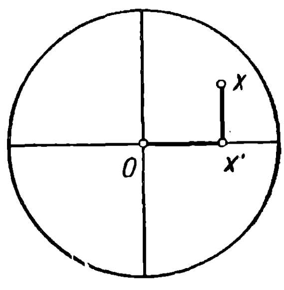
$$e^{\frac{2|AB|}{R}}=\frac{-\sigma_{AB}-\sqrt{\sigma_{AB}^2-\sigma_{AA}\sigma_{BB}}}{-\sigma_{AB}+\sqrt{\sigma_{AB}^2-\sigma_{AA}\sigma_{BB}}};$$

järelikult on

$$\operatorname{th}\frac{|AB|}{R}=\frac{e^{\frac{2|AB|}{R}}-1}{e^{\frac{2|AB|}{R}}+1}=\frac{\sqrt{\sigma_{AB}^2-\sigma_{AA}\sigma_{BB}}}{\sigma_{AB}}$$

ja

$$\operatorname{ch}\frac{|AB|}{R}=\frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2\frac{|AB|}{R}}}=\frac{\sigma_{AB}}{\sqrt{\sigma_{AA}\sigma_{BB}}}.$$



Joonis 5.

Saadud valem võimaldab kõige lihtsamini arvutada kaugust $|AB|$, kui on antud punktide A ja B ristkoordinaadid eukleidilisel tasandil. Lobatševski tasandi meetrilise vormi saamiseks on kasulik parempoolset avaldist veelgi teisendada, nimelt minna üle uutele koordinaatidele, mille absoluutväärtused oleksid kaugusteks juba Lobatševski tasandil. Tähistame selleks punktide $O(0, 0)$, $X'(x_1, 0)$ ja $X(x_1, x_2)$ korral $|OX'| = |u_2|$, $|XX'| = |u_1|$ (joon. 5). Siis eespool saadud valemite järgi

$$\operatorname{th}\frac{|u_2|}{R} = \frac{\sqrt{r^4 - r^2(r^2 - x_1^2)}}{r^2} = \frac{|x_1|}{r}$$

$$\operatorname{th}\frac{|u_1|}{R} = \frac{\sqrt{(r^2 - x_1^2)^2 - (r^2 - x_1^2)(r^2 - x_1^2 - x_2^2)}}{r^2 - x_1^2} = \frac{|x_2|}{\sqrt{r^2 - x_1^2}}$$

Kui siin u_2 ja u_1 märgid lugeda ühtivaiks vastavalt x_1 ja x_2 märkidega, siis saame

$$x_1 = r\operatorname{th}\frac{u_2}{R},$$

$$x_2 = r\frac{\operatorname{th}\frac{u_1}{R}}{\operatorname{ch}\frac{u_2}{R}}.$$

Need valemid teostavad ülemineku endistelt ristkoordinaatidelt x_1, x_2 eukleidilisel tasandil uutele koordinaatidele u_1 ja u_2 Lobatševski tasandil.

Olgu punktide $A(a_1, a_2)$ ja $B(b_1, b_2)$ uuteks koordinaatideks vastavalt (u_1, u_2) ja (v_1, v_2); siis

$$\sigma_{AB} = r^2 - a_1b_1 - a_2b_2 = r^2\frac{\operatorname{ch}\frac{u_2}{R}\operatorname{ch}\frac{v_2}{R} - \operatorname{sh}\frac{u_2}{R}\operatorname{sh}\frac{v_2}{R} - \operatorname{th}\frac{u_1}{R}\operatorname{th}\frac{v_1}{R}}{\operatorname{ch}\frac{u_2}{R}\operatorname{ch}\frac{v_2}{R}}$$

$$\sigma_{AA} = r^2 - a_1^2 - a_2^2 = \frac{r^2}{\operatorname{ch}^2\frac{u_1}{R}\operatorname{ch}^2\frac{u_2}{R}}$$

ning seetõttu

$$\operatorname{ch}\frac{|AB|}{R} = \operatorname{ch}\frac{u_1}{R}\operatorname{ch}\frac{v_1}{R}\left(\operatorname{ch}\frac{u_2}{R}\operatorname{ch}\frac{v_2}{R} - \operatorname{sh}\frac{u_2}{R}\operatorname{sh}\frac{v_2}{R} - \operatorname{th}\frac{u_1}{R}\operatorname{th}\frac{v_1}{R}\right).$$

Saadud valem võimaldab arvutada kahe punkti vahelist kaugust Lobatševski tasandil uutes koordinaatides. Selleks et siit saada meetrilist põhivormi, tuleb punktina B vaadelda punktile A mööda mingit kõverat liginevat punkti, tähistada $v_1 = u_1 + du_1$, $v_2 = u_2 + du_2$, asendada $|AB|$ (mis praegu on $|XX'|$ osas) temaga ekvivalentse suurusega ds, võtta võrduse mõlemal poolel reaksarendused ning võrrelda sama järku suurusi. Pärast reaksarenduste asendamist saame

$$1+\frac{ds^2}{2R^2}+\ldots=$$

$$=\operatorname{ch}\frac{u_1}{R}\left(\operatorname{ch}\frac{u_1}{R}+\operatorname{sh}\frac{u_1}{R}\frac{du_1}{R}+\frac{1}{2}\operatorname{ch}\frac{u_1}{R}\frac{du_1^2}{R^2}+\ldots\right)\times$$

$$\times\left[\operatorname{ch}\frac{u_2}{R}\left(\operatorname{ch}\frac{u_2}{R}+\operatorname{sh}\frac{u_2}{R}\frac{du_2}{R}+\frac{1}{2}\operatorname{ch}\frac{u_2}{R}\frac{du_2^2}{R^2}+\ldots\right)-\right.$$

$$-\operatorname{sh}\frac{u_2}{R}\left(\operatorname{sh}\frac{u_2}{R}+\operatorname{ch}\frac{u_2}{R}\frac{du_2}{R}+\frac{1}{2}\operatorname{sh}\frac{u_2}{R}\frac{du_2^2}{R^2}+\ldots\right)-$$

$$\left.-\operatorname{th}\frac{u_1}{R}\left(\operatorname{th}\frac{u_1}{R}+\frac{du_1}{R\operatorname{ch}^3\frac{u_1}{R}}-\frac{1}{R^2}\frac{\operatorname{sh}\frac{u_1}{R}}{\operatorname{ch}^3\frac{u_1}{R}}du_1^2+\ldots\right)\right].$$

Siin 0- ja 1-järku liikmete võrdlemisel saame samasused, 2-järku liikmete võrdlemine aga annab tulemuseks

$$ds^2=du_1^2+\left(\operatorname{ch}\frac{u_1}{R}\right)^2du_2^2.$$

Olemegi leidnud Lobatševski tasandi meetrilise vormi ja kohe kõige lihtsamal kujul. Lobatševski tasandi kõverus on nüüd arvutatav Gaussi valemi järgi. Nimelt on praegu $\sqrt{G}=\operatorname{ch}\frac{u_1}{R}$, mistõttu

$$\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u_1^2}=\frac{1}{R^2}\operatorname{ch}\frac{u_1}{R}$$

ja

$$K=-\frac{1}{R^2}.$$

Nagu näha, on Lobatševski tasandi kõverus konstantne ja negatiivne[5].

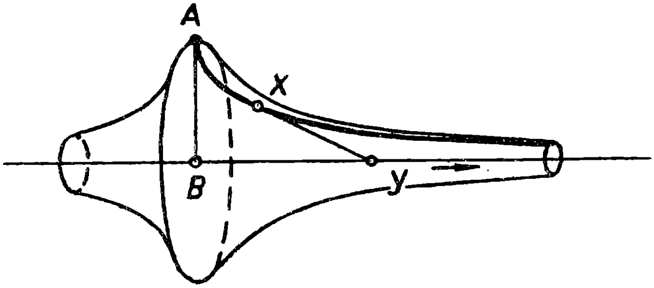
Saadud tulemus näitab, et Lobatševski planimeetria teatavas mõttes täiendab eukleidilist geomeetriat ja geomeetriat sfääri pinnal: kui kahes viimases on vastavalt $K=0$ ja $K=\text{const}>0$, siis Lobatševski planimeetrias on $K=\text{const}<0$. Kahe varem tuttava geomeetria puhul on teada pinnad eukleidilises kolmemõõtmelises ruumis, millel sellised planimeetriad realiseeritakse — näiteks tasand ja sfäär. Tekib loomulik küsimus: kas on võimalik leida sellist pinda, mille sisegeomeetriaks oleks Lobatševski planimeetria?

Et me eespool toodud arvutustes leidsime märksa rohkem, kui otsisime — enne Lobatševski tasandi kõveruse K leidmist saime kätte ka selle tasandi meetrilise vormi, mis teatavas mõttes määrab kogu Lobatševski planimeetria —, siis taandub küsimus nüüd järgnevale: kas on eukleidilises kolmemõõtmelises ruumis olemas pinda, millel oleks sama meetriline vorm nagu Lobatševski tasandil?

Niisuguseid pindu on tõepoolest leitud — nendeks on kõik konstantse negatiivse Gaussi kõverusega pinnad. Neid pindu uuris juba 1839. aastal F. Minding (kes muide neli aastat hiljem tuli matemaatikaprofessoriks Tartusse ja jäi siia kuni elu lõpuni 1885. a.). Minding näitas, et konstantse negatiivse

[5] Lobatševski tasandi kõveruse teistsuguse, küll tunduvalt pikema, kuid see-eest vähem formaalse käsitluse võib lugeja leida J. Nuudi monograafiast: Ю. Н у т. Геометрия Лобачевского в аналитическом изложении. Москва, 1961, гл. VI.

Gaussi kõverusega pinna meetrilise vormi lihtsaimaks kujuks on parajasti (4). Selleks Minding lahendas sobivalt valitud algtingimustel konstantsete kordajatega diferentsiaalvõrrandi $\sqrt{G}$ suhtes, mis $K = -\frac{1}{R^2} = const$ korral järeldub Gaussi valemist (3)[6]. Kahjuks ei olnud Minding teadlik Lobatševski geomeetria olemasolust, samuti ei märganud Lobatševski Mindingi artiklit, muidu oleks juba märgatavalt varem tehtud avastus, milleni 1868. a. jõudis itaalia matemaatik E. Beltrami — konstantse negatiivse Gaussi kõverusega pindade sisegeomeetria nende pindade küllalt väikestes piirkondades ühtib Lobatševski planimeetriaga.



Joonis 6.

Lihtsaimaks sellistest pindadest on nn. pseudosfäär — pöördpind, mis tekib traktrissi pöörlemisel baasisirge ümber. Traktriss (lad. k. sõnast *tracto* — vean) omakorda on defineeritav kui joon, mille kirjeldab venimatu nööri otsa asetatud punktikujuline koormis, kui nööri teine otspunkt liigub mööda teatavat sirget — traktrissi baasisirget (vt. joon. 6). Pseudosfääril on aga üks puudus — ta sisaldab terava nn. tagasipöördeserva, mistõttu temal terve Lobatševski tasandi geomeetria realiseerimine on mõeldamatu. Järgnesid katsed leida pind, mis sellist realisatsiooni võimaldaks, kuni D. Hilbert näitas 1901. a., et selliseid pindu üldse ei eksisteeri — iga pind, millel $K = const < 0$, sisaldab paratamatult mingi iseärasuse.[7]

Kõver *n*-mõõtmeline ruum

Gaussi poolt pinna sisegeomeetria uurimisel antud idee määrata kahemõõtmeline geomeetria temale vastava meetrilise vormiga sai aluseks saksa matemaatiku Bernhard Riemanni veelgi julgemale sammule. Riemann laiendas selle idee 1854. a. ka ruumi uurimise valdkonda. Märgime, et niisugune võimalus ei olnud nähtavasti võõras Gaussilegi: kirjas Hansenile (1825) ta kirjutas, et tema uurimused pindade alal tungivad sügavalt ka «ruumi metafüüsika valdkonda». Kuid, nagu me juba eespool mainisime, ei ole Gauss seda oma mõtet kuskilgi arendanud. On ainult säilinud kohalolijate meenutused selle kohta, et Göttingeni ülikooli

---

[6] Vt. allviites [3] mainitud õpik, lk. 204 ja 205.
[7] Lähemalt sellest probleemist ja uusimatest saavutustest sellel alal vt. Matemaatika ja kaasaeg, XII, lk. 8 ja 9.

filosoofiateaduskonna istungilt 1854. a., kus toimus B. Riemanni esikloeng[8], lahkus juba eakas Gauss sügavalt mõtteisse vajununa. On väljaspool kahtlust, et Riemanni ettekanne pidi temas leidma kõlapinda ja arusaamist. Paraku ei teinud aga Gauss midagi selleks, et noort uurijat toetada ja veel vähestele arusaadavaid uusi avastusi propageerida. Riemanni ettekanne vajus unustusehõlma ja alles 1868. a., kui E. Beltrami oli publitseerinud oma avastuse Lobatševski planimeetria realiseerimisest pseudosfääril, avaldas R. Dedekind, kes leidis ettekande teksti Riemannist järelejäänud paberites, selle Göttingeni Õpetatud Seltsi väljaandes.

Praegu on muidugi raske otsustada, millest juhindus B. Riemann oma julge üldistuse tegemisel — ulatus ju tema avastus üle oma aja ja oli esitatud prooviloengul väga kokkusurutud kujul. Kindel on siiski see, et oma uut geomeetriat nägi Riemann mitte üksnes reaalse ruumi struktuuri uurimisvahendina, vaid ka matemaatilise aparaadina reaalsuse mitmete teiste nähtuste saladustesse tungimiseks. Sellest annavad tunnistust tema oma sõnad: «Sõltuvalt sellest, kas eksisteerib või mitte pidev üleminek ühelt seisundilt teisele, on meil tegemist pideva või katkendliku muutumishulgaga ... Suurused, mis moodustavad seisundite diskreetse hulga, esinevad niivõrd sageli, et vähemalt enam arenenud keeltes on vastavate mõistete jaoks alati olemas erilised nimetused (...). Paljukordse ulatuvusega muutumishulkade vähesearvulistest näidetest, mis esinevad igapäevases elus, märgime lokaliseeritud aistingute ja värvide hulki[9]; märksa sagedamini tuleb sedalaadi mõistete vaatlemise ja uurimisega tegelda matemaatika kõrgemates osades.» Riemann ise rakendas oma aparatuuri soojusjuhtivuse matemaatilise teooria loomisel ühes töös, mille ta 1861. a. esitas Pariisi Teaduste Akadeemiale. Tänapäeval annavad tema suurest läbinägelikkusest hiilgavat tunnistust need tähtsad rakendused, mis Riemanni geomeetrial on dünaamiliste süsteemide teoorias jm. — valdkondades, kus uurimisobjektiks ei ole sugugi reaalne ruum oma omadustega, vaid teistsugused «pidevad muutumishulgad», mille mõõtmeks võib olla ükskõik missugune naturaalarv *n*. Ilma 4-mõõtmelise Riemanni geomeetriata oleks mõeldamatu kaasaegne aja ja ruumi teooria.

---

[8] E. Tamme, Bernhard Riemanni elust ja loomingust. — Matemaatika ja kaasaeg, XI, 1966, lk. 57—64. Esikloengu teemaks oli *«Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen»* (Hüpoteesidest, mis on geomeetriale aluseks).

[9] Riemann peab siin ilmselt silmas tuntud asjaolu, et normaalse inimese värviaistingute hulk on kolmemõõtmeline: iga värviaistingut V saab esitada kolme põhivärvi P (punane), R (roheline) ja S (sinine) erinevate intensiivsustega x, y, z võetud aistingute koosmõjuna («summana»): $V = xP + yR + zS$. (Erandeiks on «värvipimeduse» (daltonismi) all kannatajad, kelle värviaistingud moodustavad pideva kahe- või koguni ühemõõtmelise hulga).

Tuleb märkida, et *n*-mõõtmelise ruumi idee esines Riemanni juures mitte esmakordselt. Selles osas on tal eelkäijaid (keda ta küll oma ettekandes ei maini). Kõige esmalt jõuti *n*-mõõtmelise geomeetria vajaduse tunnetamiseni algebra ja analüüsi ülesannete tõlgendamisel. Kui teise ja kolmanda astme võrrandeid käsitleti antiikmatemaatikas (ja ka hiljem) kui teatavaid vahekordi kas tasandiliste või ruumiliste kujundite vahel, siis kõrgema astme ülesannete puhul jäi ruumi mõõde takistuseks analoogilistele võimalustele. Diophantos III sajandil kasutas varem tuntud astmete nimetuste «ruut (kvadraat)», ja «kuup» kõrval küll julgelt nimetusi «kvadraato-kvadraat» (4. aste), «kvadraato-kuup» (5. aste) ja «kuubo-kuup» (6. aste), kuid mingeid kindlaid ettekujutusi ta nende terminitega ei sidunud. Analoogilist formaalset minekut «kõrgemasse dimensiooni» rakendasid ka need, kes andsid geomeetrilisele progressioonile tema nimetuse. Saksa matemaatik M. Stiefel kirjutas 1553. a.: «Niisuguseid progressioone nimetatakse geomeetrilisteks sõna otseses mõttes; alguseks mõeldakse punkti kui joone algust, teisena tõmmatakse joon (...), kolmandana ehitatakse ruut tasandil (...), neljandana järgneb kuup, millel tõmmatud joon on (...) mõõduks kolmes suunas — pikkuses, kõrguses ja paksuses. (...) Sellisel juhul läheksid geomeetrilised progressioonid edasi ja edasi ilma ühegi sihi ja lõputa, kuup võetakse kehaliseks punktiks, millele järgneks kehaline joon, selle järele — kehaline pind, aga pärast seda võetaks kuup, mille järel mindaks edasi, nagu näidatud, ilma peatumata.»

Märksa olulisema tõuke n-mõõtmelise ruumi mõiste kujunemisele andis analüüsi areng. Ühe ja kahe muutuja funktsioonide uurimisel olid hinnatavaks abivahendiks kujunenud funktsioonide «graafilised esitused» — kõverad tasandil või pinnad ruumis [10]. Enam kui kahe muutuja funktsiooni puhul aga ei «mahu» selline graafiline esitus enam kolmemõõtmelisse ruumi. Puhtakujulised analüütikud, kelle veendunuimaks esindajaks oli J. L. Lagrange (1736—1813), loobusid täielikult igasugustest geomeetrilistest kujutlustest, säilitades ainult puhta analüüsi. Lagrange oma klassikalises teoses *«Analüütiline mehhaanika»* (1788), milles ta faktiliselt toob sisse *n* vabadusastmega mehhaanilise süsteemi *n*-mõõtmelise konfiguratsiooniruumi, määrates süsteemi asendi *n* «üldistatud koordinaadiga», hoiatab lugejat, et tema «meetodid ei vaja ei konstruktsioone, ei geomeetrilisi ega mehhaanikalisi arutlusi, nad vajavad ainult algebralisi operatsioone». Kuid Lagrange'i teose uurijad, kes olid tema mõttekäikudesse süvenemiseks paratamatult sunnitud tegema jooniseid, hakkasid ajapikku üldistatud koordinaatidega siduma teatavaid geomeetrilisi kujutlusi.

[10] Meenutame, et ühe muutuja funktsioonide uurimine nendest õieti algaski — esimese diferentsiaalarvutuse õpiku pealkirjaks oli «Lõpmata väikeste analüüs kõverjoonte uurimiseks» (Pariis, 1696).

Esimesteks, kes julgelt välja ütlesid, et nad tegelevad n-mõõtmelise geomeetriaga, olid inglise matemaatik Arthur Cayley (1821—1895), kes avaldas 1843. a. töö «*Chapters in the analytical geometry of (n) dimensions*» (Peatükke n-mõõtmelisest analüütilisest geomeetriast), ja saksa teadlane Hermann Grassmann (1809—1877), kelle töö «*Die lineale Ausdehnungslehre*» (Lineaarne ulatuvuseõpetus) (1844) on esimeseks n-mõõtmelise geomeetria monograafiaks. Kahe aasta pärast, 1846. a., käsitleb J. Plücker kolmemõõtmelise ruumi sirgete hulka kui teatavat neljamõõtmelist «ruumi» ning 1852. a. lõpetab šveitsi matemaatik L. Schläfli oma ulatusliku «*Theorie der vielfachen Kontinuität*» (Paljukordse kontinuiteedi teooria), mis avaldati osaliselt 1855. ja 1858. a., kuid tervikuna alles 1901. a.

Kõik need tööd äratasid oma ilmumisel väheste tähelepanu, samuti nagu Riemanni esikloeng 1854. a. Nende oluline erinevus viimasest seisneb selles, et neis käsitletakse «lineaarset n-mõõtmelist geomeetriat» — n.-ö. tasaste ruumide geomeetriat, mis on saadud tavalise eukleidilise analüütilise geomeetria üldistamisel sel teel, et kahe või kolme koordinaadiga esitatavate punktide (x_1, x_2) või (x_1, x_2, x_3) hulga — tasandi või ruumi — asemel vaadeldakse n-arvuliste süsteemide $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ hulka, kusjuures selles defineeritakse samasugused lineaarsed operatsioonid ja pikkuse arvutamise eeskiri nagu tavalise ruumi või tasandi vektorite puhul. Tänapäeva terminoloogia seisukohalt uuritakse nendes töödes n-mõõtmelist lineaarset, afiinset või eukleidilist ruumi, piirdudes kas elementaarse või analüütilise geomeetriaga.

Seevastu Riemanni töö annab, nagu juba märgitud, Gaussi kõverusega kahemõõtmelise geomeetria idee üldistuse n-mõõtmelisele juhule. Ka Riemann määrab punkti n reaalarvuga $x_1, x_2, \ldots, x_n$, kuid mingite lineaarsete tehete olemasolu selliste punktide hulgas ta ei eelda (samuti nagu neid ei saa kasutada näiteks kõverpinna punktide puhul). Kogu geomeetria viiakse selliste punktide hulka sisse meetrilise vormiga

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\, dx_i\, dx_j, \tag{5}$$

mis üldistab pinna meetrilist vormi (2). Selle abil defineeritakse kõvera $x_i = x_i(t)$ kaare pikkus s kui määratud integraal avaldisest ds, mis saadakse $x_i(t)$ asendamisel seose (5) paremasse poolde x_i asemele, kahe lõikuva kõvera vaheline nurk α kui suurus, mille puhul $\cos\alpha$ avaldis on pinnateooriast tuntud avaldise vahetu üldistus ning piirkonna ruumala V kui n-kordne integraal üle selle piirkonna ruutvormi (5) diskriminandi ruutjuurest[11].

[11] Vastavad valemid koos Riemanni geomeetria sisu lühikese tutvustamisega on toodud autori varasemas artiklis: Ü. L u m i s t e. Riemann topoloogia ja üldise kõvera ruumi geomeetria loojana. — Matemaatika ja kaasaeg, XI, lk. 65—76.

Sirgete asemele tulevad Riemanni geomeetrias, samuti nagu pinnateoorias, nn. geodeetilised jooned, mis on lühimateks oma iga kahe küllalt lähedase punkti vahel.

Kui Riemanni ruumis on antud kahemõõtmeline pind $x_i = x_i(u_1, u_2)$, siis funktsioonide $x_i(u_1, u_2)$ asendamisel seose (5) paremasse poolde x_i asemele saadakse selle pinna meetriline vorm (2). Viimase järgi võib Gaussi valemit kasutades arvutada puhtformaalselt selle pinna kõveruse K mingis punktis (kusjuures suurus K on muidugi samasuguselt tõlgendatav punktis kokkutõmbuva geodeetilise kolmnurga abil nagu pinna sisegeomeetrias). See kõverus K sõltub oluliselt Riemanni ruumi antud punkti X läbiva kahemõõtmelise pinna valikust. Tema vähimat väärtust sama puutujatasandiga pindade puhul punktis X nimetatakse Riemanni ruumi kõveruseks punktis X selle puutujatasandiga määratud kahemõõtmelises sihis[12]. Kui baasivektorid puutujatasandil on määratud koordinaatidega $\frac{\partial x_i}{\partial u_1}$ ja $\frac{\partial x_i}{\partial u_2}$, siis see suurus on arvutatav valemist

$$K = \frac{\sum\limits_{i, \ldots, l=1}^{n} R_{ij,kl}\xi_{ij}\xi_{kl}}{\sum\limits_{i, \ldots, l=1}^{n} G_{ij,kl}\xi_{ij}\xi_{kl}}, \tag{6}$$

kus $\xi_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x_i}{\partial u_1}\frac{\partial x_j}{\partial u_2} - \frac{\partial x_j}{\partial u_1}\frac{\partial x_i}{\partial u_2}\right)$, $G_{ij,kl} = g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}$, ning $R_{ij,kl}$ moodustavad teatava punktis X määratud arvude (selle valemi kordajate) süsteemi selliselt, et $R_{ij,kl} = -R_{ji,kl} = R_{kl,ij}$, $R_{ij,kl} + R_{jk,il} + R_{ki,jl} = 0$. Viimastest seostest võib järeldada, et olulisi arve selles süsteemis on $N = \frac{n^2(n^2-1)}{12}$; nad kõik on avaldatavad meetrilise vormi kordajate g_{ij} ja nende esimeste ning teiste osatuletiste kaudu valemitega, mis üldistavad Gaussi valemit pinna sisegeomeetriast. Et kogu see süsteem võimaldab määrata Riemanni ruumi kõveruse ükskõik millises kahemõõtmelises sihis, siis nimetatakse teda Riemanni ruumi kõverustensoriks (ehk Riemann-Christoffeli tensoriks).

Kõveruse mõistet kasutades eraldas Riemann välja struktuurilt kõige lihtsamad ruumid — nn. konstantse kõverusega ruumid, mille puhul kõverus K igas punktis X ei sõltu kahemõõtmelise sihi valikust selles. Sel puhul valemis (6) on $R_{ij,kl} = K \cdot G_{ij,kl}$. Juhul $K = 0$ on siis iga punkti ümbruses tegemist eukleidilise n-mõõtmelise geomeetriaga, mis $n = 2$ või $n = 3$ korral ühtib koolis uuritava geomeetriaga. Juhul $K = \text{const} > 0$ on tegemist sfääril keh-

12 Selle suuruse teistsugune tõlgendus on antud eelmises allviites mainitud artiklis, lk. 74 ja 75.

tiva geomeetria n-mõõtmelise üldistusega, mille andis esmakordselt Riemann oma ettekandes ja mida seetõttu nimetataksegi Riemanni geomeetriaks (kitsamas mõttes) ehk elliptiliseks geomeetriaks. Juhtu $K = \text{const} < 0$ ei tõstnud Riemann, kes nähtavasti ei olnud veel tuttav Lobatševski ja Bolyai töödega, eriliselt esile. Alles E. Beltrami näitas 1868. a., et sel juhul Riemanni ruumi geomeetria ühtib iga punkti ümbruses Lobatševski geomeetriaga (ehk hüperboolse geomeetriaga). Niiviisi selgus, et Riemanni geomeetria hõlmab erijuhtudena kõik varem tuntud geomeetriad, andes ühtlasi nende kaugeleulatuva üldistuse.

Riemann märkis oma esikloengus ka ühe konstantse kõverusega ruumide huvitava ühise omaduse: kõikides nendes on võimalik kujundeid ümber paigutada iga kahe punkti vahelise kauguse säilitamisega sama vabalt nagu eukleidilises ruumis. Teisiti öeldes, nendes on maksimaalse vabadusega võimalik sooritada liikumisi, mõistes viimaste all ruumi punktide teisendusi, mis säilitavad kõik kaugused. Nagu näitas W. Killing 1885. a., on see omadus kõikide Riemanni ruumide seas iseloomulik ainult konstantse kõverusega ruumidele. Viimaseid saab järelikult defineerida ka kui maksimaalse liikuvusega Riemanni ruume.

Selle tulemusega viidi Riemanni geomeetria kokkupuutesse ühe teise üldise viljaka printsiibiga mitmesuguste geomeetriate ühtseks käsitlemiseks, mille 1872. a. andis saksa matemaatik F. Klein oma nn. Erlangeni programmis. Kleini printsiibiga tutvumine nõuab aga juba omaette käsitlust.

(Järgneb)

BRIDŽIÜLESANNE

	♠ Ä E 7 ♡ E S 10 ♢ Ä 10 6 ♣ Ä S 7 4	
♠ K S 9 ♡ 9 8 5 ♢ E 8 4 3 ♣ 10 5 2	N W O S	♠ 10 8 5 4 2 ♡ K ♢ S 9 7 2 ♣ E 8 3
	♠ 6 3 ♡ Ä 7 6 4 3 2 ♢ K 5 ♣ K 9 6	

Ärtu on trump. W käib avakäiguks ärtu üheksa. S peab iga kaitsemängu korral võtma kõik 13 tihi. (Lahendus vt. lk. 128).

MATEMAATIKA ÕPETAMISEST AMEERIKA ÜHENDRIIKIDE ÜLIKOOLIDES

Ü. Kaasik

Käesolevas kirjutises püütakse lühidalt tutvustada seda, kuidas on Ameerika Ühendriikide ülikoolides organiseeritud matemaatika kui eriala õpetamine [1]. Muidugi tuleb matemaatika õpetamise ja õppimisega seotud küsimuste vaatlemiseks ühtlasi tuua ka üldse mõningaid faktilisi andmeid Ameerika ülikoolide struktuuri kohta, mis meie ülikoolide omast üsna märgatavalt erineb. Selles osas piirdume aga vaid nende andmetega, mis matemaatika eriala spetsialiseerumisega nii või teisiti seotud on.

Õppeaeg on Ameerika ülikoolides kõikjal neli aastat (õppeaastaid nimetatakse vastavalt: *freshman year, sophomore year, junior year* ja *senior year*), kusjuures lõpetaja omandab bakalaureuse kraadi (*Bachelor of Science*, lühidalt *B. S.*). Pärast lõpetamist võib aga õpinguid jätkata analoogiliselt meie aspirantuuriga (vastavalt sellele nimetatakse 4-aastast põhilist õppeaega *undergraduate study* ja edasiõppimist *graduate study*). Niimoodi saab täiendava 1—1,5 aastaga omandada magistrikraadi (*Master of Science*, lühendatult *M. S.*) või 3—4 aastaga doktorikraadi (*Doctor of Philosophy*, lühendatult *Ph. D.*).

Õppeaasta jaguneb mõnedes ülikoolides kaheks semestriks (*term*), mõnedes aga kolmeks veerandiks (*quarter* või *term*). Et viimane moodus näib olevat rohkem levinud, siis järgnevas kõneleme vaid veeranditest.

Vastuvõtu tingimused on igas ülikoolis üldiselt erinevad, kuid reeglina tuleb sisse astuda soovijail sooritada 2—4 eksamit, ühtlasi aga võetakse arvesse ka keskkoolis saadud hinded. Peale

[1] Artikli autor on kahel korral viibinud Ameerika Ühendriikides teaduslikul komandeeringul (1961/62. õppeaasta vältel ning 1966. aasta oktoobris-novembris). Nende komandeeringute ajal oli tal võimalus lähemalt tutvuda järgmiste ülikoolide tööga: Stanfordi Ülikool (*Stanford University*), California Tehnoloogiainstituut (*California Institute of Technology*), Chicago Ülikool (*University of Chicago*), Harvardi Ülikool (*Harvard University*) ja Massachusettsi Tehnoloogiainstituut (*Massachusetts Institute of Technology*). Käesolev kirjutis baseerubki eeskätt nendes ülikoolides nähtule-kuuldule, kuigi vähesel määral on arvestatud ka mõningate teiste ülikoolide kohta saadud materjale.

selle nõutakse paljudes ülikoolides veel, et teatud aineid oleks keskkoolis õpitud vähemalt vastava ülikooli poolt määratud miinimumi ulatuses (Ameerika keskkoolides kasutatakse enamasti nn. valikkursuste meetodit). Sisseastumiseks vajalike dokumentide esitamine algab muide juba viimase keskkooliaasta jooksul (mõne ülikooli puhul isegi oktoobris-novembris).

Ülikooli astumisel spetsiaalsust veel ei valita. See toimub alles teise õppeaasta algul või isegi keskel, mil igale üliõpilasele määratakse ühtlasi individuaaljuhendaja (*adviser*). Mingi spetsiaalsuse valimise eeltingimuseks on, et soovija oleks keskkoolis ja ülikooli esimesel õppeaastal õppinud teatud aineid. Sageli aga korraldatakse ka veel täiendav test. Tuleb rõhutada, et teisel õppeaastal valitakse tavaliselt vaid laiem spetsiaalsus (s. t. meie juhul matemaatika), kitsama spetsiaalsuse (näit. diferentsiaalvõrrandid vms.) täpsustamine toimub juba hilisemas koostöös individuaaljuhendajaga.

Üliõpilastele õppetöö käigus seatavad nõuded on erinevates ülikoolides üksikasjade poolest üsna erinevad, kuid enamasti seisnevad nad umbes järgnevas.

Iga veerandi alguses peab üliõpilane valima üldise õppeplaaniga määratud tingimusi arvestades teatava arvu kursusi nii, et see annaks kokku ettenähtud normi nädalatunde (enamasti 35—55, keskmiselt aga 45). Sealjuures loetakse kursuse nädalatundide hulka mitte ainult loengud ja praktikumid, vaid ka kodune töö, mis moodustab ühe kuni kaks kolmandikku tundide koguarvust. Alates teisest õppeaastast kinnitab üliõpilase valiku tema individuaaljuhendaja. Õieti toimubki valimine tihedas koostöös individuaaljuhendajaga, kelle peamiseks ülesandeks on just teatava kitsama spetsiaalsuse väljakujundamine.

Iga veerandi lõpul tuleb kõigis valitud aineis sooritada kirjalikud eksamid. Edasiõppimise õiguse tagamiseks peab veerandi keskmine hinne teatavast miinimumist kõrgem olema. Õppeaasta lõpul leitakse uus keskmine hinne ja aasta loetakse lõpetatuks, kui keskmine hinne ületab nõutud miinimumpiiri. Eksamihindeid tähistatakse Ameerika ülikoolides tavaliselt tähtedega *A, B, C, D* ja *F*, kuid keskmiste arvutamisel võetakse $A = 4$, $B = 3$, $C = 2$, $D = 1$ ja $F = 0$. Keskmine hinne saadakse hinnete kaalutud keskmisena, kus kaaludeks on vastavate ainete nädalatundide arvude jagatised nädalatundide üldarvuga. Veerandi keskmise hinde miinimumpiiriks on tavaliselt 1,4—1,5, õppeaasta lõpetamiseks vajalik miinimum aga 1,9—2,0.

Need keskmised hinded võivad näida üsna madalatena, kuid tuleb märkida, et Ameerika ülikoolides toimub hindamine tavaliselt etteantud spektri järgi. See tähendab, et ühe aine piirides peab positiivsete hinnete *A, B, C* ja *D* jaotus olema näiteks 15%, 35%, 35% ja 15% (keskmine hinne seega üldiselt alla 2,5). Arusaadavalt tekitab niisugune hindamissüsteem üliõpilaste vahel tõelise konkurentsi, mille positiivseks küljeks on etteütlemise jms. praktiline puudumine. Positiivseks küljeks on ka veel eksamineerija töö lihtsustumine (praktiseeritakse isegi koduste eksamitööde andmist!), kuid ilmselt ei kaalu see siiski üles niisuguse süsteemiga üliõpilastele tehtavat moraalset kahju — kollektiivsustunde tähtlikku mahasurumist.

Nagu juba nimetatud, peab üliõpilane kursuste valikul arvestama üldise õppeplaaniga määratud tingimusi. Sellises üldises õppeplaanis on nimelt tavaliselt loetletud teatud kohustuslikud ained ning antud valikainete mahuline jaotus valdkondade järgi, samuti aga nädalatundide miinimum- ja maksimumpiirid.

Et esimesel õppeaastal spetsialiseerumist veel ei toimu, siis on üldine õppeplaan sel aastal kõigile üliõpilastele ühine. Valikainete osa on sealjuures suhteliselt väike, paljudes ülikoolides isegi üldse puudub. Näiteks tehnilise kallakuga ülikoolides (tehnoloogiainstituutides) on esimese aasta plaan umbes järgmine:

Esimene õppeaasta

Õppeaine	Nädalatunde veerandis		
	I	II	III
Matemaatiline analüüs (koos analüütilise geomeetria ja kõrgema algebra elementidega)	12	12	12
Üldine füüsika	12	12	12
Üldine keemia	12	12	12
Tehniline joonestamine	3	—	—
Inglise kirjandus ja kompositsioon	6	6	6
Euroopa tsivilisatsiooni ajalugu	5	5	5
XIX—XX sajandi kirjandus	—	3	3
Kehaline kasvatus	3	3	3
Kokku	53	53	53

Üldise profiiliga ülikoolides on antud esimese nelja aine asemel tavaliselt mõni teine kombinatsioon (mis enamasti sisaldab $3 \times$ 3-tunnilise inglise keele kursuse ja ühe võõrkeele). Märgatavaid variatsioone esineb aga ka ülejäänud ainete valikus. Üsna sageli on mõned esimese õppeaasta ainetest üldise profiiliga ülikoolides valitavad ja kui soovitakse hiljem spetsialiseeruda matemaatika alal, siis peab üheks valikaineks esimesel aastal olema matemaatika.

Meie ülikoolide matemaatikateaduskondade esimese kursuse õppeplaaniga võrreldes on puhtmatemaatiliste ainete osa selles plaanis nii tundide arvu kui ka sisulise mahu poolest suhteliselt üsna väike. Tuleb aga arvestada, et tegemist on kõikide teaduskondade ühise õppeplaaniga. Mis puutub nädalatundide arvusse (53), siis umbes poole sellest moodustavad loengud ja praktikumid, teise poole aga kodune töö. Peab kohe rõhutama, et kodusele tööle määratud tunnid on Ameerika ülikoolides tõepoolest see minimaalne aeg, mis kirjanduse läbitöötamisele ja koduste kontrolltööde lahendamisele tuleb kulutada. Seega on üliõpilase töökoormus kokkuvõttes umbes samasugune (või isegi suurem) kui meie ülikoolides.

Alates teisest õppeaastast on matemaatika alal spetsialiseeruvate üliõpilaste üldised õppeplaanid umbes järgmised[2]:

Teine õppeaasta

Õppeaine	Nädalatunde veerandis		
	I	II	III
Matemaatiline analüüs (tõenäosusteooria ja diferentsiaalvõrrandite teooria elementidega)	12	12	12
Füüsika	12	12	12
Ühendriikide ajalugu ja valitsemine	6	6	6
Sissejuhatus kaasaegsesse algebrasse	9	9	9
Mittematemaatilised valikained	9	9	9
Kehaline kasvatus	3	3	3
Kokku	51	51	51

Kolmas õppeaasta

Õppeaine	Nädalatunde veerandis		
	I	II	III
Kõrgem analüüs (reaal- ja kompleksmuutuja funktsioonide teooria, topoloogia alged)	12	12	12
Kirjandusteadus	8	8	8
Matemaatilised valikained	$\geqslant 9$	$\geqslant 9$	$\geqslant 9$
Mittematemaatilised valikained	$\geqslant 9$	$\geqslant 9$	$\geqslant 9$
Humanitaarained	6	6	—
Kokku	44—49	44—49	44—49

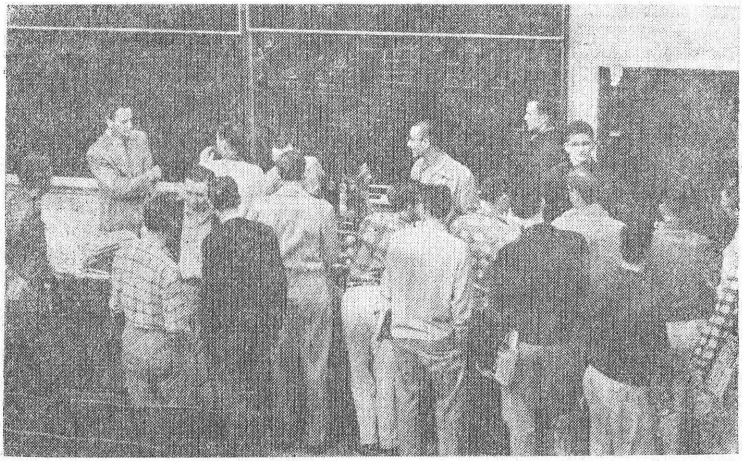
Neljas õppeaasta

Õppeaine	Nädalatunde veerandis		
	I	II	III
Ühiskonnaõpetus (*public affairs*)	2	2	2
Matemaatilised valikained	9	9	9
Humanitaarained	9	9	9
Mitmesugused valikained	$\geqslant 18$	$\geqslant 18$	$\geqslant 18$
Kokku	38—48	38—48	38—48

[2] Siin on tegelikult toodud Kalifornia Tehnoloogiainstituudi õppeplaanid, mis näivad olevat üsna tüüpilised.

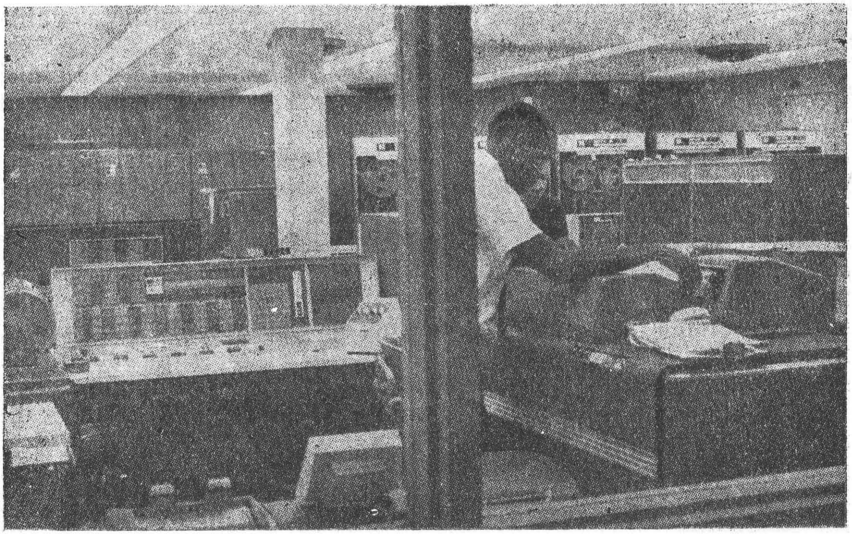
Rõhutame, et need plaanid on toodud siiski vaid ühe võimaliku näitena. Paljudes ülikoolides näevad nad välja hoopis teisiti. Näiteks kehaline kasvatus on enamasti kõigil neljal aastal, võõrkeel on ette nähtud omaette ainena (mitte ühe osana humanitaarainetest, nagu siin esitatud plaanis), kohustuslike ainete arv võib olla suurem, vahekord matemaatiliste ja mittematemaatiliste valikainete vahel märgatavalt erinev jne.

Nagu toodud plaanidest nähtub, on kolmandal ja neljandal õppeaastal juba üsna suur osa õppeainetest valitavad. Sealhulgas tuleb matemaatilisi valikaineid võtta kokku 54—108 nädalatunni ulatuses, mis annab 6—12 veerandit 9-nädalatunnilisi kursusi. Valikainete täpsustamine toimub iga õppeaasta (vahel ka iga veerandi) algul trükitava tunniplaani alusel, milles on määratud nii ainete mahud kui ka loengute aeg ja koht. Iga üliõpilane peab veerandi esimese paari nädala jooksul koostama oma individuaalse tunniplaani selliselt, et ta kõigi valitud ainete loenguid saaks kuulamas käia ning üldises õppeplaanis ettenähtud nõuded oleksid rahuldatud. Ühtlasi peab ta arvestama, et mõningate ainete valimise eeltingimuseks on mõne teise aine tundmine. Selline individuaalne õppeplaan kinnitatakse ja veerandi vältel pole teda enam võimalik muuta.



Konsultatsioon pärast loengut

Niisuguse süsteemi eelisteks on ettevalmistuse laialdane diferentseeritavus (iga üliõpilane õpib tegelikult individuaalplaani järgi) ja loengute koguarvu märgatava vähendamise võimalus (samanimelist kursust loetakse kõigi erialade ja suundade üliõpilastele enamasti koos). Viimati nimetatud eelisest aga tuleneb ka süsteemi üks puudustest: suuremat osa ainetest tuleb õpetada üpris ebaühtlase ettevalmistusega auditooriumile. Eriti torkab see silma just matemaatiliste ainete õpetamisel, kus ainete teatava järgnevuse nõuetele vaatamata tuleb paljude põhimõistete käsitlust korrata peaaegu igas kursuses.



Pilk Chicago ülikooli arvutuskeskusesse

Valikainete nomenklatuur on igas ülikoolis ja isegi igal aastal muidugi üsna erinev. Seetõttu saame esitada vaid mingi näitliku koondloetelu, kuhu on võetud mitme ülikooli 1966/67. õppeaasta valikkursused. Kõik järgmises loetelus toodud kursused on 9-nädalatunnilised (neist enamasti 3—4 tundi loenguid ja praktikume), sulgudes on märgitud aine kestus veerandites.

Matemaatilised valikained: matemaatiline statistika (1), diferentsiaalgeomeetria (1), kaasaegne algebra (3), projektiivne geomeetria (1), konstruktiivne funktsiooniteooria (1), kompleksmuutuja funktsioonide teooria (2), tõenäosusteooria (2), elementaarmatemaatika kõrgemalt vaatekohalt (1), lähendusmeetodid (2), elektronarvutite kasutamine (1), operatsioonianalüüs (3), kombinatoorne analüüs (3), matemaatiline loogika ja hulgateooria (3), algebraline geomeetria (1), kõrgem geomeetria (2), mitteeukleidiline geomeetria (1), sissejuhatus automaatide teooriasse (1), funktsionaalanalüüs ja integraalvõrrandid (2), kombinatoorne topoloogia (1), arvuteooria (3), osatuletistega diferentsiaalvõrrandid (2), algoritmiteooria (3), integraaliteooria (1).

Rõhutame, et sellest loetelust tuleb aineid valida kogumahuga kuni 12 veerandit (seega vähem kui kolmandik toodud ainetest). Sealjuures ulatuslikumatest ainetest võib küll valida ka ainult esimese veerandi või kolmeveerandilise aine korral kaks esimest veerandit. Kokkuvõttes on seega Ameerika ülikooli lõpetaja kuulanud matemaatilisi kursusi tunduvalt väiksemal arvul kui näiteks meie ülikooli lõpetaja. Erinevus avaldub sealjuures just n.-ö. laiema profiili ainete osas, valitud kitsamas erialas kuulatud ainete arv on aga peaaegu võrreldav meie ülikoolide õppekavades antuga.

Mis puutub matemaatika loengute ja praktikumide metoodikasse, siis on see üldiselt võrreldav meie ülikoolides kasutatava metoodikaga. Märksa suurem on ainult kohustusliku koduse töö osa (eriti just ülesannete lahendamine). Hoopis erinev seevastu on eksamite metoodika. Eranditult kõik kursused lõpevad nimelt kirjaliku eksamiga, mis enamasti toimub testi vormis (tuleb vastavale kohale kirjutada üksnes vastus või valida üks etteantud vastustest). Hinde panemisel võetakse aga peale eksamitöö enamasti arvesse veel veerandi vältel toimunud kontrolltööd ja tingimata ka koduste tööde hinded. Niisugune hindamisviis annab eriti suure kaalu veerandi vältel tehtud pidevale tööle. Õieti ilma pideva tööta pole Ameerika ülikoolis võimalikki positiivset hinnet saada. Sellepärast ongi loengutest osavõtt praktiliselt sajaprotsendiline (vaatamata üldisele vabakuulamisõigusele!).

Mis puutub mittematemaatilistesse valikainetesse, siis selles osas on pilt üsna kirju, mingit tüüploetelu pole siin võimalik tuua. Seetõttu tuleb piirduda vaid ühe konkreetse üliõpilase valiku esitamisega lihtsa näitena (ained on 9-nädalatunnilised, sulgudes on antud veerandite arv).

Mittematemaatilised valikained: füüsikaline geoloogia (1), elementaarbioloogia (1), sissejuhatus astronoomiasse (1), majanduslikud põhimõtted ja probleemid (2), tööstuse organisatsioon (1), sissejuhatus elektroonikasse (1), biosüsteemide analüüs (1), üldine füsioloogia (1).

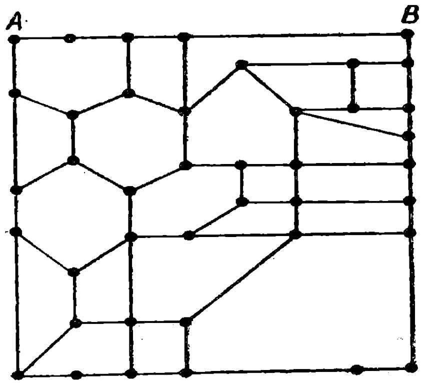
Pidulikel juhtudel kannavad õppejõud traditsioonilist vormi

Nagu kasvõi sellest loetelust juba nähtub, on Ameerika ülikooli lõpetanud matemaatiku ettevalmistus mittematemaatilistes ainetes mõnevõrra ulatuslikum kui meil.

Edasiõppimise õiguse magistri- või doktorikraadi taotlemiseks annab enamikus ülikoolides vastavate täiendavate eksamite (1—2) sooritamine. Magistrikraadi taotleja peab seejärel kolme veerandi vältel kuulama teatud arvu valikkursusi (sõltuvalt ülikoolist 25—45 nädalatundi veerandis), sooritama vastavad eksamid ja enamasti esitama veel magistritöö, mille kohta püstitatavad nõuded on võrreldavad meie diplomitöö nõuetega (arvutusmatemaatika erialal võib magistritööks olla ka veidi keerulisema programmi koostamine). Kursused valitakse kas esimese nelja aasta jooksul kuulamata jäänud valikainete või spetsiaalselt edasiõppijate jaoks määratud ainete hulgast.

Doktorikraadi taotleja peab esimese aasta jooksul põhiliselt samu nõudeid täitma (mõnedes ülikoolides ei nõuta sel juhul magistritöö esitamist, s. t. doktorikraadi taotlejal ei tarvitse olla magistrikraadi). Järgmised aastad on pühendatud peamiselt uurimistööle, kuid sõltuvalt ülikoolist võidakse nõuda ka veel mõne kursuse kuulamist. Peale selle peab kraadi taotleja sooritama veel võõrkeele eksami (vene, prantsuse või saksa keel) ja üks või kaks suulist komisjonieksamit valitud erialas. Lõpuks tuleb esitada väitekiri, mille kohta püstitatavad nõuded on võrreldavad meie kandidaaditöödele seatud nõuetega. Väitekirja avalikku kaitsmist tavaliselt ei toimu, väitekirja sobivuse üle otsustab dekaani määratud 3—5-liikmeline komisjon, kes võtab enamasti vastu ka selle kraaditaotleja suulised eksamid.

Kuigi esitatavad nõuded on erinevates ülikoolides üldiselt erinevad, võib keskelt läbi siiski väita, et Ameerika ülikoolis antav magistrikraad (*M. S.*) vastab enam-vähem meie ülikooli lõpetamisele, doktorikraad (*Ph. D.*) aga meie kandidaadikraadile.



LINNAST LINNA

Kõrval oleval joonisel on linnad kujutatud punktidena ning neid ühendavad teed sirglõikudena (tihedamat teedevõrku nende linnade vahel ei ole!). Ülesandeks on leida niisugune tee linnast *A* linna *B*, mis läheb läbi võimalikult väiksemast arvust linnadest. Et aga lahendamine oleks raskem, siis on seatud veel lisatingimus, mille kohaselt otsitav tee tohib läbida vaid paarisarvu linnu (näiteks joonise kõige ülemine tee ei ole lahendiks, sest ta läheb läbi kolme linna).

MÕNDA INFORMATSIOONITEOORIA PÕHIMÕISTETEST

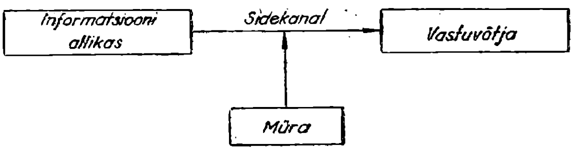
A. Iher

Kui majanduse ja poliitika valdkonnas olid II maailmasõja järgsed aastad täis raskusi ja vastuolusid, siis matemaatikas ja just selle rakenduslikes suundades olid nad eriti viljakad. Aastad 1947—1948 tähistavad sel alal kahe uue distsipliini — küberneetika ja informatsiooniteooria sündi.

Informatsiooniteooria alguseks võib pidada Claude Shannoni artikli «Matemaatiline sideteooria» ilmumist 1948. a. Selles artiklis esitati enamus uue teooria põhimõisteid ja terve rida tulemusi.

Nagu uute teaduslike ideede ja suundadega pahatihti juhtub, nii ei leidnud ka Shannoni ideed esialgu väärilist kõlapinda. Osa matemaatikuid suhtus teatava kahtluse ja võib-olla isegi üleolekutundega ideedesse, mis olid esitatud matemaatilise ranguse poolest mitte just hiilgavas artiklis. Informatsiooniteooria jäi koos küberneetikaga «ebateadusena» mitmeks aastaks põlu alla ka nõukogude matemaatikute hulgas. Ometi ei tabanud informatsiooniteooriat Galois' teooria saatus, mis unustati aastakümneteks. Tänu praktilistele rakendustele teistes teadusharudes ja tehnikas võitsid Shannoni ideed üsna varsti täieliku tunnustuse ja tänapäeval on informatsiooniteooria arenenud rangelt matemaatiliseks distsipliiniks.

Et informatsiooniteooria kasvas välja tehnilisest sideteooriast, siis on tema terminoloogia ja mõned tähtsamad tulemused seotud igapäevases elus kasutatavate sidesüsteemidega, mille põhimõtteline skeem on järgmine:



Informatsiooniallikas tekitab informatsiooni, kodeerib selle signaalide kujul (näiteks telegraafis elektriimpulssideks, raadios elektromagnetilisteks laineteks jne.) ja annab edasi sidekanalisse. Sidekanaliks on materiaalne keskkond, mille vahendusel informatsioon jõuab allikast vastuvõtjani. Telegraafi ja telefoni puhul on näiteks sidekanaliks juhtmed, raadioside korral saatjat ja vastuvõtjat ümbritsev ruum jne.

Müra on kogum kõikvõimalikest häiretest ja signaalidest, mis moonutavad edasiantavat signaali ja segavad informatsiooni üleandmist vastuvõtjale (raadiosides atmosfääri häired, tööstuslikud mürad jne). Vastuvõtja ülesandeks on allikast väljasaadetud informatsiooni vastuvõtmine ja selle dekodeerimine (dešifreerimine).

Oma varasemas arengustaadiumis püüdiski informatsiooniteooria matemaatiliste meetodite abil lahendada sidesüsteemi üksikute sõlmede töös esilekerkivaid probleeme. Sellega seoses uuriti küsimusi, mis on seotud informatsiooniallikast väljasaadetud informatsiooni hulgaga ning informatsiooni otstarbekama kodeerimisega sidekanali võimalikult maksimaalse läbilaske ja müravaba edasiandmise seisukohalt.

Tänapäeva informatsiooniteooria on arenenud nii laiuti kui sügavuti ega piirdu kaugeltki enam nimetatud probleemidega. Temast on saanud abstraktne matemaatiline distsipliin, mida tema eelkäijaga — sideteooriaga — seob vaid ühine terminoloogia. Laienenud on ka teooria rakendusala. Informatsiooniteooriat kasutavad mitmete teadusalade esindajad, sealhulgas insenerid, arstid, psühholoogid, lingvistid, bioloogid jne.

Tutvume järgnevas põgusalt informatsiooniteooria põhimõistetega.

Igapäevases elus on terminiga «informatsioon» seotud küllaltki suur annus suhtelisust. Üks ja sama teade võib ühele lugejale anda hinnalist informatsiooni, kuna teisele ei paku ta midagi. Näiteks lugedes teadet «avastati uus elementaarosake», võib füüsik saada väärtuslikku informatsiooni oma edaspidiseks tööks ja seda hoopiski olulisemal hulgal kui näiteks kangur, kes võib-olla ei pööra sellele teatele teiste hulgas mingit tähelepanu.

Matemaatiline teooria ei saa aga opereerida selliste suhteliste, rangelt defineerimata mõistete ja suurustega, seepärast antakse ka terminile «informatsioon» informatsiooniteoorias konkreetne, kindlalt piiritletud sisu, mille defineerimisega avaneb võimalus uuritava süsteemi küllaldasel tundmisel seda ka kvantitatiivselt mõõta.

Informatsiooni hulk on tihedalt seotud vaadeldava sündmuste süsteemi määramatuse mõistega, mida selgitame paari näitega. Vaatleme esiteks kahest sündmusest[1] koosnevat süsteemi:

---

[1] Vt. E. Tiit. Mis on tõenäosus. — Matemaatika ja kaasaeg, IX, lk. 74—90.

1) Eestis on jaanipäeval lumi maas,

2) Eestis ei ole jaanipäeval lund maas.

Võime öelda, et see süsteem on praktiliselt määratud, kuna tulemus on ühele lähedase tõenäosusega ennustatav. Seepärast on vaadeldava süsteemi kohta vaatluse tagajärjel saadav informatsiooni hulk üsna väike.

Kui me uurime süsteemi, kus sündmusteks on võimalikud tulemused enam-vähem võrdsete vastaste vahelises malepartiis, siis on see süsteem juba tunduvalt suurema määramatuse astmega. Ühe maletaja võit või kaotus, samuti partii viigiline tulemus sõltuvad konkreetsest olukorrast ja tingimustest (väsimus, meeleolu jne.) ja tulemust on enne partii algust raske ennustada. Seetõttu on pärast partii lõppemist saadav informatsioonihulk ka hoopis suurem kui eelmise süsteemi puhul. Üldjuhuna vaatleme mingit katset A, mille tulemuseks võib olla üks sündmustest $A_1, A_2, \ldots, A_n$, kusjuures on teada, et igaüks neist esineb tõenäosusega $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Eeldame veel sündmuste süsteemi täielikkust, s. t.

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Sellise süsteemi jaoks defineerib Shannon katse A määramatuse mõõdu — entroopia — suurusena

$$H(A) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_a p_i,$$

kus logaritmi alus a võib olla suvaline ühest suurem reaalarv. Mingi konkreetse aluse valimine määrab ühiku, milles mõõdame entroopiat; kümnendlogaritmi puhul räägime kümnendühikust (seda kasutame ka edaspidistes näidetes), aluse 2 puhul kahendühikust ehk bitist jne. Esitatud valemist järeldub, et entroopia on mittenegatiivne, kusjuures nulliga võrdub ta ainult juhul, kui üks tõenäosustest p_i on võrdne ühega ja ülejäänud võrduvad nulliga.

Näide 1. Olgu katseks A täringuvise, kusjuures sündmusteks A_i $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ on vastavalt i silma väljatulek.

Kui täring on korrapärane, siis on kõik kuus võimalikku sündmust võrdtõenäosed ja ühel viskel mingi konkreetse silmade arvu i väljatuleku tõenäosus on

$$p_i = \frac{1}{6}.$$

Katse A entroopiaks saame sel juhul

$$H(A) = -\sum_{i=1}^{6} p_i \log p_i = -6 \cdot \frac{1}{6} \log \frac{1}{6} = \log 6 \approx 0{,}778.$$

Näide 2. Olgu katseks B jällegi täringuvise, kuid täringuga, mis pole enam korrapärane. Oletame, et meil on õnnestunud teada saada iga võimaliku silmade arvu väljatuleku tõenäosus. Esitame need tõenäosused järgmise tabeli kujul:

Silmade arv i	1	2	3	4	5	6
Tõenäosus p_i	0,1	0,4	0,12	0,2	0,08	0,1

Shannoni valemi põhjal avaldub entroopia sel korral järgmiselt

$$H(B) = -0,1 \log 0,1 - 0,4 \log 0,4 - 0,12 \log 0,12 - 0,2 \log 0,2 - \\ - 0,08 \log 0,08 - 0,1 \log 0,1 = \\ = 0,1 + 0,159 + 0,110 + 0,140 + 0,088 + 0,1 = 0,497.$$

Võrreldes katseid A ja B näeme, et kuigi sündmuste arv on mõlema katse puhul võrdne, ometi on entroopia teisel juhul tunduvalt väiksem. See asjaolu on hästi seletatav, kui tuletada meelde, et entroopia väljendab katse määramatust. Tabelist näeme, et kahe ja nelja silma väljatulek viskel on teistest tunduvalt tõenäosem, mistõttu katse B tulemuse kohta võime palju täpsemaid prognoose teha; katse B tulemus on rohkem ette määratud, kui seda on katse A oma.

Saab tõestada, et n sündmusest koosneva süsteemi entroopia on maksimaalne sündmuste võrdtõenäosuse korral; entroopia väärtus avaldub sel juhul järgmiselt:

$$H = -\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \log \frac{1}{n} = -\log \frac{1}{n} = \log n.$$

Entroopia mõiste edasiarendamiseks keerukamatele süsteemidele üldistame entroopia mõiste kahest sõltumatust sündmuste süsteemist koosneva liitsüsteemi jaoks. Teatavasti on kaks sündmuste süsteemi sõltumatud, kui ühe süsteemi iga sündmus on sõltumatu teise süsteemi mistahes sündmusest.

Sõltumatute sündmuste süsteemidena võib vaadelda näidetes 1 ja 2 kirjeldatud katseid A ja B. Tõepoolest, ühel täringul väljatulev silmade arv ei sõltu teise täringuga saadud silmade arvust.

Ilmselt sellistes sündmuste süsteemides ei vähenda ega suurenda ühe süsteemi määramine teise süsteemi määramatust ja loomulikult on kogu süsteemi entroopia võrdne üksikute katsete entroopiate summaga.

$$H(AB) = H(A) + H(B).$$

Praktikas esineb aga sagedamini olukord, kus ühe katse mingi tulemuse tõenäosus sõltub teise katse tulemusest. Selliseid katseid ja neile vastavaid sündmuste süsteeme nimetatakse sõltuvateks; nende näiteks võiks olla järgmine situatsioon. Olgu meil kaardipakk 52 kaardiga. Võtame sellest juhuslikult välja algul ühe kaardi ja seejärel teise. Kergesti võib läbi näha, et tõenäosus selleks, et teine kaart oleks punane (p_p) (või must (p_m)) sõltub sellest, mis värvi oli esimene väljavõetud kaart. Oletades, et esimene kaart oli punane, saame teise kaardi jaoks tõenäosused

$$p_p = \frac{25}{51} \quad \text{ja} \quad p_m = \frac{26}{51}.$$

Juhul, kui esimene kaart oli aga must, tulevad vastavad tõenäosused

$$p_p = \frac{26}{51} \quad \text{ja} \quad p_m = \frac{25}{51}.$$

Tuues üksikute sündmuste jaoks sisse tähistused: esimene kaart oli punane — A_1, must — A_2, teine kaart oli punane — B_1, must — B_2, võime eelnenud tõenäosused vastavas järjekorras kirjutada

$$p(B_1/A_1) = \frac{25}{51} \text{ (loetakse: sündmuse } B_1 \text{ tõenäosus tingimusel, et toimus sündmus } A_1\text{)},$$

$$p(B_2/A_1) = \frac{26}{51}, \quad p(B_1/A_2) = \frac{26}{51}, \quad p(B_2/A_2) = \frac{25}{51}.$$

Esitatud suurusi nimetatakse tinglikeks tõenäosusteks, neid kasutades saab leida näiteks tõenäosuse, et mõlemad pakist võetud kaardid osutuvad punasteks

$$p(A_1B_1) = p(A_1) \cdot p(B_1/A_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{51} = \frac{25}{102}.$$

Tutvunud põgusalt tinglike tõenäosuste mõistega, vaatleme järgnevalt, kuidas nende abil tuuakse sisse tinglik entroopia. Olgu meil antud täielikud sündmuste süsteemid: A sündmustega A_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ ja B sündmustega B_j, $j = 1, 2, \ldots, n$. Olgu sündmuste A_i esinemise tõenäosused $p(A_i)$ ja tinglikud tõenäosused

$$p(B_j/A_i) \text{ (iga } j \text{ ja } i \text{ korral).}$$

Shannoni valemi põhjal saame analoogiliselt tavalise entroopiaga arvutada süsteemi B tingliku entroopia tingimusel, et toimus sündmus A_i:

$$H_{A_i}(B) = -\sum_{j=1}^{n} p(B_j/A_i) \log p(B_j/A_i).$$

Süsteemi B keskmine tinglik entroopia $H_A(B)$ süsteemi A suhtes arvutatakse valemiga

$$H_A(B) = \sum_{i=1}^{m} p(A_i) \cdot H_{A_i}(B),$$

millele võime, kasutades $H_{Ai}(B)$ avaldist, anda kuju

$$H_A(B) = -\sum_{i=1}^{m} p(A_i) \sum_{i=1}^{n} p(B_j/A_i) \log p(B_j/A_i).$$

Tõenäosusteooriast tuntud valemite

$$p(A_iB_j) = p(A_i) \cdot p(B_j/A_i)$$

ja

$$\sum_{j=1}^{n} p(A_iB_j) = p(A_i)$$

põhjal saame seosed

$$H_A(B) = -\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \frac{p(A_i)p(A_iB_j)}{p(A_i)} [\log p(A_iB_j) - \log p(A_i)] =$$

$$= -\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p(A_iB_j)\log p(A_iB_j) -$$

$$-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p(A_iB_j)\log p(A_i) = H(AB) - H(A).$$

Seega oleme jõudnud tulemuseni

$$H_A(B) = H(AB) - H(A), \tag{1}$$

millest kergesti järeldub valem kahest sõltuvast katsest koosneva süsteemi entroopia arvutamiseks

$$H(AB) = H(A) + H_A(B).$$

On tõestatav[2], et entroopia ja tingliku entroopia vahel kehtib võrratus

$$0 \leqslant H_A(B) \leqslant H(B), \tag{2}$$

kus võrdus $H_A(B) = 0$ esineb juhul, kui katse A määrab üheselt katse B tulemuse, s. t. kui igale katse A sündmusele A_i vastab ühega võrdse tõenäosusega mingi katse B sündmus B_j; $H_A(B) = H(B)$, kui katsed A ja B on sõltumatud.

Kasutades entroopia mõistet võime määratleda informatsiooni hulga mõiste. Informatsiooni hulgaks sündmuste süsteemide A ja B vahel nimetatakse suurust $I(A; B)$, mis arvutatakse valemiga:

$$I(A; B) = H(B) - H_A(B);$$

Sisuliselt mõõdab informatsioon katse B entroopia vähenemist katse A teostamise tagajärjel. Seosest (2) järeldub vahetult võrratus:

$$I(A; B) \geqslant 0.$$

Valemi (1) abil saame informatsiooni hulga arvutamiseks teise valemi

$$I(A; B) = H(A) + H(B) - H(AB),$$

millest järeldub informatsiooni hulga sümmeetrilisus

$$I(A; B) = I(B; A).$$

---

[2] Vt. näiteks A. Feinstein. Foundations of information theory. New York-Toronto-London, 1958.

Entroopia ja informatsiooni hulga mõisted on laiendatavad ka loenduvast hulgast sündmustest koosnevatele süsteemidele ja pidevatele juhuslikele suurustele.

Lõpuks esitame veel paar näidet informatsiooniteooria põhimõistete võimalike rakenduste kohta.

Mitmed psühholoogid on teinud paljudes variatsioonides järgmist eksperimenti. Katsealuse ette lauale seati teatud arv (kuni kümme) värvilist lambikest ja nuppu. Mingi lambi süttimisel pidi katsealune vajutama vastavalt lambi värvusele ühele tema ees olevatest nuppudest. Reageerimisaeg, s. o. aeg, mis kulus lambi süttimisest nupule vajutamiseni, mõõdeti. Muutes lambikeste arvu ja erineva värvusega lambikeste süttimise sagedust, muudeti katse entroopiat. Katse tulemuste analüüsimisel selgus huvitav tõsiasi — keskmine reageerimisaeg oli (katsevigade piirides) lineaarses sõltuvuses katse entroopiast. Analoogilised katsed masinakirjutajate ja pianistidega, kellele anti vastavalt kirjutada juhuslikest tähtedest mõttetut teksti ja mängida «mõttetut» muusikapala, kinnitasid veelgi sellise sõltuvuse olemasolu.

Informatsiooniteooriat kasutatakse laialdaselt ka keele uurimisel, kuna keelt iseloomustavaid informatsiooniteoreetilisi suurusi saab ära kasutada näiteks suulise või kirjaliku kõne edasiandmisega seotud probleemide tehnilisel lahendamisel. Kirjakeele lihtsaimaks ühikuks on täht. On huvitav teada, milline hulk informatsiooni langeb keskmiselt ühele tähestiku tähele. (See on arvuliselt võrdne tähestiku entroopiaga). Kõige jämedamaks lähenemisviisiks esitatud küsimusele on arvutada otsitav suurus I, lähtudes tähtede arvust tähestikus, lugedes esimeses lähenduses kõigi tähtede esinemised võrdtõenäosteks. Nii tuleb näiteks inglise keeles ühe tähe kohta informatsiooni

$$I_0 = \log 27 = 1{,}43 \text{ kümnendühikut.}$$

(Logaritmitav arv on 27, kuna tähestik ise sisaldab 26 tähte ja peale nende on kasutamisel veel tühik sõnade vahel.)

Saadud väärtust võib vaadelda ainult kui tegeliku informatsiooni hulga ülemist tõket, sest keeles ei esine kõik tähed võrdse tõenäosusega. Näiteks eesti keeles võib kohata tähte «e» tunduvalt sagedamini kui tähte «ü». Järelikult saame ühe tähe kohta tuleva informatsiooni hulga jaoks täpsema hinnangu, kui arvutame iga tähe esinemise tõenäosust. Nii on sel korral inglise keele ühe tähe kohta tulev informatsioon keskmiselt

$$I_1 = 1{,}21 \text{ kümnendühikut.}$$

(Eesti keele kohta täpsemad andmed kahjuks veel puuduvad.)

Veelgi paremaid tulemusi saame, kasutades tähepaaride, tähekolmikute või pikemate tähekombinatsioonide esinemise sagedusi, kuid enam kui nelja tähe korral valmistab nende sageduste leidmine töö mahukuse tõttu raskusi isegi tänapäeva kiireimatele arvutitele.

Selline tähe kohta tuleva informatsiooni hulga uurimine on aluseks huvitavatele, seni küll veel üsna algstaadiumis olevatele tulemustele kirjandusteoste stiili uurimisel. Nimelt selgub, et informatsiooni hulk ühe tähe kohta on oluliselt erinev erinevat laadi teostes. Kõige väiksem on see harilikult teaduslikes kirjutistes ning seda just viimaste lakoonilise ja suhteliselt vaese sõnavara tõttu. Kuid ka ilukirjanduslike teoste sellelaadilisel uurimisel tulevad ilmsiks võrdlemisi suured erinevused. Kindlaid erinevuste piire ja järjestust veel muidugi anda ei saa, ometi võib öelda, et vähim informatsioon keeleühiku kohta peitub klassikalises stiilis kirjutatud luules. Põhjuseks on siin formaalsed kitsendused luuletusele riimi, värsimõõdu jne. näol. Tähe kohta tuleva informatsiooni hulga suhtes võib pidada sammuks edasi vabavärssi, milles autoril on võimalus vabamalt, ilma klassikalise ranguseta avaldada oma mõtteid ja pakkuda enam ootamatusi.

Kõige kõrgemal astmel «informatiivsuse» järgi asuvad muidugi proosateosed, kuid ka need ei mahu kõik ühte kitsasse lahtrisse, sest autori võimed ja teose iseloom on siin paljudel juhtudel erinevad. Teosed, mille keel on lakooniline, milles sündmused toimuvad rahulikult, paistavad silma informatsiooni vähese hulgaga. Seevastu teoseid rikkaliku sõnavara, eredate väljendite, kiirelt toimuva ja põneva sündmusega iseloomustab suur informatsioonitihedus.

Nagu juba öeldud, leiab informatsiooniteooria laialdast rakendamist tänapäeva paljudes teadusharudes, kuid kõigi nende võimaluste vaatlemine viiks käesoleva artikli raamidest välja.

N. WIENERI MÕTTEID

Üks tähtsaist probleemidest[1], millega me tingimata tulevikus kokku puutume, on probleem inimese ja masina vahelisest suhtest, probleem inimese ja masina funktsioonide määramisest. Esimesel pilgul tundub, et masinal on terve rida ilmseid eeliseid inimese ees. Tõepoolest, masin töötab kiiremini... Arvutusmasin võib ühe päeva jooksul teha nii palju tööd, nagu suudaks terve arvutajate brigaad aasta jooksul, kusjuures masin arvutab minimaalse vigade arvuga.

* * *

Andke inimesele, mis inimlik ja arvutusmasinale, mis masinlik.

---

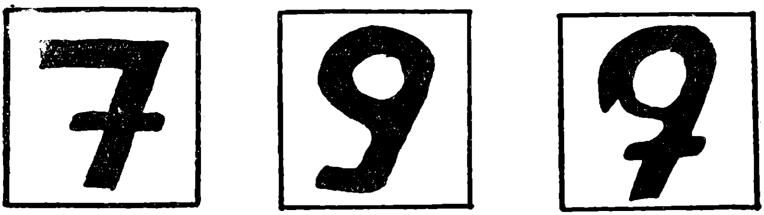
[1] Hiljuti ilmus Moskvas kirjastuse «Progress» väljaandes küberneetika rajaja Norbert Wieneri viimase raamatu «Looja ja robot» venekeelne tõlge. Selles raamatus vaatleb autor põhiliselt kolme probleemi a) õppivate masinate probleemi, b) masinate paljunemise probleemi ja c) inimese ja masinate vahelise suhte probleemi. Toodavad kärped pärinevadki nimetatud raamatust (vt. samuti lk. 56).

RÄÄGIME KUJUNDITE ERISTAMISEST

A. Riesen

1. Huvitav ülesanne

Alljärgneval joonisel näeme ruutude sees kolme kujundit. Mida on siin kujutatud?



A *B* *C*

Kaks esimest (*A* ja *B*) tunneme kohe ära, need on numbrid 7 ja 9. Kahtlusi tekitab kolmas. Tähelepanelikumal silmitsemisel leiame temas sarnaseid jooni nii 7 kui ka 9-ga. Mõni kannatamatu inimene lahendab ülesande lihtsalt — kriips on kujundil nagu 7-l, küllap ta siis 7 on. «Aga», ütleb skeptik, «võib-olla pole üldse tegemist numbriga. Minu arvates...»

Võib-olla on õigus ühel, võib-olla teisel. Üks on aga selge — tahes-tahtmata hakkasime tundmatut kujundit võrdlema tuntuga. Ja küllap nii ongi kõige õigem.

Käesolev artikkel tutvustab lugejale võimalust tekkinud kitsikusest välja pääseda matemaatiliste meetodite kasutamisega. Jutt on küberneetikas hiljuti tekkinud uuest suunast — kujundite eristamisest.

2. Kujundite eristamisest

Kuna elektronarvutid tungivad üha kiiremini meie igapäevasesse ellu, kasvab vajadus selliste vahendite järele, mis võimaldavad inimesel masinaga suhelda. Meile on vaja arvuteid, mis loevad masina- ja käsikirjalist teksti, arvuteid, mida juhitakse häälega, ühest keelest teise tõlkimise masinaid jne.

Huvitav on märkida, et paljudel juhtudel peavad arvutid lahendama ülesannet, mis on analoogiline punktis 1 käsitletuga. Näiteks käsikirja lugemisel peab arvuti kõiki tähti järjekorras võrdlema oma mälus salvestatutega. Täpsemalt — arvuti «tunneb» teatud hulka tähtede «*a*», «*b*», ... erinevaid kujusid ja lahendab ülesannet: missuguse tähega sarnaneb kõige enam tundmatu kujund.

Olgu meil tegemist kellegi poolt hääldatud konkreetse sõnaga, kellegi käekirjaga või mõne ohtliku situatsiooniga. Me ütleme, et see sõna on üks element klassist, mille moodustavad kõik selle sõna hääldamise variandid eri inimeste poolt. Klassideks on ka mingi inimese suvalised kirjutised ning kõik situatsioonid, mida võiks nimetada ohtlikeks.

On selge, et enne, kui me saame hakata tundmatut kujundit paigutama ühte või teise klassi, peavad viimased olema kindlaks määratud. Selleks me uurime paljusid elemente ja püüame nendes leida ühiseid omadusi. See on üldine protsess ja moodustab tulevase klassi sisu, sest klassiks ehk kujundiks me nimetame elementide hulka, millel on teatavaid ühiseid tunnuseid. Klasside moodustamise protsessi nimetame kujundi väljavalimiseks [2].

Kujundi eristamisena [2] mõistame tundmatute objektide või situatsioonide paigutamist ühte paljudest võimalikest klassidest (kujunditest).

Järelikult on kujundi eristamine seni vaatlemata objekti paigutamine mingisse klassi selle objekti omaduste võrdlemise teel klassi liikmete ühiste tunnustega. Näiteks kõne ja muusika puhul seisneb kujundi väljavalimine nende sisemiste karakteristikute leidmises, mille poolest kõne ja muusika teineteisest erinevad; kujundi eristamisel aga kasutatakse vahendeid, mis rakendavad leitud karakteristikuid.

Kujundite väljavalimise ja eristamise meetodeid võib jagada kolme gruppi. Esimese grupi puhul teostab kujundi väljavalimise protsessi inimene, kujundi eristamise aga arvuti. Tulemused on siin tunduvalt originaalsemad kui teisel juhul, kus ka kujundi väljavalimise teostab arvuti. Kolmanda grupi puhul ühendatakse kujundi väljavalimise ja eristamise ülesanne ühiseks optimaalse lahendi või optimaalse klassifikatsiooni leidmise ülesandeks. Arvuti õpetatakse kujundeid välja valima. Näiteks muusika- ja kõnehelide eristamise ülesande puhul tuleb uurida ühtesid ja teisi kujundeid kasvõi heli võnkumise seisukohalt ja leida nende kirjeldus sellises vormis, et kõnehelisid võiks eristada muusikahelidest vigade minimaalse tõenäosusega.

Kujundite eristamise ülesande puhul kitsamas mõttes esitatakse kaks probleemi:

1. Minimiseerida tundmatu kujundi ja klassi ühiste tunnuste arvu nii, et järgnev eristamisprotsess oleks lihtsam.

2. Leitud tunnuste põhjal paigutada tundmatu kujund ühte paljudest klassidest.

Kujundite eristamise teadusharu on väga noor. Vaatamata sellele ootavad tema tulemusi pikisilmi teised teadusharud. Viimase viie aastaga on artiklite arv kujundite eristamisest kasvanud tohutu suureks. Uus teadusharu on vajalik kõikidele: meedikutele, bioloogidele, geoloogidele, psühholoogidele, kohtuekspertidele jt. Illustreerime seda mõne näitega.

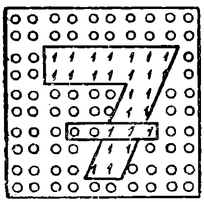
Suurest Isamaasõjast on möödunud üle kahekümne aasta, kuid tema tummad tunnistajad — ühishauad on säilinud. Kes on ühishauda maetud? Kas mehed või naised? Noored või vanad? Mis rahvusest inimesed? Säilinud jäänuste abil, võttes appi kujundite eristamise uusimad meetodid, võib nendele küsimustele ammendavalt vastata.

Keegi arheoloog avastas sügaval kaljude vahel tundmatu looma jäljendi. Leidu pildistatakse ja mõõdetakse. Saadud andmed tema kohta antakse elektronarvutile. Arvuti võib anda vastuse, missuguse ürgloomaga jäljend kõige enam sarnaneb.

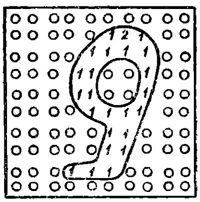
Eesti kalurid püüavad kilu Soome lahes, Riia lahes ja avamerel. Nendest kolmest kohast püütud kilud pole päris sarnased. Neid võib jagada ligikaudu kuude klassi (osa klasse tekib üleminekukohtade kiludest) nendele iseloomulike tunnuste järgi. See annab võimaluse juhusliku püütud kilu paigutamiseks ühte nendest klassidest. Vaatlusandmete põhjal võib arvutada kilude rännuteed, mis kalameestele mitte sugugi tähtsusetu pole.

3. Kujundi eristamise algoritm

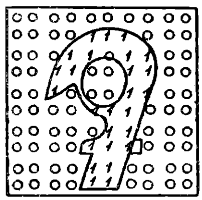
Juhime nüüd lugeja tähelepanu sellele, et kujundeid A, B ja C punktist 1 võiksime esitada kujul.



A'



B'



C'

Numbri 1 kirjutame ruudukesse, kui kujund täidab üle 50% tema pinnast. Nüüd on lugejal kerge veenduda, et punktis 1 esitatud ülesanne on edaspidise uurimuse iseloomulikuks näiteks.

Olgu meil tegemist kahe klassiga $\mathfrak{X}_1 = \{x_i^1\}$ $(i = 1, \ldots, m)$ ja $\mathfrak{X}_2 = \{x_i^1\}$ $(i = 1, \ldots, n)$, mis koosnevad samadimensionaalsetest vektoritest, mille koordinaatideks on ainult arvud 1 ja 0. Peale selle olgu antud samadimensionaalne vektor x, mille kohta me ei tea, kumba klassi ta kuulub. Olgu näiteks klassid järgmised:

$\mathfrak{X}_1$	0000011000	$\mathfrak{X}_2$	0011001111	x	1111001101
	1010000010		0001010100		
	1111101111		0111101000		
	0101110101		1100110011		

Siin $m = n = 4$. Kujundite eristamise algoritm [1] on järgmine.

Liidame klassi $\mathfrak{X}_1$ igale vektorile x_i^1 vektori x, kusjuures vastavad koordinaadid liidame mooduli 2 järgi (liitmine mooduli 2 järgi on defineeritud seostega $1+1=0$, $1+0=1$, $0+1=1$ ja $0+0=0$). Saame nn. v õ r d l u s v e k t o r i d $\bar{x}_i^1$, mis moodustavad uue klassi

$$\overline{\mathfrak{X}}_1 : \begin{array}{l} 1111010101 \\ 0101001111 \\ 0000100010 \\ 1010111000 \end{array}$$

Analoogiliselt leiame ka vektorite x_k^2 ja x võrdlusvektorid $\bar{x}_k^2$. Saame klassi

$$\overline{\mathfrak{X}}_2 : \begin{array}{l} 1100000000 \\ 1110011001 \\ 1000100101 \\ 0011111110 \end{array}$$

Iga võrdlusvektori järele kirjutame temas nulliga võrduvate koordinaatide arvud α_i^1 ja α_k^2 $(i = 1, \ldots, m;\ k = 1, \ldots, n)$

$\overline{\mathfrak{X}}_1$	1111010101 (3)	$\overline{\mathfrak{X}}_2$	1100000000 (7)
	0101001111 (4)		1110011001 (4)
	0000100010 (8)		1000100101 (6)
	1010111000 (5)		0011111110 (3)

On lihtne taibata, et mida suurem on arv võrdlusvektorites $\bar{x}_i^1$ või võrdlusvektorites $\bar{x}_k^2$, seda suurem on sarnasus vektorite x_i^1 ja x vahel (vastavalt x_k^2 ja x vahel).

Leiame nüüd summad $E(\mathfrak{X}_1) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^1$ ja $E(\mathfrak{X}_2) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2$.

Saame $E(\mathfrak{X}_1) = 3 + 4 + 8 + 5 = 20$ ja $E(\mathfrak{X}_2) = 7 + 4 + 6 + 3 = 20$.

On mõistlik lugeda, et kui $E(\mathfrak{X}_1) > E(\mathfrak{X}_2)$, siis $x \in \mathfrak{X}_1$, kui aga $E(\mathfrak{X}_1) < E(\mathfrak{X}_2)$, siis $x \in \mathfrak{X}_2$.

Et ka praegusel juhul, kus $E(\mathfrak{X}_1) = E(\mathfrak{X}_2)$, mingit otsust teha, võtame mingi raja $T_j \in \{0, 1, 2, \ldots, M\}$ ($T_0 = 0$, $T_1 = 1, \ldots, T_M = M$) ja leiame summad $E(\mathfrak{X}_1) = \sum_{a_i^1 \geqslant T_j} a_i^1$ ja $E(\mathfrak{X}_2) = \sum_{a_k^2 \geqslant T_j} a_k^2$.

Seega T_j on arv, millest väiksemad liidetavad $a_i^1 < T_j$ ja $a_k^2 < T_j$ me summas $E(\mathfrak{X}_1)$ ja $E(\mathfrak{X}_2)$ jätame ära.

Võime öelda, et me hakkame vektorit x võrdlema klasside $\mathfrak{X}_1$ ja $\mathfrak{X}_2$ parimate esindajatega, jättes vaatlusest välja väheütlevad vektorid. Nii näiteks $T_j = 5$ korral $E(\mathfrak{X}_1) = 5 + 8 = 13$, $E(\mathfrak{X}_2) = 7 + 6 = 13$; $T_j = 6$ puhul $E(\mathfrak{X}_1) = 8$, $E(\mathfrak{X}_2) = 6 + 7 = 13$ ja $x \in \mathfrak{X}_2$.

4. Tunnuste minimiseerimise algoritm

Kujundite eristamise puhul kasutatakse veel algoritmi [1], mis võimaldab vähendada klasside $\mathfrak{X}_1$ ja $\mathfrak{X}_2$ ning vektori x koordinaatide arvu. Püütakse eristada vektorite sellised koordinaadid, mis vähe iseloomustavad klasse ja vektorit, millega meil on tegemist. Kui näiteks klasside

$$\begin{array}{llll} \mathfrak{X}_1 & 0000011000 & \text{ja} \quad \mathfrak{X}_2 & 0011001111 \\ & 1010000010 & & 0011001111 \\ & 1111101111 & & 0111101000 \\ & 0101110101 & & 1100110011 \end{array}$$

puhul osutub, et kuues koordinaat annab meile vähe klassidele ja vektorile iseloomulikku ja me saame läbi ilma temata, siis vaatleme edasi klasse kujul

$$\begin{array}{llll} \mathfrak{X}'_1 & 000001000 & \mathfrak{X}'_2 & 001101111 \\ & 101000010 & & 000100100 \\ & 111111111 & & 011111000 \\ & 010110101 & & 110010011 \end{array}$$

ja vektorit x kujul 111101101.

Säärast protsessi me nimetame **tunnuste minimiseerimiseks**.

Vaatleme nüüd tunnuste minimiseerimise algoritmi. Etappide kaupa oleks see järgmine.

1) Leiame klassi $\mathfrak{X}_1$ klassisisesed võrdlusvektorid. Selleks liidame klassi $\mathfrak{X}_1$ igale vektorile x_i^1 mooduli 2 järgi järgimööda kõik ülejäänud selle klassi vektorid ja kirjutame saadud tulemused üksteise alla. Saame klassi

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{X}_{11} & 1010011010 = x_1^1 + x_2^1 \\ & 1111110111 = x_1^1 + x_3^1 \\ & 0101101101 = x_1^1 + x_4^1 \\ & 0101101101 = x_2^1 + x_3^1 \\ & 1111110111 = x_2^1 + x_4^1 \\ & 1010011010 = x_3^1 + x_4^1 \end{array}$$

kusjuures vektorite arv uues klassis $\mathfrak{X}_{11}$ on $N_{11} = \frac{m(m-1)}{2}$.

2) Leiame analoogiliselt $\mathfrak{X}_2$ klassisisesed võrdlusvektorid. Moodustub klass

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{X}_{22} & 0010011011 = x_1^2 + x_2^2 \\ & 0100100111 = x_1^2 + x_3^2 \\ & 1111111100 = x_1^2 + x_4^2 \\ & 0110111100 = x_2^2 + x_3^2 \\ & 1101100111 = x_2^2 + x_4^2 \\ & 1011011011 = x_3^2 + x_4^2 \end{array}$$

mis koosneb $N_{22} = \frac{n(n-1)}{2}$ vektorist.

3) Leiame $\mathfrak{X}_1$ ja $\mathfrak{X}_2$ klassidevahelised võrdlusvektorid, liites $\mathfrak{X}_1$ igale vektorile mooduli 2 järgi $\mathfrak{X}_2$ kõik vektorid. Saame klassi

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{X}_{12} & 0011010111 = x_2^1 + x_1^2 \\ & 0001001100 = x_1^1 + x_2^2 \\ & 0222220000 = x_1^1 + x_3^2 \\ & 1001001101 = x_1^1 + x_4^2 \\ & 1001001101 = x_2^1 + x_1^2 \\ & 1011010110 = x_2^1 + x_2^2 \\ & 1101101010 = x_2^1 + x_3^2 \\ & 0110110001 = x_2^1 + x_4^2 \\ & 1100100000 = x_3^1 + x_1^2 \\ & 1110111011 = x_3^1 + x_2^2 \\ & 1000000111 = x_3^1 + x_3^2 \\ & 0011011100 = x_3^1 + x_4^2 \\ & 0110111010 = x_4^1 + x_1^2 \\ & 0100100001 = x_4^1 + x_2^1 \\ & 0010011101 = x_4^1 + x_3^2 \\ & 1001000110 = x_4^1 + x_4^2 \end{array}$$

Klassidevahelisi võrdlusvektoreid on arvult $N_{12} = m \cdot n$.

4) Leiame nüüd klasside $\mathfrak{X}_{11}$, $\mathfrak{X}_{22}$ ja $\mathfrak{X}_{12}$ puhul vastavad suurused α_p^{11}, α_r^{22} ja α_s^{12}. ($p = 1, \ldots N_{11}$, $r = 1, \ldots, N_{22}$, $s = 1 \ldots, N_{12}$), mis näitavad vektorite nulliga võrduvate koordinaatide arvu. Saame

$a_1^{11} = 5, \quad a_2^{11} = 1, \quad a_3^{11} = 4, \quad a_4^{11} = 4, \quad a_5^{11} = 1, \quad a_6^{11} = 5;$

$a_1^{22} = 5, \quad a_2^{22} = 5, \quad a_3^{22} = 2, \quad a_4^{22} = 4, \quad a_5^{22} = 3, \quad a_6^{22} = 3;$

$a_1^{12} = 4, \quad a_2^{12} = 7, \quad a_3^{12} = 5, \quad a_4^{12} = 4, \quad a_5^{12} = 5, \quad a_6^{12} = 4,$

$a_7^{12} = 4, \quad a_8^{12} = 5, \quad a_9^{12} = 7, \quad a_{10}^{12} = 2, \quad a_{11}^{12} = 6, \quad a_{12}^{12} = 5,$

$a_{13}^{12} = 4, \quad a_{14}^{12} = 7, \quad a_{15}^{12} = 5, \quad a_{16}^{12} = 6.$

5) Edasi leiame klassi $\mathfrak{X}_{11}$ kuuluvate vektorite (olgu nad tähistatud x_p^{11} $(p = 1, \ldots N_{11})$) summa vektori $x_1{}^*$ tavalises mõttes. Saame $x_1{}^* = \sum\limits_{p=1}^{N_{11}} x_p^{11} = (4444444444)$.

6) Analoogiliselt leiame klassi $\mathfrak{X}^{22}$ kuuluvate vektorite x_r^{22} $(r = 1, \ldots, N_{22})$ summavektori $x_2{}^*$ tavalises mõttes: $x_2{}^* = \sum\limits_{r=1}^{N_{22}} x_r^{22} = (3443444444)$.

Meenutame siinjuures, et praeguse algoritmi esimesel ja teisel etapil oli meie eesmärgiks leida klassi iga vektori võrdlusvektor kõigi ülejäänud selle klassi vektoritega. Tegelikult leidsime me aga poole vähem võrdlusvektoreid, sest võrreldes näiteks esimest vektorit teisega, saame sama tulemuse kui võrreldes teist esimesega. Niisiis $N_{11} = \frac{m(m-1)}{2}$ võrdlusvektori asemel peab meil neid olema $2N_{11} = m(m-1)$ ja N_{22} asemel $2N_{22} = n(n-1)$. Seda arvestades avalduvad lõplikud summavektorid kujul

$$2x_1{}^* = (8888888888) \text{ ja } 2x_2{}^* = (6886888888).$$

7) Leiame ka klassi $\mathfrak{X}_{12}$ kuuluvate vektorite $x_s{}^{12}$ $(s = 1, \ldots, \ldots, N_{12})$ summavektori $x_{12}{}^*$ tavalises mõttes: $x_{12}{}^* = (8888888888)$.

8) Missuguseid klassi omadusi iseloomustavad vektorid $2x_1{}^* = (8888888888)$ ja $2x_2{}^* = (6886888888)$? Meenutame, et nende vektorite mingi koordinaat on saadud vastava klassi võrdlusvektorite selles koordinaadis olevate 1-de summana. Arv 1 tähistab aga seda, et vektorid, mida võrreldi, ei olnud selle koordinaadi järgi võrdsed.

Et $\mathfrak{X}_{11}$ puhul on võrreldud klassisiseseid vektoreid, siis mida suuremad on $2x_1{}^*$ koordinaadid, seda vähem sarnanevad klassi $\mathfrak{X}_1$ vektorid omavahel. Seega $x_1{}^*$ iseloomustab koordinaatide kaupa klassi $\mathfrak{X}_1$ omanäolisust. Analoogiliselt teeb seda klassi $\mathfrak{X}_2$ suhtes vektor $2x_2{}^*$.

Vektori $x_{12}{}^*$ puhul meenutame, et tema koordinaadid on saadud klassidevaheliste võrdlusvektorite ühega võrdsete koordinaatide liitmisel. Seega ta iseloomustab koordinaatide kaupa klasside $\mathfrak{X}_1$ ja X_2 vektoritevahelist erinevust.

Kõike seda arvestades nimetame edaspidi vektoreid $2x_1{}^*$ ja $2x_2{}^*$ klassisisesteks erinevusvektoriteks, vektorit $x_{12}{}^*$ aga klassidevaheliseks erinevusvektoriks.

Juhul, kui klassidevahelise erinevusvektori mingi koordinaat on suurem kui klassisiseste erinevusvektorite samade koordinaatide summa, siis iseloomustab see koordinaat hästi klasside erinevust, nende spetsiifikat. Selle koordinaadi jätame klassides $\mathfrak{X}_1$ ja $\mathfrak{X}_2$ ning vektoris x alles. Ülejäänud koordinaadid võime ära jätta.

Niisiis, öeldut arvestades tuleb arvutada

$$x_{12}^* - 2x_1^* - 2x_2^* = x_s.$$

9) Toome nüüd uuesti sisse raja $T_j \in \{0, 1, \ldots, M\}$ ($T_0 = 0, \ldots T_M = M$) ja leiame vektorid x_1^*, x_2^* ja x_{11}^* sellise arvestusega, et kui mingi vektori puhul klassidest $\mathfrak{X}_{11}$, $\mathfrak{X}_{22}$ ja $\mathfrak{X}_{12}$ pole vastavalt rahuldatud tingimused $\alpha_p^{11} \geqslant T_j$, $\alpha_r^{22} \geqslant T_j$ ja $\alpha_s^{12} \geqslant T_j$, siis neid vektoreid me x_1^* x_2^* ja x_{12}^* leidmisel ei arvesta.

On selge, et T_j erinevatel väärtustel saame erinevad vektorid x_1^*, x_2^* ja x_{12}^* ja järelikult ka erinevad vektorid x_s.

10) Leiame $S = \sum\limits_{j=1}^{M} x_{sj}$ ja $S^+ = \sum\limits_{\substack{j=1 \\ x_{sj} \geqslant 0}}^{M} x_{sj}$. Suuruse S all mõistame vektori x_s koordinaatide summat, S^+ all aga x_s positiivsete koordinaatide summat.

Andes rajale T_j väärtusi, leiame vastavad S väärtused. Kuna S tähistab vektori x_s koordinaatide summat, siis 8) põhjal tuleks tunnuste minimiseerimiseks kasutada seda vektorit, mille puhul $S = \max\{S\}$ või — veel parem — vektorit, mille puhul $S^+ = \max\{S^+\}$, sest S korral võib juhtuda, et mingi absoluutväärtuselt suur negatiivne arv «rikub ära» meie valiku. Sisuliselt tähendab selline valik, et just selle T_j väärtuste korral valitud alamruum iseloomustab kõige paremini antud klassi.

Niisiis, andes T_j-le väärtusi 0, ..., 10, saame tabel-maatriksi.

Tabel 1.

T_j	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	S	S+
0	—6	—8	—8	—6	—8	—8	—8	—8	—8	—8	—76	0
1	—6	—8	—8	—6	—8	—8	—8	—8	—8	—8	—76	0
2	—2	—4	—4	—2	—4	—4	—8	—4	—4	—4	—40	0
3	—1	—3	—3	0	—3	—3	—7	—2	—5	—5	—32	0
4	3	—1	—1	4	—1	—1	—5	0	—1	—1	—4	7
5	0	2	—2	5	2	—2	—2	4	—6	1	2	14
6	3	2	0	2	2	0	1	3	2	2	17	17
7	1	2	0	1	2	0	1	1	0	1	9	9
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Vektorid x_s moodustavad maatriksi read. Jälgides S ja S^+ veerge, näeme, et $T_i = 6$ korral on $S = 17$, $S^+ = 17$, s. o. kõige suuremad. Vektoritel x_l^1, x_k^2 ja x võime välja jätta 3. ja 6. koordinaadi. Saame

$\mathfrak{X}'_1$	00001000	$\mathfrak{X}'_2$	00101111	x	11101101
	10000010		00100100		
	11111111		01111000		
	01110101		11010011		

5. Kujundi eristamine kolme klassi puhul

Kui meil on tegemist kolme klassiga

$\mathfrak{X}_1$	0000011000	$\mathfrak{X}_2$	0011001111	$\mathfrak{X}_3$	1010111000
	1010000010		0001010100		0111101000
	1111101111		0111101000		1100110011
	0101110101		1100110011		1111101111

ja uuritavaks vektoriks on $x = (1111001101)$, siis toimub kõik analoogiliselt kahe klassi juhuga kuni tabel-maatriksite leidmiseni (tunnuste minimiseerimise algoritm tehakse läbi klasside $\mathfrak{X}_1$ ja $\mathfrak{X}_2$ jaoks, siis $\mathfrak{X}_1$ ja $\mathfrak{X}_3$ jaoks ning lõpuks $\mathfrak{X}_2$ ja $\mathfrak{X}_3$ jaoks. Saadakse kolm tabel-maatriksit). Meie klasside korral

$\mathfrak{X}_{11}$	1010011010(5)	$\mathfrak{X}_{22}$	0010011011(5)	$\mathfrak{X}_{33}$	1101010000(6)
	1111110111(1)		0100100111(5)		0110001011(5)
	0101101101(4)		1111111100(2)		0101010111(4)
	0101101101(4)		0110111100(4)		1011011011(3)
	1111110111(1)		1101100111(3)		1000000111(6)
	1010011010(5)		1011011011(3)		0011011100(5)
	$x^*_1 = (4444441444)$		$x^*_2 = (3443444444)$		$x^*_3 = (3334043344)$

$\mathfrak{X}_{12}$	0011010111(4)	$\mathfrak{X}_{13}$	1010100000(7)	$\mathfrak{X}_{23}$	1001110111(3)
	0001001100(7)		0111110000(5)		0100100111(5)
	0111110000(5)		1100101011(4)		1111111100(2)
	1100101011(4)		1111110111(1)		1100100000(7)
	1001001101(5)		0000111000(7)		1011101100(4)
	1011010110(4)		1101101010(4)		0110111100(4)
	1101101010(4)		0110110001(5)		1101100111(3)
	0110110001(5)		0101101101(4)		1110111011(2)
	1100100000(7)		0101010111(4)		1101010000(6)
	1110111011(2)		1000000111(6)		1011011011(3)
	1000000111(6)		0011011100(5)		0000000000(10)
	0011011100(5)		0000000000(10)		1000000111(6)
	0110111010(4)		1111001101(3)		0110001011(5)
	0100100001(7)		0010011101(5)		1011011011(3)
	0010011101(5)		1001000110(6)		0000000000(10)
	1001000110(6)		1010011010(5)		0011011100(5)
	$x^*_{12} = (8888888888)$		$x^*_{13} = (8888888878)$		$x^*_{23} = (10,88888888)$

Klasside $\mathfrak{X}_1$ ja $\mathfrak{X}_2$ jaoks on meil tabel-maatriks leitud (vt. tabel 1). Klasside $\mathfrak{X}_1$ ja $\mathfrak{X}_3$ jaoks saame tabel-maatriksi

Tabel 2.

T_j	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	S	S+
0	—6	—6	—6	—8	0	—8	—6	—6	—9	—8	—63	0
1	—6	—6	—6	—8	0	—8	—6	—6	—9	—8	—63	0
2	—3	—3	—3	—5	3	—5	—6	—3	—6	—5	—36	3
3	—3	—3	—3	—5	3	—5	—6	—3	—6	—5	—36	3
4	—2	—4	—2	—4	3	—3	—5	—4	—4	—4	—29	3
5	—4	—2	—2	—1	4	—2	—4	0	—5	—1	—17	4
6	—1	—2	1	—1	2	—1	1	0	0	—1	—2	4
7	1	0	1	1	2	1	1	0	0	0	7	7
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Klasside $\mathfrak{X}_2$ ja $\mathfrak{X}_3$ jaoks aga saame tabel-maatriksi

Tabel 3.

T_j	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	S	S+
0	—2	—6	—6	—6	0	—8	—6	—6	—8	—8	—56	0
1	—2	—6	—6	—6	0	—8	—6	—6	—8	—8	—56	0
2	—2	—6	—6	—6	0	—8	—6	—6	—8	—8	—56	0
3	—2	—6	—6	—6	0	—8	—6	—5	—9	—9	—57	0
4	0	—5	—4	—3	0	—7	—4	—5	—7	—7	—42	0
5	—1	—2	—4	—2	0	—4	—4	—3	—5	—5	—30	0
6	—1	0	1	0	1	0	1	0	—1	—1	0	3
7	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	3
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Edasi leiame nende kolme tabel-maatriksi summa

Tabel 4.

T_j	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	S	S+
0	—14	—20	—20	—20	—8	—24	—20	—20	—25	—24	—195	0
1	—14	—20	—20	—20	—8	—24	—20	—20	—25	—24	—195	0
2	—7	—13	—13	—13	—1	—17	—20	—13	—18	—17	—132	3
3	—6	—12	—12	—11	0	—16	—19	—10	—20	—20	—125	3
4	1	—10	—7	—3	2	—11	—14	—9	—12	—12	—75	10
5	—5	—2	—8	2	6	—8	—10	1	—16	—5	—45	18
6	1	2	2	3	5	1	3	3	1	1	24	27
7	3	3	1	2	5	1	2	1	0	1	16	19
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tulemusmaatriksi veerg S^+ omandab maksimaalse väärtuse 27, kui $T_j = 6$. Sellele vastab vektor ehk maatriksi rida (1223513311). Nagu näha, võime vektorite klassidest $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{X}_2$ ja $\mathfrak{X}_3$ ning vektoril x

1., 6., 9. ja 10. koordinaadi ära jätta, sest need koordinaadid iseloomustavad vähem antud klasse ja antud vektorit kui teised koordinaadid. Seega saame järgmised viiedimensionaalsete vektorite klassid:

$\overline{\mathfrak{X}}'_1$	000000	$\overline{\mathfrak{X}}'_2$	011011	$\mathfrak{X}'_3$	010110	x	111011
	010000		001001		111110		
	111111		111110		100100		
	101101		100100		111111		

Rakendades punktis 3 toodud algoritmi $T_i = 10$ korral, saame

$\overline{\mathfrak{X}}'_1$	111001 (2)	$\overline{\mathfrak{X}}'_2$	100000 (5)	$\overline{\mathfrak{X}}'_3$	101101 (2)
	101011 (2)		110010 (3)		000101 (4)
	000100 (5)		000101 (4)		011111 (1)
	010110 (3)		011111 (1)		000100 (5)

millest $E(\mathfrak{X}_1') = 12$, $E(\mathfrak{X}_2') = 13$ ja $E(\mathfrak{X}_3') = 12$. Seega $x \in \mathfrak{X}_2'$. Kolme klassi puhul toodud näitest 3 ilmneb, et algoritmi on samal põhimõttel võimalik rakendada ka nelja, viie jne. klassi puhul.

6. Algoritmi kasutamisest lihtsamatel juhtudel

Sageli on meil vaja kasutada kirjeldatud algoritmi lihtsate ülesannete lahendamisel, kus saaks hakkama ka ilma arvuti abita. Käsitsi arvutamisel on soovitav kasutada järgmisi arvutust lihtsustavaid meetodeid.

Olgu meil

$\mathfrak{X}_1$	0000011000
	1010000010
	1111101111
	0101110101

Jagame klassi alates paremast servast püstkriipsudega kolmeveerulisteks gruppideks, s. o.

0	000	011	000
1	010	000	010
1	111	101	111
0	101	110	101

Järgnevalt kirjutame vektori iga arvukolmiku asemele sellele tinglikult kahendarvule vastava kümnendsüsteemi arvu. Seega nüüd:

$\mathfrak{X}_1$	0030
	1202
	1757
	0565

Analoogiliselt

$\mathfrak{X}_2$	0011001111	$\mathfrak{X}_2$	0317
	0001010100		0124
	0111101000		0750
	1100110011		1463

Liitmise asemel moodul 2 järgi kasutame aga alljärgnevat sümmeetrilist liitmistabelit

+	01234567
0	01234567
1	10325476
2	23016745
3	32107654
4	45670123
5	54761032
6	67452301
7	76543210

Samuti peame meeles pidama, et arvud 0,1, ..., 7 meie mõttes sisaldavad vastavalt nulle

0	3	nulli
1	2	„
2	2	„
3	1	„
4	2	„
5	1	„
6	1	„
7	0	„

Lühikese treeningu järel võib seda moodust kasutada küllalt suure efektiivsusega.

7. Veel kord esimese ülesande juurde

Nüüd on õige aeg veel kord tagasi tulla meie esimese ülesande juurde, millest viimati rääkisime kolmanda punkti alguses. Me ei lahenda ülesannet siin mitte konkreetselt, vaid ainult põhimõtteliselt.

On selge, et numbreid 7 ja 9 võime ruudustikus mitut moodi kirjutada, küll laiema ja kitsama joonega, küll ühe või teise kujuga. Näiteks on meil arvust 9 kümme erinevat kirjutist. Iga sellist kirjutist iseloomustab erinev nullide ja ühtede ruudustik. Mingit konkreetset ruudustikku võime kirjutada aga ka ühe pika vektorina.

$$\begin{array}{ll} x_1 & 1100 \\ & 1111 \\ & 0000 \\ & 0011 \end{array}$$

kirjutame kujul $x_1 = (1100111100000011)$.

Kui jutt on 10×10 ruudustikust, kuhu on tehtud 10 erinevat kirjutist kujutisest «9», siis on selge, et iga konkreetne «9» annab meile sel viisil ühe sajadimensionaalse vektori ja kokku saame 10 sajadimensionaalset vektorit, ehk teisiti öeldes — moodustub üheksaklass.

Analoogiliselt, kui on tegemist «7» erinevate kirjutistega, saame ka seitsmeklassi. Selge on ka see, et mingi tundmatu kujund 10×10 ruudustikus annab meile ainult ühe 100-dimensionaalse vektori, mis tundmatut kujundit iseloomustab. Eespool kirjeldatud algoritmi abil võime kujundi paigutada kas seitsme- või üheksaklassi. Moodustades aga ka ühe-, kahe-, kolme-, nelja-, viie-, kuue-, kaheksa- ja nullklassid ning üldistades algoritmi kümnele klassile, võime juba eristada arve, s. o. öelda, missuguse numbriga tundmatu kujund kõige enam sarnaneb.

8. Algoritmi kasutamine diagnoosimisel

Olgu meil tegemist mingi haigusega A ja selle haiguse kõikvõimalike sümptoomidega $S_1, \ldots, S_n$. Kui indiviidid $I_1, \ldots, I_m$ põdesid seda haigust, siis võime koostada tabeli

A	S_1	S_2	...	S_n
I_1	1	0		1
I_2	0	1		0
⋮	⋮	⋮		⋮
I_m	1	0		1

Kui indiviidil I_2 esines sümptoom S_2, märgime teise rea ja teise veeru lõikekohta ühe, vastasel juhul nulli. Haiguse A jaoks saame klassi A. Analoogiliselt teostame teise haiguse B, kolmanda haiguse C jne. korral. Siinjuures võib klasside $A, B, C \ldots$ puhul rakendada sümptoomide minimiseerimise protsessi, mille tulemusena saavutatakse just see optimaalne piir, mille korral:

1) klassid on eristatavad;
2) sümptoomide arv viiakse miinimumini;
3) vektorid klassides võivad muutuda identseteks.

Praktiliselt kujuneks see protsess järgmiseks. Mingis haiglas mõõdab arst haigel teatud hulga sümptoome ja saadab saadud tulemused telegraafi või telefoni teel spetsiaalsesse arvutuskeskusse. Arvuti võrdleb antud sümptoomvektorit paljude haigusklassidega ja annab vastuse. Näiteks tõenäosusega 0,75 on haigus A, tõenäosusega 0,20 haigus B. Võib-olla nõuab masin ka täiendavaid sümptoome, et lõplikku otsust vastu võtta. Seda nimetatakse arsti ja arvuti dünaamiliseks seoseks. Saadud vastus teatatakse arstile, kes esitas sümptoomid. Protsessi ei tohi mõista nii, et arst talitab nüüd ainult masina eeskirjade järgi ja temast saab r a v i j a selle sõna kitsamas mõttes. Just arsti ja arvuti k o o s t ö ö s saavutatakse parimad tulemused.

Kirjandus:

1. Ф р а н ц у з А. Г. Об одном алгоритме опознания образов. Известия Академии наук СССР. Техническая кибернетика. 5, 1965.
2. С е б е с т н а н Т. С. Процессы принятия решения при распознании образов. Киев, 1965.

Majandusmatemaatika

MAJANDUSTEADUSE MATEMAATILINE KÄSITLUS

E. Leinemann

Majandusteaduslikes uurimustes on tänapäeval hakanud endale teed rajama teooria formaliseeritud käsitlus. Seda laadi lähenemist majandusteadusele kirjeldab ka käesolev artikkel, mille eesmärgiks pole mingi konkreetse teooria esitamine, vaid majandusteaduse matemaatilise ülesehituse metodoloogia mõningate küsimuste tutvustamine [1].

1. Majandusteaduse matemaatilisest ülesehitamisest

Majandusteaduse matemaatilisel ülesehitamisel tugineme teatud algmõistetele (selleks on tavaliselt matemaatilised mõisted) ja neid algmõisteid siduvatele lausetele, mida nimetatakse definitsioonideks, hüpoteesideks või postulaatideks. Algmõistete ja neid siduvate lausete otstarbekohasel valimisel võimaldab matemaatiline käsitlus arendada interpretatsioonide rohkuse poolest rikka teooria, mis on rakendatav majandusalase tegelikkuse paljudes eriolukordades.

Algmõisted. Majandusteaduse mõisted jagunevad ühelt poolt alg- ja tuletatud mõisteteks ning teiselt poolt meta- ja objektkeele terminiteks. Majandusteaduse matemaatilisel ülesehitamisel on *algmõisteteks* matemaatilised mõisted, nagu funktsioonid, operaatorid, vektorid ja maatriksid. Matemaatilised mõisted on majandusteaduse *metakeele terminiteks* [2], mille varal defineerime suurema osa teooria *objektkeele termineid* — majandusteaduslikke põhimõisteid, nagu tootmisüksuse ja tootmissüsteemi mõiste, tootmisüksuse majandustegevuse ja varu mõiste, tootmisüksuse ja tootmissüsteemi tasakaalu ning omahinna mõiste jt. Tootmisüksuste mitmesugused eriliigid (nagu tootmissektor, investeerimissektor ja põhifondid) on tootmissüsteemis üksteisega teatud kindlas vahekorras, mille dikteerib nende mõistete tegelikkusest päri-

---

[1] Artikli aluseks on autori töö *Tootmise tasakaal ja omahind*, mille neli osa on avaldatud ENSV TA Toimetistes, Ühiskonnateadused, 2, 3 (1966) ja 1, 2 (1967).

[2] Vt. näit. I. Kull, Semiootika ja õppeprotsess. — Matemaatika ja kaasaeg, VIII, lk. 34—42.

nev sisu. Mõiste majandusteadusliku sisu väljendamine ainult metakeele terminite varal tekitab mõnikord raskusi. Seetõttu võib metakeele terminite kõrval algmõisteks lugeda veel objektkeele mõne termini. Investeerimissektori ja põhifondide defineerimine on eriti lihtne näiteks sel juhul, kui loeme algmõisteks objektkeele termini — tootmissektor.

Majandusteadusliku teooria matemaatilisel ülesehitamisel moodustame meta- ja objektkeele terminitest mitmesuguseid lauseid — definitsioone, hüpoteese ja postulaate. Vaatleme neid lähemalt.

Definitsioonid. Matemaatika kui abstraktsete objektide loogiline käsitlus kasutab ainult rangelt piiritletud sisu ja mahuga mõisteid. Kirjeldava majandusteaduse mõisteid iseloomustab tavaliselt teatav ebamäärasus ja täpse piiritluse puudumine, mistõttu neid majandusteaduse matemaatilisel käsitlemisel vahetult ei saa kasutada. Majandusalasele tegelikkusele vastavad abstraktsed kvantitatiivsed mõisted, mida võiks kasutada majandusteaduse matemaatiliseks ülesehitamiseks, tuleb seetõttu kõigepealt defineerida.

Majandusteadusliku mõiste matemaatiline defineerimine toimub sel teel, et vastava majandusliku nähtuse paljudest tunnustest eraldame mõne või üheainukese kõige olulisema, mis seda nähtust käsiteldava teooria seisukohalt paremini iseloomustab [3]. Kuna matemaatiline teooria uurib majanduslike nähtuste sõltuvust ja vastastikust tingitust, siis tuleb nähtusi iseloomustavate oluliste tunnuste valikul silmas pidada mitte niivõrd seda, m i s vaadeldav nähtus oma olemuselt on, vaid eeskätt seda, k u i d a s see nähtus mõjutab teisi temast sõltuvaid nähtusi. Konkurentsi mõju hindamisel pole matemaatilise teooria seisukohalt oluline näiteks see, kes konkureerivad, vaid see, et konkurentsi eesmärk on kasumi suurendamine. Tootmissuhete kvantitatiivsel käsitlemisel pole niivõrd tähtis, mis on tootmissuhted, kuivõrd nende mõju tootmise arenemisele. Et erinevad teooriad defineerivad tegelikkuse üht ning sama nähtust erinevalt, see on teaduses tavaline. Niisugune iseärasus võimaldab isegi põhjalikumalt uurida nähtuse eri külgi, mille tulemuseks on nähtuse kui terviku sügavam tundmaõppimine. H. Poincaré järgi ei too teadusele kahju ükski selgelt väljendatud definitsioon ega hüpotees, sest sellest võime alati loobuda, kui vaatlus seda ei kinnita. Teadusele on aga ohtlikud niisugused hüpoteesid, mis tehakse vaikides, ebateadlikult või harjumusest, sest nendest oleme mõnikord võimetud loobuma isegi siis, kui nad on ilmses vasturääkivuses tegelikkusega.

Majandusteadusliku mõiste matemaatiline definitsioon ei saa niisiis kunagi pretendeerida majandusliku nähtuse kui lõpmata mitmekesise terviku täielikule haaramisele, vaid on sunnitud piirduma nähtuse selle külje abstraheerimisega, mis antud teooria

[3] Vt. R. M u l l a r i. Matemaatika ja tegelikkus. — Matemaatika ja kaasaeg, VIII, lk. 3—11.

jaoks on kõige olulisem, ja jätma kõrvale lõpmata hulga muid ebaolulisi tunnuseid. Selle vastutasuks tagab matemaatiline definitsioon mõistete laiema rakendatavuse, loogilise selguse, käsitluse lihtsuse ja korrektsuse. Abstraktsiooniprotsess suurendab seega vahemaad mõiste ja tegelikkuse vahel, selleks et niisugustele mõistetele rajatud teooria leiaks laiemat kokkupuutepinda tegelikkusega.

Hüpoteesid ja postulaadid. Tähtsamate eelduste, oletuste või kokkulepete esiletõstmiseks kasutatakse majandusteaduse matemaatilisel ülesehitamisel hüpoteese ja postulaate. *Hüpoteesina* mõistame enam-vähem tõenäost oletust, mis peab paika majandusalase tegelikkuse teatavas eriolukorras. Majandusalase tegelikkuse ühele või teisele eriolukorrale vastavalt võib mingi kahe majandusliku nähtuse seos avalduda kord nii, kord teisiti. Selle sõltuvuse konkreetse kuju määravadki majandusteaduslikud hüpoteesid. Investeerimistegevuse hüpoteesid määravad näiteks investeerimissektori sisend- ja väljundvoo vahelise sõltuvuse konkreetse kuju, asendamistegevuse hüpoteesid määravad väljalangevate ja asendatavate põhivahendite sõltuvuse põhifondide sisendvoost, amortiseerimistegevuse hüpoteesid määravad amortisatsiooni sõltuvuse põhivahendite varust jne. *Postulaadi* all mõistame kokkulepet, mida õigustab tava, vaatlus või loogiline argumentatsioon. Käsitluse tava ja loogiline argumentatsioon õigustavad näiteks rahvatulu jaotuse postulaate. Postulaadid tarbimise sõltuvuse kohta tarbimisfondist põhinevad pikaajalistel statistilistel vaatlustel. Loogilisele argumentatsioonile ja vaatlustele tuginevad postulaadid hõivuse ja põhivahendite kasutamise sõltuvuse kohta palga- ja fondimaksu määrast.

Majandusteaduse hüpoteesid ja postulaadid on tegelikkuse abstraktsioonid, mis defineerivad majanduslike nähtuste vaheliste seoste konkreetse matemaatilise väljenduse. Majanduslike seoste määramiseks püstitatud postulaatide vastuoludeta süsteemi nimetatakse seetõttu definitsiooniks postulaatide kaudu, kusjuures süsteemi koosseisu kuuluvaid postulaate käsitatakse kui definitsiooni osi.

Varem peeti postulaadiks lauset, mis oma ilmse kehtivuse tõttu ei vaja tõestamist. Teooriate aksiomaatilise käsitlusviisi arenemine, eriti täisarvude aritmeetika aksiomaatiline ülesehitus G. Peano poolt 1891. aastal[4] ja geomeetria aksiomaatiline ülesehitus D. Hilberti poolt 1899. aastal on muutnud endisi arusaami postulaatidest. Hüpoteese ja postulaate peetakse tänapäeval teooria teistest lausetest erinevaks mitte nende suurema ilmsuse tõttu, vaid selle erilise osa poolest, mida nad etendavad deduktsioonis[5].

[4] J. Hion. Naturaalarvude aksiomaatika. — Matemaatika ja kaasaeg, XII, lk. 33—40.
[5] Ü. Lumiste. Geomeetria alused, I. TRÜ rotaprint, 1964., lk. 15.

Tarbimise postulaadid pole näiteks mingil määral rohkem ilmsed kui neist tulenev tarbimisfunktsioon.

Valinud majandusteaduse ülesehitamiseks sobiva algmõistete, definitsioonide, hüpoteeside ja postulaatide süsteemi, tuleb edasises käsitluses deduktsioonivigade vältimiseks «unustada» tegelikkuse objektide kõik ülejäänud omadused ning arvestada ainult nimetatud süsteemi ja sellest tulenevaid järeldusi. Majandusalase tegelikkuse juurde pöördume tagasi alles siis, kui toimub teooria järelduste interpreteerimine ja kontroll, mis määrab ülesehitatud teooria viljakuse. Viimane on ainus usaldatav kriteerium, mille järgi otsustame, kas kasutatud algmõistete, definitsioonide, hüpoteeside ja postulaatide süsteem on otstarbekohane või mitte.

Tootmissüsteemi graaf. H. Poincaré ütleb, et matemaatika on kunst näiliselt erinevatele asjadele sama nime anda. Kui väljendusviis on hästi valitud, siis võib hämmastusega märgata, et kõik tõestused teatud objektide kohta on kohe ülekantavad uutele objektidele, kusjuures ei ole tarvidust kasutada isegi uusi nimetusi. Üheks niisuguseks laia rakendusega matemaatiliseks distsipliiniks on graafiteooria [6], mis võimaldab valada samasse matemaatilisse vormi väga palju erineva sisuga tegelikkuse nähtusi.

Tootmissüsteemi matemaatilise mudeli koostamisel on otstarbekohane lähtuda graafist, mille elemente interpreteerime järgmiselt:

a) graafi *sõlmedeks* on naturaalarvudega märgitud ringid, mis tähistavad tootmisüksusi;

b) graafi *kaarteks* on (sirglõiguga, murdjoonega või kõvera kaarega märgitud) nooled, mis registreerivad tootmisüksuste sisend- ja väljundvooge;

c) graafi kaartega vastavusse seatud *mittenegatiivsed arvud* on tootmisüksuste sisend- ja väljundvoo koordinaadid, mis näitavad kaupade kulu või kasutamist ajaühikus;

d) graafi kaartel võivad veel asetseda ladina, kreeka või gooti tähtedega märgitud *ristkülikud*, mis tähendavad tootmisüksuste sisend- ja väljundvooge reguleerivaid operaatoreid.

Kerge on veenduda, et n sõlmega ühekordse graafi kõigi võimalike kaarte maksimaalarv on n^2. Märgime graafi sõlmed naturaalarvudega 1, 2, ..., n ja seame graafi kaartega vastavusse mittenegatiivsed reaalarvud (kaare puudumise korral nulli). Neil eeldustel vastab graafile n-järku mittenegatiivsete elementidega ruutmaatriks, mille veerud ja read on vastavalt graafi sõlmede sisend- ja väljundvektorid. Vaatleme näiteks nelja sõlmega graafi (vt. joonis 1), kus sõlm O tähendagu toormaterjalide tootmist, sõlmed 1 ning 2 uuritavaid tootmisüksusi ja sõlm 3 süsteemivälist

---

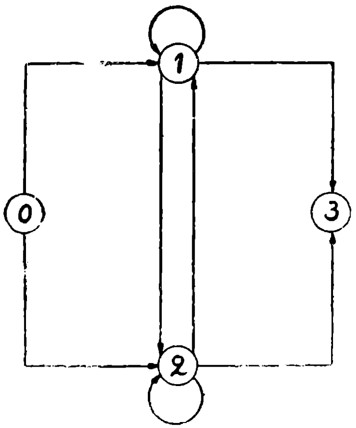
[6] Vt. näit. К. Берж, Теория графов и ее применения. Москва, 1962. Graafiteooria põhimõisteid on kavas tutvustada ka «Matemaatika ja kaasaja» järgmises numbris.

tarbimist. Märgime graafi kaared arvupaaridega (i, j) ja seame kaarte maatriksiga vastavusse järgmise sisend- ja väljundvoo koordinaatide maatriksi:

$$\begin{pmatrix} 0 & (0,1) & (0,2) & 0 \\ 0 & (1,1) & (1,2) & (1,3) \\ 0 & (2,1) & (2,2) & (2,3) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & z_1 & z_2 & 0 \\ 0 & x_{11} & x_{12} & Y_1 \\ 0 & x_{21} & x_{22} & Y_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Graafi sõlmede 1 ja 2 sisendite ning väljundite *tasakaalu* defineerime võrranditega

$$\begin{aligned} \underline{h}z_1 + h_1x_{11} + h_2x_{21} &= h_1(x_{11} + x_{12} + Y_1) \\ \underline{h}z_2 + h_1x_{12} + h_2x_{22} &= h_2(x_{21} + x_{22} + Y_2), \end{aligned} \qquad (1)$$



Joonis 1.

kus $\underline{h}$ on sõlmest O lähtuva voo (toormaterjali) sisendihind ning h_1 ja h_2 sõlmedest 1 ja 2 lähtuvate voogude (toodangu) omahinnad.

Tähistades veel

$$\underline{h}z_1 = R_1, \quad \underline{h}z_2 = R_2,$$

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + Y_1 &= X_1 \\ x_{21} + x_{22} + Y_2 &= X_2, \end{aligned} \qquad (2)$$

avalduvad tasakaaluvõrrandid (1) kujul

$$\begin{aligned} R_1 + h_1x_{11} + h_2x_{21} &= h_1X_1 \\ R_2 + h_1x_{12} + h_2x_{22} &= h_2X_2. \end{aligned} \qquad (3)$$

Kui sisendvoo koordinaat x_{ij} sõltub sõlme j väljundvoo koordinaatide summast X_j kujul

$$x_{ij} = \mathfrak{A}_{ij}X_j,$$

kus $\mathfrak{A}_{ij}$ on mingi operaator, siis võib võrrandid (2) kirjutada kujul

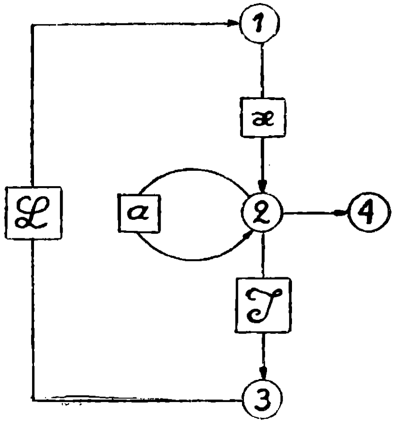
$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_{11}X_1 + \mathfrak{A}_{12}X_2 + Y_1 &= X_1 \\ \mathfrak{A}_{21}X_1 + \mathfrak{A}_{22}X_2 + Y_2 &= X_2 \end{aligned}$$

ehk maatrikskujul võrrandina

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{A}_{11} & \mathfrak{A}_{12} \\ \mathfrak{A}_{21} & \mathfrak{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}, \qquad (4)$$

mida tavaliselt nimetatakse *Leontjevi mudeliks*. Võrrandite (4) ja (3) tüüpi tasakaaluvõrrandeid võib kasutada paljude dünaamiliste süsteemide kirjeldamiseks, eriti aga tootmiskiiruste ja omahinna uurimiseks majanduse arenemise mitmesugustel tingimustel.

Uuritava objekti eelnev kirjeldamine graafi abil võimaldab probleemi dispositsioonidest kiiresti tervikliku ülevaate saada ja siit kergesti üle minna matemaatilisele analüüsile, kartmata midagi olulist kahe silma vahele jätta. Graafi kasutamise suureks eeliseks on seega asjaolu, et elav kaemus võib siin mõttetööd toetada. See võib omakorda viia uute tulemusteni, milleni analüüsist lähtudes poleks kunagi jõutud.



Joonis 2.

Akumulatsiooninormi olenevus arenemistempost. Graafi kasutamise mõningate eeliste demonstreerimiseks tuletame näiteks akumulatsiooninormi sõltuvuse arenemistempost, millega kirjeldav majandusteadus toime ei tule.

Interpreteerime naturaalarvudega 1, 2, 3 ja 4 tähistatud majandusüksusi järgmiselt:

1 — põhivahendid, mille varu on $\overline{K}$;
2 — tootmine, mille kiirus on X;
3 — investeerimissektor, mille väljundvoog on I^+;
4 — lõpptarbimine, mille kiirus on Y.

Moodustagu need majandusüksused tootmissüsteemi, mida esitab joonisel 2 kujutatud graaf, kus täiendavalt on kasutatud tähistusi:

$\varkappa$ — fondimahukusnorm,
a — tootmissektori omatoodangu otsekulunorm,
$\mathfrak{J}$ — investeerimistegevus,
$\mathfrak{L}$ — operaator, mis seab põhivahendite varuga vastavusse investeerimissektori väljundvoo.

Lisaks graafil kujutatutele võtame veel kasutusele järgmised tähistused:

F_1^+ — amortisatsioon,
F_2^+ — väljalangevad ja asendatavad põhivahendid,
I^- — investeerimissektori sisendvoog,
S — rahvatulu säästetav osa.

Majandusteaduslikele uurimustele toetudes võib eeldada, et vaadeldavate suuruste vahel leiavad aset järgmised sõltuvused.

Amortisatsioon on põhivahendite varuga võrdeline:

$$F_1^+ = \delta\overline{K}, \tag{5}$$

kus võrdetegurit δ nimetatakse *amortisatsiooninormiks.*

Põhivahendite asendamise määrab asendamistegevus $\mathfrak{R}$ ja uute põhivahendite kasutuselevõtmine:

$$F_2^+ = \mathfrak{R}I^+. \tag{6}$$

Põhivahendite varu kasv $\mathbf{D}\overline{K}$ võrdub uute põhivahendite kasutuselevõtmise ja väljalangemise vahega:

$$I^+ - F_2^+ = \mathbf{D}\overline{K}, \tag{7}$$

kus $\mathbf{D}$ on (aja järgi) diferentseerimise operaator.

Võrdus

$$X - Y = \alpha X \tag{8}$$

defineerib parameetri α, mida nimetatakse *hinnapoliitikaks* (nimetust õigustab asjaolu, et isegi perfektse konkurentsi korral võib selle juhtimisparameetriga hindu efektiivselt mõjutada).

Investeerimissektori sisendvoog on amortisatsiooni ja rahvatulu säästetava osa summa:

$$I^- = F_1^+ + S. \tag{9}$$

Rahvatulu säästetav osa on rahvatuluga $S + Y$ võrdeline:

$$S = \sigma(S + Y), \tag{10}$$

kus võrdetegurit σ nimetatakse *akumulatsiooninormiks.*

Akumulatsiooninormi avaldise saamiseks lähtume graafi tasakaaluvõrrandist (4), mis antud juhul avaldub kujul

$$\begin{pmatrix} 0 & \varkappa & 0 \\ 0 & a & \mathfrak{J} \\ \mathfrak{L} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{K} \\ X \\ I^+ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ Y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{K} \\ X \\ I^+ \end{pmatrix},$$

ehk koordinaatides välja kirjutatult

$$\begin{aligned} \varkappa X \qquad\qquad &= \overline{K} \\ aX + \mathfrak{J}I^+ + Y &= X \\ \mathfrak{L}\overline{K} \qquad\qquad &= I^+ \end{aligned} \tag{11}$$

Võrrandisüsteemist (11) leiame, et

$$aX + \mathfrak{J}\mathfrak{L}\varkappa X + Y = X,$$

mis võrdusi (6), (7), (8) ja süsteemi (11) viimast võrrandit arvestades annab

$$\mathfrak{J}(1 - \mathfrak{R})^{-1}\mathbf{D}\varkappa X = (\alpha - a)X. \tag{12}$$

Võrrandit (12) nimetatakse vaadeldava graafiga esitatud tootmissüsteemi *makrodünaamiliseks tasakaalumudeliks.* Tootmise makrodünaamilisi tasakaalumudeleid kasutavad majanduse arendamise sõlmprobleemide lahendamisel juba mitmed tänapäeva suurriigid — USA, Inglismaa, Kanada ja Jaapan. Need mudelid abistavad pikaajalise optimaalse arenemise kavandamisel rahvusvahelisi korporatsioone, kelle viimase aja areng on mõnes osas vastuolus imperialismi põhitunnustega, mistõttu P. Barani ja P. Sweezy arvates tuleks uuesti läbi töötada imperialismiteooria alused[7].

Kui Θ on investeerimistegevuse viivitusaeg ja T põhivahendite ekspluatatsiooniaeg, siis eeldades veel investeerimissektori sisendvoo ühtlast jaotust võib võrrandi (12) teisendada kujule

$$\frac{1}{\Theta}(X_{t+\Theta}-X_t)=\frac{a-\alpha}{\varkappa}(X_t-X_{t-T}), \tag{13}$$

mis on konstantsete kordajatega diferentsvõrrand. Otsides selle võrrandi lahendit kujul

$$X_t=X_0e^{\omega t}$$

(kus X_0 on tootmise algkiirus ja ω tootmiskiiruse kasvutempo), avaldub (13)

$$\frac{1}{\Theta}(e^{\omega\Theta}-1)=\frac{a-\alpha}{\varkappa}(1-e^{-\omega T}), \tag{14}$$

mida nimetatakse tootmissüsteemi *karakteristlikuks võrrandiks*. Karakteristlikul võrrandil on planeerimisülesannete lahendamisel keskne tähtsus: selle järgi toimub nii konjunktuuriprobleemide lahendamine kui ka majanduse pikaajalise arenemise kavandamine. Avaldanud karakteristlikust võrrandist (14) hinnapoliitika, leiame valemi

$$a=\alpha+\frac{\varkappa(e^{\omega\Theta}-1)}{\Theta(1-e^{-\omega T})}, \tag{15}$$

mille järgi saab uurida hinnapoliitika sõltuvust arenemistempost.

Seoseid (5), (8), (9), (10) ja (11) kasutades on nüüd lihtne tuletada valemit

$$\sigma=\frac{a-\alpha-\delta\varkappa}{1-\alpha-\delta\varkappa},$$

mis väljendab akumulatsiooninormi sõltuvust hinnapoliitikast. Asendades siin a väärtuse võrdusest (15) leiame, et akumulatsiooninormi olenevus arenemistempost avaldub kujul

$$\sigma=\frac{\varkappa[e^{\omega\Theta}-1-\delta\Theta(1-e^{-\omega T})]}{\Theta(1-\alpha-\delta\varkappa)(1-e^{-\omega T})}. \tag{16}$$

Kuigi valem (16) on tuletatud lihtsatest eeldustest, osutub ta küllaltki keerukaks. See aga ei ole muidugi argument seose kehtivuse vastu, sest majandusalane tegelikkus ei ole kohustatud olema niisugune, et meil oleks kerge aru saada. Majandus on niivõrd komplitseeritud dünaamiline süsteem, et isegi tema lihtsatest mudelitest tulenevad järeldused võivad meile tunduda keerukad.

---

[7] P. A. Baran, P. M. Sweezy, Notes on the Theory of Imperialism. Problems of Economic Dynamics and Planning, Essays in Honour of Michał Kalecki. Warszawa, PWN, 1964, lk. 13 ja 15.

Valemi (16) abil võib uurida arenemistempo ω ja fondimahukusnormi $\varkappa$ mõju akumulatsiooninormile. Võttes näiteks $a = 0,6$; $\Theta = 4$ aastat; $T = 20$ aastat; $\delta = \frac{1}{T} = 0,05$, saame järgmise tabeli

ω \ $\varkappa$	0,5	1	1,5	2	2,5	3
0,04	0,038	0,082	0,133	0,192	0,262	0,345
0,05	0,050	0,107	0,173	0,250	0,342	0,451
0,06	0,063	0,134	0,217	0,316	0,427	0,564
0,07	0,076	0,163	0,264	0,381	0,520	0,686
0,08	0,091	0,195	0,315	0,454	0,619	0,818

Sellest tabelist nähtub, et majanduse kõrget arenemistempot piirab peamiselt suur fondimahukusnorm, mis nõuab rahvatulu suurema osa akumuleerimist. Suure fondimahukusnormiga tööstusühiskonna kõrge arenemistempo tagamiseks tuleb seetõttu laiendada mitte niivõrd olemasolevat tootmist, vaid arendada intensiivselt eeskätt teadust ja tehnikat üha moodsama tootmise rajamise eesmärgil.

(Järgneb)

N. WIENERI MÕTTEID[1]

Üheks inimtegevuse sfääriks, mis teravalt tunneb vajadust automatiseerimise järele ja kus tundub olevat potentsiaalne vajadus iseõppivate masinate järele, on masintõlge.

Minu arvates masintõlke lootustandva realiseerimise tee seisneb ainult masinate süsteemi asendamises — seda vähemalt algstaadiumis — mehhaanilis-bioloogilise süsteemiga, mis sisaldab kriitika ja eksperdi otstarbeks inimese — vilunud tõlkija, kes õpetab süsteemi masina osa harjutustega umbes nii nagu kooliõpetaja õpetab oma õpilasi. Kõik öeldu tõlkemasinatest suuremal või vähemal määral kehtib ka masinate kohta, mis määravad meditsiinilist diagnoosi... Need masinad võivad aidata arstil määrata andmeid, mis on vajalikud haiguse diagnoosimisel, kuid pole mittemingisugust tarvidust selleks, et nad määraksid diagnoosi ise, ilma arsti osavõtuta.

Tulevik jätab vähe lootust neile, kes arvavad, et meie uued mehhaanilised «orjad» loovad meie jaoks maailma, kus me oleme vabastatud mõtlemisest. Masinad võivad meid küll aidata, kuid seda tingimusel, et meie teadvus ja au rahuldavad kõige kõrgema moraali nõudeid.

Tulevikumaailm nõuab karmi võitlust meie teadvuse piiratuse vastu, ta ei luba meil isegi seniks toetuda valele, kuni me abi otsime «robot-orjadelt».

[1] Vt. samuti lk. 34.

OTSUSTUSTABELID

L. Liin

Majanduslikud operatsioonid nõuavad tohutu hulga otsustuste tegemist, seejuures tihti väga komplitseeritud olukordades. Komplitseeritus väljendub enamasti otsustuse tegemisel arvestatava informatsiooni rohkuses. Seetõttu ongi asutud välja töötama selliseid uusi meetodeid majandusliku informatsiooni töötlemiseks, mis annaksid võimaluse andmeid ja otsustusreegleid üheaegselt ning kompaktselt dokumenteerida. Üheks lihtsamaks, kuid rakendustes efektiivseks osutunud seda tüüpi meetodiks on nn. otsustustabelite kasutamine.

Informatsiooni dokumenteerimist otsustustabelitesse saab kasutada väga paljude majanduslike protsesside uurimisel ja tegelikul juhtimisel. Otsustustabeleid on edukalt rakendatud näiteks palgaarvutustes, kartoteekide korrastamisel, toodete planeerimisel, mitmesugustes inseneriarvutustes jm.

Otsustustabelid võeti laialdaselt kasutusele alates 1958. aastast. Varem püüti samaks otstarbeks kasutada blokk-skeeme. Suur blokk-skeem on aga raskesti jälgitav, sest informatsioon on seal esitatud liialt kompaktsel kujul. Kui näiteks tingimuste ja reeglite arv ulatub sadadesse, siis pole blokk-skeemi enam otsustuste tegelikul teostamisel võimalik kasutada. Tuleb märkida, et otsustustabelitel on mõningaid eeliseid ka programmeerimise seisukohalt: mälu kasutatav maht tuleb suhteliselt väike, programmeerimine lihtsustub ning on kerge kasutada programmeerimiskeeli.

Käesoleva artikli eesmärgiks on tutvustada otsustustabelite ehitust ja liigitust ning kirjeldada mõningaid otsustuste tegemise meetodeid.

Otsustustabelite struktuur

Otsustustabel esitatakse tavaliselt topeltjoontega neljaks osaks jaotatud ristküliku kujul. Topeltjoonest ülespoole paigutatakse algandmed, s. t. muutujad, millest sõltub otsustus. Topeltjoone alla jäävad otsustused toimingute kohta.

Topeltjoonest vasakule kirjutatakse algandmete ja otsustuste nimetused, paremale kantakse algandmete ja otsustuste väärtused või kvalitatiivsed hinnangud. Sealjuures koosneb parem pool paljudest veergudest, millest igaüks vastab ühele otsustusreeglile. Reegel koosneb seega spetsiaalsest algandmete kogumist ja selle kogumi poolt dikteeritud ühest või mitmest otsustusest. Reeglid nummerdatakse ja numbrid kirjutatakse sissekannete veeru kohale. Seega võib otsustustabelit skemaatiliselt kujutada järgmiselt:

	Reeglite numbrid
Algandmete nimetused	Algandmete sissekanded
Otsustuste nimetused	Otsustuste sissekanded

Ridade ja veergude arv tabelis ei ole oluline. Ridade arvu määrab algandmete ja otsustuste hulk, veergude arvu reeglite arv.

Lihtsa näitena otsustustabelite koostamise kohta vaatleme tabelit, mis võimaldab otsustada seda, millist transpordiliiki kasutada sõiduks ühest linnast teise ennelõunal.

Algandmete osa moodustab informatsioon ilma, saada olevate lennukipiletite ja vabade hotellikohtade kohta; otsustuste osa moodustavad transpordi valik, täiendavad instruktsioonid ja viide otsustuse lõplikkuse kohta. Märge «vt. tabel 2» tähendab seda, et otsustus ei ole lõplik: tuleb minna teise tabeli juurde, mis selgitab sõiduvõimalusi pärastlõunal (seda tabelit ei ole siin toodud).

	Reegel 1	Reegel 2	Reegel 3	Reegel 4	Reegel 5
Ilm	ilus	tormine	ei tea	ei tea	ei tea
Lennukipiletid	müügil	müügil	müüdud	müügil	müüdud
Hotell	vaba	vaba	vaba	täis	täis
Valida transpordi liik	lennuk	rong	rong	ei mingi	ei mingi (s. t. mitte sõita ennelõunal)
Täiendav instruktsioon	ei ole	mitte valida lennukit	ei ole	vt. tabel 2	vt. tabel 2
Otsustuse iseloom	lõplik	lõplik	lõplik	pooleli	pooleli

Tabeli uurimist alustatakse algandmete kontrollimisega alates esimesest veerust kuni veeruni, kus sissekannete kombinatsioon langeb ühte meie alginformatsiooniga. Otsustused tuleb teha vastavalt selle veeru sissekannetele. Olgu meil näiteks antud alginformatsioon: ilm — tormine, lennukipiletid — müügil, hotell —

vaba. Selline sissekannete kombinatsioon esineb reeglis 2, mille otsustuste osast loeme, et transpordivahendiks tuleb valida rong ja mitte lennuk, kusjuures otsustus on lõplik.

Otsustustabelite liigitus

Olenevalt informatsiooni iseloomust probleemi kohta jaotatakse otsustustabelid kolme rühma: piiratud sissekannetega tabelid, laiendatud sissekannetega tabelid ja segasissekannetega tabelid. Vaatleme neid rühmi lähemalt.

Piiratud sissekannetega tabelites on muutujate väärtused üheselt määratud. Algandmed kantakse tabelisse kujul: «ja», «ei», või «—» (s. t. teadmata, kas «ja» või «ei»), otsustused kujul «ja» või «ei». Kõige lihtsamaks näiteks piiratud sissekannetega tabeli kohta on krediidi kinnitamise tabel:

	Reegel 1	Reegel 2	Reegel 3	Reegel 4
Kas krediidi limiiti on?	ja	ei	ei	ei
Kas maksukogemus on soodne?	—	ja	ei	ei
Kas erisoovitusi on?	—	—	ja	ei
Kas kinnitada order?	ja	ja	ja	ei
Kas saata order võlgadesse?	ei	ei	ei	ja

Laiendatud sissekannetega tabelites määratakse muutujate väärtused kas absoluutselt või suhteliselt või antakse nende kvalitatiivsed hinnangud. Sellist tüüpi on näiteks otsustustabel kindlustusmaksu suuruse kindlakstegemiseks USA-s:

	Reegel 1	Reegel 2	......	Reegel 30
Vanus	25 35	25 35	......	65
Tervis	hea	hea	......	halb
Riigi osa	ida	lääs	......	lääs
Tariif 1000 $ kohta $	1,57	1,72	......	5,92
Kindlustuspoliis $	200000	200000	......	20000

Segasissekannetega tabelis esinevad nii piiratud kui ka laiendatud sissekanded, kusjuures aga ühes reas võib olla ainult üht tüüpi sissekandeid. Niisuguse tabeli näiteks on «Zooloogi käsiraamat», millest ühtlasi näeme, et igasugused looma- ja taimemäärajad on oma olemuselt otsustustabelid:

	Reegel 1	Reegel 2	Reegel 3	Reegel 4	Reegel 5
On see loom?	ja	ja	ja	ei	—
Jalgade arv	4	4	4	2	—
On tal sulestik?	ei	ei	ja	ja	—
Nina	pikk	lühike	pikk	ei ole	—
Kael	lühike	pikk	pikk	—	—
Pöördu täiendavalt	tabeli «Elevant» poole	tabeli «Kaelkirjak» poole	psühhiaatri poole	tabeli «Lind» poole	tabeli x poole

Mitmest osast koosnevad otsustustabelid

Üks otsustustabelite eeliseid avaldub selles, et nad võimaldavad kompleksse otsuse tegemist ka väga keerulistes olukordades. Probleem jaotatakse sel juhul tavaliselt osadeks ja iga osa dokumenteeritakse eri tabelisse. Tabelid võimaldavad juhtimist üle kanda ühelt tabelilt teisele ja tarbekorral ka tagasi: üleminek teostatakse vastava otsustuse formuleerimisega. Viimati toodud näites soovitati looma põhjalikumaks määramiseks pöörduda täiendavalt vastava tabeli («Elevant», «Kaelkirjak», «Lind») poole, esimeses näites aga tabeli poole, mis aitab valida transpordiliiki pärastlõunaks. Seal, kus vaja, nähakse ette ka tagasipöördumise võimalus originaaltabeli selle veeru juurde, milles paiknev otsustus põhjustas väljapõike.

Vaatleme nüüd näidet, kus on omavahel ühendatud kaks tabelit (et näide pärineb Ameerika kirjandusest, siis on säilitatud ka sealsed rahaühikud).

Olgu tegemist müügiautomaadiga, mis väljastab nelja sorti (5-, 5-, 10- ja 15-sendilisi) kompvekipakke koos vajaliku vahetusrahaga 5-, 10- ja 25-sendilistes müntides. Automaat hakkab tööle siis, kui vastavasse avasse lastakse münt ja vajutatakse ühele neljast nupust vastavalt soovitavale kompvekisordile. Automaadi tööd koordineerivad valikutabel ja vahetustabel. Nendes tabelites tähendab tärn (*) seda, et toimub väljapõige tabelist, mille järel tullakse tagasi sama veeru järgmisse ritta; kaks tärni (**) tähendab, et toimitakse märgitud sissekande kohaselt ja samasse tabelisse tagasi ei pöörduta.

Valikutabel

Reegel	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Soov	art. 1	art. 1	art. 2	art. 2	art. 3	art. 3	art. 4	art. 4	tagasimaks
Laoseis	>0	0	>0	0	>0	>0	0	0	—
Hind	5	—	5	—	10	—	15	—	—
Pöördu	**Vah	R	**Vah	R	**Vah	R	**Vah	R	*T
Järgmine tegevus	—	—	—	—	—	—	—	—	**S

Siin tähendab sümbol «R», et süttib tulikiri «Valige uuesti», sümbol «Vah» tähendab pöördumist vahetustabeli poole, sümbol «T» raha tagastamist, sümbol «S» peatumist, sümbol «—» aga «ükskõik milline».

Vahetustabel

Münt	5	10	10	25	25	25	25	25	25	25	—
Hind	5	5	10	5	5	5	10	10	15	15	—
5-sendiliste saldo	—	1	—	—	2	4	1	3	—	2	—
10-sendiliste saldo	—	—	—	2	1	0	1	0	1	0	—
Tagastada 5-sendilisi	0	1	0	0	2	4	1	3	0	2	0
Tagastada 10-sendilisi	0	0	0	2	1	0	1	0	1	0	0
Tegevus	*J	*J	*J	*J	*J	*J	*J	*J	*J	*J	*T
Järgmine tegevus	**S	**S	**S	**S	**S	**S	**S	**S	**S	**S	**Val.

Selles tabelis esinev uus sümbol «J» tähendab käsklust: «anda välja kompvekid ja vahetusraha 5- ning 10-sendilistes»; sümbol «Val» aga pöördumist valikutabeli poole. Vahetustabeli veerud vaadatakse läbi järjekorras vasakult paremale.

Olgu meil näiteks sooviks artikkel 2, kusjuures laseme automaadi vastavasse avasse 25-sendilise mündi. Automaat pöördub siis kõigepealt valikutabeli juurde. Algandmete sissekannete poolest sobib seal kas kolmas või neljas reegel. Oletame, et laoseis on positiivne. Siis saadakse otsustuste osa juurde minnes teada artikli hind ja suundutakse vahetustabeli poole.

Et me lasksime automaati 25 senti ja toote hind oli 5 senti, siis pakuvad vahetustabelist huvi 4., 5. ja 6. veerg. Olenevalt sellest, millist vahetusraha automaadis leidub, antakse tagasi kas kaks 10-sendilist või kaks 5-sendilist ja üks 10-sendiline või neli 5-sendilist. Ühtlasi saame kätte kompvekid ja automaat seisatub. Kui ükski nendest veergudest ei sobi algandmetega (näiteks vahetusraha pole), siis rakendatakse viimases veerus antud reeglit (raha tagasi ja soovitatakse teostada uus valik).

Otsustuste tegemine maatriksite abil

Vaatleme ainult piiratud sissekannetega tabeleid (pealegi saab ülejäänuid alati niisugusteks teisendada). Kõigepealt moodustame sissekannetest algandmete maatriksid A_1 ja A_2. Maatriksi A_1 saamiseks asendame sissekanded «ja» ühtedega ning muud sissekanded nullidega, maatriksi A_2 saame aga asendades sissekanded «ja» ning «ei» ühtedega ning muud nullidega.

Krediidi kinnitamise kohta toodud näite puhul saame nii maatriksid

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Edasi moodustame vektori C muutujate konkreetselt etteantud väärtustest, kus sissekanded «ja» asendame ühtedega, ning «ei» nullidega. Sama näite puhul siis

$$C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

tähendab olukorda: krediidi limiiti ei ole, maksukogemus on soodne ja erisoovitusi on.

Otsustuse tegemiseks korrutame maatriksi A_2 veeruvektoreid loogiliselt vektoriga C ja võrdleme tulemust maatriksi A_1 vastavate veergudega. Ühtelangemise korral tuleb otsustus teha selles veerus oleva reegli järgi. Näiteks reegli 1 korral saame

$$\begin{aligned} 1 \wedge 0 &= 0 \\ 0 \wedge 1 &= 0 \\ 0 \wedge 1 &= 0. \end{aligned}$$

Võrreldes saadud vektorit maatriksi A_1 esimese veeruga näeme, et nad ei ühti. Reegli 2 korral saame

$$\begin{aligned} 1 \wedge 0 &= 0 \\ 1 \wedge 1 &= 1 \\ 0 \wedge 1 &= 0, \end{aligned}$$

mis ühtib maatriksi A_1 teise veeruga. Järelikult tuleb otsustus teha reegli 2 järgi.

Otsustuste tegemine hinnete meetodil

Hinnete meetodi eeliseks on tema kerge programmeeritavus. Tutvustame seda meetodit piiratud sissekannetega tabeli juhul, vaadeldes näidet krediidi kinnitamise kohta.

Üldine protseduur seisneb selles, et kõigepealt tuleb kindlaks teha algandmete kõigi võimalike kombinatsioonide arv ja seada igale niisugusele kombinatsioonile vastavusse teatav arv ehk identifikaator. Identifikaatorite jada peab olema kasvav järjestikuste täisarvude jada, sest siis saab neid programmis kasutada harunemismuutujatena (automaatse programmeerimise korral lülitajas).

Täiendame varem vaadeldud tabelit, moodustades juurde hinnete veeru (hinneteks valime kahe astmed) ja identifikaatorite rea (identifikaatoriks on nende hinnete summa, mille korral sissekanne on «ja»). Nii saame tabeli:

	Hinne	Reeglid							
Reegli identifikaator		0	1	2	3	4	5	9	7
T1 Kas krediidi limiiti on?	1		X		X		X		X
T2 Kas maksukogemus on soodne?	2			X	X			X	X
T3 Kas erisoovitusi on?	4					X	X	X	X
N2 Kas kinnitada order?			X	X	X	X	X	X	X
N1 Kas saata order võlgadesse?		X							
Vastava reegli number algtabelist		4	1	2	1	3	1	2	1

Reeglite arv on selles tabelis suurendatud kaheksale, sest algandmete kõikide võimalike kombinatsioonide arv on $2^3 = 8$. Reeglite numeratsioon 0, 1, ..., 7 annabki igale algandmete kombinatsioonile identifikaatori.

«GEOGRAAFIAÜLESANNE»

Varavere on sama kaugel Hiljaverest kui Justvere Ammuverest. Ennevere on sama kaugel Pärastverest kui Nüüdvere Ammuverest. Enneverest otse põhja poole minnes jõuame kõigepealt Ammuveresse ja siis Hiljaveresse. Varaverest otse ida poole minnes jõuame kõigepealt Ammuveresse ja siis Pärastveresse. Justvere on 8 kilomeetrit Varaverest põhja pool ja 8 kilomeetrit Hiljaverest lääne pool. Nüüdvere on 6 kilomeetrit Pärastverest lõuna pool ja 6 kilomeetrit Enneverest ida pool. Kui kaugel on Varavere Enneverest ja kui kaugel on Hiljavere Pärastverest?

Täiendusi koolimatemaatikale

MATEMAATIKA ÕPETAMISEST HOLLANDI KESKKOOLIDES JA ÜLIKOOLIDES

O. Prinits

Hollandi koolisüsteemist

Holland on teatavasti väike riik, kus elanike arv on suhteliselt suur, 361 inimest ühel ruutkilomeetril; kokku umbes 12 miljonit elanikku. Koolivõrk on Hollandis samuti tihe. Suur hulk koole on aga kiriku kontrolli all.

Koolisüsteemi iseloomustab keskhariduse osas mitmete erinevate koolitüüpide olemasolu. Pärast 3 aastat lasteaeda (3—6-aastastele) ja 6 aastat algkooli (6—12-aastastele) on võimalik jätkata õppimist kas keskharidust andvais koolides, algkooli täiendusklassides või algkutsekoolides. Keskharidust võib saada: seminaris, A-tüüpi gümnaasiumis, B-tüüpi gümnaasiumis, A-tüüpi moodsas keskkoolis, B-tüüpi moodsas keskkoolis ja moodsas tütarlaste keskkoolis. Esimesed kolm kooli on 6-aastase ja viimased kolm 5-aastase õppeajaga. Algkooli täiendusklasse on kas kaks või kolm. Algkutsekoolides valmistatakse ette kaadrit kaubanduse, põllunduse, kalanduse, kodunduse ja tööstuslikele aladele. Viimaste hulka kuuluvad ka tehnikakoolid, mille 4. klassi lõpetamine (3. klass õhtukoolina) annab õiguse õpingute jätkamiseks keskkutsekoolides. Sama õiguse annab ka algkooli 3-aastase täienduskooli lõpetamine. Keskkutsekoolide hulgas on 5-aastase õppeajaga seminar ning 3- ja 4-aastase õppeajaga tehnikumid ja kutsekoolid. Et koolikohustus kestab Hollandis kuni 15. eluaastani, siis loetakse alghariduse omajaiks need, kes on lõpetanud algkooli täiendusklassid, algkutsekooli või keskkooli 3. klassi. Õpingute jätkamine kõrgemates koolides on võimalik ainult teatud aladel, sõltuvalt sellest, missuguses koolis on omandatud keskharidus.

Matemaatika keskkooli õppeainena

Gümnaasiumides õpitakse ladina keelt, kreeka keelt, hollandi keelt, inglise keelt, prantsuse keelt, saksa keelt, geograafiat, ajalugu, matemaatikat, füüsikat, keemiat, bioloogiat, heebrea keelt, joonistamist ja võimlemist.

A-tüüpi gümnaasium on humanitaar- ja B-tüüpi gümnaasium reaalkallakuga õppeasutus. Matemaatika nädalatundide arvud on esitatud järgnevas tabelis:

I	II	III	IV	VA	VB	VIA	VIB
4	3	3	3	2	5	2	5

Gümnaasiumi lõpetamiseks tuleb õpilastel sooritada eksam ka matemaatikast. A-tüüpi koolides on see eksam ainult suuline, B-tüüpi koolides aga nii suuline kui ka kirjalik. Eksami programmis on A-tüüpi koolides algebra kuni ruutvõrranditeni (incl.) ja graafikud ning planimeetria ja stereomeetria küsimused, B-tüüpi koolides lisaks neile: aritmeetiline progressioon, logaritmid, tasapinnaline trigonomeetria ja tasapinnaline analüütiline geomeetria, koonuslõiked kaasa arvatud.

Olgu siinkohal esitatud üks variant kirjaliku eksami ülesannetest:

Algebra (lahendamise aeg 2 tundi).

1. α ja β on võrrandi $x^2 + px + q = 0$, $(q \neq 0)$ lahendid ning $F(n) = \alpha^n + \beta^n$, kus n on täisarv. Tõesta, et

a) $F(-n) = \dfrac{F(n)}{q^n}$,

b) $F(-n+2) + pF(-n+1) + qF(-n) = 0$.

2. Tõkestamatult kahanevas positiivsete liikmetega geomeetrilises progressioonis, mille tegur on r, interpoleeritakse iga kahe liikme vahele üks liige, nii et saadakse uus geomeetriline progressioon.

a) Kuidas on seotud arvud p ja r, kui uue progressiooni summa on p kordne antud progressiooni summa?

b) Missugused on p võimalikud väärtused?

3. Missuguste reaalarvuliste x väärtuste korral kehtib võrratus

$$\log_{10}(2x-5) < \log_{\frac{1}{10}}(x-3)?$$

4. Lahenda võrrand

$$\log_2 \log_2 x = -1.$$

Joonesta funktsiooni $y = \log_2 \log_2 x$ graafik.

Geomeetria (lahendamise aeg $2\frac{1}{2}$ tundi).

1. Ruumis on antud lõik d, sirge l ja kaks sellel sirgel mitte asuvat punkti A ja B. Kirjeldada, kuidas konstrueerida sirget, mis läbib punkti A, on risti sirge l sihiga ning kaugusel d punktist B. Millisel juhul on ainult üks lahend? Joonis ei ole nõutav.

2. Tasandil α on ringjoon keskpunktiga M ja raadiusega r ning punkt P_1, nii et $MP_1 = 3r$. See ring on aluseks püstringkoonusele tipuga T, kusjuures $TM = 2r$. Edasi on antud punkt P, nii et P ja T asuvad tasandi α erinevatel pooltel ning $PP_1 \perp \alpha$ ja $PP_1 = r$. Läbi punkti P on konstrueeritud koonust puutuv tasand. Sellel tasandil ja antud ringjoonel on ühine punkt A.

a) Konstrueeri $\triangle TAP$ tõeline kujutis, kui r on etteantud lõik.
b) Konstrueeri kauguste TA ja PP_1 tõelised pikkused.

3. Tetraeedri $TABC$ põhjaks ABC on võrdkülgne kolmnurk küljega a. Tahkude TBC ja ABC vaheline nurk on $60°$, külgserv TA on aga põhjaga risti. Külgserval TA on valitud punkt M nii, et $AM = \frac{1}{2}a$.

a) Tõesta, et sfäär, mille keskpunktiks on M ja raadiuseks $\frac{1}{2}a$, puutub tasandiga TBC, ja tee kindlaks puutepunkti S asukoht.
b) Missugune osa sfääri pinnast on nähtav punktist T?
c) Tee kindlaks (kui võimalik, ilma arvutamiseta) CS pikkus.
d) Leia tetraeedri $SABC$ sisesfääri raadius.

Trigonomeetria ja analüütiline geomeetria (lahendamise aeg 2 tundi).

1. Kui a, b ja c on kolmnurga küljed ning α, β ja γ selle kolmnurga nurgad ja d_1, d_2, d_3 nende nurkade poolitajad, siis kehtib võrdus

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{2\cos\frac{1}{2}\alpha}{d_1}.$$

Tõesta see.
Tõesta veel, et
a) kui $\alpha=\beta$, siis $d_1=d_2$,
b) kui $\alpha>\beta$, siis $d_1<d_2$.

2. On antud parabool $y^2=6x$ ja ringjoon raadiusega r, mis läbib koordinaatide alguspunkti ja mille keskpunkt M asetseb x-telje positiivsel osal. Missuguste r väärtuste korral on ringjoonel teine ühine punkt parabooliga?
Kui need punktid on A ja B, tee kindlaks MA ja MB keskpunkti geomeetriline koht, kui M liigub piki x-telge.

3. Ristkoordinaadistikus alguspunktiga O on antud punktid $A(6, 0)$ ja $B(0, 8)$.
a) Leia kolmnurga ABO ümberringjoone C_1 ja siseringjoone C_2 võrrandid.
b) Sirgel võrrandiga $x-6=0$ on võetud punktid, millede potentside[1] summa ringjoonte C_1 ja C_2 suhtes on võrdne nulliga. Arvutada nende punktide koordinaadid.
Lahendada samasugune ülesanne sirge $2x+y=0$ puhul.
c) Näidata, et need neli punkti asuvad ringjoonel, mis kuulub ringjoontega C_1 ja C_2 määratud kimpu.

On huvitav märkida, et ülesannete lahendamisega tuleb keskmiselt toime algebras 89%, geomeetrias 73% ning trigonomeetrias ja analüütilises geomeetrias 76% õpilastest.

Gümnaasiumide matemaatika programmi uuendamisettepanekuist on kõige domineerivam nõue diferentsiaal- ja integraalarvutuse elementide kavvavõtmise kohta.

Nähakse ette järgmiste küsimuste lülitamine matemaatika programmi: funktsiooni piirväärtus; teoreemid piirväärtuse kohta (tõestuseta); $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$; tuletis; summa, vahe, korrutise ja jagatise tuletis; x^n, $\sin x$ ja $\cos x$ tuletis; esimese ja teise tuletise märgi tähendus, maksimum ja miinimum lihtsamate rakendustega. Integraal kui summa piirväärtus:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_a^b f'(x)x = f(b) - f(a).$$

Funktsioonide ax^n, $p\sin(ax+b)$, $p\cos(ax+b)$ ja nende funktsioonide summade integreerimine. Rakendused pindala, ruumala ja töö arvutamiseks.

Nende teemade kavva võtmiseks soovitatakse jätta senisest programmist välja murdratsionaalne funktsioon, Bezout' teoreem, interpolatsioon, jätta ära planimeetria lõpueksam, samuti rida teemasid stereomeetriast, nagu tüvikoonuse ruumala, korrapärased hulktahukad, piirduda trigonomeetrias võrranditega kujus $a\sin x + b\cos x = c$ ning kolmnurkade lahendamisel ainult nende juhtudega, kus on antud elementideks küljed ja nurgad.

Mõnedes erakoolides on stereomeetria kursus asendatud matemaatika ajaloo ja statistika küsimustega.

Moodsas keskkoolis õpitakse 5 aasta jooksul matemaatikat, mehhaanikat, füüsikat, keemiat, bioloogiat, geograafiat, ajalugu, sotsiaalteadusi, hollandi keelt, inglise keelt, prantsuse keelt, saksa keelt, astronoomiat, kaubandust, joonestamist, joonistamist ja võimlemist.

A-tüüpi koolides valmistatakse õpilasi ette edaspidiseks õppimiseks kaubanduslikul alal, B-tüüpi koolidel on aga tugevasti täppis- ja loodusteaduslik kallak.

Matemaatika nädalatunde on neis koolides järgmiselt:

I	II	III	IVA	IVB	VA	VB
5	5	5	5	—	5	—

Matemaatika programm I klassile sisaldab küsimusi algebrast kuni ühe tundmatuga võrranditeni ja geomeetriast planimeetria kursuse kuni tähtsamate mõisteteni ringis. II klassile on algebra kursuses ette nähtud koordinaatide meetod, lineaarvõrrandisüsteemid, aritmeetiline progressioon jne. kuni nimetaja vabastamiseni irratsionaalsusest, geomeetrias aga kolmnurkade sarnasus ja trigonomeetrilised funktsioonid täisnurkses kolmnurgas. III klassi kavas on astme mõiste üldistamine, logaritmid, aritmeetiline ja geomeetriline progressioon, piirväärtus, funktsioon ax^2+bx+c ja ruutvõrrand; geomeetrias on kavas võrdelised lõigud ringis, sise- ja ümberringjooned, korrapärased hulknurgad, ringi pindala ja ringjoone pikkus; trigonomeetrias aga trigonomeetriliste funktsioonide graafikud, trigonomeetriliste funktsioonide tabelid

[1] Punkti (x_0, y_0) potentsiks ringjoone $(x-a)^2+(y-b)^2-R^2=0$ suhtes nimetatakse arvu $p=(x_0-a)^2+(y_0-b)^2-R$. Väljaspool ringjoont asuva punkti korral on see arv võrdne puutujalõigu ruuduga.

ja täisnurkse kolmnurga lahendamine. IV ja V klassis on algebra kavas juurvõrrandid, Bezout' teoreem, diferentsiaal- ja integraalarvutuse elemendid ja funktsioonid $\frac{ax+b}{px+q}$; geomeetrias käsitletakse koonuselõikeid, stereomeetriat, sfäärilist geomeetriat ja kujutavat geomeetriat, trigonomeetria osas aga kolmnurkade lahendamist, radiaanmõõtu, funktsiooni $a \sin x + b \cos x$ ja võrrandid $a \sin x + b \cos x = c$. Matemaatika suuline ja kirjalik eksam on ainult B-tüüpi koolide lõpetamisel. Keskmine eksami sooritajate protsent on siin 80.

Keskkoolide programmide uuendamisliikumises peetakse eelkõige silmas tõenäosusteooria ja statistika elementide käsitlemise vajadust. On planeeritud võtta kavva:

permutatsioonid ja kombinatsioonid koos rakendamisega tõenäosuse arvutamiseks, binoomlause, Pascali kolmnurk, normaalkõver (ilma võrrandita), keskmine väärtus ja standardhälve.

Matemaatika ülikoolis

Pärast keskkooli lõpetamist on, nagu juba nimetatud, võimalik omandada kõrgemat haridust vastavalt keskkooli kallakule. Hollandis on kuus ülikooli. Riiklikud ülikoolid töötavad Leydenis, Utrechtis ja Groningenis. Amsterdamis on oma Munitsipiaalülikool ja Vaba Kalvanistlik Ülikool, Nimeguenis asub aga Rooma Katoliku Ülikool. Ülikoolide kõrval on neli ülikooli tasemel kooli: Riiklik Tehnoloogia Instituut, Riiklik Põllumajanduskool, Hollandi Majanduskool ja Rooma Katoliku Majanduskool.

Kõigis fakulteetides ja kolledžites tuleb õpingute aja vältel sooritada kaks eksamit: kandidaadieksam ja doktorandieksam. Mõnikord lisandub siia enne kandidaadieksamit eeleksam. Suur osatähtsus on tentaamenitel. Doktorikraad omistatakse neile, kes peale doktorieksamit kaitsevad ka enda püstitatud teesid.

Matemaatikat õpetatakse kõigis ülikoolides, välja arvatud Rooma Katoliku Ülikool. Doktorieksamini jõutakse tavaliselt pärast 6 aastat õppimist. Neil, kellel matemaatika on põhiaineks, sisaldab eksam küsimusi ka füüsikast ja keemiast või astronoomiast. Selliseid üliõpilasi on ülikoolide peale kokku umbes 500.

Matemaatilisi aineid õpetatakse järgmise tundide normiga.

Ülikool	Analüüs	Algebra	Anal. geom.	Proj. geom.	Praktikum
Groningen	9	1	3	3	$2\frac{1}{2}$
Leyden	6	3	2	4	3
Utrecht	7	1	1	2	6
Amsterdam R	6	3	$2\frac{1}{2}$	3	—
Amsterdam M	$5\frac{1}{2}$	4	2	3	2

Et eksami sooritamise aeg on vaba, siis sooritatakse kandidaadieksamit juba 2. aastal, aga ka alles 6. aastal. Enamik teeb seda siiski 3. ja 4. aastal.

Olgu siinkohal toodud üks näide ka ülikooli matemaatika kirjaliku eksami ülesannetest.

Diferentsiaalarvutus I.

1. Leida funktsiooni $e^{|x|} - |x|$ tuletis.

2. Kui $f(x)$ on määratud iga x korral ja ta on kaks korda diferentseeruv ning $\lim\limits_{x\to\infty} f''(x) = 1$, siis tõesta, et

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

3. Näita ilma arvutamata, et võrrandi

$$(z+i)^n - (z-i)^n = 0$$

lahendid on reaalsed.

4. Tõesta, et võrrandil $x = e^{-\frac{x}{n}}$ on üks positiivne lahend (n on positiivne täisarv). Olgu see lahend a_n. Leia $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

5. Olgu rida $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ koonduv ja rida $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$ hajuv (u_n reaalarv ja $u_n \neq \pm 1$). Too üks näide, mis kinnitab, et see on võimalik. Tõesta, et rida $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{u_n^2}{1-u_n^2}$ on koonduv.

Tõesta veel, et üks ridadest $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{1+u_n}$ ja $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{1-u_n}$ on hajuv.

Majandusteadlastele määratud matemaatika eksami ülesanded on lihtsamad:

1. Leia funktsiooni $y = \frac{x^2+3x+18}{x+2}$ maksimum ja miinimum.

2. Näita, et funktsioon $z = e^{x^2+y^2}$ rahuldab võrrandit

$$y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - 2ye^{x^2+y^2} = 0.$$

3. Arvuta

a. $\int \frac{8x-10}{(x+1)(x-1)(x-2)}\,dx$

b. $\int x^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$

c. $\int x^3 \log x\,dx.$

4. Tööstuses valmistatakse kahe erineva kvaliteediga esemeid, ühed on odavad ja teised kallid. Iga päev toodetakse x odavat ja y kallist eset. Need arvud rahuldavad võrrandit

$$y = \frac{8-2x}{5-x}.$$

Müügihind kallimal esemel on 2 korda suurem kui odaval esemel. Leia, mitu odavat eset tuleb päevas valmistada, et saada maksimaalset kasu.

Keskkooli matemaatikaõpetaja diplomi taotlejalt nõutavaid teadmisi iseloomustavad järgmised eksamiülesanded:

Algebra.

1. Tõesta, et võrrandil $x^5-5x^3+5x-2a=0$ (a on reaalarv) on ainult reaalsed lahendid siis ja ainult siis, kui $-1 \leqslant a \leqslant 1$.

Kui $a=\cos\varphi$, lahenda see võrrand asendusega

$$x=y+\frac{1}{y}.$$

2. Selgita, kas rida $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3n+(-1)^n\cdot n}$ on koonduv või hajuv.

3. Tee kindlaks kompleksmuutuja z kõik väärtused, mille puhul rida

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(nz+n+1)^{-n}}{(nz+1)^{n+2}}$$

on koonduv.

Geomeetria.

1. On antud ring M ja selle tasapinnas punkt O. Sellest punktist tõmbame vabalt antud ringjoonele kõõlu. Selle kõõlu keskpunktist P joonestame ristsirge kõõlule. Sellel ristsirgel võtame punkti Q nii, et $PQ=OP$.

2. Eeldame, et kolmnurga ABC külgedele on väljaspoole ehitatud ruudud $BCDE$, $CAFG$ ja $ABHK$. Konstrueeri kolmnurk ABC, kui on antud DG, FK ja HE pikkused.

3. On antud tetraeeder $ABCD$. AB-l on punkt E ja CD-l punkt F, nii et $AE:EB=DF:FC$. Kuidas konstrueerida BG-le punkt G ja AD-le punkt H, nii et $BG:GC=AH:HD$, kui EF ja GH on teineteisega risti? Tõesta, et EF ja GH lõikuvad.

Trigonomeetria.

1. Leida avaldise

$A\cos x+B\sin x\cos y+C\sin x\sin y\cos z+D\sin x\sin y\sin z$ maksimum ja miinimum, kui A, B, C, D on konstandid, x, y, z muutuvad.

2. a) Kolmnurgas on a, b ja c külgedeks, α, β ja γ nurkadeks ning pindala on S.

Tõesta, et

$$\cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma=\frac{a^2+b^2+c^2}{4S}.$$

b) Kolmnurga ABC küljedel on punktid L, M ja N, nii et $BL:LC=$ $=CM:MA=AN:NB$. Kolmnurga LMN nurgad on λ, μ, ν. Tõesta, et

$$\cot\lambda+\cot\mu+\cot\nu=\cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma.$$

Õpikutena on Hollandi ülikoolides kasutusel ülemaailmselt hästi tuntud õpikud, nagu R. Couranti, G. H. Hardy, B. L. van der Waerdeni jt. omad.

Kõik siinkohal näidetena toodud ülesanded viitavad küllaltki nõudlikule tasemele matemaatika suhtes.

Tänapäeval on Hollandis nagu enamikus riikides ulatuslikult päevakorral matemaatika õpetuse reformimine ja seda eelkõige sisulises osas. Nii on keskkoolides katsetuste läbiviimiseks kaasatõmmatud õpetajatel vähendatud nädalatundide normi. Keskuseks matemaatika õpetamise reformimise alal on Utrechti ülikool, selle liikumise eesotsas on aga tuntud Hollandi matemaatik prof. H. Freudenthal.

LOBATŠEVSKI GEOMEETRIA

K. Ariva

«Kui kasvõi üheski kolmnurgas ...»

Artikli esimeses osas[1] oli juttu füüsiku ja geomeetri seisukohtadest seoses kolmnurga sisenurkade summaga. Selgus, et geomeetri lõplik ja täpne vastus ei saa olla suuremas kooskõlas tegelikkusega kui füüsiku ligikaudse iseloomuga otsustus. Geomeetri poolt tõestuses kasutatud paralleelsirgete aksioomi enda paratamatus ei ole põrmugi vahetult selge; selle aksioomi arvukad tõestuskatsed aga osutusid rangel analüüsimisel kõik defektseiks.

Teoreeme saab sageli tõestada mitmel erineval viisil. Tekib küsimus, kas pole võimalik tõestada teoreemi kolmnurga sisenurkade summa kohta, kasutamata paralleelsirgete aksioomi. Selline küsimuse seade muutub eriti huvipakkuvaks, kui silmas pidada, et see teoreem omakorda võimaldab laitmatult lahendada paralleelsirgete probleemi.

18. ja 19. sajandi vahetusel püüdis seda võimalust kasutada Legendre[2]. Ta tegi ajalooliselt viimse olulise katse lahendada paralleelsirgete probleemi vanal viisil — aksioomi tõestamise teel. Tema uurimus seadis probleemi kaasaegsete ees uude valgusse ja andis tulemusi, mida hiljem oli võimalik kasutada Lobatševski geomeetria käsitlemisel. Legendre'i mõttekäigud saab kokku võtta kolme teoreemi tõestusse.

Legendre'i esimene teoreem: Ühegi kolmnurga sisenurkade summa ei saa olla suurem sirgnurgast (kui Eukleidese süsteemist välja jätta ainult paralleelsirgete aksioom ja selle järeldused).

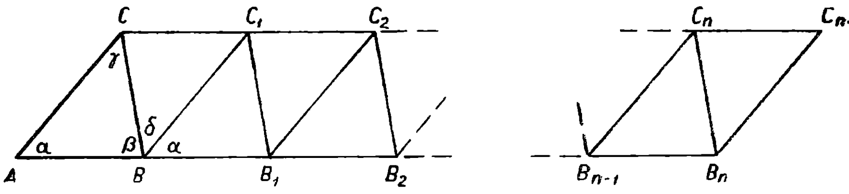
Tõestus. Oletame vastuväiteliselt, et leidub kolmnurk ABC (joon. 1), milles $\alpha+\beta+\gamma>\pi$. Määrame külje AB pikendil punkti B_1 nii, et $AB_1=AB$, ja konstrueerime antud kolmnurgaga ABC kongruentse kolmnurga AB_1C_1 nii, et $\widehat{B_1BC_1}=\widehat{BAC}$.

---

[1] Vt. Matemaatika ja kaasaeg, XII, lk. 73—90.

[2] A. M. Legendre (l. lõžäandr) (1752—1834) — nimekas prantsuse matemaatik, kelle sulest pärineb muuhulgas üks esimesi kooli otstarbeks sobivaid Eukleidese «Elementide» ümbertöötlusi. Lisame, et märgitud võimalus oli oriendi matemaatikutele teada juba 11.—13. sajandil.

Et $\alpha+\beta+\gamma>\pi$ (oletuse kohaselt) ja $\alpha+\beta+\delta=$ $=\pi$ (konstruktsiooni põhjal), siis $\gamma>\delta$. Kolmnurkades ABC ja CBC_1 on nurkade γ ja δ lähisküljed vastavalt kongruentsed, seepärast peab γ vastas olema suurem külg, s. t. peab kehtima võrratus $AB>CC_1$.



Joonis 1.

Pikendame nüüd lõiku AB_1 ja konstrueerime näidatud viisil rea esialgsega kongruentseid kolmnurki: $\Delta B_1B_2C_2$, $\Delta B_2B_3C_3$, ..., $\Delta B_{n-1}B_nC_n$. (Joonisel 1 on kujutatud selle kolmnurkade rea algus ja lõpp, mis on näitlikkuse huvides paigutatud lähestikku; tuleb kujutleda, et nendevaheline tühik on täidetud suure hulga kolmnurkadega; äärmiste kolmnurkade vahelise tegeliku kauguse määrab konstrueeritud lisakolmnurkade arv n). Seejuures tekib teine rida kolmnurki: $\Delta C_1B_1C_2$, $\Delta C_2B_2C_3$, ..., $\Delta C_{n-1}B_{n-1}C_n$. Pole raske veenduda, et ka need on kongruentsed nii omavahel kui ka esimese kolmnurgaga CBC_1. Lisame veel ühe sellise kolmnurga $C_nB_nC_{n+1}$. Siis $C_1C_2=C_2C_3=\ldots=C_nC_{n+1}=CC_1<AB$.

Olgu $AB-CC_1=k$, kus k on teatud positiivne konstant. Siis

$$\begin{aligned}AB_n-CC_{n+1}&=(AB+BB_1+B_1B_2+\ldots+B_{n-1}B_n)-\\&-(CC_1+C_1C_2+\ldots+C_nC_{n+1})=\\&=(n+1)AB-(n+1)CC_1=\\&=(n+1)(AB-CC_1)=(n+1)k.\end{aligned}$$

Kui konstrueerida näidatud viisil küllalt palju kolmnurki, mis on kongruentsed kolmnurgaga ABC, s. t. kui võtta naturaalarv n küllalt suur, siis saab korrutise $(n+1)k$ teha suuremaks igast antud konstandist. Kasutame seda asjaolu ja valime n nii suure, et $(n+1)k$ on suurem kui lõigu AC kahekordne pikkus: $(n+1)k>2AC$. Et $AC=B_nC_{n+1}$, siis peab sellisel juhul kehtima võrratus

$$AB_n-CC_{n+1}>AC+B_nC_{n+1}$$

ehk

$$AB_n>AC+CC_{n+1}+C_{n+1}B_n.$$

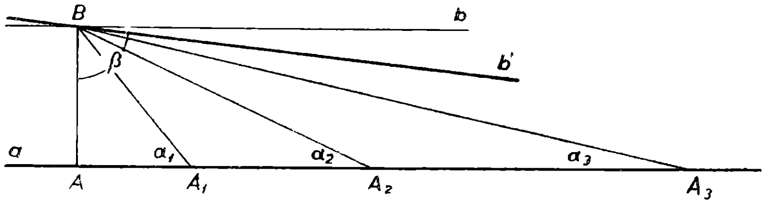
Kuid selline võrratus on võimatu: punkte A ja B_n ühendav sirglõik AB_n ei saa olla pikem kui neidsamu punkte ühendav murdjoon $ACC_{n+1}B_n$. Saadud võrratus tuleneb tõestuskäigu algul tehtud oletusest, et $\alpha+\beta+\gamma>\pi$. Järelikult peab see oletus olema väär, s. t. ei saa leiduda kolmnurka, mille sisenurkade summa oleks suurem kui sirgnurk.

Lugejale on muidugi vahetult selge, et ühiste otspunktidega murdjoone ja sirglõigu korral on murdjoon alati pikem. Soovi korral saab seda asjaolu ka rangelt tõestada. Märkimist väärib siinjuures, et ei selle intuitiivselt ilmse väite tõestamisel ega ka kusagil mujal eelnevas arutluses ei kasutata paralleelsirgete aksioomi.

Äsja tõestatud lause kolmnurga nurkade summa kohta kõverpinnal üldiselt ei kehti. Nõnda moodustavad kolm paarikaupa lõikuvat suurringjoont sfääril (näit. kaks meridiaani ja ekvaator gloobusel) alati kolmnurga, mille nurkade summa on suurem kui 180°. Seetõttu on teoreemi sõnastamisel sulgudes tehtud lisaeeldus väga oluline.[3]

Tõestame nüüd

Legendre'i teise teoreemi: Kui iga kolmnurga sisenurkade summa on võrdne sirgnurgaga, siis on paralleelsirgete aksioom tõene lause.



Joonis 2.

Vaatleme mingit sirget a ja punkti B, mis ei ole sellel sirgel (joon. 2). Langetame punktist B sirgele a ristlõigu BA ja tõmbame läbi B sirge b risti lõiguga BA. Nagu teame, ei saa sirged a ja b lõikuda.

Näitame, et punktiga B ja sirgega a määratud tasandil on b ainus sirge, mis läbib punkti B ega lõika sirget a. Selleks vaatleme mingit punkti B läbivat sirget b', mis erineb sirgest b. Sirge b' moodustab lõiguga BA ühel pool teravnurga .

Määrame sirgel a punkti A_1 nii, et $AA_1 = AB$. Teoreemi eelduse kohaselt on võrdhaarse täisnurkse kolmnurga BAA_1 sisenurkade summa π, järelikult $\widehat{AA_1B} = \alpha_1 = \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2^2}$.

Määrame sirgel a punkti A_2 nii, et $A_1A_2 = A_1B$. Teoreemi eelduse põhjal on võrdhaarse kolmnurga BA_1A_2 tipu A_2 juures olev teravnurk $\alpha_2 = \frac{\alpha_1}{2} = \frac{\pi}{2^3}$.

Jätkame samal viisil võrdhaarsete kolmnurkade ehitamist sirge

3 Vt. ka: Ü. Lumiste. Ruumi mõiste geomeetrias. — Matemaatika ja kaasaeg, XI, 1966, lk. 8.

a punktide $A_3, A_4, \ldots, A_n$ abil, mis rahuldavad tingimusi: $A_2A_3 = BA_2$, $A_3A_4 = BA_3, \ldots, A_{n-1}A_n = BA_{n-1}$. Seejuures tekivad nende punktide juures teravnurgad: $\alpha_3 = \frac{\pi}{2^4}$, $\alpha_4 = \frac{\pi}{2^5}$, $\ldots$, $\alpha_n = \frac{\pi}{2^{n+1}}$. Need nurgad moodustavad kahaneva geomeetrilise progressiooni teguriga $\frac{1}{2}$. Küllalt suure n korral (s. o. küllalt suure arvu kolmnurkade puhul) muutub selle progressiooni viimane liige α_n väiksemaks igast antud nurgast.

Ehitame näidatud viisil nii palju kolmnurki, et $\alpha_n < \frac{\pi}{2} - \beta$; siis

$$\widehat{ABA_n} = \frac{\pi}{2} - \alpha_n > \beta.$$

Seega satub sirge b' pärast punkti B läbimist kolmnurga ABA_n sisepiirkonda. Ta peab sealt jälle väljuma ja ilmselt peab ta seejuures lõikama kolmnurga ABA_n külge AA_n. Niisiis — sirge b' lõikab sirget a.

See arutlus on rakendatav iga sirge puhul, mis läbib punkti B ja erineb sirgest b. Järelikult kehtib paralleelsirgete aksioom.

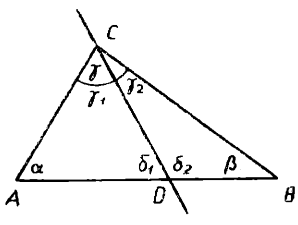
Tõestatud lause viibki mõttele püüda paralleelsirgete probleemi lahendada kolmnurga nurkade summa määramise teel (muidugi — paralleelide aksioomi ennast kasutamata). See tee tundub eriti lootustäratavana, kui arvestada Legendre'i järgnevat tulemust, mille kohaselt on piisav uurida a i n u l t ü h t kolmnurka. Nimelt kehtib

Legendre'i kolmas teoreem: Kui kasvõi üheski kolmnurgas on sisenurkade summa 180°, siis on see nii igas kolmnurgas.

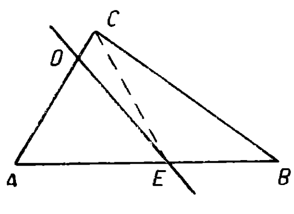
T õ e s t u s. Oletame, et mingis kolmnurgas ABC (joon. 3) on sisenurkade summa võrdne sirgnurgaga: $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Jaotame selle kolmnurga mingi transversaaliga CD (s. o. sirgega, mis läbib üht tippu) kaheks kolmnurgaks ACD ja BCD. Tähistame kolmnurga sisenurkade summat sümboliga Σ, siis

$$\begin{aligned}\Sigma_{ACD} + \Sigma_{BCD} &= (\alpha + \gamma_1 + \delta_1) + (\beta + \gamma_2 + \delta_2) = \\ &= \alpha + \beta + (\gamma_1 + \gamma_2) + (\delta_1 + \delta_2) = \alpha + \beta + \gamma + \pi = 2\pi.\end{aligned}$$

Et Legendre'i esimese teoreemi põhjal ei saa kummagi kolmnurga



Joonis 3.

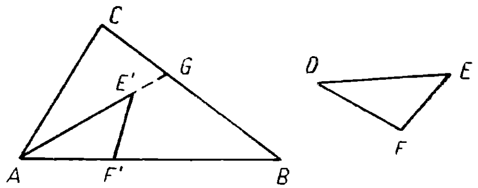


Joonis 4.

sisenurkade summa ületada sirgnurka, siis $\Sigma_{ACD} = \Sigma_{BCD} = \pi$. Järelikult jaotab iga transversaal kolmnurga ABC osakolmnurkadeks, mille sisenurgad moodustavad jälle sirgnurga.

Nüüd on kerge tõestada, et ka suvalise sirgega kolmnurgast ABC eraldatud kolmnurga sisenurkade summa on π. Tõepoolest, sirge DE korral (joon. 4) tõmbame veel transversaali CE. Siis tõestatu põhjal $\Sigma_{ACE} = \pi$. Kuid DE on kolmnurga ACE transversaal, seepärast ka $\Sigma_{AED} = \pi$.

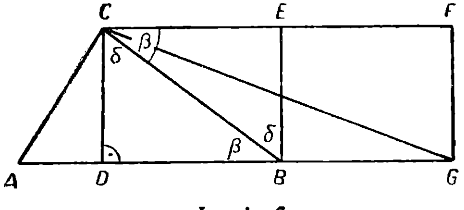
Nimetame nüüd kolmnurka väiksemaks kolmnurgast ABC, kui teda on võimalik paigutada kolmnurga ABC sisse nii, et viimane teda tervenisti hõlmab. Olgu ΔDEF mingi kolmnurgast ABC väiksem kolmnurk (joon. 5) ja olgu $\Delta AE'F' \equiv \Delta DEF$. Siis mui-



Joonis 5.

dugi $\Sigma_{DEF} = \Sigma_{AE'F'}$. Kuid eelneva põhjal $\Sigma_{ABG} = \pi$ ja seepärast $\Sigma_{AE'F'} = \pi$. Järelikult $\Sigma_{DEF} = \pi$: iga kolmnurgast ABC väiksema kolmnurga sisenurkade summa on sirgnurk.

Milline ka poleks ΔABC, ikka saab talle tõmmata kõrguse, mis asetseb tema sisepiirkonnas, s. o. määrab transversaali. Selline kõrgus eraldab täisnurkse kolmnurga BCD (joon. 6), mille sisenurkade summa on π. Moodustame sellega kongruentse kolmnurga BEC. Et $\beta + \delta = \frac{\pi}{2}$, siis on nelinurk $BECD$ ristkülik. Ehitame temaga kongruentse ristküliku $BEFG$. Diagonaal CG jaotab tekkinud ristküliku $CFGD$ kaheks täisnurkseks kolmnurgaks, mille kõigi sisenurkade summa võrdub ristküliku $CFGD$ sisenurkade summaga 2π. Legendre'i esimese teoreemi põhjal peab siis $\Sigma_{CDG} = \pi$. Seega moodustavad ΔCDB ühe kaateti kahekordistamise teel saadud täisnurkse kolmnurga sisenurgad samuti sirgnurga.



Joonis 6.

Nüüd võime kahekordistada kolmnurga CDG ühe kaateti, seejärel saadud kolmnurga ühe kaateti jne. Iga vabalt võetud kolmnurga $A'B'C'$ korral saame sel viisil konstrueerida nii suure täisnurkse kolmnurga, et $\Delta A'B'C'$ on sellest väiksem. Et selle täisnurkse kolmnurga sisenurkade summa on π, siis on ka kolmnurga $A'B'C$ sisenurkade summa π. Teoreem on tõestatud.

Legendre'i teisest ja kolmandast teoreemist ilmneb, et kui õnnestuks leida kasvõi ükski kolmnurk, milles $\Sigma = \pi$, siis peaks lugu olema nii igas kolmnurgas ja selle tõttu peaks paralleelsirgete aksioom olema tõene. Hämmastav tulemus! 20 sajandit kõiki mõeldavaid pingutusi trotsinud paralleelsirgete probleem taandub üheainsa kolmnurga uurimisele! Küsimus sellest, mis toimub tasandi lõpmata kauges piirkonnas, näib olevat lahendatav tasandi lõplikus, kuitahes väikeses piirkonnas! Ei kogemus ega kujutlus suuda otsustada, kuidas käituvad «peaaegu paralleelsed» sirged lõpmata kaugel; ilmneb aga, et võime vastuse leida oma vahetust ümbrusest, oma kogemuse ja kujutluse ulatusest.

Tundub, et pärast sellist pööret probleemi ajaloos pidi olema kerge lahenduseni jõuda. Tuleb ju uurida ainult üht kolmnurka (seejuures ükskõik millist), mitte kõiki korraga. Mingil viisil peaks ju olema võimalik täpselt määrata sisenurkade summa ühes kolmnurgas!

Viimne katse

Seda teed teadus siiski minna ei saanud. Selleks ei sobinud ei füüsika induktiivne ega geomeetria deduktiivne meetod. Märkisime eelnevalt, et mõõtmise teel pole põhimõtteliselt kunagi võimalik veenduda, et mingi kolmnurga sisenurkade summa on täpselt 180°. Geomeetria arutluste objektiks ei ole aga kunagi üks konkreetne kolmnurk, vaid kõik kolmnurgad või vähemalt kõik teatud liiki kolmnurgad. Geomeeter uurib ainult üldist, mitte kunagi vahetult konkreetset.

Legendre'i teoreemide tähtsus on teisal. Legendre ei asunud põrmugi üht erilist kolmnurka otsima, vaid lähenes probleemile n.-ö. teisest küljest.

Puhtloogiliselt on kolmnurga sisenurkade summa kohta võimalik püstitada kolm üksteist välistavat hüpoteesi:

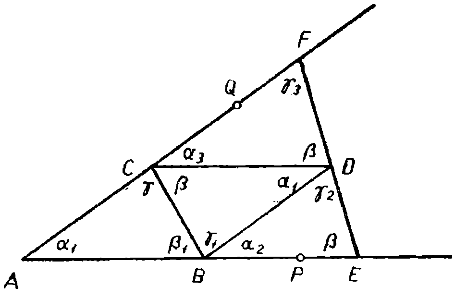
$$\Sigma \begin{cases} > \pi, \\ = \pi, \\ < \pi. \end{cases}$$

Legendre'i esimesest teoreemist järeldub, et esimene hüpotees ei ole kooskõlas Eukleidese süsteemi teiste põhitõdedega. Kui nüüd õnnestuks seda näidata ka kolmanda hüpoteesi puhul, siis tuleks ilma pikemata lugeda tõeseks keskmine. Seega tähendaks võrratuse $\Sigma < \pi$ väärus ühtlasi paralleelsirgete aksioomi tõesust. Selle võrratuse ümberlükkamisele ongi pühendatud Legendre'i pingutused.

Esitame vaba ümberjutustuse näol arutluse, mis sisaldus Legendre'i geomeetriaõpikus selle 3-ndast 9-nda väljaandeni (1800—1812).

Nimetame k o l m n u r g a d e f e k t i k s suurust $\delta = \pi - \Sigma$. Vastavalt Legendre'i esimesele teoreemile ei saa δ olla negatiivne. Püüame näidata, et ta ei saa olla ka positiivne. Sealjuures võime piirduda ainult ühe meelevaldse kolmnurga uurimisega, sest Legendre'i kolmanda teoreemi põhjal võrdus $\Sigma = \pi$ kas kehtib igas kolmnurgas või ei kehti üheski.

Arutleme jälle vastuväiteliselt. Leidugu kolmnurk ABC (joon. 7), mille puhul $\delta_{ABC} > 0$, s. o. $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 < \pi$. Konstrueerime selle kolmnurga mingi ühe nurga, näiteks nurga α_1, vastaskülje juurde nurgad $\widehat{BCD} = \widehat{ABC} = \beta_1$ ja $\widehat{CBD} = \widehat{ACB} = \gamma_1$. Seejuures tekib kolmnurk BCD, mis on kongruentne kolmnurgaga ABC; seega $\widehat{BDC} = \alpha_1$.



Joonis 7.

Pikendame $\widehat{BAC}$ haarasid ja näitame, et kolmnurga BCD tipp D peab jääma nende haarade vahele, s. o. $\widehat{BAC}$ sisepiirkonda.[4] Olgu P ja Q nurga BAC haarade mingid punktid. Et $\widehat{CBD} = \widehat{ACB} < \widehat{CBP}$ (sest $\widehat{CBP}$ on kolmnurga ABC välisnurk), siis lõik BD on $\widehat{CBP}$ sisepiirkonnas. Samuti $\widehat{BCD} = \widehat{ABC} < \widehat{BCQ}$ ja lõik CD on $\widehat{BCQ}$ sisepiirkonnas. Seega on punkt D nii $\widehat{BCQ}$ kui ka $\widehat{CBP}$ sisepiirkonnas, järelikult ka $\widehat{BAC}$ omas.

Tõmbame nüüd läbi punkti D mingi sirge, mis lõikab $\widehat{BAC}$ mõlemat haara. Olgu lõikepunktid E ja F. Tähistame kolmnurkade BDE ja CDF sisenurki vastavalt α_2, β_2, γ_2 ja α_3, β_3, γ_3.

---

[4] Meenutame lugejale, et joonise põhjal seda väidet tõeseks lugeda ei tohi, vastasel juhul kaotab arutlus üldsuse ja muutub füüsikaliseks eksperimendiks. Muide, arutluse antud etapil võiks joonise näitlikkusega küll piirduda, sest eelneva märkuse põhjal võime ΔABC lugeda konkreetseks kolmnurgaks. Kuid arutluse lõpposa ületab iga füüsikalise eksperimendi piirid ja toetub siin esitatud tõestusele.

Arvutame tekkinud nelja kolmnurga defektide summa:

$$\delta_{ABC}+\delta_{BCD}+\delta_{BED}+\delta_{CFD}=$$
$$=\pi-(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)+\pi-(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)+\pi-$$
$$-(\alpha_2+\beta_2+\gamma_2)+\pi-(\alpha_3+\beta_3+\gamma_3)=$$
$$=4\pi-(\alpha_2+\beta_1+\gamma_1)-(\alpha_3+\beta_1+\gamma_1)-$$
$$-(\alpha_1+\beta_3+\gamma_2)-(\alpha_1+\beta_2+\gamma_3).$$

Konstruktsiooni põhjal on kolm esimest sulgudega eraldatud summat võrdsed sirgnurgaga, viimane summa on aga kolmnurga *AEF* sisenurkade summa:

$$\delta_{ABC}+\delta_{BCD}+\delta_{BED}+\delta_{CFD}=\pi-\sum_{AEF},$$

s. t.

$$\delta_{AEF}=2\delta_{ABC}+\delta_{BED}+\delta_{CFD}.$$

Et δ_{ABC} on eelduse kohaselt positiivne, siis peab Legendre'i kolmanda teoreemi põhjal olema positiivne iga kolmnurga defekt. Seega $\delta_{BED}>0$ ja $\delta_{CFD}>0$, järelikult $\delta_{AEF}>2\delta_{ABC}$. Kasutame tähistusi $\delta_{ABC}=\delta_0$ ja $\delta_{AEF}=\delta_1$, siis

$$\delta_1>2\delta_0.$$

Kordame nüüd näidatud konstruktsiooni kolmnurga *AEF* puhul. Siis annab analoogiline mõttekäik uue, suurema kolmnurga defekti δ_2 jaoks hinnangu

$$\delta_2>2\delta_1,$$

s. o.

$$\delta_2>2^2\delta_0.$$

Jätkates samal viisil üha suuremate kolmnurkade konstrueerimist (kusjuures kasutame eelnevalt tõestatud lauset kongruentse kolmnurga tipu sattumisest nurga sisepiirkonda), saame mingi n sammu järel võrratuse

$$\delta_n>2^n\delta_0.$$

Konstruktsiooni piiramatul jätkamisel (s. o. n kasvamisel) muudame suuruse $2^n\delta_0$ kuitahes suureks (sest $\delta_0=\delta_{ABC}$ on fikseeritud positiivne konstant). Saadud võrratuse tõttu peab siis ehitatavas kolmnurkade jadas defekt δ_n kasvama tõkestamatult.

Kuid defekti määravast võrdusest $\delta=\pi-\Sigma$ järeldub, et defekt ei saa olla suurem kui π, sest ilmselt $\Sigma\geqslant 0$. Esineb vasturääkivus, mis näitab, et esialgne oletus on väär: positiivse defektiga kolmnurka ei saa eksisteerida. Järelikult peab iga kolmnurga sisenurkade summa olema võrdne sirgnurgaga. See aga tähendab omakorda, et paralleelide aksioom on tõene lause. V postulaadi probleem on lahendatud!

Oleme meelsasti valmis seda tulemust uskuma. See on heas kooskõlas meie kujutlustega. Pealegi tundub Legendre'i arutlus täiesti veenvana. Ja ometi on esitatud «tõestus» loogiliselt väär.

Leida viga Legendre'i arutluses ei ole kerge ülesanne. Legendre'il endal kulus tervelt kaksteist aastat, kuni üha süvenev kahtlus teda oma «tõestusest» loobuma sundis. Tema õpiku 9. väljaandes on paralleelsirgete aksioom jälle tõestamata põhilause, mitte tõestatud teoreem.

Teisest küljest on tehtud viga siiski üsna silmatorkav. Selle märkamiseks on tarvis vaid vabaneda eelarvamustest ja loobuda põhjendamata tõekspidamistest, mis ületavad kogemuse piire — ükskõik kui «iseendastmõistetavad» need tõekspidamised ka ei näi.

Legendre'i mõttekäik ületab tõepoolest kogemuse piire. Ehkki lähtekolmnurk ABC võib olla valitud sobivalt väike (joonise piirides), tingib järgnev konstruktsioon ometi kuitahes suurte kolmnurkade, s. o. tasandil lõpmata kaugele ulatuvate piirkondade vaatlemise. Lõpmata kaugega opereerimisel tuleb aga olla ettevaatlik, selles veendusime eelnevate näidete abil.

(Soovitame lugejal nüüd hetkeks peatuda ja — kasutades neid suunavaid märkusi — leida viga Legendre'i arutluses.)

Näidatud viisil saab konstrueerida kuitahes palju (ja kuitahes suuri) kolmnurki ainult sel korral, kui on täidetud kaks tingimust: 1) varem juba konstrueeritud kolmnurgaga kongruentse kolmnurga tipp satub jälle valitud nurga piirkonda; 2) läbi nurga iga sisepunkti saab tõmmata sirge, mis lõikab nurga mõlemat haara.

Esimese lause tõesuses veendusime vastava arutluse teel, mis toetus oluliselt teoreemile kolmnurga välisnurga kohta. Selle teoreemi tõesuses pole meil põhjust kahelda; lisaks teame, et ta ei sõltu paralleelide aksioomist.

Teise lause lugesime aga tõeseks ilma mingi põhjenduseta. Tundub ju olevat ilmne, et nurga sisepunkti läbib koguni lõpmata palju sirgeid, mis lõikavad nurga mõlemat haara. Ja konstruktsiooni jaoks pole oluline, milline neist sirgetest valida. Siiski — millel põhineb veendumus, et sellist sirget alati saab tõmmata? Kuni punkt on nurga tipule küllalt lähedal, on asi selge. Kuid konstruktsiooni jätkamisel eemaldub kasutatav punkt piiramatult nurga tipust, satub n.-ö. «astronoomilisse» kaugusse. Võime küll oletada, et lõikaja tõmbamise võimalikkus, mis on tasandi väikeste piirkondade korral kogemusest teada, laieneb ka kuitahes kaugetele piirkondadele, kuid peame siiski tunnistama, et see oletus võib osutuda vääraks. Midagi veenvat oma oletuse põhjendamiseks meil seni pakkuda ei ole.

Pole raske märgata, et selle oletuse tõesus järeldub paralleelsirgete aksioomist. Ilmneb, et tegemist on jälle V postulaadi ekvivalendiga. See aga tähendab, et ka Legendre sattus Münchhauseni ossa, nagu paljud tema eelkäijad: ta «tõestas» paralleelide aksioomi — selle aksioomi enda kaudu.

Loobudes esitatud «tõestusest» ei loobunud Legendre veel katsetest probleemi lahendada. Tema õpiku 11. väljaanne sisaldab aksioomi uue, eelnevast erineva «tõestuse». Kuid ka selles katses esineb sama tüüpi viga, nn. *circulus in demonstrando*: väite tõestamine lause abil, mille tõesus sõltub väite enda tõesusest. Paralleelsirgete probleem — ja ühtlasi ka kolmnurga sisenurkade summa küsimus — jäi Legendre'i töödes lahendamata.

Eelarvamuste kütkes

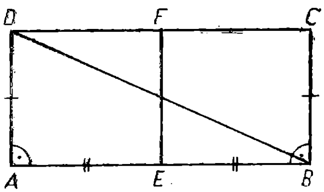
Paralleelsirgete probleemi lahendamiskatseid on aga tehtud ka mõnevõrra perspektiivsemas suunas, mille ajalugu ulatub veel Legendre'i-eelsesse perioodi, nimelt 18. sajandisse. Sellel sajandil jõudsid kaks mõtlejat teineteisest sõltumatult väga lähedale õigele lahendusele. Neil jäi astuda vaid üksainus samm, kuid mõlemat takistasid seda tegemast Eukleidese vaieldamatu autoriteedi toimel kujunenud ja paljude sajandite vältel kivinenud eelarvamused.

Nendeks mõtlejateks olid itaalia jesuiit G. Saccheri[5] (1667—1733) ja šveitsi filosoof ning matemaatik J. H. Lambert (1728—1777).

S a c c h e r i õpetas matemaatikat Torino ja Padua ülikoolides. Ta kirjutas rea teoseid teoloogia, loogika ja matemaatika kohta. Erilist tähelepanu osutas ta paralleelsirgete probleemile ja selle uurimisel võttis ta esimesena kasutusele meetodi, mis viis järgmisel sajandil probleemi tõelise lahenduseni. Selleks meetodiks on vastuväiteline tõestusviis.

Meetodi idee on lihtne. Kui kord paralleelsirgete aksioomi otsene tõestamine on nõnda keeruline, et seda pole suudetud teostada kahe aastatuhande vältel, siis näib olevat otstarbekas talitada kaudsel viisil: oletada, et see aksioom on väär, ja uurida järeldusi, mis niisugusest oletusest tulenevad. Kui aksioom on tõene (aga selles ei kahelnud Saccheri hetkegi), siis peab nende järelduste hulgas kusagil tekkima loogiline vasturääkivus. See aga tähendab tehtud oletuse väärust ja ühtlasi aksioomi tõesust.

Saccheri asendas paralleelsirgete aksioomi sellega ekvivalentse lausega: «Nelinurgas, mille kaks lähisnurka on täisnurgad ja nende nurkade juures olevad vastasküljed on kongruentsed, peavad ka ülejäänud nurgad olema täisnurgad». Joonisel 8 on kujutatud selline «Saccheri nelinurk» $ABCD$: $\hat{A} = \hat{B} = \frac{\pi}{2}$ ja $AD = BC$. Nelinurga sümmeetriast aluse AB keskristsirge EF suhtes järeldub, et $\hat{D} = \hat{C}$. Kui kehtib paralleelsirgete aksioom, siis $\Sigma_{ABD} = \Sigma_{BCD} = \pi$, seepärast on $\hat{D}$ ja $\hat{C}$ täisnurgad. Vastupidi, kui ülemised nurgad on täisnurgad, siis $\Sigma_{ABD} = \Sigma_{BCD} = \pi$ ja seepärast kehtib paralleelsirgete aksioom.



Joonis 8.

Saccheri seadis endale ees-

[5] l. sakéeri.

märgiks näidata (paralleelide aksioomi kasutamata), et ülemised nurgad on täisnurgad. Selleks püüdis ta ümber lükata mõlemad võimalikud eitavad hüpoteesid — et need nurgad on nürinurgad või et nad on teravnurgad.

Oletades nürinurga hüpoteesi tõesust jõudis Saccheri hõlpsasti vasturääkivuseni. See tulemus kujutab sisuliselt Legendre'i esimest teoreemi.

Teravnurga hüpoteesi korral sattus Saccheri aga tõsistesse raskustesse. Ta tõestas selle hüpoteesi abil mitukümmend teoreemi, mis olid teravas vastuolus kujutlusega. Toome mõned näited. Teravnurga hüpoteesist järeldub, et kahel mittelõikuval sirgel, mis asuvad ühel tasandil, on selle tasandi mistahes lõplikus piirkonnas kas ainult üks ühine ristsirge või pole ühtki. (Lugeja muidugi mõistab, et juhul, kui $\Sigma < \pi$, peab iga nelinurga sisenurkade summa olema väiksem kui 2π ja seepärast ei saa kahel sirgel olla kaht ühist ristsirget). Esimesel juhul kasvab mittelõikuvate sirgete vaheline kaugus ühisest ristsirgest mõlemale poole tõkestamatult. Teisel juhul toimub sirgete selline kaugenemine teineteisest ainult ühes suunas, vastassuunas aga lähenevad sirged lõpmatult teineteisele ilma siiski lõikumata (matemaatikud räägivad sel puhul asümptootilisest lähenemisest).[6]

Saccheri ei leidnud nende lausete näilises «absurdsuses» mingit põhjust nende eitamiseks. Ja tõepoolest, mõlemal juhul on siin tegemist asjaoludega, mille «efekt» avaldub alles tasandi väga suurte piirkondade puhul, s. t. väljaspool kogemuse ulatust; seepärast ei saa kujutlus siin olla kriteeriumiks. Et Saccheri seda selgesti mõistab ja otsib ainult puhtloogilist vasturääkivust, selles avaldub tema hoiakule omane moodsa matemaatika vaim. Oma teoreemidega ulatab Saccheri käe 19. sajandi mõtlejatele ja jõuab tunduvalt kaugemale näiteks Legendre'ist.

Paraku kaotab Saccheri oma 33. teoreemi järel kindla pinna jalge alt ja pöördub uuesti näoga minevikku. Nimelt ilmneb selles teoreemis, et asümptootiliselt lähenevail sirgeil on olemas ühine ristsirge nende ühises lõpmata kauges punktis (Saccheri vaatleb neid sirgeid lõikuvaina lõpmata kauges punktis; koolimatemaatikas tehakse seda mõnikord paralleelsete sirgete puhul). Niisiis on viimasel sirgel ühes ja samas punktis kaks erinevat ristsirget — nimelt esialgsed sirged! See aga, väidab Saccheri, on «vastuolus sirge olemusega», järelikult — teravnurga hüpotees on loogiliselt väär.

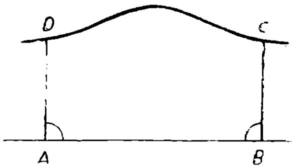
Saccheri teeb siin vea, mis on analoogiline Bertrand'i[7] eksimusele; ta omistab lõpmata kaugele punktile samu omadusi, mis on harilikul, s. o. tasandi lõplikus osas oleval punktil.

---

[6] Soovitame lugejal siinkohal meenutada selle artikli esimeses osas sooritatud arutlust paralleelsete ja lõikuvate sirgete vastastikuse asendi kohta. — Matemaatika ja kaasaeg, XII, lk. 84.

[7] Vt. samas, lk. 88.

Ka Saccheri ise ei ole rahul oma seisukohaga. Ta kirjutab: «Nüüd võiksin ma rahuliku südamega peatuda; aga ma ei taha loobuda tõestamast, et see jonnakas teravnurga hüpotees, mille ma juurtega välja kiskusin, on loogiliselt vasturääkiv. Selle tõestamisele on pühendatud järgmised teoreemid . . .» Ja Saccheri jätkab arutlusi. Ta tõestab, et punktide hulk (tasandil), mis on võrdsetel kaugustel antud sirgest, moodustab kõverjoone. Ta arvutab selle kõverjoone tükikese pikkuse ja leiab, et see võrdub vastava lõigu pikkusega sirgel (joon. 9). Kuid sirged AD ja BC, millel on ühine ristsirge AB, peavad Saccheri poolt eelnevalt tõestatud teoreemi põhjal teineteisest eemalduma, s. o. nendevaheline kaugus peab kasvama, kui eemalduda sirgest AB. See on aga võimatu, kui lõigu AB ja kaare CD pikkused on võrdsed. Tegemist on ilmse loogilise vasturääkivusega. Siit järeldabki Saccheri, et teravnurga hüpotees on tõepoolest väär. Paraku tegi Saccheri kõvera kaare pikkuse arvutamisel vea... (Pole siiski õige Saccherile vähest «rehkendamisoskust» ette heita, sest kaare pikkuse arvutamisel tuli tal kasutada kõrgemat matemaatikat ja selle valdkonnas oli tema päevil veel väga palju ebamäärast.)



Joonis 9.

Saccheri jäi arvamuse juurde, et ta on tõestanud paralleelide aksioomi. Seda illustreerib tema teose pretensioosne pealkiri, mis algab sõnadega «Eukleides, puhastatud kõigist plekkidest . . .». Töö ilmus autori elu lõpul, 1733. aastal.

Paistab siiski, et Saccheri ise ei tunne täit rahuldust oma töö tulemustest, sest ta lõpetab raamatu sõnadega: «Ma ei saa jätta siin märkimata erinevust mõlema hüpoteesi kummutamisviiside vahel. Nürinurga hüpoteesi puhul on asi selge nagu jumala valgus . . ., Kuid ümber lükata teravnurga hüpoteesi ei õnnestu mul teisiti, kui tõestades, et see pikkus võrdub baassirglõigu pikkusega» (s. o. $CD = AB$).

J. H. L a m b e r t, teine eespool mainitud kahest mehest, oli laia silmaringi ja mitmekülgsete teadmistega mõtleja; oma avara eruditsiooni oli ta omandanud iseõppimise teel. Ta uuris komeetide orbiitide arvutamist ja püstitas kosmoloogilisi hüpoteese, tõestas arvu π irratsionaalsuse[8] ja arendas prespektiiviteooriat, rajas teadusliku kartograafia ja matemaatilise fotomeetria ning kõigele lisaks tegeles filosoofiaprobleemidega. V postulaadi probleemile on pühendatud tema töö «Paralleelsirgete teooria», mis ilmus alles 1786. a., pärast autori surma.

[8] Vt. Matemaatika ja kaasaeg, VI, lk. 42.

Lambert lähenes probleemile peaaegu samal viisil nagu Saccheri. Ta vaatles nelinurka, mille k o l m nurka on täisnurgad, ja püüdis viia loogilise vasturääkivuseni hüpoteesid, et neljas nurk on nüri või terav. Kui ainsana jääb tõeseks täisnurga hüpotees, siis on ühtlasi tõestatud ka paralleelsirgete aksioom.

Ka Lambertil õnnestub kergesti näidata, et nürinurga hüpotees on väär. Kuid teravnurga hüpoteesist teeb ta veelgi suurema hulga kummalisi järeldusi. Nõnda tõestab ta, et kolmnurga pindala ei saa tõkestamatult kasvada, ehkki kolmnurga külgede pikkusi piiramatult suurendatakse. See tulemus on teravas vastuolus meie harjumuspärase kujutlusega. Kui uskuda kujutlust, s. o. pidada võimalikuks kuitahes suure pindalaga kolmnurkade olemasolu, siis osutub Lamberti teravnurga hüpotees vääraks. Kuid Lambert mõistab selgesti, et meil pole mingit alust niisuguseks usuks. Kuni teravnurga hüpoteesi pole rangelt ümber lükatud, tuleb kolmnurga pindala tõkestatust lugeda — vähemalt loogiliselt — võimalikuks.

Kõige tähelepanuäratavamaks tehtud järeldustest peab Lambert seda, et teravnurga hüpoteesi tõesuse korral leidub absoluutne pikkusühik, s. t. leidub lõik, mida saab määrata puhtgeomeetriliselt, ilma kõrvalise «etaloonita».[9] Lambert ise on kahevahel, kuidas hinnata oma avastust. Ta hüüab: «Selles on midagi vaimustavat, mis tekitab koguni soovi, et kolmas hüpotees oleks tõene. Ja ometi sooviksin ma, vaatamata sellele eelisele[10], et see nii ei oleks, sest sellega kaasneb terve rida teisi raskusi. Trigo-

[9] Selgitame absoluutse pikkusühiku tähendust piltlikult. Nagu teada, püüavad raadioastronoomid praegu nii meil kui ka piiri taga luua sidet tsivilisatsioonidega kaugete tähtede planeetidel. Selline side võib tekkida n.-ö. tänahomme. Millist informatsiooni me soovime vahetada teiste maailmade elanikega? Kahtlemata huvitavad mõlemaid pooli nii partnerite endi kui ka neid ümbritsevate objektide kuju ja mõõtmed. Seega peab vahetatav informatsioon sisaldama hulgaliselt andmeid lõikude pikkuste ja nurkade suuruste kohta. Nurkadega saadakse hõlpsasti hakkama. Ehkki meie vaatluspartnerid ei ole vahest kunagi huvi tundnud ringi jaotamise vastu 360-ks osaks, saame ometi lihtsalt kindlaks teha meie ja nende nurgaühikute vahekorra. Tarvitseb vaid läbi viia väike puhtgeomeetriaalane raadiovestlus, näiteks täisnurka mahtuvate ühikute arvu kohta. Sellepärast ütlemegi, et nurkade mõõtmiseks leidub geomeetrias absoluutne ühik — näiteks täisnurk, mis on kõikjal ühesugune.

Hoopis teine on lugu pikkustega. Mitte mingi geomeetrilise sisuga informatsioon ei luba meil otsustada, kas kauged asukad kuuluvad mammuti või amööbi suurusklassi. Meil tuleb abi saamiseks ilmtingimata pöörduda füüsiku ja tema etaloonide poole. Selles ilmnebki tõsiasi, et Eukleidese geomeetrias puudub absoluutne pikkusühik.

Kui aga tõepoolest kehtib Lamberti teravnurga hüpotees, siis on geomeetriline pikkusetaloon olemas ja kosmiline asjaajamine lihtsustub tunduvalt. Nagu näeme, võivad puhtloogilisel seosel, mis esimesel pilgul tundub geomeetrite tühise targutusena, olla otse kosmilised tagajärjed. Küsimus, kuidas sellist absoluutset mõõdupuud määrata (kui ta olemas on), jääb siinkohal paratamatult lahtiseks. On selge, et kooligeomeetria meid aidata ei saa ja vajalik on mingi uus geomeetria.

[10] et leidub absoluutne pikkusühik (K. A.)

nomeetrilised tabelid muutuksid lõpmata pikkadeks; kujundite sarnasust üldse ... ei esineks; mitte ühtki kujundit ei saaks esitada teisiti kui tema absoluutses suuruses; ja astronoomide käsi käiks halvasti ...».

Erinevalt Saccherist jõuab Lambert veendumusele, et tal pole õnnestunud teravnurga hüpoteesi kummutada, ja seepärast lõpetab ta teadmisega, et probleem jäi lahendamata. Aga nimelt see negatiivne tulemus näitab, et Lambert on tõele lähemal kui Saccheri; tema vähemalt jätab ukse tõe juurde avali. Veelgi enam: Lamberti ühes kõrvalmärkuses [11] sisaldub geniaalne aimus sellest, kuidas probleem kord lõplikult lahendub. Ta paneb tähele, et nürinurga hüpotees kehtib sfääril (kui sirgeteks lugeda suurringjooned), ja teeb sellepärast oletuse, et leidub mingi pind, millel realiseerub ka teravnurga hüpotees. See aimus leidis kinnitust 100 aastat hiljem.

Saccheri ja Lamberti teoreemid, mille nad tõestasid teravnurga hüpoteesi abil, kuuluvad tegelikult Lobatševski geomeetriasse. Seepärast nimetatakse neid mehi Lobatševski eelkäijateks Uue geomeetria avastajaiks neid aga ei loeta, sest nad ei suutnud taibata endi poolt tõestatud lausete tõelist tähtsust (kui kõrvale jätta Lamberti märgitud ähmane aimus). Nad ei mõistnud, et olid heitnud — esimestena — põgusa pilgu uude, fantastilisse maailma, mis on oma olemuselt niisama loogiline ja tõeline kui Eukleidese maailm. Mineviku mõju sundis neid avastatus nägema miraaži, mida on võimalik ja mis tuleb hävitada. Sellepärast jäi avastamise au teistele.

Märgime lisaks, et Saccheri ja Lamberti tööd ei avaldanud mingit mõju probleemi tegelikule lahendamiskäigule, sest need tööd unustati ja avastati uuesti alles 19. sajandi lõpul, mil Lobatševski geomeetria oli juba täielikult välja töötatud ja üldiselt tunnustatud.

Mahavaikitud revolutsioon

19. sajandi esimesel veerandil tekitas paralleelsirgete probleem paljudel mõtlejatel pessimismi inimmõistuse võimsuse suhtes. Pärast Legendre'i katsete ebaõnnestumist oldi sunnitud tunnistama, et probleem oli ikka veel lahendamata. Tundus koguni, et Eukleidese päevist peale ei ole probleemi lahendamiseks midagi olulist ära tehtud. Ometi näis küsimuse sisu olevat ülimalt lihtne, nii lihtne, et sellele vastamine oleks pidanud olema jõukohane igale loogiliselt mõtlevale inimesele. Kui inimmõistus juba nii tühist probleemi lahendada ei suuda ...

Vist küll miski ei iseloomusta reljeefsemalt selleaegseid meeleolusid kui ungari matemaatiku F. Bolyai kiri, mille ta kirjutas oma

---

[11] Vt. Matemaatika ja kaasaeg, XII, lk. 21.

pojale, saanud teada, et viimane kavatseb asuda paralleelsirgete probleemi lahendama. Kiri on kirjutatud 1823. a. ja sisaldab järgmise lõigu.

«Anun Sind, ära tee ka Sina katset jagu saada paralleelsirgete teooriast; Sa raiskad sellele kogu oma aja, aga seda lauset te ei tõesta isegi üheskoos. Ära proovi paralleelsirgete teooriast jagu saada ei sel viisil, millest Sa mulle teatasid, ega ka mingil teisel moel. Mina uurisin lõpuni läbi kõik võimalused; ma ei jätnud ühtki ideed läbi proovimata. Ma käisin läbi kogu selle öise pilkase pimeduse ja matsin sellesse iga lootuskiire, iga rõõmukübeme elust. Jumala pärast, anun Sind, jäta see küsimus, karda seda mitte vähem meelelistest kiusatustest, sest ka see võib Sinult röövida kogu Sinu aja, tervise, hingerahu, kogu eluõnne. See pilkane pimedus võib uputada tuhandeid Newtoni-taolisi majakaid. See pimedus ei kao maa pealt iialgi, ja iial ei saavuta õnnetu inimsugu midagi täiuslikku isegi geomeetrias. See on suur ja paranematu haav minu hinges...»

Hoolimata selle kirja otse meeleheiteni jõudnud lootusetusest, lahendati paralleelsirgete probleem sellesama aastakümne jooksul. Nagu saatuse kiuste olid lahendajate hulgas kaks kirja autorile väga lähedast inimest — tema kunagine südamesõber ja tema enda poeg, selle kirja adressaat.

19. sajandi alguseks olid matemaatika vallas küpsenud eeldused, mis võimaldasid vallutada seda juba kakskümmend sajandit piiratud kindlust. Piiramine ei osutunud siiski päris asjatuks. Läbi oli sõelutud kogu Eukleidese lausete süsteem ja tunduvalt selgitatud selle süsteemi struktuur. Teisest küljest oli matemaatiline mõtlemine saavutanud nii kõrge arenemisastme, et probleem osutus juba jõukohaseks. Sellepärast leidsid nüüd lahenduse peaaegu samaaegselt kolm matemaatikut, kes töötasid täiesti sõltumatult üksteisest.

Tuleb aga öelda, et ka märgitud perioodil oli küsimus jõukohane ainult väga vähestele, neile, kes olid oma ajastust mõne aastakümne võrra ette jõudnud. Oma ajast ettejõudmine kutsub aga harilikult esile mittemõistmise, pilke ja vaenulikkuse kaasaegsete poolt. Eriti drastiliselt avaldus selline ebakõla teadlase ja tema ajastu vahel paralleelsirgete probleemi puhul. Anname sellest lühikese ülevaate. Piirdume siin vaid märkustega probleemi lahendajate isikute kohta [12]; nende tööde sisu — uus geomeetria — leiab käsitlemist edaspidi.

Esimesena jõudis uue geomeetria võimalikkuse mõistmiseni 19. sajandi alguse silmapaistvaim matemaatik Carl Friedrich Gauss (1777—1855), astronoomiaprofessor Göttingeni ülikoolis (sakslased nimetasid teda omal ajal «matemaatikute vürstiks»). Tema 11 köites avaldatud kogutud tööd matemaatika, füüsika,

[12] Mõningaid viiteid sisaldab ka Ü. Lumiste eespool mainitud kirjutis.

geodeesia ja astronoomia alalt kuuluvad sisurikkuse ning napisõnalise ja range käsitluslaadi tõttu matemaatika kõigi aegade suurimate meistritööde hulka.

Gaussi uus seisukoht paralleelsirgete probleemi kohta kujunes juba 1816. a. paiku. Oma sellealaseid vaateid arendas ta edasi kuni surmani. Gaussi vaadetel oli siiski ennekõike põhimõtteline iseloom, ka nende läbitöötlus jäi fragmentaarseks; Gauss ei teinud katsetki uue geomeetria detailseks ja süstemaatiliseks käsitlemiseks, ammugi publitseerimiseks. Ta oli teinud vankumatu otsuse oma avastusest vaikida. Ja tõepoolest ei avaldanud Gauss eluajal ühtki sõna oma vaadetest uue — nagu ta seda ise nimetas — mitteeukleidilise geomeetria kohta. Ainsa erandi moodustasid mõned kirjad lähedastele sõpradele, kellele ta aga keelas oma vaadetest rääkida. Gauss mõistis väga hästi avastuse erakordset tähtsust, kuid ta kartis lõhkuda oma suurt autoriteeti matemaatikute-kaasaegsete silmis, kes ei olnud veel valmis vastu võtma ja tunnustama niivõrd ebaharilikke ideid. Gaussil olid revolutsioonilised vaated, kuid puudus revolutsionääri võitlusvalmidus. Ta mattis vaikimisse mitte ainult oma tulemused, vaid keeldus avalikku seisukohta võtmast ka teiste, probleemi uurimisel temast kaugemale jõudnud matemaatikute tööde suhtes, ehkki nägi selgesti nendes sisalduvat uut ja geniaalset. Gaussi hoiak lükkas uue geomeetria tunnustamise ja sellele järgneva arengu edasi mitme aastakümne võrra.

Gaussi sellise hoiakuga on tihedalt seotud andeka noore ungari matemaatiku János Bolyai[13] (1802—1860) saatus — sellesama, kellele oli määratud eespool tsiteeritud hoiatus.

J. Bolyai isa Farkas Bolyai ja Gauss olid üliõpilaspõlves väga lähedased sõbrad; nad olid kirjavahetuses veel pikka aega pärast lahkujäämist. Kui aga Bolyai palus Gaussi, et see majutaks enda juurde noore Jánosi stuudiumi sooritamise ajaks Göttingenis, siis lõpetas Gauss järsult kirjavahetuse. Nõnda osutus J. Bolyai enesetäiendamine Saksamaal majanduslikult võimatuks ja tal tuli leppida keskpärase matemaatikakursuse kuulamisega Viini sõjaväeakadeemias. Selle lõpetamise järel 1823. a. sai J. Bolyaist kahurväeohvitser.

Juba tollal oli noorel matemaatikahuvilisel põhimõtteliselt selge, kuidas paralleelsirgete probleemi lahendada. Sattunud ohvitserina garnisoniteenistusse üksikus maakolkas, jätkas ta süstemaatilist tööd probleemi kallal. Tulemused võttis ta kokku artiklis, mis ilmus isa kaheköitelise matemaatikaõpiku lisana 1832. a.

J. Bolyai artikkel — uusaegse matemaatikaalase kirjanduse üks kaunemaid pärle — käis selle aja matemaatikutele üle jõu nii sisu kui vormi poolest. Kirjastamiskulude kärpimiseks tuli autoril kirjutada äärmiselt kokkusurutult; pealegi kasutas ta originaalset

---

[13] I. jáanoš bóijai.

sümboolikat. Artikkel ei äratanud mingit tähelepanu ja võeti vastu vaikimisega.

Oli loomulik, et Bolyaid pöördusid nüüd hinnangu saamiseks Gaussi poole. Farkas Bolyai kirjutas Gaussile, et tema poeg peab Gaussi otsust kõrgemaks «kui kogu Euroopa arvamust». Gaussi vastus saabus viivitusega ja valmistas Jánosile kibeda pettumuse. Kirjas seisis:

«Nüüd üht-teist Sinu poja töö kohta. Kui ma alustan sõnadega, et ma seda ei tohi kiita, siis hämmastab see Sind hetkeks, kuid ma ei saa toimida teisiti: kiita seda — tähendaks kiita iseennast, sest kogu selle töö sisu, tee, mida mööda Su poeg läks, ja tulemused, mis ta saavutas, — ühtivad peagu täielikult minu omadega, mis ma saavutasin osaliselt juba 30—35 aastat tagasi. See hämmastab mind tõepoolest ülimal määral.

Mul oli kavatsus oma tööst, millest ma üht-teist olen nüüd paberile pannud, oma elu jooksul mitte midagi avaldada. Enamus inimesi on täiesti ilma ettekujutuseta, millest siin on jutt; ma kohtasin vaid väga väheseid, kes võtsid erilise huviga vastu selle, mis ma neile teatasin. Et olla võimeline seda mõistma, on esmalt tarvis elavalt tajuda, mis siin õieti puudub, aga see on enamikule inimestest täiesti ebaselge. Kuid mul oli kavatsus kanda aja jooksul paberile kõik, et need mõtted vähemalt ei kaoks koos minuga.

Ma olen sellepärast väga hämmastunud, et mind on vabastatud sellest vajadusest, ja mulle valmistab erilist meelehead, et nimelt minu vana sõbra poeg mind sellisel imestamapaneval viisil ennetas.»

Gaussi edasine vaikimine tekitas J. Bolyais ajutise kahtluse, et suur matemaatik tahab temalt näpata tähtsa avastuse tegemise prioriteeti või koguni avastust ennast. See kahtlus süvenes temas veelgi, kui ta kuulis, et saksa keelde on tõlgitud kellegi Lobatševski samateemaline töö; ta arvas esmalt, et selle on avaldanud Gauss pseudonüümi all.

J. Bolyai mõistis küll hiljem oma oletuse väärust, aga osaks saanud raske pettumus jättis jäljed kogu tema ülejäänud elule ja tegevusele. Süvenesid psüühilised häired, mis viimastel eluaastatel avaldusid haiglase meeltesegadusena. Selline oli paralleelsirgete probleemi lahendamisele pühendatud pingutuste üks kõige traagilisemaid tagajärgi probleemi kahetuhandeaastases ajaloos.

(Järgneb)

Harjutusülesanne. Näidata, et paralleelide aksioom on tõene lause, kui kehtib üks järgmistest lausetest:

1) kõigil kolmnurkadel on ühesugune sisenurkade summa;

2) tasandil antud sirgest ühel pool ja sirgest võrdseil kaugustel olevate punktide hulk moodustab sirge;

3) läbi iga kolme punkti, mis ei asetse ühel sirgel, saab tõmmata parajasti ühe ringjoone;

4) Pythagorase teoreem.

AUKARTUS MATEMAATIKA EES[1]

W. W. Sawyer

«Suurimaks paheks on hirm».
Epikurose filosoofiast

Selle raamatu peamiseks eesmärgiks on hajutada hirm matemaatika ees. Väga paljud inimesed suhtuvad matemaatikutesse kui omaette inimtõugu, kel on peaaegu üleloomulikud võimed. Kuigi niisugune suhtumine on edukatele matemaatikutele väga meelitav, toob ta siiski suurt kahju neile, kes ühel või teisel põhjusel seda ainet selgeks õppida püüavad.

Väga paljud õpilased tunnevad, et nad ei suuda kunagi matemaatikast aru saada, kuid nad võivad siiski nii palju ära õppida, et eksaminaator jääb uskuma, nagu saaksid nad aru. Nad sarnanevad kullerile, kes peab kordama mingit lauset temale tundmatus keeles, kes soovib sõnumi enne edasi anda, kui mälu teda petab, ja kes sellises olukorras võib hakkama saada kõige absurdsemate vigadega.

Ilmselt on selline õppimine vaid ajaraiskamine. Matemaatiline mõtlemisviis on tööriist ja pole mingit mõtet seda tööriista hankida, kui te ei kavatse teda kasutada. Hoopis parem on siis juba kulutada see aeg näiteks kehalistele harjutustele, mis vähemalt tervisele hästi mõjuvad.

Pealegi on inimestele äärmiselt ohtlik harjuda arglikkusega ükskõik millises valdkonnas. Vaimse tervise ideaaliks on olla valmis iga niisuguse probleemiga jõudu katsuma, mis elu juhtub esitama — mitte püüda kõrvalepööratud pilguga nendest kohtadest mööda tormata, kus leidub raskusi.

Miks tuleb matemaatika ees sellist hirmu tunda? Kas see on tingitud aine enda olemusest? Kas suured matemaatikud on teis-

---

[1] W. W. Sawyer (sünd. 1911) on inglise päritoluga ameerika matemaatik, kelle rohked populaarsed raamatud on üsna laialt tuntud. Vene keeles on ilmunud tema raamatu *Prelude to Mathematics* tõlge (У. У. Сойер. Прелюдия к математике. Изд. «Просвещение». М., 1965). Käesolev kirjutis on tema raamatu *Mathematician's Delight* (Harmondsworth, 1959) esimese sissejuhatava peatüki tõlge. Tõlkinud H. Oidjärv. Kavas on avaldada ka selle raamatu teine peatükk: «Geomeetria — teadus mööblist ja müüridest».

test inimestest oluliselt erinevad? Või peitub viga peamiselt aine õpetamise meetodites?

Vaieldamatu on igatahes, et põhjus ei peitu matemaatika olemuses. Selle kõige veenvamaks tõestuseks on fakt, et inimesed oma igapäevases elus midagi tehes kasutavad tegelikult mõttekäike, mis *oma põhijoontelt on samad, mida kasutatakse matemaatikas* — ainult ise pole nad selles asjaolus teadlikud ning kohkuvad väga, kui keegi soovitab neil matemaatikat õppida.

Kartus matemaatika ees pärineb ajast, mil enamus õpetajatest üpris vähe teadis inimloomusest ega teadnud mitte midagi matemaatika enda loomusest. See, mida nad õpetasid, oli vaid lihtsalt imitatsioon.

Peaaegu igal õppeainel on oma vari või imitatsioon. Mulle näib, et on täiesti võimalik õpetada kurttumma last klaverit mängima. Kui ta vale noodi mängimisel näeb oma õpetaja kulmukortsutamist, püüab ta viga parandada. Kuid ilmselt ei ole tal mingit aimu sellest, mida ta teeb või miks peaks üldse keegi sellisele mõttetule harjutamisele tunde pühendama. Laps õpiks sel korral muusika imitatsiooni. Ja ta kardaks klaverit täpselt samuti, nagu paljud õpilased kardavad seda, mida peetakse matemaatikaks.

Muusika kohta öeldu kehtib ka kõigi teiste õppeainete puhul. Te võite õppida ajaloo imitatsiooni — kuningaid ja kuupäevi, saamata vähimatki ettekujutust nende taga olevatest motiividest; või kirjanduse imitatsiooni — terved virnad seisukohti Shakespeare'i fraseoloogia kohta, mis täielikult hävitab võime Shakespeare'i nautida.

Papagoiliku õppimisviisi ohtu illustreerib kurikuulus eksamivastus: «Kõhus on magu ja soolikad, need on *A*, *E*, *I*, *O* ja *U*». Mida niisugust vastust kirjutav laps küll ette kujutas? Kas suuri metalltähti sisikonnas? Või ei kujutanud ta üldse midagi ette? Tõenäoliselt oli ta õpetaja suust nii palju arusaamatuid väiteid kuulnud, et soolikad, mis on ühtlasi *A*, *E*, *I*, *O* ja *U*, ei tundunud talle sugugi müstilisematena kui teised koolis kuuldud asjad.

Üsna suures osas kirjalikest eksamitöödest leidub matemaatilisi vigu, mis on vähemalt sama absurdsed nagu äsjatoodud vastus, ka nende tekkimise põhjus on sama — sõnad, millega ei kaasne kujutlust, ja realistliku mõtlemisviisi puudumine.

Selline oht kaasneb papagoiliku õppimisviisiga alati. Kui kurt laps mängib klaveril mingi ebakõla, siis ei saa ta oma vea olemusest sugugi aru. Tõeline haridus muudab absurdsed vastused võimatuks, kuid see pole kaugeltki tema peamine eelis. Palju tähtsam on tarbetute pingutuste vältimine, eneseusalduse ja -kindluse saavutamine. Hoopis lihtsam on omandada tõelist õppeainet hästi kui tema imitatsiooni halvasti. Ja tõeline õppeaine on huvitav. Niikaua, kuni aine näib olevat tuim, võite olla kindel, et te lähenete talle vale küljest. Kõik avastused, kõik suured saavutused pärinevad inimestelt, kes oma tööd andumusega teevad. Ja need on kõik olnud tavalised inimesed, mitte mingisugused veidrikud või karjeristid. Edison tundis vajadust sooritada teaduslikke eksperimente täpselt samuti, nagu teised poisid tunnevad vajadust askeldada abimootoriga jalgratastega või ehitada raadioaparaate. Suurte teadlaste, suurte inseneride või avastajate puhul on seda lihtne näha, kuid see kehtib ka kõigis teistes valdkondades.

Selleks et mingil alal — jalgpallist kuni relatiivsusteooriani — meistriks saada, tuleb pingutada. Kuid see ei nõua ebameeldivat pingutamist, sunnitööd. Iga õpetaja peamiseks ülesandeks on muuta aine huvitavaks. Kui laps lahkus koolist kümneaastaselt, ühtki ainet üksikasjalikult tundmata, kuid osates tunda rõõmu heast muusikast, lugemisest, millegi valmistamisest või millegi avastamisest, siis on ta eluks vahest isegi paremini ette valmistunud kui mees, kes lõpetas ülikooli kahekümne kahe aastaselt, pea täis igasuguseid fakte, kuid ilma mingi soovita selles kuivas valdkonnas veel midagi juurde uurida. Iga õppeaine alguses tuleb maalida ere pilt nendest eelistest, mida selle aine tundmine annab. Iga ettevõetava sammuga peab kaasnema teatav uudishimu või huvi, mis virgutab seda sammu astuma.

Halb õpetamine on peaaegu ainsana süüdi sellise vastumeelsuse tekkimises, mida väljendatakse ka sõnadega «liialt intellektuaalne». Lapsed tahavad asju teada saada, nad tahavad asju teha. Õpetajad ei pea neile elu sisse puhuma: elu on lastes küllalt, see vaid ootab avaldumisvõimalusi. Laste energiat tuleb üksnes alles hoida ning suunata.

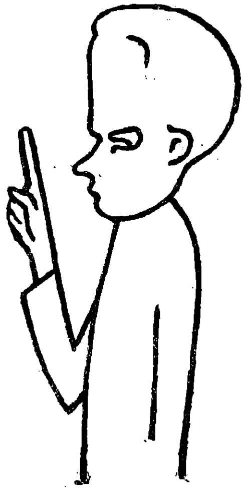
Liiga sageli näib õpetamine kahjuks tuginevat arutlusele, et täiskasvanuil tuleb tegelda tuima tööga ja et lapsed peavad seetõttu tuima tööga nii ruttu kui võimalik harjuma. Selle tulemuseks on täiesti õigustatud vaen ja põlgus õppimise ning intellektuaalse töö vastu. Paljud õpetajad on juba mässu tõstnud niisuguse tuima õpetamise traditsioonide vastu. Mõningaid õpetamise suurepäraseid näiteid on raadios edasi antud. Samu ideid ja meetodeid avastatakse sõltumatult kõikjal üle maa. Seetõttu ei pretendeeri käesolev raamat sugugi originaalsusele. Selles raamatus on lihtsalt esitatud seisukohti, mida jagavad tuhanded.

Järgnevates peatükkides ma püüan näidata, mida matemaatika endast üldse kujutab, kuidas matemaatikud mõtlevad, millal matemaatikat kasutada saab. Raamatu väikese mahu juures ei saa eriti detailidesse laskuda. Kui te tahate matemaatika mingit spetsiaalset osa põhjalikult omandada, siis tuleb teil muidugi kasutada vastavat õpikut. Kuid enamik õpikuid sisaldab määratu palju niisugust informatsiooni, mille otstarve pole sugugi mitte kohe ilmne. Kasutu on koormata mälu sellise otstarbetu informatsiooniga. See oleks nagu niisuguse haamri hankimine, mida te ei jõua tõsta. Matemaatika on nagu tööriistade kast: enne üksikute tööriistade põhjalikku tundmaõppimist peab meister teadma igaühe otstarvet, millal, kuidas ja miks seda kasutatakse.

MAAGILINE ARITMEETIKA

Tõeleid Roosinupp

Ühes oma varasemas töös[1] ma käsitlesin maagilise matemaatika kõige olulisemat valdkonda — maagilist geomeetriat. Nüüd on saabunud aeg asuda teise veelgi olulisema valdkonna — maagilise aritmeetika juurde. Õigupoolest avaldasin ma juba käesoleva uurimuse ettevalmistamise käigus anonüümselt mõned lühimärkused ka selle uue valdkonna kohta[2], kuid põhiline osa tulemustest on esialgu veel avaldamata. Kahjuks ei saa ma aga ka siin veel kõiki oma huvitavaid tulemusi ära tuua ja pean piirduma üksnes teatava valikuga. Et järgnevat käsitlust isegi vähem ettevalmistatud lugejaile veidi arusaadavamaks muuta, on põhitulemused rühmitatud kolme enam-vähem iseseisvasse peatükki. Olgu kohe märgitud, et see, mis neis peatükkides ühist on, ongi maagiline aritmeetika.



I peatükk. Arvude sümfooniad

Arvud sisaldavad palju sügavamat sisu ning neis peitub palju enam ilu, kui seda suudab pakkuda ükski lihtsümfoonia (= lihtsalt nii-ja-nii-mitmes sümfoonia). Seda väidet tõestavaid fakte olen ma juba varem avaldanud[3], nii et nüüd võib seega asuda juba tunduvalt sisukamate ja üldistustele viitavate faktide esitamise juurde.

Vahemärkusena olgu kõigepealt nimetatud, et arvude sümfooniate klassifitseerimisel tehakse tavaliselt ranget vahet lõplike (n «takti» sisaldavate) ja lõpmatute ($n \to \infty$) sümfooniate vahel. Kõrvuti sellega kasutatakse aga ka teisi klassifitseerimisprintsiipe, võttes aluseks kas teose sisu (ühe-, kahe-, mitmesisulised) või vormi (kolmnurksed, ruudukujulised).

Aga nüüd siis faktide juurde!

Varem toodutega veidi sarnase (lõpliku) sümfoonia moodustavad näiteks järgmise lehekülje alguses toodud võrdused:

---

[1] Vt. T. Roosinupp. Maagilise geomeetria aluseid. — Matemaatika ja kaasaeg, VII, lk. 72—74.

[2] Mõeldud on lühimärkusi, mis ilmusid kogumikus «Matemaatika ja kaasaeg», IX, lk. 57 ja 65.

[3] Vt. (veel kord) Matemaatika ja kaasaeg, IX, lk. 65.

$$1 = \frac{1^2}{1}$$

$$121 = \frac{22^2}{1+2+1}$$

$$12321 = \frac{333^2}{1+2+3+2+1}$$

$$1234321 = \frac{4444^2}{1+2+3+4+3+2+1}$$

$$123454321 = \frac{55555^2}{1+2+3+4+5+4+3+2+1}$$

$$12345654321 = \frac{666666^2}{1+2+3+4+5+6+5+4+3+2+1}$$

$$1234567654321 = \frac{7777777^2}{1+2+3+4+5+6+7+6+5+4+3+2+1}$$

$$123456787654321 = \frac{88888888^2}{1+2+3+4+5+6+7+8+7+6+5+4+3+2+1}$$

$$12345678987654321 = \frac{999999999^2}{1+2+3+4+5+6+7+8+9+8+7+6+5+4+3+2+1}$$

Siin aga on kohe paar näidet lõpmatute sümfooniate lõpmata suurest perest:

$$\begin{array}{rcl}
7 \times 9 &=& 63 \\
77 \times 99 &=& 7623 \\
777 \times 999 &=& 776223 \\
7777 \times 9999 &=& 77762223 \\
77777 \times 99999 &=& 7777622223 \\
\ldots & & \ldots
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
4 \times 4 &=& 16 \\
34 \times 34 &=& 1156 \\
344 \times 334 &=& 111556 \\
3334 \times 3334 &=& 11115556 \\
33334 \times 33334 &=& 1111155556 \\
\ldots & & \ldots
\end{array}$$

Lõpuks veel üks mitmesisuline sümfoonia:

$9109 \times 1 = 09109$	(tulemuse	numbrite	summa	$= 19$)
$9109 \times 2 = 18218$	(,,	,,	,,	$= 20$)
$9109 \times 3 = 27327$	(,,	,,	,,	$= 21$)
$9109 \times 4 = 36436$	(,,	,,	,,	$= 22$)
$9109 \times 5 = 45545$	(,,	,,	,,	$= 23$)
$9109 \times 6 = 54654$	(,,	,,	,,	$= 24$)
$9109 \times 7 = 63763$	(,,	,,	,,	$= 25$)
$9109 \times 8 = 72872$	(,,	,,	,,	$= 26$)
$9109 \times 9 = 81981$	(,,	,,	,,	$= 27$)
$\downarrow\uparrow\downarrow\downarrow\uparrow$				

Viimase rea alla paigutatud nooled osutavad siin sellele, et tulemuste igas veerus on lihtsalt järjestikuste numbrite jada, mis kasvab noolega näidatud suunas.

Juba eelmise peatüki viimases näites oli meil tegemist ühe imeliku arvuga 9109, mille imelikkus väljendus tema kordsete hulgas valitseva seaduspärasuse näol. Veidi sarnasel viisil «imelik» on ka arv 142857. Nimelt tabelit

$$
\begin{aligned}
142857 \times 1 &= 142857\\
142857 \times 2 &= 285714\\
142857 \times 3 &= 428571\\
142857 \times 4 &= 571428\\
142857 \times 5 &= 714285\\
142857 \times 6 &= 857142
\end{aligned}
$$

vaadeldes märkame, et tulemuseks on kogu aeg sama numbrite tsükliline jada, mis ainult iga kord algab ise kohast. Selle arvu imelikud omadused lähevad aga veelgi edasi. Väikeseks erandiks on

$$142857 \times 7 = 999999,$$

kuid siis saame jälle

$$142857 \times 8 = 1142856,$$

kus esimese numbri liitmine viimasele annab jälle lähtearvu. Ja nii see jätkub!

Omamoodi «maagilise ruudu» saame aga arvu 76923 korrutades:

$$
\begin{aligned}
76923 \times 22 &= 153846\\
76923 \times 7 &= 538461\\
76923 \times 5 &= 384615\\
76923 \times 11 &= 846153\\
76923 \times 6 &= 461538\\
76923 \times 8 &= 615384
\end{aligned}
$$

(Analoogiliseks maagiliseks ruuduks võib korraldada ka eelmise tabeli, kui teised tegurid võtta järjekorras 1, 3, 2, 6, 4 ja 5).

Üsna imelikuks arvuks osutub ka 12345679. Paneme näiteks tähele, et

$12345679 \times 30 = 370370370$	(tulemuse	numbrite	summa	$= 30$)
$12345679 \times 33 = 407407407$	(,,	,,	,,	$= 33$)
$12345679 \times 39 = 481481481$	(,,	,,	,,	$= 39$)
$12345679 \times 42 = 518518518$	) ,,	,,	,,	$= 42$)
$12345679 \times 48 = 592592592$	(,,	,,	,,	$= 48$)
$12345679 \times 51 = 629629629$	(,,	,,	,,	$= 51$)

Seda arvu saab aga kasutada ka mitmesugustes trikkides. Üks lihtsamaid on järgmine. Kirjutage arv 12345679 ja küsige, milline siin esinevatest numbritest teie kaaslasele kõige vähem meeldib. Olgu vastus näiteks 7. Paluge siis antud arv korrutada teguriga 63 ($= 7 \cdot 9$) ja tulemus on kõige ebameeldivam:

$$12345679 \times 63 = 777777777.$$

Märgime lõpuks, et analoogiliste omadustega imelikeks arvudeks on veel näiteks 1122334455667789, 111222333444555666777889 jne.

III peatükk. Kõik numbrid

Eelmise peatüki viimased arvud koosnesid kõikidest erinevatest numbritest (null pole ju number!), kuid numbrid 8 ja 9 olid seal veidi diskrimineeritud olukorras. Selle puuduse kõrvaldamiseks võtame nüüd vaatluse aluseks arvud 123456789 ja 987654321. Nendest arvudest lähtudes moodustame järgmised kaks arvude tulpa:

123456789	1
12345678	21
1234567	321
123456	4321
12345	54321
1234	654321
123	7654321
12	87654321
1	987654321

Tulpade alla tõmmatud jooned viitavad kavatsusele asuda neid liitma. Kuid enne püüdke «silma järgi» hinnata, kumb summa tuleb suurem. Muidugi te eksisite! Need summad on mõlemad ühesuurused ja nimelt 1083676269. Sellega on tõestatud teoreem: kõigist järjestikustest numbritest moodustatud arvude liitmisel pole oluline, millises järjekorras neid numbreid arvudeks ühendada.

On üldiselt teada, et kõiki kümmet numbrit kasutades saab kirjutada iga täisarvu. Minul õnnestus aga tõestada, et lihtmurdude kirjutamisel piisab vaid üheksast põhinumbrist (ilma nullita!), kusjuures iga numbrit tuleb kasutada vaid üks kord. Pika üksikasjaliku tõestuse võib siin rahulikult asendada demonstratsiooniga. Vaata ja veendu:

$$\frac{1}{2}=\frac{6729}{13458};\quad \frac{1}{3}=\frac{5823}{17469};\quad \frac{1}{4}=\frac{3942}{15768};\quad \frac{1}{5}=\frac{2697}{13485};$$

$$\frac{1}{6}=\frac{2943}{17658};\quad \frac{1}{7}=\frac{2394}{16758};\quad \frac{1}{8}=\frac{3187}{25496};\quad \frac{1}{9}=\frac{6381}{57429};$$

Iga erinevat numbrit vaid üks kord kasutades saab üsna palju maagilist korda saata. Kahjuks ei võimalda aga mulle eraldatud napp ruum nendel küsimustel pikemalt peatuda. Pealegi peab ka lugejale mõningat avastamisrõõmu jätma! Sellepärast lõpetan järgmise huvitava (kuid raske!) ülesandega.

Teadusliku töö tarbeks on mul alati laual papitükid, millele on kantud numbrid ning mitmesugused matemaatilised sümbolid. Võtsin kord 13 papitükki sümbolitega

$$0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9 \times \times =$$

ning jaotasin need numbrid juhuslikult kaheks viienumbriliseks rühmaks. Lisasin siis kummalegi rühmale veel korrutamismärgi ja panin nende rühmade vahele võrdusmärgi, sest tulemus oli

$$2 \times 3485 = 1 \times 6970$$

ning need korrutised on ju tõepoolest võrdsed. Muidugi märkasin ma kohe, et see on kõige väiksem korrutis, mida niimoodi üldse moodustada saab (s. t. nõudes, et kummalgi pool võrdusmärki oleks viis numbrit ja üks korrutamismärk).

Loomulikult ei tekitanud mulle raskusi ka kõige suurema niisuguse korrutiste paari moodustamine. Kas see Teile tekitab raskusi?

JÜRI NUUDI ELU JA TEADUSLIK PÄRAND

G. Kangro, Ü. Lumiste, E. Tamme

Kuigi matemaatika ajalugu Eestis ulatub juba vähemalt XVII sajandisse, arenes matemaatikaalane loominguline töö enne Suurt Oktoobrirevolutsiooni eranditult sisserännanud autorite võõrkeelsetes töödes. Alles pärast üleminekut eestikeelsele õppetööle Tartu ülikoolis 1919. a. hakkas kujunema loominguliselt töötavate eesti matemaatikute kaader. Esimestel aastakümnetel oli see veel üpris väikesearvuline. Tänapäeval, mil Eesti NSV matemaatikute pere on kasvanud arvukaks ja teovõimeliseks kollektiiviks, meenutame austusega neid teadusmehi, kes panid aluse selle kollektiivi kujunemisele. Kõige enam tähelepanu väärivaks teadlaseks, pedagoogiks ja organisaatoriks eesti vanema põlve matemaatikute seas on kahtlemata meie esimene akadeemik-matemaatik Jüri Nuut, kelle sünnist möödub käesoleval aastal 75 aastat ja surmast 15 aastat.

Jüri Nuudi noorus- ja õpinguteaastad möödusid Peterburis, kus ta karastus revolutsioonitules. Tema matemaatikaalane teaduslik ja metoodiline tegevus puhkes Tartus kõrvuti pedagoogilise tööga kesk- ja seejärel ülikoolis. Küpse teadlasena ja ühiskonnategelasena tegutses ta Tallinna Tehnikaülikooli professorina ja rektorina ning Suure Isamaasõja järgsetel aastatel ENSV TA akadeemikuna Tallinnas.

J. Nuudi elu ja looming ei ole seni veel leidnud ulatuslikumat käsitlemist. Järgnevas kirjutises on autorid kasutada olnud materjali tõttu biograafia osas pearõhu asetanud kahele esimesele perioodile J. Nuudi elus ja pööranud vähem tähelepanu sõjajärgsele perioodile. Samuti ei ole siin ulatuslikumalt avatud J. Nuudi teeneid ühiskondliku, teaduslik-metoodilise ja -organisatsioonilise töö rindel. See-eest on püütud iseloomustada J. Nuudi teaduslikku pärandit ja selle saatust, kuivõrd seda on võimaldanud väljaande iseloom ja põhjalikumaks hindamiseks vajaliku ajaloolise distantsi puudumine.

Jüri Nuut sündis 10. juulil 1892. a. Peterburis. Tema vanemad olid välja rännanud Eestist.[1] Poja sündimise ajal oli isa malmivalumeister, hiljem sai aga malmivabriku vastutavaks juhatajaks.

Oma õpingutest kirjutab J. Nuut elulookirjelduses[2] (1931): «Aastal 1900 astusin Peterburis Anna-kooli (St. Annen-Schule) esimesse ettevalmistusklassi. Lõpetasin sama kooli reaalharu kevadel 1909 esimese auhinnaga (Josef Koenig Preis). Sama, 1909. aasta sügisel tegin Peterburi õpperingkonna komisjonis täiendus-eksami ladina keele alal ning astusin selle peale kohe Füüsika-Matemaatikateaduskonna matemaatikaosakonda. Lõpetasin ülikooli, tegin riigieksamid vastava komisjoni kevadisel istungjärgul Peterburis 1914. a. Sama aasta sügisel esitasin täiendavalt komisjonile diplomitöö «Об алгебраическом решении двучленных уравнений» ja omandasin sellega aasta lõpul ülikooli lõpetamise esimese järgu diplomi.» Diplomitöö, nagu J. Nuut ise märgib, oli käsikirjaline ja kompilatiivset laadi.

Peterburi ülikool andis J. Nuudile küll hea ettevalmistuse matemaatika alal, kuid iseseisvaks uurimistööks J. Nuut sealt innustust nähtavasti ei saanud. Edasist süvenemist valitud erialasse takistasid järgnenud poliitilised sündmused — 1914. a. suvel puhkes Euroopas I maailmasõda, millesse sekkus ka Venemaa. Sõjaväkke mobiliseeriti Jüri Nuut 1915. a. septembris. Enne seda oli ta aasta esimesel poolel töötanud praktikandina Peterburi ühes metallitööstuse ettevõttes, suvel aga abiellunud Asta Schlittleriga (sünd. 15. dets. 1892. a. Peterburis), Šveitsist pärit raamatupidaja Johann Schlittleri tütrega. Sõjaväes määrati J. Nuut esialgu tagavarapataljoni, kuid juba oktoobris suunati ta Kahurväekooli Petrogradis (Михайловское Артиллерийское Училище). Selle kiirendatud kursuse lõpetas Jüri Nuut 1916. a. maikuul lipniku aukraadiga. Sama aasta oktoobris saadeti ta suurtükiväelasena rindele Rumeeniasse, kus sõdis 1917. a. lõpuni.

Rinde lagunemise ajal saabus J. Nuut 1918. a. jaanuaris nooremleitnandina revolutsioonilisse Petrogradi ning demobiliseeriti Bresti rahulepingu põhjal 1918. a. märtsis. Töötanud lühemat aega Petrogradis eksperdina Kahurväe Peavalitsuse tehnilises komisjonis, astus J. Nuut 1918. a. suvel Punaarmee inseneriväeossa ja võttis osa lahingutest Nižni-Novgorodi, Tsaritsõni ja Voroneži all.

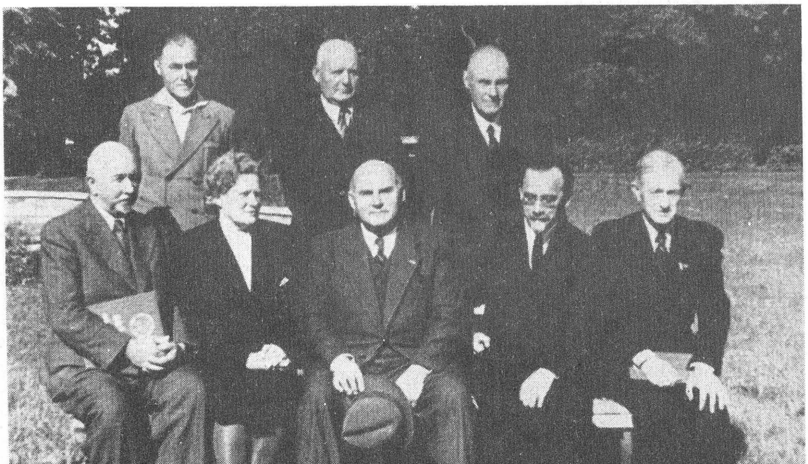
---

[1] Isa Jüri Nuut on sündinud 20. VIII 1868. a. Tori vallas, ema Luise Nuut (neiuna Adamson) 2. III 1869. a. Pärnus.

[2] RAKA, f. 2100, nim. 8, s.-ü. 7

Jüri Nuut Tartu ülikooli õppejõuna

Narva Rahvaülikooli I lend (1922) ja lektorid. Jüri Nuut esireas vasakult esimene.



Eesti NSV teenelisi teadlasi koos J. Vares-Barbarusega. Jüri Nuut esireas paremalt esimene.

Punaarmeest vabanes J. Nuut 1920. a. detsembris seoses tema arvamisega Eesti kodakondsusse. Pärast paarikuulist tööd arvutajana Petrogradi Astronoomia Arvutusinstituudis opteerus ta 1921. a. juunis Eestisse ja asus koos perekonnaga, mis vahepeal oli täienenud poeg Andresega (sünd. 2. I 1917), esialgu Tartu elama. Juba sama aasta sügisel siirdus aga perekond Narva, kus J. Nuudil võimaldati asuda tööle Narva Linna Reaalgümnaasiumi matemaatikaõpetaja kohusetäitjana. (Keskkooli matemaatika- ja füüsikaõpetaja kutse kinnitati talle Haridusministeeriumi poolt 1. II 1923.)

Narvas sai alguse J. Nuudi intensiivne ja viljakas töö hariduspõllul. Aastatel 1922—1923 oli J. Nuut ühtlasi lektoriks Narva Rahvaülikoolis, kus pidas populaarseid loenguid astronoomiast ja matemaatikast. Ta oli valitud ka Narva Õpetatud Eesti Seltsi juhatusse. Saanud Haridusministeeriumilt toetuse, tegi J. Nuut 1923. a. kevadel õppereisi Saksamaale eesmärgiga uurida sel ajal laialt levinud töökooli idee rakendamist keskkooli õppetöös. Narvas sündis 13. II 1923. a. J. Nuudi teine poeg Ilmar.

1923. a. augustis pöördus J. Nuut tagasi Tartu, kus asus tööle Eesti Noorsoo Kasvatuse Seltsi Tütarlaste Gümnaasiumi matemaatikaõpetajana. Sellel kohal oli ta viis aastat, kuni 1928. a. augustini.

J. Nuut ei piirdunud ainult otsese kutsetööga. Suurt tunnustust pälvib tema juba neil aastail alanud intensiivne tegevus matemaatika õpetamise metoodika alal. Matemaatika õpetamise reformi pooldajana valiti J. Nuut 1924. a. toimunud IV matemaatika-, füüsika- ja kosmograafiaõpetajate kongressil matemaatika õpetamise komisjoni (MÕK) liikmeks (koos G. Rägo, A. Borkvelli, J. Grüntali ja J. Kuulbergiga). Samal kongressil esines J. Nuut programmilise kõnega «Geomeetria üldhariduslise õppeainena koolis» [1]. Ta oli sagedaseks lektoriks ka Haridusministeeriumi poolt keskkooliõpetajatele Tartu ülikooli juures korraldatud suvekursustel.

1926. a. kevadsemestril algas J. Nuudi pedagoogiline töö ülikoolis, mis esialgu kuni 1928. aastani kulges rööbiti tööga keskkooli matemaatikaõpetajana. Esialgu veel õppeülesande täitjana luges J. Nuut ülikoolis elementaarmatemaatikat kõrgemalt vaatekohalt, analüütilist geomeetriat ja kõrgemat algebrat. 1926. mais vabanes matemaatikadotsendi koht seoses 1925. a. doktorikraadi kaitsnud Hermann Jaaksoni edutamisega korraliseks matemaatikaprofessoriks. Seoses sellega avaldasid professori kohusetäitjad G. Rägo ja J. Sarv kirjas Matemaatika-Loodusteaduskonnale (5. V 1926) [3] arvamust, et nende teada ei leidu momendil Eestis matemaatika alal isikuid, kes rahuldaksid nõudeid, mida seab ülikooli seadus dotsentuuride täitmise kohta. Küll aga arvasid

---

[3] Vt. RAKA, f. 2100, nim. 2, s.-ü. 741.

nad, et teaduskonna tolleaegsetest õppeülesande täitjatest Edgar Krahnist ja Jüri Nuudist «vahest ajajooksul kujuneksid jõud, kes võiksid arvesse tulla mainitud õppekoha täitmisel.» Nii jäigi matemaatikadotsendi koht Tartu ülikoolis täitmata kuni 1928. aastani.

Kahest sellele kohale pretendeerijast oli Tartu ülikooli 1917. a. lõpetanud E. Krahnil (sünd. 1894. a.) see eelis, et ta oli Göttingenis end täiendamas käies omandanud seal 1926. a. alguses doktorikraadi[4]. Kuid ka J. Nuut oli õpetajatöö kõrval alustanud teaduslikke uurimusi. Tema tähelepanu oli köitnud üks D. Hilberti poolt veel lahtiseks jäetud probleem arvsirge kui teatava punktihulga aksiomaatikas. Probleemi uurimisest kasvas välja ulatuslik töö «Der lineare Raum als topologische Grundlage des Zahlbegriffs» (Lineaarne ruum arvu mõiste topoloogilise alusena), mille J. Nuut esitas Tartu ülikoolile doktoritööna. Edukalt lõppenud kaitsmine toimus 27. XI 1926. a., dotcor phil. nat. teaduslik kraad kinnitati Ülikooli Valitsuses 28. I 1927. a.

Eradotsendi õiguste saamiseks oli nüüd selleaegse korra järgi (mis kopeeris Saksa ülikoolide tavasid) vaja esitada habilitatsioonitöö ja teha vastav teaduslik ettekanne. Sellise tööna esitas J. Nuut 1. XI 1927. a. oma juba teises valdkonnas tehtud uurimuse «Über die Anzahl der Lösungen der Vierfarbenaufgabe» (Nelja värvi probleemi lahendite arvust), mis ilmus ülikooli toimetistes 1929. a. [2]. Uurimus oli inspireeritud J. Sarve ühest tööst ja sellest sai alguse teine suund J. Nuudi teaduslikus uurimistöös, millega ta tegeles veel aastakümneidki hiljem.

Samal teemal esitas J. Nuut 28. III 1928. a. Matemaatika-Loodusteaduskonnakogu ees habilitatsiooniettekande «Nelja värvi probleemi sidemetest n-mõõtmelise täpivõre erikujuliste funktsioonidega», mille põhjal Ülikooli Valitsus kinnitas J. Nuudile eradotsendi kutse 8. V 1928. a. Samaaegselt sai eradotsendi õigused ka Tartu Kaubanduskooli matemaatikaõpetaja E. Krahn.

Alles nüüd otsustati täita vakantne matemaatikadotsentuur, millele kandideerisid E. Krahn ja J. Nuut. Kandidaatide hindamiseks valitud komisjon koosseisus H. Jaakson, G. Rägo, ja J. Sarv esitas teaduskonnale mõlemad kandidaadid võrdselt sobivatena. Ka teaduskonnakogus kinnisel hääletamisel said mõlemad kandidaadid võrdselt hääli (8 poolt, 7 vastu), kuid ülikooli nõukogus 8. V 1928. a. sai J. Nuut häälteenamuse (21 poolt, 3 vastu) ja valiti seega matemaatikadotsendiks. Avaloengu «Matemaatilise mõtlemise objektidest» pidas ta septembris 1928. a.

J. Nuut võis nüüd loobuda töötamisest keskkooliõpetajana. Kuid koolimatemaatika reformimise probleemid jäid talle lähedasteks ka edaspidi. Ta võttis nende lahendamisest elavalt osa nii organisatsioonilise tööga, õpetajate ettevalmistamisega ülikoolis kui ka keskkooli matemaatika õpikute autorina. Juba 1927. aas-

[4] Vt. Ü. Lumiste. Lehekülgi matemaatika ajaloost Eestis. — Matemaatika ja kaasaeg, IV, lk. 70—81.

tal toimunud V matemaatika-, füüsika- ja kosmograafiaõpetajate kongressil, millel J. Nuut esines mälestuskõnega F. Kleinile, valiti ta matemaatika õpetamise komisjoni aseesimeheks. Komisjonis töötas ta kaasa keskkooli matemaatika õppekava projekti väljatöötamisel, mis sai aluseks keskkooli matemaatika 1930. a. ametlikult kinnitatud programmile.

Ülikoolis luges J. Nuut sellal dotsendina kõrgema matemaatika põhijooni, kõrgemat algebrat, valitud küsimusi rühmateooriast, mitte-eukleidilist geomeetriat, matemaatika metoodikat jm. Aastatel 1927—1931 oli ta ülikooli juures tegutsenud Akadeemilise Matemaatika Seltsi[5] esimeheks ja esines seltsi koosolekutel nelja ettekandega. 1930. aastal ilmus temalt populaarteaduslik raamat «Millest kõneleb Einsteini relatiivsuse õpetus» [5]. J. Nuudi huvid hakkasid kalduma suunda, millele ta pühendas oma kõige viljakamad uurimistöö aastad.

Vastavalt tolleaegsele ülikooli seadusele kuulutati matemaatikadotsendi koht kolme aasta pärast uuesti vakantseks. Sellele kandideerisid jälle J. Nuut ja E. Krahn. Seekord soovitas komisjon dotsendiks valida J. Nuudi, kelle teaduskonnakogu 22. IV 1931. a. valiski suure häälteenamusega (13 poolt, 3 vastu). Tartu ülikooli dotsendi kohale jäi J. Nuut kuni 1936. a. suveni.

Nendel aastatel luges J. Nuut ka mitmeid uusi aineid: relatiivsusteooria matemaatilisi aluseid, valitud küsimusi punktihulkade teooriast, majandusmatemaatikat, andis praktikume kaubandusaritmeetikast jm.

Loengute pidamise kõrval tegeles ta endiselt ka koolimatemaatika probleemidega. 1931. a. maikuul võttis ta Tallinnas osa gümnaasiumiõpetajate II kongressist. Aastatel 1932—1935 kirjutas J. Nuut keskkoolidele viis õpikut [8, 9], milles püüdis realiseerida koolimatemaatika reformitaotlusi.[6] Õpetajate ettevalmistamisega tegeles ta vahetult matemaatika metoodika seminari juhatajana ülikoolis tegutsenud didaktilis-metoodilise seminari raames.

Teaduslikus töös leiab J. Nuut pärast paari statistika meetodite rakendustele pühendatud töö [10, 11] avaldamist oma edasiste uurimuste põhisuuna. Töös [13] esitab J. Nuut lähteidee — idee ekspansionistlikust mehhaanikast — ruumi ja aja uurimise programmile neljamõõtmelise Lobatševski geomeetria abi. Seda ideed realiseerib ta mitmes järgnevas töös.

1936. a. juulis võttis J. Nuut osa rahvusvahelisest matemaatikute kongressi tööst Oslos, olles saanud ülikoolilt toetust sõidukulude osaliseks katteks. Tagasi saabunud, asus ta tööle juba uuel ametikohal. Nimelt oli J. Nuut 1. juulil 1936. a. määratud riigivanema otsusega sellal loodud Tallinna Tehnikainstituudi

---

[5] Selts on asutatud 21. III 1926. a., selle esimeseks esimeheks oli G. Rägo.

[6] Vt. O. Prinits. Kõrgema matemaatika algmete käsitlemisest eestikeelseis matemaatika õppcraamatuis aastail 1920—1940. — Loodus ja Matemaatika, I. Trt., 1959, lk. 142—158.

matemaatika ja mehhaanika erakorraliseks professoriks. Tema omal palvel jäeti J. Nuut siiski ka Tartu ülikooli eradotsendiks, kellena 1937. a. kevadsemestril luges Lorentzi teisenduste kursust ja 1938. a. kevadsemestril aatomifüüsika matemaatilisi aluseid, ülejäänud semestritel palus ta end vabastada loengutest, 1940. a. aga kustutada eradotsentide nimekirjast.

Ka Tallinnas asus J. Nuut energiliselt tööle teadlasena, pedagoogina ja organisaatorina. Tehnikainstituudi Ehitusteaduskonna raames loodi matemaatika ja mehhaanika laboratoorium (koosseisus: dotsent A. Borkvell [7], vanemassistent R. Aavakivi [8] ja nooremassistent G. Kangro), mille juhatajaks sai J. Nuut. Real välisreisidel tutvus J. Nuut teadusliku ja pedagoogilise tööga Rootsis, Austrias, Tšehhoslovakkias jm. 1937. a. valiti ta matemaatika ja mehhaanika korraliseks professoriks, 1939. a. oktoobris aga nimetati Tallinna Tehnikaülikooli rektoriks (haridusministriks siirdunud P. Kogermanni asemele). Ta oli ka Tallinna üliõpilaskonna kuraatori abi ja alates 1939. a. Riiginõukogu liige.

Professorina Tallinnas luges J. Nuut teoreetilist mehhaanikat, hüdromehhaanikat, diferentsiaal- ja integraalarvutust jm. Teaduslikus uurimistöös arendas J. Nuut edasi oma ekspansionistlikku mehhaanikat [20, 21], millele oli aluse pannud juba Tartus [13]. Sellest ajast pärinevad ka J. Nuudi kaks teoreetilise mehhaanika õpikut [17, 24], mis ilmusid aastatel 1937 ja 1940, ning mitmed populaarse iseloomuga kirjutised [18, 19, 23].

J. Nuudi eriharrastuseks on olnud male. Juba 1924. aastal valiti ta Tartu Malesektsiooni esimeheks, hiljem oli ta mitmetel aastatel Eesti Maleliidu esimees.

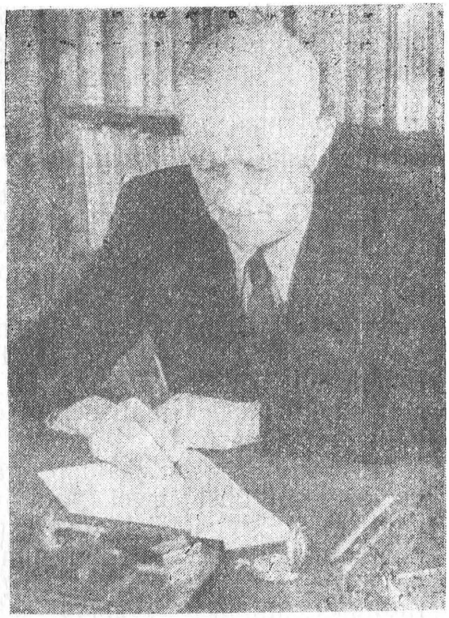
1940. a. juunipöörde ajal oli J. Nuudi hoiak selge. Juba kodanliku Eesti päevil oli ta kaitsnud sõprust Nõukogude Liiduga. Tartus võttis ta alates 1932. aastast osa NSV Liidu sõprade ringi tööst, Tallinnas sai temast 1939. a. Eesti—Nõukogude Liidu Sõprusühingu aseesimees. Juunipöörde käigus astus J. Nuut avalikult ja otseselt revolutsiooniliste hulkade poolele. Ta valiti Hariduse- ja Kunstitööliste Ametiühingu Keskkomitee liikmeks. Tallinna Tehnikaülikooli direktorina asus ta selle tööd ümber korraldama nõukogulikel alustel. 1941. a. jaanuaris valiti ta saadikuks NSVL Ülemnõukogu Rahvuste Nõukogusse.

Suure Isamaasõja ajal (1941. a. juuli algul) evakueerus J. Nuut ENSV Rahvakomissaride Nõukogu korraldusel Nõukogude Liidu tagalasse. Aastail 1941—1943 töötas ta Tšeljabinskis Põllumajanduse Mehhaniseerimise Instituudi professorina ja

[7] Albert Borkvelli (1890—1963) elu ja tegevust on tutvustatud «Matemaatika ja kaasaja» V vihikus, lk. 96—97.

[8] Rolf Aavakivi on sündinud 10. märtsil 1907. a. Soomes, lõpetanud H. Treffneri gümnaasiumi 1925. a. ja Tartu ülikooli matemaatikaosakonna 1933. a., omandanud magistrikraadi 1936. a., töötanud 1931—1936 abiõppejõuna Tartu ülikoolis ja alates 1936. a. vanemassistendina Tallinna Tehnikainstituudis. Surnud haiguse tagajärjel 1941. a. augustis teel Nõukogude tagalasse.

matemaatika kateedri juhatajana, aastail 1943—1944 aga Moskvas Põllumajanduse Mehhaniseerimise ja Elektrifitseerimise Instituudi professorina ja kateedrijuhatajana. Ka nendel rasketel aastatel ei loobunud J. Nuut teadusega tegelemast. Tšeljabinskis organiseeris ta kateedri juures seminari, milles pidas ettekannete tsükli nelja värvi probleemist ja ekspansionistlikust mehhaanikast. Mõned topoloogiliste kaartide kohta saadud tulemused avaldas ta hiljem ENSV Teaduste Akadeemia 1947. a. sessiooni materjalides [29]. Tagalapäevil esines J. Nuut Tšeljabinski linnakomitee lektorina raadios, koosolekutel väeosades ja ajakirjanduses (näit. [25]). 1942. a. detsembris võeti J. Nuut vastu ÜK(b)P liikmeks.



J. Nuut ENSV Teaduste Akadeemias oma töölaua taga

Kohe pärast Tallinna vabastamist asus J. Nuut ENSV Hariduse rahvakomissarina juhtima koolide, õppeasutuste ja teaduslike uurimisinstituutide taastamist. Veebruaris 1946. a. valiti ta teistkordselt NSVL Ülemnõukogu saadikuks. Vabariigi hariduselu juhina tegutses J. Nuut 1946. a. aprillikuuni, mil ta ENSV Teaduste Akadeemia loomisel määrati akadeemia tegevliikmeks füüsikalis-matemaatiliste ja tehniliste teaduste osakonnas ning ühtlasi TA Presiidiumi liikmeks akadeemik-sekretärina. Teaduslikus tegevuses pühendus ta ulatusliku kaheköitelise monograafia koostamisele Lobatševski geomeetriast ja selle rakendustest füüsikalise aeg-ruumi teoorias.

1950. a. sisepoliitilised sündmused ei jätnud puutumata ka J. Nuuti. Sunnitud lahkuma ENSV TA akadeemik-sekretäri kohalt, siirdus ta tööle vanema teadusliku töötajana Füüsika ja Astronoomia Instituuti Tartus. Siin jõudis ta lõpule viia oma monograafia, mille materjale ta esitas mitmetes publikatsioonides [28, 30, 34, 35, 36] ning mille esimene osa ilmus posthuumselt 1961. a. prof. H. Kerese ja prof. B. Rosenfeldi toimetusel NSVL TA väljaandena [37].

Jüri Nuut suri vähktõve tagajärjel Tallinnas 31. mail 1952.

* * *

Nagu eelnevast selgus, olid J. Nuudi teadusliku töö põhisuundadeks: 1) geomeetria alused, 2) nelja värvi probleem, 3) Lobatševski geomeetria ja selle rakendused füüsikas.

1. Uurimused geomeetria aluste alal Tartu ülikoolis algavadki õieti J. Nuudi doktoritööga 1926. a. Töös käsitletakse sel ajal üsna aktuaalset probleemi — punktide «vahelpaiknemise» mõiste aksiomaatilist esitust sirgel.

Juba C. Fr. Gauss (kiri F. Bolyai'le 1832. a.) rõhutas, et mõiste «punkt on kahe teise punkti vahel» ja selle omadused vajavad ranget formuleerimist — aksiomatiseerimist. Esimesi katseid mõiste aksiomaatiliseks käsitluseks tegid XIX sajandi kahel viimasel aastakümnel saksa matemaatik M. Pasch ja rühm itaalia matemaatikuid (G. Peano, G. Fano, F. Enriques, M. Pieri jt.). Lõpule viis selle töö 1899. a. D. Hilbert, kes eukleidilise geomeetria täieliku aksiomatiseerimise käigus andis aksioomid ka mõiste «vahel» jaoks.

Hilberti süsteem sisaldab aga nn. Paschi aksioomi, mis nõuab mitte ainult ühel sirgel, vaid juba tasandil asetsevate punktide vaatlemist. Seega jäi lahtiseks probleem, kas on võimalik iseloomustada mõiste «vahel» abil punktide omavahelist paiknemist üksnes sirgel — üles ehitada sirge aksiomatiseeritud teooriat, mis tugineks ainuüksi «vahel» suhet puudutavatele aksioomidele. Lahenduse sellele probleemile andsid vastava teooria tegeliku loomisega inglise matemaatik E. Huntington 1924. a. ja arvatavasti temast sõltumatult 1926. aastal J. Nuut oma doktoritöös, mis lühendatud kujul avaldati Tartu ülikooli toimetistes 1929. a. [4]. J. Nuudi tööle ei ole kahjuks tänapäevani osutatud seda tähelepanu, mida ta väärib. Tagasihoidlik oli ka 1931. a. dotsendi kohale valimise puhul moodustatud komisjoni (H. Jaakson, G. Rägo, J. Sarv) hinnang: «Autoril pole küll oma töös niisuguseid lõpulisi resultaate saada, mis võiksid üldist tunnustamist leida, kuid töö väärtuslikuks osaks jääb terve rida originaalseid ja täpselt vormitud teoreeme, mis on tõestatud enamasti Euklid'ile omase elegantsusega.»

Võrdlus Huntingtoni käsitlusega (mida tutvustab ulatuslikult B. F. Kagan[9]) näitab, et J. Nuudi aksioomide süsteem erineb Huntingtoni omast ainult ühe aksioomi osas (kui jätta tähele panemata erinevused vormis). Seda aksioomide süsteemi täiustas J. Nuut veel ühes hilisemas artiklis 1932. a. [7].

Doktoritööga avas J. Nuut ühtlasi eesti matemaatikute tööde väikese tsükli geomeetria aluste valdkonnas. Sellesse tsüklisse kuuluvad J. Sarve doktoriväitekiri «Geomeetria alused» (1931), A. Humala uurimus «vahel» suhte aksioomidest (1934) ning Ü. Lumiste tööd «vahel» suhte aksiomaatika täiendamisest eukleidilise ja Lobatševski geomeetria täieliku aksiomaatikani.

---

[9] В. Ф. Каган. Основная геометрия, т. II. Москва, 1956, гл. XIX.

2. Väga palju energiat on J. Nuut pühendanud nelja värvi probleemi[10] lahenduskatsetele, s. t. katsetele tõestada või ümber lükata väide, et neljast värvist piisab mistahes topoloogilise kaardi värvimiseks nii, et iga ühise piiriga kaks riiki oleksid värvitud isesuguste värvidega. Probleemi tõstis eesti matemaatikute hulgas päevakorda J. Sarv 1927. a., kelle artiklile[11] järgnes kiiresti J. Nuudi habilitatsioonitöö 1927. a. ja -ettekanne 1928. a., mis koos edasiste uurimuste tulemustega avaldati aastail 1929—1931 artiklites [2, 3, 6]. 1928. a. «nakatub» nelja värvi probleemist J. Nuudi kaudu ka H. Jaakson. 1932. a. avaldab E. Krahn uurimuse, mille ta pühendab nelja värvi lause õigsuse tõenäosuse leidmisele.

J. Nuut läheneb nelja värvi probleemi uurimisele väga originaalselt. Ta ei küsi, kas topoloogilist kaarti saab või ei saa värvida nelja värviga nii, et iga kaks ühise piiriga riiki saaksid isesugused värvid, vaid küsib: mitmel viisil saab antud topoloogilist kaarti nõutud viisil värvida nelja värviga. Antud kaardi nelja värviga värvimise võimaluste arvu nimetab ta selle kaardi värvi-invariandiks. Kaart on nõutud viisil nelja värviga värvitav või mitte selle järgi, kas selle kaardi värvi-invariant on positiivne arv või null. Värvi-invariandi jaoks tuletab J. Nuut algebralise valemi — nelja värvi valemi. Viimasele vastava algebralise avaldise lahutab ta seejärel kaheks teguriks ja näitab, et nelja värvi probleem taandub vaid teise teguri nullkohtade olemasolu uurimisele. Kasutades originaalset sümboolikat, lahutab J. Nuut viimase teguri omakorda lihtsamate tegurite sümboolseks korrutiseks. Sügava analüüsi teel õnnestub tal üha peenema struktuuriga kaartide puhul näidata vastava värvi-invariandi positiivsust, kuid ühtlasi selguvad selle analüüsi käigus järjest keerulisema struktuuriga kaartide olemasolu võimalused. Huvipakkuv on komisjoni hinnang tööle [6]. Esitame sellest väljavõtte (vt. allviide[3]): «...Selles suunas probleemi uurimisele asudes loob autor formaalse korrutise konformsuse mõiste, diagonaalpolünoomi ja diagonaalagregaadi mõisted, tutvuneb tähendatud polünoomide ja agregaatide omadustega, formuleerib üldise diagonaallause ja tõestab selle esimese järgu taandumata normaalvõrkude kohta.[12] Viimane lause annab vastuse küsimusele, missugustel tingimustel muutub nulliks diagonaalagregaatidest ja värviinvariantidest koosnev konformne formaalne korrutis. Autor näitab, et nelja värvi probleem oleks üldiselt lahendatud niipea, kui läheks korda tões-

---

[10] Vt. J. Gabovitš. Nelja värvi probleem. — Matemaatika ja kaasaeg, IV, lk. 9—17.

[11] Zum Beweis des Vierfarbensatzes. Tartu ülik. toimetised, 1927, A XIII 1.

[12] Märgime, et normaalvõrgu ehk -kaardi mõistet on tutvustatud «Matemaatika ja kaasajas», IV, lk. 13 [*Toim.*]

tada üldine diagonaalolek iga järku taandumata normaalvõrkude kohta. Olgugi et autor on veel lõppsihist kaugel, ei saa ometi keelduda tunnistamast tulemusi, milleni ta on jõudnud oma senises visas edasipüüdmises kord valitud suunas, samuti ei saa jätta ka tähele panemata mõningaid kõrvalsaadusi, nagu näiteks käesolevas töös tuletatud seosed neljavärvikordajate vahel.»

Nelja värvi probleemiga seotud algebraliste probleemide kallal juurdles J. Nuut ka tagalapäevil ning veel hiljemgi [29, 32]. Vahest kõige ilmekamalt selgub tema seisukoht probleemi lahenduse kohta kirjas J. Sarvele [13] (18. III 1949. a.), mille ajendiks said J. Sarve esitatud uued tõestuskatsed nelja värvi lausele. J. Nuut näitab ära loogilised vead J. Sarve mõttekäikudes ja lisab: «Tahaksin tähendada, et Teie mõttekäigu idee on risti ja rästi ka minu enda poolt läbi proovitud (juba endistel aegadel); jõudsin arvamusele, et see tee ei saa viia sihile (s. t. täielikule induktsioonile). Kogu küsimuse keerulisus on mul täna selgem kui kunagi varem: «lihtsat» lahendust pole olemas ja ei saagi olla, sest jutt on sügavalt varjatud võrgu struktuuriomadustest.»

Vastuseks J. Sarve väitele, et teatavasti võib nelja värvi probleemi alati taandada normaalkaardi juhule, kirjutab J. Nuut 31. VII 1949: «Vastuvaidlematult on õige vaid see, et kui probleem on lahendatud mistahes normaalkaardi jaoks, siis on ta lahendatud iga kaardi kohta üldse, sfääril muidugi. Kuid see tõsiasi ei tähenda sugugi veel seda, et probleemi lahendamine saaks toimuda arutluse teel, mis käsitleb a i n u ü k s i normaalkaarte. Teie kokkuvõttest selgub, et olete ise veendunud säärase lootuse petlikkuses... Nõiaring tekib paratamatult, kui lähtuda lootusest, et saab läbi ajada ainuüksi normaalkaartide alusel, t õ e s t u s aga ei t a a n d u normaalkaartidele ainuüksi, vaid taandub väga keerukale üldomaduste selgitamisele kõige üldisemate kaartide puhul.»

Vastuseks J. Sarve arvamusele, mille sisu taandub sellele, et nelja värvi hüpotees on samasugune sõltumatu aksioom nagu näiteks eukleidiline paralleelsuse aksioom (või uusimate uurimuste järgi ka kontiinumihüpotees [14]), kirjutab J. Nuut samas kirjas:

«Neljavärviprobleem on endastmõistetavalt ekvivalentne teatava probleemide tsükliga. Probleemi transformatsioon võib olla geomeetriline, aritmeetiline või funktsionaalteoreetiline. Igal juhul aga vastus probleemile fikseerib mingisugust sfääri pinna jaotuste kompleksi. Kui asuda seisukohale, et probleem pole lahendatav, s. t. et tõestus pole läbiviidav ilma uue aksioomita, siis sellest järgneks, et sfääri pinna jaotus võiks olla mitmet tüüpi, s. t. et loogiliselt on samaväärsed «neljavärvisfäär» ja «viievärvisfäär».

---

[13] Kirjavahetust säilitatakse TRÜ algebra ja geomeetria kateedris.
[14] Vt. Matemaatika ja kaasaeg, XII, lk. 7.

Sel puhul tekib aga kohe küsimus, miks just sfäär moodustab säärase erandi, kõrgema suguarvuga pinnad aga mitte? Säärane paratamatu küsimus teeb väga kahtlaseks topoloogia hargnemise hüpoteesi sfääritüüpide järgi. Neile geomeetrilistele kahtlustustele lisandub aga veel puhtaritmeetiline: aritmeetilisel transformatsioonil taandub neljavärviprobleem puhtkombinatoorsele küsimusele, kus looduslikuks reaalseks taustaks on näiteks molekuli struktuur, täiesti sõltumatult mingisugusest dimensioonide arvust. Seega tähendaks neljavärviprobleemi loogiline «lahendamatus» vähemalt kahe erineva aritmeetika olemasolu, mis pole kooskõlas seniste matemaatiliste kogemustega.»

3. Eriti tähtsad on J. Nuudi uurimused L o b a t š e v s k i g e o m e e t r i a n i n g s e l l e r a k e n d u s t e a l a l t r e l a t i i v s u s t e o o r i a s j a m e h h a a n i k a s.[15] Tartu ülikoolis töötamise aja lõpuaastatel jõudis J. Nuut aegruumi, s. o. sündmuste maailma niisugusele tõlgitsusele neljamõõtmelise Lobatševski ruumina, mis võimaldab seletada maailmaruumi paisumise nähtust. Teatavasti leiduvad neljamõõtmelises Lobatševski ruumis kolmemõõtmelised nn. piirsfäärid, mis kujutavad endast paralleelsete sirgete sidumite ortogonaalpindu. Sidumi sirgeid nimetatakse seejuures piirsfääri telgedeks. Piirsfäärid on kõik omavahel kongruentsed Lobatševski ruumi liikumiste mõttes ja nendel kehtib eukleidiline geomeetria.

J. Nuudi idee kohaselt on meie kolmemõõtmeline eukleidiline «olevik» piirsfäär, mis vajub ühtlaselt «ajalisse sügavikku», s. t. muutub ühtlaselt nii, et kõik punktid liiguvad samas ajavahemikus võrdsetele kaugustele piirsfääri telgi mööda suunas, mis on vastupidine telgede paralleelsuse suunale. Aega kahe sündmuse vahel mõõdab siis parameeter, mis on lineaarselt sõltuv nendele sündmustele vastavaid punkte läbivate piirsfääride vahelisest kaugusest telgedel. Et piirsfääri teljed kui Lobatševski paralleelid paralleelsuse vastassuunas kaugenevad eksponentsiaalselt, siis langev piirsfäär paisub. J. Nuudi ees on suur ülesanne — üksikasjalikult välja töötada füüsikaline maailmapilt sellisel paisuval piirsfääril. Esimesed tööd selles suunas avaldab ta 1935. a. [12, 13], rajades nn. ekspansionistliku kinemaatika alused. Järgnevates töödes, mis ilmuvad juba J. Nuudi Tallinna Tehnikaülikoolis töötamise ajal (neist on põhilisemad [20, 21]), arendab ta välja ka nn. ekspansionistliku dünaamika.

Oma ideede ulatuslikuma töötluse esitab J. Nuut elu viimastel aastatel valminud monograafias ja selle ettevalmistuse käigus avaldatud artiklites [28, 30, 33—36]. Monograafia 1961. a. posthuumselt ilmunud esimene osa [37] on matemaatiliseks sissejuhatuseks aegruumi ekspansionistlikku teooriasse. Ta sisaldab Lobatševski n-mõõtmelise geomeetria ulatusliku analüütilise käsit-

---

[15] Selle uurimissuuna käsitlemisel on kasutatud prof. H. Kerese märkmeid.

luse. Töö põhimõttelised alused andsid A. Cayley ja F. Klein juba 1870. aastail, kuid sellise põhjalikkusega, nagu seda teeb J. Nuut oma monograafias, ei ole varem Lobatševski geomeetriat nendel alustel veel käsitletud.

Lobatševski ruumi käsitleb J. Nuut kui teatava teist järku hüperpinna sisepiirkonda n-mõõtmelises projektiivses ruumis. Punktide vahelise kauguse defineerib ta A. Cayley eeskujul projektiivse meetrika abil, liikumisteks aga nimetab F. Kleini järgi hüperpinda säilitavaid projektiivseid teisendusi. Selle ruumi geomeetria sügavamate küsimuste uurimisel kasutab J. Nuut ka uuemaid ideid. Huvipakkuv on näiteks Lobatševski ruumi kõveruse käsitlus T. Levi-Civita poolt 1917. a. Riemanni geomeetrias kasutusele võetud «vektori rööpülekande» mõiste abil. Originaalselt esitab J. Nuut kõverjoonte elementaarset diferentsiaalgeomeetriat Lobatševski ruumis; üksikasjalikult ja kohati uudselt on antud teist järku joonte teooria Lobatševski tasandil. Tähelepanu väärivad ka J. Nuudi seisukohad geomeetria ja füüsika vahekorra kohta, mida ta arendab raamatu viimases peatükis ja ulatuslikes järelmärkustes. Venekeelses üsna rohkes Lobatševski geomeetria alases kirjanduses on J. Nuudi monograafia oma ainulaadsusega ja põhjalikkusega kahtlemata silmapaistval kohal.

J. Nuudi monograafia teine osa sisaldab esimeses osas arendatud Lobatševski geomeetria füüsikalisi rakendusi ja kosmoloogilise mudeli ülesehitust. Et see mudel ei pakkunud astronoomidele vajalikul määral uut võrreldes teiste, relatiivsusteooriale tuginevate mudelitega, autori ideed kvantmehhaanika alal aga ei leidnud füüsikute poolehoidu, siis jäi monograafia teine osa trükis avaldamata. J. Nuut ise püüdis rakendada selle osa ideid mitmetele konkreetsetele küsimustele, näiteks Päikesesüsteemi tekkimise teoorias [35]. Tema mõttekäikudest tuletatud kvantitatiivsed vahekorrad olid küll kooskõlas vaatlusandmetega, kuid tema kosmoloogiline mudel sisaldab iseloomuliku parameetrina Hubble'i konstanti, mida peeti J. Nuudi eluajal 7—8 korda suuremaks tema tegelikust väärtusest, mistõttu J. Nuudi vastavate arvutuste kooskõla tegelikkusega on rikutud, Lobatševski geomeetria rakendamine kosmoloogias on aga põhimõtteliselt täiesti võimalik ja väärtuslik idee. Selle geomeetria rakendustega relatiivsusteoorias ja muudes füüsika osades tegelevad käesoleval ajal näiteks mitmed Dubna füüsikud-teoreetikud (Smorodinski, Tšernov jt.).

* * *

J. Nuut on üks harva esinevatest teadlastest, kelle isikus on harmooniliselt ühendatud teadlane ja pedagoog, organisaator ja metoodik. Temas näeme silmapaistvate võimetega teadlast, kelle uurimistööd iseloomustab ideede originaalsus, läbitöötamise sügavus ja tõestuste elegantsus. Oma suhteliselt lühikese, 19-aastase pedagoogilise tegevuse vältel kõrgemates koolides on ta lugenud väga mitmesuguseid matemaatika ja mehhaanika distsipliine.

Tema loengud olid kuulajate mälestuste järgi põhjalikud, alati hästi ette valmistatud ja selged. Silmapaistvalt andeka lektorina on ta oskuslikult ühendanud intuitiivse ja aksiomaatilise ainekäsitluse oma loenguis. Aine esmakordsel tutvustamisel üliõpilastele kasutas ta rohkesti enda poolt väljatöötatud intuitsioonile toetuvaid tõestusi, juhtides alati kuulajate tähelepanu neile juhtudele, kus intuitiivselt saadud tulemus vajas üksikasjalikumat matemaatilist põhjendust. Suured on J. Nuudi teened koolimatemaatikaprobleemide käsitlemisel ja õpetajate metoodilisel ettevalmistamisel ning innustamisel, eriti kõrgemates koolides. Ta ei kohkunud kunagi tagasi katkestamast oma tööülesannet kas või selle kõige huvitavamal hetkel ja üle minemast teisele tööle, kus teda vajati enam.

J. Nuudi trükis ilmunud tööd [16]

1. Geomeetria üldhariduslise õppeainena koolis. Loodus, 1924, nr. 9, lk. 443—454.
2. Über die Anzahl der Lösungen der Vierfarbenaufgabe. Tartu ülik. toimetused, 1929, A XV 3, 52 lk.
3. Über die Vierfarbenformel. Tartu ülik. toimetused, 1929, A XV 4, 38 lk.
4. Topologische Grundlagen des Zahlenbegriffs. Tartu ülik. toimetused, 1929, A XV 5, 55 lk.
5. Millest kõneleb Einsteini relatiivsuseõpetus. Tartu, 1930, 106 lk.
6. Eine arithmetische Analyse des Vierfarbenproblems. Tartu ülik. toimetused, 1931, A XX 7, 80 lk.
7. Eine Bemerkungen über Vierpunktaxiome. Tartu ülik. toimetused 1932, A XXIII 4, 10 lk.
8. Geomeetria keskkoolidele. I. Tartu, 1932, 67 lk. — II. Tartu, 1932, 63 lk. — III. Tartu, 1933, 111 lk.
9. Matemaatika kursus keskkoolidele (koos J. Kuulbergiga). I. Tartu, 1934, 135 lk. — II. Tartu, 1935, 107 lk.
10. Talundite rahvastiku tihedusest Eestis. Tartu ülik. majandusgeograafia sem. üllitised, 1934, nr. 8, 8 lk.
11. Ülikoolis korraldatud kontrolltööde kvantitatiivne analüüs. Eesti Kool, 1935, nr. 1, lk. 16—26.
12. Eine nichteuklidische Deutung der relativischen Welt. Tartu ülik. toimetused, 1935, A XXIX 3, 15 lk.
13. Ansätze zu einer expansionistischen Kinematik. Tartu ülik. toimetused, 1935. A XXIX 6 (Tartu Ülik. Tähetorni publikatsioonid, 1935, XXVIII 4), 67 lk.
14. Ekspansionistlikust kinemaatikast. Tartu Ülikooli Tähetorni kalender, 1936, lk. 77—80.
15. Relatiivsuseteooria. Eesti Entsüklopeedia, VII. Tartu, 1936, lk. 139—140.
16. An Income-Tax Based on the Pareto Law. Tallinna Tehnikaülikooli toimetused, 1937, A 2.
17. Staatika alged. Tartu, 1937, 152 lk.
18. Kas inertsiseadus on kehtiv kosmilises ulatuses. Tehnika Ajakiri, 1937, nr. 3, lk. 50—51.
19. Uue mehaanika arengust XX sajandil. Tehnika Ajakiri, 1938, nr. 4, lk. 63—66.
20. Expansionistische Dynamik, I: Korpuskulare Punktdynamik für einen strengeuklidischen Raum. Tallinna Tehnikaülikooli toimetused, 1939, A 5, 40 lk.

[16] Selles nimekirjas on esitatud kõik käesoleva kirjutise autoritele teada olevad trükis avaldatud J. Nuudi tööd (peale arvukate ajaleheartiklite).

21. Exspansionistische Dynamik, II: Wellenmechanische Grundlagen, Tallinna Tehnikaülikooli toimetused, 1939, A 6, 26 lk.
22. Tõsistel radadel. Üliõpilasleht, 1939, nr. 11/13, lk. 194—196.
23. Ekssaktteaduste kriisist. Varamu, 1939, nr. 1, lk. 58—64.
24. Kinemaatika ja dünaamika põhijooni. Tartu, 1940, 271 lk.
25. Teaduse ja tehnika osa sõjas. Sõjasarv, nr. 4, Moskva, 1944, lk. 107—111.
26. Eesti ja vene haritlaskonna ajaloolisest koostööst. Eesti Bolševik, 1945, nr. 2, lk. 81—87.
27. Mateeria mõiste areng kaasaegses loodusteaduses. Looming, 1947, nr. 9, lk. 1101—1124.
28. О приложениях геометрии Лобачевского в современном естествознании. Научн. сессия АН ЭССР 23—29 апр. 1947 г., сер. А. Тарту, 1948, 358—372.
29. Некоторые результаты аналитической теории питевых сетей. Научн. сессия АН ЭССР 23—29 апр. 1947 г., сер. В. Тарту, 1948, 125—132.
30. К вопросу о неизменности мировых констант. Научн. сессия АН ЭССР 14—17 апр. 1948 г. сер. А. Тарту, 1949, 222—238.
31. Meie tänapäeva teadmisi mateeria loomusest. Tallinn, 1948, 27 lk.
32. О свойствах решений одной особой системы линейных уравнений. ENSV TA. Uurimusi ja ülevaateid, I. Tartu, 1949, lk. 145—156.
33. Критика идеалистического толкования волновой механики. Kogumikus «Nõukogude teaduse arengust Eesti NSV-s 1940—1950». Tallinn, 1950, lk. 328—340.
34. О гиперболической механике и вопросах космогонии. Изв. АН ЭССР, 1952, 1, № 1, 90—107.
35. К вопросу о возврате планет солнечной системы. Публикации Тартуской астр. обсерв., 1952, т. 32, № 2.
36. Видоизмененная формула для серий спектра атома водорода. Публикации Тартуской астр. обсерв., 1952, т. 32, № 2.
37. Геометрия Лобачевского в аналитическом изложении. Москва, 1961, 310 стр.

KILDE PROF. J. SARVEST

Eelmises artiklis oli korduvalt juttu J. Nuudi kolleegist prof. Jaan Sarvest, kelle sünnist 21. detsembril k. a. möödub 90 aastat (lähemalt vt. Matemaatika ja kaasaeg, III, lk. 68—72). Järgnevalt mõned mälestuskillud selle huvitava isiksuse kohta.

Prof. Sarve poolt antud sõnastused olid alati korrektsed ja ratsionaalsed. Kõik tema kirjutised, samuti ka terminoloogia, on tugevalt isikupärased, nii et neid võib eksimatult ära tunda. Toome paar näidet.

Kolmnurga ühest nukist vastaskülje punktesse minevate joonetükkide kõik punktid on ka selle kolmnurga teisest nukist vastaskülje punktesse minevate joonetükkide omad.

(Geomeetria alused. Tartu, 1931, lk. 11)

Matemaatilise induktsiooni lause. Kui mingi nähtuse märkamisest mingisuguse arvu korral järgneb selle nähtuse märkamine järgmise arvu korral, siis sellest, et seda nähtust on märgatud ühe arvu korral, järgneb, et teda märgatakse iga järgmise arvu korral.

(Analüütiline geomeetria. Tartu, 1923, lk. 2a)

Üliõpilased olid alati lausa vaimustatud prof. Sarve joonistest. Vaatamata käe tugevale värisemisele (selle tagajärjel osutusid kõik sirged hästi joonestatud sinusoidideks) tuli iga joonis täpselt välja. Üsna sageli aga ei mahtunud joonis tahvlile. Juhtus, et kahe sirge lõikepunkt läks ära aeda õunapuu oksale ning teise kahe sirge lõikepunkt järgmisel korrusel kirjutuslaual olevasse tindipotti. Rahulikult «ühendas» prof. Sarv õunapuu oksa ja tindipoti sirglõiguga, tõmbas sellele keskristsirge, tuli sellega tahvlile ja lõpuks klappis jälle kõik!

RAHVAPÄRASTEST MÕÕTUDEST JA KAALUDEST

E. Laugaste

Mõõtude ja kaalude väljakujunemine sõltub praktilistest vajadustest, seega igasugune informatsioon mingi rahva või hõimu poolt kasutatavatest mõõtudest annab ühtlasi teatava ettekujutuse selle rahva või hõimu elutingimustest. Ühtlasi on aga varem kasutusel olnud mõõte vaja tunda ka vanema kirjanduse (kasvõi näiteks vanade kooliõpikute ja ülesannete kogude) lugemiseks.

Millised mõõdud ja kaalud olid eestlaste hulgas kasutusel käesoleva aastatuhande algul, selle kohta on praegu veel andmeid üsna kasinalt. Mõned vanaks peetavad mõõdud esinesid tõepoolest õige kauges minevikus, mõnda neist võib näiteks kohata käesoleva aastatuhande algul tekkinud lüro-eepilises rahvalaulus «Suur härg» (süld, vaks, küünar). Õige vähe leidub aga andmeid selle kohta, kui palju on neis mõõtudes kohalikku ja kui palju laenulist. Õieti pole seda küsimust seni veel detailsemalt uuritudki.

Eestlaste põhilisteks elatusaladeks olid põllundus, karjandus ja kalastus, seetõttu kohanesid mõõdudki vastavalt neile elatusaladele. Vanemad mõõdud lähtusid sealjuures inimesest endast, tema kehaosadest. Olulisel kohal olid kehaosadest just käsi ja jalg: väljasirutatud sõrmede vahe, sõrmelülid, kätehaare, ühe käe haare, käe ümbermõõt, käelaba laius, jalg, sammu pikkus, harali jalgade ulatus, pea ümbermõõt jms. Ka tööriistade mõõdud kujunesid suhteliseks, vastavalt sellele, kes neid kasutas. Näiteks rehavars pidi nii pikk olema, kui riisuja oma kätega küündis võtma (Jüri).

Vajalik arvutamine, nii liitmine kui lahutamine, toimus sõrmedel. Võtteid oli sealjuures õige mitmesuguseid, näiteks iga täissaja korral suruti üks sõrm rusikasse, kuni 1000 täis sai.

Spetsiaalseid mõõduriistu on kasutusel olnud üsna ammu (näit. päsmer e. margapuu juba sajandeid tagasi), neid tekkis juurde aga ka hiljem. Näiteks arssina- ja küünarpuu leidsid tee rahva hulka poodidest ning rätsepate juurest. Magasiviljaga seoses tekkis veel üks mõõduriist — triikpuu. Sellega tõmmati magasiaidas vili mõõduriistas triiki. Triikpuu ise oli pealt veidi kummis, alumine serv sirge, valmistatud lauapaksusest puust käeauguga keskel (Lüganuse). Vilja triigiti siis, kui seda magasiaidast välja anti, sisse võeti aga kuhjaga.

Muidugi olid vanemad mõõdud tavaliselt üsna ebatäpse suurusega — ühe inimese käsi, jalg, käehaare jne. ei olnud täpselt sama suured kui teisel. Suurema täpsuse vajadusest kõneldakse rahvaluulelistes tekstides laenu puhul, kus tagastada tuli sama kvantum. Näiteks kasutati laenamisel leiva mõõtmiseks niiti, mis tõmmati pikuti ümber leivapätsi, kusjuures ringi täissaamisel tehti niidisse sõlm; nii saadud mõõt hoiti laenu tagastamiseni alles (Põlva). Soola, jahu, ube, herneid laenati sõela, mati või kausiga. Väljakujunenud tava järgi oli laenaja kohustatud tagastama kuhjaga (Põlva). Leiva laenamise puhuks on andmeid ka kaalumise kohta kirvega: kirve raskus ja varre otsa pandud leib pidid tasakaalu saavutama.

Et enne sakslaste vallutusi oli eestlastel kaubanduslikke suhteid nii Lääne kui Idaga, siis pidi neil tekkima praktiline vajadus kasutada kohalike naturaalmõõtude kõrval ka konventsionaalseid rahvusvahelisi mõõte, mis omakorda võisid mõjutada kohalikkude mõõtude kujunemist. Tõenäoliselt tunti Eestis nii Ojamaa kui ka Pihkva ja Novgorodi mõõte. On näiteks leitud väärismetalli mõõtmiseks kasutatud idamaise päritoluga kaalusid samas süsteemis, millel põhines Vene kaalustik. Selle süsteemi aluseks oli grivna e. nael. Termini «nael» algseks päritoluks peetakse päsmri kaaluühikut — marka, mida tähistati päsmri varresse löödud naelaga. Ka kaaluühik leisikas näib olevat tuntud olnud juba enne sakslasi, samuti nagu laevanael ja perkapund e. kaal. Pikkusmõõt küünar arvatakse pärinevat Ojamaalt, kuid ta võis ühtida ka kohaliku naturaalse mõõduga. Kuivainete mõõtudest paistab kõige varem käibel olevana ebamäärane ja ebaühtlane õõnesmõõt külimit.

Sakslaste vallutuse järel kujunes igas linnas oma mõõdustik, mis ei ulatunud selle linna kaubanduslikust tagamaast kaugemale. Näiteks süllaks loeti enamasti 3, mõnel pool aga 3½ küünart. Õõnesmõõduna käibis vakk (mille mõnede arvates olevat kasutusele võtnud piiskop Albert), kusjuures riia vakka läks 6 külimittu (hiljem 54 toopi), mujal kõikus see aga 3—10 külimitu vahel. Mõõduühikud võisid eri linnades olla erinevate ainete jaoks erineva suurusega, nagu näiteks tünnid. Aja jooksul said mõned eriti levinud kaupade transpordiks kasutatud tünnid kindla suuruse kindlais kaubanduskeskusis või ka rahvusvaheliselt (näit. heeringatünnid). XVII sajandil kujuneski Baltimail põhimõõduks tünn (tünder) vaka asemel, tünni arvestati Liivimaal 2, Tallinnas 3 vakka. Samanimeline ühik võis üheaegselt esineda raskus- ja õõnesmõõduna. Näiteks sälitis oli algselt laevaruumi mõõt, kaaluarvestusena Baltimail 12 laevanaela, õõnesmõõdu arvestusühikuna sõltus kaubast (vilja sälitise algupärane suurus oli 48 riia vakka, soolamõõduna sisaldas 12—18 tünni).

Pärast Põhjasõda ühtlustusid kaalud ja mõõdud. Riia mõõdustik tuli kasutusele Liivimaal, Tallinna oma Eestimaal. Vene mõõdustik ja kaalustik kehtestati nendel aladel 1845. a., kuna aga meetermõõdustik võeti Eestis ametlikult kasutusele alles 1. jaanuaril 1929.

Järgnevalt toome lühikese loetelu tähtsamatest eesti talurahva hulgas kasutusel olnud mõõtudest ja kaaludest. Arvestades, et mõõtudes esines palju lokaalseid erinevusi, on seda ka siin mõnevõrra püütud jälgida.

Andmed käesolevaks ülevaateks on saadud Eesti NSV TA Keele ja Kirjanduse Instituudi keeleuurimissektori sõnasedelite ja murdetekstide kogudest. Selle materjali hulgas väärivad eriti väljatõstmist Aadu Toomessalu kogu Ida-Saaremaalt ja Aino Kãllo oma Ida-Virumaalt (Lüganusest). Häid kirjeldusi leidub ka Eesti NSV TA Fr. R. Kreutzwaldi nimelise Kirjandusmuuseumi rahvaluule osakonna kogudes. Mõõtude ja kaalude ajaloo kohta Baltimail leidub andmeid teoses «Eesti majandusajalugu» (1937).

Et materjal on nimetatud asutustes kergesti kättesaadav, siis on käesolevas lühiülevaates loobutud täpsemast joonealusest viitamisest. Tähtsamail kordadel on sulgudes antud ainult kihelkonna nimetus.

Pikkusmõõdud

Arssin — 28 tolli (71,12 cm). Arssinat hakati kasutama poes riide mõõtmiseks, samuti kasutasid seda rätsepad. Ahju jaoks lõigatud puuhalgude pikkuseks loeti kas arssin või kaks arssinat (reheahju jaoks). Arssina mõõdupuu kohta on antud järgmine kirjeldus: arssinapuu oli kolme sõrme laiune, peal kahe vaksa ja poole- ning veerandarssina märgid (Lüganuse).

Jalg — inimese jalalaba pikkus koos pastla või muu jalanõuga, nimetati ka jalatäis (vrd.: jalatäis maad). Ametlik jalg oli 12 tolli (30,48 cm). Jalaga mõõdeti maad, peenravahesid, päikese varju kellaaja määramiseks jm. Jala pikkuse saab veel, kui kahe kämbla laiusele lisada pöidla pikkus.

Kukerus — keskmise sõrme pikkus kuni kolmanda jätkuni (Hargla). Teine seletus, sisult sama: kukerus on sõrmede pikkus, mõõdetud pihupesaga täisnurgi (Võrumaa). Sukavarre pikkuseks loeti viis kukerust.

Kämmal e. **kämblalaiune** — kas labakäe nelja sõrme laius (Kärla) või labakäe laius pöidla kohalt. Kämblaga mõõdeti riiet, ka seapeki paksust. Viimase kohta käis retsept: kui liha laenad, mõõdad kämblaga peki paksust naha poolt taise poole, et tead tagasi nõuda (Lüganuse). Kämblaga mõõdeti veel vikati pikkust. «Mitu kätt pika vikati sa endale ostad?» (Võrumaa.)

Köis — kümne sülla mõõt, sellega mõõdeti maad ja kraavi. Kasutati ka riide mõõtmisel, siis oli köie pikkus 10—10$^1/_2$ küünart.

Küünar — kehaosade järgi mõõdeti küünart 1) pea ümbermõõduna (**lihaküünar** — Hargla, Jüri); 2) **käsiküünrana** — küünarnukist esimese sõrme otsani (Rannu, Kodavere, Vaivara jm.) või keskmise sõrme otsani (Võrumaa). Ümber arvestatult tegi see kolm vaksa või 21 või 24 tolli. Küünart kasutati riide, paelte, pitsi ja ka maa mõõtmiseks. Hobuserangide kõrgus pidi olema niisugune, et käsi küünarnukist kuni keskmise sõrme otsani rangide sisse mahuks (Jüri).

Labakäsi — labakäe ümber mõõdeti sukalaba pikkust.

Latt — mõõduriist, kahe kuuejalasülla pikkune, mõõdeti maad ja kraavi (Kärla, Kodavere).

Nüss — esimese (või keskmise) sõrme kahe esimese liikme pikkus (Saaremaa).

Penikoorem — seitse versta.

Samm — mehesamm, põllu ja heinamaa mõõtmiseks. Tiinu suuruseks loeti 200×100 sammu, vakamaa suuruseks 75×75 (või 75×70) sammu. Õunapuude vaheks mõõdeti 7 sammu. Sammudega määrati suvel ka kellaaega. Keskhommikune vari andis 4 käimasammu, lõunane 2 (Vaivara).

Süld — kahe laialisirutatud käe vahe, nimetatud ka **käsisüllaks** (lihasüllaks). Nii mõõdeti nööri, ümmargust puud jala pealt või heinakuhja. See süld tegi välja 6 jalga. Käibel oli veel seitsmejalasüld, mille saamiseks tuli juurde lisada kahe käelaba + pöidla pikkus (s. t. jalg). Seitsmejalasülda nimetas rahvas ka riigisüllaks, selle pikkus oli 84 tolli (2,1336 m). Ümberarvestatult loeti süllale vastavaks kaks mehesammu. Kuuejalasüld saadi ka jalgade laialisirutamisega «nii laialt kui ulatab» (Jüri). Igaüks teadis, kui pikalt tuli pingutada, et sülda kätte saada (Halliste). Maanteed mõõdeti seitsmejala-, puid kuuejalasüllaga. Süllaga mõõdeti veel õlgi ja roogu: süllane pael tõmmati roo- või õlekoole ümber.

Toll — 2,54 cm, tugevasti rahva teadvusse juurdunud mõõt, kasutati ka teiste mõõtude (süld, arssin, küünar, jalg) kirjeldamiseks. Tolli sai arvestada ka ilma mõõduriistata: pöidla laius olevat 1 toll (Jüri).

Vaks (Lõuna-Eesti v a s s) — kasutati peamiselt väiksemate esemete ja riide mõõtmiseks, moodustub väljasirutatud keskmise sõrme otsa ja pöidla otsa vahepikkusest. Tuntud on see mõõt kõikjal Eestis, ainult mõningate erinevustega. Peale keskmise sõrme võeti aluseks veel pöidla ja esimese sõrme otste vahe (nimetati **säsi-** e. **sääsavaksaks**); kaugust väikese sõrme otsast pöidla otsani nimetati **suureks vaksaks.** Aastast siga mõõdeti kõrva tagant sabajuurikani — ühele vaksale pidi vastama puud eluskaalu. Pastla jaoks kuluva naha hulka mõõdeti samuti vaksaga: oli teada, kui palju kulub nahka mehe-, naise- või lapsepastla jaoks.

Verssok — $^1/_{16}$ arssinat ehk 1,75 tolli (4,45 cm). Arssinate ja verssokitega mõõdeti näiteks hobuse kõrgust.

Verst — ametliku pikkusmõõduna tunginud tugevasti rahva kasutusse, sealhulgas ka rahvaluulelistesse kujunditesse (võrdlus — nagu verstapost). Üks verst oli 500 sülda (1,067 km).

Mahu- ehk õõnesmõõdud

Siia kuuluvad paljud naturaalsed mõõdud (põhisõnaga — täis), mis muidugi individuaalselt tublisti erinevad.

Hangutäis — hangule mahtuv hulk heinu, sõnnikut jms.

Kaenlatäis — ühe käe ja külje vahele haaratud hulk vihtu või heinu ja põhku loomadele etteviimiseks. Arvestatakse umbes 10 naela (Kodavere).

Kandam e. **vinnam** — hulk, mis korraga seljas ära viiakse.

Karnits — viljamõõt mahuga kaks toopi (Karksi, Kärla, Rannu), kolm toopi (Kose, Kodavere), 2,5 toopi (Lüganuse, Hargla, Kose) või kaks ruhimetäit (Halliste); ametlikult 3,28 liitrit. Laenutamise korral võeti vaka pealt kaks karnitsat vahekasu (Vaivara).

Kehik — viljamõõt, kohati lihtsalt suurem kui külimit, vahel 12—18 toopi, vahel isegi kaks külimittu (Harjumaa).

Koorem — ebamäärane mõõt, ometi arvestati koormaga heina- ja põhuvarusid: oli teada, mitu koormat iga loom talvel toitu vajas. Viljakoormaks arvestati Türil kaks rõuku, heinakoormaks kolm saadu, umbkaudu kolmkümmend kuni nelikümmend puuda (Kodavere); rukkikoormaks arvestati sada vihku (Kose). Reekoormad olid suuremad kui vankrikoormad.

Koostatäis e. **lusikatäis** — kasutati piima, rasva ja soola mõõtmiseks. Lähteks on puulusikas, vastab umbes praegusele supilusikale. Lusikatäit arvestatakse veel praegu arstimite doseerimisel.

Korv — eri suurusega mõõt, umbkaudu ühesuurused olid kartuli- ja sibulakorvid, väiksemad olid marjakorvid.

Kotitäis (kott) — tähendas, sõltuvalt kohast, kas üht või kaht vakka vilja, kartuleid vm.

Kortel e. **korten** — mahu- ja pikkusmõõt, veerand mingist mõõdust, näiteks veerand toopi. Toop sisaldas kuivainet neli, viina aga neli ja pool või isegi viis kortlit. Kõrtsides olid vasksed viinamõõdud: toop, pool toopi, kortel, pool kortlit. Pikkusmõõduna kasutati kortlit veerand arssina (7 tolli) või veerand küünra (6 tolli) tähenduses. Oli nähtavasti ka iseseisvaks mõõduks kujunenud tähenduses: üks kortel on vähem kui veerand küünart. Kreutzwald kõneleb «Kalevipojas» kuukortlist (I 160—161).

Kuli — tähendas viit tallinna vakka vilja, ametlikult rukkeid 145 kg, nisu 165,6 kg.

Külimit — viljamõõt ja külvinõu, suurus võrdlemisi mitmekesine: kümme toopi (Kärla), kaksteist toopi (Pöide, Vaivara jm.), kolmandik vakka (Rannu, Võnnu, Kodavere), neljandik vakka (Karksi, Ridala), viiendik vakka (Pöide). Riia külimit olevat olnud üheksa toopi (Käina). Külimituga mõõdeti ka rannas kalu. Maalappi, kuhu külimit vilja maha läks, kutsuti külimitumaaks (Pöide).

Matt — väga mitmekesise suurusega nõu jahu mõõtmiseks, ka veskis jahvatusnorm. Mõõtühikuna olid tal järgmised suurused: kaks toopi (Ridala), kaks ja pool toopi (Pöide), kaks kuni kolm toopi (Kodavere), kolm toopi (Hargla), kaks kuni viis toopi (Karksi), neli toopi (Rannu), kuus toopi (Vaivara, Lüganuse, Kose, Türi).

Mõõt — vakk või poolteist vakka, nõu vilja mõõtmiseks, ühtlasi mõõduühik.

Näpuotsatäis — pöidla ja esimese sõrme vahele mahtuv hulk tubakat vm.

Näputäis — pöidla, esimese ja keskmise sõrme vahele mahtuv hulk jahu, tubakat või soola.

Peks — väike koorem.

Peotäis — kasutati nii pikkusmõõduna (vikatilüsi on 9 peotäit, vikatilõe pulkade vahe kolm peotäit — Karksi) kui ka mahumõõduna: kui palju mahub lohkutõmbunud peopesale (soola, jahu, marju, mulda).

Pütt e. **männik** — kaks veerikut (Kose), seega kaks puuda rukkeid. Poodides arvestati pütiga ka soola.

Ruhimetäis (ruhimutäis, ruhimik) e. **kamalutäis** — kahe kokkupandud peo abil moodustatud õõnsuse täis. Kasutati jahu, tangu, herneste, ubade, vilja jm. mõõtmiseks, samuti loomadele toidu doseerimiseks. Hobustele tõsteti kaeru kaks ruhimetäit korraga, sigadele mõõtis perenaine ruhimetäie jahu looma kohta, lehmadele nende piimaanni järgi: väiksema piimaanniga lehm sai ka jahu vähem (Halliste). Teati, kui palju kaalus ruhimetäis otri, linaseemet, jahu jne. Üteldi, et see olevat «karva pääl» mõõt. Teati ka, mitu ruhimetäit läheb puuda jne. (Halliste).

Rüpetäis = põlletäis.

Seljatäis — seljale võetav kandam heinte, põhu, okste jms. kandmisel.

Setvert (tsetvert) — vene õõnesmõõt, kolm riia vakka, kaheksa veerikut, neli pütti (Kose) e. männikut (Käina), ca 210 l. Magasiaidast anti vilja setvertiga.

Sälitis — 72 vakka ehk 24 tündrit, kasutati mõisa vilja mõõtmiseks.

Sületäis — kahe laialisirutatud käe vahele võetav kandam heinte või põhu mõõtmiseks.

Taridus — «Inimene tõmmab riha kaha oma jala vahele, tõstab riha varrest üles ja võtab koos rihaga kainlu ja viib labusse.» (Pöide, A. Toomessalu, 1962).

Tünder — lokaalselt erineva tähendusega õõnesmõõt. Riia tünder oli kaks vakka ehk kaksteist külimittu (Lüganuse). Harglas oli tünder poolteist vakka. Kohati loeti tündrisse kolm (riia) vakka ehk ükssada kaheksa toopi (Ridala, Kodavere, Kose, Pöide), kohati kolm pütti (Peetri). Vahetuskaubana arvestati poole tündri soolasilgu vastu tünder rukkeid (Lüganuse). Pöides seletati, et tünder olnud mõisnikkude mõõt, sellega müüsid nad vilja ja kartuleid, talupojal polnud põllusaadusi tündriga müüa. Tündrimaaks nimetati kolme vakamaad (Kose, Lüganuse).

Vakk — neli külimittu (Ridala, Karksi), 52 toopi; 21 karnitsat; kolm puuda (u. 50 kg). Tallinna vakk oli 36 toopi ehk kaks puuda (u. 35 kg). Ametlikult: 1 tallinna vakk = 3 külimittu = 6 matti = 36 toopi = 44,277 l; 1 riia vakk = 0,5 riia tündrit = = 66,4146 l.

Veerik (setverik, tsetverik) — nii mahumõõt kui ka vastav ümmargune puunõu, alt kitsam, pealt laiem. Setverti olevat läinud kaheksa veerikut ehk kakskümmend kaks ja pool toopi (Ridala). Veerikuga mõõdeti leivajahu, teri, kartuleid. Veerik rukkeid kaaluvat üks puud; kaks veerikut moodustavat püti (Peetri); üks veerik oli kaheksa karnitsat, vt. setvert.

Raskusmõõdud

Kaal e. **perkapund** — kümme puuda. Kasutati peamiselt linakaubanduses.

Lood — 32 loodi oli üks nael.

Nael — 409,1 g, üldises kasutuses on naela ikka võrrutatud 400 grammiga.

Pund e. **leisikas** — kakskümmend naela. Kasutati palju linakaubanduses. Peetakse vanaks kohalikuks mõõduks.

Puud — nelikümmend naela; terade ja liha kaal.

Solotnik — 96 solotnikku oli üks nael.

Vedelikumõõdud

Aam — tollistest või poolteisetollistest laudadest ümmargune puuvitstega nõu, keskelt jämedam. Kasutati peamiselt piirituse vedamiseks, mahutas 50 (Lüganuse) või 40 (Rannu) pange. Veiniaam olevat olnud 180 toopi.

Ankur — 30 toopi.

Pang (vedru) — kaheksa kuni kümme toopi, ametlikult 12,229 l. Talupoegade valmistatud puust panged, millel samuti oli kohalikus kasutuses mõõdu väärtus, ei vasta täpselt neile suhetele.

Toop — põhimõõt, millega mõõdeti piima, viina, aga ka marju ja jahu. Riia toop oli 1,22 l; tallinna toop 1,087 l. Laatadel ja poodides müüdi plekist valmistatud toope, pooltoope ja kortleid (veerandtoope).

Tünn — XIV sajandi õlletünn sisaldas 92 toopi, hiljem normeeriti 90 toobile.

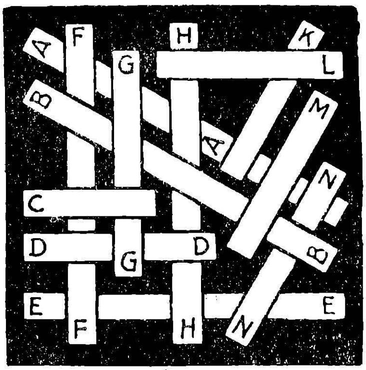
Vaat — nelikümmend kümnetoobilist pange e. 400 toopi.

oli eestlastel kasutusel eeskätt **vakamaa**. Vakamaa arvestamine on ka praegu vanemate põllumeeste teadvuses kinnistunud. Vakamaa suuruseks loeti 400 ruutsülda (Lüganuse, Kose, Türi, Käina jm.). Meetermõõdustikku arvestades on tallinna vakamaa 0,18 ha, riia vakamaa 0,37 ha. Viimase suuruseks loeti veel 25 kapamaad. **Kapamaa** on samuti vana Eestis kasutatud pinnamõõduühik, suurusega 1600 ruutjalga (148,7 m^2).

* * *

Võib arvata, et eestlastel oli väga mitmekesine naturaalne mõõdustik igapäevaseks kasutamiseks ja ligemaks suhtlemiseks. Toodud ülevaade ei suuda muidugi kõike kirjeldada. Pealegi on kindel, et mõningate mõõtude kohta puuduvad meil veel üldse andmed, teised on aga unarusse vaibumise tõttu jäänud niivõrd ähmaseks, et nende kirjeldused on muutunud vastuolulisteks. Autor ootab lugejailt täiendavaid andmeid nii nende mõõtude kohta, millest siin juttu oli, kui ka nende kohta, millest juttu ei olnud.

PULGAD LAUAL



Kõrval olev joonis kujutab mustale lauale paigutatud ruudukujulise ristlõikega pulki (ülaltvaates). Mõned pulgad paiknevad vahetult laual ja on seega horisontaalasendis, mõned aga kaldu, s. t. nende üks ots on lauast kaugemal kui teine. Seda arvestades tuleb vastata järgmistele küsimustele:

1. Kirjutada välja kõigi horisontaalasendis olevate pulkade nimed (neil olevad tähed). Milline horisontaalasendis olevatest pulkadest on kõige kõrgemal?
2. Leida kõigi kaldu olevate pulkade madalamad otsad. Milline pulk on kõige rohkem kaldu, milline kõige vähem?
3. Kas pulk G puudutab pulka A?
4. Kas pulk B puudutab pulka H?
5. Kas pulk M puudutab pulka A?
6. Kui pulk C oleks niivõrd pikk, et ta ulatuks pulgani B, kas ta puudutaks siis pulka B?
7. Kui otse pulga G alla paigutada veel üks lühike pulk nii, et ta puudutab pulkasid A ja E, kas ta puudutaks siis ka pulka B või pulka D?
8. Kas pulgad A ja B on paralleelsed?
9. Kas pulgad K ja M on paralleelsed?

EESTIKEELNE ARVUTUSMEETODITE KÄSIRAAMAT

R. Jürgenson

1966. a. IV kvartalis ilmus trükist Tallinna matemaatikute M. Levini ja S. Ulmi koostatud «Arvutusmeetodite käsiraamat». Kui mitte arvestada aastatel 1961—1964 TRÜ õppejõudude poolt kirjutatud ja rotaprindil väljaantud õpikute sarja «Arvutusmeetodid I—V», siis on see raamat esimeseks eestikeelseks teoseks arvutusmeetodite alalt.

Raamat on käsiraamatu tüüpi teos (materjal on esitatud tõestusteta), mis on mõeldud eelkõige insenertehnilistele töötajatele, kuid mis osutub kahtlemata kasulikuks ka mitmesuguste erialade õppejõududele, teaduslikele töötajatele ja üliõpilastele. Raamatu kasutamine eeldab teadmisi matemaatikast kõrgemate tehniliste õppeasutuste programmide ulatuses.

«Arvutusmeetodite käsiraamatus» leiavad käsitlemist kõik arvutusmeetodite n.-ö. traditsioonilised harud. Põhjalikult on vaatluse alla võetud funktsioonide lähendamise erinevad meetodid, ligikaudse diferentseerimise ja integreerimise meetodid, lineaaralgebra arvutusmeetodid ja mittelineaarsele võrrandile ning võrrandisüsteemide lahendusmeetodid. Samuti vaadeldakse harilike ning osatuletistega diferentsiaalvõrrandite ja integraalvõrrandite lahendusmeetodeid.

Materjal on raamatus esitatud süstematiseeritult ja hästi arusaadavalt. Viimasele aitab kaasa ka asjaolu, et enamikul juhtudel on valemid ja algoritmid varustatud illustreerivate näidetega.

Arvutusmeetodite rakendamise sfäär on kaasajal (eriti tänu elektronarvutitele) muutunud väga ulatuslikuks. Erinevad arvutusmeetodid on aga hajutatud mitmesuguste õpikute ja teaduslike ajakirjade veergudele, mistõttu vajaliku meetodi leidmine nõuab tihti suurt ajakulu. Seetõttu tuleb raamatu autorite tööd erinevate allikate läbitöötamisel ja praktikas vajalike meetodite süstemaatilisel esitamisel tõsiselt hinnata. Mis puutub raamatusse lülitatud arvutusmeetodite valikusse, siis on see üldiselt õnnestunud. Küll aga torkab silma teatud mittehomogeensus käsitluse põhjalikkuses erinevate teemade osas. Kui näiteks funktsioonide lähendamise meetodid on leidnud väga üksikasjalikku käsitlemist, siis suhteliselt pealiskaudsemaks on jäänud diferentsiaalvõrrandite osa. Raamatus puuduvad näiteks kaasajal laialdast rakendamist leidnud nn. murruliste sammude meetodid osatuletistega diferentsiaalvõrrandite lahendamiseks. Samuti ei käsitleta diferentsmeetodite rakendamisel tekkivate võrrandisüsteemide lahendamise spetsiaalseid meetodeid jms.

Tundub veel, et raamatu kasutegur oleks olnud suurem, kui temas oleks rohkem tähelepanu pööratud näpunäidete andmisele meetodi valikuks. Praegune lakooniline esitusviis eeldab raamatu kasutajalt mõnedel juhtudel tõsist arvutusmeetoditealast eruditsiooni.

Vaatamata nendele puudustele (mis on võib-olla ka vaieldavad) võib öelda, et eestikeelne matemaatika-alane kirjandus on täienenud sisuka teose võrra.

SDV MATEMAATIKUTE KONVERENTSILT BERLIINIS

O. Prinits

13.—18. veebruarini 1967. toimus Berliinis Saksa Demokraatliku Vabariigi Matemaatikaühingu IV teaduslik aastakonverents. See igal aastal organiseeritav üritus, millele pandi alus 1964. a. Weimaris, on järgnevatel aastatel Karl-Marx-Stadtis ja Leipzigis näidanud oma eluõigust ja nüüd Berliinis ulatus ettekannete arv juba 250-ni. 600-liikmelisest osavõtjaskonnast moodustasid rõhuva enamiku SDV matemaatikud, kuid külalisi oli ka — Lääne-Berliinist, Poolast, Ungarist, Tšehhoslovakkiast, Rumeeniast ning Nõukogude Liidust.

Konverents toimus Berliini Humboldti-nim. Ülikoolis. Oma avasõnas rõhutas Matemaatikaühingu esimees prof. Kurt Schröder Berliini Ülikooli tähtsust matemaatika arengus nii minevikus kui ka tänapäeval. Praegu töötab Berliini Ülikooli juures 4 matemaatikainstituuti: puhta matemaatika, rakendusmatemaatika, matemaatilise loogika ja koolimatemaatika instituudid. Konverentsile head kordaminekut soovisid Berliini Ülikooli rektor prof. Sanke ja Berliini ülemlinnapea esindaja Müller. Meeldivalt sisustas konverentsi avamist keelpillide kvartett oma esinemisega avatseremoonia algul ja lõpus. Avaettekanne oli usaldatud Rostocki Ülikooli noorele professorile L. Bergile teemal «Asümptootilised kujutused ja arendused».

Hommikupoolsetel plenaaristungitel esitati ülevaateettekandeid ja õhtupoolikuti töötati 13 sektsioonis: loogika, algebra ja arvuteooria, analüüs, geomeetria, numbrilised meetodid ja arvutustehnika, majandusmatemaatika, küberneetika, tõenäosusteooria ja matemaatiline statistika, biomeetria, mehhaanika, matemaatika õpetamine, matemaatiline füüsika ja voolavusõpetus. Matemaatika õpetamise sektsiooni peamisteks arutlusobjektideks olid koolimatemaatika uue programmi väljatöötamisega seotud küsimused. Toimus isegi eraldi diskussioon reaalarvude käsitlemise võimaluste kohta koolis. Huvitavamatest ettekannetest selles sektsioonis olgu nimetatud: Halle ülikooli professor W. Walsch «Semantilised ja süntaktilised aspektid matemaatika õpetamisel», Dresdeni Tehnikaülikooli professor W. Lange «Tõenäosusteooria elementide käsitlemisest», Berliini Ülikooli professor L. Görke «Sarnasusõpetuse käsitlemisest 8. klassis», Berliini Ülikooli Koolimatemaatika Instituudi direktor prof. K. Härtig «Mida tähendab matemaatika õpetamise läbiviimine hulgateoreetilisel baasil», Berliini Ülikooli Pedagoogikateaduskonna matemaatika õpetamise metoodika osakonna juhataja prof. G. Peitsch «Reaalarvude käsitlemisest koolis», sama osakonna töötaja prof. G. Lorenz «Meie üliõpilased ja koolimatemaatika aine» jne. Traditsiooni kohaselt tänas auditoorium ettekandjaid mitte aplausiga, vaid sõrmenukkidega lauale koputades.

Tänapäeva Berliin jätab külastajaile suurepärase mulje vastvalminud kaasaegsete ehitustega Unter den Lindenil ja Alexanderplatzi ümbruses, samuti aga hoogsa tempoga, millega on asutud veel ülesehitamata rajoonide ettevalmistamisele. Väga hubased ja avarad on Berliini uued kohvikud, nagu «Operncafe» ja «Linden Corso» Unter den Lindenil ning kauaks jäävad meelde meisterlikud etendused Berliini Koomilises Ooperis ja Berliner Ensemblis.

TARTU MMK UUED KOORDINAADID

E. Toom

6. veebruaril 1967. a. algas uus etapp Tartu Mittestatsionaarse Matemaatikakooli elus — kool sai juriidilise isiku õigused Eesti NSV Haridusministeeriumi koolivälise asutusena.

MMK põhimääruse uue redaktsiooni järgi jääb kogu õppetöö koolis edasi ühiskondlikele alustele. Seda juhendab Eesti NSV haridusministri ja TRÜ rektori kinnitatud ühiskondlik nõukogu. Põhiliselt jäävad samaks ka kooli eesmärgid.

Normaalselt kulgeva õppetöö kindlustamiseks on koolil väike tehniline personal, mõningad majanduslikud võimalused ja muidugi lootus Parkinsoni seaduse üldkehtivusele. MMK «administratiivkeskus» asub praegu A. H. Tammsaare nim. Tartu I Keskkooli ruumes, postiaadress on aga sõltumata kooli konkreetsest asukohast kõikide kirjasaatjate jaoks T a r t u, p/k. 60.

Käesoleva aasta suursündmuseks on meie esimese lennu väljalase — ligi poolsada abiturienti saavad kevadel ka MMK lõputunnistuse. Püüame saavutada seda, et juba lähemal ajal neil tunnistustel oleks kaalukas sõna öelda ka kõrgemasse kooli sisseastumisel.

Suvevaheajal on ette nähtud umbes nädalane suvekool nii huvitavate teoreetiliste loengute kui ka praktikumide ja kontrolltöödega. Võib-olla jätkub jõudu ka rohkemaks.

Õigeaegselt laekuvate sadade korrektselt sooritatud kontrolltööde kõrval saabub koolile ka teistsuguseid kirju, milles õpilased tunnevad muret oma tööde saatuse pärast ja räägivad mitmesugustest raskustest, mis neil ülesannete lahendamisel on tekkinud. Alati kaasneb palve lubada seekordse (arvatava) ebaõnnestumise korral ikkagi tööd jätkata, kasvõi «vabakuulajana».

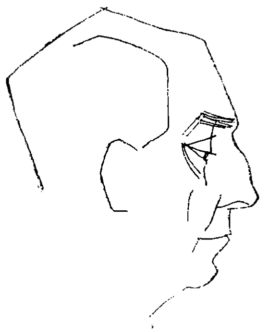
Selliste kirjade üle võib ainult rõõmu tunda. Tänapäeva tüüpilist koolimentaliteeti arvestades annab selline suhtumine vabast ajast ja vabast tahtest tehtavasse programmivälisesse töösse palju jõudu ja lootusi edaspidiseks.

KÄÄRIKUL «KRÕBISTATI» KOORIKUID

E. Sakkov

Sõna «Kääriku» tekitab kõigepealt mõtteid sportlastest, pallivüljakutest ja suusaradadest. Paari viimase aastaga on aga see TRÜ spordibaas muutunud kohaks, kuhu heameelega kogunevad «suured» ja «väikesed» teadlased selleks, et üheskoos jagu saada probleemidest, mis ühele üle jõu.

22.—31. juulini 1966 toimus Käärikul mehhaanika-alane suvekool teemal «Füüsikaliselt ja geomeetriliselt mittelineaarsed ülesanded plaatide ja koorikute teoorias». Oluliselt liialdamata võib öelda, et näiteks laev on suur plaat, lennuk aga suur koorik. Terved instituudid ja teadlaste grupid püüavad luua rahuldavat teooriat, mis võimaldaks selgitada plaatide ja koorikute käitumise iseärasusi mitmesugustes olukordades. Varasemates töödes piirduti eranditult elastsete deformatsioonidega. Suurtel kiirustel ja kõrgetel temperatuuridel tekivad konstruktsioonides sageli plastsed (jäävad) deformatsioonid. Viimaste arvestamine muudab ülesande lahendamise tunduvalt raskemaks, probleemi nimetatakse füüsikaliselt mittelineaarseks. Juhul, kui vaadeldakse plaatide ja koorikute suuri läbipaindeid, tuleb arvestada muutusi nende geomeetrias. See tingib nn. geomeetrilise mittelineaarsuse. TRÜ



Professor[1] *M. Broude*

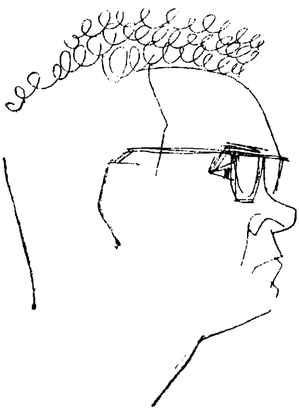
teoreetilise mehhaanika ja astronoomia kateeder on oma uurimustes püüdnud üheaegselt arvestada mõlemat efekti. Kuna suvekooli põhiliseks initsiaatoriks ja organiseerijaks oli eespool nimetatud kateeder, siis põhjendab see ka temaatika sellist valikut.

Suvekooli koosseis oli aukartustäratav — 51 osavõtjast 12 teaduste doktorit ja 24 teaduste kandidaati. Nii et koolist selle sõna tavalises mõttes antud juhul kõnelda ei kõlba. See oli kool, kus kuulajaiks olid professorid

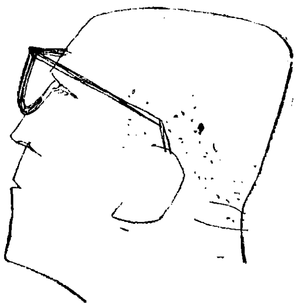
[1] Sõbralikud šaržid H. Sakkovilt.

ja teaduslikud töötajad Nõukogude Liidu 13 linnast. Kõige arvukamalt olid esindatud Moskva (15 inimest) ja Tartu (13 kuulajat).

10 päeva jooksul kuulati 9 ülevaateloengut meie maa nimekamatelt teadlastelt ja 15 lühiettekannet. Viimased olid eelnevalt trükitud ülikooli rotaprindil, mis tunduvalt kergendas ettekande jälgimist ja sellest arusaamist. Suvekoolist võtsid osa plastsuseteooria üks rajajaid, NSVL Teaduste Akadeemia kirjavahetajaliige prof. Iljušin, Lenini preemia laureaat prof. Malinin, füüsika-matemaatikadoktor Svirski. Viimati nimetatud teadlase loeng «Mittelineaarsete võrrandite lahendusmeetodid plaatide ja koorikute teoorias» kujunes suvekooli keskseks ettekandeks. Ta paistis silma oma



Tehnikadoktor M. Kornišin



Füüsika-matemaatikadoktor J. Svirski

sisutiheduse ja matemaatilise rangusega. Eesti teadlased esitasid suvekoolis 4 ettekannet. Prof. Ü. Lepik esines ülevaateloenguga teemal «Elastilis-plastiliste plaatide ja koorikute teooria küsimusi». E. Jõgi, K. Soonets ja L. Kull kandsid oma tööde tulemused ette lühiteadetes.

Ettekannete kuulamine ja arutamine moodustas aga ainult ühe osa suvekoolist. Diskussioonid jätkusid ka järve ääres ning matkaradadel. Sõlmiti palju tutvusi, vahetati aadresse, lubati üksteisele saata teaduslike artiklite äratõmbeid.

Külalistele meeldis meie väikeses Eestis väga. Nad olid vaimustatud suvekoolide korraldamise ideest, Kääriku loodusest ja tõotasid, et tulevad esimesel kutsel siia tagasi. Oleks tore, kui paari aasta pärast selline üritus tõepoolest jälle aset leiaks.

Kroonika

ANTS SÄREV 65 AASTANE

14. aprillil 1967. a. pühitses Tallinna Polütehnilise Instituudi matemaatika kateedri dotsent Ants Hansu p. Särev oma 65. sünnipäeva.

Juubilar on sündinud 14. aprillil 1902. a. Viljandimaal talupoja perekonnas. Aastatel 1922 kuni 1927 õppis ta Tartu ülikooli matemaatika-loodusteaduskonnas, 1929. a. omistati talle magister mathematicae teaduslik kraad. 1929.—1931. a. viibis ta teadusliku stipendiaadina Pariisis Sorbonne'i ülikoolis. Töötanud siis mõni aasta oma kodutalus, tegeldes samaaegselt teadusliku tööga, astus A. Särev 1935. a. Sotsiaalministeeriumi teenistusse, kus töötas sotsiaalkindlustuse inspektorina kuni 1940. a. Alates sama aas-

ta detsembrist kuulub A. Särev dotsendina Tallinna Polütehnilise Instituudi õppejõudude koosseisu, kusjuures okupatsiooniaastail ei peetud võimalikuks A. Särevit muuks kasutada kui ainult õppeülesannete täitjaks.

A. Särev on autasustatud medaliga «Eeskujuliku töö eest Suures Isamaasõjas». 1946. a. omistati talle Tartu Riikliku Ülikooli poolt füüsika-matemaatikakandidaadi kraad ja 1947. a. Kõrgema Atestatsioonikomisjoni poolt dotsendi kutse. 1953. a. kuni 1966. a. oli A. Särev TPI matemaatika kateedri juhatajaks.

A. Särevit on tema pika pedagoogilise töö jooksul alati hinnatud kui instituudi üht parimat lektorit, kelle loengute loogiline ülesehitus, selge ja täpne esitusviis ja kõrge teaduslikteoreetiline tase on võitnud nii üliõpilaste kui ka kolleegide lugupidamise.

Eriti unustamatu mulje on kõigile jätnud juubilari fenomenaalne mälu ja erakordne eruditsioon. Pideva pedagoogilise töö kõrval on A. Särev lakkamatult tegelnud ulatusliku teadusliku uurimistööga matemaatika mitmesugustes valdkondades, kusjuures tema tähelepanu on eriti keskendunud diferentsiaalvõrrandite teooria ja funktsionaalanalüüsi probleemidele.

Inimesena on juubilar lihtne ja tagasihoidlik, tema peen ja särav huumor võidab kõigi sümpaatia.

TPI matemaatika kateedris on kujunenud ja lõppeks iseseisvuse saavutanud terve rida kateedreid, nagu graafika, teoreetilise mehhaanika, arvutusmatemaatika jt. kateedrid. Igaühes neis on A. Särevi kolleege ja õpilasi, samuti leidub neid vabariigi teaduslikes uurimisasutustes ja teistes kõrgemates koolides. Võib kindel olla, et vabariigi matemaatikute kogu pere õnnitleb A. Särevit tema juubeli puhul ja soovib talle veel paljudeks aastateks tugevat tervist, head tööindu ja jõudu teaduse arendamisel ja tulevaste inseneride õpetamisel.

Kaastöötajad

UUS TEADUSTE KANDIDAAT

Eesti NSV Pedagoogika Teadusliku Uurimise Instituudi matemaatika ja füüsika sektori juhataja Aksel Telgmaa kaitses 9. detsembril 1966 NSV Liidu Pedagoogika Akadeemia Üld- ja Polütehnilise Hariduse Teadusliku Uurimise Instituudi Tea-

dusliku Nõukogu ees kandidaadiväitekirja «Järkjärguline lähendamine koolimatemaatika hodegeetilise printsiibina». Dissertandile omistati pedagoogikakandidaadi teaduslik kraad.

Väitekirjas põhjendatakse hodegeetiliste printsiipide vajadust koolimatemaatikas ja näidatakse, et järkjärguline lähendamine on üheks selliseks printsiibiks, millest tuleb juhinduda matemaatika õpetamisel. Uuritakse järkjärgulise lähendamise küsimusi nende ajaloolises arengus ning mitmeid aproksimatsiooniprobleeme (funktsioonide lähendamine, võrrandi ligikaudse lahendi graafiline ja numbriline parandamine, pindalade ligikaudne määramine, irratsionaalarvude käsitlemine jt.) koolimatemaatika seisukohalt.

Väitekirja teaduslikuks juhendajaks oli prof. G. Rägo, ametlikeks oponentideks prof. J. Depman ja prof. A. Humal. Dissertatsiooni valmimisele aitasid kaasa matemaatikaõpetajad M. Aavasalu, S. Erman, E. Haabjärv, H. Kess, O. Kotkas, V. Lobja, M. Norman, V. Noor, E. Noor, A. Nuka, V. Päeva, J. Rokk, H. Rosberg, R. Sepp, H. Soobik, M. Sütt, L. Ustav mõnede küsimuste katselise õpetamise näol.

Aksel Telgmaa sündis 10. veebr. 1932 Harju rajoonis Padisel. Pärast Padise 7-kl. Kooli lõpetamist 1947. a. siirdus ta õpinguid jätkama Tallinna Õpetajate Instituuti ja seejärel Tallinna Pedagoogilisse Instituuti, mille lõpetas 1956. a. Töötades Keila Keskkooli matemaatikaõpetajana astus A. Telgmaa 1960. a. Tartu Riikliku Ülikooli mittestatsionaarsesse aspirantuuri. Alates 1960. a. oktoobrist töötab ta Eesti NSV Pedagoogika Teadusliku Uurimise Instituudis.

TÄIENDUS MATEMAATIKUTE PERELE

1966. a. detsembris lõpetas järjekordne lend matemaatikuid $5^1/_2$ aastase stuudiumi TRÜ-s. 21. detsembril kaitsti järgmised diplomitööd.

Matemaatika erialal:

1. Grosberg, Sirje — Rajaülesannete lahendamisest diferentsmeetoditega (juhendaja: dots. E. Tamme).

2. Luik, Hando — Õmblusvabriku «Baltika» laokaartide koostamine elektronarvutil «Minsk-22» (juhendaja: A. Jägel).

3. Luts, Anne — Materjalivajaduste ja keskmiste kulunormide arvutamise programm II (Hindade kooskõlastatuse kontroll. Materjalivajaduste arvutamine ja agregeerimine) (juhendaja: L. Heinla).

4. Maasik, Maire — Interpreteerivate programmide konstrueerimine arvutusmasinale «VNIIEM-3» (juhendaja: M. Sarv).

5. Mikli, Toomas — Projekteerimisinstituudi juhtimisprogramm (juhendaja: O. Meremaa).

6. Prisk, Liivi — Elektronarvuti kasutamine õmblusvabriku tehnoloogilise protsessi ühe etapi algoritmiseeritud juhtimise jaoks (juhendaja: A. Jägel).

7. Remmel Ülle — Materjalivajaduste ja keskmiste kulunormide arvestamise programm I (Algandmete sisseviimine ja parandamine. Tulemuste väljastamine) (juhendaja: L. Heinla).

8. Rõõmus, Elvi — Materjalivajaduste ja keskmiste kulunormide arvutamise programm III. (Kulunormide kooskõlastatuse kontroll. Materjalide kulu analüüs) (juhendaja: L. Heinla).

9. Suits, Tiina — Palgaarvestuse mehhaniseerimine Võru Gaasianalüsaatorite Tehases (juhendaja: V. Tinn).

10. Tamlak, Tiiu — Majanduse dünaamika modelleerimine (juhendaja: R. Mullari).

11. Viikmann, Ella — Mitmemõõtmelise regressioonanalüüsi programm elektronarvutile «Minsk-2» (juhendaja: J. Peterson).

Mehhaanika erialal:

12. Pungar, Peeter — Rõnga sektori kujulise plaadi stabiilsusest (juhendaja: van. õp. L. Roots).

13. Pungar, Eda — Nõtkete jäik-plastiliste ümmarguste plaatide ja lamedate sfääriliste koorikute tasakaalust (juhendaja: prof. Ü. Lepik).

MEIE KÜLALISI

TRÜ algebra ja geomeetria kateedri kutsel viibis 5.—16. märtsini Tartus füüsika-matemaatikadoktor A. M. Vassiljev Moskva Riiklikust Ülikoolist, kes luges TRÜ-s loengutsükli ja andis teaduslikke konsultatsioone õppejõududele ja aspirantidele. A. M. Vassiljev töötab MRÜ diferentsiaalgeomeetria kateedris. S. P. Finikovi, G. F. Laptevi jt. õpilasena on ta Moskva diferentsiaalgeomeetria kooli noorema põlvkonna silmapaistvamaid esindajaid. Viimastel aastatel on A. M. Vassiljev teinud väärtuslikke uurimusi diferentsiaalgeomeetria struktuuride algebralise teooria alal. Saadud tulemusi käsitles ta ka TRÜ-s peetud loengutel. Konsultatsioonidel ja vestlustes oli võimalik veelgi süvendada juba varem tekkinud teaduslikke kontakte (A. M. Vassiljev on olnud kahe Moskvas end täiendanud eesti matemaatiku juhendajaks).

Ü. Lumiste

UUDNE ÜRITUS

1965. a. sügisel sai Viljandi I Keskkooli reaalainete õpetajate algatusel teoks uudne üritus — koolidevaheline matemaatika-, füüsika- ja keemiaülesannete lahendamise võistlus, mis näib kujunevat kasulikuks traditsiooniks. Võistlustulle asusid Viljandi I, Tartu I ja Nõo Keskkool. Võistlus organiseeriti eesmärgil parandada noorte ettevalmistust täppisteaduste olümpiaadiks, anda õpilastele võistluskogemusi, kasvatada huvi täppisteaduste vastu ja luua sõprussidemed nimetatud koolide vahel.

Esimene kohtumine toimus 4. dets. 1965 Tartu I Keskkoolis. Tulemused olid järgmised (füüsikas ja keemias Nõo Keskkool ei võistelnud):

M a t e m a a t i k a s:
1. Viljandi I Keskkool
2. Tartu I Keskkool
3. Nõo Keskkool

F ü ü s i k a s:
1. Viljandi I Keskkool
2. Tartu I Keskkool

K e e m i a s:
1. Tartu I Keskkool
2. Viljandi I Keskkool.

Käesoleval õppeaastal kohtuti teistkordselt 15. jaan. 1967. Kohtumine toimus Viljandi I Keskkoolis, sellel olid tunduvalt paremad Nõo Keskkooli õpilased, kes võitsid kindlalt kõik kolm ala. Matemaatikas sai teise koha Viljandi I Keskkool, füüsikas ja keemias Tartu I Keskkool. Iga ala võistkonnas oli igal koolil 6 õpilast. Paremusjärjekord selgitati kõigi õpilaste poolt saavutatud punktide summeerimisel (I koht — 19 p., II koht — 17 p., III koht — 16 p. jne.). Võistlusel esitatud matemaatikaülesanded on toodud käesoleva veeru allosas (nende lahendamiseks oli aega 4 tundi).

Pärast väsitavat võistlust sõlmiti sõprussidemeid tantsuringis. Viljandi rajooni haridusosakonna juhataja ja Viljandi I Keskkooli direktor andsid võitjatele üle mälestusesemed ja diplomid. Jääb öelda palju tänu Viljandi I Keskkooli perele võistluste eeskujuliku organiseerimise ja südamliku vastuvõtu eest.

Olgu veel märgitud, et kolmas kohtumine toimub järgmisel õppeaastal Nõo Keskkoolis.

K. Kruse

MATEMAATIKAÜLESANDED KESKKOOLIDEVAHELISEL VÕISTLUSEL

1. Tõestada, et kui $A+B+C=\pi$ ja $\sin A:\sin B:\sin C=4:5:6$, siis $\cos A:\cos B:\cos C=12:9:2$.
2. Kolm ringjoont, millel on ühine raadius r, lõikuvad paarikaupa täisnurga all. Määrata nende ringjoonte sisepiirkondade ühisosa pindala.
3. Lahendada võrrandisüsteem
$$\begin{aligned} x+y-z&=15\\ \frac{5}{x}-\frac{5}{y}+\frac{5}{z}&=3\\ xy-xz+yz&=75. \end{aligned}$$
4. Mitu korda ööpäevas omandavad kellaosutid sellise asendi, et nende äravahetamisel saadud asendil on mõte?
5. Leida summa $a_0+a_1+a_2+\ldots+a_n$ teades, et järjestikuste liikmete vahed moodustavad naturaalarvude jada 1, 2, 3, ..., kusjuures $a_0=0$.

Bibliograafia

EESTI NSV-s ILMUNUD MATEMAATIKA-ALASE KIRJANDUSE NIMESTIK

September-detsember 1966

(Koostanud M. Suurväli)

Raamatud

Etverk, E. **Piirväärtus ja pidevus.** Konspekt ja metoodilisi juhendeid kaugüliõpilastele. Tln., 1966. 40 lk. (TPI. Matemaatika kateeder.) — Trükitud rotaprindil.

Gelfand, J., Glagoleva, J. ja Šnol, E. **Funktsioonid ja graafikud.** (Põhilised võtted.) Tln., «Valgus», 1966. 96 lk.

Jürimäe, E. **Kompleksmuutuja funktsioonide teooria I.** (Elementaarfunktsioonid.) Trt., 1966. 132 lk. (TRÜ. Matemaatilise analüüsi kateeder.) — Trükitud rotaprindil.

Kujutav geomeetria. Harjutusülesanded. Tln., 1966. 66 lk. (TPI) — Pealk. ees autorid: M. Kraaving, N. Paluver, O. Rünk, E. Vallas. Paralleeltekst vene keeles. Trükitud rotaprindil.

Kujutav geomeetria. Lisaharjutusülesanded ehituslike erialade jaoks. Tln., 1960. 20 lk. (TPI) — Pealk. ees autorid: M. Kraaving, N. Paluver, O. Rünk, E. Vallas. Paralleeltekst vene keeles. Trükitud rotaprindil.

Kõrgem matemaatika. Programm, metoodiline juhend ja kontrolltööd II kursuse kaugüliõpilastele. Koost. H. Roos ja T. Jõgi. Tln., 1966. 36 lk. (TPI. Matemaatika kateeder.) — Trükitud rotaprindil.

Levin, M. ja Ulm, S. **Arvutusmeetodite käsiraamat.** Tln., «Valgus», 1966. 248 lk.

Piir, I. **Matemaatilise füüsika meetodid.** 1. Variatsioonarvutus. Trt., 1966. 162 lk. (TRÜ. Teoreetilise füüsika kateeder.) — Trükitud rotaprindil.

Õpik keskkooli matemaatikakursuse kordamiseks. Abimaterjale sisseastujaile. 2. osa. Geomeetria ja trigonomeetria. Koost. E. Etverk, A. Garšnek, A. Kass, P. Kass, H. Krusberg, M. Teeäär. Tln., 1966. 128 lk. (TPI. Matemaatika kateeder.) — Trükitud rotaprindil.

Mittestatsionaarse matemaatikakooli väljaanded:

Kontrolltöö nr. 3 («Reaalarvu absoluutväärtus») ülesannete lahendused. Trt., 1966. 19 lk. (TRÜ. Mittestatsionaarne matemaatikakool. 5.) — Trükitud rotaprindil.

Kontrolltöö nr. 5 ülesannete vastused ja lahendused. [Koost. Ü. Kaasik.] Trt., 1966. 24 lk. (TRÜ. Mittestatsionaarne matemaatikakool. 7.) — Trükitud rotaprindil.

Loogiliste keerdülesannete lahendamisest. [Koost. Ü. Kaasik.] Trt., 1966. 23 lk. (TRÜ. Mittestatsionaarne matemaatikakool. 6.) — Trükitud rotaprindil.

Mittestatsionaarse matemaatikakooli 1966. a. sisseastumiskontrolltöö ülesannete lahendused. Trt., 1966. 18 lk. (TRÜ. Mittestatsionaarne matemaatikakool. 8.) — Trükitud rotaprindil.

Tiit, E. **Tõenäosusteooria põhimõisteid.** Trt., 1966. 31 lk. (TRÜ. Mittestatsionaarne matemaatikakool. 9.). — Trükitud rotaprindil.

Барон, С. **Введение в теорию суммируемости рядов.** Тарту, 1966. 200 с. (ТГУ. Кафедра математического анализа.) — Ротапринт.

Ласн, Э. **Тест-программы для ЭВМ «Урал-4».** Тест-программа УУ. Тест-программа АУ. Тест-программа первоначального контроля. Тарту, 1966. 140 с. (Труды Вычислит. центра ТГУ. Вып. 9).

Программы для ЭЦВМ «Минск-2». Таллин. 1966. (АН ЭССР. Ин-т кибернетики). Ротапринт.

Вып. 2. Программы по математической статистике. I. 187 с.

Содерж.: У. Опер. Ввод и контроль прямоугольных таблиц. — А. Иенк и У. Опер. Регрессивный анализ. — У. Опер. Образование новых параметров — У. Опер. Определение главных компонент и регрессионный анализ над главными компонентами — М. Каролин и И. Петерсен. Определение оптимального направления продвижения при многопараметрических задач оптимизации на сновании статистических данных. — М. Каролин. Прогноз значений и дисперсий линейной комбинации выходов при заданных значениях входов регрессионным анализом. — К. Пукк. Определение канонических корреляций и коэффициентов канонических величин.

Вып. 3.

Программы по математической статистике. 2. 128 с.

Содерж.: Э. Паллум. Программа двухфакторного дисперсионного анализа. — Э. Паллум. Программа трехфакторного дисперсионного анализа — Э. Паллум. Программа двухступенчатого иерархического дисперсионного анализа. — Э. Лелумеес. Библиотека подпрограмм для корреляционного и спектрального анализа временных рядов и для вычисления динамических характеристик объектов регулирования.

Вып. 4. Котли, М. и Ханко, П. Руководство по алгоритмическому языку MALGOL. 99 с.

Kogumikkudes ja ajakirjades ilmunud artiklid

Matemaatika ja kaasaeg. Abimaterjale matemaatika õpetajatele ja õppijatele. X. Tln., 1966. 116 lk. (Tartu Riiklik Ülikool.)

Sisu: N. A. Tšaikovski. Matemaatika ja esteetika. — Jevgeni Gabovitš. Algebra põhimõisteid. — E. Pruuden, J. Pruuden, B. Tamm. Ühest probleemorientatsiooniga programmeerimissüsteemist. — Ü. Kaasik, Ü. Remmel. Tarbimise matemaatiline uurimine. — E. Pillikse, E. Tiit. Ühest elektrivõrkude projekteerimisel tekkinud ülesandest. — T. Semjonova. Ringjoone ligikaudne jaotamine *n* võrdseks osaks. — M. Gardner. Superellips. — Jakob Gabovitš. Primitiivsed automediaansed kolmnurgad. — A. Rubel. Sofia Kovalevskaja. — E. Tiit. Mis on tõenäosus? — Esimesest eestikeelsest entsüklopeediast. — Tõeleid Roosinupp. «Matemaatika ja kaasaja» relatiivse juubeli puhul. — E. Jõgi. Akadeemik N. I. Mushelišvili 75-aastane. — Ü. Lumiste, E. Tamme. Piers Bohli 100-nda sünniaastapäeva puhul. — E. Jürimäe. Kaks kuud Inglismaal. — Ü. Kaasik. Mida teha elektronarvutiga? — Ü. Lepik, L. Roots. Mõningaid mehhaanika-alase terminoloogia küsimusi. — August Kasvand 75-aastane. — Ü. Lumiste. Uut lisa matemaatika ajaloole Eestis. — Hilja Õiglane. Programmeeritud õpetamise alane konverents Minskis. — V. Tinn. Üleliiduline majandusmatemaatika-alane konverents. — Uus lend matemaatikuid Tartu Riiklikust Ülikoolist. — Bibliograafia. — Ülesandeid.

Eesti NSV Teaduste Akadeemia toimetised. Füüsika-matemaatika- ja tehnikateaduste seeria. Tln., 1966.

Nr. 3. Matemaatika-alased artiklid (vene k., resümeed eesti, inglise ja saksa k.): I. Mauer. Ligikaudne meetod kümer programmeerimisülesande lahendamiseks. — I. Keis. Ühe kinnispunktiga güroskaadi lil kumisvõrrandites. — E. Künnap. Suullsed käsud juhtimissüsteemides.

Nr. 4. Matemaatika-alased artiklid (vene k., resümeed eesti, inglise ja saksa k.): H. Koppel. Üldistatud Steffenseni meetodi koonduvusest. — O. Vaarmann. Ühe tsüklilise protsessi resultaati ennustava pertseptroni algoritmi mudelleerimine elektronarvutil. — A. Humal. Meetod empiirilise funktsiooni tuletisi sisaldavate avaldiste arvutamiseks.

Anton, E. Tekstülesannete koostamine ja lahendamine 3. klassis. [Laanemetsa algkooliõpetaja kogemusi. Valga rajoon.] — Nõukogude Kool, 1966, nr. 12, lk. 938—942.

Etverk, E. Hulgateooria elemente koolimatemaatikasse. — Nõukogude Kool, 1966, nr. 10, lk. 748—752, nr. 11, lk. 831—836.

Lihhanov, A. Õnneseen. [Matemaatik J. Žuravljov.] — Noorus, 1966, nr. 10, lk. 34—36, 41.

Lints, A. Abiks katsetajaile: Korrutamine 2. klassis. — Jagamine 2. klassis. — Nõukogude Õpetaja, 1966, 8., 15. okt.

Lints, A. Hulga mõiste I. klassis. [Ameerika autorite M. Levini ja J. Bendicki õpikust «New mathematics». New York, 1965.] — Nõukogude Kool, 1966, nr. 10, lk. 753—760.

Lints, A. Korrutamine saja piires. [2. klass.] Abiks katsetajaile. — Nõukogude Õpetaja, 1966, 17. sept.

Lints, A. Matemaatika töövihik esimesele klassile. — Nõukogude Õpetaja, 1966, 3. sept.

Lints, A. Mõtlemisoskuse arendamiseks. [Matemaatika õpetamisest I. klassis.] — Nõukogude Õpetaja, 1966, 3. dets.

Meidla, E. Ärevus nõrga, keskmise ja tugeva õpilase pärast [Matemaatika õpetamisest.] — Nõukogude Õpetaja, 1966, 19. nov.

Noor, E. Praktika osa matemaatika tekkes ja arengus. [8-klassilise kooli matemaatika kursusest.] — Nõukogude Kool, 1966, nr. 9, lk. 675—680.

Prinits, O. Matemaatika õpetamise küsimused rahvusvahelisel matemaatikute kongressil. [Moskva. Aug. 1966.] — Nõukogude Kool, 1966, nr. 11, lk. 827—830.

Rosenberg, G. Ümmargune arvutuslükati. [Abimaterjal matemaatikaõpetajale klassiväliseks tööks.] Nõukogude Kool, 1966, nr. 12, lk. 913—921.

Taliste, J. Jooksev kordamine 4. klassi matemaatika õpetamisel. — Nõukogude Õpetaja, 1966, 5. nov.

Ülesandeid

Ülesandeid elementaarmatemaatikast

1. On antud ruutvõrrandid $x^2 + 2px + q = 0$ ja $x^2 + 2p_1 + q_1 = 0$, kusjuures $q + q_1 = 2pp_1$. Tõestada: kui ühe võrrandi lahendid on imaginaarsed, siis teise võrrandi lahendid on reaalsed.

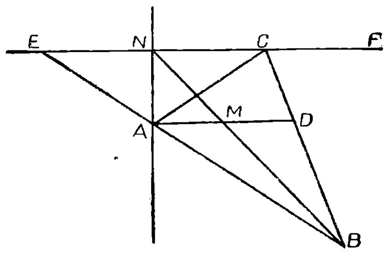
2. Aritmeetilistes progressioonides 4, 8, 12, 16, ... ja 3, 8, 13, 18, ... esineb ühesuguseid liikmeid. Leida 50 esimese ühesuguse liikme summa.

3. On antud nurk ja selle nurga poolitaja. Vabalt võetud ringjoon, mis läbib nurga tippu, lõikab nurga haaradelt ja nurgapoolitajalt vastavalt lõigud a, b ja c. Tõestada, et suhe $\frac{a+b}{c}$ ei sõltu ringjoone valikust.

4. Lihtsustada avaldis $A = a \cos 3\alpha - b \sin 3\alpha$, kui $\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\cos \alpha}{b}$.

5. Olgu $f(x) = 0$ täisarvuliste kordajatega algebraline võrrand ja olgu $f(0)$ ning $f(1)$ paaritud arvud. Näidata, et siis võrrandil $f(x) = 0$ ei ole täisarvulisi lahendeid.

KOGUMIKU KÜMNENDA VIHIKU ÜLESANNETE LAHENDUSED



Joonis 1.

Ülesande nr. 1 lahendus. Joonestame täisnurga DAN, võttes $AN = CG$. Läbi punkti N joonestame sirgega AD paralleelse sirge NF. Ringjoon keskpunktiga A ja raadiusega AB lõikugu sirgega NM (M on lõigu AD keskpunkt) punktis B. Leiame sirgete BD ja NF lõikepunkti C. Kolmnurk ABC ongi otsitavaks kolmnurgaks.

Tõestame, et AD on nurga BAC poolitaja. Olgu sirgete AB ja NF lõikepunkt E. Kuna $AM = MD$, siis $EN = NC$. Järelikult ΔEAC on võrdhaarne ning $\angle AEC = \angle ACE$. Kuna $\angle BAD = \angle AEC$, $\angle DAC = \angle ACE$, siis tõepoolest $\angle BAD = \angle DAC$.

Ülesande nr. 2 lahendus. Kui n on paaritu arv, siis $S_n =$

$$= 1 + 3 + 4 + \ldots + \frac{3n-1}{2} =$$

$$= \underbrace{\left(1 + 4 + 7 + \ldots + \frac{3n-1}{2}\right)}_{\frac{n+1}{2}\text{ liiget}} + \underbrace{\left(3 + 6 + 9 + \ldots + \frac{3n-3}{2}\right)}_{\frac{n-1}{2}\text{ liiget}} =$$

$$= \frac{(n+1)\left(1 + \frac{3n-1}{2}\right)}{2 \cdot 2} + \frac{(n-1)\left(3 + \frac{3n-3}{2}\right)}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}(n+1)(3n-1).$$

Kui n on paarisarv, siis

$$S_n = 1 + 3 + 4 + \ldots + \frac{3n}{2} =$$

$$= \underbrace{\left(1 + 4 + 7 + \ldots + \frac{3n-4}{2}\right)}_{\frac{n}{2}\text{ liiget}} + \underbrace{\left(3 + 6 + 9 + \ldots + \frac{3n}{2}\right)}_{\frac{n}{2}\text{ liiget}} =$$

$$= \frac{n\left(1 + \frac{3n-4}{2}\right)}{2 \cdot 2} + \frac{n\left(3 + \frac{3n}{2}\right)}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4} n(3n + 2).$$

Seega

$$S_n = \begin{cases} \frac{1}{4}(n+1)(3n-1), & \text{kui } n \text{ on paaritu arv;} \\ \frac{1}{4} n(3n+2), & \text{kui } n \text{ on paarisarv.} \end{cases}$$

Ülesande nr. 3. lahendus. Lähtume ilmselt kehtivast võrratusest

$$(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1})^2 > 0.$$

Siit

$$2n + 3 > 2\sqrt{(n+1)(n+2)}, \qquad 1 > 2(\sqrt{(n+1)(n+2)} - n - 1),$$

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} > 2(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}).$$

Järelikult

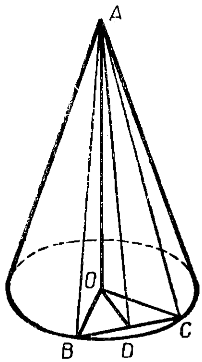
$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2(\sqrt{2} - \sqrt{1} + \sqrt{3} - \sqrt{2} +$$

$$+ \sqrt{4} - \sqrt{3} + \ldots + \sqrt{n+1} - \sqrt{n}) =$$

$$= 2(\sqrt{n+1} - 1).$$

Ülesande nr. 4 lahendus. Lõikame koonust tasandiga ABC, kusjuures $OD = a$. Siis $DA = \sqrt{3 + a^2}$, $BC = 2\sqrt{6 - a^2}$ ning lõike pindala $S = \sqrt{(3+a^2)(6-a^2)} = \sqrt{\frac{81}{4} - \left(a^2 - \frac{3}{2}\right)^2}$. Lõike pindala on maksimaalne, kui $a^2 - \frac{3}{2} = 0$, $a = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Seega $S_{maks.} = \frac{9}{2}$.



Joonis 2.

NUPUTAMISÜLESANNETEST

H. Espenberg

Ü. Kaasiku artiklis (vt. Matemaatika ja kaasaeg, XI, lk. 113—114) pakuti üheksa regulaarset liitmisülesannet, kuid kuues neist (Ü K S + Ü K S + Ü K S + + Ü K S + Ü K S = V I I S) siiski ei osutunud regulaarseks. Nimelt on sel ülesandel kolm erinevat lahendit: Ü K S = 710, Ü K S = 910 ja Ü K S = 645.

Küll aga süvenes veendumus Ü. Kaasiku väite õigsuses, et regulaarseid lahutamisülesandeid pole olemas. Pseudoregulaarsete lahutamisülesannete osas on olukord rõõmustavam: eksisteerib vähemalt kaks pseudoregulaarset lahutamisülesannet:

$$\begin{array}{r} \text{K Ü M M E} \\ -\ \text{K U U S} \\ \hline \text{N E L I} \end{array} \qquad \begin{array}{r} \text{K Ü M M E} \\ -\ \text{N E L I} \\ \hline \text{K U U S} \end{array}$$

(nende lahendeiks on K Ü M M E = 10773, K U U S = 1445, N E L I = 9328 ja K Ü M M E = 10773, K U U S = 1448, N E L I = 9325).

Sellega ei saa aga regulaarsete ja pseudoregulaarsete lahutamisülesannete küsimust sugugi veel ammendatuks lugeda. Miks peaksime nimelt probleemi uurima just kümnendsüsteemi baasil, kui igaüks tänapäeval juba tunneb arvusüsteeme ka kümnest erineval alusel[1]? Niisiis võib püstitada küsimuse regulaarsete (ja pseudoregulaarsete) liitmis- ning lahutamisülesannete koostamisest suvaliselt valitud alusega arvusüsteemis.

Kui näiteks vaadelda juba kõne all olnud liitmisülesannet Ü K S + Ü K S + + Ü K S + Ü K S + Ü K S = V I I S, millel kümnendsüsteemis on 3 lahendit, siis üheksandsüsteemis tal hoopis lahend puudub. Samuti puudub sel ülesandel lahend nii viiend- kui ka kuuendsüsteemis. Seitsmendsüsteemis on tal aga kolm lahendit: Ü K S = 350, Ü K S = 540 ja Ü K S = 620; kaheksandsüsteemis koguni kuus lahendit: Ü K S = 316, Ü K S = 502, Ü K S = 520, Ü K S = 632, Ü K S = 650 ja Ü K S = 706.

Märgime, et seitsmendsüsteem osutub kümnendsüsteemiga võrreldes üpris «lahkeks» regulaarsete lahutamisülesannete osas. Nii on seitsmendsüsteemis regulaarseteks lahutamisülesanneteks järgmised kolm:

$$\begin{array}{r} \text{N E L I} \\ -\ \text{K A K S} \\ \hline \text{K A K S} \end{array} \qquad \begin{array}{r} \text{K O L M} \\ -\ \text{K A K S} \\ \hline \text{Ü K S} \end{array} \qquad \begin{array}{r} \text{K O L M} \\ -\ \text{Ü K S} \\ \hline \text{K A K S} \end{array}$$

(esimese lahendiks on N E L I = 6501, K A K S = 3234; teise ja kolmanda lahendiks aga K O L M = 3405, K A K S = 3236, Ü K S = 136).

Lõpetuseks jääb vaid korrata Ü. Kaasiku artikli lõpus esitatud üleskutset, nüüd juba mistahes arvusüsteemide korral.

---

[1] Vt. E. Tamme. Positsioonilised arvusüsteemid. — Matemaatika ja kaasaeg, IV, lk. 43—50.

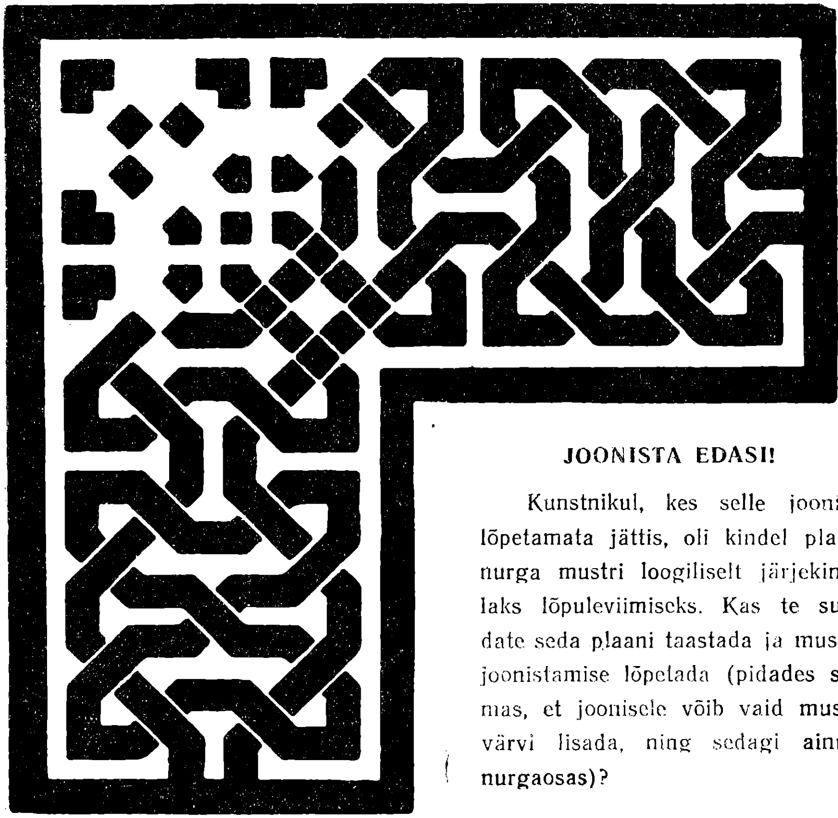
BRIDŽIÜLESANDE LAHENDUS

(ülesanne vt. lk. 18)

S võtab esimese tihi ässaga, lõikab teisel käigul pada (W paneb üheksa ning N emanda) ja võtab lauast veel kaks ärtu tihi. N käib nüüd risti söduri, mille O peab emandaga katma ja S võtab kuningaga. S käib seejärel ärtut (W viskab ruutu kolme ja N risti nelja) ning tõmbab siis veel kord ärtut, millega W on sundviskes. Ilmselt ei tohi ta kaotada ristit ja peab seega viskama kas pada või ruutut. Vastavalt nendele võimalustele saame kaks veidi erinevat varianti.

a) Kui W viskab seitsmendal käigul pada sõduri, siis N viskab ruutu kuue. S käib nüüd risti üheksa ja N lööb W pandud kümne üle. Edasi tõmbab N ruutu ässa ning käib siis oma viimase ruutu, mille S lööb kuningaga üle. S käib 11. käiguks oma viimase ärtu, millele N viskab risti seitsme ning O on sundviskes (ta ei saa hoida nii risti kaheksat kui ka kahte pada).

b) Kui W viskab seitsmendal käigul ruutu nelja, siis N viskab pada seitsme. S käib ikka risti üheksa, N tõmbab nüüd pada ässa ning käib ruutu kuue kuninga alla. S käib 11. käiguks jälle oma viimase ärtu, millele N viskab ikka risti seitsme ja O on sundviskes (ta ei saa hoida nii risti kaheksat kui ka kahte ruutut).



JOONISTA EDASI!

Kunstnikul, kes selle joonise lõpetamata jättis, oli kindel plaan nurga mustri loogiliselt järjekindlaks lõpuleviimiseks. Kas te suudate seda plaani taastada ja mustri joonistamise lõpetada (pidades silmas, et joonisele võib vaid musta värvi lisada, ning sedagi ainult nurgaosas)?

SISUKORD

Тартуский государственный университет
г. Тарту, ул. Юликооли, 18

МАТЕМАТИКА И СОВРЕМЕННОСТЬ. XIII

Вспомогательные материалы для преподающих
и изучающих математику

Toimetaja H. Türnpu
Korrektor E. Oja

Ladumisele antud 27. III 1967. Trükkimisele antud 9. X 1967. Trükipaber nr. 2. 60 × 90, 1/16. Kohila Paberivabrik. Trükipoognaid 8,25 + 1 kleebis. Arvestuspoognaid 8,3. Trükiarv 3500. MB-07153. Tellimise nr. 2151. Hans Heidemanni nim. trükikoda, Tartu, Ülikooli 17/19. II.

Hind 35 kop.

2—2