0001100

Matemaatika ja kaasaeg

0011000

TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

MATEMAATIKA JA KAASAEG

XII

ABIMATERJALE MATEMAATIKA ÕPETAJATELE JA ÕPPIJATELE

TARTU 1967

ICM

МОСКВА · 1966

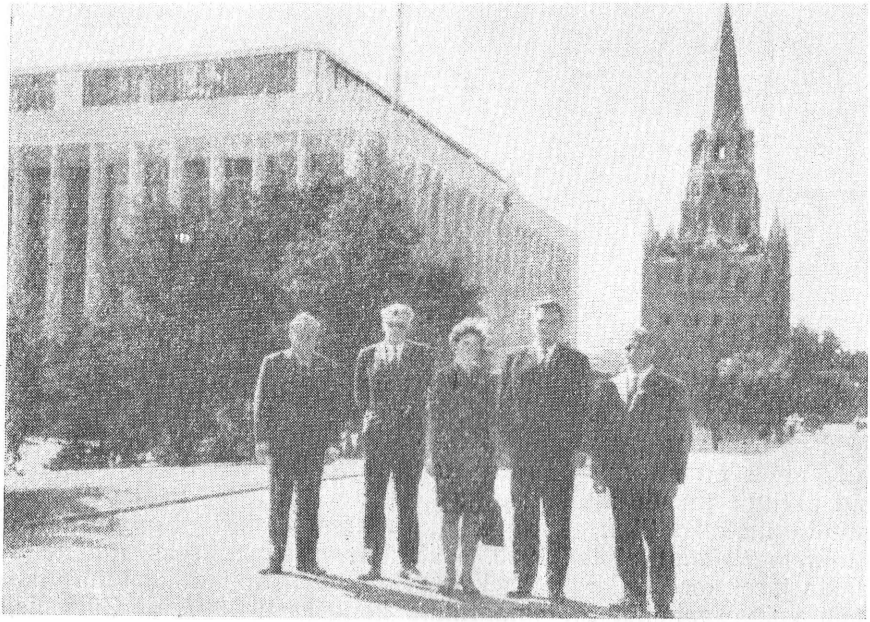
INTEGRAAL MAAILMA KOHAL

Rahvusvaheline matemaatikute kongress Moskvas 1966

Kogu maailma matemaatikute kõige esinduslikumateks kokkutulekuteks on rahvusvahelised kongressid. Esmakordselt kogunesid paljude maade matemaatikud 1897. a. Zürichis. Seal otsustati muuta matemaatikute kongressid *(International Congress of Mathematicians)* alates 1900. aastast traditsiooniliseks, iga nelja aasta järel korduvaks ürituseks. Nii ongi seni toimunud juba viisteist rahvusvahelist matemaatikute kongressi: 1897. a. Zürichis, 1900. a. Pariisis, 1904. a. Heidelbergis, 1908. a. Roomas, 1912. a. Cambridge'is 1920. a. Strasbourgis. 1924. a. Torontos, 1928. a. Bolognas, 1932. a. Zürichis, 1936. a. Oslos, 1950. a. New Yorgis, 1954. a. Amsterdamis, 1958. a. Edinburghis, 1962. a. Stokholmis, 1966. a. Moskvas. Sõdade tõttu jäid ära kongressid 1916. a. Stokholmis ja 1940. a. New Yorgis.

16.—26. augustini 1966. a. Moskvas toimunud rahvusvaheline matemaatikute kongress oli seni peetuist kõige suurem nii osavõtjate ja ettekandjate arvult kui ka teadusliku programmi ulatuselt ja sisult. Kongressi liikmeteks olid registreerunud umbes 4500 matemaatikut ca 60 riigist: Nõukogude Liidust 1600, USA-st 650, Inglismaalt 280, Prantsusmaalt 250, Saksa Demokraatlikust Vabariigist 220 jne. Neile lisandus arvukalt külalistena kongressil viibivaid nõukogude ja välisriikide matemaatikuid, nii et kokku ulatus osavõtjate arv 6000-ni.

Olemasolevate andmete järgi on varasematel rahvusvahelistel matemaatikute kongressidel olnud kolm eesti matemaatikut: J. Sarv Roomas, V. Nano Strasbourgis ja J. Nuut Oslos. Moskva kongressi tööst võtsid Eesti NSV matemaatikuist selle liikmetena osa: prof. G. Kangro, dots. Ü. Lumiste, dots. O. Prinits, dots. E. Reimers, dots. kt. J. Hion, dots kt. M. Rahula (TRÜ), füüs.-mat.-kandidaadid I. Petersen, S. Ulm (TA Küberneetika Instituut) ning G. Vainikko (enesetäiendusel Voroneži Riiklikus Ülikoolis). Tõlkijate grupi liikmena viibis kongressil füüs.-mat.-kand. E. Tiit (TRÜ), külalistena — Jevg. Gabovitš, L. Rahula ja I. Vainikko.



Rühm eesti matemaatikuid kongressil (vasakult: S. Ulm, I. Petersen, E. Tiit, O. Prinits, Ü. Lumiste)

Alljärgnevalt mõningaid tähelepanekuid ja muljeid möödunud kongressilt Moskvas.

* * *

Kongressi avamine toimus 16. augustil Kremli Kongresside Palee istungitesaalis, mis hädavaevalt suutis mahutada kõiki Moskvasse saabunud välisriikide ja nõukogude matemaatikuid. Avasõna ütles NSVL Teaduste Akadeemia president akad. M. V. Keldõš (kes on ise teatavasti matemaatik) [1]. Seejärel andis ta sõna NSV Liidu aparaadiehituse, automaatika ja juhtimissüsteemide ministrile K. N. Rudnevile tervituseks Nõukogude valitsuse nimel. Moskvalaste nimel ütles kongressi külalistele tere tulemast Moskva Linna Täitevkomitee esimehe esimene asetäitja V. P. Issajev.

Järgnevalt sai sõna Rahvusvahelise Matemaatika Assotsiatsiooni president professor George de Rham (Šveits), kes teatas, et Moskva kongressi presidendiks on valitud senine organiseeriva komitee esimees Moskva Riikliku Ülikooli rektor akadeemik I. G.

[1] Avasõna teksti eestikeelne tõlge on avaldatud käesolevas kogumikus lk. 15—16.

Petrovski. Ühtlasi kandis prof. de Rham ette otsuse Fieldsi medalite ja preemiate järjekordsete laureaatide valimise kohta. Nimetatud medalid ja preemiad asutas 1924. a. Torontos toimunud rahvusvahelise matemaatikute kongressi president J. C. Fields ja nad määrab selleks valitud komisjon iga kahe järgneva kongressi vahepealsetel aastatel eriti silmapaistvaid tulemusi saavutanud matemaatikutele. Moskva kongressil suurendati nende arvu seniselt kahelt neljale. Värsketeks laureaatideks said: P. I. Cohen (USA), M. F. Atiyah (Inglismaa), A. Grothendieck (Prantsusmaa) ja S. Smale (USA).

Pärast Fieldsi medalite pidulikku kätteandmist M. V. Keldõši poolt said lühiettekanneteks sõna professorid H. Cartan (Prantsusmaa), A. Church (USA), J. A. Dieudonné ja P. Thom (mõlemad Prantsusmaa), kes tutvustasid vastavalt Atiyah', Coheni, Grothendiecki ja Smale'i teaduslike tööde tulemusi.

Avaistung lõppes balletiõhtuga, millel Sverdlovski A. N. Lunatšarski nim. Ooperi- ja Balletiteatri kollektiiv esitas katkendeid Tšaikovski balletist «Luikede järv», Hatšaturjani balletist «Spartak», Minkuse balletist «Don Quijote» ja Šostakovitši lühiballeti «Preili ja huligaan».

* * *

Kongressi edasine töö toimus Moskva Riikliku Ülikooli korpustes Lenini mägedel. Teaduslik programm sisaldas kolmesuguseid ettekandeid. Neljal kongressipäeval oli hommikupooliti MRÜ aulas ja klubisaalis kummaski kaks ühetunnilist ettekannet silmapaistvatelt matemaatikutelt, kes esitasid ülevaateid tänapäeva matemaatika kõige aktuaalsemates uurimissuundades saavutatud tulemustest. Rahvusvaheline Matemaatika Assotsiatsioon oli sellisteks kongressi kõige ulatuslikumateks ettekanneteks valinud järgmised:

J. F. Adams. Ülevaade homotoopiateooriast.

M. Artin. Skeemide kattetopoloogia.

M. F. Atiyah. Elliptiliste diferentsiaaloperaatorite teooria globaalsed aspektid.

R. Bellman. Dünaamiline planeerimine ja juhtimise kaasaegne teooria.

L. Carleson. Fourier' ridade koonduvus ja summeeruvus.

Harish-Chandra. Harmooniline analüüs poollihtsatel Lie rühmadel.

N. V. Jefimov. Pinnateooria hüperboolsed probleemid.

M. G. Krein. Analüütilised probleemid ja tulemused Hilberti ruumi lineaarsete operaatorite teoorias.

A. I. Maltsev. Algebra ja matemaatilise loogika mõningatest piirküsimustest.

B. Malgrange. Diferentseeruvate funktsioonide lokaalne teooria.

I. I. Pjatetski-Šapiro. Automorfsed funktsioonid ja aritmeetilised rühmad.

I. Schröder. Võrratused ja veahinnangud.

K. Schütte. Uusi tulemusi tõestuste teoorias.

S. Smale. Diferentseeruvad dünaamilised süsteemid.

Ch. M. Stein. Mõnedest uutest uurimustest matemaatilise statistika alal.

J. G. Thompson. Lõplike lihtsate rühmade karakteristika.

I. M. Vinogradov, A. G. Postnikov. Analüütilise arvuteooria arengust viimastel aastatel.

Kongressi kogu ülejäänud töö toimus viieteistkümnes sektsioonis: 1. Matemaatiline loogika ja matemaatika alused, 2. Algebra, 3. Arvuteooria, 4. Klassikaline analüüs, 5. Funktsionaalanalüüs, 6. Harilikud diferentsiaalvõrrandid, 7. Osatuletistega diferentsiaalvõrrandid, 8. Topoloogia, 9. Geomeetria, 10. Algebraline geomeetria ja kompleksmuutkonnad, 11. Tõenäosusteooria ja matemaatiline statistika, 12. Rakendusmatemaatika ja matemaatiline füüsika, 13. Juhtimissüsteemide matemaatilised probleemid, 14. Arvutusmatemaatika, 15. Ajalugu ja õpetamise küsimused.

Sektsioonides kuulati kongressile kutsutud lektorite pooletunnilisi ettekandeid (neid oli kokku 69), ülejäänud aegadel aga veerandtunnilisi lühiettekandeid (viimaseid olid laekunud sooviavalduste põhjal sektsioonide orgkomiteed võtnud päevakorda kokku 2110) [2].

Selles ettekannete hulgas orienteerumiseks jagati kongressi liikmetele välja kõigi ettekannete teesid. Lühiettekannete teesid olid vormistatud sektsioonide kaupa 15 eraldi brošüürina, tunniliste ja pooletunniliste ettekannete kokkuvõtted moodustasid omaette raamatu.

Eesti matemaatikud esitasid kongressil järgmised lühiettekanded:

Ü. Lumiste — Sisestatud kihtruumid ja indutseeritud seostused (9. sekts.).

O. Prinits — Koolimatemaatika areng eesti koolis (15. sekts.).

M. Rahula — Kõrgemat järku diferentsiaalgeomeetria hulgateoreetilised alused (9. sekts.).

E. Reimers — Kontinuaalsed summeerimismenetlused ja rakendused funktsiooniteoorias (4. sekts.).

---

[2] Sektsioonide kaupa jagunesid lühiettekanded järgmiselt: 1. — 79, 2. — 178, 3. — 61, 4. — 238, 5. — 236, 6. — 134, 7. — 160, 8. — 118, 9. — 166, 10. — 45, 11. — 154, 12. — 179, 13. — 108, 14. — 163, 15. — 91.

S. Ulm — Üldistatud diferentsjagatistest ja nende rakendustest (14. sekts.).

G. Vainikko — Häiritud projektsioonmeetodid ja lähendusmeetodite üldine teooria (14. sekts.).

* *

Erilist huvi pakkusid kongressist osavõtjatele ettekanded kahe viimase kongressi vahepealsetel aastatel saavutatud tulemustest pikka aega lahendamata seisnud probleemide alal. Tutvustame alljärgnevalt mõnda nendest probleemidest ja nendele hiljuti saadud lahendustest.

Üheks vanemaks ja populaarsemaks probleemiks on niinimetatud kontiinumiprobleem, mis kerkis esile hulgateooria rajaja G. Cantori töödes juba möödunud sajandi lõpul. Probleem, mille täie teravusega seadis D. Hilbert oma kuulsas ettekandes rahvusvahelisel matemaatikute kongressil Pariisis 1900. aastal, seisneb järgnevas [3].

Kahe hulga puhul kõneldakse teatavasti, et nad on sama võimsusega, kui nende elementide vahel saab korraldada üksühese vastavuse. Kui aga hulgas A leidub hulga B võimsusega alamhulk, mis ei ühti hulga A endaga, kuid hulgas B ei leidu hulga A võimsusega alamhulka, mis erineks hulgast B endast, siis kõneldakse, et hulgal A on suurem võimsus kui hulgal B.

Hulka, millel on kõikide naturaalarvude hulga võimsus, nimetatakse loenduvaks; hulka, millel on kõikide reaalarvude hulga (ehk arvtelje kõikide punktide hulga) võimsus, nimetatakse kontiinumi võimsusega hulgaks. Teine neist võimsustest on suurem kui esimene, sest naturaalarvude hulk sisaldub reaalarvude hulgas ega ühti sellega, samal ajal, kui on teada, et kõiki reaalarve ei ole võimalik ükshaaval loendada. G. Cantor väljendas hüpoteesi, et vahepealse võimsusega hulki ei leidu, s. t. et loenduva hulga võimsusele järgneb vahetult kontiinumi võimsus. Teises sõnastuses on Cantori hüpotees väljendatav järgmiselt: iga reaalarvudest koostatud hulk on kas lõplik, loenduv või kontiinumi võimsusega. Kontiinumiprobleem seisneb kas selle hüpoteesi tõestamises või ümberlükkamises.

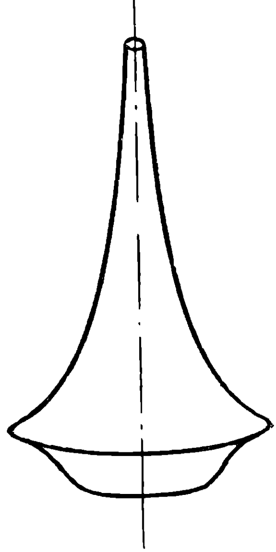
Austria matemaatikul K. Gödelil õnnestus 1930. aastail tõestada, et kontiinumi hüpoteesi ei ole võimalik ümber lükata, kui tugineda hulgateooria mõnele tuntud aksiomaatikale ja mitte võtta kasutusele loogika aksioome ja järeldamismeetodeid, mis erineksid tunduvalt praegu kasutatavaist. Sellega oli selgitatud ainult probleemi üks pool. Teise poolde tõi selgust 1963. aastal Ameerika noor matemaatik P. I. Cohen. Ta näitas, et samadel eeldustel ei ole kontiinumi hüpoteesi võimalik ka tõestada.

---

[3] Vt. ka Jevg. Gabovitš. Opereerimine hulkadega. — Matemaatika ja kaasaeg, III, lk. 12.

Siin on teatav analoogia geomeetria alustest tuntud olukorraga, kus, nagu teada, ei ole võimalik tõestada paralleelide teooria põhilauset (paralleelsuse aksioomi) [4]. Põhjuseks on see, et tavalise eukleidilise geomeetria kõrval esineb ka Lobatševski geomeetria, milles see lause ei kehti. Cohenil õnnestus selgitada, et täpselt samuti on võimalikud ka mitmesugused hulgateooriad. Tema avastus leidis kongressil väärilise tunnustuse Fieldsi preemia näol, tema ettekanne aga kujunes kongressi üheks populaarsemaks ja tuli esialgu ettenähtud auditooriumist üle kanda MRÜ aulasse.

Teine üsna pika ja huvitava ajalooga probleem, mis leidis kongressi eel lahenduse, on seotud täielike sadulpindade (ehk kõikjal negatiivse täiskõverusega pindade) tervikliku ehituse uurimisega. Kujutlegem siledat pinda, mis on iga oma punkti ümbruses kaksipidi kõver (s. t. sadulataolise ehitusega) ja millel ei ole äärt (s. t. mis igas suunas jätkub lõpmatult). Niisuguse pinna lihtsateks näideteks on ühekattene hüperboloid ja hüperboolne paraboloid. Mõlemad muutuvad punkti kaugenedes järjest «tasasemateks». Teisiti öeldes: nende negatiivne täiskõverus K läheneb punkti kaugenedes piirväärtusele null. Kuidas on aga lugu üldse selliste ilma ääreta ehk täielike sadulpindade puhul, kas neile kõigile on iseloomulik täiskõveruse lähenemine piirväärtusele null? Mida võib üldse öelda niisuguste pindade tervikliku ehituse kohta?



Pseudosfäär

Vastuseid nendele küsimustele tutvustas N. V. Jefimovi ettekanne kongressil. Probleemid ise pakuvad huvi mitmest seisukohast. Pinnad on teatavasti kahe muutuja funktsioonide «graafikuteks», need funktsioonid aga esinevad rakendustes sageli osatuletistega diferentsiaalvõrrandite lahenditena. Vaadeldud probleemidel on tihe seos nn. hüperboolsete ülesannetega osatuletistega diferentsiaalvõrrandite teoorias — ettekande pealkirjaks oligi «Pinnateooria hüperboolsed probleemid».

Ettekande sisu on huvitavalt seotud ka geomeetria aluste problemaatikaga. Nimelt on teada, et negatiivse konstantse kõve-

[4] Täpsemalt kõneldes tuleb öelda, et paralleelsuse aksioom on loogiliselt sõltumatu geomeetria ülejäänud aksioomidest, ta ei ole nendest loogiliselt järeldatav. Ka Coheni tulemus seisneb selles, et kontiinumi hüpotees on sõltumatu hulgateooria aksioomidest, eriti nn. Zermelo valikuaksioomist.

rusega pinnad on nendel kehtiva kahemõõtmelise geomeetria seisukohalt Lobatševski tasandi osad. Tuntuim sellistest pindadest on nn. pseudosfäär (vt. joon.). Sellel on aga terav nn. tagasipöördeserv, mistõttu ta pole kõikjal korrapäraselt sile. D. Hilbertil õnnestus 1901. a. näidata, et kolmemõõtmelises eukleidilises ruumis ei ole üldse olemas tervet Lobatševski tasandit realiseerivaid kõikjal korrapäraselt siledaid pindu, s. t. negatiivse konstantse kõverusega pindu. Kuidas on aga lugu siis, kui kõverus ei pruugi olla konstantne, vaid võib muutuda mõnesuguste negatiivsete tõkete vahel?

Ka nendele ja teistele analoogilistele küsimustele andsid ammendavad vastused MRÜ professori N. V. Jefimovi ja tema õpilaste viimased tööd.

Nende tulemusteks on näiteks järgmised teoreemid. **1.** Täieliku, kõikjal korrapäraselt sileda sadulpinna negatiivne täiskõverus K läheneb alati piirväärtusele null. **2.** Kui täieliku sadulpinna täiskõverus K on ülevalt tõkestatud negatiivse konstandiga, s. t. $K \leqslant -a^2$, $a = \text{const} \neq 0$, siis ei ole pind kõikjal korrapäraselt sile, s. t. tal on kas teravad servad või teravikupunktid. Viimase tulemusega on antud Hilberti teoreemi kaugeleulatuv üldistus.

Meenutame, et N. V. Jefimovit autasustati 1966. a. Lenini preemiaga.

Kolmas kaugemas minevikus püstitatud probleem, mille lahendus sai laiematele matemaatikute hulkadele teatavaks käesoleval kongressil, kuulub Fourier' ridade teooriasse. Siin kujunes käesoleva sajandi algul välja järgmine probleem: missugune on kõige aeglasemalt kasvav funktsioon $W(n)$ (nn. Weyli tegur), mille puhul arvrea

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)\, W(n) \tag{1}$$

koonduvusest järeldub Fourier' rea

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \tag{2}$$

koonduvus peaaegu kõikjal[5]. Aastail 1906—1913 näitasid Fatou, Weyl, Hobson, Plancherel ja Hardy, et vastavalt funktsioonid n, $n^{1/3}$, n^{ε} $(\varepsilon > 0)$, $\log^3 n$, $\log^2 n$ (kus iga järgnev kasvab aeglasemalt eelnevast) kujutavad Weyli tegureid. Lõpuks 1925. a. avaldasid nõukogude matemaatikud Kolmogorov ja Seliverstov ning neist sõltumatult Plessner oma tuntud teoreemi, mille järgi Weyli teguriks on eelmistest veel aeglasemalt kasvav funktsioon $\log n$. Järgnevad otsingud aeglasemalt kui $\log n$ kasvavate Weyli tegurite järgi ei andnud nelja aastakümne vältel mingeid

[5] s. t. kogu arvsirgel, välja arvatud teatav hulk mõõduga null (vt. Matemaatika ja kaasaeg, V, lk. 4).

tulemusi. Seda huvitavam oli kongressil kuulata rootsi matemaatiku Carlesoni eespool nimetatud ettekannet, milles muuhulgas näidati, et Weyli teguriks on kõige aeglasemalt kasvav funktsioon — konstantne funktsioon, näiteks $W(n) = 1$.

Riesz-Fischeri tuntud teoreemi põhjal on rea (1) koonduvus juhul $W(n) = 1$ tarvilik ja piisav selleks, et rida (2) oleks mingi integreeruva ruuduga funktsiooni Fourier' rida. Seega tõestas Carleson vene matemaatiku Luzini juba 1915. a. püstitatud hüpoteesi, mille järgi iga lõigul $[-\pi, \pi]$ integreeruva ruuduga funktsiooni Fourier' rida koondub peaaegu kõikjal.

* * *

Väliselt täiesti erinevaina näivad, isesugustest matemaatika osadest pärinevad teooriad on sageli osutunud nende sügavamal uurimisel ootamatult lähedasteks, tihedalt üksteisega seotuteks, kusjuures vastavate seoste väljaselgitamine on avaldanud eriti viljakat mõju nende teooriate edasisele arengule. Siinjuures on etendanud olulist osa algebralised ja topoloogilised meetodid. Näiteks osatuletistega võrrandite teooria kiire areng viimase aastakümne jooksul on tingitud topoloogiliste vektorruumide üldise teooria ja klassikalise analüüsi vastastikusest mõjust. Selle mõju tulemusena on niisugused rasked probleemid nagu kuitahes kõrget järku osatuletistega võrrandite lahendite olemasolu ja ainsuseprobleemid oma olulises osas käesolevaks ajaks juba lahendatud. Seepärast on arusaadav kongressist osavõtjate suur huvi nende ettekannete vastu, mis olid pühendatud matemaatika mitmesuguste teooriate vahelistele seostele. Siinkohal tuleb mainida Harish-Chandra (USA) eespool nimetatud ettekannet, kus üldistatud funktsioonide teooria kaudu ühinesid üheks tervikuks Lie algebrate teooria, harmooniline analüüs ja osatuletistega võrrandite teooria, eriti aga Fieldsi preemia laureaadi M. F. Atiyah väga populaarset ettekannet seosest elliptilist tüüpi osatuletistega diferentsiaalvõrrandite teooria ja lõplikumõõtmeliste lineaarsete rühmade algebralise topoloogia vahel. Viimane ettekanne (aga samuti ka mitmed teised, nagu näiteks M. Artini (USA) eespool nimetatud ettekanne) poleks saanud toimuda, kui poleks olnud Fieldsi preemia laureaadi A. Grothendiecki originaalseid teedrajavaid uurimusi algebralises topoloogias. Grothendiecki antud uute mõistete, meetodite ja probleemide hulk on niivõrd rikkalik, et see pakub ainet uurimiseks veel väga paljudele matemaatikutele. Grothendieck ise ei viibinud kahjuks kongressil, mistõttu tema töödest oli kongressil võimalus kuulda vaid tema kaasmaalase J. A. Dieudonné lühikesest ettekandest kongressi avaistungil.

Mitmeid matemaatika valdkondi siduv on ka diferentseeruvate dünaamiliste süsteemide teooria, mille viimaseid tulemusi tutvustas S. Smale'i (USA) eespool mainitud ettekanne. Dünaamilise süsteemi lihtsaimaks näiteks on ühes otspunktis vabalt kinnitatud pendel. Pendli teine otspunkt liigub siis sfääril, mille raadiuseks on pendli pikkus. Kõneldakse, et pendli kõikvõimalike asendite hulk on topoloogiliselt samaväärne kahemõõtmelise sfääriga. Olgu esimese pendli otsa kinnitatud vabalt veel teine samasugune pendel. Sellise nn. kaksikpendli asendite hulk on topoloogiliselt samaväärne juba teatava neljamõõtmelise diferentseeruva muutkonnaga, mis kujutab endast kahe sfääri nn. topoloogilist korrutist. Üldiselt on n lülist koosneva pendli asendite hulk teatav $2n$-mõõtmeline muutkond. Keerukamate mehaaniliste süsteemide asendite hulgad võivad olla veelgi huvitavamateks mitmemõõtmelisteks diferentseeruvateks muutkondadeks. Sellised muutkonnad ja süsteemide kui punktide liikumised nendes moodustavadki aine diferentseeruvate dünaamiliste süsteemide teooriale. Selles põimuvad huvitavalt algebraline topoloogia, matemaatilise analüüsi mitmemõõtmelised ülesanded (näiteks Stokes'i valemi üldistused), diferentsiaalvõrrandisüsteemide teooria jms.

Diferentseeruvaid muutkondi käsitlevad ka noore nõukogude matemaatiku S. P. Novikovi topoloogia-alased uurimused. Muutkondade iseloomustamisel on kasulikud nn. Pontrjagini klassid, mille võttis kasutusele nõukogude akadeemik L. S. Pontrjagin 1942. aastal. Kuni viimase ajani ei õnnestunud veel kellelgi tõestada, et need klassid on tõepoolest topoloogiliselt invariantsed, s. t. ei muutu muutkonna pideva deformatsiooni käigus. Tõestuse sai alles 1965. aastal S. P. Novikov. Oma tulemusi esitas ta kongressil.

* *

Suure tähelepanuga jälgiti kongressil ka neid ettekandeid, mis tutvustasid uusimaid saavutusi matemaatika rakenduslike probleemide alal.

Tõenäosusteooria ja matemaatilise statistika sektsioonis oli silmapaistev Novosibirski noore matemaatiku, hiljuti NSVL Teaduste Akadeemia korrespondentliikmeks valitud A. A. Borovkovi ettekanne. Selles kõneldi asümptootiliste meetodite kasutamisest massilise teenindamise teoorias, kus tegeldakse selliste juhuslike funktsioonidega nagu ajahetkeks t saabunud väljakutsete arv $v(t)$, rahuldatud väljakutsete arv $u(t)$, eitavalt vastatud väljakutsete arv $s(t)$ jne., uuritakse näiteks «eitava vastuse tõenäosust» $s(t)/v(t)$ jms. Autori poolt rakendatud meetodid avavad siin uusi võimalusi.

Juhtimissüsteemide matemaatiliste probleemide alal oli kongressil keskseks USA matemaatiku R. Bellmanni ettekanne. Seda täiendas L. A. Zadeh'i ettekanne mõningate mitteklassikaliste juhtimisprobleemide uurimisest USA-s. Samas sektsioonis esines nõukogude akadeemik V. M. Gluškov, kes kõneles mikroprogrammiliste juhtimissüsteemide optimiseerimise automaatilis-algebralistest aspektidest. Ettekandes kirjeldati uut algebralist lähenemisviisi algoritmide formaalsele teisendamisele, mis võimaldab lahendada mitmeid praktika seisukohast huvitavaid ülesandeid. Kui näiteks naturaalarvude korrutamise algoritm kirjutada lähtedefinitsiooni järgi arvu järjestikuse liitmisena iseendale, siis see viib automaatselt tavalise korrutamisealgoritmini.

Arvutusmatemaatika sektsioonis oli huvipakkuv nõukogude matemaatiku ja geofüüsiku A. H. Tihhonovi ettekanne nn. ebakorrektselt seatud ülesannetest. Looduseuurimisel esinevate sedalaadi ülesannete tüüpilise klassi moodustavad nn. «pöördülesanded». Vahetule mõõtmisele mittealluva nähtuse z puhul uuritakse sageli selle füüsikaliselt determineeritud ilmingut $u = Az$ (kus A on teatav täielikult pidev operaator). Sel puhul on üha suurem tähtsus ülesandel ammutada matemaatiliste meetodite abil eksperimendi tulemustest maksimaalselt täielik informatsioon, selle asemel et sama informatsioonihulgani jõuda eksperimenditehnika täiustamise teel. Autor on välja töötanud meetodid, mis võimaldavad saada siin stabiilseid lähendeid ja on kergesti realiseeritavad elektronarvutitel. Ta ise rakendab neid meetodeid maakoore sügavuste uurimisel Maa pinnalt saadavate signaalide järgi.

* *

Eraldi sektsioonis käsitleti kongressil matemaatika õpetamise küsimusi. Selle sektsiooni istungid koondasid sageli mitmetes eri suundades spetsialiseeruvaid matemaatikuid ühiste probleemide juurde.

Matemaatika õpetamise valdkonnas on tänapäeval sõlmküsimusteks koolimatemaatika moderniseerimise, õpetamismeetodite aktiviseerimise ning õpetajate kaadri ettevalmistamise ja kvalifikatsiooni tõstmise probleemid. Kongressi töös leidis esimene neist kõige suuremat tähelepanu.

Kongressil oli avatud matemaatika-alase kirjanduse näitus. Sellel oli teaduslike monograafiate kõrval eksponeeritud ka rida kooliraamatuid. Neist ilmnes, et hulga mõiste on paljudes riikides juba juurdunud koolimatemaatikasse. USA ja Inglismaa matemaatikaõpikuis on suurt tähelepanu omistatud tõenäosusteooria ja matemaatilise statistika küsimustele, samuti matemaatilise loogika elementide tutvustamisele.

Need nn. uue koolimatemaatika küsimuste õpetamisega seotud probleemid olidki kongressil laiaulatuslikuks arutlusobjektiks. Rahvusvahelise Matemaatika Õpetamise Komisjoni liikmed professorid W. Servais (Belgia), A. Krygowska (Poola) ja H.-C. Steiner (Saksa FV) tutvustasid saavutusi koolimatemaatika uuendamise alal ja raskusi, mis selle juures üles kerkivad. Üheks tõsisemaks puuduseks senises töös loeti eksperimendi hindamise aluste puudumist. Pole veel sugugi alati täiesti selge uute teemade käsitlemise vajalikkus ja otstarbekohasus. Lahendamist ootavad ka mitmed naaberainete, eriti füüsika õpetamisega seotud küsimused. Selgub, et füüsikud on mitmete koolimatemaatikas teostatavate uuenduste vastu. Nii näiteks loevad nad matemaatilise loogika elementide õpetamist puhtaks «skolastikaks».

Temperamentselt esines Belgia tuntud matemaatik G. Papy, kes tuliselt propageeris projektiivse geomeetria elementide toomist isegi juba algklassidesse. Siin kaheldi, kas lastele koolieelsest east tuttavaks saanud mõõtmised ei hakka seda takistama.

Eeskujulikult olid kongressiks ette valmistunud inglased. Professorid G. Matthews ja E. E. Briggs tutvustasid nn. Nuffieldi programmi, milles on matemaatika õpetamisel suur osatähtsus antud õpilaste individuaalsele ja eriti grupiviisilisele tööle, kus lapsed on ise avastajateks. Nad illustreerisid oma ettekandeid filmide demonstreerimisega ja jagasid kongressist osavõtjaile trükitud materjale.

Gaana matemaatikute esindaja E. M. Hartley tutvustas koolimatemaatika süstemaatilist uuendamist sealsetes koolides. Vaatamata sellele, et Gaanas on õpetajateks inglased, venelased, hollandlased, prantslased ja veel teistegi rahvaste esindajad, ei takista see neid ühiselt läbi viimast koolimatemaatika reformi. On juba välja töötatud uued õpikud ja nende juurde kuuluvad töövihikud ning 1970. aastaks viiakse üritus lõpule. Nende kogemusi on hakatud kasutama ka Nigeerias ja Lääne-Indias.

Saksa Demokraatlikus Vabariigis on asutud uute matemaatika kooliraamatute väljaandmisele. Professor Dieter Ilse tutvustas uut ratsionaalarvude käsitlust.

Erakordse tähelepanu osaliseks sai kongressil akadeemik A. N. Kolmogorovi ettekanne «Keskkooli matemaatikakursuse sisust». Selles peatuti üksikasjalikult diferentsiaal- ja integraalarvutuse algete käsitlemisel IX ja X klassis. Moskva ühes koolis toimus 1965/66. õ.-a. vastav eksperiment, millest A. N. Kolmogorov ise osa võttis. Ta rõhutas, et aine esitus peab olema näitlik ja seotud arvutuspraktika ja funktsioonide uurimisega ning et tuletise mõistet tuleb tutvustada juba küllalt varakult, et siis seda hiljem laialt kasutada. Laiad matemaatika-alased teadmised on tänapäeval vajalikud igale kultuursele inimesele sõltumata eriala valikust.

Nõukogude kooli uut matemaatika programmi tutvustas kongressil NSVL Pedagoogikateaduste Akadeemia matemaatika sektori juhataja G. G. Maslova. Vanemate klasside programm sisaldab siin järgmisi teemasid:

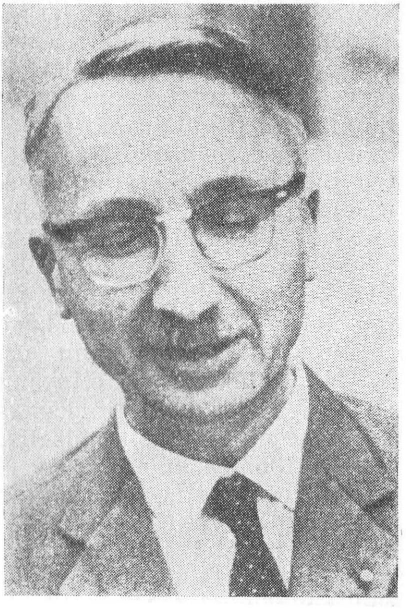
IX klass: võrrandid, võrratused, võrrandisüsteemid ja võrratusesüsteemid — 30 tundi; lõpmatud jadad ja piirväärtus — 20 tundi; pidevad funktsioonid, funktsiooni piirväärtus, tuletis ja integraal — 65 tundi, trigonomeetrilised funktsioonid, nende graafikud ja tuletised — 35 tundi; sirgete ja tasandite vastastikused asendid, koordinaadid ja vektorid ruumis — 70 tundi.

X klass: trigonomeetrilised funktsioonid (järg) — 40 tundi, kompleksarvud — 20 tundi, tõenäosusteooria algmed — 18 tundi, ülevaade elektronarvutitest — 7 tundi, hulktahukad ja pöördkehad — 50 tundi.

Moskva Riikliku Ülikooli õppejõudude tööst keskkooliõpilastega kõneles I. M. Jaglom, matemaatika eriklassidest S. I. Švartsburd ja algkoolide uutest matemaatika katseprogrammidest Novosibirskis A. A. Zõkov. Viimase väljatöötatud ja 1965/66. õ.-a. katsetatud programm on mõnevõrra erinev teistest nõukogude koolis katsetatavatest programmidest. Jelkonin, Davõdov ja Markuševitš lähtuvad oma programmis hulga mõistest, Zõkov asetab aga I klassis peatähelepanu võrrandite ja võrratuste lahendamisele.

Moskva Riikliku Ülikooli kogemustest matemaatika õpetamisel filoloogidele kõneles prof. J. A. Šihhanovitš. Struktuurse lingvistika osakonnas õpetatakse I semestril kursust «Sissejuhatus tänapäeva matemaatikasse» 6 tundi nädalas, II, III ja IV semestril on kavas matemaatiline analüüs, mida õpetatakse vastavalt 6, 4 ja 4 tundi nädalas, V ja VI semestril loetakse tõenäosusteooriat, matemaatilist statistikat ja informatsiooniteooriat 6 tundi nädalas, VII semestril on kavas algebra kursus 6 nädalatunniga ning VIII ja IX semestril matemaatilise loogika kursus 6 nädalatunniga.

Ülevaatliku ettekande matemaatika õpetamise reformimistaotlustest XIX ja XX sajandil andis professor I. K. Andronov.



Henri Cartan — Rahvusvahelise Matemaatika Assotsiatsiooni uus president

* * *

Kongressi töö jõudis lõpule 26. augustil. Pidulik lõpuistung, mille avas kongressi president akad. I. G. Petrovski, toimus MRÜ aulas. Kokkuvõtete tegemiseks kongressi käigust võtsid sõna professorid G. de Rham (Šveits), L. Ilijev (Bulgaaria) ja Ch. Morrey (USA). Nad märkisid tunnustavalt kongressi head organiseerimist ning väljendasid kõigi osavõtjate nimel tänu orgkomiteele ja Nõukogude valitsusele, kellelt saadud suur materiaalne toetus kongressile oli välisriikidest tulnud osavõtjatele üllatuseks. Rahvusvahelise Matemaatika Assotsiatsiooni senine president G. de Rham tegi teatavaks assotsiatsiooni uue juhatuse valimise tulemused. Uueks presidendiks valiti Pariisi ülikooli professor Henri Cartan, asepresidentideks NSV Liidu akadeemik M. A. Lavrentjev ja professor D. Montgomery USA-st. Seejärel võttis sõna prantsuse matemaatikute esindaja J. Dieudonné, kes kutsus kogu maailma matemaatikuid järgmisele kongressile 1970. a. Prantsusmaale Nizzasse. Auditoorium võttis selle kutse vastu aplausiga. Kongressi president I. G. Petrovski lõpetas kongressi ja soovis kõikidele osavõtjatele uusi edusamme matemaatika arendamisel.

Pidulikule lõpetamisele järgnes vastuvõtt Kremli Kongresside Palee vastuvõtusaalis, kus avanes suurepärane võimalus viimasteks vestlusteks ja lahkumissõnadeks, kus meenutati nii huvitavaid kongressiistungeid kui ka rohkearvulisi ekskursioone, kontserte ja teisi vaba aja sisustamiseks organiseeritud üritusi.

G. Kangro, Ü. Lumiste, O. Prinits, E. Tiit

NSVL TEADUSTE AKADEEMIA PRESIDENDI M. V. KELDÕŠI AVASÕNA KONGRESSIL [1]

Matemaatika, olles vanim kõikidest teadustest, jääb samal ajal igavesti nooreks tormiliselt arenevaks teaduseks, mis kogu aeg laiendab oma tunnetuspiire, üha sügavamalt arendab oma seoseid mitte üksnes loodusteadustega, vaid ka inimtegevuse kõige mitmekesisemate aladega. Olen seisukohal, et matemaatiliste teooriate väärtus on seda suurem, mida tihedamalt on nende juured seotud nähtustega selles maailmas, milles me elame ja mida kõrgema abstraktsiooniastme ja mida üldisema vaatekoha me samal ajal saavutame. Teooria edu sõltub paljus sellest, kas meil õnnestub leida uuritavale nähtusele adekvaatne üldistuse tase ja abstraktsiooniaste.

Teooria väärtus määratakse sellega, kuivõrd tema üldised tulemused võimaldavad mõista konkreetseid nähtusi ja lahendada konkreetseid ülesandeid. Üldised matemaatilised teooriad lubavad meid sügavamalt mõista nähtuste omavahelisi seoseid. Matemaatiliste meetodite kasutuselevõtt korraldab ümber teaduse-

---

[1] «Неделя», № 34, 1966, lk. 8.

alasid ja seab nad mitte ainult kõrgemale loogilise mõtlemise astmele, vaid avab ka uusi võimalusi, uusi ülesandeid, võimaldab uut moodi läheneda nähtusele. On küllalt meenutada, milliseid revolutsioonilisi põhimõttelisi nihkeid loodusteaduste arengus kutsusid esile lõpmata väikeste suuruste analüüs, tõnäosusteooria, operaatorite teooria ja lõpuks juba käesoleval ajal tormiliselt arenev loogiliste protsesside lahtimõtestamine.

Matemaatika selliste abstraktsete alade, nagu hulgateooria ja topoloogia, algebra, funktsionaalanalüüsi ja teiste hiljuti tekkinud suundade areng viis mitte üksnes erakordse iluga teooriate tekkimiseni, vaid ka uute võimsate meetodite loomiseni kogu matemaatikas. Mulle näib, et me elame ajastul, mil matemaatiline meetod erilise jõuga rajab endale teed üha uutesse teadusaladesse. Füüsika kõrval omandab matemaatiline mõtlemisviis järjest suuremat tähendust keemias, bioloogias, geoloogias, ta tungib laialt ühiskonnateadustesse ja esmajoones majandusteadusse. Loogiliste protsesside ja operatsiooniteooria aluste uurimine, diskreetse matemaatika meetodid, elektronarvutusseadmete loomine valmistasid ette pinna uueks grandioosseks teaduslik-tehniliseks revolutsiooniks inimkonna kogu elutegevuses, tõusmiseks uuele astmele looduse ja elu paljude protsesside mõistmises ja nende protsesside automatiseerimises, mida hilise ajani loeti inimese intellektuaalse tegevuse aladeks, aga samuti nende matemaatiliste protsesside realiseerimises, mida me lugesime teostatavaiks ainult abstraktses mõtlemises.

Matemaatika valdkond on muutunud niivõrd laiaks, et matemaatikud kõnelevad mitte ainult erinevate rahvaste keeltes, vaid ka erinevates matemaatilistes keeltes, ning nende keel on veel kättesaadamatu teiste erialade paljudele teadlastele. Kuid just nimelt matemaatilise meetodi avaruse ja jõu poolest on kongress suure tähtsusega kogu teaduse jaoks ja inimkonna kultuuri arengu seisukohalt.

NÕUKOGUDE AKADEEMIKUTE MÕTTEAVALDUSI KONGRESSI PÄEVILT

Käesoleva kongressi iseloomulikuks jooneks on ka «puhta» matemaatika seostumine rakenduslikuga.

(L. V. Kantorovitš, «Правда», 22 VIII 1966)

Teadusliku progressi üks iseloomulikumaid jooni seisneb kaasaegse matemaatika ideede ja meetodite kiires tungimises teaduse, tehnika ja rahvamajanduse kõige erinevamatesse harudesse. Teadus on ühtne, võib rääkida ainult teadusest endast ning tema võimalikest rakendustest.

(M. A. Leontjev ja N. N. Bogoljubov, «Правда», 15. VIII 1966)

NSVL TA president M. Keldõš avab kongressi.
Presiidiumis (temast paremale): G. de Rham, I. G. Petrovski, K. N. Rudnev ja M. A. Lavrentjev

Pilk kongressisaali avaistungil

Matemaatikat ei tohi vaadelda moodsa meelelahutusena ega ka imerohuna kõigi hädade vastu, teda ei või rakendada ilma tema olemust ja võimalusi piisavalt tundmata.

(I. G. Petrovski «Известия», 16. VIII 1966)

Kongressi põhiliseks ülesandeks on — aidata matemaatikutel leida matemaatikas ühist keelt.

(A. D. Aleksandrov, «Неделя», № 34, 1966)

KEELEPROBLEEMID

Akadeemik I. G. Petrovski märkis kongressi avamisel: «Matemaatikute kongressidel on ka oma traditsioonid. Üks neist on, et kongressil peetavaid matemaatika-alaseid ettekandeid ei tõlgita. Sümbolite, valemite ja võrrandite keel ühendab kogu maailma matemaatikuid.»

Kongressil oli neli ametlikku keelt — vene, inglise, prantsuse ja saksa — ning iga ettekandja võis oma valiku järgi ühes neist keeltest esitada oma ettekande teesid ja (kas samas või erinevas) ka esineda. Praktiseeriti ka kahes keeles esinemist — kõneldi ühes keeles ning samal ajal kirjutati tahvlile selgitusi valemite juurde teises keeles, diskussioone aga peeti sageli mitmes keeles korraga.

Paljud välismaade matemaatikud on nõukogude kirjanduse jälgimiseks õppinud selgeks vene keele ning kasutasid seda isegi kongressil esinemiseks. Seevastu aga mitmed nõukogude teadlased esitasid oma ettekanded kongressi mõnes teises keeles (või jagasid kuulajaile rotaprindil paljundatud võõrkeelseid tekste).

* * *

Ei tule siiski arvata, et «sümbolite, valemite ja võrrandite keel» on täiesti ühtne. Ka siin on tegemist terve rea erinevate «keeltega», mis vastavad matemaatika erinevatele harudele. Mitte asjata pole matemaatikute seas käibel anekdoot, mille kohaselt kaks matemaatikut arutasid omavahel mingit teaduslikku probleemi teineteist suurepäraselt mõistes — seni, kuni avastasid, et teine räägib samades sümbolites hoopis teise valdkonda kuuluvatest asjadest. Esineb aga ka vastupidiseid olukordi: sisuliselt samade nähtuste kirjeldused erinevates «matemaatilistes keeltes» on niivõrd erinevad, et samastamine ei olegi sugugi lihtne. Matemaatika rakendusalade avardumisega tekib uusi matemaatilisi keeli üha juurde: on ju mingi teadusharu matematiseerimisel esimeseks sammuks talle vastava «matemaatilise keele» loomine.

KONGRESSI PUDEMEID

Kongressi istungeist vaba aja sisustamiseks oli organiseeritud mitmesuguseid üritusi: ekskursioone tutvumiseks Moskva linnaga ja muuseumidega, laevasõit Moskva—Volga kanalil, lõbusõite «Raketal» mööda Moskva jõge jms. Nende, nn. «istungiväliste» ürituste «naelaks» kujunes kahtlemata jalgpallivõistlus nõukogude matemaatikute ja teiste maade esindajate vahel, mis lõppes nõukogude matemaatikute võiduga 5 : 2.

* * *

Suurt elevust tekitas kongressil salapärane N. Bourbaki, kelle nimi figureeris Prantsusmaalt kongressile sõitnud matemaatikute nimekirjas. Orgkomiteele laekunud ankeedis oli ta teatanud endast: perekonnanimi — Bourbaki, nimi — Nicolas, elukutse — professor. Kui avaistungil ettekandeks värske Fieldsi preemia laureaadi A. Grothendiecki uurimistulemustest astus tribüünile J. Dieudonné, kes teatavasti on üks Bourbaki rühma asutajaid,[1] tekkis istungitesaalis lõbus elevus. Mõnda aega oli MRÜ peahoone seinal kuulutus, kus paluti prof N. Bourbakid ilmuda intervjuuks pressiklubisse. Pole vist tarvis lisada, et Bourbaki säilitas oma saladuse — intervjuud ei toimunud asjaosalise mitteilmumise tõttu.

* * *

Suure hoolikuse ja täpsusega teenindas kongressi liikmeid nn. ekspressirühm. Igal hommikul oli MRÜ peahoone vestibüülis laual mitu virna värske informatsioonibülletääni numbreid, mis operatiivselt ja asjalikult teatasid muudatustest ja täiendustest programmis, uute liikmete saabumisest kongressile jms. Suur oli esialgu lugejate hämmeldus, kui nad kongressi viimasel päeval ilmunud bülletäänist nr. 10 lugesid:

«Professor D. H. Integralsky kahetunnilise ettekande nimetuses (vt. bülletään nr. 5, lk. 13) esineb trükiviga: «Hölderi tingimust rahuldavad triviaalsete Pontrjagini kordajatega pseudoriimanlikud kvaasikompaktsed poollineaarsed mitteelliptilised globaalsed rajaväärtuse ülesanded» asemel tuleb lugeda «Triviaalsete Pontrjagini kordajatega Hölderi tingimust rahuldavad pseudoriimanlikud kvaasikompaktsed poollineaarsed mitteelliptilised globaalsed rajaväärtuse ülesanded». Me oleme väga tänulikud professor H. D. Differentialskyle, kes juhtis meie tähelepanu sellele eksitusele.

7. sektsiooni teaduslik sekretär teatab, et professor D. H. Integralsky ettekanne kantakse üle 8. sektsiooni.

8. sektsiooni teaduslik sekretär teatab, et professor D. H. Integralsky ettekanne kantakse üle 9. sektsiooni...

13. sektsiooni teaduslik sekretär teatab, et professor D. H. Integralsky ettekanne kantakse üle 14. sektsiooni.

14. sektsiooni teaduslik sekretär teatab, et professor D. H. Integralsky ettekanne kantakse üle 7. sektsiooni.»

Bülletäänis nr. 5 oli aga ainult 6 lehekülge! Asjasse tõid mõnevõrra selgust järgnevad read:

«Kallid kongressist osavõtjad!

Teil oli võimalik veenduda meie informatsioonibülletäänide laitmatus kvaliteedis. Kõik teie ja meie poolt märgatud ja märkamata jäänud eksitused ja trükivead olid mõeldud selleks, et kutsuda esile teie muigeid, ja selleks, et meil oleks millegagi täita bülletäänide järgmisi numbreid.

Ekspressirühm»

---

[1] Vt. Matemaatika ja kaasaeg, IX, lk. 3—11.

RUUMI MÕISTE GEOMEETRIAS[1]

Ü. Lumiste

Tee uue geomeetriani

Teaduse areng on pidev ja lõppematu protsess. Ei ole veel olnud teooriat, mis oleks võinud pretendeerida absoluutse tõe saavutamisele. Juurdlev mõistus ja teravmeelne eksperiment on varem või hiljem ikkagi leidnud lähtekohti üldisemale ja eelmist ainult piirjuhuna haaravale teooriale, mis kajastab sügavamalt asjade olemust.

Heaks näiteks selle kohta on ruumi geomeetrilise struktuuri tundmaõppimise ajalugu. Antiik-Kreekast pärit eukleidilise geomeetria ainulaadne loogiline rangus ning hiilgavad rakendused matemaatilises loodusteaduses koos idealistlikus filosoofias juba dogmaks muudetud teesiga selle geomeetria ainuvõimalikkusest näisid täielikult sulgevat tee uutele põhimõttelistele lahendustele. Kõik paistis olevat klassikaliselt selge ja geomeetria areng näis kulgevat ainult uute meetodite arendamise ja üksikdetailidesse suurema süvenemise suunas.

Kuid nii oli see ainult pealiskaudsel vaatlemisel. Tugevama kriitilise meelega uurijad, kes süvenesid sügavamalt Eukleidese geomeetriasse, leidsid mõndagi, mille üle tuli veel järele mõelda. Ka sellel antiikaja sünnitatud titaanil oli oma «Achilleuse kand», kus ta oli kaitsetu kriitika vastu.

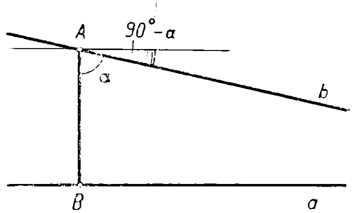
Juba V sajandi kreeka õpetlane, üks Eukleidese silmapaistvamaid kommentaatoreid Proklos juhtis tähelepanu sellele, et Eukleidese aksioomid ei ole oma sisult ja haaratavate mõistete mahult samaväärsed. Samal ajal, kui esimeses neljas aksioomis on igaühes juttu ainult paarist mõistest, kõneleb viies aksioom korraga kolmest sirgest, kahest nurgast ja nende summa võrdlemisest kolmanda nurgaga. Pealegi on aksioomi sõnastus peaaegu sama pikk kui eelmiste omad kokku. Proklos juhtis tähelepanu ka sellele, et viiendat aksioomi, erinevalt eelnevast neljast, ei saa lugeda meie katsete ja kogemuste paratamatuks järelduseks.

Viimases veendumiseks võime arutleda järgmisel viisil. Langetame sirgele a ristlõigu AB pikkusega näiteks 10 cm ja tõm-

[1] Järg, algus vt. Matemaatika ja kaasaeg, XI, lk. 3—9.

bame läbi punkti A samal tasandil sirge b, mis moodustab selle lõiguga nurga α (joon. 4). Eukleidese viies aksioom on samaväärne väitega, et ainus võimalus, mil sirge b ei lõika sirget a, on juht $\alpha = 90°$ — niipea kui $\alpha < 90°$, peavad sirged a ja b lõikuma.

Meie igapäevased kogemused kinnitavad, et küllalt suure vahe $90° - \alpha$ korral a ja b tõepoolest lõikuvad. Seda võib kontrollida otseselt näiteks joonisel. Mida aga teha siis, kui $\alpha = 89°59'59''$, s. t. kui vahe $90° - \alpha$ on ainult $1''$? Meie kogemused ütlevad sel korral üles. Me jääme uskuma, et kui a ja b lõikuvad, siis kindlasti väga kaugel, arvatavasti mitte enne kui 20 km kaugusel [2]. Kas me aga võime lõikumises absoluutselt kindlad olla? Selgust asjasse tooks eksperiment, küsimine looduselt endalt. Antud juhul oleks seda vahest võimalik teha optiliste seadmete abil. Kuid ka eksperiment ei lahendaks veel küsimust lõplikult. Igal eksperimendil on oma piirid (mida teha näiteks vahe $90° - \alpha$ veelgi väiksemate väärtuste korral?), pealegi on eksperiment alati seotud mõõtmisveaga, mis võib «neelata» uuritava nähtuse üliväikesed efektid. Kõige lõpuks peaksime ikkagi tunnistama: absoluutset garantiid selle kohta, et sirged a ja b lõikuvad vahe $90° - \alpha$ iga nullist erineva väärtuse, kasvõi kuitahes väikese puhul, me siiski anda ei saa.



Joonis 4.

Lugeja võib nüüd teatavas hämmelduses küsida, kas siis mittelõikumine on sel puhul üldse mõeldav, kas ei peaks sirgete lõikumine olema niisugusel juhul järeldatav juba geomeetria kõige elementaarsematest põhitõdedest? Täpselt samuti on enne teda küsinud väga paljud uurijad küll asjaarmastajate, küll eriteadlaste seast. Moodustab ju see küsimus omal ajal kuulsa «V aksioomi probleemi» ehk «paralleelsirgete probleemi» sisu: tõestada, et punkti A läbib üksainus sirge, mis on sirgega a samal tasandil, kuid ei lõika teda. Üle kahe tuhande aasta köitis see probleem matemaatikute tähelepanu. On esitatud arvukalt «tõestusi», mille saatus oli kõigil üks — ikka selgus, et igaüks neist sisaldas loogilise vea. Kui ei olnud just tegemist mõne ränga eksitusega, siis oli viga alati selles, et tõestamisel võeti aluseks mingi niisugune lause, mille põhjendamisel ei saa kuidagi hakkama ilma tõestatava väite kasutamiseta. Sellesse lõksu, mida tunti juba antiikajal *circulus vitiosus*'ena («nõiaringina»), langesid

[2] Tõepoolest, üliväikeste nurkade puhul on tangens ligikaudu sama suur kui nurga radiaanmõõt (s. t. kui $\varphi \ll 0$, siis $\tan \varphi \approx \varphi$); et nurga $1''$ radiaanmõõt x määratakse võrdest $1 : (360 \cdot 60^2) = x : \pi$, siis $\cot 1'' \approx 206000$.

asjaarmastajate kõrval ka sellised tuntud matemaatikud nagu J. Wallis ja A. M. Legendre [3].

Ainus, mida niisugused «tõestused» on andnud matemaatikale, on rida lauseid, millega võib aksioomide seas asendada Eukleidese viienda aksioomi, ilma et kogu järelduste süsteem selle all vähimalgi määral kannataks. A. M. Legendre'i töödest (18. saj. lõpp) selgub näiteks, et viies aksioom on asendatav lausega, mille kohaselt kolmnurga sisenurkade summa on võrdne sirgnurgaga [4].

Esimene matemaatik, kes tunnistas ausalt, et kõik senised tõestuskatsed ei ole ihaldatud eesmärgile sammugi lähemale viinud, oli J. H. Lambert (1728—1777). Ta oli ka üks esimesi, kes püüdis probleemile lahendust leida vastuväitelise tõestamise teel. Lambert võttis eelduseks tõestatavale väitele täpselt vastupidise lause: «kolmnurga sisenurkade summa erineb sirgnurgast» ning hakkas tegema järeldusi geomeetria algtõdedest ja sellest lausest. Kui nende järelduste süsteemis võiks leida vasturääkivuse, siis saaks sellest järeldada, et eelduseks võetud lause ei ole algtõdedega kooskõlas ning tuleks kõrvale jätta — probleem oleks lahendatud. Lambertil tuli siin, samuti nagu Saccheril enne teda, tegelda kolme juhuga: sisenurkade summa kolmnurgas on kas võrdne, suurem või väiksem sirgnurgast. Teisel juhul ta jõudis kiiresti vasturääkivuseni üsna elementaarse lausega: murdjoon on pikem kui tema otspunkte ühendav lõik [5]. Kolmandal juhul ei õnnestunud Lambertil kuidagi vasturääkivust leida, kuigi ta arendas välja küllalt ulatusliku järelduste süsteemi. Sellega seoses kirjutas Lambert 1766. a. kaugelenägevalt: «Mulle näib tähelepanuväärsena, et teine hüpotees leiab kinnitust, kui tasandilised kolmnurgad asendada sfäärilistega. Sellest tuleks mul peaaegu

---

[3] Mõningaid sellistest «tõestustest», samuti täiendavaid andmeid paralleelsirgete probleemi kohta, võib lugeja leida K. Ariva artiklist «Lobatševski geomeetria», mis avaldatakse käesolevas kogumikus lk. 73—90. *Toim.*

[4] Matemaatika-ajaloolaste hilisemad uurimused on näidanud, et see üpris oluline fakt oli teada õieti juba keskajal mõnedele Kesk-Aasia ja Lähis-Ida matemaatikutele (Omar Haijam XI saj., Nasireddin XIII saj.), hiljem aga ka Euroopas enne Legendre'it G. Saccherile ja J. H. Lambertile. Huvitav on märkida, et seos viienda aksioomi ja kolmnurga sisenurkade summat käsitleva lause vahel ilmneb ka Tartu gümnaasiumiõpetaja, siinse ülikooli kasvandiku P. C. M. Sokolowsky 1830. a. Tartus avaldatud brošüüris *«Theorie der Parallellinien zuerst geometrisch begründet»*. Sokolowsky enda arvates tõestab Eukleidese viienda aksioomi, kuid võtab, ise seda märkamata, aluseks järgmise lause (mis seega kujuneb tal faktiliselt uueks tõestatavat väidet asendavaks aksioomiks): «kui kolmnurga $\triangle ABC$ külje AB pikendid kanda kolmandasse tippu C, säilitades nende nurgad külgedega AC ja BC, siis kummastki neist saab teise pikend tippu C läbival sirgel». Kerge on näha, et see lause on tõepoolest samaväärne väitega, et kolmnurga sisenurkade summa on sirgnurk.

[5] Märkigem võrdluseks, et sfääril, kus poolringjoonest pikem suurringjoone kaar ei tarvitse olla lühem kui tema otspunkte ühendav suurringjoonte kaartest koosnev murdjoon (s. t. kus see lause ei kehti), on kolmnurga sisenurkade summa alati suurem kui sirgnurk.

teha järeldus, et kolmas hüpotees leiab aset mingil imaginaarsel sfääril. Igal juhul peab leiduma põhjus, miks ta ei ole tasandil ümberlükatav sama kergesti kui teine hüpotees».

Samasugustele veel mitte küllalt selgesti põhjendatud ja üpris kahtleval viisil väljendatud seisukohtadele jõudsid hiljem veel mitmed teisedki autorid: F. K. Schweikart, F. A. Taurinus jt.

Esimeseks teadlaseks, kes täie selgusega tunnetas, et niisuguse vastuväitelise meetodi puhul saadav järelduste süsteem on täpselt sama heas loogilises kooskõlas nagu eukleidiline geomeetria ja on põhimõtteliselt uus geomeetria, oli üks kõigi aegade suuremaid matemaatikuid — C. Fr. Gauss. Ta andis uuele geomeetriale ka nime — mitteeukleidiline. Kuid Gauss ei ole oma avastusest ridagi avaldanud; kõik, mis me sellest teame, koosneb üksikutest fragmentidest tema erakirjades ja päeviku lehekülgedel. Gauss kartis, nagu ta ise väljendab, «bööotlaste kisa» nõmedate kriitikute hulgast, kelledele ainuõigeks pühitsetud eukleidiline geomeetria näis olevat kogu geomeetria algus ja lõpp.

Uue geomeetria süstemaatiline arendamine ja publitseerimine on kahe noore matemaatiku teene. Üheks on Kaasani ülikooli kasvandik ja hilisem professor ning rektor Nikolai Lobatševski, teiseks noor ungari ohvitser sõjaväeinsener Janoš Bolyai. Nad mõlemad jõudsid uue geomeetria olemasolu tunnetamiseni nii Gaussist kui ka teineteisest sõltumatult ja ligikaudu üheaegselt ning arendasid selle välja — üks Kaasanis, teine Temešvaris — peaaegu samas ulatuses nagu kreeklased omal ajal eukleidilise geomeetria. Avaldamise prioriteet kuulub N. Lobatševskile, kes tegi esimese ettekande oma avastusest juba 1826. aastal, esimese artikli aga publitseeris 1829. aastal. J. Bolyai kulutas töö viimistlemisele rohkem aega ja nii ilmus see alles kolme aasta pärast, 1832. aastal. Paraku ei leidnud kummagi noore uurija tööd matemaatika avalikkuses väärilist hindamist. Isegi Gauss, kellele Bolyai teos saadeti, piirdus vaid märkusega erakirjas, et kõik see oli talle juba varem teada. Nii jäigi Bolyai töö tema viimaseks avaldatud uurimuseks. Ka Lobatševskil tuli kokku puutuda kolleegide ükskõiksuse ja asjatundmatusega, mis ulatus koguni naeruvääristava pamfletini vene ajakirjanduses, kuid oma avastuse eest seisis ta mehisemalt kui Bolyai. Ta arendas uut geomeetriat mitmetes artiklites ja raamatutes ning, mis on eriti väärtuslik, püüdis avada ka selle filosoofilist ja rakenduslikku tähendust.

Lobatševski mõistis täie selgusega, et küsimust ruumi geomeetrilisest struktuurist saab otsustada ainult eksperimendi sooritamise teel, aga mitte mingite aprioorsete otsustuste omaksvõtmisega. Kui loogilise kooskõla poolest seisab eukleidilise geomeetria kõrval samaväärsena veel teine geomeetria, siis võib ainult katse selgitada, kumb neist vastab paremini reaalse ruumi struktuurile kosmilises ulatuses.

Arusaamatuste vältimiseks tuleb märkida järgmist. Lobatševski geomeetria ei ole sugugi eukleidilise geomeetria täielik eitus, ta haarab selle tegelikult piirjuhuna. Kui eukleidilises ruumis on kolmnurga sisenurkade summa alati 180°, siis Lobatševski geomeetrias on see summa väiksem, kuid muutuv suurus ja mida väiksem on kolmnurk, seda lähedasem on ta piirväärtusele 180°. Siit võib järeldada, et väikestes piirkondades on Lobatševski geomeetria lähenduseks tavaline eukleidiline geomeetria. Olukord on samasugune nagu Maa pinna plaanistamisel, kus me väikestes piirkondades loeme tasasele paberilehele joonestatud plaani peaaegu täpselt vastavaks tegelikkusele, kuigi teame, et Maa pinna plaanistatav osa on tegelikult suure kerapinna tükk. Kui me sellest, et reaalse ruumi teatava suurusega piirkonna struktuuri kirjeldab küllalt suure täpsusega eukleidiline geomeetria, järeldaksime, et kogu kosmiline ruum kujutab endast geomeetrilise struktuuri poolest eukleidilist ruumi, siis me teeksime sama vea, mis muistsed rahvad, kes vaatevälja näilisest tasasusest järeldasid, et kogu Maa on lame ketas.

Lobatševski taipas seda kõike väga hästi. Ta tegi huvitava katse avastada mitteeukleidilisi efekte reaalse ruumi kosmilise ulatusega piirkondade struktuuris. Kasutades tolle aja astronoomia andmeid, arvutas ta välja sisenurgad grandioosses kolmnurgas, mille ühe külje moodustab Maa orbiidi diameeter ja kolmandaks tipuks on kinnistäht Vega. Erinevust eukleidilisest geomeetriast, mis oleks ületanud tolleaegsest vaatlustehnikast tingitud üsna suuri mõõtmisvigu, ta paraku ei leidnud.

Üldse jäi Lobatševski geomeetria autori eluajal siiski veel abstraktseks lausete süsteemiks, mis selles ulatuses, nagu teda oli jõutud välja arendada, oli heas loogilises kooskõlas, kuid mille reaalne tähendus jäi suures osas veel mõistatuseks — ta oli veel «kujuteldav geomeetria», nagu teda Lobatševski oma esimestes töödes ka nimetas. Miski ei andnud veel kindlat garantiid, et varem või hiljem selles süsteemis siiski ei teki mingi vasturääkivus, mis viiks süsteemi kokkuvarisemiseni ja jätaks ikkagi ainuõigeks eukleidilise geomeetria.

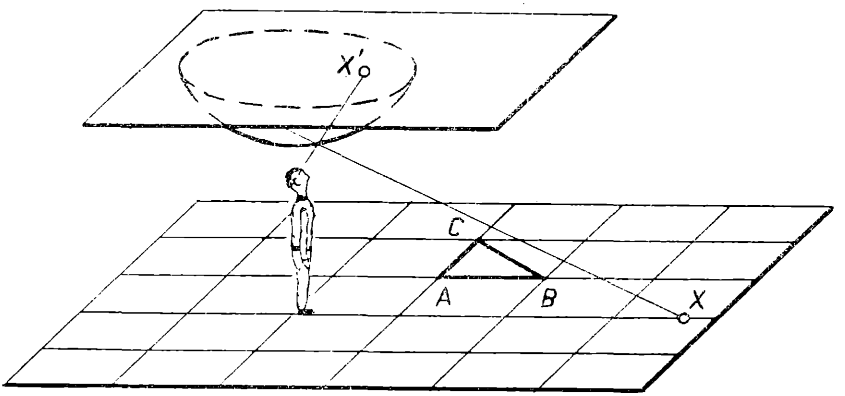
Vastus sellele Lobatševski ees seisnud sügavale probleemile saadi alles hiljem, kui õnnestus leida eukleidilise geomeetria baasil mudelid Lobatševski geomeetriale. Alles siis sai lõplikult selgeks, et vasturääkivus Lobatševski geomeetrias tooks endaga kaasa vasturääkivuse ka eukleidilises geomeetrias, mistõttu loogilise vasturääkivusetuse seisukohalt on mõlemad geomeetriad ühesuguses olukorras. Kui on kooskõlaline eukleidiline geomeetria, siis on tema kõrval samavõrra kooskõlaline ka Lobatševski geomeetria, haarates pealegi teda kui piirjuhtu. Sellega oli ühtlasi antud lõplik lahendus paralleelsirgete probleemile: Eukleidese viies aksioom (või näiteks kolmnurga sisenurkade summa võrdumine sirgnurgaga igas, ka kuitahes suures kolmnurgas) ei ole järeldatav geomeetria lihtsamatest põhitõdedest. Eksisteerib selline geomeetriliste lausete deduktiivne süsteem — Lobatševski geomeetria, milles põhitõed on säilinud, kuid Eukleidese viies aksioom ei kehti (s. t. kolmnurga sisenurkade summa on väiksem kui sirgnurk).

Peatumata lähemalt Lobatševski geomeetria esimeste mudelite saamislool tutvustame allpool lühidalt ühte neist, mida tuntakse Beltrami-Kleini mudelina. Ühtlasi saab siis selgeks, mida uut toob õieti endaga kaasa Lobatševski geomeetria, võrreldes eukleidilise geomeetriaga. Enne seda on aga vaja kasvõi põgusalt tutvustada geomeetria mudeli mõistet üldse.

«Maailm kõverpeeglis»

Et paremini aru saada geomeetria mudeli mõistest, vaatleme esialgu tavalise eukleidilise planimeetria mudeleid.

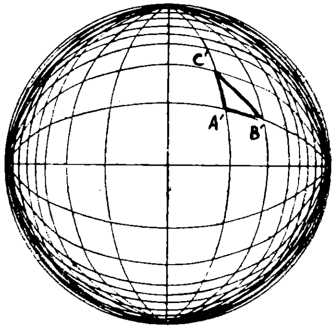
Kujutleme tasandil α seisvat vaatlejat, kes jälgib kõike tasandil olevat ja toimuvat tema pea kohal olevast suurest sfäärilisest kumerpeeglist, mille olemasolust ta ise ei ole teadlik.



Joonis 5.

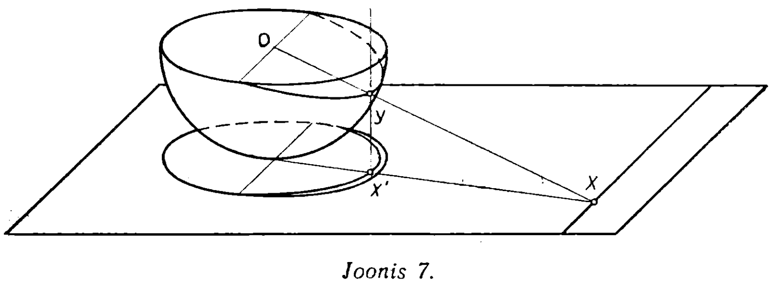
Tasandil asuva punkti X kujutis satub tema silma alles pärast peegeldumist, mistõttu vaatleja näeb selle asemel punkti X' teataval kujuteldaval rõhttasandil β (joon. 5). Tasandi α kõiki punkte näeb ta punktidena teatavas ringis R, mille äärjoon C koosneb tasandi α «lõpmata kaugete» punktide kujutistest (s. t. kui punkt X tasandil α kaugeneb teatavas suunas, siis tema kujutis X' läheneb piiramatult sellele ringjoonele C). Sirgeid tasandil α, mis läbivad vaatleja toetuspunkti O, näeb ta ringjoone diameetritena, kõiki teisi selle tasandi sirgeid aga teatavate kõverjoontena, mis ühendavad ringjoone C diametraalselt vastupidiseid punkte. Joonisel 6 on kujutatud pilt, mille saab vaatleja tasandist α ja sellele tasandile tõmmatud sirgete ortogonaalsest võrgust. Tugevama joonega on eraldatud tasandil α asuva täisnurkse kolmnurga $\triangle ABC$ kujutis $\triangle A'B'C'$.

Sellise näitliku kujutluse võib võtta aluseks eukleidilise planimeetria teatava mudeli koostamisel ringi R sees. Sel puhul tõlgendatakse eukleidilist tasandit kui ringi R sees olevate punktide hulka, sirgeid tasandil nende ülalmainitud viisil saadud kujutistena — teatavate kindlate joontena ringis R, mis ühendavad selle diameetrite otspunkte. On selge, et sellised mõisted nagu kahe punkti vaheline kaugus, kahe sirge vaheline nurk jt. on tasandi α tavalise eukleidilise meetrikaga võrreldes tunduvalt moonutunud. Nende tegeliku suuruse leidmiseks mudelilt tuleb kas otseselt või kaudselt taastada vastava «lõigu» või «nurga» originaal lähtetasandil α ning leida selle originaali pikkus või suurus. Nii näiteks on iga kaks joonisel 6 kujutatud lõikuvat «sirget» omavahel risti ning iga kahe mittelõikuva «sirge» vahelised «lõigud» nendel «ristsirgetel» omavahel võrdsed.



Joonis 6.

Huvipakkuv on tasandi liikumiste tõlgendamine vaadeldaval mudelil. Tasandi α liikumine on selle tasandi punktide hulga niisugune teisendamine (kujutamine iseendale), mille puhul säilib iga kahe punkti vaheline kaugus. Vaadeldavas mudelis on sel puhul tegemist ringi R teatava kujutamisega iseendale. Näiteks pööre tasandil α punkti O ümber on tõlgendatav ringi R pöördena O ümber, rööplüke tasandil α aga kujutab endast märksa huvitavamat teisendust, milles punktid kanduvad edasi piki joonisel 6 kujutatud «sirgete» võrgu ühe parve jooni, selliselt et iga teise parve «sirgel» asuvad punktid jäävad jällegi selle parve teatavale «sirgele».



Joonis 7.

Võib näidata ka teistsuguseid viise eukleidilise planimeetria mudelite konstrueerimiseks antud ringis R. Mainime siin veel ühte näitlikku ja seetõttu kergesti mõistetavat võtet. Toetugu tasandile α ülalt avatud poolsfäär keskpunktiga O (joon. 7). Tasandil α vabalt võetud punktile X võib vastavusse seada punkti X', millesse projekteerub poolsfääri ja sirge OX lõikepunkt Y. Kogu tasand α kujutub sel puhul jällegi teatava ringi R sisemuseks, «sirgeteks» on aga mitte enam eelmise mudeli «sirged», vaid ringjoone C diameetrite otspunkte ühendavad poolellipsid. Ka pikkusi ja nurki tuleb nüüd mudelil mõõta mõnevõrra teisiti.

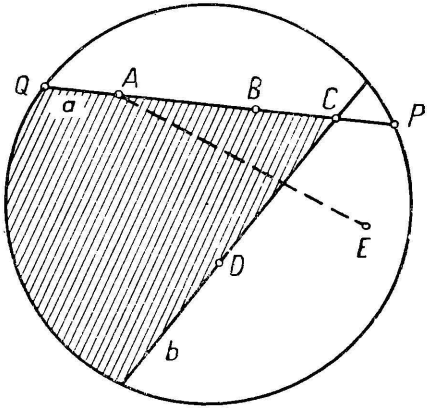
Sellised mudelid võimaldavad heita uut valgust eukleidilise planimeetria mõningatele külgedele, näiteks haarata eukleidilist tasandit kui tervikut. Planimeetria enda uurimise seisukohalt neil mudelitel erilist väärtust muidugi pole, sest tänu sarnasuse olemasolule eukleidilises geomeetrias on tavalised joonised, plaanid jms. ka tasandi küllalt suurte piirkondade jaoks märksa paremateks mudeliteks.

Analoogilised mudelid antud sfääris on võimalik konstrueerida ka eukleidilise stereomeetria jaoks. Nad esitavad eukleidilist maailma n.-ö. «kõverpeeglis», seejuures paratamatult ilmnevate moonutustega, kuid võimaldavad viimastele vaatamata tõlgendada lõplikus ulatuses kõiki lõpmatu ruumi geomeetria mõisteid.

Lobatševski geomeetria mudel

Märksa olulisem osa on mudelitel täita Lobatševski geomeetria uurimisel. Me juba kõnelesime sellest, et ka sel juhul, kui reaalse ruumi struktuuri kosmilises ulatuses kirjeldaks paremini mitte eukleidiline, vaid Lobatševski geomeetria, ka sel juhul oleks ruumi väikestes piirkondades (näiteks üksikisiku vaatevälja ulatuses) äärmiselt suure täpsusega kehtiv eukleidiline geomeetria. Et Lobatševski geomeetrias puudub sarnasus, siis on juba põhimõtteliselt võimatu kujutada Lobatševski ruumi või tasandi suuri piirkondi tavalistel joonistel ilma oluliste moonutusteta. Seetõttu saavad meie näitlikule kujutlusele ainsaks toeks olla just sedalaadi mudelid, kus Lobatševski geomeetriat tõlgendatakse tavalise eukleidilise geomeetria vahenditega (planimeetriat näiteks jällegi teatava ringjoone sees), kusjuures kõik selle geomeetria mõisted saavad selles mudelis teatava erilise, antud mudelile omase sisu.

Lobatševski planimeetria üks kõige lihtsam mudel on tuntud Beltrami-Kleini mudelina. Selle puhul tõlgendatakse Lobatševski tasandi punktide hulka teatava ringjoone C sisemusena R tavalisel eukleidilisel tasandil. Sirgeid Lobatševski tasandil tõlgendatakse selle ringjoone kõõludena (jättes ära otspunktid, mis kujutavad selle sirge «lõpmata kaugeid» punkte). Selles suhtes on vaadeldav mudel isegi lihtsam kui eespool tutvustatud eukleidilise planimeetria mudelid. Lihtne on kontrollida, et geomeetria lihtsaimad põhilaused on sel puhul rahuldatud: läbi iga kahe punkti kulgeb parajasti üks «sirge», iga kaks «sirget» lõikuvad parajasti ühes punktis jms. Joonisel 8 on kujutatud näiteks «sirge» $a = AB$ ja «sirgete» a ja b lõikepunkt C. Ilma pikemata on selge ka see, mida tähendavad sellised mõisted nagu «punkt B on punktide A ja C vahel», «punktid A ja B on ühel pool sirget b», «punktid A ja E on teine teisel pool sirget b» jne. Kõikide A ja B vahel olevate punktide hulka nimetatakse, nagu tavaliselt, lõiguks AB, viirutatud punktihulka joonisel 8 aga nurgaks $\angle ACD$.



Joonis 8.

Märksa keerukam on määrata mudeli järgi lõigu AB tegelikku pikkust Lobatševski geomeetrias. Selleks tuleb mõõta lõikude AP ja AQ ning BP ja BQ pikkused eukleidilises geomeetrias, leida suurus

$$\frac{AP}{AQ} : \frac{BP}{BQ}$$

ning võtta selle logaritm mingi konstantse, kõikide lõikude jaoks ühise kordajaga k. Saadud arv kujutabki lõigu AB pikkust $|AB|$ Lobatševski geomeetrias, s. t.

$$|AB| = k \log\left(\frac{AP}{AQ} : \frac{BP}{BQ}\right). \qquad (1)$$

Analoogiliselt on lõikude BC ja AC pikkusteks arvud

$$|BC| = k \log\frac{BP}{BQ} : \frac{CP}{CQ} \quad \text{ja} \quad |AC| = k \log\frac{AP}{AQ} : \frac{CP}{CQ}.$$

Et

$$\frac{AP}{AQ} : \frac{CP}{CQ} = \left(\frac{AP}{AQ} : \frac{BP}{BQ}\right)\left(\frac{BP}{BQ} : \frac{CP}{CQ}\right),$$

siis

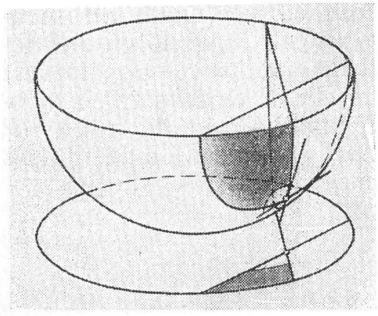
$$\log\left(\frac{AP}{AQ} : \frac{CP}{CQ}\right) = \log\left(\frac{AP}{AQ} : \frac{BP}{BQ}\right) + \log\left(\frac{BP}{BQ} : \frac{CP}{CQ}\right),$$

mistõttu

$$|AC| = |AB| + |BC|,$$

nii nagu see muidugi peabki olema. Kui B ligineb ringi R äärele (s. t. kui $B \to P$) siis $BP \to 0$ ja valemi (1) põhjal $|AB| \to \infty$; kui ringi äärele ligineb punkt A (s. t. kui $A \to Q$), siis $AQ \to 0$ ning täpselt samuti $|AB| \to \infty$. Siit järeldub, et «sirge» on, nii nagu see peabki olema, lõpmatu pikkusega, ääreringjoon on aga Lobatševski tasandi «lõpmata kauge» horisont.

Lihtsam ei ole lugu ka nurkade mõõtmisega mudelis. Kui tipp asub ringjoone keskpunktis O, siis on küll selle nurga suurused nii Lobatševski kui Eukleidese geomeetrias ühesugused, kuid kõikide teiste nurkade puhul see enam nii pole. Selleks et saada mudelilt joonisel 9 antud nurga $\angle BAC$ tegelikku suurust Lobatševski geomeetrias, tuleb eukleidilises geomeetrias toimida järgmiselt. Tuleb võtta tasandile ABC punktis O toetuv ülalt avatud poolsfäär, mille raadius on võrdne ringi R raadiusega, ning projekteerida ringi R kõik punktid alt üles sellele poolsfäärile. Sirged projekteeruvad sel korral poolsfääri ääreringjoonelt risti alla laskuvateks poolringjoonteks, nurk $\angle BAC$ — teatavaks nende poolringjoontega piiratud piirkonnaks poolsfääril. Nurga $\angle BAC$ tegelikku suurust Lobatševski geomeetrias mõõdab nüüd poolringjoontele nende lõikepunktis A' tõmmatud puutujate vaheline nurk eukleidilises geomeetrias.

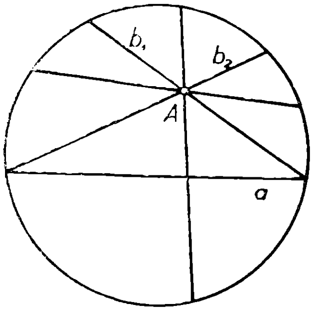


Joonis 9.

Siit võib muide järeldada, et ringi R diameeter ja sellega ristuv kõõl kujutavad endast ristuvaid sirgeid ka Lobatševski geomeetrias, sest nad projekteeruvad ristuvateks poolringjoonteks ülalmainitud poolsfääril.

Kõigest sellest ei selgu veel, mille poolest Lobatševski geomeetria erineb eukleidilisest geomeetriast. Nagu me nägime, on ka viimase jaoks võimalik konstrueerida mudeleid ringis R, milledes samuti tuleb erilisel viisil tõlgendada selliseid mõisteid nagu sirge, nurk, lõigu pikkus jne. Erinevused selguvad alles siis, kui me hakkame uurima teatavaid vahekordi nende mõistete vahel.

Vaatlemegi kõigepealt seda väidet, mille analüüsimisest sai üldse alguse mitteeukleidiline geomeetria — lauset, mille kohaselt sirgele a langetatud ristlõigu AB otspunkti A samal tasandil läbiv sirge b saab sirget a mitte lõigata a i n u l t siis, kui ta moodustab selle ristlõiguga nurga $\alpha = 90°$ (joon. 4). Teisiti öeldes tähendab see sirget a mitte lõikava ja punkti A läbiva sirge a i n s u s t antud tasandil. On selge, et see lause vaadeldava mudeli puhul ei kehti: läbi punkti A võib tõmmata lõpmata palju «sirgeid», mis ei lõika «sirget» a (joon. 10).



Joonis. 10.

Selle tähelepanekuga on ühtlasi lahendatud üks eespool seatud põhimõtteline küsimus: kas on üldse võimalik, et ülaltoodud lause ei kehti, kas ei peaks ta olema järeldatav juba geomeetria kõige elementaarsematest põhitõdedest? Nüüd on selge, et niisugune järeldamine ei saa olla võimalik, lause võib olla mittekehtiv ka siis, kui elementaarsemad põhitõed kehtivad — meil on nüüd selle kohta olemas eukleidilise geomeetria vahenditega konstrueeritud mudel. Kui lugeda eukleidiline geomeetria kooskõlaliseks, siis võib selle mudeli olemasolust teha ka ülaltoodud järeldused. Tähendab, eukleidilise geomeetria kõrval on loogiliselt täiesti samaväärsena võimalik veel teine geomeetria, milles mainitud lause ei kehti. Selleks on Lobatševski geomeetria, mille kohta käibki äsja konstrueeritud mudel.

Mudel võimaldab lahendada mitte üksnes seda esmajärgulise tähtsusega põhimõttelist küsimust. Ta võimaldab kergesti avastada ja näitlikult tõlgendada ka Lobatševski geomeetria fakte. Toome selle kohta mõningaid näiteid.[6]

Osutub, et Lobatševski geomeetrias ei eksisteeri kujundit, millel oleks tavalise ruudu kõik omadused .Võtame näiteks kaks «sirget», mis ringis R oleksid ristuvateks diameetriteks, ja mõõdame nendele võrdsed lõigud OA ja OB. Edasi tõmbame läbi punktide A ja B diameetritega ristuvad kõõlud, mis lõikugu punktis C. Ülaltoodu põhjal on ka Lobatševski geomeetrias $OA \perp OB$, $OA \perp AC$, $OB \perp BC$ ja $|OA| = |OB|$. Samuti on, nagu kerge kindlaks teha, ka $|AC| = |BC|$. Kuid tipu C juures ei teki enam täisnurk, sest kui me projekteeriksime kõõlud AC ja BC poolsfäärile (nii nagu näiteks joonisel 9), siis saaksime poolringjooned, mis ilmselt pole enam risti — nurk $\angle ACB$ on Lobatševski geomeetrias teravnurk. Samuti ei ole $|AC|$ ja $|OA|$ enam võrdsed.

Kas ei peaks püüdma «ruutu» konstrueerida teisiti, tõmmates näiteks «sirgest» OA ühele poole ristlõike AM, nii et oleks $|OB| = |AM|$? Osutub, et ka see katse on määratud nurjumisele. Nimelt ei ole Lobatševski planimeetrias antud sirgest ühel pool võrdsetel kaugustel asetsevate punktide hulk enam sirge, nagu euk-

[6] Üksikasjadest huvitatud lugejale võib soovitada Jüri Nuudi monograafiat: Ю. Нут. Геометрия Лобачевского в аналитическом изложении. Москва, 1961.

leidilises geomeetrias, vaid teatav kõverjoon, mida mudelil esitab joonisel 11 näidatud poolellips.

Veendume selles, koostades selle kõvera võrrandi joonisel 11 näidatud ristkoordinaatides. Tähistame selleks ringi R raadiuse r, lõigu OB eukleidilise pikkuse aga $OB = b$. Siis $OP = OQ = r$, $BP = r - b$, $BQ = r + b$, mistõttu

$$|OB| = k \log\left(\frac{OP}{OQ} : \frac{BP}{BQ}\right) = k \log \frac{r+b}{r-b}.$$

Kui punkti M koordinaadid tähistada x ja y, siis $AS = AT = \sqrt{r^2 - x^2}$, $MS = \sqrt{r^2 - x^2} - y$, $MT = \sqrt{r^2 - x^2} + y$, mistõttu

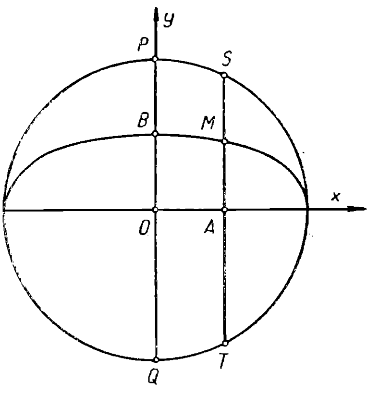
$$|AM| = k \log\left(\frac{AS}{AT} : \frac{MS}{MT}\right) = k \log \frac{\sqrt{r^2 - x^2} + y}{\sqrt{r^2 - x^2} - y}.$$

Meid huvitavad punktid M, mille puhul $|AM| = |OB|$. Nende koordinaadid x ja y rahuldavad järelikult tingimust

$$\frac{\sqrt{r^2 - x^2} + y}{\sqrt{r^2 - x^2} - y} = \frac{r+b}{r-b},$$

mille teisendamine viib mõne sammu järele ellipsi võrrandini

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



Joonis 11.

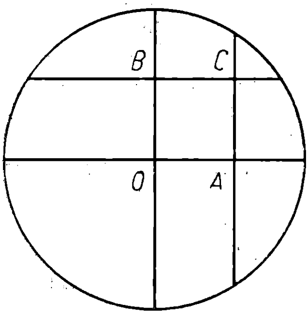
Sellest tulebki järeldada, et kõigi «sirgest» OA ühel pool võrdsetel kaugustel asetsevate punktide M hulk ei ole enam «sirge», sest kõik «sirged» kui ringi R kõõlud on määratud lineaarvõrranditega. Järelikult on selleks hulgaks teatav eriline kõverjoon, mida Lobatševski geomeetrias nimetatakse ekvidistandiks (lad. k. *aequus* — võrdne, *distantia* — kaugus) ehk samakaugusjooneks.[7]

Võimatus konstrueerida ruutu Lobatševski tasandil näitab, et seda tasandit ei saa kujutleda nii nagu eukleidilist tasandit — üksteise kõrvale asetatud ruutude lõpmatu süsteemina. Kuigi Lobatševski tasandil on kõige üldisemates joontes palju ühist eukleidilise tasandiga (märksa rohkem kui sfääril) — ta on lõp-

[7] Märgime võrdluseks, et ka sfääril, kus «sirgeteks» on suurringjooned, ei ole «sirgest» võrdsetel kaugustel asuvate punktide hulk enam «sirge». Kui näiteks ekvaatorist mõõta mööda meridiaane pooluse poole võrdsed kaared, siis täidavad nende otspunktid paralleeli, mis pole enam suurringjoon, s. t. pole enam «sirge».

matu, sirged temal on lõpmatud lahtised jooned, millel on määratud ühe punkti asetsemine kahe teise vahel jne. — erineb ta sellest siiski mitmes suhtes. Ta näitlikult kõneldes «hajub laiali». Seda tema iseärasust võiks kõige ilmekamalt illustreerida vahest järgmise arvutusega. Joonisel 12 on kujutatud kaks «sirget» OA ja BC ühise ristlõiguga OB. Viimast kujutava lõigu eukleidiliseks pikkuseks on $OB = b$. Sama eukleidilise pikkusega on ka lõik AC. Järelikult, kui lõiku OA vaadelda muutuva suurusena, tähistades tema eukleidilise pikkuse x, siis

$$|AC| = k \log \frac{\sqrt{r^2 - x^2} + b}{\sqrt{r^2 - x^2} - b}.$$



Joonis 12.

Selle võrduse parem pool on määratud ainult juhul, kui $\sqrt{r_2 - x^2} > b$, s. t. kui $x < \sqrt{r_2 - b^2}$. Sellel asjaolul on lihtne geomeetriline selgitus — ainult sel korral lõikuvad diameetritele OA ja OB punktides A ja B tõmmatud ristsirged ringis R. Edasi nähtub viimasest seosest, et suuruse x kasvamisel väärtusest 0 kuni väärtuseni $\sqrt{r^2 - b^2}$ kasvab ka AC väärtusest $|OB| = k \log \frac{r + b}{r - b}$ kuni lõpmatuseni. Tähendab, kui eukleidilises planimeetrias lõigule tema otspunktides tõmmatud ristsirged kulgevad n.-ö. rööbiti, jäädes teineteisest alati samale kaugusele, siis Lobatševski planimeetrias sellised ristsirged «hajuvad» — ühel neist võetud punkti kaugus teisest ei ole tõkestatud suurus, vaid võib kasvada kuitahes suureks.[8]

Üldse on Lobatševski tasandil kahe sirge võimalikke asendeid mitte kaks, nagu eukleidilises geomeetrias (lõikumine ja mittelõikumine e. paralleelsus), vaid kolm. Lõikumise kõrval on võimalik, nagu me nägime, hajuvus, kusjuures seda kahte juhtu lahutab veel kolmas võimalus, mille puhul sirged küll ei lõiku, kuid ei ole ka hajuvad. Sellises asendis sirge a suhtes on joonisel 10 kujutatud sirged b_1 ja b_2. Nad moodustavad kaks tippnurkade paari tippudega lõikepunktis A, kusjuures ühes neist paa-

[8] Siin on huvitav tõmmata võrdlusjooni Proklose antud «tõestusega» Eukleidese viiendale aksioomile (käesoleva kogumiku lk. 87). Proklos oma «tõestuses» tugineb lausele nimetatud kauguse tõkestatusest. Selle lause mittekehtimisest Lobatševski geomeetrias nähtub nüüd, et lause ei saa olla geomeetria lihtsamate põhitõdede järelduseks, mistõttu Proklose tõestus, sisaldades loogilise «nõiaringi», kaotab igasuguse jõu.

ridest kulgevad kõik sirged, mis lõikavad sirget a, teises kõik need sirged, mis on sirge a suhtes hajuvad. Sirgeid b_1 ja b_2 nimetatakse sirge a paralleelideks (Lobatševski mõttes). Eespool antud valemeid kasutades on võimalik näidata, et sirged, mis on selles mõttes paralleelsed Lobatševski tasandil, lähenevad ühes suunas lõpmatult teineteisele (näiteks joonisel 11 sirged a ja b_1 paremale liikumisel), vastassuunas aga kaugenevad teineteisest tõkestamatult.

Lobatševski planimeetria iseloomulike faktide tutvustamisel tuleb meil, artikli raame arvestades, piirduda nende näidetega. Järgnevalt püüame lühidalt selgitada, mida tuleb mõista Lobatševski ruumina. See on teaduse ajaloos teine ruum (meenutame, et esimeseks on eukleidiline ruum), mille on konstrueerinud matemaatikud ühena võimalikest vahendeist reaalsuse geomeetriliste vormide teoreetiliseks kirjeldamiseks.

Eespool me juba märkisime, et Lobatševski geomeetrias puudub sarnasus. Seetõttu on võimalik Lobatševski ruumi näitlikult haarata jällegi ainult eukleidilise geomeetria baasil konstrueeritud mudelite abil. Üheks lihtsamaks on siin samuti Beltrami-Kleini mudel, mis konstrueeritakse antud sfääri sisemuses. Selle puhul mõistetakse sirgetena sfääri kõõle (ilma otspunktideta), tasanditena aga sfääri ringjooneliste lõigete sisemusi lõiketasandeil. Sellest nähtub, et iga tasand on siin Lobatševski tasand, mis on esitatud teatava Beltrami-Kleini mudeliga. Kahe punkti vahelise kauguse ja antud nurga suuruse Lobatševski ruumis saame seega mudelilt määrata samade valemitega ja võtetega nagu eespool. Mudel võimaldab avastada ja tõlgendada ka Lobatševski ruumi geomeetria fakte. Lobatševski ruumi põhiline erinevus eukleidilisest ruumist seisneb selles, et ta, olles küll samuti igas suunas lõpmatu, hajub märksa kiiremini kui viimane. Kahe ühise ristlõiguga tasandi puhul võib ühe punktide kaugus teisest saada kuitahes suureks, kui minna küllalt kaugele. Sellest tulenevalt ei ole võimalik Lobatševski ruumi «kokku laduda» kuupidest (nii nagu seda saab teha eukleidilise ruumi puhul), koguni kuubi mõiste ei ole temas defineeritav täpselt samas mõttes nagu eukleidilises geomeetrias.

Ühiseks jooneks eukleidilise ja Lobatševski ruumi puhul on nende homogeensus — omadus olla ühesuguse ehitusega oma iga kahe punkti ümbruses. Geomeetria, mille ehitaks üles nende ruumide iga kaks elanikku eri kohtades, oleks ikkagi ühesugune. Kuid teaduse järgnev areng tõi endaga kaasa ka sellised matemaatilised ruumid, milles seda omadust enam pole. Nendest aga juba edaspidi.

(Järgneb)

NATURAALARVUDE AKSIOMAATIKA

J. Hion

Tänapäeva matemaatikat iseloomustab püüe matemaatilisi teooriaid aksiomaatiliselt üles ehitada. Sellise käsitluse puhul võetakse teooria aluseks mõned defineerimata mõisted (põhimõisted) ja defineerimata seosed nende vahel (põhiseosed) ning võetakse tõestuseta mõned nende põhimõistete ja seoste omadused (vastavaid lauseid nimetatakse aksioomideks). Kõik teooria ülejäänud mõisted tuleb defineerida põhimõistete abil ja kõik selle teooria järeldused (teoreemid) tuleb aksioomidele toetudes tõestada. Loomulikult valitakse aksioomid kogemusele toetudes ja nad peavad õigesti peegeldama tegelikkuse teatud omadusi. Niipea aga, kui aksioomid on valitud, on otstarbekas edaspidi teha ainult loogilisi järeldusi nendest ja vältida kogemuse poole pöördumist. Näiteks toimitakse nii geomeetrias. Siin võetakse defineerimata mõisteteks «punkt», «sirge», defineerimata seosteks «sirge läbib punkti» jt., aksioomiks on näiteks lause «iga kahe punkti jaoks leidub parajasti üks sirge, mis läbib neid mõlemaid» jne.[1]

On täiesti loomulik püüda aksiomaatiliselt käsitleda ka naturaalarvude teooriat, millele tegelikult toetub kogu matemaatika. Naturaalarvude teooria matemaatiliselt korrektsest ülesehitusest sõltub ka matemaatika teiste osade põhjendatus. Näiteks on väga oluline kindlaks teha, kas geomeetria aksioomide süsteem (näit. Hilberti aksioomide süsteem) on vasturääkivusetu, s. o. kas geomeetria aksioomidest on võimalik tuletada kaht teineteisele vasturääkivat väidet või mitte. Saab näidata, et geomeetria on vasturääkivusetu, kui selline on reaalarvude teooria. (Märgime, et viimase jaoks saab samuti anda kindla aksioomide süsteemi.) Edasi saab tõestada, et reaalarvude teooria on vasturääkivusetu, kui puuduvad vasturääkivused naturaalarvude teoorias. Selle viimase teooria vasturääkivusetusest saab aga kõnelda alles siis, kui ta on samuti aksiomatiseeritud, kui on fikseeritud selle teooria jaoks mingi aksioomide süsteem. Alles seejärel saab seada küsimuse, kas nendest aksioomidest on võimalik teha üksteisele vasturääkivaid järeldusi või mitte.

---

[1] Vt. näit. Д. Гильберт. Основания геометрии. М.—Л., 1948.

Niisiis tuleb meil naturaalarvude aksiomaatilise teooria loomiseks eraldada need naturaalarvude omadused (aksioomid), mida me võtame tõestuseta omaks, ja need laused (teoreemid), mis vajavad aksioomidele toetuvat tõestust. Seega pole siin mingeid põhimõttelisi erinevusi võrreldes geomeetria aksiomaatilise käsitlusega. Vahe on ainult selles, et väiteid «$2 \cdot 2 = 4$» või «$a + b = b + a$ mistahes naturaalarvude a ja b korral» oleme me harjunud alati pidama endastmõistetavateks, tõestust mittevajavateks, samal ajal kui veidigi keerukamaid geomeetrilisi omadusi õpetatakse koolis tõestama (ja tõestuse vajalikkust mõistma). Muidugi on olemas ka naturaalarvude keerukamaid omadusi, näiteks «kui $a = p_1^{k_1} \dots p_l^{k_l}$ on naturaalarvu a algteguriteks lahutus, siis arvu a jagajate arv on $(k_1 + 1) \dots (k_l + 1)$» või «kui naturaalarv n on suurem kui 2, siis võrrand $x^n + y^n = z^n$ ei ole naturaalarvudes lahenduv», mille tõestamise (või ümberlükkamise) vajalikkust peaks tunnistama igaüks. (Teine nimetatud lausetest on nn. Fermat' suur teoreem, mille kehtivus paljude konkreetsete n väärtuste jaoks on tõestatud, kuid mille kehtivus iga n korral on teadmata).

Naturaalarvude aksiomaatilise teooria tähtsus seisneb mitte ainult selles, et ta annab naturaalarvude omaduste range põhjenduse ja sügava analüüsi. Paljudel selle teooriaga seotud mõistetel (näit. induktiivse definitsiooni ja rekursiivse funktsiooni mõistel) on tähtsaid rakendusi algoritmide teoorias ja tänapäeva arvutusmatemaatikas. Märgime, et järgnevas esitatav aksiomaatika ei ole naturaalarvude aksiomaatikate hulgas veel kõige «sügavam». Meie käsitlusele on iseloomulik, et loogiliste tõestusvahendite kasutamist teooria ülesehitamisel ei piirata ja neid vahendeid endid ei uurita. Võib minna kaugemale ja matemaatilise loogika meetodeid rakendades fikseerida need tõestusvõtted, mida me naturaalarvude teooria ülesehitamisel kasutada lubame. Selliste teooriate abil on saadud tähtsaid tulemusi.[2]

Anname nüüd naturaalarvude aksioomide süsteemi, võttes aluseks itaalia matemaatiku Guiseppe Peano (1858—1932) poolt 1891. a. antud süsteemi. Loeme antud hulga N elemente a ja b võrdseteks, kui nad kujutavad endast ühte ja sama elementi. Siis on elementide võrdusel järgmised omadused:

1. $a = a$ iga $a \in N$ puhul;
2. kui $a = b$, siis $b = a$, $(a, b \in N)$;
3. kui $a = b$ ja $b = c$, siis $a = c$ $(a, b, c \in N)$.

Hulka N nimetame **naturaalarvude vallaks** (ehk **Peano algebraks**), kui

1) igale elemendile $a \in N$ on seatud vastavusse üheselt määratud element $a' \in N$ (seda elementi a' nimetatakse a-le järgnevaks elemendiks);

[2] Vt. П. С. Новиков. Элементы математической логики. М., 1959.

II) leidub element $0 \in N$, nii et $0 = a'$ ei kehti ühegi $a \in N$ puhul;

III) kui $a' = b'$, siis $a = b$;

IV) kui alamhulk $M \subset N$ on selline, et $0 \in M$ ja seosest $a \in M$ järeldub alati seos $a' \in M$, siis $M = N$.

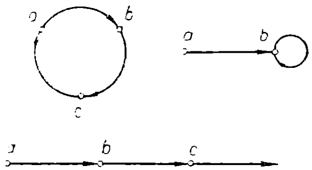
Selles teoorias on üksainus põhimõiste — hulga N element, mida nimetatakse «naturaalarvuks», ja põhiseoseks on «b järgneb a-le» (tähistatakse $b = a'$). Laused I—IV on selle teooria aksioomid. Viimane neist väljendab matemaatilise induktsiooni printsiipi ja teda nimetatakse induktsiooniaksioomiks.

Kui lähtuda meie tavalisest ettekujutusest naturaalarvude valla $N = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ ja arvude järgnevuse mõiste kohta (0-le järgneb 1, 1-le järgneb 2 jne.), näeme, et aksioomid I—IV on rahuldatud. Naturaalarvude teooria aksiomaatilisel käsitlemisel tuleb meil tuntuks lugeda ainult lausetes I—IV väljendatud omadused, kõik ülejäänud naturaalarvudega seotud mõisted ja omadused tuleb «unustada» ja nad siis aksioomidest tuletada.

On huvitav märkida, et naturaalarvude aksioomid on seotud mõnede algebra põhimõistetega. Hulka N, mis rahuldab aksioomi I, nimetatakse tavaliselt unaarseks algebraks.[3] Iga lõplikku unaarset algebrat võib kujutada lõpliku punktide hulga abil tasandil, kusjuures seose $a' = b$ korral joonistatakse punktist a nool punkti b (vt. joonis 1). Alamhulka M unaarsest algebrast N nimetatakse alamalgebraks, kui seosest $a \in M$ järeldub alati $a' \in M$. Aksioom IV tähendab siis, et algebra N iga alamalgebra M, mis sisaldab elementi 0, ühtib kogu algebraga N. Sel korral nimetatakse elementi 0 algebra N moodustavaks elemendiks ja algebrat N ühe moodustajaga algebraks.

Toome nüüd näiteid mõnedest naturaalarvude teooria teoreemidest.

Ütleme, et naturaalarv a eelneb naturaalarvule b, kui $a' = b$. Igale naturaalarvule $a \in N$, peale 0, leidub eelnev. (Aksioomi III põhjal elemendil 0 ei ole eelnevat.)



Joonis 1.

Selle väite tõestamiseks tähistame sümboliga M naturaalarvude hulga, mis koosneb arvust 0 ja kõigist neist naturaalarvudest, millele leidub eelnev. Siis ilmselt $0 \in M$ ja kui $a \in M$, siis ka $a' \in M$, sest arvule a' leidub eelnev (nimelt a). Järelikult aksioomi IV põhjal $M = N$ ja igal naturaalarvul peale 0 leidub eelnev.

Iga naturaalarvu a korral $a \neq a'$. Tõestuseks tähistame sümboliga M kõigi niisuguste naturaalarvude a hulga, mille puhul

[3] Vt. J. G a b o v i t š. Algebra põhimõisteid V. — Matemaatika ja kaasaeg, X, lk. 12—19.

$a \neq a'$. Siis $0 \in M$, sest aksioomi II põhjal $0 = a'$ ei kehti ühegi $a \in N$ puhul, ammugi siis ei kehti $0' = 0$. Olgu $a \in M$. Kui oletada, et $a' \in M$, s. o. $a' = (a')'$, siis aksioomi III põhjal saame $a = a'$, mis on vastuolus seosega $a \in M$. Järelikult $a' \in M$ ja aksioomi IV järgi $M = N$, millega omadus on tõestatud.

Äsjatõestatud omaduse võib väljendada ka järgmiselt: Peano algebral pole alamalgebraid, mis koosneksid ühest elemendist.

Vaatleme nüüd, kuidas tuleks defineerida naturaalarvude summa mõiste. On loomulik nõuda, et naturaalarvude summa $a+b$ rahuldaks (mistahes $a, b \in N$ puhul) tingimusi $a+0=a$ ja $a+b' = (a+b)'$. Teine nõue tähendab, et liidetava suurenemisel ühe võrra peab summa suurenema ühe võrra. Seega peab naturaalarvude summa olema kahe muutuja funktsioon $f(a, b)$ hulgas N, mis omandab väärtusi samas hulgas ja rahuldab tingimusi

$$f(a, 0) = a, \tag{1}$$

$$f(a, b') = [f(a, b)]'. \tag{2}$$

Loomulikult tuleb aksioomidest I—IV lähtudes tõestada, et niisugune funktsioon $f(a, b)$ on üldse olemas ja et ta on üheselt määratud.

Leidub parajasti üks funktsioon $f(a, b)$ hulgas N, mis rahuldab tingimusi (1) ja (2). Tõestame kõigepealt, et kui niisuguseid funktsioone üldse leidub, siis ainult üks. Oletame, et leidub kaks funktsiooni $f(a, b)$ ja $g(a, b)$ hulgas N, mis rahuldavad tingimusi (1) ja (2). Fikseerime vabalt valitud naturaalarvu a ja märgime sümboliga M kõigi selliste naturaalarvude b hulga, mille korral $f(a, b) = g(a, b)$. Siis $0 \in M$, sest (1) põhjal

$$f(a, 0) = a = g(a, 0).$$

Oletame, et $b \in M$, s. o. $f(a, b) = g(a, b)$. Siis

$$f(a, b') = [(f(a, b)]' = [g(a, b)]' = g(a, b'),$$

millest $b' \in M$. Järelikult $M = N$ ja $f(a, b) = g(a, b)$ iga $b \in N$ puhul. Et ka a on vabalt valitav, siis $f(a, b) = g(a, b)$ mistahes $a, b \in N$ korral.

Tingimusi (1) ja (2) rahuldava funktsiooni $f(a, b)$ olemasolu tõestamiseks fikseerime a ja vaatleme funktsiooni $f_a(b)$, mis rahuldab tingimusi

$$f_a(0) = a, \tag{1'}$$

$$f_a(b') = (f_a(b))'. \tag{2'}$$

Funktsiooni $f(b)$ hulgas N, mis rahuldab tingimust $f(b') = [f(b)]'$, nimetatakse algebra N endomorfismiks, s. t. tehet säilitavaks kujutuseks. Peano algebra endomorfismideks on näit. funktsioonid $f(b) = b$, $f(b) = b'$ jne. Tingimused (1′) ja (2′) tähendavad, et $f_a(b)$ on algebra N endomorfism, mis kujutab elemendi 0 elemendiks a.

Näitame, et selline funktsioon leidub iga $a \in N$ korral. Tähistame sümboliga M selliste naturaalarvude a hulga, mille korral tingimusi (1') ja (2') täitev f_a leidub. Nüüd $0 \in M$, sest funktsiooni $f_0(b)$ võib anda valemiga

$$f_0(b) = b.$$

Tõepoolest $f_0(0) = 0$ ja $f_0(b') = b' = (f_0(b))'$. Oletame, et $a \in M$, s. o. tingimusi (1') ja (2') täitev f_a leidub, ning defineerime $f_{a'}(b)$ valemiga

$$f_{a'}(b) = (f_a(b))'.$$

Siis $f_{a'}(0) = (f_a(0))' = a'$, $f_{a'}(b') = (f_a(b'))' = [(f_a(b))']' = (f_{a'}(b))'$, nii et ka $f_{a'}(b)$ rahuldab tingimusi (1') ja (2'). Seega $a' \in M$ ja aksioomi IV järgi $M = N$, millega funktsiooni $f_a(b)$ olemasolu iga $a \in N$ puhul on tõestatud. Nõutava funktsiooni $f(a, b)$ saame, kui võtame $f(a, b) = f_a(b)$.

Nüüd võime defineerida naturaalarvude a ja b summa $a + b$ järgmiselt: $a + b = f(a, b)$, kus funktsioon $f(a, b)$ on tingimusi (1) ja (2) rahuldav funktsioon hulgas N.

Selle definitsiooni abil võime näiteks tõestada võrdused $0 + 1 = 1$, $1 + 1 = 2$, $2 + 1 = 3$, $1 + 2 = 3$ jne. Esitame vastavad tõestused (pidades silmas, et tingimused (1) ja (2) võib esitada ka kujul $a + 0 = a$, $a + b' = (a + b)'$):

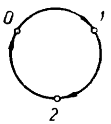
$$\begin{aligned} 0 + 1 &= 0 + 0' = (0 + 0)' = 0' = 1, \\ 1 + 1 &= 1 + 0' = (1 + 0)' = 1' = 2, \\ 2 + 1 &= 2 + 0' = (2 + 0)' = 2' = 3, \\ 1 + 2 &= 1 + 1' = (1 + 1)' = 2' = 3. \end{aligned}$$

Siin kasutasime viimasel juhul varem tõestatud valemit $1 + 1 = 2$. Neidsamu võrduste ridu võime vaadelda ka kui summade $1 + 1$, $2 + 1$ ja $1 + 2$ arvutamist. Esimesel pilgul võib niisugune liitmine tunduda mõttetu ajaviitena: milleks arvutada summasid, mida niikuinii teab ka arvutamata igaüks, kes vähegi tunneb arve. Tegelikult aga esineb tänapäeval «arvutajaid», kes tunnevad küll arvude järgnevust, kuid ei tarvitse «teada», et $1 + 1 = 2$. Sellisteks «matemaatikuteks» on muidugi arvutusmasinad. Liitmise definitsioonist lähtudes võib konstrueerida arvutusmasina, mis on varustatud informatsiooniga arvude järgnevuse kohta ja arvutab kindla programmi järgi summasid äsjatoodud arvutuste eeskujul. Reaalsetes arvutusmasinates toimub liitmine küll teisiti, kuid järgnevuse mõiste on kasulik nn. ideaalsete arvutusmasinate (nn. Tühringi masinate) uurimisel. Sel teel on võimalik kindlaks teha reaalsete masinate kasutatavuse piirid.

Võimalus tõestusi lühikesteks ning lihtsalt teostatavateks etappideks jaotada (mis ilmnes summade arvutamisel) ja induktsiooniaksioomi enamasti standardne kasutamine pakuvad huvi teoreemide automaatse tõestamise probleemi seisukohalt. Esimesi katseid tõestuste saamiseks arvutusmasinatel on juba tehtud. Valemi tõestust võib nimelt vaadelda lõpliku valemite reana, mis lõpeb tõestatava valemiga ja kus iga eelnev valem on kas aksioom, varem tõestatud valem või saadav nendest aksioomide põhjal. Ülesande lahendus seisneb siis selles, et masin trükib välja valemite jada, mis ongi antud valemi tõestus. Põhimõtteliselt on võimalik kasutada masinat mitte ainult teadaolevate teoreemide tõestamiseks, vaid ka uute teoreemide (ja nende tõestuste) otsimiseks. Tavaliselt kasutatakse siin küll selliseid aksioomisüsteeme, mis toetuvad matemaatilise loogika mõistetele.

Pole raske näha, et liitmise olemasolu ja ühesuse tõestamisel me kasutasime ainult aksioome I ja IV. Järelikult saab liitmise defineerida igas ühe moodustajaga unaarses algebras. Näiteks, kui unaarne algebra $\{0, 1, 2\}$ on antud joonisel 2 toodud skeemiga, s. o. $0' = 1$, $1' = 2$, $2' = 0$, siis tema jaoks saame defineerida liitmise, mis on määratud selle skeemi kõrval oleva tabeliga. Jäägiklassiringi mõistega tuttav lugeja tunneb selles tabelis ära tavalise 3 järgi võetud jäägiklasside liitmise reegli.

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1



Joonis 2.

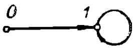
Naturaalarvude liitmine on assotsiatiivne, s. o. mistahes $a, b, c \in N$ puhul $(a + b) + c = a + (b + c)$. Tõestuseks fikseerime $a, b \in N$ ja tähistame sümboliga M nende $c \in N$ hulga, mille korral assotsiatiivsus kehtib. Siis $0 \in M$, sest $(a + b) + 0 = a + b = a + (b + 0)$. Oletame, et $c \in M$. Siis $(a + b) + c' = [(a + b) + c]' = [a + (b + c)]' = a + (b + c)' = a + (b + c')$, nii et ka $c \in M$ ja $M = N$. Sellega on liitmise assotsiatiivsus tõestatud.

Naturaalarvude liitmise assotsiatiivsusest järeldub, et mistahes $a, b, c \in N$ puhul $f_a(f_b(c)) = f_{a+b}(c)$. Seega $f_{a+b}(c)$ on algebra N endomorfism, mis saadakse endomorfismide f_b ja f_a järjestikusel rakendamisel. Seetõttu võiks naturaalarvude liitmist defineerida ka endomorfismide järjestikuse rakendamise abil.

Naturaalarvude liitmine on kommutatiivne, s. o. $a + b = b + a$ mistahes $a, b \in N$ puhul. Liitmise kommutatiivsuse näitamiseks tõestame esmalt valemid $a + 0 = 0 + a$ (induktsiooniga a järgi) ja $a' + b = (a + b)'$ (induktsiooniga b järgi). Kommutatiivsuse valemi $a + b = b + a$ saame siis induktsiooniga b järgi. Jätame vastavate arutluste läbiviimise lugeja hooleks.

Märgime, et ka liitmise assotsiatiivsuse ja kommutatiivsuse tõestamisel on vaja ainult aksioome I ja IV. Seega peab unaarses algebras $\{0, 1, 2\}$ olema liitmine kommutatiivne ja assotsiatiivne, mis on teatavasti kooskõlas vastava jäägiklassiringi omadustega.

Edasi saab tõestada, et naturaalarvude liitmisel on järgmised omadused: seosest $a+c=b+c$ järeldub $a=b$; kui $a+b=0$, siis $a=b=0$. Peale aksioomide I ja IV vajame esimese omaduse tõestamiseks veel aksioomi III ja teise tõestamiseks aksioomi II. Teine omadus ei kehti näit. unaarses algebras $\{0, 1, 2\}$, kus $2+1=$ $=0$, kuid $2 \neq 0$, $1 \neq 0$. Esimene omadus ei kehti näiteks joonisel 3 toodud skeemiga määratud unaarses algebras, sest siin $0+1=1+1=1$, kuid $0 \neq 1$.



Joonis 3.

Vaatleme järgnevalt, kuidas on võimalik defineerida naturaalarvude korrutamist. Seda tuleb muidugi teha nii, et oleksid rahuldatud tingimused: $a0=0$ ja $ab'=ab+a$. Seega on naturaalarvude korrutis kahe muutuja funktsioon $g(a, b)$ hulgas N, mis omandab väärtusi samas hulgas ja peab rahuldama järgmisi tingimusi:

$$g(a, 0)=0, \tag{3}$$

$$g(a, b')=g(a, b)+a. \tag{4}$$

Näitame, et selline funktsioon — nimetamegi teda naturaalarvude korrutamiseks — on olemas ja on tingimustega (3) ning (4) üheselt määratud.

Naturaalarvude korrutamine eksisteerib ja on üheselt määratud. Tõestame kõigepealt, et kui korrutamine on olemas, siis ainult üks, s. o. kui funktsioonid $g(a, b)$ ja $h(a, b)$ hulgas N rahuldavad tingimusi (3) ja (4), siis $g(a, b)=h(a, b)$. Fikseerime $a \in N$ ja tähistame sümboliga M nende $b \in N$ hulga, mille korral $g(a, b)=$ $=h(a, b)$. Siis $0 \in M$, sest $g(a, 0)=0=h(a, 0)$. Oletame nüüd, et $b \in M$, s. o. $g(a, b)=h(a, b)$. Siis $g(a, b')=g(a, b)+a=$ $=h(a, b)+a=h(a, b')$, nii et ka $b' \in M$. Järelikult aksioomi IV põhjal $M=N$ ja $g(a, b)=h(a, b)$ iga $a \in N$ puhul.

Korrutamise olemasolu näitamiseks tõestame, et iga $a \in N$ puhul leidub funktsioon $g_a(b)$ hulgas N, mis rahuldab tingimusi

$$g_a(0)=0, \tag{3'}$$

$$g_a(b')=g_a(b)+a. \tag{4'}$$

Nende $a \in N$ hulga, mille jaoks selline $g_a(b)$ eksisteerib, märgime tähega M. Siis $0 \in M$, sest võime võtta $g_0(b)=0$. Tõepoolest, siis $g_0(0)=0$ ja $g_0(b')=0=0+0=g_0(b)+0$. Oletame, et $a \in M$, s. o. $g_a(b)$ omadustega (3') ja (4') eksisteerib. Defineerime $g_{a'}(b)=g_a(b)+b$. Siis

$$g_{a'}(0)=g_a(0)+0=0+0=0,$$

$$g_{a'}(b')=g_a(b')+b'=(g_a(b)+a)+b'=g_a(b)+(a+$$
$$+b')=g_a(b)+(a+b)'=g_a(b)+(b+a)'=g_a(b)+$$
$$+(b+a')=(g_a(b)+b)+a'=g_{a'}(b)+a'.$$

Seega rahuldab $g_{a'}(b)$ tingimusi (3) ja (4) ning $a' \in M$. Niisiis IV aksioomi järgi $M = N$ ja $g_a(b)$ on olemas iga $a \in N$ puhul. Nõutava funktsiooni $g(a, b)$ saame, kui võtame $g(a, b) = g_a(b)$.

Naturaalarvude a ja b korrutise $a \cdot b$ (ehk lihtsalt ab) defineerime nüüd valemiga: $a \cdot b = g(a, b)$, kus $g(a, b)$ on tingimusi (3) ja (4) rahuldav funktsioon hulgas N. Korrutamise definitsiooni põhjal võime tõestada näiteks võrdused $0 \cdot 2 = 0$, $1 \cdot 1 = 1$, $1 \cdot 2 = 2$, $2 \cdot 2 = 4$ järgmiselt:

$$
\begin{aligned}
&0 \cdot 2 = 0 \cdot 1' = 0 \cdot 1 + 0 = 0 \cdot 1 = 0 \cdot 0' = 0 \cdot 0 + 0 = 0 + 0 = 0,\\
&1 \cdot 1 = 1 \cdot 0' = 1 \cdot 0 + 1 = 0 + 1 = 1,\\
&1 \cdot 2 = 1 \cdot 1' = 1 \cdot 1 + 1 = 1 + 1 = 2,\\
&2 \cdot 2 = 2 \cdot 1' = 2 \cdot 1 + 2 = 2 \cdot 0' + 2 = (2 \cdot 0 + 2) + 2 =\\
&\qquad = (0 + 2) + 2 = 2 + 2 = 4.
\end{aligned}
$$

Viimase võrduse põhjendamisel kasutasime võrdusi $0 + 2 = 2$ ja $2 + 2 = 4$, mille tõestamise jätame lugeja hooleks.

Märgime, et korrutise olemasolu ja ühesuse tõestamisel me kasutasime ainult aksioome I ja IV. Seega saab korrutamise defineerida ka hulgas $\{0, 1, 2\}$ kus $0' = 1$, $1' = 2$, $2' = 0$. Sel korral leiame

$$
\begin{aligned}
&2 \cdot 2 = 2 \cdot 1' = 2 \cdot 1 + 2 = 2 \cdot 0' + 2 = (2 \cdot 0 + 2) + 2 =\\
&\qquad = (0 + 2) + 2 = 2 + 2 = 1.
\end{aligned}
$$

Pole raske veenduda, et korrutamine on sellisel juhul samaväärne korrutamisega jäägiklassiringis kolme järgi.

Märgime veel lühidalt, kuidas tõestada korrutamise põhiomadusi. Kõigepealt tõestame vasakpoolse distributiivsuse

$$a(b + c) = ab + ac$$

induktsiooniga c järgi. Korrutamise kommutatiivsuse näitamiseks tõestame kõigepealt valemid

$$0a = 0 \quad \text{ja} \quad a'b = ab + b$$

(nende tõestuse võib välja lugeda ka korrutamise olemasolu tõestusest). Siis tuletame valemi

$$ab = ba$$

induktsiooniga b järgi. Nüüd saame tuletada ka parempoolse distributiivsuse valemi

$$(a + b)c = ac + bc.$$

Lõpuks assotsiatiivsuse

$$(ab)c = a(bc)$$

tõestame induktsiooniga c järgi, kasutades parempoolset distributiivsust.

Analoogiliselt saab anda naturaalarvude järjestuse mõiste ja tuletada selle omadused, vaadelda naturaalarvude tähistamist kümnendsüsteemis ning teistes arvusüsteemides jne. Niiviisi saab korrektselt põhjendada naturaalarvude teooriat, mis annab baasi kogu matemaatika ülesehitamiseks.

TAYLORI VALEMI TÕESTUSEST [1]

J. Gaiduk

Tavaliselt õpikutes esitatud Taylori valemi tõestus jääkliikmega Lagrange'i kujul on üliõpilastele raskepärane, sest tõestus tundub nendele liiga kunstlikuna.

Siin anname selle valemi tõestuse, kus kasutatakse ainult matemaatilise induktsiooni meetodit ning määratud integraali keskväärtusteoreemi [2]. Sellest tingituna saame alljärgnevat Taylori valemi tõestuskäiku esitada alles pärast integraalarvutuse kursust — nimelt astmeridade käsitlemisel (nagu seda tehnilistes kõrgemates õppeasutustes sageli tehaksegi.)

Et Taylori valemit võib kergesti järeldada tema erijuhust — Maclaurini valemist, siis piirdume viimase tõestusega. Seega on meie ülesandeks tõestada järgmine teoreem.

T e o r e e m. Kui funktsioonil $f(x)$ on lõigus $[0, h]$ pidev $(n+1)$-järku tuletis $f^{(n+1)}(x)$, siis leidub arv [3] $\Theta \in (0, 1)$ nii, et kehtib valem

$$f(x) = \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{i!} f^{(i)}(0)\, x^i + \frac{1}{(m+1)!} f^{(m+1)}(\Theta x)\, x^{m+1} \tag{1}$$

iga $m \leqslant n$ ja $x \in [0, h]$ korral.

T õ e s t u s. Kui $m = 0$, siis valem (1) omab kuju

$$f(x) = f(0) + f'(\Theta x)\, x$$

ja taandub seega Lagrange'i valemiks (vt. [1], lk. 217).

Oletame nüüd, et valem (1) kehtib mingi m korral, näiteks juhul $m = k$, ja näitame, et siis valem (1) jääb kehtima ka $m = k+1$ korral.

---

[1] Venekeelsest käsikirjast tõlkinud S. Baron.

[2] Nimelt kasutatakse teoreemi (vt. [1], lk. 370): kui lõigus $[a, b]$ funktsioon $f(x)$ on pidev, $g(x)$ aga integreeruv ja säilitab märki, siis leidub selline arv $\xi \in [a, b]$, et

$$\int_a^b f(x) g(x)\, dx = f(\xi) \int_a^b g(x)\, dx.$$

[3] Siinjuures tuleb silmas pidada, et arv Θ sõltub muutuja x väärtusest.

Et $k < n$ puhul eksisteerib pidev $f^{(k+2)}(x)$ lõigus $[0, h]$ (sest $k+2 \leqslant n+1$) ja valem (1) kehtib oletuse kohaselt $m = k$ korral, siis võime teda rakendada funktsiooni $f(x)$ asemel funktsioonile $f'(x)$. Saame

$$f'(x) = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} f^{(i+1)}(0) x^i + \frac{1}{(k+1)!} f^{(k+2)}(\Theta x) x^{k+1} \qquad (2)$$

iga $x \in [0, h]$ korral. Asendades valemis (2) muutuja x muutujaga t ja seejärel integreerides lõigus $[0, x]$, leiame

$$\int_0^x f'(t)\,dt = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} f^{(i+1)}(0) \int_0^x t^i\,dt + \alpha_{k+1}$$

ehk

$$f(x) = f(0) + \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{(i+1)!} f^{(i+1)}(0) x^{i+1} + \alpha_{k+1} =$$

$$= \sum_{i=0}^{k+1} \frac{1}{i!} f^{(i)}(0) x^i + \alpha_{k+1}, \qquad (3)$$

kus

$$\alpha_{k+1} = \frac{1}{(k+1)!} \int_0^x f^{(k+2)}(\Theta t) t^{k+1} dt.$$

Et lõigus $[0, h]$ funktsioon t^{k+1} säilitab märki ja $f^{(k+2)}(x)$ on pidev, siis leidub määratud integraali keskväärtusteoreemi [2] kohaselt arv $\xi \in [0, x]$ nii, et

$$\alpha_{k+1} = \frac{1}{(k+1)!} f^{(k+2)}(\Theta \xi) \int_0^x t^{k+1} dt =$$

$$= \frac{1}{(k+2)!} f^{(k+2)}(\Theta \xi) x^{k+2}. \qquad (4)$$

Arvestades, et viimases valemis arv ξ sõltub muutujast x, võime $\Theta\xi$ asendada suurusega $\Theta_1 x$, kus $0 < \Theta_1 < 1$. Nüüd saamegi valemitest (3) ja (4) valemi (1), kus $m = k + 1$. Seega oleme matemaatilise induktsiooni meetodiga tõestanud valemi (1) kehtivuse iga $m \leqslant n$ korral.

Tõestatud teoreemis me pidime eeldama funktsiooni $f^{(n+1)}(x)$ pidevust lõigus $[0, h]$. Samadel eeldustel saab teoreemi tõestada, kasutades korduvalt määratud integraali ositi integreerimise valemit (vt. [2], lk. 332 või [3], lk. 147).

Teoreem osutub kehtivaks ka nõrgematel eeldustel (vt. [1], lk. 234); nimelt teoreemi kehtivuseks on piisav nõuda ainult $f^{(n+1)}(x)$ eksisteerimist vahemikus $(0, h)$. Sel juhul tuleb tõestuskäigus valemi (4) saamiseks rakendada Darboux' teoreemi (vt. [2], lk. 300 ja 332).

Kirjandus

1. G. Kangro. Matemaatiline analüüs, I osa. Tln., 1965.
2. В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. Основы математического анализа. Москва, 1965.
3. Г. М. Фихтенгольц. Курс диффренциального и интегрального исчисления. Москва, 1959.

BRIDŽIÜLESANNE

Ajaviitemängud on alati rohkelt mitmesuguseid matemaatilist või loogilist laadi ülesandeid pakkunud. Eriti rikkalikult pakub selliseid ülesandeid just bridž. Vaatleme näiteks järgmist situatsiooni:

	♠ 5 4 3 2 ♡ Ä K 10 3 ◇ Ä K 6 ♣ S 2	
♠ S 8 7 6 ♡ 6 2 ◇ 10 9 ♣ K E 9 7 6	N W O S	♠ 10 9 ♡ E 9 8 7 5 ◇ 8 7 4 ♣ Ä 8 3
	♠ Ä K E ♡ S 4 ◇ E S 5 3 2 ♣ 10 5 4	

Ruutu on trump ning W käis avakäiguks ruutu kümne. Kuidas peab S mängima, et igasuguse kaitsemängu korral O—W poolt võtta vähemalt 11 tihi? (Lahendus on toodud leheküljel 145)

Küberneetika

ALGORITMID JA LAHENDUVAD HULGAD NING NENDE RAKENDUSI

I. Kull, M. Tombak

1. Elementaarmatemaatikas ja samuti teistes «klassikalistes» matemaatilistes distsipliinides mõistetakse algoritmi all täpset eeskirja, mis on rakendatav mingi ülesannete klassi mistahes konkreetse ülesande lahendamiseks. Nii on algoritmideks näiteks arvude liitmise, lahutamise, korrutamise ja jagamise eeskirjad, arvude suurima ühisteguri ja vähima ühiskordse leidmise menetlused jpt. Juba nendestki näidetest nähtub, et algoritmi mõiste on matemaatika üks põhilisi mõisteid, mida on kasutatud (küll mitteteadlikult) matemaatika kõige varasematel arenguastmetel. Algoritmi mõiste täiesti range defineerimine toimus aga alles käesoleva sajandi 30. aastatel. Algoritmi mõiste suhteliselt hilise defineerimise põhjusi pole ka raske leida. Nimelt kasutati mõistet «algoritm» varem ainuüksi niisugustes «jaatavates» väljendites nagu «selle ülesande (või ülesannete klassi) lahendusalgoritm on selline...», millele järgnes vastava algoritmi esitamine. Niisuguste väljendite kasutamine ei nõudnud aga algoritmi mõiste täpset piiritlemist. Algoritmi mõiste täpse defineerimise vajadus tekkis alles hiljem seoses mõningate ülesannete algoritmilise mittelahendatavuse tõestamisega. Esimesed definitsioonid anti 1936.—1937. a. Kleene'i (rekursiivsed funktsioonid), Church'i (λ-konversioon), Post'i (kombinatoorsed protsessid) ja Turingi (Turingi masin) poolt. 1951. a. esitas nõukogude matemaatik A. Markov oma definitsiooni (normaalalgoritm), mis on eriti sobiv teoreetiliste probleemide käsitlemisel. Tänapäeval on vormilt erinevaid algoritmi definitsioone antud juba väga palju. Muide, lähemal uurimisel on selgunud, et nad kõik on sisuliselt samaväärsed.

Algoritmi mõiste on omandanud tänapäeval erilise aktuaalsuse seoses küberneetika ja kaasaegsete elektronarvutite laialdase levikuga. Meenutame siinkohal tõlkimisalgoritme, algoritme mitmesuguste mängude mängimiseks, tehaste töö juhtimiseks. Viimasel ajal on hakatud uurima ka õpetamisalgoritme ja üldse igasuguse vaimse (loomingulise) töö algoritme. Muuhulgas tähendame, et kaasaegse elektronarvuti programm pole midagi muud kui algoritm, mis on kirja pandud selle arvuti käskude süsteemis.

Seoses ülalöelduga on mõistetav, et algoritmidest on väga palju kirjutatud ka populaarteaduslikes teostes. Kuid nendes kirjutistes on harilikult peatähelepanu pööratud samuti mitmesugustele huvitavatele algoritmidele (näit. mitmesuguste mängude algoritmid). Tagaplaanile on aga kahjuks jäetud algoritmide teooria sügavamad küsimused, eriti selle mõiste seos matemaatika aluste probleemidega. Käesoleva kirjutise eesmärgiks ongi selle lünga osaline täitmine.

2. Alljärgneva paremaks mõistmiseks on otstarbekohane kõigepealt meenutada mõningaid hulgateooria põhimõisteid.[1]

Hulka võime mõista kui «kindlalt piiritletud ja erinevate objektide (mida nimetatakse hulga elementideks) kokkuvõtet üheks tervikuks»[2]. Nii näiteks võime kõnelda Tartu linna majade hulgast (mingil kindlal ajamomendil), kõigi reaalarvude hulgast jne. Asjaolu, et objekt a on hulga A elemendiks, tähistatakse $a \in A$, vastupidisel juhul kirjutatakse $a \overline{\in} A$. Kui hulga A iga element on ka hulga B elemendiks, siis öeldakse, et A on B osahulk (või B on A ülemhulk). Seda vahekorda tähistatakse $A \subset B$. Kirjutis $C = \{1, 2, 3, 4\}$ tähendab, et hulga C elementideks on numbrid 1, 2, 3 ja 4 ja ainult need. Märgime, et hulgateoorias ei saa läbi ilma nn. tühja hulgata. Tühi hulk on hulk, millel pole ühtegi elementi. Selle tähiseks on $\varnothing$. Tühi hulk on mistahes hulga osahulgaks.

Hulki võib jaotada kahte liiki: lõplikeks (näit. Tartu linna majade hulk mingil kindlal ajamomendil) ja lõpmatuteks (näit. kõigi reaalarvude hulk). Lõpmatute hulkade kõige lihtsamaks erijuhuks on nn. klassikalise hulgateooria loenduvad hulgad, mille üheks konkreetseks näiteks on kõigi naturaalarvude hulk $N = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$.

Vajalik on kõnelda veel hulgateoreetilistest tehetest. Nii defineeritakse kahe hulga A ja B summa $A \cup B$ kui hulk, mille elementideks on kõik hulkade A ja B elemendid ja ainult need. Tähendame, et hulkade A ja B ühised elemendid võetakse summas arvesse ainult ühekordselt.

Kahe hulga A ja B ühisosa $A \cap B$ defineeritakse kui hulk, mille elementideks on hulkade A ja B ühised elemendid ja ainult need.

---

[1] Muide, hulgateooria küsimusi on käsitletud ka varasemates «Matemaatika ja kaasaja» numbrites. Vt. näit. J. Gabovitši artiklit «Opereerimine hulkadega». — Matemaatika ja kaasaeg, III, lk. 3—12.

[2] G. Cantor. Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre. Matematische Annalen, 46, 1895, lk. 481—512.

Kahe hulga A ja B vahe $A \setminus B$ defineeritakse kui hulk, mille elementideks on need hulga A elemendid, mis ei kuulu hulka B.

Nii näiteks, kui $A = \{a, b, 3, 5, 7\}$ ja $B = \{b, c, 2, 5\}$, siis $A \cup B = \{a, b, c, 2, 3, 5, 7\}$, $A \cap B = \{b, 5\}$, $A \setminus B = \{a, 3, 7\}$ ja $B \setminus A = \{c, 2\}$. Märgime siinkohal, et hulga elementide järjekord loogelistes sulgudes pole oluline.

Käeolevas kirjutises kasutame veel hulga täiendi mõistet. Selle mõiste kasutamine eeldab vaadeldava hulga A teatava ülemhulga M fikseerimist. Hulga A täiend $\bar{A}$ defineeritakse seejuures võrdusega $\bar{A} = M \setminus A$, s. t. kui hulkade M ja A vahe. Nagu definitsioonist nähtub, sõltub $\bar{A}$ ülemhulgast M. On kerge veenduda, et hulga ja tema täiendi puhul kehtivad järgmised seosed:

$$A \cap \bar{A} = \varnothing \text{ ja } A \cup \bar{A} = M,$$

s. t. hulgal ja tema täiendil pole ühiseid elemente, nende hulkade summa võrdub aga ülemhulgaga M.

3. Algoritmi mõiste täpseks defineerimiseks on vaja tuua veel mõningaid mõisteid diskreetse (mittepideva) informatsiooni kodeerimise jms. kohta. Diskreetse informatsiooni kirjapanekuks on ilmselt vaja kasutada mingisuguseid sümboleid. Mingis mõttekäigus kasutatavate elementaarsete (e. jagamatute) sümbolite hulka nimetatakse tähestikuks, vastavaid sümboleid aga tähtedeks. Nii näiteks võime kõnelda ladina ja vene tähestikust või tähestikust

$$A = \{a, b, c, +, -, \times, 0, 1, (\,,\,)\}.$$

Muide, tähestikust kõneldes eeldatakse, et see on lõplik hulk. Tähestiku tähtede lineaarses järjekorras kirjutatud lõplikku jada (ilma komadeta tähtede vahel) nimetatakse sõnaks selles tähestikus. Nii on näiteks

$$\textit{matemaatika} \quad \text{ja} \quad \textit{rirareriroru} \qquad (1)$$

sõnadeks ladina tähestikus. Sümbolite jadad

$$(101 - a) \times (b + 10) \quad \text{ja} \quad) + (-00ab \times)(((\qquad (2)$$

aga sõnadeks tähestikus A. Et sõnadel (1) ja (2) puudub üldarusaadav tähendus, pole seejuures oluline, sest algoritmide teoorias käsitletakse sõnu kui puhtgraafilisi objekte. Sõnade tähendus tõuseb päevakorda alles konkreetsetes rakendustes.

Analoogiliselt tühja hulga mõistega hulgateoorias on algoritmide teoorias vaja kasutusele võtta tühja sõna mõiste. Tühi sõna on sõna, milles pole ühtegi tähte. Nii on järgnevates jutumärkides « » olev sõna tühi sõna. Vajaduse korral kasutatakse tühja sõna tähistamiseks spetsiaalset tähist Λ (eeldusel, et tähis Λ pole vaadeldava tähestiku täheks).

Sõnade puhul on vaja kõnelda veel ühe sõna esinemisest teises sõnas. Nii näiteks esineb sõna *ab* sõnas *ababc*, ja isegi kaks korda. Neid sõna *ababc* osi nimetatakse vastavalt sõna *ab* esimeseks ja teiseks esinemiseks sõnas *ababc*. Lepime kokku, et tühi sõna esineb igas sõnas, kusjuures tema esimene esinemine on sõna esimese tähe ees, teine esinemine on teise tähe ees jne.

Defineerime veel sõnade ühenduse mõiste. Sõnade P ja Q ühenduseks nimetame sõna, mille saame, kui sõnale P kirjutame järele sõna Q. Nii on näiteks sõnade $b7c$ ja $a9$ ühenduseks sõna $b7ca9$. Sõnade P ja Q ühendust tähistatakse PQ abil. Analoogilist tähistusviisi kasutame ka enam kui kahe sõna ühendamisel.

Lõpuks märgime, et igasugust diskreetset informatsiooni on võimalik esitada sõnana mingisuguses tähestikus. Nii näiteks võib vaadelda luuletusi, novelle, romaane jne. sõnadena teatavas tähestikus, mis peale tavaliste trükitähtede sisaldab veel kirjavahemärke, uue rea alguse märki ja nn. lünka. Ratsionaalarvuliste elementidega maatrikseid võib esitada sõnadena tähestikus, kus peale numbrite on tähtedeks veel «/», «,», märk «—», märk «α» samal real asuvate maatriksi elementide eraldamiseks ja märk «β» maatriksi rea lõpu tähistamiseks. Nii saab maatriksit

$$\begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -3{,}4 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

ülalmärgitud tähestikus esitada sõnana kujul

$$5\alpha - 7\beta - 3{,}4\alpha 2/3\beta.$$

4. Diskreetse informatsiooni ümbertöötamist võib ülalöeldu põhjal alati vaadelda kui sõnade ümbertöötamist. Algoritmi mõiste täpsustamist või defineerimist tuleks aga käsitleda kui nende vahendite fikseerimist, mida võib kasutada sõnade teisendamiseeskirjade esitamisel.

Kasutame sõnade kõikvõimalike teisenduseeskirjade esitamiseks kolme tüüpi elementaarseid teisenduseeskirju ehk operaatoreid. Vaatleme neid allpool.

1) Operaator, mis nõuab järgmise operatsiooni sooritamist: «asendada ümbertöötatavas sõnas sõna P esimene esinemine sõnaga Q» (asendusoperaator).

Asendusoperaatori lühemaks üleskirjutamiseks võtame kasutusele sümboli «$\rightarrow$», kirjutades kogu operaatori kujul

$$P \rightarrow Q.$$

Kui ümbertöötatavas sõnas sõna P üldse ei esine, jätab operaator ümbertöötatava sõna muutmata.

2) Operaator, mis nõuab järgmist tüüpi operatsiooni teostamist: «kui ümbertöötatavas sõnas esineb sõna P, siis minna edasi operaatori nr. 3 sooritamisele, vastupidisel juhul minna järgmise operaatori teostamisele» (tingitud suunamise operaator).

Kasutades sümbolit $=>$, esitame selle operaatori kujul

$$P => 3.$$

3) Operaator tüüpi: «minna edasi operaatori nr. 7 sooritamisele» (tingimatu suunamise operaator).

Arvestades asjaolu, et tühi sõna esineb igas sõnas, on see operaator esitatav kujul

$$\Lambda \Rightarrow 7 \text{ või } \Rightarrow 7.$$

Käesolevas kirjutises mõistame algoritmi all sõnade teisenduseeskirja, mis on esitatud ülaltoodud tüüpi operaatorite lõpliku jadana.[3] Operaatorite eraldamiseks üksteisest kasutame semikoolonit. Algoritmi rakendamine toimub selliselt, et lähtesõnale rakendame kõigepealt esimest operaatorit, saadud tulemusele järgmist operaatorit jne., kuni jõuame viimase operaatorini. Viimase operaatori rakendamisel saadavat tulemust loeme kogu algoritmi rakendamise lõpptulemuseks (antud lähtesõna puhul). Et juhtudel, kui algoritm lõpeb suunamisoperaatoriga, võib tekkida arusaamatusi lõpptulemuse mõistmisel, lisame sel korral algoritmi lõppu veel nn. tühja operaatori «→;». Operaatorite rakendamise loomulikku järjekorda (ühes reas vasakult paremale, millele järgneb üleminek järgmisele reale allpool), on võimalik muuta suunamisoperaatoritega. Operaatorid, mille juurde suunatakse suunamisoperaatoritega, tuleb varustada naturaalarvuliste numbritega. Number kirjutatakse operaatori ette ja eraldatakse operaatorist kooloniga. Operaatoreid võib tähistada numbritega suvaliselt, kuid ühe ja sama numbriga ei tohi tähistada kaht või enamat operaatorit.[4] Tähendame, et algoritm ei tarvitse anda lõpptulemust iga lähtesõna korral.

Toome nüüd konkreetseid näiteid algoritmide kohta.

N ä i d e 1. Konstrueerime algoritmi, mis vastavalt igale naturaalarvule n annab naturaalarvu $n+1$. Naturaalarvud 1, 2, 3, ... esitame seejuures sõnadena tähestikus $A = \{|\}$. Tõepoolest, naturaalarv 1 on esitatav sõnana |, naturaalarv 2 sõnana ||, 3 sõnana | jne. Vastav algoritm on väga lihtne, see koosneb ühestainsast operaatorist

$$\rightarrow |; \qquad (3)$$

Pole raske veenduda, et esitatud algoritm tõepoolest annab soovitud tulemuse. Nii näiteks lähtesõna |||| (s. t. naturaalarvu 4) puhul asendatakse operaatori (3) töö resultaadina tühja sõna esimene esinemine sõnas |||| sõnaga |. Sellega saadakse sõna ||||| (naturaalarv 5), millega algoritmi töö ka lõpeb.

---

[3] Et operaatorid esitame tähiste → ja ⇒ abil, siis ei tohi need tähised kuuluda lähtesõnade üleskirjutamiseks vajalike tähtede hulka. Allpool selgub, et sellesse tähestikku ei tohi kuuluda ka märgid «;» ja «:», mis on samuti abimärkideks algoritmi üleskirjutamisel.

[4] Siin esitatud algoritmi definitsiooni on andnud M. Ermus oma kursusetöös «Ühest normaalalgoritmi modifikatsioonist», 1965. a. Selles töös tõestas M. Ermus ka ülaltoodud algoritmi ja normaalalgoritmi sisulise samaväärsuse.

N ä i d e 2. Esitame algoritmi, mis vastavalt igale naturaalarvule n annab naturaalarvu $3n$. Lähtesõna ja lõpptulemuse fikseerime jälle tähestikus $A = \{|\}$. Vastavaks algoritmiks saame:

$$1:\ | \rightarrow ***;\ | \Rightarrow 1;$$
$$2:\ *** \rightarrow |||;\ * \Rightarrow 2;\ \rightarrow;$$

Täht * on algoritmis vaja kasutusele võtta vahetulemuste kodeerimisel, lõpptulemuses see täht ei esine.

Selgitame algoritmi tööd ühe konkreetse näite varal. Olgu lähtesõnaks näiteks sõna |||||. Esimese operaatori rakendamisel saame sellest sõna ***||||. Et selles sõnas esineb täht |, siis suunatakse järgmise (suunamis-)operaatori abil teisenduskäik jälle esimesele operaatorile. Selle rakendamine vahetulemusele ***|||| annab sõna ******|||, kuni nende kahe operaatori abil saame lõpuks vahetulemuse ***************. Järgmisel real asuvad operaatorid teisendavad kõik tähed * tähtedeks |, millega saame sõna |||||||||||||||. Sellega algoritmi töö ka lõpeb.

N ä i d e 3. Olgu lähtesõnade tähestikuks $B = \{a, b, c\}$. Algoritm olgu antud aga selline

$$1:\ a \rightarrow ab;$$
$$a \Rightarrow 1;\ \rightarrow;$$

Kui lähtesõnas ei esine tähte a (nagu näiteks sõna bcb puhul), siis saame algoritmi rakendamise tulemusena sama sõna. Kui aga lähtesõnas esineb täht a, siis asendatakse esimese operaatori rakendamise tulemusena täht a sõnaga ab. Teiselt operaatorilt suunatakse tagasi esimesele operaatorile ja nii kestab protsess lõpmatult, sest pärast esimese operaatori rakendamist saame sõna, kus jälle esineb täht a. Niisuguste sõnade puhul ei anna vaadeldav algoritm lõpptulemust.

5. Asume nüüd käesoleva kirjutise ühe põhilise mõiste — genereeritava hulga (vene keeles *перечислимое множество*) käsitlemisele. Sõnade hulka A nimetame genereeritavaks hulgaks, kui leidub algoritm $\mathfrak{A}$, mis kõikvõimalike naturaalarvuliste lähtesõnade korral annab kõik hulga A elemendid ja ainult need. Sellisel juhul ütleme lühidalt, et algoritm $\mathfrak{A}$ genereerib hulga A (ehk: genereerib hulga A elemendid ja ainult need). Tähendame, et hulga A elemente võib genereerida mistahes järjekorras, samuti võib elemente genereerida korduvalt (s. t. erinevad naturaalarvud võivad anda ühe ja sama elemendi). On lubatud juhtumid, kus mõne naturaalarvu puhul ei anna genereeriv algoritm $\mathfrak{A}$ üldse resultatiivset tulemust.

Toome nüüd mõningaid näiteid genereeritavate hulkade kohta. Naturaalarve 1, 2, 3, ... vaatleme jälle sõnadena |, ||, |||, ... tähestikus $\{|\}$.

N ä i d e 1. Tühi hulk on genereeritav hulk. Algoritm, mis genereerib tühja hulga (s. t. ei genereeri ühtegi sõna), võib olla näiteks järgmine

$$1 : \rightarrow |; \quad | \Rightarrow 1; \quad \rightarrow;$$

sest see ei anna ühegi naturaalarvulise lähtesõna puhul resultatiivset tulemust.

N ä i d e 2. Lõplik sõnade hulk on genereeritav hulk. Olgu meil antud näiteks sõnade hulk $G = \{c, cb, abb, abc\}$. Selle hulga genereerib järgmine algoritm:

$$1 : ||||| \Rightarrow 2; \quad 2 : ||||| \Rightarrow 1;$$
$$|||| \rightarrow c; \quad ||| \rightarrow cb;$$
$$|| \rightarrow abb; \quad | \rightarrow abc;$$

N ä i d e 3. Kõigi naturaalarvude hulk N on genereeritav hulk. Arvestades asjaolu, et hulkade genereerimisel kasutame lähtebaasiks samuti kõiki naturaalarve, on meil naturaalarvude genereerimiseks vajalik algoritm, mis jätab lähtesõna muutmata. Selliseks algoritmiks on näiteks algoritm

$$\rightarrow;$$

N ä i d e 4. Mistahes tähestiku $T = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ kõigi sõnade hulk (ühes tühja sõnaga või ilma selleta) on genereeritav hulk. Esitame siinkohal algoritmi, mis genereerib tähestiku T kõik sõnad ilma tühja sõnata

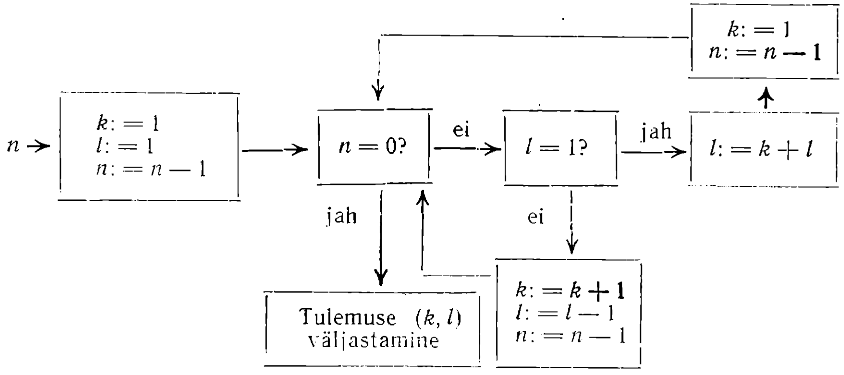
$$| \rightarrow a_1;$$
$$1 : a_1| \rightarrow a_2; \quad a_2| \rightarrow a_3; \quad \ldots; \quad a_n| \rightarrow {}^*a_1;$$
$$2 : a_1 {}^* a_1 \rightarrow a_2a_1; \quad a_2 {}^* a_1 \rightarrow a_3a_1; \quad \ldots; \quad a_n {}^* a_1 \rightarrow {}^*a_1a_1;$$
$$a_1{}^* \Rightarrow 2; \quad a_2{}^* \Rightarrow 2; \quad \ldots; \quad a_n{}^* \Rightarrow 2;$$
$${}^* \rightarrow a_1; \quad | \Rightarrow 1; \quad \rightarrow;$$

Tühja sõna genereerimise korral (peale teiste tähestiku T sõnade) tuleb vastav algoritm pisut keerulisem.

N ä i d e 5. Kõigi naturaalarvude paaride hulk on genereeritav. Et sel juhul tuleb vastav algoritm üsnagi kohmakas ja ebaülevaatlik, esitame joonisel 1 algoritmi blokk-skeemi.[5] Selle mõistmiseks on vaja teada ainult seda, et märk «:=» on omistamise märk. Nii tähendab näiteks kirjutis «$k := 1$», et suurusele k omistatakse väärtus 1. Kirjutis «$k := k + 1$» tähendab aga, et suurusele k omistatakse k endine väärtus pluss 1, s. t. suurust k suurendatakse ühe võrra. Kirjutis «$n = 0$?» tähendab, et kontrollitakse suuruse n võrdumist nulliga. Kui $n = 0$, siis tuleb arvu-

[5] Algoritmi blokk-skeemidest on olnud juttu ka varasemates «Matemaatika ja kaasaja» numbrites. Vt. Ü. K a a s i k. Algoritmide blokk-skeemid. — Matemaatika ja kaasaeg, V, lk. 24—36.

tuskäiku jätkata noolega «jah» näidatud suunas, vastupidisel juhul aga noolega «ei» näidatud suunas.

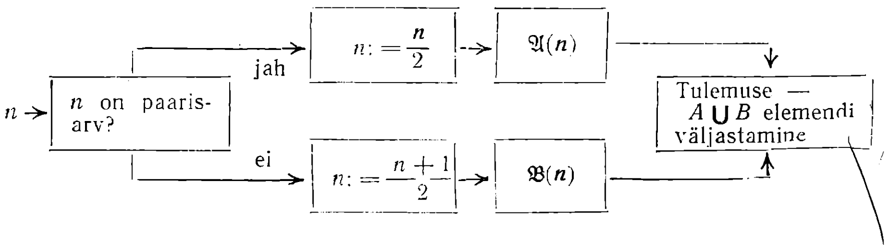


Joonis 1.

Võime tõestada ka mõned üldisemad tulemused. Nii näiteks kehtivad teoreemid 1 ja 2.

T e o r e e m 1. Kahe genereeritava hulga summa on genereeritav hulk.

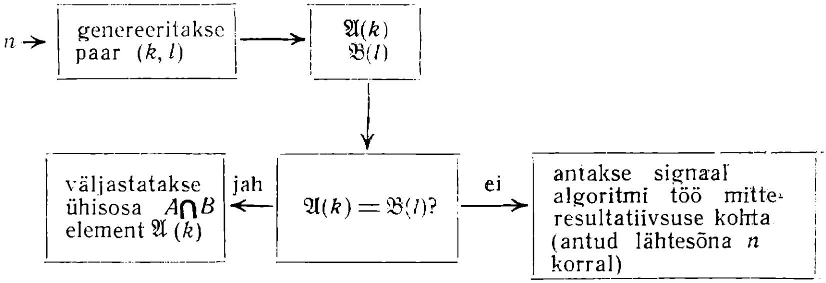
T õ e s t u s. Olgu hulgad A ja B genereeritavad. Vastavad genereerivad algoritmid olgu $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$. Summa $A \cup B$ genereerimisel talitame nii, et paarisarvudega «genereerime» hulga (nüüd juba osahulga) A, paaritute arvudega aga osahulga B. Hulka $A \cup B$ genereeriva algoritmi blokk-skeem on toodud joonisel 2.



Joonis 2.

T e o r e e m 2. Kahe genereeritava hulga ühisosa on genereeritav hulk.

T õ e s t u s. Olgu hulgad A ja B genereeritavad vastavalt algoritmidega $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$. Ühisosa $A \cap B$ genereeriva algoritmi konstrueerimisel arvestame asjaolu, et kõikide naturaalarvude paaride hulk on genereeritav (vt. näide 5). Joonisel 3 ongi toodud hulka $A \cap B$ genereeriva algoritmi blokk-skeem.



Joonis 3.

Märgime, et algoritmide $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ töö ei tarvitse alati (s. t. iga naturaalarvulise lähtesõna korral) lõppeda resultatiivselt. Sel juhtumil ei anna ka kogu genereeriv algoritm (vt. joon. 2 ja 3) resultatiivset tulemust. Mitteresultatiivsel juhtumil ei anna genereeriv algoritm üldiselt signaali algoritmi töö mitteresultatiivsuse kohta. Kõik see on aga täiesti lubatav ja pole vastuolus genereeritava hulga mõistega.

Nagu näeme pisut hiljem, pole kahe genereeritava hulga vahe üldiselt enam genereeritav hulk. Samuti pole klassikalise hulgateooria iga loenduv hulk genereeritav.

Genereeritava hulga mõiste korral — nagu hulga mõiste korral üldse — on samuti tegemist kaugeleulatuva abstraktsiooniga ja inimvõimete ning -võimaluste ekstrapolatsiooniga. Sellele vaatamata on genereeritava hulga mõiste inimkonna konstruktiivsete võimalustega siiski paremas kooskõlas kui hulga mõiste nn. klassikalises hulgateoorias, kus kasutatakse aktuaalse lõpmatuse abstraktsiooni ja võib konstrueerida kuitahes suure võimsusega hulki. Tähendame, et küberneetikas (mis teatavasti peab eriti silmas rakenduslikke eesmärke) püütakse vältida aktuaalse lõpmatuse abstraktsiooni, genereeritava hulga mõiste leiab aga üha enam rakendamist.

6. Asume nüüd järgmise põhilise mõiste — lahenduva hulga mõiste (v. k. *разрешимое множество*) käsitlemisele. Mingi genereeritava hulga G osahulka A nimetame lahenduvaks hulgaks (hulga G suhtes), kui leidub algoritm $\mathfrak{A}$, mis hulga G iga elemendi g puhul ütleb, kas see kuulub hulka A või tema täiendisse $\bar{A} = G \setminus A$. Nagu me eespoolsest osast (p. 2) teame, sõltub täiend ülemhulgast. Seega oleneb ka hulga A lahenduvus oluliselt ülemhulgast G. Mitmesuguste erinevate ülemhulkade vaatlemisel tuleb seega alati kõnelda hulga A lahenduvusest selle või teise ülemhulga suhtes. Muide, hulga lahenduvuse definitsioonist on vahetult näha, et mistahes ülemhulga G korral on hulk A ja tema täiend $\bar{A} = G \setminus A$ hulga G suhtes samaaegselt lahenduvad või mitte.

Toome mõningaid lihtsamaid näiteid lahenduvate hulkade kohta. Nii on näiteks paarisarvude hulk (ja järelikult ka paaritute arvude hulk) kõigi naturaalarvude hulga N suhtes lahenduv. Väite kehtivus järeldub sellest, et leidub algoritm

$$1: \mid\,\mid \rightarrow;\quad \mid\,\mid \Rightarrow 1;$$

$$\mid \rightarrow \mathit{paaritu};\quad \mathit{paaritu} \Rightarrow 2;$$

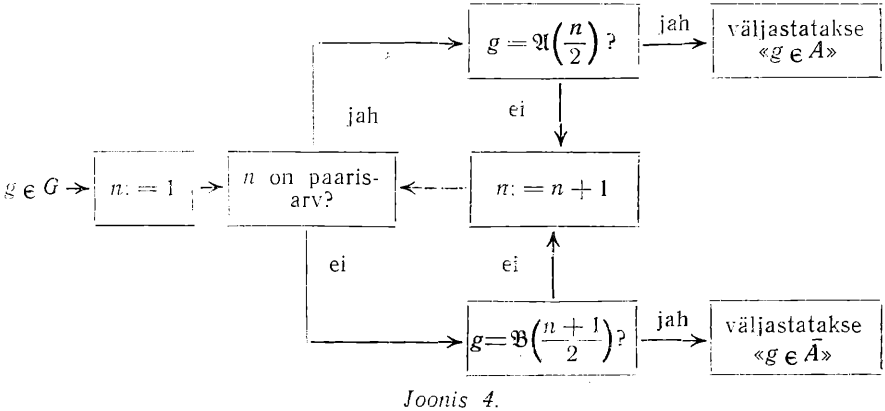
$$\rightarrow \mathit{paaris};\quad 2: \rightarrow;$$

mis teeb kindlaks, kas etteantud naturaalarv on paarisarv või mitte. Vastav algoritm on muide eriti arusaadav juhul, kui arvud esitatakse kümnendsüsteemis. Sel korral tuleb selgitada ainult seda, kas arvu viimane number on 0, 2, 4, 6, 8 või mitte.

Lahenduv on näiteks kõigi ruutude (n^2) hulk hulga N suhtes, kõigi kuupide (n^3) hulk hulga N suhtes. Et vastavad elementide kuuluvuse kindlakstegemise algoritmid on üldtuntud, siis me neid esitama ei hakka. Seevastu esitame aga ühe üldise tulemuse.

T e o r e e m 3. Hulga A lahenduvuseks hulga G suhtes on tarvilik ja piisav, et hulgad A ja $\bar{A} = G \setminus A$ oleksid mõlemad genereeritavad.

T õ e s t u s. Piisavus. Olgu hulgad A ja $\bar{A}$ genereeritavad vastavalt algoritmidega $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$. Hulga G mistahes elemendi g kuuluvuse kindlakstegemiseks genereerime paralleelselt hulgad A ja $\bar{A}$ ning võrdleme genereeritavaid elemente etteantud elemendiga g. Et algoritmid $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ koos genereerivad hulga G kõik elemendid, genereeritakse varem või hiljem, vaadeldava protsessi mingil sammul ka element g. Vastavalt sellele, kas g genereeritakse algoritmi $\mathfrak{A}$ või $\mathfrak{B}$ poolt, saame tulemuse «$g \in A$» või «$g \in \bar{A}$». Hulga G elementide kuuluvuse kindlakstegemise algoritmi blokk-skeem on järgmine:



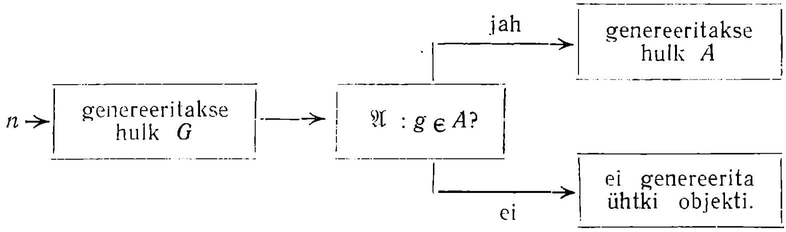
Joonis 4.

Tähendame siinkohal, et hulga A lahenduvuseks ei piisa ainult ühe hulga A või $\bar{A}$ genereeritavusest. Nii võime näiteks hulga A genereeritavuse korral genereerida A elemendid ja võrrelda neid etteantud elemendiga $g \in G$. Juhul $g \in A$ saame elemendi g teataval sammul genereerida (s. t. $g = \mathfrak{A}(n)$), millest järeldubki vahekord $g \in A$. Kui aga $g \in \bar{A}$, siis seda vahekorda me enam kindlaks teha ei saa. Tõepoolest, olles näiteks kindlaks teinud, et

$$g \neq \mathfrak{A}(1), \quad g \neq \mathfrak{A}(2), \quad \ldots, \quad g \neq \mathfrak{A}(n),$$

ei saa me veel järeldada, et $g \in \bar{A}$. Sest alati võib oletada, et element g genereeritakse vahest mõne suurema naturaalarvu korral.

Tarvilikkus. Eeldame, et genereeritava hulga G osahulk A on lahenduv, s. t. leidub algoritm $\mathfrak{A}$, mis iga elemendi $g \in G$ puhul ütleb, kas $g \in A$ või $g \in \bar{A}$. Osahulkade A ja $\bar{A}$ genereeritavus järeldub vastavate genereeritavate algoritmide olemasolust. Et need on analoogilised, siis esitame vastava genereeriva algoritmi blokk-skeemi näiteks hulga A jaoks.



Joonis 5.

7. Nagu eespool märgitud, pole kahe genereeritava hulga vahe üldiselt enam genereeritav hulk. Samuti pole iga loenduv hulk genereeritav. Vastavaid näiteid on nähtavasti kõige lihtsam konstrueerida konkreetsetest assotsiatiivsetest arvutussüsteemidest lähtudes. Assotsiatiivne arvutussüsteem on sisuliselt teatud spetsiaalse kujuga teisenduseeskirjade süsteem, mida võib rakendada kõikide mingi tähestiku sõnade puhul. Esitame näiteks ühe assotsiatiivse arvutussüsteemi.[6]

Olgu tähestik järgmine $T = \{a, b, c, d, e\}$, teisenduseeskirjad aga sellised:

$$\begin{array}{ll} ac \leftrightarrow ca & edb \leftrightarrow de \\ ad \leftrightarrow da & cdca \leftrightarrow cdcae \\ bc \leftrightarrow cb & caaa \leftrightarrow aaa \\ bd \leftrightarrow db & daaa \leftrightarrow aaa. \\ eca \leftrightarrow ce & \end{array}$$

[6] Vt. Г. Цейтин, Ассоциативное исчисление с неразрешимой проблемой эквивалентности, Труды матем. ин-та им. Стеклова, т. 52, 1958, lk. 172—189.

Teisenduseeskirjad lubavad vaadeldavates sõnades teostada sõnade asendusi. Nimelt võib tähestiku T mistahes sõnas asendada teisenduseeskirja vasakul pool asuv sõna teisenduseeskirja paremal pool asuva sõnaga ja samuti ümberpöördult. Teisenduseeskirju võib rakendada ka korduvalt. Teisenduseeskirjade rakendamisel saadud sõnu nimetatakse lähtesõnadega ekvivalentseteks sõnadeks. Sõnade ekvivalentsi tähistame märgi «$\equiv$» abil. Nii näiteks saame sõna *acde* teisendada nii (tähistame allakriipsutusega asendatava sõnaosa, numbriga aga kasutatava teisenduseeskirja):

$$ac\underset{6.}{\underline{de}} \equiv a\underset{5.}{\underline{ce}}db \equiv aec\underset{2.}{\underline{ad}}b \equiv aecdab. \tag{4}$$

Teisenduseeskirjade rakendamine on assotsiatiivses arvutussüsteemis täiesti suvaline (see on muide oluline erinevus võrreldes algoritmidega) ja seetõttu võiks lähtesõna teisendada ka nii:

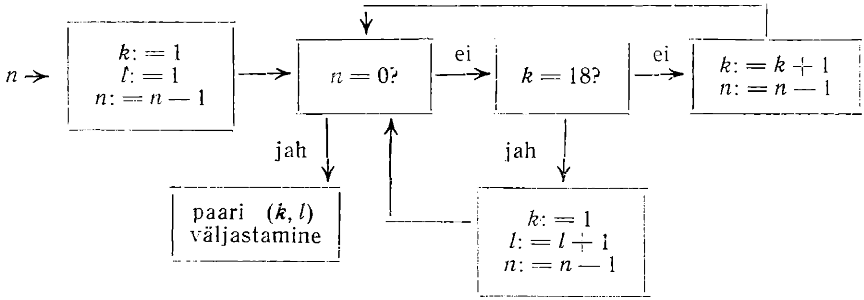
$$\underset{1.}{\underline{ac}}de \equiv c\underset{2.}{\underline{ad}}e \equiv cdae. \tag{5}$$

Teisendustes (4) ja (5) toodud sõnad on sõnade ekvivalentsuse definitsiooni põhjal kõik ekvivalentsed lähtesõnaga *acde*, samuti ka ekvivalentsed omavahel.

Nüüd võib sõnastada järgmise probleemi (nn. sõnade ekvivalentsi probleemi): kas on võimalik konstrueerida algoritm, mis teeks kindlaks tähestiku T mistahes kahe sõna puhul, kas need on ekvivalentsed või mitte. Võime vaadelda ka kitsamat probleemi (sõnade ekvivalentsi probleem mingi kindla sõna suhtes): kas on võimalik konstrueerida algoritm, mis teeks tähestiku T mistahes sõna puhul kindlaks, kas see on ekvivalentne mingi etteantud sõnaga või mitte. Väga paljude assotsiatiivsete arvutussüsteemide korral on niisugused ekvivalentsi kindlakstegevad algoritmid kergesti konstrueeritavad. Kuid mitmete assotsiatiivsete arvutussüsteemide puhul on tõestatud, et niisuguseid algoritme pole võimalik konstrueerida. Muuhulgas tõestas G. Tseitin eespool tsiteeritud artiklis, et vaadeldava assotsiatiivse arvutussüsteemi korral ei ole võimalik konstrueerida algoritmi, mis lahendaks sõnade ekvivalentsi probleemi sõna *aaa* suhtes.

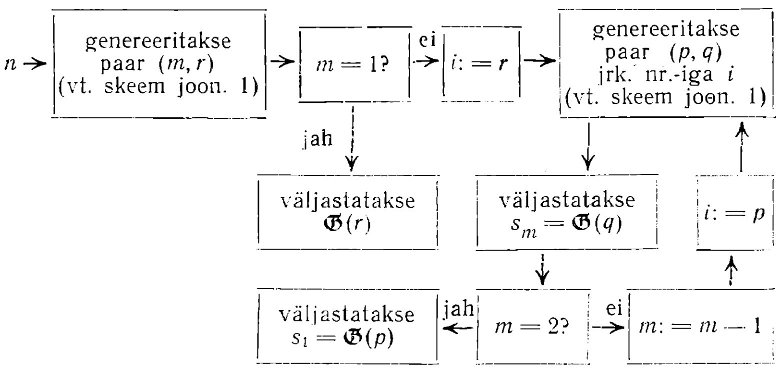
Muide kõik sõnaga *aaa* ekvivalentsed sõnad moodustavad hulga, mida võime tähistada näiteks tähega A. Sõnaga *aaa* mitteekvivalentsete sõnade hulka tuleb siis tähistada $\bar{A} = G \backslash A$, kus G on tähestiku T kõigi sõnade hulk. Seega võib Tseitini ülaltoodud tulemust sõnastada ka nii, et hulk A on mittelahenduv.

Katsume nüüd selgitada aga selle konkreetse hulga A genereeritavuse probleemi. Kõigepealt on arusaadav, et iga sõnaga *aaa* ekvivalentne sõna on saadav sõnast *aaa* lõpliku arvu teisenduste abil. Et teisenduseeskirju võib nummerdada naturaalarvude 1, 2, . . . , 18 abil (arvestame, et need n.-ö. kahepoolsed asendused) ja asendatavate sõnade esinemisi võib nummerdada kõigi naturaalarvude abil, siis on iga teisenduseeskirja konkreetne rakendamine kodeeritav naturaalarvude paarina (k, l), kus $k = 1, 2, \ldots, 18$ ja l omab kõiki naturaalarvulisi väärtusi. Kõikide selliste paaride hulk on genereeritav algoritmiga $\mathfrak{G}$, mille skeem on selline



Joonis 6.

Edasi näitame, et niisugustest paaridest moodustatud kõikide sõnade hulk on samuti genereeritav. Selleks lähtume kõikide naturaalarvude paaride hulga genereerimise põhimõttest (vt. skeemi joonisel 1), üldistades vastavat meetodit m komponendist koosnevate süsteemide juhule. Seejuures vaatleme süsteemi $(s_1, s_2, s_3, \ldots, s_{m-1}, s_m)$ kujul $(((\ldots((s_1, s_2), s_3), \ldots), s_{m-1}), s_m)$. Vastava genereeriva algoritmi blokk-skeem on järgmine



Joonis 7.

Edasi on võimalik konstrueerida algoritm $\mathfrak{T}$, mis teisendab sõna aaa paaride sõnas $(k_1, l_1)(k_2, l_2) \ldots (k_m, l_m)$ ettenähtud viisil. Et aga selle kirjapanemine on küllaltki ruuminõudev, siis peame sellest siinkohal loobuma.

Mida on nüüd võimalik kõige selle põhjal öelda? Pole raske veenduda, et joonisel 7 esitatud algoritmi ja algoritmi $\mathfrak{T}$ kompositsioon (järjest rakendamine) kujutab endast hulga A genereerimise algoritmi. Järelikult on hulk $\bar{A}$ genereeritav. Arvestades asjaolu, et tähestiku T kõigi sõnade hulk G on genereeritav, ja seda, et hulk A pole lahenduv, tuleb teoreemi 3 põhjal järeldada, et hulk $\bar{A}$ (tähestiku T kõigi sõnaga *aaa* mitteekvivalentsete sõnade hulk) pole genereeritav. Et hulk $\bar{A}$ on klassikalise hulgateooria seisukohast loenduv, siis on hulk $\bar{A}$ ühtlasi ka loenduva ja mittegenereeritava hulga näiteks.

Silmas pidades seda, et hulga A genereeritavuse tõestus on ülekantav mistahes assotsiatiivsetele arvutussüsteemidele, võime ütelda, et assotsiatiivsed arvutussüsteemid on üheks mooduseks hulkade genereerimiseks. Loomulikult tekib küsimus, kas leidub veel teisi mooduseid hulkade genereerimiseks. Nagu varsti näeme, tuleb sellele küsimusele vastata jaatavalt.

8. Matemaatilises loogikas ja matemaatika alustes kasutatakse sageli üht isesugust defineerimisviisi — nn. induktiivset definitsiooni. Muide, niisugust defineerimisviisi kasutatakse eriti algoritmiliste keelte (ALGOL-60 jt.) käsitlemisel. Nimelt esitatakse selliste keelte süntaks tavaliselt J.W. Backuse poolt kasutuselevõetud metalingvistiliste valemite abil, mis aga erinevad induktiivse definitsiooni tavalisest kujust ainult tähistamisviisilt.

Induktiivse definitsiooni olemuse iseloomustamiseks tähendame, et selle definitsiooni puhul defineeritakse mõiste või mõisted (või nagu me ka võime ütelda — teatav sõnade hulk või sõnade hulgad) järk-järgult. Esiteks loetletakse mõningad hulga elemendid. Seejärel antakse «reeglid» (nimelt sõnade ühendamise reeglid), mille abil on nendest elementidest võimalik konstrueerida uusi selle hulga elemente. Öeldust ilmneb muide induktiivse definitsiooni konstruktiivne iseloom. Kuid nagu varsti näeme, võime selle definitsiooni kohta väita midagi hoopis olulisemat. Kõigepealt toome aga selle definitsiooni kohta rea näiteid.

Näide 1. Esitame täisarvu induktiivse definitsiooni. Täisarve käsitame kui teatud liiki sõnu tähestikus {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, +, —}. Definitsioon ise on järgmine:

1. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ja 9 on ilma märgita täisarvud;
2. kui $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ on ilma märgita täisarvud, siis nende ühendus $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ on ilma märgita täisarv;
3. kui $\mathfrak{C}$ on ilma märgita täisarv, siis $+\mathfrak{C}$ ja $-\mathfrak{C}$ on märgiga täisarvud;
4. kõik ilma märgita täisarvud ja märgiga täisarvud on täisarvud.

Selle definitsiooni kohaselt on näiteks +000, —072 ja 1966 täisarvud, $5+0-63$ aga pole täisarv.

Näide 2. Oletagem, et kuskil «loogikute maal» defineeritakse mehe- ja naisenimed järgmise induktiivse definitsiooni abil:

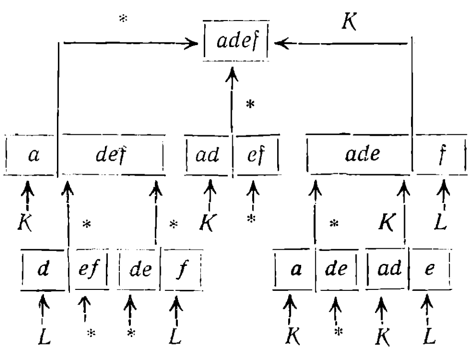
1. Ants, Endel, Ivar, Karl, Leo, Mati, Olaf, ja Ülo on mehenimed;
2. Ene, Endla, Eva, Helmi, Laine, Leida, Maret, Reet ja Tamara on naisenimed;
3. kui $\mathfrak{A}$ on mehenimi ja $\mathfrak{B}$ on kas mehe- või naisenimi, siis $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{B}$ on mehenimi;
4. kui $\mathfrak{C}$ ja $\mathfrak{D}$ on naisenimed, siis on $\mathfrak{C}$-$\mathfrak{D}$ naisenimi.

Selle definitsiooni kohaselt on näiteks Ants-Ivar-Mati ja Ülo-Reet mehenimed, Eva-Endla-Maret aga naisenimi, Ene-Endel pole aga ei mehe- ega naisenimi.

Näidetes 1 ja 2 on võimalik ilma erilise raskuseta kindlaks teha, kas konstrueeritud sõna on täisarv või mitte, on mehe- või naisenimi või pole üldse eesnimi. Kuidas on lugu seesuguse kindlakstegemisega aga keerulisematel juhtudel. Seoses sellega vaatleme järgmist puhtformaalset näidet. Olgu antud tähestik $W = \{a, b, c, d, e, f\}$. Defineerime kaks tähestiku W sõnade klassi (terminit «klass» kasutame kui sünonüümi sõnale «hulk») järgmise induktiivse definitsiooni abil.

1. a, b ja c on klassi K sõnad;
2. d, e ja f on klassi L sõnad;
3. kui $\mathfrak{A}$ on klassi K sõna ja $\mathfrak{B}$ on klassi L sõna, siis on $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ klassi K sõna.
4. kui $\mathfrak{A}$ on klassi K sõna ja $\mathfrak{B}$ on klassi L sõna, siis on $\mathfrak{B}\mathfrak{A}$ klassi L sõna.

Kuidas selgitada, kas näiteks sõna *adef* on klassi K või L sõna või ei kuulu kummassegi neist klassidest. Selleks võib kasutada uuritava sõna järkjärgulise jaotamise võtet. Võtte kasutamine selgub alljärgnevast joonisest



Joonis 8.

Selgitusena joonise 8 juurde märgime, et K ja L abil tähistame asjaolu, et vaadeldav sõna kuulub vastavasse klassi, * tähistab aga seda, et me ei saa väita vaadeldava sõna kuulumist ei klassi K ega L. Analüüsi tuleb teostada igas harus (altpoolt ülespoole), lähtudes definitsiooni punktidest 1—4. Kastikesesse suunduva mitme noole korral domineerib resultaat K või L tärnikese * üle. Analüüs joonisel 8 näitab, et vaadeldav sõna *adef* on klassi K sõna.

Esitatud analüüsivõte baseerub etteantud sõna kõikide konstruktsioonivõimaluste läbivaatamisel. Et neid antud definitsiooni korral on aga lõplik hulk, siis saame küsimusele «kas sõna P kuulub klassi K (resp. klassi L)?» alati kindla vastuse — «jah» või «ei». Pole eriti raske veenduda, et vaadeldav analüüsimeetod on üldistatav niisugustele juhtumitele, kus definitsioonis esineb mistahes lõplik hulk sõnade klasse K_i ($i = 1, 2, \ldots, m$), kusjuures need klassid ei sisalda tühja sõna ja kus on lõplik arv konstruktsioonireegleid kujul: «kui sõnad $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ kuuluvad vastavalt klassidesse $K_{\alpha_1}, K_{\alpha_2}, \ldots, K_{\alpha_n}$, siis kuulub sõna $Q_1Q_2 \ldots Q_n$ klassi K_j.

Mida võime kõige ülalöeldu põhjal väita? Et kogu analüüs taandub lõpliku arvu juhtude läbivaatamisele, saame küsimusele «kas sõna P kuulub klassi K_i?» alati kindla vastuse — «jah» või «ei». Seega on selliste induktiivsete definitsioonide puhul definitsioonis esinev mistahes klass K_i lahenduv. See ongi induktiivse definitsiooni põhiline omadus, mille tõttu see konstruktsioon on üldse definitsioonina kasutatav. Muide, nagu teame teoreemist 3, toob sõnaklasside K_i lahenduvus kaasa nende genereeritavuse. Seega võib induktiivset definitsiooni iseloomustada kui teatavat moodust sõnaklasside genereerimiseks, kusjuures need genereeritavad klassid on kõik ühe teatava ülemhulga suhtes lahenduvad.

Seoses induktiivsete definitsioonidega on mõtet kõnelda ka nn. generatiivsetest grammatikatest. Loomuliku keele generatiivse grammatika koostamise põhimõtted kuuluvad N. Chomskyle. Selle grammatika eesmärgiks on konstruktsioonireeglite süsteemi andmine, millest lähtudes oleks konstrueeritav uuritava keele (või selle mingi fragmendi) iga grammatiliselt korrektne lause. Generatiivse grammatika ülesehitusprintsiipidega tutvudes võime aga öelda, et niisugune grammatika pole sisuliselt midagi muud kui uuritava keele (või selle mingi fragmendi) grammatiliselt korrektse lause induktiivne definitsioon. Erinevused nende kahe konstruktsioonimooduse vahel on ainult vormilised ja seisnevad tähistusviisis ja reeglite järjestamises.

Toome näiteks inglise keele teatava fragmendi generatiivse grammatika selle tavalisel kujul: [7]

---

[7] Vt. Н. Хомский. Синтаксические структуры, сб. Новое в лингвистике. Москва, 1962, lk. 412—527.

1. *Sentence* → *NP* + *VP*
2. *NP* → *T* + *N*
3. *VP* → *Verb* + *NP*
4. *T* → *the*
5. *N* → *man*, *ball*, ...
6. *Verb* → *hit*, *took*, ...

Alustades terminist «*Sentence*» (lause) ja teostades järkjärgulisi asendusi, võime saada näiteks niisuguse ingliskeelse lause: *the* + + *man* + *hit* + *the* + *ball* (mees lõi palli). Induktiivse definitsioonina on sama grammatika esitatav järgmiselt:

1. *man*, *ball*, ... on sõnad klassist *N*,
2. *hit*, *took*, ... on sõnad klassist *Verb*,
3. *the* on sõna klassist *T*,
4. kui 𝔄 on sõna klassist *T* ja 𝔅 on sõna klassist *N*, siis on 𝔄 + 𝔅 sõna klassist *NP*,
5. kui 𝔄 on sõna klassist *Verb* ja 𝔅 on sõna klassist *NP*, siis on 𝔄 + 𝔅 sõna klassist *VP*,
6. kui 𝔄 on sõna klassist *NP*, ja 𝔅 on sõna klassist *VP*, siis on 𝔄 + 𝔅 sõna klassist *Sentence*.

Kokkuvõttes võime öelda, et generatiivne grammatika on teatav menetlus mingi keele (või selle fragmendi) grammatiliselt korrektsete lausete hulga genereerimiseks, kusjuures see hulk on teatava suurema hulga — kõikide formaalselt võimalike fraaside hulga suhtes lahenduv.

9. Kasutame lõpuks ülaltoodud mõisteid veel matemaatilise loogika ja matemaatika aluste mõningate põhiprobleemide selgitamiseks.[8]

Teatavasti võib matemaatilise loogika kõige lihtsama arvutussüsteemi — lausearvutuse — üles ehitada kui kahendmuutuja funktsioonide teooria. Selles käsitluses vaadeldakse lauseid *X*, *Y*, *Z*, ... kui kahendmuutujaid, mis võivad omandada ainult väärtusi 1 (tõene) ja 0 (väär). Lausearvutuse valemeid vaadeldakse kahendmuutuja funktsioonidena, mis muide võivad ka omandada väärtusi ainult sellest kaheelemendilisest hulgast {1, 0}. Tulemuste tõestamisel kasutatakse siin tavalisi matemaatilisi tõestusvõtteid, hulgateooria tulemusi jms. Niisugusel viisil ülesehitatud lausearvutus sobib rakendamiseks kõikidel aladel, välja arvatud matemaatika aluste uurimine. Selleks otstarbeks tuleb lausearvutus üles ehitada rangemalt — nimelt kui formaliseeritud aksiomaatiline teooria. Esitame siin ühe lausearvutuse aksiomaatika, mis on mõeldud samaselt tõeste lausearvutuse valemite tuletamiseks (tõestamiseks):

---

[8] Siinkohal eeldame, et lugeja tunneb matemaatilise loogika põhimõisteid (on näiteks lugenud A. Tautsi artiklit «Matemaatilise loogika põhimõisted». — Matemaatika ja kaasaeg, II, lk. 3—7).

1. $X \vee X \rightarrow X$,
2. $X \rightarrow X \vee Y$,
3. $X \vee Y \rightarrow Y \vee X$.
4. $(X \rightarrow Y) \rightarrow (Z \vee X \rightarrow Z \vee Y)$.
5. (asenduse aksioom): valemis võib mistahes lause asendada mingi lausearvutuse valemiga, kusjuures see asendus tuleb teostada kõikjal, kus vastav lause selles valemis esineb;
6. (järelduse aksioom): valemitest $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ saame uue valemi $\mathfrak{B}$.

Valemi $\mathfrak{C}$ tõestuseks nimetatakse lõplikku valemite jada

$$\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n, \tag{6}$$

mis lõpeb valemiga $\mathfrak{C}$ (s. t. valem $\mathfrak{A}_n$ on samane valemiga $\mathfrak{C}$) ja kus iga valem $\mathfrak{A}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ on kas üks aksioomidest 1—4 või on saadud valemitest $\mathfrak{A}_j$ $(j < i)$ aksioomide 5 ja 6 abil.

Kasutades analoogilisi mõttekäike nagu p. 7 sõnaga *aaa* ekvivalentsete sõnade hulga genereeritavuse näitamisel, võime näidata ka siin, et kõigi tõestatavate lausearvutuse valemite hulk on genereeritav. Selgub, et see hulk on ka lahenduv, sest: 1) aksiomaatikast lähtudes tõestatavate valemite hulk ja mitteaksiomaatilise lausearvutuse samaselt tõeste valemite hulk ühtivad ja 2) mitteaksiomaatilises lausearvutuses on taoline «lahendav protseduur» (tabelimeetod) olemas. Seega oleme toonud näite aksiomaatilisest teooriast, kus aksiomaatika abil genereeritavate valemite («tõdede») hulk on lahenduv kõikide valemite ehk väidete hulga suhtes. Niisuguseid teooriaid nimetatakse mõnikord ka «lahenduvateks teooriateks». Lahenduvatest teooriatest võiks nimetada veel elementaarset eukleidilist geomeetriat, Abeli rühmade teooriat, reaalarvude korpuse teooriat, Boole'i algebrat jpt.

Vaatleme nüüd matemaatilise loogika üht laiemat arvutussüsteemi — esimest järku predikaatarvutust. Ka seda arvutussüsteemi on võimalik üles ehitada mitteaksiomaatiliselt — hulga- ja funktsiooniteooria alusel. Kuid matemaatika aluste käsitlemiseks tuleb seda teha aksiomaatiliselt. Võrreldes juba esitatud lausearvutuse aksiomaatikaga, tuleb siin lisada mõned uued aksioomid:

7. $\forall x F(x) \rightarrow F(y)$,
8. $F(y) \rightarrow \exists x F(x)$,
9. valemist $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}(x)$, kus $\mathfrak{A}$ ei sisalda muutujat x, saame valemi $\mathfrak{A} \rightarrow \forall x \mathfrak{B}(x)$,
10. valemist $\mathfrak{A}(x) \rightarrow \mathfrak{B}$, kus $\mathfrak{B}$ ei sisalda muutujat x, saame valemi $\exists x \mathfrak{A}(x) \rightarrow \mathfrak{B}$,
11. aksioom, mis võimaldab muutujate ümbertähistamist.

Seejuures tuleb aksioome 5 ja 6 mõista siin laiemalt, nii et nad kehtivad predikaatarvutuse valemite korral. Valemi tõestuse mõiste on analoogiline tõestusega lausearvutuses (6). Analoogiliste mõttekäikudega, millest oli juttu juba eespool, on võimalik näidata, et kõikide predikaatarvutuse aksiomaatika baasil tõestatavate valemite hulk on genereeritav. Muide, see hulk ühtib mitteaksiomaatilise predikaatarvutuse samaselt tõeste valemite hulgaga. Kuid erinevalt lausearvutusest pole siin võimalik konstrueerida algoritmi, mis iga valemi puhul teeks kindlaks, kas see on tõestatav (ehk: samaselt tõene) või mitte. Seega — kõikide tõestatavate predikaatarvutuse valemite hulk pole (kõikide valemite hulga suhtes) lahenduv. Seega on meil predikaatarvutuse korral juba tegemist mittelahenduva teooriaga. See asjaolu tekitab muidugi mitmeidki komplikatsioone predikaatarvutuse rakendustes. Seepärast on loogikud uurinud predikaatarvutuse erijuhte, kus niisugune «lahendav protseduur» on olemas. Üks selliseid olulisemaid erijuhte on predikaatarvutus ühekohaliste predikaatidega.

Vaatleme lõpuks probleeme, mis tekivad naturaalarvude aritmeetika aksiomaatilisel ülesehitamisel. Et naturaalarvude aritmeetika ehitatakse üles predikaatarvutuse baasil, siis sisaldab vastav aksiomaatika kogu predikaatarvutuse aksiomaatika ja peale selle muidugi veel spetsiaalsed aritmeetika aksioomid, nagu näiteks täieliku induktsiooni aksioomi [9]

$$F(0) \wedge \forall x[F(x) \rightarrow F(x')] \rightarrow F(y).$$

On võimalik näidata, et ka selle aksiomaatika baasil tõestatavate valemite hulk on genereeritav. Kuid ka siin pole tõestatavate valemite hulk lahenduv kõikide valemite hulga suhtes (Rosser, 1936). Naturaalarvude aritmeetika aksiomaatika korral ilmneb aga veelgi üllatavam asjaolu. Nimelt tõestas K. Gödel 1931. a., et kui 1) naturaalarvude aksiomaatika on mittevasturääkiv ja 2) võimaldab defineerida mõiste «tõestatav antud aksioomide süsteemist lähtudes», siis on võimalik antud teooria raames konstrueerida selline valem, mis pole selle aksiomaatika raames tõestatav (ega ümberlükatav), kuid mis on ometi sisuliselt tõene. Et Gödeli tulemus kehtib ka pärast aksiomaatika täiendamist (mittetõestatava tulemuse juurdevõtmise teel) ja kõikide tõestatavate valemite hulk on ka pärast aksiomaatika sellist täiendamist ikka genereeritav, siis on võimalik järeldada ainult üht — sisulise (mitteaksiomaatilise) naturaalarvude aritmeetika tõeste valemite hulk on mittegenereeritav. Sisuliselt tähendab see seda, et vastav mitteaksiomaatiline teooria on tegelikult mitte aksiomatiseeritav (vähemalt mitte selliste meetoditega aksiomatiseeritav).

Tähendame lõpuks, et kogu see probleemistik pole tähtis mitte ainult matemaatika aluste uurimisel, vaid on ka praktilise tähtsusega. Nimelt on hakatud viimasel ajal elektronarvuteid kasutama ka teooriate ülesehitamisel (teoreemide tõestamisel jne.). Sellistel juhtudel on aga teooria põhiomaduste teadmine (näit. lahendava protseduuri olemasolu jms.) olulise tähtsusega.

---

[9] Naturaalarvude aritmeetika aksiomaatika on esitatud tervikuna näit. I. Kulli õpikus «Matemaatiline loogika», 1964, lk. 202—203 ja A. Tautsi artiklis «Matemaatilise loogika rakendusi», — Matemaatika ja kaasaeg, III, lk. 13—19.

ÕPETLASTE ARVAMUSI KÜSIMUSES «KAS MASIN VÕIB MÕTELDA?»

A. N. Kolmogorov, akadeemik

«Kas on võimalik kunstlikult luua elusolendeid, kes on võimelised paljunema ja progressiivselt arenema ning kelle kõrgemad vormid omavad emotsioone, tahet ja mõtlemist ka kõige peenemates varjundites?

... on tähtis selgelt mõista, et materialistliku maailmavaate raamides pole mingeid veenvaid põhimõttelisi argumente positiivse vastuse vastu meie küsimusele. See positiivne vastus on kaasaegseks vormiks väidetele elu loomulikust tekkimisest ja teadvuse materialistlikust loomusest.»

S. L. Sobolev, akadeemik

«Inimene ei saa tõepoolest mõtelda ilma ajuta, kuid võib luua aju, mis mõtleb ilma inimeseta.»

B. Bjälik, filoloogiadoktor

«Seltsimehed! Kas te mõtlete seda tõsiselt?»

T. D. Pavlov, Bulgaaria Teaduste Akadeemia president

««Elektronaju» võib arvutada, tõlkida, modelleerida, kuid mingil juhul ta ei tea ega saa ka teada, mida ta arvutab, tõlgib, modelleerib, veel vähem suudab ta luua kunstitöid.»

V. V. Parin, NSVL Meditsiiniakadeemia tegevliige

«Õpetlastele-materialistidele, kes asuvad põhjuslikkuse järjekindlatel seisukohtadel, on vaieldamatu p r i n t s i p i a a l n e   v õ i m a l u s *reprodutseerida isegi kõige keerukamaid materiaalseid protsesse.»*

B. A. Trahtenbrot, füüsika-matemaatikadoktor

«... teoreemid algoritmilisest mittelahendatavusest näitavad, et matemaatika ei taandu algoritmide konstrueerimisele, et tunnetusprotsess matemaatikas pole lõpuni automatiseeritav. Isegi üsna kitsastes matemaatika harudes (nagu lõpliku arvu moodustajatega rühmade teoorias jm.) on olemas massiliselt probleeme, mida ei suuda lahendada ükski automaat ... Seda enam on absurdsed väited, nagu suudaks masin täielikult asendada teadlase loomingulise töö.»

A. Turing, professor

«... ainsaks viisiks, mille abil saab kindlaks teha, et masin suudab mõtelda, on m u u t u d a *ise masinaks ja tajuda oma enese mõtlemise protsessi ... Täpselt samuti, kui talitada selle vaatekoha järgi, siis osutub, et ainsaks viisiks veenduda selles, et* a n t u d   i n i m e n e *tõepoolest mõtleb, on muutuda just selleks inimeseks.*

... küsimuse «kas masinad võivad mõtelda?» loen ma uurimise jaoks liialt mõttetuks. Kuid sellele vaatamata olen ma veendunud, et meie sajandi lõpuks muutub sõnade ja arvamuste kasutamine sedavõrd, et võib kõnelda mõtlevatest masinatest ilma kartuseta, et sind valesti mõistetaks. Veelgi enam, ma pean kahjulikuks varjata selliseid veendumusi.»

W. R. Ashby, professor

«... tuleb lõpetada kõnelused kahte sorti mõistusest sõltuvalt sellest, kas on juttu elavast ajust või masinast. On olemas ainult üht sorti mõistus.»

N. Wiener, professor

«Doktor Ashby arvab, et tõepoolest saab luua masinaid, mis on targemad nende loojast, ja selles olen ma temaga täielikult nõus.»

J. Bernal, professor

«... loomulikult ei asenda elektronarvuti kunagi inimaju, vaid on ainult selle lisandiks, laiendades aju kvalitatiivseid ja kvantitatiivseid võimalusi. Ilma tarkade inimesteta on elektronarvutid rumalad, nad isegi ei tea, millal teevad rumalusi.»

Tõlgitud ajakirjast «Знание — сила» (№ 9, 1966, lk. 11)

Majandusmatemaatika

LAADIMISÜLESANDED

Ü. Kaasik, E. Tamme

Matemaatilise planeerimise tegelike rakenduste hulgas on viimasel ajal järjest suuremat tähtsust hakanud omandama nn. täisarvulised lineaarsed planeerimisülesanded[1], s. t. sellised lineaarsed planeerimisülesanded, kus lisaks tavalistele kitsendustele nõutakse veel (kas kõigi või mõningate) tundmatute täisarvulisust. Vaatamata kogu maailma matemaatikute jõupingutustele pole seni veel õnnestunud välja töötada niisuguste planeerimisülesannete lahendamise universaalset ja praktiliseks kasutamiseks sobivat algoritmi. Küll on aga loodud efektiivseid algoritme mitmesuguste erikujuliste ülesannete lahendamiseks. Sageli õnnestub selliseid algoritme konstrueerida isegi üpris lihtsa matemaatilise aparatuuri baasil. Ühe niisuguse algoritmi tutvustamisele ongi pühendatud käesolev artikkel.

Leidub terve hulk rakenduslikke probleeme, mis kõik taanduvad üheks ning samaks matemaatiliseks ülesandeks, nn. laadimisülesandeks. Selliste probleemide tüüpiliseks esindajaks on järgmine.

Olgu tegemist laeva või lennukiga, millele saab laadida vaid ülimalt K kaaluühikut kaupa. Laadimiseks ettenähtud objekte olgu kokku n tükki, kusjuures nende kaalud on

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

ning hinnad vastavalt

$$c_1, c_2, \dots, c_n.$$

Raskus tekib siis, kui meil pole võimalik laadida kõiki olemasolevaid objekte, s. t. kui

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n > K.$$

Sellisel juhul kerkib probleem, kuidas valida teatavas mõttes sobivaim, näiteks võimalikult suure maksumusega laadung.

---

[1] Lineaarsete planeerimisülesannete lahendamist on kirjeldatud näiteks artiklis Ü. Kaasik, Lineaarsed planeerimisülesanded. — Matemaatika ja kaasaeg, II, lk. 31—46 ja õpikus Ü. Kaasik, Matemaatiline planeerimine, Tln., 1967. Viimases on lühidalt puudutatud ka täisarvuliste lineaarsete planeerimisülesannete lahendamist (lk. 97—105).

Saadud ülesannet võib matemaatiliselt sõnastada järgmiselt: tundmatute $x_1, x_2, \ldots, x_n$ väärtusteks saavad olla vaid arvud 0 ja 1; valida need väärtused nii, et oleks rahuldatud võrratus

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \leqslant K$$

ja avaldis

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

omandaks maksimaalse väärtuse.

Ülesanne näib olevat üsna lihtne, kuid osutub, et suuremate n väärtuste korral on tema lahendamine seotud päris tõsiste raskustega.

Esitame sõnastatud ülesande lahendamiseks meetodi, mis vähemalt mõningatel juhtudel võimaldab suhteliselt lihtsalt jõuda optimaalse lahendini. Parema jälgitavuse huvides tutvustame meetodit ühe konkreetse ülesande lahendamise käigus. Tähelepanelik lugeja peaks seda siis juba ka teistel juhtudel rakendada oskama.

Kujutleme järgmist olukorda. Polaarekspeditsiooni varustus tuleb evakueerida üheainsa lennukiga, mille kandejõud on 2000 kg. Varustus koosneb kaheteistkümnest seadmest, mille kaalud kilogrammides ja hinnad rublades on esitatud tabelis 1.

Tabel 1

Seadme kaal	450	400	400	350	300	290	270	270	250	240	120	100
Seadme hind	500	460	400	700	100	230	350	350	800	120	60	300

Arvestades asjaolu, et lennukile pole võimalik laadida kogu varustust (seadmete kogukaal on 3440 kg), seame ülesandeks laadida lennuk nii, et evakueeritava varustuse maksumus oleks võimalikult suur.

Ülesande lahendamiseks arvutame kõigepealt iga seadme kaaluühiku maksumuse (jagades hinna kaaluga) ning kanname

Tabel 2

Seadme nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Seadme kaal	250	100	350	270	270	400	450	400	290	240	120	300
Seadme hind	800	300	700	350	350	460	500	400	230	120	60	100
Kaaluühiku maksumus	3,20	3,00	2,00	1,30	1,30	1,15	1,11	1,00	0,79	0,50	0,50	0,33

need tulemused tabelisse. Seejärel järjestame seadmed kaaluühiku maksumuse kahanemise järjekorras. Nii saame tabeli 2, kus igale seadmele on ühtlasi omistatud vastav järjekorranumber.

Võimalikult väärtusliku laadungi komplekteerimiseks lülitame sellesse seadmeid tabelis 2 esitatud järjekorras. Osutub, et laadida saab 6 esimest seadet kogukaaluga

$$250 + 100 + 350 + 270 + 270 + 400 = 1640$$

ja maksumusega

$$800 + 300 + 700 + 350 + 350 + 460 = 2960.$$

Lennuki kandejõud ei võimalda laadungisse lisada seitsmendat või kaheksandat seadet. Küll aga saab veel lisada üheksanda seadme, mis annab laadungi kaaluga

$$1640 + 290 = 1930$$

ja maksumusega

$$2960 + 230 = 3190.$$

Rohkem seadmeid enam laadungisse lisada ei saa. Sellest aga ei järeldu veel kaugeltki, et oleme leidnud kõige väärtuslikuma võimalikest laadungitest. Laadungi maksumust võib õnnestuda suurendada mõningate seadmete asendamise teel. Kui näiteks üheksas seade asendada kümnenda ja üheteistkümnendaga, siis oleks laadungi kaal

$$1640 + 240 + 120 = 2000,$$

s. t. kasutaksime ära lennuki kogu kandejõu, kuid sellise laadungi maksumus

$$2960 + 120 + 60 = 3140$$

osutub väiksemaks kui eelmisel juhul.

Lihtne on siiski näha, et kui seni leitud parimas laadungis asendada kuues seade seitsmendaga, siis saab kogumaksumust 40 rbl. võrra suurendada: seadmetest 1 — 5, 7 ja 9 koosnev laadung kaalub 1980 kg ning selle maksumus on 3230 rbl. Laadungi ümberkomplekteerimist võime veelgi jätkata, kuid suurema maksumusega laadungit niivõrd lihtsalt enam leida ei õnnestu.

Selleks et selgitada, kas leitud laadung ongi juba suurima võimaliku maksumusega või leidub siiski mõni veelgi väärtuslikum, tuleks läbi vaadata kõikvõimalikud laadungiks sobivad kombinatsioonid. Seda on aga praktikas raske teha, sest võimalike kombinatsioonide arv osutub väga suureks. Kui laadimisele kuuluvaid seadmeid oleks vähem, siis tuleks juba arvesse ka kõigi kombinatsioonide läbivaatamine. Seetõttu seamegi esimeseks eesmärgiks ülesande dimensiooni vähendamise.

Püüame kõigepealt hinnata, kui suur saab laadungi maksumus vaadeldaval juhul üldse olla. Selleks arutleme järgmiselt. Kui lennuki kandejõud oleks 1640 kg, siis esimesest kuuest seadmest moodustatud laadung olekski optimaalne: suurema maksumusega laadungit poleks enam võimalik moodustada, sest mistahes ümberkombineerimiste korral väheneks laadungi kilogrammi keskmine maksumus ja seega ka kogu laadungi maksumus. Kui aga lennuki kandejõud on 2000 kg, siis saaks vabaks jäänud 360 kg kõige ökonoomsemalt täita seitsmenda seadmega. Seega ei saa vaba kandejõu täitmisel ühe kaaluühiku maksumus tulla suurem kui 1,11, s. t. laadungi maksumus ei saa nende 360 kg arvel suureneda enam kui

$$360 \cdot 1{,}11 = \frac{360}{450} \cdot 500 = 400$$

rubla võrra (selline suurenemine toimuks siis, kui vaba kandejõu arvel lisada fiktiivselt laadungisse 80% seitsmendast seadmest). Järelikult ei saa vaadeldavas ülesandes lennuki laadungi kogumaksumus osutuda suuremaks kui

$$2960 + 400 = 3360.$$

See tulemus on 130 rbl. võrra suurem kui varem leitud parima laadungi maksumus (3230).

Kui laadungi väärtuse suhteliselt väike suurendamine (vähem kui 130 rbl. võrra) eriti oluliseks ei osutu, siis võime ülesande lugeda lahendatuks ning komplekteerida laadungi leitud parima variandi järgi. Kui aga on tähtis suurendada laadungi maksumust kasvõi mõnekümne rubla võrra (kui näiteks tabelis 1 toodud maksumused pole mitte rublades, vaid tuhandetes rublades), siis tuleb ülesande lahendamist jätkata. Nii jõuamegi ülesande dimensiooni (tundmatute arvu) vähendamise vajaduse juurde.

Tundmatute arvu vähendamiseks püüame vähemalt mõne seadme korral kindlaks teha, et ta kas kindlasti kuulub või kindlasti ei kuulu optimaalsesse laadungisse.

Eespool moodustatud soodsaimasse laadungisse kuuluvad kaaluühiku suurema maksumusega seadmetest esimesed viis. Selgitame, millised nendest seadmetest peavad kindlasti kuuluma ka optimaalsesse laadungisse. Selleks leiame ülalkirjeldatud viisil laadungi maksumuse ülemised tõkked tingimusel, et laadungisse ei kuulu üks nendest seadmetest.

Kui esimene seade ei kuulu laadungisse, siis saame seadmetest 2—7 moodustada laadungi kaaluga

$$100 + 350 + 270 + 270 + 400 + 450 = 1840$$

ja maksumusega

$$300 + 700 + 350 + 350 + 460 + 500 = 2660.$$

Lisades veel 160 kg kaheksanda seadme arvel saame laadungi maksumuse ülemiseks tõkkeks

$$2660 + 160 \cdot 1{,}00 = 2820,$$

mis on väiksem kui 3230 (seni leitud parima laadungi maksumus). Järelikult peab esimene seade tingimata kuuluma optimaalsesse laadungisse.

Analoogilised tõkked leiame ka tingimusel, et laadungisse ei kuulu kas teine, kolmas, neljas või viies seade. Tulemused on esitatud tabelis 3. Sellest tabelist näeme, et kui laadungisse ei kuulu esimene, teine või kolmas seade, siis on laadungi maksumus kindlasti väiksem kui 3230 rbl. Seega peavad need kolm seadet kindlasti kuuluma ka optimaalsesse laadungisse. Neljanda ja viienda seadme kohta aga seda, vähemalt esialgu, väita ei saa.

Tabel 3

Laadungisse ei kuulu	Laadungi maksumuse ülemine tõke
1. seade	2820
2. seade	3170
3. seade	3020
4. seade	3299
5. seade	3290

Selgitame nüüd, millised seadmetest kindlasti ei kuulu optimaalsesse laadungisse. Selleks vaatleme seadmeid 8 ja 10—12 (neid, mis viimastest seadmetest ei kuulu parimasse teadaolevasse laadungisse) ning leiame laadungi maksumuse ülemise tõkke tingimusel, et üks neist kuulub laadungisse. Kui näiteks laadungisse arvata kaheteistkümnes seade, siis saame veel lisada seadmed 1—6, mis annab laadungi kaaluga 1940 kg ja maksumusega 3060 rbl. Täites ülejäägi osaga seitsmendast seadmest saame laadungi maksumuse ülemiseks tõkkeks

$$3060 + 60 \cdot 1{,}11 = 3127.$$

Tabelis 4 on toodud analoogilised tõkked ka juhtudel, mis vastavad 8. 10. ja 11. seadme kuulumisele laadungisse. Sellest näeme, et kaheteistkümnenda ja kümnenda seadme kuulumisel laadungisse on selle maksumus kindlasti väiksem kui 3230, seega need seadmed optimaalsesse laadungisse kuuluda ei saa.

Tabel 4

Laadungisse kuulub	Laadungi maksumuse ülemine tõke
12. seade	3127
11. seade	3286
10. seade	3213
8. seade	3314

Esitatud mõttekäikudega oleme me kindlaks teinud, et optimaalsesse laadungisse kuuluvad seadmed 1—3 ning et sinna ei kuulu seadmed 10 ja 12. Selgitada tuleb veel vaid küsimus, millised seadmetest 4—9 ja 11 kuuluvad optimaalsesse laadungisse ning millised mitte. Seda küsimust võime vaadelda omaette laadimisülesandena, mis on aga tunduvalt väiksem esialgsest. Vähendatud dimensiooniga laadimisülesandes võime piirduda

Tabel 5

Seadme nr.	4	5	6	7	8	9	11
Seadme kaal	270	270	400	450	400	290	120
Seadme hind	350	350	460	500	400	230	60
Kaaluühiku maksumus	1,30	1,30	1,15	1,11	1,00	0,79	0,50

tabelis 5 toodud seadmetega. Ühtlasi tuleb aga arvestada, et seadmete 1—3 lülitamisega laadungisse oleme me lennuki kandejõust 700 kg juba ära kasutanud (ja saanud laadungi ühe osa maksumuseks 1800 rbl.). Seega tuleb meil lahendada järgmine laadimisülesanne: tabelis 5 esitatud seadmetest koostada võimalikult suure maksumusega laadung, mille kaal ei ole suurem kui 1300 kg. Seda ülesannet on juba suhteliselt lihtne lahendada kõigi võimaluste läbivaatamise teel näiteks järgmiselt.

Eespool leitud parimale laadimisvariandile vastab vähendatud ülesandes laadung, mis koosneb seadmetest 4, 5, 7 ja 9, kaalub 1280 kg ning mille maksumus on 1430 rbl. Seame endale eesmärgiks leida veelgi suurema maksumusega komplekt, mille kaal ei oleks üle 1300 kg.

Vaatleme kõigepealt võimalikke laadungeid, millesse kuuluvad seadmed 4 ja 5. Et need kaaluvad kokku 540 kg, siis jääb meie käsutusse veel 760 kg vaba kandejõudu. Selle arvel saab laadungisse lisada veel kas 6., 7. või 8. seadme koos 9. või 11. seadmega või siis 9. ja 11. seadme. Ilmselt on nendest paaridest kõige suurema maksumusega just see, mis koosneb seadmeist 7 ja 9. Seega ei ole seadmeid 4 ja 5 sisaldavate laadungite hulgas varem leitust paremaid.

Võtame nüüd vaatlusele laadungid, millesse kuulub neljas, aga ei kuulu viies seade. Võimaluste lihtsa läbivaatamisega veendume, et kõige soodsam on nüüd lisada seadmed 6, 7 ja 11, mis annab laadungi kaaluga 1240 kg ning maksumusega 1370 rbl. Et ka see pole varem leitust parem, siis ei paku vaadeldav alajuht huvi ja me võime ta vaatlemise lõpetada.

Tuleb veel vaadelda laadungeid, millesse ei kuulu neljas seade. Et vähemalt meie ülesande seisukohalt on neljas ja viies seade samaväärsed, siis eelmist juhtu arvestades pole enam mõtet vaadelda kombinatsioone, millesse kuulub viies seade. Seega võime piirduda laadungitega, millesse ei kuulu ei neljas ega viies seade. Laadungisse saame nüüd lülitada seadmed 6, 7 ja 8, mis annab kogukaalu 1250 kg ja maksumuse 1360 rbl. Täites vabaks jäänud 50 kg fiktiivselt üheksanda seadme arvel, näeme, et vaadeldaval juhul ei saa laadungi maksumus tulla suurem kui

$$1360 + 50 \cdot 0{,}79 = 1395.$$

Et see tõke on väiksem kui 1430, siis polegi võimalikke variante enam vaja lähemalt uurida — nende hulgas ei saa leiduda suurema maksumusega laadungeid kui teadaolev.

Sellega oleme leidnud lähteülesande optimaalse lahendi: kõikvõimalike laadungite hulgas, mida saab lennukile laadida, on suurima maksumusega see, mis koosneb seadmetest 1—5, 7 ja 9.

Näite varal kirjeldatud meetod osutub laadimisülesannete tegelikul lahendamisel sageli üsna otstarbekohaseks. Veelgi enam, ta on pärast väikesi täpsustusi rakendatav ka ülalsõnastatud laadimisülesande mõningate üldistuste korral[2]. Sellised üldistatud laadimisülesanded kerkivad näiteks siis, kui peale piiratud kandevõime tuleb arvestada veel teisi kitsendusi (piiratud mahtu vms.). Teiselt poolt on aga praktikas olulisteks ka laadimisülesande niisugused üldistused, kus tundmatud $x_1, x_2, \ldots, x_n$ võivad omandada rohkem täisarvulisi väärtusi kui ainult 0 ja 1. Sealjuures ei tarvitse maksimaalseks muudetav avaldis (sihifunktsioon) isegi enam lineaarne olla.

Harilikele või üldistatud laadimisülesannetele võivad taanduda vägagi erinevatest valdkondadest pärinevad probleemid, millel laadimisega näiliselt üldse mingit seost ei ole. Toomegi ühe näite sellisest probleemist, mis kerkib keeruliste aparaatide konstrueerimisel.

Tehnikas (näiteks raadiotehnikas) kasutatakse sageli seadmeid, mis koosnevad üksikutest blokkidest. Seadme usaldatavus defineeritakse tavaliselt kui tõenäosus selleks, et seadme kõik blokid töötavad teatava fikseeritud ajavahemiku vältel tõrgeteta. Koosnegu seade n blokist, kusjuures tõenäosused üksikute blokkide tõrgeteta tööks sellel ajavahemikul olgu vastavalt

$$p_1, p_2, \ldots, p_n.$$

---

[2] Üldistatud laadimisülesannete lahendamiseks sobiva meetodi põhjalikum kirjeldus on toodud artiklis: Ю. Каазик, Э. Тамме. Алгоритм решения специальных задач нелинейного целочисленного программирования. — TRÜ Toimetised, vihik 192, 1966, lk. 121—128.

Siis avaldub seadme usaldatavus korrutisena[3]

$$p = p_1 p_2 \dots p_n.$$

Kui seadme usaldatavus ei rahulda kasutajaid, siis tuleb rakendada abinõusid usaldatavuse suurendamiseks. Üheks võimaluseks on seejuures blokkide dubleerimine nii, et tõrke korral teatavas blokis lülitatakse automaatselt tööle tema dublant. Seadme töös ilmnevad nüüd häired alles siis, kui ka dublandis esineb tõrge. Olgu

$$p'_1, p'_2, \dots, p'_n$$

vastavad tõenäosused selleks, et dublandiga varustatud blokid tagavad vaadeldava ajavahemiku vältel seadme häireteta töö (loomulikult $p'_i > p_i$). Siis kõikide blokkide dubleerimisel on seadme usaldatavus $p'_1 p'_2 \dots p'_n$.

Blokkide dubleerimisel kasvavad aga seadme hind, kaal, mõõtmed, energiatarvitus ja muud näitajad. Seetõttu on tavaliselt otstarbekohane dubleerida vaid üksikuid vähem usaldatavaid blokke. Kui seadmes dubleerida i-ndat blokki, siis usaldatavuse avaldises p asendub p_i suurusega p'_i.

Mingi seadme konstrueerimisel võib ette anda näiteks seadme hinna (või ka kaalu või mahu) ülemmäära ja dubleerida teatav hulk blokke nii, et seadme usaldatavus tuleks võimalikult suur. Osutub, et see probleem taandub laadimisülesandele.

Seadme usaldatavuse mõõduna võib kasutada ka logaritmi (näiteks alusel 10 või e) usaldatavusest. See usaldatavuse mõõt avaldub summana

$$\log p = \log p_1 + \log p_2 + \dots + \log p_n.$$

Et logaritm on kasvav funktsioon, siis seadme usaldatavus on seda suurem, mida suurem on $\log p$. Mingi i-nda bloki dubleerimisel tuleb $\log p$ avaldises $\log p_i$ asendada suurusega $\log p'_i$. Seda võib tõlgendada kui positiivse suuruse

$$c_i = \log p'_i - \log p_i$$

liitmist $\log p$ avaldisele. Seadme usaldatavus kasvab seda rohkem, mida suurem on kõigi nende liidetavate summa.

Olgu teada, et i-nda bloki dubleerimisel suureneb seadme maksumus a_i rubla võrra, kusjuures kõigi dubleerimiste tulemusena tohib seadme maksumus suureneda ülimalt K rubla võrra. Sellistel tingimustel saame suurima usaldatavusega seadme siis, kui dubleerime blokke nii, et dubleeritavatele blokkidele vastavate maksumuste a_i summa ei ületa suurust K, kuid vastavate suuruste c_i summa omandab maksimaalse võimaliku väärtuse. See aga ongi eespool sõnastatud laadimisülesanne, mille lahendamiseks võib kasutada ülalkirjeldatud meetodit.

[3] Siin kasutatavaid tõenäosusteooria mõisteid on tutvustatud näiteks artiklis E. Tiit. Mis on tõenäosus? — Matemaatika ja kaasaeg, IX, lk. 74—90.

Äsjavaadeldud probleemi kaudu võime jõuda ka laadimisülesande mõningate olulisemate üldistuste juurde. Näiteks võib olla nõutud, et blokkide dubleerimisel ei ületaks antud tõkkeid mitte ainult seadme hind, vaid ka kaal ja maht. Sel juhul saame enam kui ühe kitsendava võrratusega laadimisülesande. Lisaks mitmele kitsendusele võib aga olla lubatud mõnede blokkide varustamine mitte ainult ühe, vaid ka kahe või enama dublandiga. Sel juhul omandab kogu ülesanne juba hoopis uue kuju. Näiteks kahe dublandi lubatavuse korral saame järgmise üldistuse.

Olgu p''_i tõenäosus selleks, et kahe dublandiga varustatud i-ndas blokis ei esine vaadeldava ajavahemiku vältel tõrget. Siis üleminekul ühelt dublandilt kahele suureneb $\log p$ suuruse

$$c'_i = \log p''_i - \log p'_i$$

võrra (loomulikult $p''_i > p'_i$, kuid üldiselt $c'_i \neq c_i$).

Tähistame i-nda bloki dublantide arvu sümboliga x_i. Vastavalt seatud tingimustele saab x_i omandada vaid väärtusi 0, 1 ja 2. Suurima usaldatavusega seadme konstrueerimine taandub nüüd niisuguse (ühe või mitme kitsendusega) laadimisülesande lahendamisele, milles tuleb maksimiseerida avaldis

$$f_1(x_1) + f_2(x_2) + \ldots + f_n(x_n),$$

kus

$$f_i(x_i) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x_i = 0 \\ c_i, & \text{kui } x_i = 1 \\ c_i + c'_i, & \text{kui } x_i = 2. \end{cases}$$

Enam kui kahe dublandi lubatavuse korral kerkiva ülesande sõnastamine ei tohiks lugejale nüüd raskusi valmistada. Ülalkirjeldatud lahendusmeetodi kohaldamine niisugusele ülesandele on aga juba veidi sisukam harjutusülesanne.

T. ROOSINUPU ÜLESANDEID

1. «Karl rääkis mulle, et ta nägi lendavat taldrikut», ütlesin ma Peetrile.

«Ära usu kunagi seda, mis Karl sulle räägib», vastas Peeter.

«Imelik», sõnasin ma oma tavalise tõearmastusega, «Karl väitis sinu kohta just vastupidist.»

Milline on tõenäosus, et Karl nägi lendavat taldrikut?

2. Hiljuti ma märkasin, et ühe minu jaoks üsna väikese arvu jagamiseks kolmega tuli selles arvus esimesel kohal seisev 7 tõsta lihtsalt viimasele kohale. Kui väike see väike arv olla sai?

(Lahendused vt. lk. 145)

LOBATŠEVSKI GEOMEETRIA

K. Ariva

Kergem oli peatada Päikest ja sundida liikuma Maad kui vähendada kolmnurga nurkade summat, panna paralleelsirged koonduma ja muuta sirgele tõmmatud ristsirged hajuvaiks.
V. F. Kagan

Kooliõpikud ei valgusta matemaatika ajaloo küsimusi, seetõttu asub koolimatemaatika nagu «väljaspool aega». Teistes õppeainetes on olukord mõneti erinev. Nii näiteks seotakse füüsikas iga tähtsam avastus vastava uurija nime ja eluaastatega. Et koolis tutvustatakse üldiselt ka käesoleva sajandi teaduslikku maailmapilti (näit. aatomifüüsika algmõisteid), siis võib õppijal tekkida mulje, et tema matemaatikaalased teadmised ulatuvad samuti tänapäeva. Ometi lahutavad koolimatemaatikat tänapäevast mitmed sajandid.

Enne kõrgema matemaatika elementide kooliprogrammi võtmist ulatus keskkoolilõpetaja «matemaatiline horisont» 16. sajandisse. Tuletise ja integraali mõisted laiendavad õppuri silmaringi umbes sajandi võrra. Abiturient jõuab seega kehtiva õppeprogrammi alusel matemaatikas parajasti ajastusse, millest algab füüsikakursus.

Võrreldamatult suurem on «mahajäämus» matemaatika selles valdkonnas, mida nimetatakse geomeetriaks. Kogu tänapäeval keskkoolis õpitav geomeetria sisaldub antiik-kreeka matemaatiku Eukleidese peateoses «Elemendid». Eukleides elas umbes 300 aastat enne meie ajaarvamise algust. Enamus elementaargeomeetria tõdesid avastati aga juba tunduvalt varem — Eukleidese töö on õieti nelja eelneva sajandi uurimistulemuste kokkuvõte. Seega on meie abituriendi geomeetria-alased teadmised sisult vanemad kui 23 sajandit. Ja koolis ei käsitleta kaugeltki kõike, mida antiikkreeklased teadsid geomeetriast. Kreeklaste pärandist jääb veel mõndagi üle matemaatika esimese kursuse õppeplaani sisustamiseks ülikoolis.

Geomeetria oli algselt füüsika osa, sissejuhatus füüsikasse. Kuid antiikaja suurima õpetlase Aristotelese füüsikasse puutuvaid töid tänapäeva keskkoolis ei vaadelda; tema mõtetel on tähtsus veel ainult ajaloolase jaoks. Geomeetria eraldus varakult füüsikast ja saavutas «Elementides» sellise täiuslikkuse, mida ei suutnud ületada kaks järgnevat aastatuhandet. Ei leidu teist teaduslikku teooriat, mis oleks püsinud muutumatuna ja asendamatuna nii pika ajavahemiku vältel. Veelgi enam: kakskümmend sajandit oldi veendunud, et Eukleidese geomeetriat ei saa ka edaspidi millegagi asendada. Näis, et geomeetrias olid geniaalsed kreeklased välja jõudnud absoluutse, igavese tõeni. Kuni 19. sajandini oli Eukleidese süsteem ületamatuks eeskujuks ja kättesaamatuks ideaaliks kõigile teistele teadustele.

Eukleidese õpetuse täiuslikkust iseloomustab tema «Elementide» lakkamatu populaarsus ja vaieldamatu autoriteetsus. «Elemente» on erinevates keeltes välja antud rohkem kordi kui ühtki teist teaduslikku või ilukirjanduslikku teost (kui mitte arvestada piiblit): on teada umbes 1000 tema käsikirjalist ja trükitud väljaannet. «Elementide» tekst oli põhiliste geomeetria-alaste teadmiste ainsaks allikaks muutmata kujul kuni Prantsuse kodanliku revolutsioonini. Suuremate või väiksemate metoodiliste lihtsustustega on ta geomeetria õpikuks maailma kõigis koolides tegelikult ka veel tänapäeval.

Pole raske mõista, millest on tingitud Eukleidese geomeetria selline unikaalne asend teaduste süsteemis. Kiiremini areneb see teadusharu, mille uurimisobjekt on lihtsam. Nõnda on anorgaanilist maailma käsitlevad teadused kaugele ette jõudnud bioloogiast ja psühholoogiast. Veelgi suurem «edumaa» on matemaatikal, mis uurib ainult kvantitatiivseid seoseid nähtuste vahel. Ja eriti soodne kiireteks edusammudeks oli geomeetria valdkond, kus matemaatika üldisele «ühekülgsusele» lisandus veel näitlikkus, vahetu kaemuse võimalikkus. Geomeetria esialgne uurimisobjekt oli suhteliselt lihtne. Uurib ju geomeetria (oma algtähenduses) kehade ruumilisi vahekordi, seega ruumi struktuuri. Ja kergem on käsitleda ruumi ennast kui ruumis toimuvaid lõpmatult mitmekesiseid nähtusi ja protsesse. Sellest on tingitud geomeetria «varaküpsus» ja ettejõudmine füüsikast.

Oluline murrang geomeetrias toimus alles 19. sajandil. See sajand oli enne kõike evolutsiooni idee võidukäigu sajand. Hakati mõistma, et kõik muutub ja areneb, nii loodus, inimühiskond kui ka teaduslikud ideed. Ei leidu muutumatuid bioloogilisi liike, igavesi ühiskonnavorme ega absoluutselt tõeseid teaduslikke teooriaid. Tee tõele — inimtunnetus — on lõpmatu protsess, mille käigus kõik tõekspidamised vananevad ja asendatakse uutega.

Otsustava sammu aastatuhandeid kestnud tardumuse purustamiseks geomeetrias astus möödunud sajandi teise veerandi alguses kõigi aegade üks julgemaid mõtlejaid, vene matemaatik N. I. Lobatševski. Tema töödest sai alguse revolutsioon, millele teadusliku mõtlemise ajaloos on raske leida tähenduselt võrdset. Ilmnes Eukleidese geomeetriast oluliselt erineva geomeetriliste lausete süsteemi võimalikkus. Selgus ühtlasi, et ruumi struktuur on lihtne ainult n.-ö. esimeses lähenduses. Lobatševski loodud süsteem — esimene mitteeukleidiline geomeetria — on loogiliselt samaväärne Eukleidese omaga, kuid ületab viimast oma ulatuse poolest. Eukleidese süsteem osutub Lobatševski geomeetria kitsaks piirjuhuks, mis füüsikalise tõlgenduse seisukohalt peegeldab reaalse ruumi suuri piirkondi vähem täpselt.

Lobatševski geomeetria tähtsust on vaevalt küll võimalik üle hinnata. Geomeetria enda arenemisele oli Lobatševski ideedel erakordselt viljakas mõju. Alates möödunud sajandi teisest poolest toimub geomeetrias tormiline areng, mis viib geomeetria kui teadusliku distsipliini struktuuri täielikule ümberkujunemisele. Tänapäeval räägitakse lõpmata paljude erinevate geomeetriliste süsteemide võimalikkusest; paljusid neist on detailselt uuritud.

Lobatševski ideede mõju ei piirdu kaugeltki ainult geomeetriaga. Tema tööde üha süvenev mõistmine ja analüüs oli oluliseks panuseks kogu matemaatika aluste ja meetodite uurimisel. Mitmekülgsed on Lobatševski geomeetria rakendused matemaatika erinevais valdkondades.

Lobatševski geomeetria on lähtepunktiks 20. sajandi füüsikalise maailmapildi kujunemisel. Ta on ajalooliseks eelduseks Einsteini relatiivsusteooriale. Viimane on juba muutunud õppivate noorte tõsise tähelepanu ja kasvava huvi objektiks. Peamist huvi äratab küll relatiivsusteooria füüsikaline tähendus; tema matemaatiline külg jääb populaarsetes käsitlustes paratamatult tagaplaanile. Ometi on Einsteini õpetus suurelt osalt matemaatiline teooria. Selgitab ta ju maailma kui neljamõõtmelise aegruumi geomeetrilist struktuuri ja sellest tulenevaid füüsikalisi järeldusi puhtmatemaatiliste vahendite abil. Kõige loomulikumaks sissejuhatuseks relativistlikku maailmakäsitlusse on Lobatševski geomeetria.

Nimekas nõukogude matemaatik V. F. Kagan luges Lobatševski geomeetriat tähenduse ja ulatuse poolest revolutsioonilisemaks teaduslikuks teooriaks kui Koperniku õpetust. Kujutlus Päikese ümber tiirlevast Maast kuulub meie maailmapildi kõige elementaarsemate tõdede hulka. Inimest, kellele see kujutlus on võõras, loeme arenematuks. On aeg, et ka Lobatševski ideed, mis on ammu muutunud matemaatika raudvaraks, saaksid samal määral kõige laiemate masside maailmakäsituse aluseks. Esmajärjekorras nõuavad need ideed sissepääsu kooligeomeetriasse. Ehkki Eukleidese geomeetria praktiline väärtus on kustumatu, on tema olemusest ja alustest arusaamiseks hädavajalik vähemalt põgus tutvus Lobatševski maailmaga: et mõista õigesti Eukleidest, on vaja tunda Lobatševskit.

Järgnevas ulatuslikus mitmeosalises artiklis antakse ülevaade Lobatševski geomeetria põhifaktidest. Käsitluslaad on elementaarne ja jõukohane keskkooli vanemate klasside õpilastele.

Lobatševski mõtteid on püütud siduda kooligeomeetriaga, mille rüpest nad on ju välja arenenud. Erilist tähelepanu osutatakse esimese mitteeukleidilise geomeetria tekkeloole, samuti geomeetria aluste küsimustele, millest kooliõpikutes vaikimisega mööda minnakse.

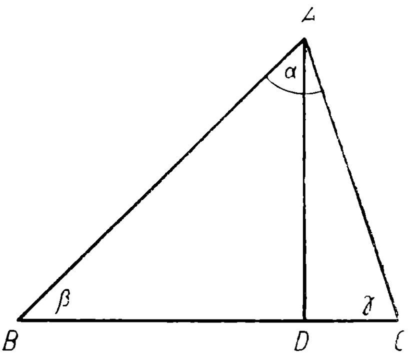
I. PARALLEELSIRGETE PROBLEEM

Õppigem kahtlema!

Uus tõde osutub vajalikuks siis, kui senised tõekspidamised enam ei rahulda. Kahtlus sunnib otsima; otsimine sünnitab tõe. Kahtlusest tekkis ka Lobatševski geomeetria.

Selleks, et mõista Lobatševski geomeetria vajalikkust ja loogilist paratamatust ning olla valmis tunnustama tema tõdesid, on tarvis hakata kahtlema paljudes kooligeomeetria lausetes. Õppigem siis kahtlema — küll mitte kahtlemise enda pärast, vaid kindlamate tõekspidamiste nimel. Õppigem olema kriitilised oma tõekspidamiste suhtes.

Juba viiendast klassist alates on õpilane veendunud, et iga kolmnurga sisenurkade summa on võrdne sirgnurgaga. Lugeja ise on seda lauset kasutanud paljude ülesannete lahendamisel. Saab esitada otse arvutu hulga näiteid lause rakendamise kohta igapäevases praktikas, tehnikas ja tootmises. Mõelgem näiteks topograafi tööle.

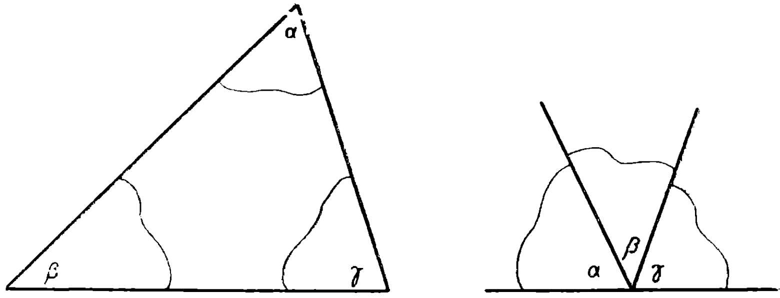


Joonis 1.

Kas see lause sisaldab lõplikku, absoluutset tõde, tõde kõikideks aegadeks? Või on tegemist tõekspidamisega, mida edaspidised uurimised võivad muuta? Kas leidub mingit alust selles lauses kahtlemiseks?

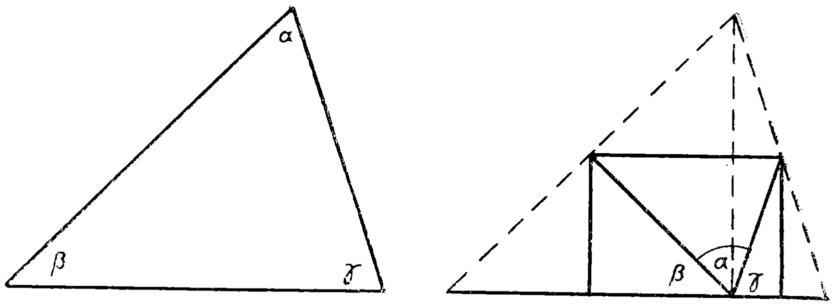
Et vastata nendele küsimustele, peame uurima, millele põhineb veendumus, et vaadeldav lause on tõene.

Paneme esmalt tähele, et tema tõesus ei ole põrmugi vahetult selge. Võrdleme teda näiteks lausega «mingist punktist sirgele tõmmatud ristlõik on lühem igast kaldlõigust, mis on tõmmatud sellest punktist samale sirgele». Selle väite kehtivus tundub iseendastmõistetavana. Ilmselt joonisel 1 $AD < AB$ ja $AD < AC$. Kuid ei kolmnurga mõistest ega ka jooniselt ei tulene kuidagi vahetult, et $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. Viimane väide vajab põhjendamist. Inimest, kes seda lauset esmakordselt kuuleb, tuleb selle kehtivuses veenda.



Joonis 2.

Viienda klassi õpilast lastakse kolmnurga nurkade summa lauses veenduda järgmisel viisil.[1] Kui lõigata paberist välja kolmnurk, eraldada tema nurgad ja kleepida nad üksteise kõrvale nii, et tipud ühtivad (joon. 2), siis ilmneb, et nurgad moodustavad sirgnurga. Sama tulemuseni jõutakse paberist kolmnurga kokkumurdmisel joonisel 3 näidatud viisil.



Joonis 3.

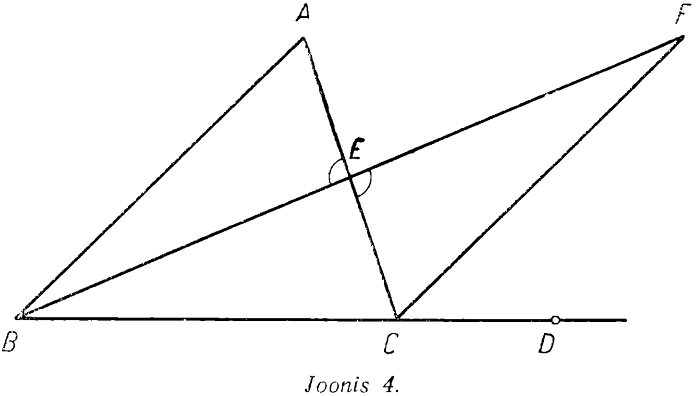
Võib arvata, et viienda klassi õpilase jaoks on need eksperimendid täiesti veenvad. Kuid tegemist on veenmisega põhimõttel «otstarve pühendab abinõu». Kõigepealt on kirjeldatud katsed võimalikud ainult küllalt väikeste kolmnurkade puhul, mida saab tõepoolest «paberist välja lõigata». Mida aga teha näiteks kolmnurgaga, mille tippudeks on Tallinna, Tartu ja Leningradi televisioonimastide teravikud? Täit veenvust ei ole ka kasutatud meetodil endal. Sest täpselt samal viisil saab «näidata», et kujundi tükeldamisel ja osade liitmisel tekib uus kujund, mille pindala eri-

[1] J. Kallak, A. Kasvand, A. Lehis, Matemaatika V klassile, Tln., 1963, lk. 115.

neb esialgse kujundi omast.[2] Kui silmas pidada meetodi selliseid «hämmastavaid» rakendusi, siis on selge, et sooritatud eksperimente ei saa rangel lähenemisel lugeda veenvaiks.

Seitsmendas klassis uuritakse kolmnurga sisenurkade summat juba rangemal viisil.[3] Sobivalt esitatud küsimuste abil lastakse õpilasel *tõestada*, et see summa on tõepoolest 180°. Toome järgnevalt selle tõestuse mõnevõrra muudetud kujul, mis on sobivam edaspidiste arutluste jaoks.

Tõestame esmalt ühe kehtivais õpikuis puuduva lause: «Kui kolmnurga sise- ja välisnurk ei ole kõrvunurgad, siis välisnurk on suurem sisenurgast». Vaatleme suvalise kolmnurga ABC mingit välisnurka, näiteks $\widehat{ACD}$ (joon. 4). Olgu E külje AC keskpunkt. Tõmbame mediaani BE ja leiame selle pikendil punkti F nii, et $EF = BE$. Siis on kolmnurgad ABE ja CEF kongruentsed[4] kahe küljepaari ja nendega määratud nurkade kongruentsuse tõttu. Järelikult $\widehat{BAE} = \widehat{ECF}$ ja $\widehat{ACD} > \widehat{BAC}$. Analoogiliselt saab tõestada, et $\widehat{ACD} > \widehat{ABC}$.



Joonis 4.

Tõestame nüüd lause kolmnurga sisenurkade summa kohta. Vaatleme suvalist kolmnurka ABC, mille sisenurgad olgu α, β ja

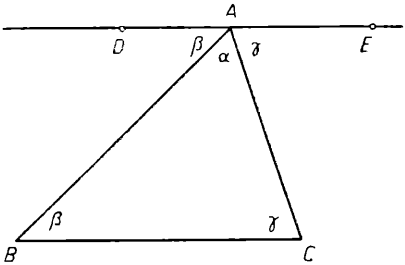
---

[2] Maagilise geomeetria aluseid. — Matemaatika ja kaasaeg, VII, lk. 72—74.

[3] E. Etverk, A. Lints, A. Vihman, Matemaatika VII klassile, Tln., 1964, lk. 87.

[4] Termin «kongruentsus» on siin koolis tavaliselt kasutatava «võrdsuse» asemele võetud järgmistel kaalutlustel. Arvude võrdsusel on oluline omadus: võrdsetele võrdsete lisamisel saadakse jälle võrdsed. Geomeetrilistel kujunditel sellist omadust üldiselt ei ole; kahe kujundi vastavate osade «võrdsusest» ei järeldu kujundite «võrdsus». Sellepärast on geomeetriliste kujundite puhul otstarbekas kasutada erilist terminit «kongruentsus»: kaht kujundit nimetatakse kongruentseteks, kui neid saab ühtimisele viia liikumise teel.

γ (joon. 5). Tõmbame läbi tipu A sirged AD ja AE nii, et $B\hat{A}D = \beta$ ja $C\hat{A}E = \gamma$. Osutub, et sirged AD ja AE ei lõika sirget BC. Tõepoolest, kui näiteks AD lõikaks sirget BC mingis punktis P, siis tekiks kolmnurk ABP, mille välisnurk võrduks sisenurgaga, kusjuures nurgad ei oleks kõrvunurgad. Eelneva lause põhjal ei ole selline kolmnurk võimalik. Analoogiliselt arutleme sirge AE puhul. Kuid läbi punkti A saab kolmnurga tasandil tõmmata ainult ühe sirge, mis ei lõika sirget BC, s. t. sirgega BC paralleelne. Järelikult ühtivad sirged AD ja AE. See aga tähendab, et nurkade α, β ja γ liitmisel tekib sirgnurk.



Joonis 5.

Tundub, et esitatud tõestus ei jäta mingit võimalust lause tõesuses kahtlemiseks. Kooligeomeetrias asutaksegi sellisele seisukohale ja loetakse sisenurkade probleem lõplikult lahendatuks. Kuid küsimus ei ole kaugeltki nõnda lihtne.

Märgime esmalt, et viiendas klassis pakutud katselist «tõestust» ei saa siiski täiesti kõrvale lükata. Kerge on mõista, et «maagiline» ei ole siin mitte katseline meetod, vaid selle abil tehtud järeldus. Tõepoolest, paberkolmnurga uurimisel ju midagi olulist ikkagi selgub: v a a d e l d u d kolmnurga sisenurkade summa on väga l ä h e d a n e sirgnurgale.

Paberkolmnurga tükeldamisel ja kokkumurdmisel sooritatakse teatud füüsikalisi katseid. Nendes katsetes sisuliselt m õ õ d e t a k s e primitiivsel viisil nurkade summat. Põhineb ju nurkade mõõtmine nende võrdlemisel, siin aga võrreldakse nurkade summat sirgnurgaga. Õpilast võiks veenda ka sel teel, et lastakse tal nurgad malliga ära mõõta ja tulemused liita. Muidugi, sel juhul tekib «oht», et summa ei ole täpselt 180° ja meetodi «maagiline» järeldus läheb kaotsi. (Analoogiline olukord tekib klassis tihti ka õpikus soovitatud eksperimentide puhul. Õpilasel tuleb siis oletada, et kolmnurga mõõtmine päris täpselt ei õnnestunud. Kogu «tõestus» koosneb siis ainult sõnadest «õpetaja ütles»...)

Teatavasti saab igasugune mõõtmine anda ainult ligikaudseid tulemusi. Sellepärast isegi juhul, kui mõõtmisel saadakse 180°, ei või kinnitada, et see tulemus on absoluutselt täpne. Oluline on veel teinegi asjaolu: ehkki mõõtmist teostatakse suvaliselt valitud kolmnurga puhul, on tegemist ikkagi konkreetse, kindla kolmnurgaga. Selle kolmnurga mõõtmisel saadud tulemus ei pea põrmugi korduma mingi teise kolmnurga korral.

Niisiis näitavad füüsikalised eksperimendid, et kõigis seni uuritud kolmnurkades on sisenurkade summa väga lähedane 180 kraadile. Kas summa on täpselt 180° ja koguni igas kolmnurgas, seda füüsik otsustada ei saa. Ta võib teha uuritud üksikjuhtude põhjal küll oletuse, et lugu on nii kõigi kolmnurkade korral. Niisuguse oletuse tõenäosus on muidugi seda suurem, mida suurem on uuritud kolmnurkade arv, kuid tegemist on ikkagi ainult oletusega, mis võib edaspidi osutuda vääraks.

Kolmnurga sisenurkade lauset ei ole seega põhimõtteliselt võimalik mõõtmise teel tõestada. Huvitav on aga märkida, et kui summa tõepoolest erineb sirgnurgast, siis saab seda mõõtmisprotsessi täpsustudes kunagi ka näidata. Tarvitseb vaid leida kasvõi ühegi kolmnurga, mille nurkade summa erinevus sirgnurgast ületab mõõtmisvea. Siit nähtub, et nurkade summa katselisel määramisel saab otsustav tulemus uuritava lause jaoks olla ainult negatiivne. See on ainus täiskindel tulemus, mida füüsik selles küsimuses võib loota.

Geomeeter füüsikalisi uurimismeetodeid ei kasuta. Geomeetrias, nagu igas teises matemaatikaharus, jõutakse uute tõdedeni loogilise arutlemise teel. Kolmnurga nurki siin ei mõõdeta. Arutlus ei ole siin sõltuv mingist konkreetsest paberile või tahvlile joonestatud kolmnurgast. Joonise ülesandeks on vaid illustreerida mõttekäiku, teha seda paremini jälgitavaks. Geomeetrias on uurimisobjektiks kolmnurk üldse, kolmnurga mõiste. Arutlemise teel saadud tulemus on täpne ja kehtib iga kolmnurga puhul. Küsimusele, mille üle füüsik-eksperimentaator kunagi täiskindlale otsusele ei saa jõuda, annab geomeeter lõpliku vastuse.

Märgime, et olukord on samasugune ka teiste geomeetriliste lausete korral. Näiteks väide, et «nurga haarade lõikamisel paralleelsete sirgetega tekivad haaradel võrdelised lõigud», tõestatakse rangelt loogilise arutlemise teel, kuid vahetust mõõtmisest sellist järeldust teha pole võimalik. Nõnda on lugu Pythagorase teoreemiga, kolmnurga pindala valemitega jne.

Erinevad meetodid, erinevad tulemused .Füüsik rakendab induktsiooni, s. o. teeb vaadeldud üksikjuhtude põhjal üldistava oletuse, mis uute üksikjuhtude puhul võib osutuda vääraks. Geomeeter talitab deduktiivselt, s. o. tõestab üldise lause, mille kehtivus on loogiliselt paratamatu ka igal üksikjuhul.

Lugeja vahest ütleb, et tegemist on endastmõistetavate asjadega, mille kirjeldamisele pole mõtet pöörata nii palju tähelepanu. Mingit vasturääkivust ju ei esine. Geomeeter lahendab täielikult probleemi, mille puhul füüsik on sunnitud jääma poolele teele. Füüsiku oletus on sisuliselt õige; ebatäpsus tuleneb meetodi ebatäiuslikkusest; mingit negatiivset vastust olla ei saa. Geomeetrias kasutatavat deduktiivset meetodit tuleb lugeda võimsamaks füüsikalisest induktsioonist.

Kuid mida tähendab väide, et deduktsioon on võimsam induktsioonist ja loogiline mõtlemine vahetust eksperimenteerimisest? Kas seda, et meid ümbritseva ruumi struktuur on mõtlemise abil täpsemalt tunnetatav kui meelelise kogemuse kaudu? Kas tuleb siis oletada, et ruum ei eksisteerigi väljaspool teadvust, vaid teadvuses endas, on mingil viisil teadvuse produkt? Kui siin vastata jaatavalt, siis saab teadvusest sõltuvaks ka kõik, mis sisaldub ruumis, s. o. kogu maailm. Teadvus oleks siis primaarne, materiaalne maailm aga sekundaarne. Sellist vaatekohta nimetatakse filosoofiliseks idealismiks.

Geomeetria oli kahe aastatuhande vältel filosoofilise idealismi taimelava — kuni Lobatševskini. Antiikaja nimekaima idealisti Platoni arvates koosneb materiaalne maailm varjudest — täiusliku ideede maailma puudulikest ja moonutatud peegeldustest. Tõeni jõutakse Platoni arvates ainult ideede tunnetamise kaudu; selleks tuleb süveneda iseendasse, oma teadvusesse. Kuulus saksa filosoof Kant, keda sageli nimetatakse uusaegseks Platoniks, väitis, et reaalsed asjad tekitavad teadvuses ainult mingi amorfse, struktuurita taju, mida lõplikult vormib teadvus eriliste arukategooriate abil. Ehtsa preisi pedantsusega selgitab Kant, et selliseid kategooriaid on täpselt tosin; nende hulka kuulub ka ruumikategooria. Seega Kanti järgi ei asu mitte asjad ruumis, vaid teadvus paigutab nad ruumi; ruumi endamisi, s. o. väljaspool teadvust, ei eksisteeri. Platoni ja Kanti vaatekohad on heas kooskõlas geomeetria varem levinud aprioorse (kogemuste-eelse, kogemusest sõltumatu) mõistmisega.

Kahekümnendal sajandil, mil teaduse üha kiirenevas võidukäigus ilmneb teooria ja praktika lahutamatu ühtsus, kuulub filosoofiline idealism ajaloo kolikambrisse. Maailma ei saa muidugi tunnetada ilma loogilise mõtlemiseta, kuid teda ei saa tunnetada ka ainult loogilise mõtlemise abil. Nõnda näiteks selle hetkeni, mil nõukogude suptnikud pildistasid Kuu teist külge ja «kuundusid», võis teha ainult ebakindlaid oletusi selle kohta, milline on Kuu «seljatagune» ja kas Kuu pind koosneb ohtlikust tolmulademest või on ta küllalt kindel kosmoselaevade vastuvõtuks.

Niisiis peame muutma erinevate meetodite võrdlemisel antud hinnangut. Geomeetri deduktiivsele tulemusele ei saa omistada suuremat kehtivust kui kogemuse põhjal tehtud oletusele. Järelikult on ka loogiliselt tõestatud lause kolmnurga nurkade summa kohta vaid oletus. See lause on teaduslik hüpotees.

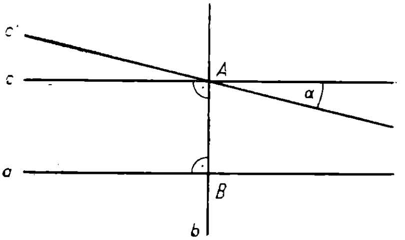
Milles siis õieti tuleb kahelda?

Püüame välja selgitada asjaolud, mis muudavad range loogilise arutluse tulemuse hüpoteetiliseks. Selleks vaatleme veel kord sisenurkade summa lause tõestust.

Tõestuskäigus kasutasime kaht lauset: kolmnurga välisnurga teoreemi ja paralleelide aksioomi. Esimese lause tõesus ei näi äratavat mingit kahtlust. Muide, tõestamisel kasutasime oluliselt joonist. Sellelt selgus asjaolu, et punkt F asub nurga ACD sees, mistõttu $\widehat{ACF}$ on $\widehat{ACD}$ osa. Aga seda on põhimõtteliselt võimalik ka tõestada, s. o. arutluse saab muuta täiel määral sõltumatuks joonisel kujutatud konkreetsest kolmnurgast. Märgime veel, et paljudel üksikjuhtudel saab välisnurga teoreemi kontrollida ka mõõtmise teel (millest muidugi ei ole veel järeldatav teoreemi üldkehtivus).

Vahest kõige olulisemal määral on tõestuskäigus tuginetud lausele: «läbi antud sirgel mitte asuva punkti saab punkti ja sirgega samal tasandil tõmmata ainult ühe sirge, mis ei lõika antud sirget». Seda sirget nimetatakse teatavasti paralleelseks antud sirgega, lauset ennast — **paralleelide aksioomiks**. Edaspidi näitame, et kui see aksioom lugeda vääraks, siis ei saaks kolmnurga nurkade summa olla 180°. Seega peab sisenurkade lause hüpoteetilisus olema vahetult seotud paralleelide aksioomiga.

Meenutame, et iga sirge jaoks saab läbi iga temal mitte asuva punkti tõmmata vähemalt ühe sirge, mis on temaga paralleelne. Tõepoolest, läbi punkti A (joon. 6) saab sirgele a tõmmata ristsirge b. Omakorda sirgele b saab läbi A tõmmata ristsirge c. Sirged a ja c ei saa lõikuda, sest kui oletaksime lõikumist, siis satuksime vastuollu kolmnurga välisnurga lausega. Seega on a ja c paralleelsed. Paralleelide aksioomi sisu seisneb väites, et iga sirge c', mis läbib punkti A ja erineb äsjakonstrueeritud sirgest c, lõikab sirget a.



Joonis 6.

Koolis aksioomi mõistet pikemalt ei valgustata. Märgitakse vaid, et «aksioom on niisugune lause, mida loetakse õigeks ilma tõestuseta».[5] Loomulikult tekib mõtlikul õpilasel sellega seoses rida küsimusi, millele ta õpikust vastust ei leia. Eksamil võib sageli kuulda väidet, et aksioom on ilmne tõde, mida pole tarvis tõestada või mida ei saagi tõestada. Just selliste mõteteni võivad õpilase viia kehtivad õpikud. Ometi on niisugune arusaam sügavalt väär.

Püüame allpool näidata, et vähemalt paralleelide aksioom ei ole ilmne tõde. Märgime etteruttavalt, et tegemist on väga tähtsa küsimusega: Lobatševski geomeetriat saab täiel määral mõista ainult see, kellele paralleelide aksioom ei tundu endastmõiste-

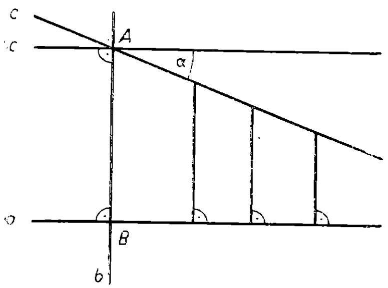
---

[5] Vt. viites 3 mainitud õpik, lk. 68.

tavana. Kahtlus selle lause tõesuses, taipamine, et ta v õ i b olla väär, on võti, mis avab ukse Lobatševski maailma.

Õpikus[6] püütakse paralleelide aksioomi teatud määral põhjendada. Nimelt väidetakse seal: «Kogemused näitavad, et sõltumatult ehitamisviisist saame läbi antud punkti ikka ainult ühe paralleeli antud sirgele». Kuid lihtne arutlus näitab, et meil selliseid kogemusi ei ole ja põhimõtteliselt ei saagi olla.

Kahtlemata lõikab sirge c' joonisel 6 sirget a; selles veendumiseks tarvitseb vaid joonlaua abil mõlemat sirget pikendada. Kui nurk α sirgete c ja c' vahel kahaneb, siis a ja c' lõikepunkt eemaldub mööda sirget a punktist B. Väikese nurga α korral ei ole joonisel lõikepunkti enam võimalik määrata. Oleme siiski veendunud, et vastavate tehniliste abinõude rakendamisel saaks lõikepunkti leida ka näiteks kilomeetri kaugusel. Kuidas on aga lugu siis, kui nurk α on väga väike, näiteks suurusjärku miljondik kaaresekundit? Ehkki siis sirgeid c ja c' ei saa joonisel enam eristada, tuleb neid ikkagi lugeda erinevaiks sirgeiks. Küllalt suures kauguses punktist A muutub ju nendevaheline kaugus märgatavaks ja kasvab koguni kuitahes suureks (seda asjaolu saab rangelt tõestada). Veendumuseks, et sirged a ja c' lõikuvad, ei ole nüüd enam mingit alust. Kogemus meid aidata ei saa. Piltlikult väljendades: oletatav lõikepunkt asetseks sellises astronoomilises kauguses, kuhu vaadata pole võimalik ka kõige võimsama kaasaegse teleskoobiga.

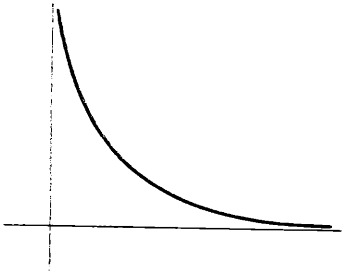


Joonis 7.

Lugejat, kes pole vaadeldava probleemiga juba varem kokku puutunud, muidugi nii lihtsa kaalutlusega koolis omandatud tõekspidamises kahtlema ei pane. Paralleelide aksioom tundub olevat liialt endastmõistetav. Mõte hakkab igale kahtlusele kohe otsima vastuväiteid. Ruumilise kogemuse piiratusest ei tulene ju põrmugi, et läbi punkti A läheb just nimelt rohkem kui üks sirge, mis on sirgega a ühel tasandil ega lõika teda. Sellise sirge ainsus näib järelduvat vahetult sirge «olemusest». Tundub koguni, et seda on lihtne tõestada. Tõepoolest, võiks ju proovida järgmiselt. Kui $\alpha > 0$, siis sirge c' punktidest sirgele a langetatud ristlõigud kahanevad eemaldumisel ühes suunas (joonisel 7 paremale) sirgest b. Järelikult küllalt suurel kaugusel sirgest b muutub c' punkti kaugus sirgest a nulliks. See aga tähendab sirgete c' ja a lõikumist.

[6] Vt. viites 3 mainitud õpik, lk. 80.

Selline põhjendus ei ole siiski korrektne. Joonise piirides (üldisemalt — kontrollitavuse, s. o. kogemuse piirides) sirge c' punktide kaugused sirgest a tõesti kahanevad. Kui aga nurk α on nii väike, et oletatav lõikepunkt on väljaspool kogemuse piire, siis ei ole väide kauguse edasisest kahanemisest millegagi põhjendatud. Me ei tea, mis toimub «küllalt kaugel». Miski ei keela tegemast oletust, et teatud kaugusel lakkab sirge c' lähenemast sirgele a ja hakkab edaspidi koguni kaugenema. Või siis c' läheneb sirgele a tõestamatult, kuid ometi ei lõika teda. Sellel visil läheneb näiteks pöördvõrdelise sõltuvuse graafik — hüperbool — koordinaattelgedele (joon. 8).



Joonis 8.

Võib-olla tekib tahtmatult protest: «Kuid siis c' ei ole sirge; sirge nõnda käituda ei saa!» Aga miks mitte? Viide sirge «olemusele» ületab ju kogemuse piire. Kogemus ei ütle midagi sirge kui terviku kohta. Me suudame sirgest vaadelda ikka ainult teatud lõpliku pikkusega lõiku. Joonistel oleme alati sunnitud kujutama sirget lõiguna.

Kujutlus sirgest, mis pideval lähenemisel teisele sirgele peab teist paratamatult lõikama, on hoolimata näilisest selgusest seotud teatud mõttelise raskusega. Nurga α lähenemisel nullile pöörleb sirge c' pidevalt ümber punkti A lähenedes sirgele c (joon. 7). Piiril, kui $\alpha = 0$, omandab c' asendi c. Olgu lõigu AB pikkus näiteks 5 cm. Meie kujutluse kohaselt on siis a ja c vaheline kaugus (ühise ristlõigu pikkus) kõikjal 5 cm. Kuni $\alpha \neq 0$, leidub meie kujutluse järgi sirgel c' alati selline punkt, mille kaugus sirgest a on null (lõikepunkt). Hetkel, kui α muutub nulliks, omandavad sirge c' kõik punktid kauguse 5 cm sirgest a. Sellest hoolimata, et α pidev kahanemine tingib c' pideva pöörlemise, näib piirile jõudmisel esinevat hüpe: lõikav sirge osutub äkki sirgeks, mille kõik punktid on sirgest a 5 cm kaugusel. Tekib mulje, et c' «hüppab» teatud nurgast üle, s. o. me jätame nähtavasti vaatlusest välja hulga sirgeid, mis asetsevad selles hüpoteetilises nurgas. Kui tahaksime kujutleda ka neid «kadumaläinud» sirgeid, siis peaksime oletama, et hoolimata esmasest lähenemisest sirgele a (kogemuse piirides) ei lõika nad ometi viimast ja võib olla, et nad hakkavad sirgest a koguni eemalduma (väljaspool kogemuse piire).

Esitatud arutlusel ei ole mingit tõestuslikku kaalu; sellest ei järeldu, et paralleelsuseaksioom on väär. Püüdsime vaid näidata, et kujutlus on jõuetu otsutama seal, kuhu kogemus ei ulatu.

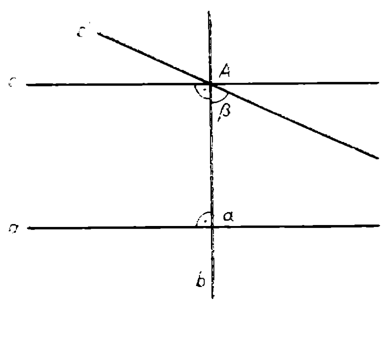
Kui lugeja hakkas otsima põhjendusi oma veedumusele paralleelsirge ainsuses, siis sellega tunnistas ta juba, et tegemist on lausega, mille tõesus ei ole ilmne. Põhjendamatult subjektiivset veendumust ei saa muidugi lugeda küllaldaseks kriteeriumiks. Selline veendumus sunnib aga otsima kindlamaid argumente, s. t. tekitab püüde tõestada.

Sajandite probleem

Paralleelide aksioomiga on seotud teadusliku mõtlemise üks vanemaid ja kuulsamaid ülesandeid — **paralleelsirgete probleem**: kas nimetatud aksioom on tõestatav geomeetria ülejäänud aksioomide abil, s. t. kas ta on üldse aksioom või on ta muudetav hoopis teoreemiks? Selle probleemi lahendamisele kulus 20 sajandit erinevate ajastute ja erinevatest rahvustest matemaatikute jõupingutusi. Leiti üha uusi tõestusi, mis lähemal uurimisel osutusid ikka jälle loogiliselt puudulikeks. Probleemi uurimine viis lõpuks uue geomeetria loomisele. Nagu näeme edaspidi, tähendab Lobatševski geomeetria loogiline võimalikkus ühtlasi paralleelsirgete probleemi täielikku lahendust — vähemalt loogika aspektist.

Paralleelsirgete probleem kasvas välja Eukleidese geomeetriast, täpsemalt — selle ühest aksioomist. Kahtlemata uuriti küsimust juba enne Eukleidest. Viimane lahendas probleemi samal viisil, nagu Makedoonia Aleksander muistendi järgi avas nn. Gordioni sõlme. Võimetuna keerulist sõlme lahti harutama olevat Aleksander selle mõõgaga läbi raiunud. Eukleides, leidmata tõestust lausele, mida ta kasutas paralleelsirgete ülesehitamisel, luges selle lause aksioomiks. See lause, mida harilikult nimetatakse **Eukleidese V postulaadiks**, kõlab järgmiselt: «kui kahe sirge lõikamisel kolmandaga tekivad ühepoolsed sisemised nurgad, mille summa on väiksem kui sirgnurk, siis kaks esimest sirget lõikuvad».

Kerge on märgata V postulaadi tihedat seost paralleelide aksioomiga: kui üht neist lauseist lugeda tõeseks, siis on tõene ka teine. Näitame seda. Iga sirge c' korral, mis läbib punkti A ja erineb sirgest c (joon. 9), on ühepoolsete sisemiste nurkade α ja β summa väiksem kui 180°. Kui eeldada, et paralleelide aksioom on tõene, siis on c ainus võimalik paralleel sirgele a läbi punkti A, ning seetõttu peavad c' ja a lõikuma, s. o. V postulaat on tõene (mõttekäik ei



Joonis 9.

muutu oluliselt, kui *b* on suvaline sirgeid *a* ja *c* lõikav sirge). Vastupidi, kui eeldada V postulaadi kehtivust, siis peab iga sirge c', mis läbib punkti A ega ole risti sirgega *b*, lõikama sirget *a*, s. t. *c* on ainus punkti *A* läbiv paralleelsirge.

Tõestatud seosest vaadeldavate lausete vahel järeldub nüüd, et kui üht neist lugeda vääraks, siis peab väär olema ka teine (põhjendada!). Niisiis on need laused korraga kas tõesed või väärad. Selliseid lauseid nimetatakse ekvivalentseteks.

Paralleelsirgete probleem oma esialgsel kujul seisnes V postulaadi tõestamises. Sellepärast räägitakse sageli ka V postulaadi probleemist. Eukleidese süsteemi ainsaks oluliseks puuduseks loeti asjaolu, et selles on V postulaat võetud põhilauseks, s. o. jäetud tõestamata. Selline etteheide oli tingitud ennekõike tajust, et V postulaat ei ole sel määral ilmne kui Eukleidese ülejäänud aksioomid. Pealegi on V postulaadi sõnastus raskepärane ja tunduvalt keerukam teiste põhilausete omast.[7] Näis ka lubamatuna lugeda aksioomiks lauset, mille pöördlause on tõestatud. Sest V postulaadi võiks sõnastada ka nii: «Kui kahe sirge lõikamisel kolmandaga tekivad ühepoolsed sisemised nurgad, mille summa on väiksem kui 180°, siis need sirged moodustavad kolmnurga». Kuid juba Eukleides ise tõestas pöördlause: «Iga kolmnurga mistahes kahe sisenurga summa on väiksem kui 180°».

Võib tunduda, et paralleelsirgete probleemil on ainult põhimõtteline tähtsus ja praktika seisukohalt võib jätta küsimuse lahtiseks — kui seda kord nii raske on lahendada. Veidi järele mõeldes näeme aga, et paralleelsirgete aksioomil on eriline osa Eukleidese lausete süsteemis. Ilmneb, et enamikku kooligeomeetria lausetest ei saa tõestada, kui ei eeldata selle aksioomi tõesust. Paralleelide aksioomil põhinevad laused võrdelistest lõikudest. Viimaste abil defineeritakse kolmnurkade sarnasus ja tõestatakse sarnasustunnused. Kolmnurkade sarnasusel aga põhineb kogu trigonomeetria. Sellise «võtmepositsiooni» tõttu, mis aksioomil on geomeetrias, on mõistetav lakkamatu huvi paralleelsirgete probleemi vastu. Silmas tuleb pidada ka probleemi (ainult näilist) lihtsust. On ju jutt paarist-kolmest sirgest tasandil; nende vastastikuse asendi uurimine ei näi nõudvat mingit spetsiaalset matemaatika-alast ettevalmistust, igal juhul mitte kõrgemat matemaatikat. Probleem tundub olevat täiesti jõukohane keskkooliõpilasele. Ja ometi kulus tema lahendamiseks enam kui 20 sajandit...

Matemaatikud komistavad

Kuni 19. sajandini olid probleemi kõik uurijad üksmeelsed, et paralleelide aksioom (ehk V postulaat) on sisuliselt tõene lause. Kahelda selle tõesuses ei tulnud pähe ühelegi geomeetrile. Jäi

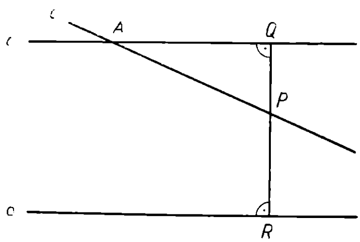
---

[7] Eukleidese geomeetrilise sisuga põhilausete, nn. postulaatide loetelu vt. Ü. Lumiste. Ruumi mõiste geomeetrias. — Matemaatika ja kaasaeg, XI, lk. 3—9.

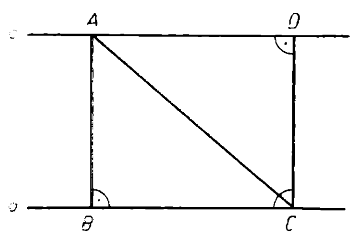
astuda ainult üks samm — leida range loogiline põhjendus! Nagu märgitud, püüdsid seda sammu astuda väga paljud nimekad matemaatikud (ja kahtlemata veel suurem arv diletante, kellest ajalugu vaikib). Kõik selle sammu astujad aga komistasid — harilikult nii, et nad seda ise ei märganud. Põhiliseks komistuskiviks oli vajadus kasutada tõestuskäigus mõnda lauset, mis lähemal uurimisel osutus paralleelide aksioomi ekvivalendiks. Selle tõttu väide, et paralleelsirge on üheselt määratud, tõestati väite enda kaudu. Tõsised teadlased sattusid — ise seda tähele panemata — preisi meisterluiskaja Münchhauseni olukorda, kes ratsuga soomülkasse kukkudes rebis oma juuksepatsipidi soost välja mitte ainult enda, vaid ka hobuse.

Selle olukorra illustreerimiseks vaatleme mõnda lihtsamat tõestuskatset.

5. sajandil püüdis kreeklane Proklos rangelt tõestada kujutlust, et sirge c' punkti P ja sirge a vaheline kaugus PR muutub nulliks punkti P eemaldumisel punktist A (joon. 10). (Nagu eelnevalt nägime, ei saa seda kujutlust põhjendada kogemuse abil, kui nurk PAQ on väike). Proklos kasutas juba eespool märgitud asjaolu, et nurga PAQ ühe haara punkti P ja teise haara vaheline kaugus PQ on tõkestamatult kasvav suurus. Paralleelsirgete a ja c vahelist kaugust QR luges Proklos aga tõkestatud suuruseks (meile tundub koguni, et see suurus on konstantne). Sellepärast, väitis Proklos, peab P liikumisel saabuma moment, mil $PQ = QR$. See tähendab, et P satub kunagi sirgele a, niisiis a ja c' lõikuvad.



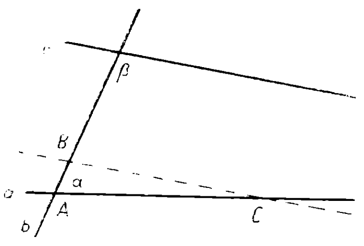
Joonis 10.



Joonis 11.

Oletus, et paralleelsirgetevaheline kaugus on tõkestatud, ületab aga jälle kogemuse piire; sellepärast vajab ta samal määral tõestamist kui paralleelide aksioom. Teda ongi lihtne tõestada — kui eeldada, et paralleelide aksioom on tõene. Nagu teame, on sellisel juhul kolmnurkade ABC ja ACD (joon. 11) sisenurkade summad võrdsed sirgnurgaga. Järelikult on punkti D igasuguse asendi korral sirgel c nelinurk $ABCD$ ristkülik, s. t. $DC = AB$: sirgete a ja c vaheline kaugus on konstantne. Seega on Proklose abilause paralleelide aksioomi (või V postulaadi) ekvivalent.

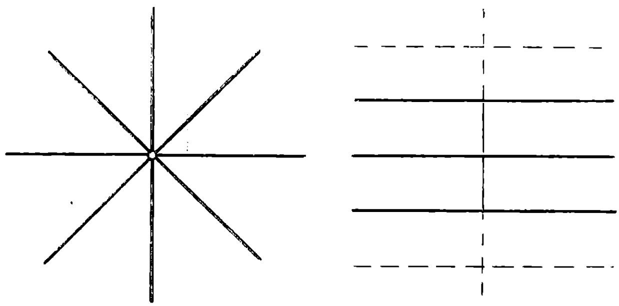
Inglise 17. sajandi matemaatik W a l l i s luges tõeseks lause: «Iga kujundi puhul leidub kuitahes suur temaga sarnane kujund». Sellest järeldub kergesti V postulaadi tõesus. Sest iga sirget c', mille puhul $\alpha + \beta < 180°$ (joon. 12), saab viia rööplükkega asendisse c'' nii, et tekib kolmnurk ABC. Wallise eelduse kohaselt leidub kolmnurgaga ABC sarnane kolmnurk, mille külgi määravad sirged a, b ja c'. Järelikult c' lõikab sirget a.



Joonis 12.

Lihtne on jälle näidata, et kehtib ka vastupidine seos: V postulaadist (või paralleelide aksioomist) järeldub Wallise abilause. Jätame vastava kontrolli lugeja hooleks.

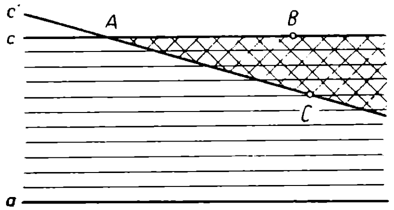
Proklose ja Wallise arutlustest ilmneb uuesti paralleelsirgete probleemi tõeline raskuspunkt: on tarvis vaadelda korraga tervet lõpmatut sirget, seega tasandi lõpmata kaugeid piirkondi. Eriti reljeefselt tuleb lõpmatuse idee esile šveitsi matemaatiku B e r t r a n d'i (18. saj.) tõestuskatses. Bertrand juhtis tähelepanu sellele, et tasandi saab jaotada lõpmata paljudeks võrdseteks osadeks paarikaupa võrdsetel kaugustel olevate paralleelsirgete abil (joon. 13). Kui aga tasand jaotada ühest punktist väljuvate pool-



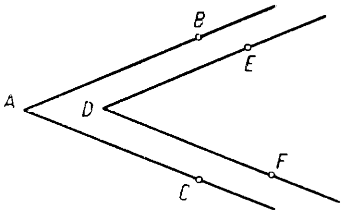
Joonis 13.

sirgete abil, mis paarikaupa moodustavad võrdsed nurgad, siis tekib lõplik arv piirkondi. Siit järeldas Bertrand, et kahe paralleelsirge vaheline tasandi osa on väiksem mistahes nurga sisepiirkonnast. Kui aga lugu on nii, siis ei saa nurga ABC sisepiirkond asuda tervenisti sirgete a ja c vahel (joon. 14), s. t. sirged a ja c' peavad lõikuma.

Bertrandi mõttekäigu puuduseks on täiesti põhjendamatu opereerimine tasandi lõpmatute piirkondadega. Nii paralleelsirgete kui ka poolsirgete vahelise piirkonna pindala on lõpmata suur. Võrrelda kaht konstantset lõpmatut suurust, korraldada nende vahel suurusjärjestust, on aga võimatu. Bertrand'i kombel arutledes jõuaksime absurdsete tulemusteni. Näiteks $\widehat{BAC} = \widehat{EDF}$ puhul (joon. 15) peaksid nende nurkade sisepiirkonnad olema korraga nii võrdsed kui ka mittevõrdsed.



Joonis 14.



Joonis 15.

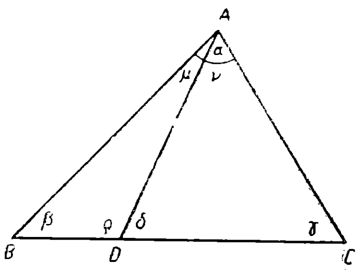
Eelnevaist mõttekäikudest ilmneb, et paralleelsirgete probleemi on võimatu lahendada vahenditega, mis on seotud lõpmatute suuruste või piirkondadega. Tekib mõte otsida sellist tõestamisviisi, mis on vaba lõpmatuse mõistest. Võib ju olla, et tasandil on selline struktuur, mis võimaldab tema lõplike (kogemuse piirides olevate) piirkondade abil otsustada selle üle, mis toimub lõpmata kaugel. Selle küsimuse juurde tuleme tagasi siis, kui analüüsime paralleelide aksioomi ajalooliselt viimast olulist tõestamiskatset.

Esitame lugejale iseseisvaks lahendamiseks **kaks ülesannet**.[8] Tuleb otsustada, kas järgnevad tõestuskäigud on korrektsed, ja eitava vastuse korral leida viga.

1) Tõestame, et iga kolmnurga sisenurkade summa on 180°.

Vaatleme suvalist kolmnurka ABC (joon. 16), mille sisenurkade summa olgu x. Jaotame selle kolmnurga lõiguga AD kaheks kolmnurgaks ABD ja ACD, siis

$$\alpha + \beta + \gamma = x,$$
$$\beta + \mu + \varrho = x,$$
$$\gamma + \nu + \delta = x.$$



Joonis 16.

Liidame kaks viimast võrdust:

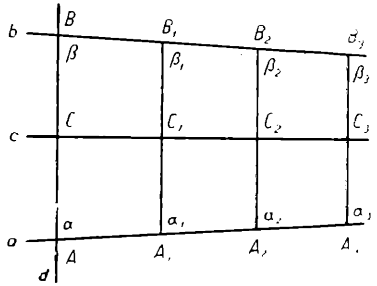
$$\beta + \gamma + \mu + \nu + \varrho + \delta = 2x.$$

Et $\mu + \nu = \alpha$ ja $\varrho + \delta = 180°$, siis $\beta + \gamma + \alpha + 180° = 2x$, seega $x = 180°$, m. o. t. t.

[8] Toimetusele saadetud lahendusi arvestatakse samadel alustel nagu erirubriigis esitatud ülesannete lahendusi.

2) Lõigaku sirge d sirgeid a ja b nii, et tekivad võrdsed ühepoolsed (näiteks parempoolsed; vt. joon. 17) sisemised nurgad α ja β, mille summa on väiksem sirgnurgast. Tõestame, et sirged a ja b ei lõiku.

Sirged a ja b ei saa lõikuda vasakul pool sirget d (miks?). Näitame, et nad ei lõiku ka paremal pool.



Joonis 17.

Leiame sirgetel punktid A_1 ja B_1 nii, et $AA_1 = AC$ ja $BB_1 = BC$, kus C on lõigu AB keskpunkt. Sirge b ei saa lõigata lõiku AA_1. Tõepoolest, kui ta lõikaks seda mingis punktis P, siis tekiks võrdhaarne kolmnurk ABP (sest $\alpha = \beta$), mille külg AP oleks väiksem poolest alusest AB või sellega võrdne.

Et nelinurk ABB_1A_1 on sümmeetriline külje AB keskristsirge c suhtes, siis $\alpha_1 = \beta_1$. Kui korrata eelnevat konstruktsiooni — leida punktid A_2 ja B_2 nii, et $A_1A_2 = A_1C_1$ ja $B_1B_2 = B_1C_1$, — ning samu arutlusi, siis ilmneb, et b ei saa lõigata ka lõiku A_1A_2.

Analoogilisel viisil näitame, et b ei lõika lõike A_2A_3, A_3A_4 jne. Konstruktsiooni saab kuitahes palju kordi korrata. Järelikult ei lõika b sirget a ka paremal pool sirget d.

Seega sirged a ja b ei lõiku.

Juhime lugeja tähelepanu asjaolule, et kui esimene tõestus lugeda korrektseks, siis saab paralleelide aksioomi tõestada (seda näitame edaspidi). Kui aga teine tõestus lugeda korrektseks, siis paralleelide aksioom muidugi kehtida ei saa. Seega esineb vähemalt ühes tõestuskäigus viga.

(Järgneb)

T. ROOSINUPU ÜLESANDEID

3. Võtsin hiljuti juhuslikult ühe ühekohalise arvu a ja ühe kahekohalise arvu bc ning märkasin, et nende korrutis on lihtsalt cab. Võtsin siis (jälle juhuslikult) ühe veidi suurema arvu $AB \ldots F$ ning kahekohalise arvu GH ja ikka oli nende korrutis lihtsalt $HAB \ldots FG$. Tegin veel ühe katse ja sain jälle sama tulemuse, s. t. kahekohalise arvuga korrutamiseks tuli tema ühelised lihtsalt kirjutada teise teguri esimese numbri ette ja kümnelised teise teguri viimase numbri taha.

Millised arvud ma juhtusin valima?

(Lahendus vt. lk. 145)

PROGRAMMÕPPEST

Hilja Õiglane

> Ei ole kahtlust, et lähemas tulevikus tuleb meil põhjalikult läbi vaadata käesoleval ajal kasutatavad, kuid oma aja ära elanud ja vananenud õpetamismeetodid ning asendada need efektiivsematega. Mida varem seda tehakse, seda parem.
>
> Akadeemik A. I. Berg

Teaduse ja tehnika kiire areng toob järjest täiendust õppeprogrammidesse. Õpitava materjali hulk kasvab, kuid nädalatundide arv koolis on niigi juba õpilastele lubatava tööaja piiril või isegi üle selle — tundide arvu seega enam suurendada ei saa. Järelikult tuleb leida uusi teid, kuidas olemasolevat aega ratsionaalsemalt kasutada, et koolist ellu saata kaasaja nõuetele vastavate teadmistega inimesi.

Ühe esimese sammuna selles suunas tuleb ilmselt tõsiselt läbi mõelda õpetamise metoodika. Õpetamismeetodid on püsinud pikka aega oma põhiolemuselt muutumatutena, kuigi traditsioonilisel õpetamisviisil on rida puudusi. Nimetame siin kahte olulisemast nendest puudustest.

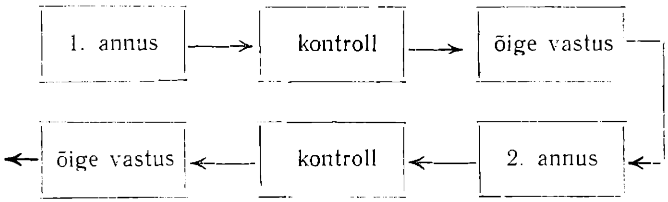
Suur osa õpilastest jääb tunnis passiivseks — ka hästi organiseeritud õppetunni juures.

Kõik õpilased töötavad sama tempoga, mis paratamatult on kohandatud nn. keskmisele õpilasele.

Neid puudusi saaks kõrvaldada siis, kui õpetaja töötaks iga õpilasega individuaalselt. Psühholoogia-alased uurimused näitavad nimelt, et kõige produktiivsem õpetamismeetod on just individuaalõpetus. Praktiliselt aga muidugi ei saa õpetaja terve õppetunni vältel töötada iga õpilasega eraldi. Sellele vaatamata võib individuaalõpetuse üht varianti siiski realiseerida õpetaja detailselt koostatud juhendi — programmi — kaudu. Individuaalset õppetöö vormi, kus õppeprotsessi juhtimine toimub kirjaliku (või mõnel teisel viisil antud) programmi alusel, nimetataksegi programmõppeks.

Programmõppel on Ameerika Ühendriikides küllalt pikk ajalugu. Juba 1920. aastatel formuleeris oma seisukohad USA psühholoog S. L. Pressy, kelle soovitatud valikmeetodi printsiip on sisuliselt testimeetodi jätk — õpetav test. Uus õppeviis kujunes aga välja alles 1950. aastatel. 1954. a. avaldas psühholoog B. F. Skinner uurimuse, millele toetudes ta koostas nn. Skinneri lineaarse programmi. Selles on lähtutud positiivsete emotsioonide mõjust — õppimine on kõige edukam siis, kui õpilane annab alati õigeid vastuseid ning saab selle kohta koheselt ja pidevalt kinnitust.

Skinneri tüüpi programmi korral tuleb aine jaotada elementaarseteks osadeks («doos», «annus», «samm»). Igale annusele järgneb kontroll küsimuse või sagedamini lünktesti näol, kusjuures õige vastus on õppijal enesekontrolliks kättesaadav. Skemaatiliselt võib sellist programmi esitada joonisel 1 toodud kujul:



Joonis 1.

Lünktesti täitmine ongi sisuliselt õppimine, seetõttu püstitab Skinner nõude — programm peab olema niimoodi koostatud, et õppija saab ainult õigesti vastata (positiivne mõju õppijale!).

Lineaarse programmi korral läbivad kõik õppijad ühesuguse programmi samas järjekorras. Töötamine toimub iseseisvalt, individualiseerimine seisneb selles, et tugevamad õpilased läbivad programmi kiiremini.

Näide (Tartu 2. Keskkooli õpetaja H. Kulli toimetatud katsematerjalist). Eeldatakse, et õpilane hoiab lehe parema poole kaetuna ja avab selle järk-järgult, leides pärast õiged vastused lünga täitmiseks.

Siinusteoreem

15. Teine seos, mis esineb iga antud kolmnurga ABC külgede ja nurkade vahel, on siinusteoreem. See teoreem väidab järgmist:
Igas kolmnurgas ABC, mille küljed on a, b, c, kehtib seos

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}\ .$$

Peame meeles, et iga suhe sisaldab kolmnurgas ABC ühe .... ja selle vastasnurga ....

külje;
siinuse

16. Siinusteoreem väidab, et igas kolmnurgas ABC on

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{.....}{\sin B}=\frac{.....}{.....}$$

b; $\frac{c}{\sin C}$

17. Siinusteoreemi on võimalik kirjutada kolme võrdena:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B},$$

$$\frac{b}{.....}=\frac{c}{.....}$$

ja

$$\frac{c}{.....}=\frac{a}{.....}.$$

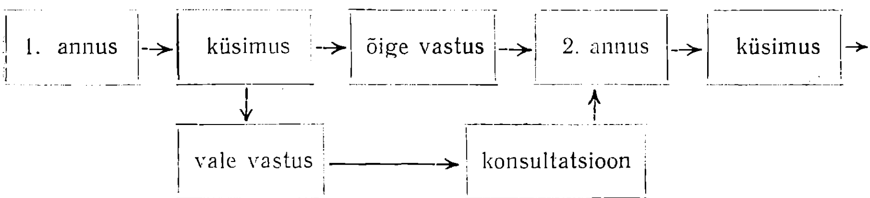
$\sin B$; $\sin C$

$\sin C$; $\sin A$

18. Seega väidab siinusteoreem, et suhe $\frac{a}{\sin A}$ on võrdne suhtega $\frac{b}{\sin B}$. Niisamuti on eelmiste suhetega võrdne ka ....

$\frac{c}{\sin C}$

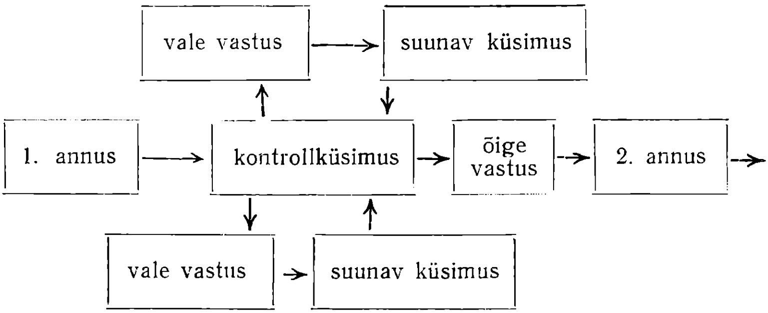
Teine laialdaselt kasutatav programmi tüüp on **h a r g p r o g r a m m**, mis põhineb valikvastuste meetodil. Annusele järgneb küsimus (või ülesanne), millele on antud võimalikud vastused. Tavaliselt on üks vastustest õige, teised aga sisaldavad tüüpilisi vigu antud küsimusele vastamisel. Õppija peab valima valmis vastustest õige või võrdlema iseseisva lahenduskäigu tulemusena saadud vastust antuga (matemaatikas). Olenevalt sellest, kas õppija leiab õige või vale vastuse, suunab programm teda läbima erinevat teed. Lihtsamal kujul on programmi skeem kujutatud joonisel 2.



Joonis 2.

Konsultatsioonis on antud vastaja vea seletus (sest vale vastus pärineb tüüpilisest veast) ning õige vastus koos põhjendusega. Edasi suunab programm õppija juba järgmise annuse juurde, kuna aga õige vastuse puhul juhitakse ta kohe uue annuse juurde.

Hargprogramm võib olla ka keerukama struktuuriga, näiteks niisugusega, kus vale vastuse korral esitatakse veel suunav lisaküsimus. Võib ka olla ette nähtud enam kui üks tüüpiline vale vastus. Sel juhul saame niisuguse programmi, nagu on kujutatud joonisel 3.



Joonis 3.

Hargprogrammi struktuur oleneb õppematerjali iseloomust ja muidugi ka programmi koostajast. Hargprogrammi puhul läbivad õppijad programmi erinevaid teid mööda. Nõrgemad õpilased peavad rohkem töötama, ühtlasi saavad nad ka rohkem seletusi. Tugevamad õpilased, kes suudavad iseseisvalt töötada, läbivad programmi lühemat teed mööda. Hargprogrammi puhul on annused tavaliselt suuremad kui lineaarprogrammis.

Näide (EPA-s kasutatud diferentseerimistehnika programmist).

Ülesanne. Antud on funktsioon $y = \frac{1}{x^5}$, leida y'.

Vastused:

1) $-\frac{5}{x^4}$ (vt. lk. 7)

2) $-\frac{6}{x^6}$ (vt. lk. 10)

3) $-\frac{5}{x^6}$ (vt. lk. 12)

Lahendanud ülesande, võrdleb õpilane oma vastust esitatud vastustega. Iga vastuse juures on antud viide programmi leheküljele, kus lahendaja leiab kommentaarid antud vastuse kohta. Need kommentaarid on järgmised.

Lk. 7. Vastus on vale. Antud funktsioon on astmefunktsioon astmenäitajaga $n = -5$. Astmefunktsiooni diferentseerimise reegli järgi (vt. reegel ja näited lk. ,....) tuleb tuletise astmenäitaja leidmiseks lahutada funktsiooni astmenäitajast 1. Järelikult

$$n - 1 = -5 - 1 = -6 \quad \text{ja} \quad y' = -\frac{5}{x^6}.$$

Teie olete tuletise astmenäitaja leidmisel lahutamise asemel liitnud.

Edasi: Lahendage ülesanne nr. ... lk ... (Ülesanne on analoogiline antud ülesandele, näiteks: antud on $y = \frac{1}{x^8}$, leida y').

Lk. 10. Vastus on vale. Astmefunktsiooni tuletises on kordajaks funktsiooni astmenäitaja n. Antud ülesandes $n = -5$. Järelikult $y' - \frac{5}{x^6}$, teie aga võtsite kordajaks tuletise astmenäitaja.

Edasi: Lahendage ülesanne nr. ... lk. ... (näiteks: antud on $y = \frac{1}{x^8}$, leida y', kusjuures tuuakse jällegi valikvastused).

Lk. 12. Vastus on õige. Te lahendasite ülesande järgmiselt: $y = \frac{1}{x^5} = x^{-5}$; $y' = -5x^{-5-1} = -5x^{-6} = -\frac{5}{x^6}$. Edasi lahendage ülesanne nr. .... lk. ... (Kuna ülesanne oli lahendatud õigesti, siis suunatakse lahendaja juba järgmise ülesande tüübi juurde. Näiteks: antud on $y = x\sqrt{x}$, leida y'; tuuakse valikvastused ja viited).

Mõlema programmi tüübi puhul saavad õppijad töötada individuaalselt ja iseseisvalt, kuid võib teha etteheiteid nii ühele kui teisele printsiibile. Lineaarprogrammis on õppematerjal liialt hakitud ning kipub kaduma üldine ülevaade (metoodika näeb küll iga tsükli järel ette kontrolltöö enesekontrolliks, mis peab ühtlasi olema ka kokkuvõte õpitud materjalist). Teiseks suuremaks puuduseks on nõue, et küsimused peavad nii aeglaselt lihtsamalt keerulisema poole suunduma, et õppija p e a b alati andma õige vastuse. Seega kaob õppijal mõttepinge — ta võib küll omandada teadmisi, kuid mõtlema ta ei õpi. Tugeva loogilise mõtlemisvõimega õpilasele on selline mehhaaniline töö igav.

Hargprogrammi suurimaks puuduseks on antud vastused. Kasutades ainult õpetavat programmi ilma masinata ei pea õppija vastust ise konstrueerima, vaid antutest valiku tegema. Matemaatikas (osalt ka mõnes teises aines — näiteks grammatikareeglite harjutamisel) see probleem ei ole küll nii terav, sest ülesande vastus ütleb lahenduskäigu kohta väga vähe (tavaliselt on ju ka ülesannete kogu lõpus vastused olemas).

Tüüpiliste vigade tegemisel saadud vastused võimaldavad anda seletusi ning suunata sobivatele lisaülesannetele. Seetõttu pole (eriti matemaatikas) enamasti ka põhjust karta väärvastuste kinnistumist. Hargprogrammi on võimalik koostada nii, et ta on huvitav ja jõukohane igale õppijale. Muidugi on hargprogrammi koostamine aga oluliselt keerukam kui lineaarprogrammi koostamine.

Õppimisel ainult õpetava programmi alusel on õppijal olemas küll pidev enesekontroll, kuid õpetajal puudub informatsioon töö käigu ja tulemuste kohta. Töö hindamiseks tuleb läbi viia eraldi kontrolltöid. Metoodiliselt oleks aga ka täiesti väär hinnata õppijat jooksva töö eest, kuna see stimuleerib ebaausaks tööks.

Programmõppes on võimalik ulatuslikult kasutada ka masinaid. Õpetavate masinate kasutamisel saab õpetaja kogu aeg informatsiooni õppimistulemustest, mis võimaldab õpetajal õppimisprotsessi paremini juhtida. Kuid masinate kasutamise korral tuleb programmi koostajal arvestada masinate omadusi, ta ei saa alati lähtuda ainult antud aine metoodikast. Masinate kasutamise probleem ei mahu aga käesoleva artikli raamidesse.

NSV Liidus tekkis huvi programmõppe vastu alles 1960. aastatel. Nõukogude pedagoogid ja psühholoogid A. N. Leontjev, P. J. Galpernin, N. F. Talõzin, L. N. Landa jt. on aga juba andnud teoreetilised alused programmide koostamiseks, lähtudes õppimise ja mälu seaduspärasustest.

Meie vabariigis on programmõpet rakendatud ka matemaatika õpetamisel. Hästi läbiviidud eksperimentide (õp. T. Palm Tallinna 21. Keskkoolist, õp. H. Kull Tartu 2. Keskkoolist, õp. E. Vaher Tartu Med. Keskkoolist, õp. A. Haamer Elva Keskkoolist ja A. Koppelman Pärnu 2. Keskkoolist jt.) resultaadina võib julgesti kinnitada, et antud meetod õigustab end matemaatika õpetamisel keskkoolis. Käesoleva artikli autori teostatud eksperimendid (1964/65. ja 1965/66. õppeaastal) kõrgema matemaatika õpetamisel programmõppe meetodil lubavad järeldada, et antud meetod on ka kõrgema matemaatika õpetamisel sobiv.

Moskva Riiklikus Ülikoolis viidi 1964/65. õppeaastal läbi ulatuslik programmõppe eksperiment. Õpilaste hinnangu saamiseks tuli neil anda vastused ankeedile (et vastused oleksid objektiivsed, ei märgitud ankeedile nime). Toome siin mõned huvitavamad momendid: 1) 91% üliõpilastest pidas programmõpet otstarbekamaks traditsioonilisest, 2) antud meetodit oleks üliõpilaste arvates sobiv kasutada eelkõige füüsikas, matemaatikas, teoreetilises mehhaanikas, 3) 57% vastanuist väitsid, et programmõppel kulus vähem aega, 43% ajas ei võitnud (seejuures toodud põhjendused: «Antud juhul ei võitnud ajas, kuid põhimõtteliselt võiks nii kiiremini õppida», «Ei võitnud ajas. Varem õppisin ainult eksamisessioonil.»).

Programmõppe kasutamise kogemused näitavad, et antud meetod annab üsna häid resultaate. Kuid töö tulemused olenevad ikkagi eelkõige õppija tahtest ainet omandada. Hästi koostatud programm loob ainult eeldused vajalike teadmiste omandamiseks minimaalse ajaga.

PEAMURDMISEKS

$$\begin{array}{r} \textit{READ} \\ + \ \textit{THIS} \\ \hline \textit{PAGE} \end{array} \qquad \begin{array}{r} \text{READ} \\ - \ \textit{THIS} \\ \hline \textit{PAGE} \end{array}$$

Arvestada, et siin on tegemist kahe sõltumatu ülesandega.

ALGKLASSIDE MATEMAATIKA ÕPETAMINE VAJAB ÜMBERKORRALDAMIST

P. Kees

Probleemist üldiselt ja selle ajaloolisest taustast

Tuntud nõukogude matemaatik akadeemik A. Hintšin on rõhutanud, et «õpilane peab õppima ainult otsimise, intellektuaalse, aktiivse töö, raskuste ületamise protsessis, — selles on ainus, kuid see-eest absoluutselt kindel garantii, et tema teadmised ei kujune üksnes formaalseteks.» [1]

Küsimusele, kas praegune matemaatika õpetamine algklassides vastab esitatud nõuetele, peame kahjuks vastama eitavalt. Asjata ei nendi tuntud tšehhi pedagoog M. Jelinek, et «algastme matemaatika õpetamise ebarahuldavat ja vananenud olukorda kogetakse paljudes riikides puudusena».[2]

Algklasside matemaatika õpetamise süsteemi küündimatuse fakt valmistab muidugi meelehärmi, kuid rõõmustav on teada, et kogu maailmas on asutud olukorda parandama.

Siin tuleb nimetada kahte olulist põhjust, mis on tinginud algklasside ja üldse matemaatika õpetamise reforme. Neist esimene põhjus toetub selle fakti sügavale tunnetamisele, et «matemaatika, millel sajandi algul polnud peale füüsika ja inseneriteaduse mingeid muid rakendusalasid, on muutunud kaasaegse inimkultuuri üheks põhiliseks koostisosaks ja hädavajalikuks vahendiks enamusel mõtlemise, teaduse ja tehnika aladel.» [3]

Viimati mainituga seoses on huvitav peatuda niisugusel seigal. Matemaatika osatähtsuse tohutut suurenemist tajuti juba mõnikümmend aastat tagasi, ent selle fakti tajumine oli enam-vähem formaalset laadi; keegi ei teinud sellest praktilisi järeldusi.

Liikumapanevaks jõuks, mis vapustas kogu maailma ja pühkis minema senise inertsuse matemaatika õpetamise küsimustes, oli esimene Nõukogude Liidu tehiskaaslane.

---

[1] А. Я. Хинчин, О формализме в школьном преподавании математики. — «Известия АПН РСФСР» № 4, 1946, lk. 18.

[2] Milos Jelinek. Die Modernisierung des Mathematikunterrichts in den unteren Klassen. — «Mathematik in der Schule» Nr. 2, 1965, lk. 82.

[3] Papy et Frédérique Papy. Mathématique moderne, vol. I. Bruxelles-Paris, 1963, lk. VI.

Kuulakem Ameerika pedagoogi enda ülestunnistust algklasside matemaatika programmide ajaloolisest taustast. Nii kirjutab David Rappaport Chicago Õpetajate Kolledžist: «Esimese Vene satelliidi, sputniku, orbiidile lennutamine vapustas Ameerika rahvast. Me olime kuidagi tardunud usus, et me oleme kõikidest igal alal paremad. Teaduses ja tehnoloogias kindlasti ei ole meile võrdseid. Kuid nüüd tuli julm ärkamine. Üks selle tagajärgedest oli huvi tundmine matemaatika ja loodusteaduse programmide vastu meie koolides. Mõned kritiseerisid matemaatika programmi ka enne sputnikut, kuid keegi ei pööranud neile tähelepanu. Ent nüüd hakkas igaüks asja vastu huvi tundma ja valitsus hakkas toetama katseprogramme.» [4]

Tuleb au anda ameeriklaste avameelsele ja kiirele reageerimisele. Järeldusi ei teinud antud faktist mitte ainult ameeriklased, vaid enam-vähem kogu maailmas algas ärkamine senisest tardumusest. Jõuti äratundmisele, et senise algõpetuse süsteemiga, kus pearõhk on mehhaanilisel äraõppimisel ja mõtlemine on jäetud vaeslapse ossa, ei saa enam leppida.

Teine oluline põhjus, mis näitab, et algklasside matemaatika õpetamine vajab kardinaalseid ümberkorraldusi, seisneb selles evidentses tões, et iga hoone ehitamine algab vundamendi või aluse rajamisega. Mida tugevam alus, seda kindlam saab pealisehitis.

Algklassides rajatava matemaatika tugeva alusmüüri tähtsust rõhutati ka 1959. a. Prantsusmaal, Asnieres -sur- Oise'is kokkukutsutud Euroopa majandusliku koostöö organisatsiooni liikmesmaade esindajate seminaril, millest võttis osa 18 maad ja külalistena viibisid seminaril USA ja Kanada vaatlejad. Oma sissejuhatavas kõnes ütles dr. Marshall H. Stone Chicago Ülikoolist muuseas järgmist: «... Me peame alatiseks meeles pidama, et see, mida me võime saavutada neis astmeis (s. o. keskkooli ja ülikooli esimestel aastatel — *P. K.*), on piiratud sellega, mida on saavutatud algkoolis. Tuleb eriti rõhutada, et matemaatika õpetamise parandamisel algkoolis on suur tähtsus ja et selleks tuleb teha kõik mis võimalik.» [5]

Algklasside matemaatika õpetamisest meie vabariigis

Kuigi meil Nõukogude Liidus oli ja on algklasside matemaatika õpetamise tase kõrgem kui näiteks Ameerikas, ei tähenda selle konstateerimine, et me peaksime olukorraga rahule jääma ja mitte südant valutama selle parandamise pärast.

Millised on siis need faktid, mis sunnivad meid tõsiselt muret tundma ja mis silmanähtavalt viitavad puudustele algõpetuse

---

[4] David Rappaport, Historical Factors that Have Influenced the Mathematics Program for the Primary Grades. — «School Science and Mathematics». Vol. LXV, No. 1, 1965, lk. 32.

[5] New Thinking in School Mathematics, OEEC, 1961, lk. 22.

süsteemis? Need on kõigepealt keskastme õpilaste üldiselt madal mõtlemistase, eriti aga abstraktse mõtlemise piiratus.

Toogem paar näidet. Käesoleval sügisel anti ühe kooli V klassi õpilastele muude ülesannete seas lahendada ka 2 järgmist: 1. Mitu cm^2 on ruudu pindala, mille külje pikkus on 15 mm? 2. Mitu cm on ruudu ümbermõõt, mille külje pikkus on 15 mm? Ühes koolis ei osanud esimest ülesannet mitte keegi õigesti lahendada, teise ülesande õigeid lahendusi oli 13,3%, s. o. veidi üle kümnendiku. Teises koolis olid samade ülesannete õigete lahenduste protsendid vastavalt 13,3 ja 10.

Isegi 8. klassi lõpueksameil esineb otse kurioosseid fakte. Näiteks ühe kooli võimekas õpilane ei osanud kuidagi põhjendada, miks ta ühe protsendi leidmiseks jagab 20 just neljaga, aga mitte mõne muu arvuga, kui on teada, et 4% on 20.

Õpetamise süsteemile vajutavad pitseri, kujundavad tema näo vastavad programmid ja sellele baseeruv õpetamise metoodika. Programmidega taotletavaid eesmärke mõtestatakse lahti programmide seletuskirjades.

Küsigem nüüd edasi, kas meie algklasside programmid ja seletuskirjad teenivad uue inimese kasvatamise õilsaid eesmärke ja kas nad vastavad praegusaegse teaduse tasemele. Peame kahjuks vastama, et algklasside programmid on teatud mõttes vananenud.

Nende puuduseks tuleb märkida, et seletuskirjades ei puudutata mõtlemisoskuse arendamist, tunnetusprotsesside aktiviseerimist, komponentidevaheliste seoste ning sõltuvuste teadlikku omandamist, vaid toonitatakse arvutusoperatsioonide kätteõppimist ja põhiliselt mälule toetuvate teadmiste omandamist. Ei saa nõustuda ka programmi seletuskirjas esitatud juhisega: «Kirjaliku arvutamise võtteid pole otstarbekas liiga vara kätte õpetada, sest need takistavad peastarvutamise oskuse arendamist.» [6]

Nõukogude kooli ees seisab ülesanne kasvatada uut inimest, igakülgselt arenenud isiksust. Me usume, et isegi nende üksikute põgusate märkuste põhjal saab ilmsiks, et «kui läheneda algõpetuse traditsioonilisele süsteemile nende ülesannete (s. o. igakülgselt arenenud isiksuse kujundamise — *P. K.*) seisukohalt, saab täielikult selgeks praeguse algõpetuse põhjaliku ümberkorraldamise tungiv vajadus. Meie tahame kasvatada inimest — loojat, kuid praegune algõpetuse metoodika kujundab õpilastest ühekülgseid täideviijaid.» [7]

L. Zankovi uuest algõpetuse süsteemist

Algklasside matemaatika õpetamise ümberkorraldamise vajadus on niisiis fakt, millele enam keegi vastu ei vaidle. Teatavasti on Pedagoogikateaduste Akadeemia moodustanud komisjoni, kes

[6] Eesti NSV Haridusministeerium. Algkooli programmid 1965/1966. õppeaastaks, lk. 72.

[7] Л. В. Занков. О начальном обучении, АПН РСФСР, 1963, lk. 14—15.

tegeleb kogu hariduse sisu ja mahu läbivaatamisega selles suunas, et haridus vastaks kaasaja kõrgendatud nõuetele ja aitaks efektiivselt kaasa isiksuse igakülgsele arendamisele. On loota uute ajakohastatud programmide peatset kehtestamist.

Allpool tahaks peatuda akadeemik L. Zankovi uue algõpetuse süsteemi mõnedel põhimõttelistel küsimustel. Zankovi süsteemi järgi õpetatakse enam kui 1400 klassis.

L. Zankovi süsteemi aluseks on tema poolt väljatöötatud uued didaktilised printsiibid. Põhiliseks ja kandvaks printsiibiks on õppeprotsessi efektiivsus, kusjuures viimane ei ole omaette eesmärk, vaid see on õpilaste üldise arengu teenistuses. Edasiste printsiipidena esinevad õpetamine kõrgel raskuseastmel, kusjuures tuleb rangelt arvestada raskuse määra, ja aine käsitlemise kiire tempo. Neile printsiipidele on üles ehitatud kogu praktiline õppetegevus, alates programmidest ja lõpetades üksikute metoodiliste võtetega.

Vaatamata sellele, et Zankovi süsteemi järgi õpetamine on muutunud küllalt laialdaseks, käib selle ümber äge vaidlus, kusjuures seisukohad on sageli väga erinevad. On palju selle süsteemi tuliseid pooldajaid, kuid on ka neid, kes väidavad, et Zankovi süsteemi didaktilised printsiibid pole küllalt konkreetsed, et nad on vastuolus psühholoogia ja pedagoogika tõdedega. Kas Zankovi süsteem endale eluõiguse võidab, seda näitab tulevik.

Töökogemuslikke tähelepanekuid

Allpool peatuksime mõningatel matemaatika õpetamise kogemustel Ahja Keskkooli algklassides. Meie lähtume täielikult L. Zankovi süsteemi didaktilistest printsiipidest, kuid rajame sellele pealisehituse mitte ainult L. Zankovi metoodikast. Lähtudes L. Zankovi kolmest nimetatud printsiibist, töötasime omakorda nende baasil välja efektiivset õpetamist tagavad printsiibid. Viimaseid saime 21. Jaotasime nad õpetajaile brošüüris «Meelespea õpetajaile». Selles on näiteks niisugused punktid:

1. Iga teema, iga ainelõigu juures tuleb läbi mõtelda need võimalused, mis tagavad õpilase iseseisvust ja loovat mõtlemist. Tundides peab valitsema mõtlemine (kasutada induktsiooni, heuristilist meetodit, aktiviseerimist jne.).

2. Mida suudab teha õpilane, seda ärgu tehku tema eest õpetaja.

3. Kuna eesmärk on abstraktne mõtlemine, siis ei tule näitlikustamisega liialdada. Näitlikustamist tuleb kasutada niivõrd, kuivõrd ta aitab arendada õpilast.

4. Õpetamine peab olema jõukohasel raskustasemel, mitte liiga kerge ega nämmutav. Kogu aeg peab õpilaste ees seisma mingi probleem, mida nad peavad pingutusega lahendama.

5. Tunni iga minutit tuleb kasutada ratsionaalselt. Ka kodutööde kontrolli ajal ei tohi olla klass tegevuseta.

6. On vaja meeles pidada, et igasuguse eduka õpetamise eelduseks on tähelepanu ja distsipliin, ükski meetod ei suuda korvata nende puudumist.

Õpilaste jaoks koostasime tabeli «Kuidas lahendada matemaatika ülesannet?» Tabeli põhiline osa on võetud raamatu [8] Д. Пойа, «Как решать задачу» (М., 1961) lõpul olevast lühendatud tabeli kujust.

Tabelis «Kuidas lahendada matemaatika ülesannet» on esitatud üldised nõuanded:

I. Ülesandest tuleb aru saada.
II. On vaja leida tee tundmatu juurest andmete juurde.
III. Ellu viia lahendamise idee.
IV. Kus iial võimalik, kujutada ülesande sisu graafiliselt.
V. Kontrollida lahendamist ja hinnata seda kriitiliselt.

Seejärel on kõne all olevas tabelis esitatud üldiste nõuannete täpsustamine. Nii on näiteks V nõuande täpsustamises öeldud: Mõtle järele, kas saadud vastus võib üldse võimalik olla. Kui võimalik, teosta vastuse kontroll. Mõtle järele, kas antud ülesannet ei saa lahendada ka teisiti.

Märgime veel, et mõnevõrra oleme laiendanud praegu kehtivat matemaatika programmi. Näiteks rakendame I klassis algebra elemente, geomeetria algmeid ja tutvume korrutamise ning jagamisega.

Väljend «algebra elemendid» peaks juba ütlema, et I klassis pole tegemist mitte algebra kursusega, vaid ainult mõnede matemaatiliste seaduspärasuste üldistatud kujul märkimisega.

Tutvudes tehete juures komponentide terminitega ja komponentidevaheliste seostega, mis kujutab endast ka programmi laiendamist, laseme vastavad seaduspärasused ning seosed märkida üldkujul. Näiteks seadus: summa ei olene liidetavate järjekorrast, märgitakse I klassis kahel viisil: 1) $a+b=b+a$; 2) $a+b=c$; $b+a=c$. Samuti osatakse üldkujul märkida ühe liidetava jne. leidmist. Näiteks $a+x=c$; $x=c-a$ jne.

Tavaliselt valmistab õpilastele kõige suuremaid raskusi just tähesümboli esmane mõistmine. Olgu märgitud, et katsetaja V. Davõdov Moskvast alustab I klassis kohe aasta algusest peale tähtedega, numbrid lisanduvad alles II poolaastal. Akadeemik L. Zankov ei poolda sellist käsitlust, sest siin ei toetuta lapse vahetule eelnevale kogemusele. Meie seisukoht ühtib viimasega.

Programmi mõningase laiendamise eesmärgiks on olnud ühelt poolt abstraktse mõtlemise süvendamine, kuid teiselt poolt mõne ainelõigu sügavam ning teadlikum omandamine. Põhilist eesmärki ei ole me näinud aga programmi laiendamises, vaid selle teadlikus ja loovas omandamises.

---

[8] G. Polya raamat «Kuidas lahendada ülesannet?» ilmub peatselt ka eestikeelses tõlkes, kuid ilma selle lühendatud tabelita.

MÕNINGAID VALEMEID KOLMNURGA GEOMEETRIAST

M. Levin

Vaatleme mittevõrdkülgset kolmnurka ABC, mille lühim külg on BC (vt. joonis 1).

Oluliseks lõiguks saab meil MN, mille otspunktid M ja N asuvad vastavalt külgedel AB ja AC nii, et $BM = CN = CB$.

Võtame kasutusele järgmised tähistused:

R — $\triangle ABC$ ümberringjoone raadius,
r — $\triangle ABC$ siseringjoone raadius,
d — $\triangle ABC$ siseringjoone ja ümberringjoone keskpunktidevaheline kaugus,
w — lõigu MN pikkus,
k — lõikude BC ja MN suhe,
α — nurga BAC suurus.

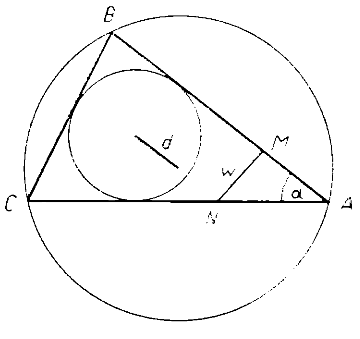
Allpool toodud teoreemid määravad kolmnurga nende elementide vahelised seosed.

Seos suuruste d, R ja r vahel on teada elementaargeomeetriast tuntud Euleri valemiga [1]

$$d = \sqrt{R(R-2r)}. \qquad (1)$$

T e o r e e m 1. Kehtib valem

$$\frac{r}{R} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right). \qquad (2)$$



Joonis 1.

T õ e s t u s. Olgu $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$; S on $\triangle ABC$ pindala ja p sama kolmnurga pool ümbermõõtu.

---

[1] Selle tõestuse võib leida näiteks raamatust: С. И. З е т е л ь. Новая геометрия треугольника. Москва, 1962, lk. 67—68.

Rakendame kolmnurkadele ABC ja AMN koosinusteoreemi, saame

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha, \tag{3}$$

$$w^2 = (b-a)^2 + (c-a)^2 - 2(b-a)(c-a)\cos\alpha. \tag{4}$$

Lahutades võrduse (4) võrdusest (3), saame pärast elementaarseid teisendusi

$$a^2 - w^2 = 2a(b-a+c)(1-\cos\alpha). \tag{5}$$

Asendame siia $\cos\alpha$ väärtuse valemist (3); saame

$$a^2 - w^2 = 2a(b-a+c)\left(1 - \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right) =$$

$$= 2a(b-a+c)\,\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc} =$$

$$= \frac{8a}{bc}\left(\frac{a+b+c}{2} - a\right)\left(\frac{a+b+c}{2} - b\right)\left(\frac{a+b+c}{2} - c\right) =$$

$$= \frac{8a^2}{abcp}\,p(p-a)(p-b)(p-c) = 2a^2\cdot\frac{S}{p}\cdot\frac{4S}{abc}.$$

Et

$$\frac{S}{p} = r, \qquad \frac{abc}{4S} = R,$$

siis

$$a^2 - w^2 = 2a^2\cdot\frac{r}{R}.$$

Jagades selle võrduse mõlemad pooled avaldisega $2a^2$ ja asendades $\frac{a}{w} = k$, saame valemi (2), mida oligi tarvis tõestada.

T e o r e e m 2. Kehtivad valemid

$$R = d\cdot k, \tag{6}$$

$$r = \frac{d}{2}\left(k - \frac{1}{k}\right). \tag{7}$$

T õ e s t u s. Kui valemi (1) mõlemad pooled ruutu tõsta ja saadud võrdus jagada R^2-ga, saame

$$\frac{r}{R} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{d^2}{R^2}\right). \tag{8}$$

Valemite (2) ja (8) võrdlemisel saame

$$\frac{1}{k}=\frac{d}{R},$$

kust järeldubki võrdus (6).

Valemi (7) saamiseks piisab, kui valemis (8) R asemele asetada dk (vt. valem (6)).

T e o r e e m 3. Kehtib valem

$$d=\frac{w}{2\sin\alpha}. \tag{9}$$

T õ e s t u s. Valemitest

$$2R=\frac{a}{\sin\alpha},\qquad k=\frac{a}{w}$$

järeldub

$$R=\frac{kw}{2\sin\alpha}.$$

Asendades siia R (võrduse (6) järgi) saame kohe võrduse (9), millega ongi teoreem tõestatud.

M ä r k u s. Valemist (9) on näha, et suurus d on arvuliselt võrdne kolmnurga AMN ümberringjoone raadiusega.

Ülalpool me konstrueerisime lõigu MN vastavalt küljele BC. Konstrueerime nüüd analoogiliselt lõigud vastavalt külgedele AB ja AC. Konkreetsuse mõttes loeme $BC < BA \leqslant CA$.

Olgu punktid M, N, P, Q, U ja T määratud järgnevalt (vt. joonis 2):

$$CB=BM=CN,$$
$$AB=AP=BQ,$$
$$AC=AU=CT.$$

Lõikudel MN, UT ja QP on järgmine omadus.

T e o r e e m 4. Kolmnurk külgedega MN, PQ ja UT on sarnane kolmnurgaga ABC.

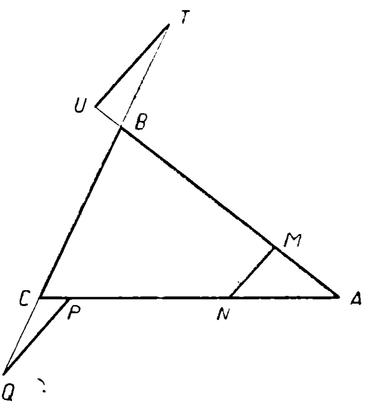
T õ e s t u s. Tähistame

$$\frac{AB}{PQ}=q,\qquad \frac{AC}{TU}=t.$$

Vaatleme kolmnurkade paare

$\triangle CPQ$ ja $\triangle CBA$,

$\triangle BUT$ ja $\triangle BCA$.



Joonis 2.

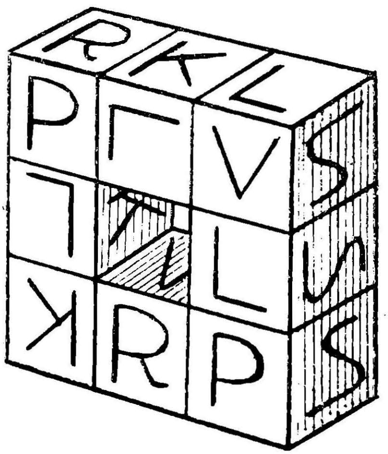
Nende kohta saab tõestada (analoogiliselt teoreemiga (1)):

$$\frac{r}{R}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{q^2}\right), \tag{10}$$

$$\frac{r}{R}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{t^2}\right). \tag{11}$$

Võrreldes valemeid (2), (10), (11), näeme, et $k=q=t$ ja seega

$$\frac{BC}{MN}=\frac{AB}{PQ}=\frac{AC}{TU}, \quad \text{m. o. t. t.}$$



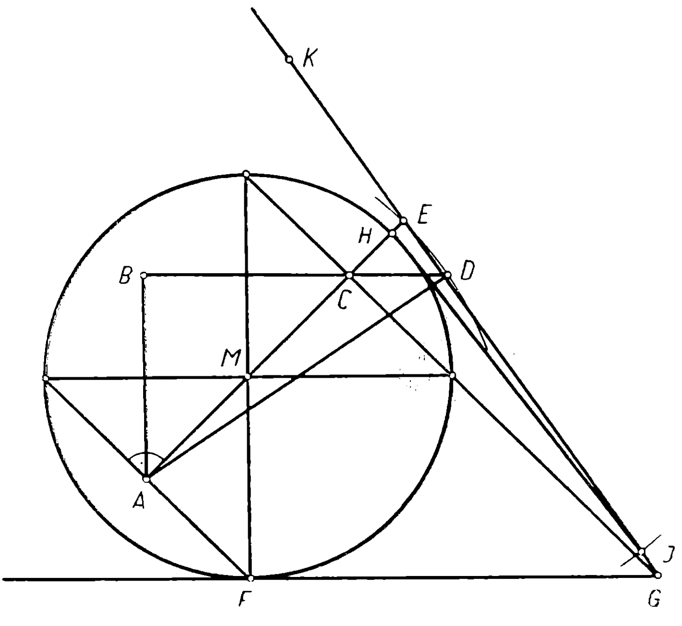
MÄNGUKLOTSID

Kõrvaloleval joonisel kujutatud kaheksa kuubi tahud on kõigil ühtmoodi varustatud tähtedega. Leidke vastused järgmistele küsimustele. Milline täht paikneb K vastastahul? Milline täht paikneb L vastastahul? Milline täht paikneb V vastastahul? Millised tähed paiknevad P naabertahkudel?

VEEL ARVU π GEOMEETRILISEST KONSTRUEERIMISEST

Koolimatemaatikale pühendatud lehekülgedel on meil juba juttu olnud arvu π geomeetrilisest konstrueerimisest.[1] Teatavasti pole π transitiivsuse tõttu seda ülesannet võimalik sirkli ja joonlaua abil täpselt lahendada, küll saab sel teel aga leida probleemi ligikaudseid lahendusi. Arvu π kõige täpsema seni tuntud konstruktsiooni andis 1947. a. S. Schomerus.[2] Tema poolt ehitatud lõik määrab arvu π viis õiget kümnendkohta. Esitamegi järgnevalt Schomeruse konstruktsiooni.

Vaatleme ühikringjoont keskpunktiga M. Olgu A sellesse ringjoonde joonestatud ruudu külje keskpunkt, $AB = 1$, $BD = \frac{3}{2}$ ja



[1] Vt. K. Ariva. Konstruktsioonid sirkli ja joonlauaga. — Matemaatika ja kaasaeg, VI, 1965, lk. 41—43. On esitatud Kochansky konstruktsioon, mis määrab π kolme kümnendkoha täpsusega.

[2] E. Beutel. Die Quadratur des Kreises. Leipzig, 1951.

$AE = AD$. Lõigaku ruudu vastaskülje pikendus punktis G puutujat, mis on tõmmatud ringjoonele läbi ruudu tipu F. Olgu I ümber punkti H raadiusega 2 joonestatud ringjoone ja sirge EG lõikepunkt ning $IK = 3$. Siis GK on otsitav lõik.

Tõestame selle väite vahetu arvutamise teel ja määrame ühtlasi tulemuse täpsuse:

$$AE = AD = \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{13}}{2} \approx 1{,}80277563,$$

$$AH = AM + MH = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \approx 1{,}70710678,$$

$$EH = AE - AH \approx 0{,}09566886,$$

$$CE = AE - AC = \frac{\sqrt{13}}{3} - \sqrt{2},$$

$$CG = \frac{3\sqrt{2}}{2},$$

$$EG = \sqrt{CE^2 + CG^2} = \frac{1}{2}\sqrt{39 - 4\sqrt{26}} \approx 2{,}15661319.$$

Olgu

$$\widehat{HEG} = \alpha \text{ ja } \widehat{HIE} = \beta, \text{ siis}$$

$$\sin\beta = \frac{EH}{IH}\sin\alpha = \frac{EH}{2}\sin\alpha,$$

$$\cos\beta = \frac{1}{2}\sqrt{4 - EH^2\sin^2\alpha},$$

$$\sin\alpha = \frac{CG}{EG},$$

$$EI = EH\cos\alpha + HI\cos\beta = EH\sqrt{1 - \sin^2\alpha} + \sqrt{4 - EH^2\sin^2\alpha} \approx 2{,}01502180.$$

Lõikude EH, EI, CG ja EG pikkusi kasutades leiamegi nüüd:

$$GI = EG - EI \approx 0{,}14159139,$$

$$GK = 3 + GI \approx 3{,}14159139.$$

Tekkinud viga on 0,00000252.

MIS ON VAATEPUNKT?

D. Hilbert esitas oma loengul kord järgmise arutelu. Igal inimesel on olemas kindel silmaring. Kui see silmaring aheneb lõpmata väikeseks, siis ta muutub punktiks. Sel juhul inimene kõnelebki, et see on tema vaatepunkt.

MONTUCLA — MATEMAATIKA AJALOO PIONEER[1]

J. Depman

Kultuuri ajalugu ilma matemaatika-alaste ideede ajaloota oleks Shakespeare «Hamleti» lavastus, milles puuduks Hamlet või vähemalt Ophelia.

A. N. Whitehead

Esimeseks õpetlaseks, kes täie selgusega tunnetas matemaatika ajaloo väärtust inimkonna kultuuris ja pühendas matemaatika ajaloole oma elutöö, oli prantsuse literaat, riigiametnik ja lõpuks akadeemik J. Montucla. 1758. aastal kirjutas ta ühe oma teose eessõnas: «Meie raamatukogud on üle igasuguse määra koormatud sõnaohtrate lugudega võitudest, lahingutest ja revolutsioonidest. Missugune hulk isikute elulugusid, kes on tehtud kangelasteks üksnes selle eest, et nad oma eluteel jätsid enda järele ainult verise jälje! Raske on leida, nagu seda kahetsusega märkis juba Plinius, väheseid autoreid, kes oleksid püüdnud järeltulevatele põlvedele jäädvustada inimkonna heategijaid, kes töötasid — ühed inimese vaeva kergendamisel kasulike leiutistega, teised — inimese võimete laiendamisel aru saada nähtustest oma mõttetöö ja uurimustega. Veel vähem leiame neid, kes oleksid seadnud eesmärgiks esitada pilti nende avastuste progressist, jälgida inimmõistuse saatust selle edasiliikumises ja arengus. Kas võib niisugune pilt olla vähem huvitav kui õuduste ja veriste stseenide pilt, mis esitab ainult enesearmastuse ja inimvihkamise jooni?» Nendes sõnades on palju väärtuslikku ka tänapäeva mõtleva inimese jaoks.

Jean Etienne Montucla[2] sündis Lyonis 5. septembril 1725. a. kaupmehe perekonnas. Tolle aja parimateks koolideks olid jesuiitide kolleegiumid, neist eriti kuulus asus Lyonis. Selles saigi Montucla oma alghariduse, mis oli ladina ja kreeka keele osas märgatavalt põhjalikum kui matemaatikas. Märgime muuseas, et Lyoni jesuiitide kolleegium andis veel kaks kuulsat matemaatikut: astronoom Joseph Lalande'i (1732—1807) ja matemaatika ajaloolase Charles Bossut (1730—1814). Viimasest sai jesuiit, Montucla aga säilitas kogu eluks tänutunde oma jesuiiti-

[1] Artikli on venekeelsest käsikirjast tõlkinud Ü. Lumiste.
[2] I. montüklaa.


JEAN ETIENNE MONTUCLA
de l'Institut National de France
de l'Académie de Berlin &c

dest õpetajate vastu, samuti nagu Lalande, kes, olles võitlev ateist, kirjutas veel 1803. aastal jesuiitide kolleegiumi kohta: «See kõige suurepärasem asutus, millega ei saa võrrelda ühtki inimeste poolt loodud sedalaadi instituuti, on minu püsiva vaimustuse, tänutunde ja kahetsuse objektiks.»

Pärast tema kasvatamise eest hoolt kandnud isa ja vanaema surma läheb Montucla üle Toulousi juriidilisse kooli, oma haridustee aga lõpetab Pariisis.

Õpetatud meeste tavaliseks kohtumispaigaks olid tol ajal raamatupoed, mille omanikeks olid sageli haritud isikud. Üks neist — bukinist Ch. A. Jombert (1712—1784) — sai hiljem Montucla teoste väljaandjaks. Tema juures tutvus Montucla Diderot'ga, D'Alembert'iga, arhitekt Blondeliga ja mitme oma aja silmapaistva kirjanikuga, kes tõmbasid ta «Gazette de France» kaastööliseks.

On teadmata, millal Montucla hakkas tegelema matemaatika ajalooga. Kuid 1754. aastaks on ta jõudnud nii kaugele, et annab Jombert'i kirjastusel välja oma «Histoire des recherches sur la quadrature du circle» (Ringi kvadratuuri uurimise ajalugu), Juba 4 aasta pärast ilmus ka suur kaheköiteline «Histoire des mathématiques» (Matemaatika ajalugu), kusjuures kahe raamatu kirjutamise vahepeal jõudis Montucla koos Lalande'iga avaldada materjale rõugetepanemise kohta.

«Histoire des mathématiques» ilmumise ajal 1758. a. oli autor juba tuntud kirjamees. Eelmise raamatu eest oli Berliini Teaduste Akadeemia valinud Montucla oma kirjavahetaja-liikmeks. Ka kaks köidet «Histoire des mathématiques» võeti hästi vastu ja autor asus pingsalt valmistuma kolmanda köite kirjutamiseks, mis pidi haarama XVIII sajandi. Tema biograaf Leblond märgib, et Montucla tundis suurepäraselt geomeetriat, jõudis Ph. La Hire'i tööde kaudu antiikgeomeetria ilu tunnetamiseni, kirjutas ka seni avaldamata jäänud, kuid tema talenti ilmekalt tunnistava memuaari analüüsi kohta.

1761. aastal nimetatakse Montucla dofääni[3] varade valitsuse sekretäriks, aastatel 1764—1765 aga on ta, Leblondi sõnade järgi, 15 kuud valitsuse komisjoni liikmena Cayenne'is.

1763. aastal oli Prantsusmaa sunnitud loovutama Kanada Inglismaale. Prantsuse valitsus otsis kaotuse eest kompensatsiooni prantsuse Guayana koloniseerimises. Sellealaste tööde juhtimine oli usaldatud Turgot'le, kuulsa majandusteadlase vennale. Fantastiliste lugudega meelitatud arvukad ümberasujate partiid Elsassist ja Lotringist suunati Cayenne'i, mis ootas neid tapvate looduslike tingimustega ja igasuguse hoolitsuse täieliku puudumisega. Selle kavatsuse tulemustest kõneleb valitsuse komisjoni aruanne: 1765. aasta jaanuarikuuks oli enam kui 10 000 ümberasu-

---

[3] Prantsuse troonipärija.

nust ellu jäänud 918. Cayenne'i sünge kuulsus kasvas veel enam 1797. aastal, kui direktoorium saatis välja Cayenne'i opositsiooniliste rühmituste 328 liidrit, enamuses intelligendid; sellest ajast pärinev Cayenne'i võrdlemine põrguga sai tavaliseks 1852. aastast, kui Cayenne muudeti väljasaatmise ja sunnitöö paigaks.

Montucla osavõtu kohta Cayenne'i komisjoni tööst ei ole säilinud mingeid jälgi peale Leblondi märkuse, et Montuclast sai selle komisjoni esimene sekretär ja kuninglik astronoom. Montucla nekroloogis, mida Leblond luges 1800. aastal, mainitakse Montucla elu seda perioodi ainult möödaminnes, mis on 1797. a. värskete sündmuste tõttu täiesti arusaadav.

Jäänud pärast Cayenne'ist saabumist ilma talle lubatud meresõidukooli professori kohast, võtab Montucla selle asemel vastu kuningliku õukonna ja kuninglike akadeemiate ehitiste, aedade ja ettevõtete inspektori koha ja asub elama Versailles'sse. Sellel kohal oli ta 25 aastat kuni ajani, mil võidukas revolutsioon pühkis maapinnalt kõik kuningavõimu asutused. Need 25 aastat rahulikku elu olid Montuclal täidetud ajaloo-alase uurimistööga, «Histoire...» täielikult ümbertöötatud väljaande ja Ozanami matemaatiliste meelelahutuste raamatu uuendatud trüki ettevalmistamisega.

Majanduslikud raskused, mis tulid Montucla ellu pärast revolutsiooni, aitasid kaasa selleks, et ta võttis lõpuks kuulda oma sõbra Lalande'i manitsusi ja asus oma matemaatika ajaloo avaldamisele. Uue väljaande esimene köide ilmus 1792. aastal.

Vana kuningliku akadeemia liikmeks valimise lükkas Montucla tagasi, kartes, et akadeemilised kohustused ei jäta talle küllaldaselt vaba aega. Kui aga 1793. a. suletud vana teaduste akadeemia asemele loodi 1795. a. Teaduste ja Kunstide Rahvuslik Instituut [4], siis valiti Montucla kohe selle liikmeks.

Vaatamata sellele, et Montucla oli kaua aega vana režiimi ametnik, oli tal nähtavasti mõjukaid sõpru ka revolutsioonitegelaste hulgas. Tema nimi on literaatide esimeses nimekirjas, kellele Päästekomitee määras natsionaalpensioni (1794). Hiljem lülitati ta valitsuse poolt välisministeeriumi arhiivfonde revideeriva komisjoni koosseisu.

Kauaaegne teenistus kuninga õukonna ehitiste ja ettevõtete inspektori ametikohal andis Montuclale rikkaliku teadmiste tagavara tehnoloogiast ja põllumajandusest; ta võttis näiteks osa abinõude ettevalmistamisest meriinolambakasvatuseks Prantsusmaal. Raske majandusliku kriisi aastail püüdis Montucla rahvast teenida oma teadmistega selles küsimuses niinimetatud Versailles' ühingu kaudu. Kahjuks ei kindlustanud see töö küllaldaselt perekonna ülalpidamist ja me näeme teda kahe aasta jooksul töö-

---

[4] Prantsuse Instituut eksisteerib ka praegu viie teaduste ja kunstide akadeemia ühendusena.

tamas rahvusliku loterii valitsuses. Alles oma elu viimase nelja kuu jooksul sai Montucla 2400 frangi suurust pensioni.

Montucla suri 19. detsembril 1799. aastal.

Oma esimese töö ringi kvadratuuri uurimise ajaloost avaldas Montucla 1754. aastal anonüümselt. Väljaandmise ajendiks oli, nagu autor ise märgib, tema meelehärm ringi kvadratuuri otsijate arvukate kirjutiste puhul, mida kõiki ühendab üks joon — täielik võhiklikkus aines, millest kirjutatakse. Montucla koostas oma raamatu lootuses, et jutustus kõikidest seni viljatult tehtud katsetest lahendada ülesanne[5] võib olla hoiatuseks isikutele, kes pole veel haaratud haigusest; ideest juba nakatatute olukorda peab ta lootusetuks.

Eessõnas peatub Montucla ühel oma kaasaegsel, M. de Rosannil, kes rikka riigiametnikuna andis toretsevas brošüüris välja oma katse lahendada ringi kvadratuuri ülesanne ja lubas kolmsada tuhat franki sellele, kes leiab vea tema tõestuses. Mõjuka isikuna tegi ta oma pretensioonidega palju tüli kuninglikule akadeemiale ja jõudis välja väiteni, nagu annaks tema meetod ringi kvadratuuri ülesande lahendamises võimaluse avada pärispatu ja püha kolmainu mõistatus. Lubatud summale pretendeeris teiste hulgas keegi neiu, kes andis asja kohtusse. Alles kuninga vahelesegamine säilitas tema ametnikule märkimisväärse summa.

Möödaminnes võib märkida, et Lyoni arst Matulon kaotas samal viisil XVIII sajandi algul 3000 liivrit, mille ilma raskusteta võitis temalt matemaatik F. Nicole (1683—1758).

Ajaloolises ülevaates mainib Montucla James Gregori raamatut «Vera circuli et hyperbolae quadratura» (Ringi ja hüperbooli tõeline kvadratuur), mis anti välja Paduas 1667. aastal ja milles autor teeb katse tõestada ringi kvadratuuri võimatust. Märgime, et seda raamatut ei osanud vääriliselt hinnata isegi Huygens. Montucla märgib tunnustavalt ka oma kaasmaalast Th. de Lagny'd (1660—1734), kes on samuti üheks pioneeriks ringi kvadratuuri võimatuse tõestamises.

1831. aastal ilmus see Montucla teos teistkordselt S. Fr. Lacroix' toimetusel. Viimane märkis, et vajadus selle raamatu järele on 1831. aastal sugugi mitte väiksem kui 1754. aastal, kuigi J. H. Lambert oli 1767. a. teinud π irratsionaalsuse tõestamisega esimese olulise sammu probleemi lahendamise suunas ja Pariisi Akadeemia oli 1775. aastal lakanud vastu võtmast ringi kvadratuuri lahendusi. A. M. Legendre'i, kes 1794. aastal lihtsustas Lamberti tõestust, märkis: «On tõenäoline, et arv π ei avaldu algebralise irratsionaalsusena, s. t. ei ole ühegi lõpliku arvu liikmetega ja ratsionaalsete kordajatega algebralise võrrandi juureks, kuid seda

---

[5] Ringi kvadratuuri ülesanne klassikalises seades on teatavasti järgmine: konstrueerida sirkli ja joonlaua abil antud ringiga pindvõrdne ruut (kvadraat), või, mis on samaväärne, antud ringjoonega pikkuselt võrdne lõik (vt. Matemaatika ja kaasaeg, VI, lk. 41—43).

lauset on rangelt tõestada väga raske...». Tõestus osutus tõepoolest raskeks ja läks vaja veel terve aastasada, enne kui selle andis lõpuks 1882. aastal F. Lindemann (1852—1939). Alles pärast seda sai ringi kvadratuuri võimatus täiesti selgeks, kuigi mitmed matemaatikud olid selles veendunud juba märksa varem. Teiselt poolt märgib Lacroix raamatut täiendades, et π selleks ajaks teada olevast 126 kümnendkohast oleksid 16 täiesti piisavad, et ühe tuhandiku millimeetri täpsusega saada ringjoone pikkus, mille raadiuseks on Maa ja Päikese vaheline keskmine kaugus.

Montucla põhitööks on tema «Histoire des mathématiques», mis ilmus kahes köites 1758. aastal ja haarab kogu füüsika-matemaatikateaduste ajaloo. Eessõnas, mida eespool juba tsiteerisime, märgib Montucla isikuid, kelle eeskuju innustas teda asuma selle aja kohta tohutu ulatusega töö kallale. Need olid Jacob Bernoulli (1654—1705) ja P. R. de Montmort (1678—1719). Viimane kogus ise materjale matemaatika ajaloost ja visandas enne oma varajast surma sellise ajaloo plaani. Montucla küsitlused tema sugulaste juures käsikirja saatuse kohta jäid tagajärjetuiks.

Matemaatika ajalugu käsitleb Montucla üldjoontes kronoloogiliselt, eraldades iseseisvatesse peatükkidesse ainult mõned üksikud tähtsad küsimused (näiteks kuubi duplikatsiooni), millede osas läheb ajaliselt ette naaberpeatükkidest. Autor rõhutab õigustatult, et tema töö on pioneerlik, ja iseloomustab selle tõestuseks oma üksikute eelkäijate töid, alustades Aristotelese õpilasest Theophrastist, kes Laertiuse Diogenese andmeil koostas esimese geomeetria, astronoomia ja aritmeetika ajaloo.

Teos jaguneb neljaks osaks: I. Matemaatika ajalugu selle tekkimisest kuni Bütsantsi langemiseni (I kd., lk. 1—336), II. Matemaatika Idas: araablaste, pärslaste, hiinlaste, indialaste juures (I kd., lk. 337—404), III. Matemaatika ajalugu Ladina ja Lääne rahvaste juures XVII sajandi alguseni (I. kd., 405—638), IV. Seitsmeteistkümnes sajand (II kd., 1—653).

Montucla vaadetest (eriti esimese köite osas) on käesolevaks ajaks paljud vananenud. Teine köide on aga hädavajalikuks käsiraamatuks igaühele, kes uurib XVII sajandi matemaatika ajalugu. Montucla annab ajaloo kõrval ka asjade endi käsitluse. Nüüdisaegse lugeja jaoks on see küll kohmakalt pikk, kuid on tähtis selle poolest, et üksikuid küsimusi esitatakse kujul, mis on lähedane omaaegsele originaalkäsitlusele. Loomulikult esineb Montuclal ka juhte, kus ta on asjast valesti aru saanud. Paljudele küsimustele seisis ta lähemal kui meie. Ta nägi seetõttu paremini üksikuid detaile, jäi aga ilma perspektiivist, mida annab ainult kaugenemine küsimusest.

«Histoire des mathématiques» teine väljaanne ilmus neljas köites aastatel 1799—1802. Esimene, mõnevõrra täiendatud köide

(730 lk.) sisaldab autori portree [6]; nimele on lisatud «Prantsuse Rahvusliku Instituudi liige». Montucla viitab kahele tema poolt kasutatud uuele allikale: J. S. Bailly (1736—1793) — Pariisi TA liikme, Pariisi esimese revolutsioonilise giljotiinil hukkunud linnapea — viieköitelisele astronoomia ajaloole (1775—1787) ja J. Priestley optika ajaloole (1772) Klügeli täiendatud saksakeelses tõlkes.

Teist köidet on samuti täiendatud ja ümber töötatud: see ilmus 1799. aastal 718-leheküljelisena.

Kolmanda (840 lk.) ja neljanda (682 lk.) köite matemaatika ajaloo kohta XVIII sajandil viis pärast autori surma lõpule ja avaldas 1802. aastal J. Lalande.

Nagu öeldud, asus Montucla juba kohe pärast oma teose kahe köite esmakordset väljaandmist koguma materjale kolmanda köite jaoks. Kui aga revolutsioon muutis tema elu rahulikku voolu, taipas ta, et matemaatika ajaloo koostamine XVIII sajandi kohta käib ühele inimesele üle jõu. Autori surma ajaks oli trükitud ainult pool kolmandast köitest, ülejäänud osa ei olnud lõpetatud isegi käsikirjas. Lalande, asunud sõbra tööd lõpule viima, hakkas kõigepealt otsima kaasredaktoreid ja -autoreid. Raamatu mitme osa jaoks õnnestuski leida väga autoriteetseid kaastöölisi: peatüki osatuletistega võrrandite integreerimise kohta kirjutas näiteks S. Fr. Lacroix. Lalande püüdis ka ise täiendada sõbra tööd. Raamatusse on näiteks võetud esimeste asteroidide avastamine itaallase G. Piazzi (1. jaan. 1801) ja sakslase H. W. Olbersi (28. märts 1802) poolt. Neljanda köite viimased leheküljed on pühendatud Montucla elule ja tööle.

Peatumata Montucla töödel ja tõlgetel meditsiinist ja geograafiast, tutvustame veel lühidalt tema tegevust kaasmaalase Jacques Ozanami (1640—1717) matemaatilistele meelelahutustele pühendatud raamatu «Recréations Mathematiques et physiques . . .» teistkordsel väljaandmisel kolmes köites. Autor J. Ozanam pärines rikkast perekonnast, sai iseõppimise teel matemaatikaõpetajaks Lyonis ja hiljem Pariisis, kus rahuajal õpetas peaasjalikult sissesõitnud välismaalasi, sõjaajal aga, kui kliendid kadusid, tegeles matemaatiliste käsiraamatute koostamisega. Tema peamisteks töödeks on: Matemaatiline sõnastik (1691), Matemaatika täielik kursus viies köites (1693) ja Matemaatilised meelelahutused (1694). Igaüks neist varjutas täielikult kõik varasemad sedalaadi tööd. Oma meelelahutuste eessõnas mainib Ozanam silmapaistva eelkäijana C. G. Bachet de Méziriac'i (1587—1638), kelle «Meeldivad ja huvitavad ülesanded arvudest» ilmus 1612. aastal.

Märgime, et Ozanami teosest ilmus XVIII saj. jooksul kümmekond väljaannet, hilisemad koguni neljaköitelistena.

---

[7] See portree ongi lisatud käesolevale artiklile.

Montucla poolt ümbertöötatud 1778. a. väljaannet on täiendatud oskuslikult oma aja teaduslike uudistega. Lisatud on Montucla kirjutatud eessõna, milles kirjeldatakse raamatu sisu ja eesmärki.

Montucla elutööle on andnud asjatundliku hinnangu tema hilisem silmapaistev järgija Moritz Cantor (1829—1920), kes sada aastat hiljem täitis uuel etapil sama ülesande, mille varem seadis Montucla. Viited Montuclale Cantori kapitaalses neljaköitelises teoses «Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik» on sedavõrd sagedased, et on ilmne kahe autori ideeline lähedus. Oma hinnangule Montucla töö kohta leidis Cantor samavõrd tagasihoidlikud kui üllad sõnad, kõneldes, et ta oleks tõeliselt õnnelik, kui tulevane ajaloolane loeks edasiminekut Montuclalt Cantorile poole võrra samaväärseks tähenduselt kui progressi Vossiuselt — esimeselt Euroopas ilmunud matemaatika ajaloo (Amsterdam, 1660) autorilt — Montuclani.

KOERTE LOOGIKA

Eeldame, et järgmised laused on tõesed:

1. *Kõik koerad hauguvad.*
2. *Mõned koerad on terjerid.*
3. *Kõik buldogid hammustavad.*
4. *Mõned terjerid hammustavad.*
5. *Kõik terjerid on koerad.*

Millised järgmistest lausetest on tõesed ja millised väärad:

1. *Kõik terjerid hauguvad.*
2. *Mõned terjerid ei hammusta.*
3. *Mõned koerad ei ole terjerid.*
4. *Kõik haukuvad koerad on buldogid.*
5. *Kõik hammustavad buldogid hauguvad.*
6. *Kõik haukuvad terjerid hammustavad.*
7. *Kui koer ei hammusta, siis ta ei ole buldog.*
8. *Kõik haukuvad buldogid hammustavad.*

THOMAS CLAUSEN JA TEMA MATEMAATIKA-ALANE LOOMING [1]

J. Gaiduk

Matemaatika ajalugu pole kuni viimase ajani Thomas Clausenit (1801—1885) oma tähelepanuga eriti hellitanud. Kuigi see õpetlane ei kuulu just vägeva matemaatikute orkestri esimeste viiulite hulka, oli talle siiski tema loomingulise ande poolest tagatud igati väärikas koht selle liikmete hulgas. Huvitav on Clauseni elukäik — olles pärit taani vaese talupoja perekonnast ja jäänud ilma süstemaatilisest kõrgemast haridusest, võitis see iseõppinud teadusemees C. Fr. Gaussi ja C. G. Jacobi sümpaatia ning saavutas pärast mitmeid raskeid eluperioode Tartu ülikooli professori koha ja Peterburi Teaduste Akadeemia korrespondentliikme nimetuse.

Me peame olema tänulikud saksa matemaatikaajaloolasele Kurt-R. Biermannile, kes pärast hoolikat uurimistööd saksa ja nõukogude arhiivides avaldas Th. Clauseni üsna ulatusliku, tõsi küll, mitte veel ilma «valgete laikudeta» biograafia, mis sisaldab ka Clauseni teadusliku loomingu üldise analüüsi.[2]

Clauseni elu ja matemaatika-alase loomingu käesolevale ülevaatele on Biermanni artikli kõrval aluseks olnud autori ettekanne VI Baltimaade teaduse ajaloo konverentsil (Vilnius, 1965) [3].

* *

Meie järgneva veste kangelane sündis 16. jaanuaril 1801. a. väiketaluniku perekonnas Põhja-Jüütimaal Nübeli lähedal Snog-

---

[1] Artikli on venekeelsest käsikirjast tõlkinud Ü. Lumiste. Juhime lugeja tähelepanu sellele, et Th. Clauseni fotoportree on juba avaldatud «Matemaatika ja kaasajas» nr. 2 (kriiditahvel lk. 72 ja 73 vahel).

[2] Thomas Clausen. Mathematiker und Astronom. — Journal f. d. reine u. angew. Math., Bd. 216 H. 3/4, 1964, lk. 159—198. K.-R. Biermanni poolt antud analüüs sisaldab mõningaid eksimusi, millele me juhime hiljem tähelepanu.

[3] Clauseni kui astronoomi tegevust käsitles samal konverentsil G. A. Želnin. J. M. Gaiduki ja G. A. Želnini ettekannete teesid on avaldatud kogumikus «Материалы VI-ой конференции по истории науки в Прибалтике». Вильнюс, 1965, lk. 9 ja 22 (— *Toim.*).

bækis. Kaheteistkümneaastaselt sattus ta karjaseks kohaliku pastori Georg Holsti juurde. Viimane märkas poisi silmapaistvaid võimeid ja andis talle võimaluse omandada algharidus. Kui Clausen oli hiilgavalt lõpetanud algkooli, otsustas astronoomiat ja matemaatikat armastav Holst ise tegelda oma kasvandiku edasise õpetamisega. Seitsme aasta jooksul õppiski Clausen Holsti juures vanu keeli, matemaatikat, astronoomiat ja loodusiugu. Samal ajal omandas ta iseseisvalt kaasaja keeli, mis olid vajalikud teadusliku kirjanduse lugemiseks. Üks esimesi Clauseni loetud prantsuskeelseid raamatuid oli Laplace'i «Taevamehhaanika».

1823. aastal tutvustas Holst oma õpilast, kes hakkas juba proovima jõudu teaduslikus uurimistöös, Kopenhaageni ülikooli professorile ja ajakirja «Astronomische Nachrichten» väljaandjale G. H. Schumacherile, kes oli ühtlasi Altona tähetorni direktoriks. Saanud noorelt Clausenilt kaks tema esimest teaduslikku kirjutist — ühe astronoomiast, teise matemaatikast — saatis Schumacher (kes oli rohkem, nagu ta end ise nimetas, «teadusemaakler» kui tõeline asjatundja) need vastavalt Olbersile ja Gaussile. Viimased kiitsid heaks algaja teadlase tööd ja Schumacher avaldas need. Oma esimeses matemaatika-alases töös andis Clausen lahenduse Möbiuse poolt mõni aeg varem seatud ülesandele: «Avaldada tasandilise viisnurga $ABCDE$ pindala kolmnurkade ABC, BCD, CDE, DEA ja EAB pindalade kaudu». Selle ülesande lahendas Gauss trigonomeetria abil, Clausen oma lahenduses kasutas aga analüütilist geomeetriat. Mõlemad lahendused avaldati Schumacheri ajakirjas üheaegselt.

Clauseni astronoomia-alasele tööle lisas Schumacher väikese sissejuhatuse, milles esitas andmeid noore autori kohta ja andis kõrge hinnangu tema vaimuannetele.

Schumacheri kutsel asus Clausen 1824. a. Altonasse astronoom-vaatleja kohale. Siin oli noorel teadlasel õnnelik võimalus töötada koos P. Hanseniga (1795—1874), kellest sai hiljem taevamehhaanika tuntud eriteadlane. Samal aastal tutvus Clausen isiklikult Gaussiga, kes saabus Taani seoses töödega kraadimõõtmise alal.

Altoni tähetornis edukalt alanud töö katkestas juba sama (1824) aasta lõpul ootamatu ja tõsine konflikt Clauseni ja Schumacheri vahel mingil «isiklikul» pinnal. Viimane ütles Clausenile koha üles. Ainult tänu Gaussi vahelesegamisele, kelle juurde Göttingeni oli õnnetu kohalt aetu tõtanud, pidi Schumacher taganema, «sest selline suur talent — nagu põhjendas Gauss — ei tohi teadusele kaotsi minna». Teinud Gaussile selle sunnitud mööndusc, säilitas Schumacher siiski venulikkuse Clauseni vastu. Viimasel tuli mõelda uue töökoha otsimisele. Neil aegadel ei olnud see kerge ülesanne, eriti Clausenile, kellel puudus ülikooli lõpudiplom. Muuseas, Schumacher oli valmis osutama kaasabi selle ülesande lahendamisel, eriti pärast seda, kui «kerjus» Clausen oli julgenud paluda tema täditütre kätt (mis muidugi otsustavalt ära öeldi).

Püüdeid leida Clausenile, «lihtsameelsele looduslapsele», nagu teda iseloomustas Gauss, uus töökoht, kroonis 1828. aasta lõpuks edu. Kuulsa Fraunhoferi surma järel jäi J. Utzschneideri Optikainstituut Münchenis teadusliku juhendajata ning selle valdajat õnnestus veenda, kuigi mitte ilma raskusteta, kutsuma Clausenit vakantsele kohale. Instituudis sõbrunes Clausen füüsik K. Steinheiliga. On säilinud viimase kiri F. Besselile, milles iseloomustatakse instituudi tolleaegset olukorda ja Clauseni osa selles ning ühtlasi kirjeldatakse Clauseni sümpaatset isiksust. See Clauseni sõber kirjutab järgmist: «Üldse on asjad Optikainstituudis praegu väga halvad. Tõsi küll, meil on Clausen — inimene, kes on paremini kui mina suuteline teostama üldist teaduslikku juhendamist, kes tunneb hästi teaduse kaasaegset taset ja astronoom-vaatlejate nõudeid, inimene paljutõotavate ideedega, kelle mõju peaks varsti end heas mõttes tunda andma, — kuid on see siis võimalik tema olukorras! Merz (instituudi peaoptik — J. G.) teatas, et ta ei võta vastu abi ei Clausenilt ega üheltki teiselt... Ja sellele piiratud inimesele usaldas Utzschneider Fraunhoferi saladused! Mulle isiklikult on Clauseni juuresolek siin äärmiselt soovitav, tema isikus õppisin tundma suurepärast, täiesti originaalset inimest, me kohtume sageli ja arutame vabalt teaduslikke küsimusi. Sellist suhtlemist mul seni polnud ja alles nüüd saan hinnata selle suurt kasu.»

Pole halba heata: eemaldatud Merzi poolt instituudi asjadesse «vahelesegamisest», sai Clausen täielikult pühenduda teaduslikule uurimistööle nii astronoomia kui matemaatika valdkonnas.

Vähe on teada Clauseni elukäigust aastate 1834 ja 1840 vahel. On teada vaid, et ta haigestus ja elas üle vaimse kriisi, hiljem aga peale Utzschneideri surma kaotas koha Optikainstituudis. 1840. aasta juunis pöördus Clausen äravaevatud hulkurina, kelle kogu varanduseks oli kimp käsikirju, tagasi kodumaale, olles käinud jalgsi läbi kogu Saksamaa. Teel Göttingenis külastas ta Gaussi, kellele tutvustas oma teadusliku töö tulemusi ja kavatsusi. Olles mures Clauseni edasise saatuse pärast ruttas Gauss kirjutama Schumacherile, paludes teda «teha midagi oma endise assistendi heaks ja mitte lasta hukkuda viletsuses seda tõepoolest suurt talenti abstraktse matemaatika valdkonnas.» Südant kõvaks tehes tuli Schumacheril alistuda «matemaatikute kuninga» sellele tungivale palvele. Ta aitas Clausenil saada mõningaid astronoomilisarvutuslikke töid — Jacobi, Struve, Encke jt. jaoks — ja võttis käsile uue püsiva töökoha otsimise (endast võimalikult kaugemale).

Sel ajal elas Clausen Altonas «privaatõpetlase» elu. Ta avaldas Schumacheri ja Crelle ajakirjades terve rea oma juba Saksa-maal kirjutatud töid. Uurimus 1770. a. komeedi orbiidist tõi talle Taani Õpetatud Seltsi preemia ja Besseli väga kõrge hinnangu: «meistritöö, mida meie järeltulijad ei unusta lugemata meie sajandi saavutuste hulka». Kõik andis tunnistust teadlase loomingu-võime õitsengust.

Väärikas koht Clausenile leiti lõpuks 1842. aastal. Kutsujaks oli Tartu ülikool, kes pakkus astronoom-vaatleja kohta. Selle tänuga vastuvõetud kutsumise initsiaatoriks oli W. Struve, kes hindas kõrgelt Clausenit kui astronoomi-matemaatikut. Clausenilt loodeti niisiis vajalikku täiendust mittematemaatikule J. Mädlerile, Tartu tähetorni uuele direktorile. Ja tõepoolest, «vaatlejal» Clausenil tuli vastupidiselt tavadele tegelda Tartus peaasjalikult teoreetilise tööga. (Sellega seoses tuleb siiski märkida, et Clausen ei kanna vastutust Mädleri «tsentraalpäikese teooria» eest, mis C. G. Jacobi väljenduse järgi «mattis pimedusse Tartu tähetorni»; Jacobi kahetses õigusega, et Mädleril lubati avaldada oma teooriaid enne, kui Clausen oli need heaks kiitnud.)

Teenistus Tartus jättis Clausenile aega jätkata loomingulist tööd matemaatika alal. Tulemused vormusid rohketeks artikliteks, mis avaldati Peterburi Teaduste Akadeemia bülletäänis ning Schumacheri ja Grunerti ajakirjades. Viimane neist väljaandjaist hindas väga koostööd Clauseniga, märkides, et kõigel, mida see kirjutab, «on geeniuse pitser».

Clauseni tunnustamist matemaatikute seas tõstis tunduvalt tema Tartusse ületulekule järgnenud aastail arenev ulatuslik poleemika tollal oma kuulsuse tipul oleva C. G. Jacobiga. Poleemika arenes aastail 1842—1844 Schumacheri ajakirja veergudel ja puudutas Jacobi kaht avastust: tema uut meetodit taevamehhaanikas (Clausen kahtles selle meetodi suuremas efektiivsuses senituntuga võrreldes) ja tema üldistust Gaussi ühele teoreemile geodeetilistest kolmnurkadest (Clausen kahtles selle üldistuse õigsuses). Kuigi ei saa nõustuda Biermanniga, kes väidab (oma artikli 159. lk-l), et «see vaidlus lõppes Clauseni võiduga» (tegelikult selgus vaidluses, et õigus oli Jacobil, viimasel tuli aga Clauseni vastuväidete tõttu täiendada või muuta oma argumentatsiooni), on siiski väljaspool kahtlust, et teadus on Clausenile tänu võlgu tema julge initsiatiivi eest, mis viis tõe täielikumale väljaselgitamisele kahes tähtsas küsimuses. Tuleb märkida, et lõpetades diskussiooni Gaussi teoreemi üldistuse kohta, luges Clausen Jacobi poolt poleemika käigus esitatud uut tõestust «vastavaks matemaatilise deduktsiooni parimatele näidetele» ning esitas ka omaenda tõestuse Jacobi sellele teoreemile.

Arhiivimaterjalide vähese uurituse tõttu teame me veel vähe Clauseni elukäigust Tartus. Märgime vaid järgmisi tema karjääri etappe: 1844. aastal omistas Königsbergi ülikool oma 300. juubeliaastapäeva puhul Besseli ettepanekul Clausenile filosoofia audoktori kraadi; 1854. aastal nimetas Göttingeni Õpetatud Selts

Gaussi ettepanekul Clauseni oma korrespondentliikmeks, kahe aasta pärast järgnes tema valimine Peterburi TA korrespondentliikmeks; 1865. aastal pärast Mädleri erruminekut sai Clausenist Tartu tähetorni direktor ja ülikooli astronoomiaprofessor; 1869. aastal valiti ta Peterburi ülikooli auliikmeks.

1872. aasta novembris läks Clausen pensionile. Ta suri Tartus 23. mail 1885. a.

* * *

Clausenile kuulub ligi poolteistsada teaduslikku tööd. Ka siis, kui jätta kõrvale taevamehhaanika-alased uurimused, moodustab tubli poole nendest Clauseni matemaatika-alane looming. Nii nagu paljud teised matemaatikud möödunud sajandil (vastupidiselt käesolevale sajandile, mida iseloomustab kitsas spetsialiseerumine), oli Clausen väga laia haardega: tema matemaatiliste huvide spektris leiame väga palju jooni — siin on arvuteooria, nii elementaar- kui kõrgem geomeetria, analüüsi rakendused analüütilises mehhaanikas, kõrgema algebra küsimused jm. Huvide sellise kirevuse ja faktilise isoleerituse tõttu (kontaktid matemaatilise mõtte juhtide Gaussi ja Jacobiga olid juhuslikud ja katkesid hoopiski pärast Tartusse tulekut; ei sobinud koostöö ka Tartu kolleegiga, esmaklassilise matemaatikuga F. Mindinguga) ei ole imeks panna Clauseni matemaatilise loomingu temaatilist «atomistlikkust»: konkreetse ülesande lahendus, üksiku uue teoreemi tõestus — või juba tuntud teoreemi uus tõestus— selline on Clauseni matemaatika-alaste tööde tüüpiline temaatika. Kuid ka sellises «väikevormilises» loomingus suutis Clausen veenvalt ilmutada talle omast matemaatikutalenti — erakorralist intuitsiooni, mõtte leidlikkust, kriitilise meele teravust.

Tutvustame järgnevalt mõningaid Clauseni avastusi.

H i p p o k r a t e s e k u u k e s t e k o m p l e k t. 1840. aastal avaldas Clausen Crelle'i ajakirja 21. köites artikli «Neli uut kuukest kvadreeruva pindalaga». Ta arvas ekslikult, et Hippokratesele oli teada vaid üks selline kuuke, samuti ei teadnud ta, et kõik viis kuukest oli juba 1766. aastal leidnud vähetuntud rootsi matemaatik, Åbo (Turu) ülikooli professor M. Wallenius (muide, seda Clauseni teadmatust jagasid kuni hilise ajani kõik matemaatikaajaloolased). Clausenile langeb seega kuukeste komplekti iseseisva uuesti avastamise au ja veel midagi rohkemat: ta väljendas seejuures hüpoteesi, et kuukest piirava kahe ringjoone kaare kesknurkade ühismõõdutuse korral teisi kvadreeruvaid kuukesi enam ei leidu. Selle Clauseni hüpoteesi õigsuse tõestasid Galois' teooria vahenditega nõukogude algebraistid N. G. Tšebotarjov (1935) ja A. B. Dorodnov (1947).

C l a u s e n - S t a u d t i t e o r e e m B e r n o u l l i a r v u d e k o h t a. Tugeva mulje kaasaegsetele jättis Bernoulli arvude üks Clauseni poolt avastatud omadus: iga Bernoulli arv B_n on esitatav valemiga $B_n = C_n - \sum \frac{1}{k+1}$, kus C_n on teatav täisarv, summa aga võetakse üle n kõigi selliste naturaalarvuliste jagajate k, mille puhul $k+1$ on algarv[4]. Selle tulemuse andis Clausen ilma tõestuseta 1840. aastal Schumacheri ajakirjas. Sellest teada saanud, avaldas K. Staudt samal aastal Crelle ajakirjas artikli, milles andis omaduse tõestuse ja esines prioriteeditaotlusega sellele avastusele. Clausen-Staudti teoreem omandas suure tähtsuse uurimustes Fermat' probleemi alal.

Teisi arvuteoreetilisi tulemusi. Clausen uuris ka niinimetatud Fermat' arve $F(n) = 2^{2^n} + 1$ ja näitas muuseas, et $F(6)$ ei ole algarv. Kirjas astronoom Petersile (1853) mainis Clausen uut meetodit suurte arvude lahutamiseks algtegureiks. Selle meetodi abil, mis jäi kahjuks avaldamata, õnnestus Clausenil esitada kahe teguri korrutisena arv $\frac{10^{17}-1}{9}$, mille seda omadust ei olnud varem tuntud meetoditega võimalik kindlaks teha.

Arvu π 250 kohta. Tööd teoreetilise astronoomia alal kujundasid Clausenist esmaklassilise arvutaja. Oma võimete rakendamiseks seadis Clausen endale ülesande arvutada arvu π 250 kümnendkohta. Selle ülesande lahendas ta suurema usaldusväärsuse saavutamiseks kahel viisil, lähtudes vastavalt valemeist: $\pi = 8\Theta + 4\Theta''$, $\pi = 16\Theta' - 4\Theta'''$ (kus $\tan\Theta = \frac{1}{3}$, $\tan\Theta' = \frac{1}{5}$, $\tan\Theta'' = \frac{1}{7}$, $\tan\Theta''' = \frac{1}{239}$). Clauseni poolt saadud π väärtus avaldati 1847. aastal Schumacheri ajakirjas. Tuleb märkida, et Clausen sai selle tulemuse varem kui Hamburgi «fenomenaalne arvutaja» S. Dase, kes arvutas π 200 kümnendkohta ja avaldas need 1844. aastal. Clauseni töö kinnitas Dase tulemuse õigsust ja lisas veel 50 kohta.

Lemniskaat kui toori lõige. Ühes kirjas Gaussile (1842) teatas Schumacher, et Clausen on leidnud uue huvitava viisi lemniskaadi defineerimiseks: selle kõvera võib saada, kui lõigata rõngaspinda (ehk toori), mille sise- ja välisdiameetrite suhe on 1 : 3, selle pinna puutujatasandiga vähima paralleelringjoone mingis punktis. Gaussi enda sõnade järgi meeldis talle lemniskaadi Clauseni leitud konstruktsioon väga.

Tööd elliptiliste funktsioonide teooria alal.

---

[4] Meenutame, et Bernolulli arvud B_n on defineeritavad näiteks reaksarenduse $\tan x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_n}{(2n)!} x^{2n-1}$ kordajate abil; esimesteks nendest on $B_1 = \frac{1}{6}$, $B_2 = \frac{1}{30}$, $B_3 = \frac{1}{42}$, $B_4 = \frac{1}{30}$, $B_5 = \frac{5}{66}$; järgmisi saab arvutada rekurrentsest valemist

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2n+1} + \frac{2n}{2!} B_1 - \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{4!} B_2 + \ldots + (-1)^{n-1} B_n.$$

Sellel tol ajal väga moodsal teemal kirjutas Clausen kolm tööd, mis ilmusid Schumacheri ajakirjas 1842. aastal. Esimeses on juttu ühest juba Legendre'i juures esinenud elliptilisest integraalist. Teises uuritakse elliptiliste funktsioonide teooria teatavaid küsimusi. Kolmas töö on pühendatud lemniskaati joonestatud korrapärase 17-nurga konstrueerimisele.

Jacobi «vedela ellipsoidi» uurimine. Tähtsaks sündmuseks matemaatilise füüsika ajaloos oli pöörleva vedela massi eripikkuste pooltelgedega tasakaaluellipsoidi olemasolu avastamine Jacobi poolt 1834. aastal. Clausen reageeris sellele avastusele tööga, mis avaldati Schumacheri ajakirjas 1841. aastal. Selles esitatakse Jacobi teoreemi uus tõestus ja leitakse tema ellipsoidi mõningaid uusi omadusi. Muu hulgas tõestatakse, et see ellipsoid on stabiilne ainult pöörlemisel oma vähima telje ümber.

Meil tuleb siin piirduda nende väheste näidetega Clauseni matemaatilisest loomingust. Nad ei võimalda saada sellest veel täit ülevaadet; see ulatuslik, kuid kirju looming vajab edasist uurimist. Puudub ju tänaseni isegi Clauseni tööde täielik bibliograafia.

* * *

Lõpetuseks juhime tähelepanu ühele Clauseniga seotud eksimusele G. Wieleitneri tuntud raamatus [5], mida kergel käel kordab ka K.-R. Biermann. Wieleitner omistab Clausenile Castillione tuntud ülesande ühe üldistuse, milles ringjoon on asendatud koonuselõikega, märkides ilmumisajaks 1829. a. Biermann «täpsustab» ilmumiskoha: Grelle ajakiri, 4. kd., lk. 391—394. Sellel kohal me leiame tõepoolest Clauseni töö ühe geomeetriaülesande lahendusega, kuid ülesandes on suvalise koonuselõike asemel ikkagi jälle vana aus ringjoon.[6]

---

[5] Г. Вилейтнер. История математики от Декарта до середины XIX столетия. Москва, 1960, lk. 408.

[6] Ülesanne ise on järgmine: Ühe kolmnurga tipud on teise kolmnurga külgede pikendustel, kusjuures esimese kolmnurga siseringjoon on teisele ümberringjooneks. Konstrueerida üks neist kolmnurkadest, kui teine on antud.

TÄIENDUSI TH. CLAUSENI BIOGRAAFIALE

Ü. Lumiste

Clauseni biograaf K.-R. Biermann, kelle kogutud materjalile tugineb käesolevas kogumikus ülalpool avaldatud artikkel J. Gaiduki sulest, ei ole kahjuks saanud kasutada ENSV Riiklikus Ajaloo Keskarhiivis (ENSV RAKA) ja TRÜ Teaduslikus Raamatukogus leiduvaid allikaid. Viimased võimaldavad lisada mõningaid uusi jooni Th. Clauseni biograafiale.

Teatavasti oli Tartu ülikooli astronoom-vaatleja koht 41-aastase Clauseni esimeseks akadeemiliseks ametikohaks. Dekaan Ch. Neue esitusest[1] ülikooli nõukogule 7. veebr. 1842 nähtub, et ajendiks Clauseni Tartusse kutsumisele oli C. H. Schumacheri kiri siinsele astronoomiaprofessorile J. Mädlerile. Clauseni senise elu- ja töökäigu lühikese kirjeldamise ja tema tähtsamate astronoomiaalaste tööde nimetamise järel märgib Neue: «Härra Clauseni üks veel avaldamata töö — lemniskaadi väga ilus ja lihtne konstruktsioon, on Schumacheri ühe teate kohaselt härra professor Mädlerile leidnud erilist heakskiitu Gaussi poolt.» Clauseni kutsumine Tartusse ja temale sellekohase kirja saatmine otsustati nõukogus 28. märtsil 1842. a., kuid kutsutu kohalesõit lükkus sügisele — Hamburgist Lüübekisse hakkas Clausen sõitma alles 19. oktoobril, et seal siis asuda Riiga suunduvale laevale. 15. detsembril 1842. a. kinnitas Clausen Tartus oma käega kirjutatud selgituses[2], et kogu tema kooliharidus piirdub tõepoolest 7 aastaga kodust õpetamist ladina ja kreeka keeles, matemaatikas, astronoomias ja loodusteaduses kodukoha pastori Georg Holsti juures. See aga ei takistanud Clausenit võitmast, tänu visale tööle enesetäiendamisel ja silmapaistvatele võimetele, laia tunnustust kogu teadusemaailmas. Nagu on märgitud Biermanni ja Gaiduki artiklites, andis Königsbergi ülikool Clausenile 1844. a. doktorikraadi *honoris causa*, ta oli valitud Göttingeni Teadusliku Seltsi (1854) ja Peterburi Teaduste Akadeemia (1856) korrespondentliikmeks. Siia võib lisada, et juba 1848. a. valis Londoni Astronoomiaselts Clauseni oma auliikmeks[3], Göttingeni Teaduslik Selts aga autasustas teda 1856. a. Gaussi mälestuseks väljaantud medalitega.

Erilise heatahtlikkusega suhtusid Clausenisse Pulkovo astronoomid. Tartu õppekonna kuraator A. Keyserling kirjutas näiteks 1864. a. tütrele[4]: «Sa mäletad vahest, et Pulkovo astronoomid tegid ettepaneku kinkida vene keskse tähetorni 25 aasta juubeli puhul professor Mädlerile sõrmus — mida võiks kinkida hambaarstile —, observaator Clausenile aga panna kaela Vladimiri orden. Ma juhtisin ministri tähelepanu sellise olukorra sobimatusele ja see mõjus. Mädler sai kaela Vladimiri ja Clausen Anna ordeni.» Pulkovo aastapäeva pidustustest 1864. a. võttis Clausen osa ka isiklikult. Sellega seoses kirjutab O. Struve Tartu ülikooli rektorile Bidderile[5]: «Clausen sõidab homme ja viib, ma arvan,

---

[1] ENSV RAKA, f. 402, nim. 3, s.-ü. 786, l. 1.
[2] Sealsamas, l. 15.
[3] Das Inland, 1848, Nr. 37.
[4] H. T a u b e v. L. I s s e n. Alexander Keyserling. Berlin, 1902, lk. 471.
[5] ENSV RAKA, f. 402, nim. 4, s.-ü. 889, l. 46.

mõned sõbralikud mälestused siit kaasa. Ka kõigil siia kogunenud astronoomidel on hea meel seda originaalset meest lähemalt tundma õppida, kelle peaaegu küünilises kestas nii suurepärane tuum peitub.»

Clauseni isiksuse originaalsusest annab tunnistust ka lõik A. Keyserlingi tütre mälestustest (allviide [4], lk. 453), milles meenutatakse astronoomiaprofessor Mädlerit ja jätkatakse järgmiselt: «Tema assistendiks oli professor Clausen, Taanist pärit, kes sageli sattus motiveerimatutesse naeruhoogudesse; öösiti kuuldi teda sagedasti kõvasti naermas. Kõneldi, et ta olevat lasknud end kord esitleda Taani kuningale, kuid olevat monarhi nähes hakanud nii homeeriliselt naerma, et polevat saanud heatahtlikule kõnetlusele ühtegi sõna vastata. Kui temalt hiljem halvasti varjatud heatujulisuse põhjust küsiti, vastanud ta, et kuningat olevat ta endale alati kaardikuninga taoliselt kujutlenud ja see olnud tema jaoks liiga üllatav, näha teda ilma skeptri ja kroonita, riietatult nagu iga teine surelik.»

1869. aastal peeti Peterburi ülikooli 50 aasta juubelit. Sel puhul valiti 25 ülikooli auliiget, nendest 9 olid vene ülikoolide professorid. Viimaste seas olid ka Th. Clausen ja F. Minding Tartust. Selleks ajaks oli Clausen juba Tartu ülikooli korraline astronoomiaprofessor. Tema valimine sellele kohale toimus 1865. a., kusjuures esituse kirjutas tema lähim kolleeg, teenekas matemaatikaprofessor F. Minding, kes muu hulgas märkis järgmist [6]:

«Dr. Thomas Clausen, siinse tähetorni vaatleja, võis juba oma astumisel ülikooli teenistusse esitada tõendeid ja tõsiasju, mis oleksid õigustanud tema määramise ka kõrgemale kohale, kui selline oleks leidunud... Oma töö kõrval vaatlejana ei ole ta loobunud tegelemast matemaatiliste ja astronoomiliste uurimustega, mis annavad järjest uusi tunnistusi tema mitmekülgsest uurijavaimust.» Minding loetleb ja iseloomustab lühidalt Clauseni mõningaid Tartu-perioodil tehtud töid ja kirjutab kokkuvõtteks: «Härra Clauseni nimetamine Göttingeni Teadusliku Seltsi korrespondeerivaks liikmeks, mis toimus kahtlemata Gaussi soovitusel, temale Königsbergi ülikooli poolt Besseli mõjutusel doktorikraadi omistamine *honoris causa,* samuti ka tema valimine Peterburi Akadeemia korrespondendiks on küllaldaseks tõendiks tunnustusest, mida tema tööd on selle ala esimeste autoriteetide poolt leidnud.»

Clausen oli sellal juba 64-aastane. Astronoomiaprofessorina luges ta järgnevatel aastatel peaasjalikult astroomia-alaseid aineid. Kuigi oma huvide ja teadusliku loomingu poolest oli Clausen peaaegu samal määral matemaatik kui astronoom, sai ta matemaatilistele ainetele pühendada tähelepanu ainult episoodiliselt: 1867. a. kuulutas ta välja matemaatika ajaloo loengud (tõenäoliselt Montucla järgi, nagu seda 1851. a. oli teinud J. Mädler), 1871. aastal aga vähimruutude meetodi kursuse. Lähemad andmed kahe sel ajal Tartus töötanud silmapaistva täppisteadlase F. Mindingi ja Th. Clauseni omavahelise teadusliku suhtlemise kohta kahjuks puuduvad.

Clauseni teenistuslehelt nähtub, et ta jäi kuni pensionile siirdumiseni 1872. a. vallaliseks, ei soetanud endale kinnisvara ega võtnud vastu vene kodakondsust (kuid kinnitati sellele vaatamata tegevriiginõuniku — действительный штатский советник — küllalt kõrgesse teenistusastmesse). Tema toimik lõpeb Clauseni enda käega koostatud sugupuuga, mille esimeses reas on toodud vanemate nimed: Clausen Clausen † — Cecilia Rasmussen †, teises reas aga loetletud nende lapsed: 1. Prof. Thomas Clausen, 2. Marie Clausen †, 3. Johann Clausen, 4. Marie Clausen †, 5. Scilla Clausen †, 6. Scilla Clausen † (abielus Peter Jacobsoniga), 7. Grete Marie Clausen †, 8. Dorothea Clausen. Teeneka ja tunnustatud mehena meenutab Clausen siin seda lihtsat taani talupoja perekonda, millest ta võrsus.

Clausen suri Tartus 23. mail 1885. a. ja on maetud Raadi kalmistule. Tema hauale on nüüd Tartu Tähetorni töötajad asetanud memoriaaltahvli.

---

[6] ENSV RAKA, f. 402, nim. 3, s.-ü. 786, l. 30.

Matemaatiline päevakaja

ÜLELIIDULINE MAJANDUSMATEMAATIKA-ALANE KONVERENTS EESTIS

V. Tinn

30. maist kuni 4. juunini 1966. a. toimus Käärikul üleliiduline konverents teemal «Matemaatika ja arvutustehnika kasutamine majanduses», mille organiseeris Tartu Riiklik Ülikool. Konverentsi tööst võttis osa 257 delegaati 99 asutusest. Esitati 49 ettekannet, milles leidsid käsitlemist optimaalse planeerimise matemaatiliste meetodite, rahvamajandusharudevahelise planeerimise, mitmesuguste majandusprotsesside modelleerimise, tööstusettevõtete juhtimise struktuuri ja informatsiooni liikumise, ettevõtte töö operatiivse planeerimise ja juhtimise, arveldustööde mehhaniseerimise ning põllumajanduse planeerimise küsimused. Kõrvuti nendega olid vaatluse all elektronarvutite laialdasema rakendamise küsimused nii tehnilisest kui ka teoreetilisest aspektist. Erilist tähelepanu pöörati teoreetiliste tulemuste praktikasse juurutamisele. Ettekannetele järgnes sageli elav vaidlus, mis jätkus ka vaheaegadel ja õhtuti.

Suurt huvi äratasid konverentsil eesti teadlaste saavutused ja kogemused; ligikaudu kolmandik konverentsist osavõtjatest oli Eesti NSV-st.

Konverents aitas tunduvalt kaasa kogemuste vahetamisele ja sidemete loomisele teiste teadlaste ning uurimisasutustega.

Konverentsil võeti vastu otsus, milles näidati edasised vajalikud uurimissuunad, abinõud matemaatiliste meetodite ja arvutustehnika majandusse juurutamise efektiivsemaks muutmiseks, ning tehti ettepanek seada sisse majandus-, füüsika-matemaatikateaduste ja tehniliste teaduste kandidaadi- ning doktorikraadid järgmiste spetsiaalsustega: matemaatiliste meetodite rakendamine majanduses, arvutusmatemaatika, majandus- ja tehniline küberneetika.

URAL-TÜÜPI ARVUTITE KASUTAJAD TARTUS

E. Lasn

Ajavahemikul 13.—17. juulini 1966. a. toimus Tartus kõrgemate koolide vaheline Ural-tüüpi arvutite kasutajate V nõupidamine. Nagu eelmised, oli ka see nõupidamine sisuliselt üleliiduline, millest võtsid osa kõrgemate koolide kõrval ka esindajad teistest organisatsioonidest, kus on Ural-tüüpi arvuteid. Nõupidamisel, mille tööst võttis osa 650 delegaati (207 asutusest, 46 linnast) peeti kokku 182 ettekannet. Meie vabariigi esindajad — TRÜ arvutuskeskuse ja Majandusmatemaatika Keskinstituudi Eesti filiaali töötajad — esinesid kokku 8 ettekandega.

Avaplenaaristungil kuulati ära Ural-tüüpi arvutite üleliidulise assotsiatsiooni aruanne tehtud tööst viimasel aastal ja Ural-tüüpi arvutite peakonstruktori B. Ramejevi ülevaade uutest arvutitest «Ural-14» ja «Ural-16».

Töö nõupidamisel toimus paralleelselt neljas sektsioonis.

I sektsioonis käsitleti mitmesuguste arvutusalgoritmide realiseerimise küsimusi ja nende programmide töö efektiivsust. Mitmete arvutuskeskuste esindajad andsid ka ülevaate neil kasutusel olevatest standardsetest programmidest.

Programmeerimise automatiseerimisele ja arvuti teenindusprogrammidele oli pühendatud II sektsiooni töö. Arvutile «Ural-4» on praegu töökorras kaks translaatorit mittetäielikku ALGOL-keele jaoks, kuid puudub veel translaator täielikule ALGOL-keelele. Tööd selle translaatori koostamiseks toimuvad praegu kolmes arvutuskeskuses. Sektsiooni tööst osavõtjaile demonstreeriti TRÜ arvutuskeskuses Pensa Universaalsete Elektronarvutite Teadusliku Uurimise Instituudi translaatorit, mis tõlgib mittetäielikust ALGOL-ist arvuti käskude keelde.

III sektsioonis olid ettekanded matemaatilisest planeerimisest. Neis käsitleti arvutite praktilist kasutamist majandusmatemaatika ülesannete lahendamiseks, samuti üksikuid majandusmatemaatika teoreetilisi probleeme.

Arvutite tehnilise ekspluateerimisega seotud küsimusi vaadeldi nõupidamise IV sektsioonis, kus arvutuskeskuste esindajad vahetasid kogemusi arvutite praktilise ekspluateerimise ja masinate juures tehtud täiustuste üle.

Lõpp-plenaaristungil võeti vastu nõupidamise otsus, milles nähti ette abinõusid edasiseks töö koordineerimiseks arvutuskeskuste vahel. Samuti valiti uus Ural-tüüpi arvutite assotsiatsiooni nõukogu, kuhu meie vabariigi esindajana valiti dots. Ü. Kaasik.

ÕPPEASUTUSTEVAHELINE ALGEBRA-ALANE SÜMPOOSION

J. Hion

1966. a. augustis toimus Käärikul teine õppeasutustevaheline algebraalane sümpoosion (esimene selline oli samuti Käärikul 1963. a. augustis). Matemaatikute kongresside kõrval (viimased üleliidulised matemaatikute kongressid toimusid teatavasti 1956. ja 1961. a., viimane rahvusvaheline kongress oli k. a. Moskvas) korraldatakse edukalt ka kitsama erialaga töötajate kokkutulekuid. Algebra-alased kollokviumid toimuvad näiteks regulaarselt alates 1958. aastast. Nad kestavad enamasti lühemat aega ja et nende kava on küllalt pingeline, siis jääb neil tavaliselt vähem aega isiklike kontaktide loomiseks ja uute teaduslike teooriatega põhjalikumaks tutvumiseks. Niisuguseid kontakte on parem sõlmida veelgi kitsamale ainevallale pühendatud sümpoosionidel või suvekoolis, mida välismaal korraldatakse juba mõnda aega. Tavaliselt kestavad sellised sümpoosionid kauem, neid korraldatakse enamasti kuurortides, mis võimaldab ühendada puhkust intensiivse ja viljaka tööga. Kui Kääriku suvekool 1963. a. oli üks esimesi Nõukogude Liidus, siis nüüd on ka meil sellised teaduslikud kohtumised muutunud traditsiooniks.

Käärikul 1.—13. augustil toimunud sümpoosionil oli 48 osavõtjat (perekonnaliikmeid arvestamata). Nende seas oli 4 professorit või doktorit, 30 õppejõudu ja teaduslikku töötajat, 8 aspiranti ja 10 üliõpilast. Osavõtjaid oli Sverdlovskist 9, Tartust 7, Moskvast 6, Leningradist, Saraatovist ja Vinnitsast igaühest 4, Minskist 3, Harkovist 2, Ivanovost, Iževskist, Kišinjovist, Kommunarskist, Novosibirskist, Pavlodarist, Riiast ja Tallinnast igaühest 1. Rida algebraiste olid Käärikul viibinud juba mitu korda: prof. Ljapin (Leningrad), prof. Gluskin (Harkov) ja dr. Šain (Saraatov). Sverdlovsk oli teistkordselt esindatud suure delegatsiooniga.

Seekordne sümpoosion oli pühendatud põhiliselt poolrühmade ja universaalsete algebrate teooriale.

Paljude ettekannetega oli esindatud poolrühmateooria. Prof. Ljapin käsitles oma ettekandes endomorfismipoolrühmi. Dots. Ševrin (Sverdlovsk) kandis ette oma töö, milles lahendas rea aastaid püsinud probleemi tihedalt sisalduvate ideaalide kohta. Dr. Šain esitas kaks sisukat ettekannet: «Relatsioonialgebrad» ja «Teisenduste poolrühmad». Dots. Šutov (Iževsk) esitas ülevaate poolrühmade sisestamisprobleemist. TPI õppejõud J. Henno käsitles ringi radikaali mõiste ja omaduste ülekandmist poolrühmateooriasse. Jevgeni Gabovitš (Tartu) andis ülevaate järjestatud poolrühmade teooriast. Topoloogilisi poolrühmi käsitlesid oma ettekannetes dots. Šneperman (Minsk) ja asp. Barabaš (Leningrad).

Universaalsete algebrate ja poolrühmade teooria piirdeala vaatlesid prof. L. Gluskin (Harkov) ja B. Šain oma ettekannetes mitme muutuja funktsioonide algebratest. Samasse valdkonda kuulus ka J. Hioni (Tartu) ettekanne «Ω-süsteemid». Huvitavaks kujunesid mudelite teooria (matemaatilise loogika ja universaalsete algebrate teooria piirdeala) esindajate sõnavõtud. Dots. Kogalovski (Saaratov) kõneles kõrgema astme loogikatest ja lahendamatuse probleemist. Dots. Gurevitš (Sverdlovsk) käsitles algebraliste süsteemide teooria algoritmiküsimusi ja esitas peale selle lõpliku lahenduse ühele probleemile kitsa predikaatarvutuse valemiklasside kehtestatavuse kohta. Sümpoosioni ettekannete teesidest ja kokkuvõtetest koostatud kogumik paisus muide 232-leheküljeliseks.

Sümpoosionil ei tegeldud muidugi ainult matemaatikaga. Puhkepäevadel korraldati ekskursioonid Tallinna ja Lõuna-Eestisse. Olid omad lõkkeõhtud, matkad ja spordivõistlused, suurt huvi ja elevust tekitas sümpoosioni seinaleht.

Lenini preemia laureaate

Kaheksast Lenini preemiast, mis 1966. a. anti eriti silmapaistvate teaduslike tööde eest, omistati kolm preemiat järgmistele matemaatikutele.

1. J e f i m o v, Nikolai Vladimirovitš, füüsika-matemaatikadoktor, M. Lomonossovi nimelise Moskva Riikliku Ülikooli professor, — uurimuste eest iseärasuste tekkimise kohta negatiivse kõverusega pindadel.

2. Ž u r a v l j o v, Juri Ivanovitš, füüsika-matemaatikakandidaat, NSVL Teaduste Akadeemia Siberi osakonna Matemaatika Instituudi osakonnajuhataja; L u p a n o v, Oleg Borissovitš, füüsika-matemaatikadoktor, NSVL TA Matemaatika Instituudi vanem teaduslik töötaja; J a b l o n s k i, Sergei Vsevolodovitš, füüsika-matemaatikadoktor, sama instituudi osakonnajuhataja, — tööde tsükli eest juhtimissüsteemide sünteesi matemaatilise teooria kohta.

3. I v a n o v, Valentin Konstantinovitš, füüsika-matemaatikadoktor, M. Gorki nimelise Uraali Riikliku Ülikooli professor; T i h h o n o v, Andrei Nikolajevitš, NSVL TA korrespondentliige, NSVL TA Matemaatika Instituudi direktori asetäitja, — tööde tsükli eest mittekorrektsete ülesannete alal.

N. V. JEFIMOV

Nikolai Vladimirovitš J e f i m o v sündis Orenburgis 31. mail 1910. a., õppis 1928—1931 Rostovi ülikoolis ja astus 1931. a. Moskva ülikooli aspirantuuri. Pärast selle lõpetamist töötas ta 1934—1941 Voroneži ülikoolis. 1940. a. kaitses N. V. Jefimov Moskva ülikoolis oma doktoriväitekirja «Paraboolsete punktidega pindade painutamine» ning töötas sõjajärgsetel aastatel Moskva ülikooli professorina, algul füüsikateaduskonnas, hiljem matemaatika-mehhaanikateaduskonnas. Käesoleval ajal on N. V. Jefimov viimati mainitud teaduskonna dekaan ja matemaatilise analüüsi kateedri juhataja.

N. V. Jefimovi varasematest töödest on tähtsaimad tema uurimused, mis jätkavad doktoritöö temaatikat. Tal õnnestus, vastupidi ootustele, näidata, et pinna paraboolse punkti ümbrus võib osutuda üldse mitte painutatavaks. Sellealaste tööde tsükli eest omistati N. V. Jefimovile 1950. a. N. I. Lobatševski nimeline preemia. Lai matemaatiline avalikkus tunneb N. V. Jefimovit kui suurepäraste analüütilise geomeetria ja kõrgema geomeetria õpikute autorit. 1965. a. suvel võttis ta Tartus osa II Balti geomeetriakonverentsi tööst ja oli siin suvekooli lektoriks (vt. Matemaatika ja kaasaeg, IX, lk. 98—101).

N. V. Jefimovi töid, mis autasustati 1966. a. Lenini preemiaga, on lühidalt iseloomustatud käesolevas kogumikus eespool (lk. 8—9).

N. V. Jefimov

LENINI PREEMIA JUHTIMISSÜSTEEMIDE SÜNTEESI TEOORIA EEST

Jevgeni Gabovitš

Teoreetiline küberneetika on viimaste aastakümnete jooksul muutunud tänapäeva matemaatika üheks tähtsamaks osaks. Hoogsasti areneb see matemaatika haru ka meie maal. Üle maailma tuntakse nõukogude küberneetikute V. M. Gluškovi, A. A. Ljapunovi, S. V. Jablonski, O. B. Lupanovi, J. I. Žuravljovi ja paljude teiste teaduslikke uurimusi. Kolmele viimati nimetatule omistatigi 1966. aastal Lenini preemia uurimuste tsükli eest juhtimissüsteemide sünteesi teooria valdkonnast.

Sergei Vsevolodovitš J a b l o n s k i sündis 6. detsembril 1924. a. Moskvas. 1950. aastal lõpetas ta Moskva Riikliku Ülikooli. NSVL TA V. A. Steklovi nimelises Matemaatika Instituudis töötades on ta rea aastate jooksul juhendanud (esialgu koos A. A. Ljapunoviga) küberneetika-alast seminari MRÜ juures. Selle seminari üheks aktiivsemaks osavõtjaks on algusest peale olnud O. B. Lupanov. Samas seminaris alustas oma küberneetika-alast teaduslikku tegevust ka J. I. Žuravljov.

S. V. Jablonski

Oleg Borissovitš L u p a n o v sündis 1932. aastal Leningradis. Moskva Riikliku Ülikooli lõpetas ta 1955. aastal. Samuti nagu S. V. Jablonski, on ta juba enam kui 10 aastat töötanud NSVL TA V. A. Steklovi nimelises

Matemaatika Instituudis; koos oma vanema kolleegiga kuulub ta ka regulaarselt ilmuva kogumiku «Проблемы кибернетики» toimetusse. Peale selle toimetavad nad koos A. A. Ljapunoviga veel kogumikku «Кибернетический сборник», milles venekeelses tõlkes avaldatakse välismaiste autorite küberneetika-alaseid artikleid.

J. I. Žuravljov

Noorim kolmest laureaadist — Juri Ivanovitš Žuravljov sündis 1935. aastal Voronežis. Moskva Riiklikus Ülikoolis õppides tundis ta tõsist huvi topoloogia vastu ning avaldas selles valdkonnas paar teaduslikku uurimust. Paralleelselt pakkusid talle aga huvi ka teoreetilised küberneetikaprobleemid, ning pärast ülikooli lõpetamist 1957. aastal astus ta aspirantuuri teoreetilise küberneetika alal (S. V. Jablonski juhendamisel). Väitekirja kaitsmise järel suundus ta Novosibirskisse, kus ta praegugi töötab NSVL Teaduste Akadeemia Siberi osakonna Matemaatika Instituudi osakonnajuhatajana.

Kõik need kolm matemaatikut on viimasel ajal väga produktiivselt töötanud — nende sulest on ilmunud kokku peaaegu sada teaduslikku artiklit, sealhulgas terve rida ulatuslikke ülevaateartikleid. Kõik nad on kaitsnud doktoriväitekirjad.

Juhtimissüsteemide sünteesi probleem, millele pühendatud uurimuste eest S. V. Jablonski, O. B. Lupanov ja J. I. Žuravljov said Lenini preemia, on üks tähtsamaid probleeme tänapäeva teoreetilises küberneetikas. Seda probleemi võib lühidalt kirjeldada järgmiselt. On antud teatud hulk nn. elementaarobjekte (näiteks kontaktreleed, elektronlampidest moodustatud blokid, alamprogrammid jne.), kusjuures on teada, kuidas leida antud skeemile vastavat loogilist funktsiooni. Ülesanne seisneb selles, et iga antud funktsiooni jaoks leida skeem, mis seda funktsiooni realiseerib.

Puhtformaalselt on see ülesanne väga triviaalselt lahendatav: tuleb vaid kontrollida kõik võimalikud (teatud elementaarobjektide arvuga) skeemid ning leida nendele vastavate funktsioonide seast see, mis ühtib antud funktsiooniga. Praktiliselt pole niisugune kontroll aga tavaliselt teostatav, sest võimalike skeemide arv on äärmiselt suur. Seega tuleb ülesannet mõista nii, et otsitav algoritm funktsiooni realiseeriva skeemi leidmiseks peab olema mitte liiga keeruline ehk, nagu öeldakse, — see algoritm peab olema efektiivne.

Ülesannet raskendab veel asjaolu, et antud funktsioonile vastavaid skeeme on peaaegu alati väga palju ja seepärast on loomulik otsida nende seast niisugust, mis on mingis mõttes kõige parem (näiteks koosneb võimalikult väikesest arvust elementaarobjektidest) või rahuldab mingisugust muud lihtsuse kriteeriumi. Nii tekibki minimiseerimisprobleem. Et kõikide variantide läbivaatamine on liiga keeruline, siis tuleks minimiseerimisprobleemi lahendamiseks leida mingi lihtsam universaalne algoritm. Kuid juba oma kandidaadiväitekirjas näitas J. I. Žuravljov, et niisugust lihtsat universaalset algoritmi ei eksisteeri. See tähendab, et kuigi võib välja mõelda teatud lihtsustusi kõikide variantide läbivaatamisel, ei anna need lihtsustused olulist efekti ning igasugune universaalne minimiseerimisülesannet lahendav algoritm peab olema peaaegu sama keeruline kui triviaalne.

Lihtsa universaalse algoritmi mitteeksisteerimise tõestamine sundis teadlasi pöörama erilist tähelepanu niisugustele loogiliste funktsioonide klassidele, mille jaoks õnnestub leida häid algoritme minimiseerimisülesande lahendamiseks. Seejuures kasutatakse algoritmi headuse hindamiseks tuntud ameerika küberneetiku C. E. Shannoni poolt sissetoodud funktsiooni, mida tänapäeval nimetatakse lihtsalt Shannoni funktsiooniks. Shannoni funktsiooni alumised tõkked leitakse tavaliselt lihtsalt, kuid mitteefektiivselt. Ülemised tõkked seevastu tuleb enamasti anda skeemide sünteesimise konkreetse algoritmi kaudu.

S. V. Jablonski, O. B. Lupanovi ja J. I. Žuravljovi töödes on vaadeldud tervet rida loogiliste funktsioonide klasse ning leitud minimiseerimisülesande optimaalne lahend nende jaoks. Üheks näiteks sedalaadi töödest on O. B. Lupanovi artikkel «К вопросу о реализации симметрических функций алгебры логики компактными схемами», mis ilmus 1965. aastal kogumiku «Проблемы кибернетики» 15. numbris.

Üks lihtsamaid Boole'i funktsioonide klasse on sümmeetriliste funktsioonide klass. Juba Shannon vaatles minimiseerimisprobleemi nende jaoks ning leidis (1938. a.) sümmeetrilisele Boole'i funktsioonile vastava skeemi konstrueerimise meetodi, mille korral n muutuja funktsiooni realiseerimiseks vajalik kontaktide minimaalne arv oli n^2. Hiljem (1949. a.) õnnestus Shannonil saada selle arvu jaoks väärtus $n^2 - n + 2$. Koos G. N. Povaroviga vähendas S. V. Jablonski 1954. aastal seda arvu veelgi, saades tulemuseks $n^2 - 2n \log n + O(n)$. Oma ülalmainitud töös lihtsustas O. B. Lupanov skeemide konstrueerimise meetodit edasi ning leidis arvuteooria tulemusi kasutades, et saadud meetodi rakendamisel on n-muutuja sümmeetriline Boole'i funktsioon realiseeritav umbes $\frac{2n^2}{\log n}$ kontakti abil.

Värskete Lenini preemia laureaatide tööd, millel on oluline tähtsus teoreetilises küberneetikas, on juba leidnud rakendamist näiteks majandusmatemaatiliste ülesannete lahendamisel ja usaldatavuse arvutamisel. Võib olla kindel, et tulevikus rakendatakse neid veelgi ulatuslikumalt.

LENINI PREEMIA MITTEKORREKTSETE ÜLESANNETE LAHENDUSMEETODITE VÄLJATÖÖTAMISE EEST

E. Tamme

Matemaatiliste ülesannete jaotamise korrektseteks ja mittekorrektseteks võttis kasutusele prantsuse matemaatik Jacques Hadamard käesoleva sajandi algul seoses matemaatilise füüsika võrrandite uurimisega. Matemaatilisel ülesandel on tavaliselt teatav hulk lähteandmeid, millest sõltub otsitav lahend. Hadamard nimetas ülesannet *korrektseks*, kui see on üheselt lahenduv ning kui lähteandmete väikestele muutustele vastavad ka lahendi väikesed muutused. Mittekorrektse ülesande korral võib aga lähteandmete väikesel muutmisel muutuda lahend kuitahes palju. Füüsikaliselt seisukohalt on korrektsuse nõue täiesti loomulik. On ju algandmed tavaliselt saadud vaid ligikaudselt teatud täpsusega, algtingimuste väikesed vead ei tohi aga oluliselt muuta lahendit.

Kõik käesoleva sajandi alguses tuntud matemaatilise füüsika ülesanded, mis kirjeldasid reaalseid protsesse ja nähtusi, olid korrektsed. Hadamard konstrueeris esimese klassikaliseks kujunenud näite mittekorrektsest ülesandest, nimelt näitas ta, et Laplace'i võrrandi algtingimustega ülesanne pole korrektne. Kuid ta arvas, et see ja ka teised mittekorrektsed ülesanded ei peegelda füüsikalist reaalsust ning ei paku seetõttu praktilist huvi.

Siin aga Hadamard eksis. Hiljem selgus, et paljud reaalsusest pärinevad matemaatilise füüsika ülesanded on mittekorrektsed Hadamardi mõttes. Näiteks Hadamardi poolt vaadeldud Laplace'i võrrandi algtingimustega ülesandele taandusid mitmed geofüüsika probleemid. Nimelt kirjeldab Laplace'i võrrandi lahend nii gravitatsioonivälja kui ka magnetilist ja elektrostaatilist välja. Soovides uurida gravitatsiooni- või magnetvälja struktuuri Maa sisemuses, tuleb lahendada Laplace'i võrrand, kusjuures algtingimused saadakse mõõtmistest Maa pinnal. Nende väljade struktuuri tundmine võimaldab magneti- ja gravitatsioonianomaaliate põhjal avastada maapõuevarade leiukohti. Et aga ülesanded on mittekorrektsed, siis pole nende otsene lahendamine hästi teostatav, sest ka väikesed mõõtmisvead võivad oluliselt muuta väljade pilti.

A. N. Tihhonov

Sellele vaatamata püüdsid geofüüsikud selliseid ülesandeid lahendada ja seda mitte ilma eduta. Üks võimalikke meetodeid seisneb oma olemuselt järgnevas. Kasutatakse ära asjaolu, et mingis piirkonnas füüsikalise välja struktuuri arvutamise ülesanne on kõigiti korrektne, kui on teada piirkonna karakteristikud (tiheduse ning elektrijuhtivuse jaotus jt.). Lähteülesande lahendamisel tehakse kõigepealt oletused uuritava piirkonna struktuuri kohta, lähtudes teadaolevaist andmeist, hüpoteesidest ja intuitsioonist. Seejärel võrreldakse arvutustulemusi Maa pinnal teostatud mõõtmistulemustega. Küllaldase ühtelangemise korral loetakse oletused põhjendatuks. Vastasel juhul tehakse uued hüpoteesid piirkonna karakteristikute kohta jne. Real juhtudel võib sellise katsetuste meetodi abil jõuda rahuldavate tulemusteni, kuigi kulub üldiselt palju arvutustööd. Keerukama struktuuriga piirkonna korral on küllaltki raske ja mõnikord isegi praktiliselt võimatu sihile jõuda.

Matemaatilises füüsikas uuriti ka teisi mittekorrektseid ülesandeid, näiteks keha temperatuurijaotuse määramist eelnevatel hetkedel, kui temperatuurijaotus on teada mingil hetkel, (temperatuurijaotuse määramine järgnevatel hetkedel on korrektne ülesanne), ja lööklainete arvutamist gaaside dünaamikas. Järjest teravamalt kerkis päevakorda vajadus ühtsete meetodite loomiseks seda tüüpi ülesannete lahendamiseks.

Esimese olulise sammu selles suunas astus nõukogude matemaatik A. N. Tihhonov 1944. a. Ta võttis nimelt kasutusele uue korrektsuse mõiste, nn. korrektsuse Tihhonovi järgi, nimetades ülesannet korrektseks, kui see on üheselt lahenduv ning lähteandmete väikestele muutustele vastavad lahendi väikesed muutused vaid juhul, kui vaatluse all on ainult teatavasse hulka kuuluvad lahendid. Õnnestus näidata, et Hadamardi mõttes mittekorrektsed ülesanded, millega praktikud olid varem kokku puutunud, on korrektsed Tihhonovi mõttes, kui nimetatud lahendite hulk sobivalt valida. Selle hulga määramisel kasutatakse teadaolevaid lisaandmeid, näiteks Maa magnetvälja struktuuri uurimisel arvestatakse seda, et kivimite tihedus ei saa olla suurem kindlast tõkkest.

Andrei Nikolajevitš Tihhonov on sündinud 30. oktoobril 1906. a. Smolenski oblastis Gžadski linnas. Käesoleval aastal tähistati tema 60. sünnipäeva. Aastatel 1922—1927 õppis ta Moskva ülikoolis, saavutades juba üliõpilasena P. S. Aleksandrovi juhendamisel sügavaid tulemusi hulgateoreetilises topoloogias, mis tõid talle maailmakuulsuse (esimese silmapaistva töö avaldas 19-aastasena). Kolmekümnendatel aastatel kaldusid Tihhonovi huvid prof. V. V. Stepanovi mõjutustel matemaatilise füüsika valdkonda, millesse kuuluvad ka 1936. a. kaitstud doktoritöö ning 1953. a. riikliku preemia vääriliseks tunnustatud tööd. Viimasel aastakümnel on A. N. Tihhonov koos oma õpilase A. A. Samarskiga pannud aluse diferentsmeetodite üldisele teooriale harilike ja osatuletistega diferentsiaalvõrrandite ligikaudsel lahendamisel. Alates 1936. a. kuni käesoleva ajani töötab Tihhonov Moskva ülikoolis professorina. 1939. a. valiti ta NSVL Teaduste Akadeemia kirjavahetajaliikmeks ja 1966. a. tegevliikmeks.

Juba kolmekümnendatest aastatest alates on A. N. Tihhonov uurinud ka mittekorrektseid ülesandeid, eeskätt seoses geofüüsika probleemide lahendamisega. Geofüüsikas on Tihhonovil küllaltki suured teened. Ta on välja töötanud, matemaatiliselt põhjendanud ja praktikasse juurutanud meetodeid, mis kasutavad Maa loomulikku elektromagnetilist välja, aga ka alalis- ja vahelduvvoolu abil tekitatud välja maakoore ehituse uurimisel ning kasulike maapõuevarade otsimisel.

Mittekorrektse ülesande muutmine korrektseks Tihhonovi mõttes on vaid esimeseks sammuks niisugustele ülesannetele lähenemisel. Praktikuid huvitab ju selliste ülesannete numbriliste lahendite leidmine. Mittekorrektsete ülesannete jaoks küllaldase täpsusega lahendite leidmine on seotud vägagi suurte raskustega. Mittekorrektsete ülesannete korral avaldavad katastroofilist mõju tulemustele mitte ainult lähteadmete ebatäpsus, vaid ka ümardamisvead arvutustes. Nende mõju on seda suurem, mida pikemad on arvutused. Seetõttu on küllaltki sageli selliste ülesannete täpsema lahendamise püüded viinud hoopiski paradoksaalsete tulemusteni. Eriti ilmnesid need raskused elektronarvutite kasutamisel. Nii kujunes tungiv vajadus luua mittekorrektsete ülesannete lahendamiseks efektiivseid lahendusmeetodeid, s. t. luua selliseid meetodeid, mis ligikaudsete lähteandmete korral annavad teatud garanteeritud täpsusega vastused.

Esimesi tõsisemaid tulemusi efektiivsete lahendusmeetodite väljatöötamise alal avaldasid 1955. a. Ameerika matemaatikud F. John ja C. Pucci ning noor nõukogude matemaatik M. M. Lavrentjev. Eriti viimasele kuulub oluline koht A. N. Tihhonovi ideede edasiarendamisel.

M i h h a i l M i h h a i l o v i t š L a v r e n t j e v on sündinud Moskvas 21. juulil 1932. a., lõpetanud Moskva ülikooli 1954. a. ning alates 1957. a. töötab Novosibirskis NSVL Teaduste Akadeemia Siberi osakonna Matemaatika Instituudis. 1957. a. omistati M. M. Lavrentjevile füüsika-matemaatikakandidaadi- ja mõned aastad hiljem ka doktorikraad. Ta on uurinud Laplace'i võrrandi algtingimustega ülesannet jt. mittekorrektseid ülesandeid ning 1962. a. ilmunud monograafias[1] kokku võtnud rea mittekorrektsete ülesannete tüüpide jaoks väljatöötatud lahendusmeetodeid. M. M. Lavrentjev märgib monograafia eessõnas, et selles esitatud meetodid on vaid esimeseks etapiks numbriliste algoritmide loomisel selliste ülesannete lahendamiseks.

Uue etapi mittekorrektsete ülesannete lahendamise alal avavad A. N. Tihhonovi ja V. K. Ivanovi 1963. a. alates ilmunud tööd, mis käesoleval aastal tunnistati Lenini preemia vääriliseks.

V. K. Ivanov

V. K. Ivanov on Tihhonovist vaid vähem kui kaks aastat noorem, kuid ajal, mil Tihhonov oli juba Moskva ülikooli professor ja tunnustatud teadlane, oli Ivanov alles üliõpilane. V a l e n t i n K o n s t a n t i n o v i t š I v a n o v on sündinud 1. oktoobril 1908. a.

---

[1] М. М. Л а в р е н т ь е в. О некоторых задачах математической физики. Новосибирск, 1962.

Leningradis, lõpetanud 1930. a. Uraali (Sverdlovski) Polütehnilise Instituudi ja 1938. a. Leningradi ülikooli. Ta töötas aastail 1938—1947 Sverdlovski Mäeinstituudis ning töötab alates 1947. a. Sverdlovski ülikoolis. Tema 1955. a. valminud doktoritöö on pühendatud ühe mittekorrektse ülesande — potentsiaaliteooria pöördülesande uurimisele.

1963. a. ilmunud töös defineeris V. K. Ivanov Hadamardi mõttes mittekorrektse ülesande jaoks nn. k v a a s i l a h e n d i, mis on ülesande lähislahendiks, kuid mille leidmine on juba korrektne mittelineaarse planeerimise ülesanne. Kvaasilahendi saab defineerida parajasti Tihhonovi mõttes korrektsete ülesannete jaoks.

Kõige üldisem ja viljakam lähenemine mittekorrektsetele ülesannetele sisaldub A. N. Tihhonovi 1963. a. ja hiljem ilmunud töödes. Tihhonov defineeris mittekorrektsete ülesannete jaoks teatavad r e g u l a r i s e e r i v a d operaatorid, mis võimaldavad selliste ülesannete lähislahendite leidmise taandada teatavate korrektsete ülesannete lahendamisele. Ülesannet, mille jaoks leidub regulariseeriv operaator, nimetatakse regulariseeritavaks. Regulariseeritavad pole mitte kõik mittekorrektsed ülesanded, kuid M. M. Lavrentjev väidab [2], et «nähtavasti on regulariseeritavad kõik matemaatilise füüsika ülesanded, mis on seotud reaalsete nähtustega (Hadamard arvas, et kõik sellised ülesanded on korrektsed)». Igal juhul on tõestatud vägagi avara klassi mitteregulaarsete ülesannete regulariseeritavus.

Mittekorrektseteks on osutunud paljud matemaatilisest füüsikast, vaatluste ümbertöötamisest, majandusmatemaatikast, optimaalse juhtimise teooriast jm. pärinevad probleemid. Nende lahendamisel on edukalt kasutatud elektronarvuteid, tuginedes A. N. Tihhonovi, V. K. Ivanovi, M. M. Lavrentjevi jt. poolt väljatöötatud meetoditele.

On arusaadav, et viimasel ajal on järsult kasvanud huvi mittekorrektsete ülesannete lahendusmeetodite vastu. Mainime, et üleliidulisel arvutusmatemaatika konverentsil Moskvas 1965. a. jaanuaris oli mittekorrektsetele ülesannetele pühendatud eraldi sektsioon ning et rahvusvahelises arvutusmatemaatika-alases suvekoolis Kiievis 1966. a. juunis-juulis esines Tihhonov loengutega nende ülesannete lahendusmeetoditest. Muuseas: selle suvekooli töö ajal valiti A. N. Tihhonov NSVL Teaduste Akadeemia akadeemikuks ja suvekooli orgkomitee esimees A. A. Samarski kirjavahetajaliikmeks.

Pärast Lenini preemiate väljakuulutamist kõneles värske laureaat V. K. Ivanov intervjuus ajalehe «Вечерний Свердловск» korrespondendile: [3]

«Mittekorrektsed ülesanded kujutavad matemaatika haru, mida iseloomustab sügavate abstraktsete ideede seostumine rakenduslike probleemidega. Mittekorrektsete ülesannete lahendamisel kuhjuvad tohutult ebatäpsused, kaob ülesande lahendi stabiilsus ja lahendid saadakse suurte vigadega. Kaua arvati, et siin pole midagi teha. Kuid teaduse ja tehnika areng ning arvutuste automatiseerimine sundisid tagasi pöörduma selle probleemi juurde, nõudsid rangete, laitmatute meetodite loomist.

Mittekorrektsete ülesannete lahendamine on seotud geofüüsika, arvutusmatemaatika, gaaside dünaamika ja optimaalse juhtimise arenguga; aga ka valguse läbitungimise optika, antennide arvutamise, lennunduse ja kosmonautika, matemaatilise majandusteaduse jt. probleemide lahendamisega.

Selliseid ülesandeid on palju, kuid mitte kõik nad pole veel päris selgelt formuleeritud. Neid hakatakse lahendama tulevikus veelgi võimsamate matemaatiliste vahendite abil.»

---

[2] М. М. Лаврентьев. О постановке некоторых некорректных задач математической физики. — Некоторые вопросы вычислительной и прикладной математики. Новосибирск, 1966, lk. 266.

[3] «Вечерний Свердловск», 22 апр. 1966. Selle ja ka teisi väärtuslikke materjale käesoleva kirjutise jaoks saatis N. S. Zvonareva Sverdlovski Matemaatika Instituudist.

Kroonika

DOTSENT Ü. KAASIK 40-AASTANE

9. novembril 1966. a. sai 40-aastaseks tuntud eesti matemaatik, TRÜ arvutusmatemaatika kateedri dotsent, füüsika-matemaatikakandidaat Ülo Kaasik.

Ü. Kaasik sündis Tallinnas, õppis Tallinna II ja IX Keskkoolis ning aastail 1948—1953 Tartu Riiklikus Ülikoolis. Pärast ülikooli lõpetamist asus tööle TRÜ geomeetria kateedri vanemõpetajana, 1958. aastast alates töötas dotsendina ning 1959. aastast geomeetria kateedri juhatajana. Kui 1962. aastal loodi TRÜ arvutusmatemaatika kateeder, siis sai Ü. Kaasik selle juhatajaks. Sellel kohal ta töötas kuni 1966. a. 1. septembrini.

Juubilari esimeseks teaduslikuks suunaks oli lähendusmeetodite teooria, milles ta 1957. a. kaitses väitekirja «Iteratsioonimeetoditest Banachi ruumides». Alates 1958. aastast on Ü. Kaasiku põhihuvi koondunud elektronarvutite kasutamisega seotud küsimustele, eeskätt majandusmatemaatika probleemidele.

Suur on Ü. Kaasiku panus arvutusmatemaatika arengusse meie vabariigis. Teatavasti asutati 1959. aastal esimene arvutuskeskus ENSV-s just Tartu Riikliku Ülikooli juures. Algusest peale on Ü. Kaasik olnud selle teaduslikuks juhendajaks, kaasa aidates vastava kaadri kiirele kasvule ning arvutuskeskuse teadusliku toodangu kõrgele kvaliteedile. Ta on ka olnud mitme aspirandi juhendajaks, kellest neli on juba oma väitekirja edukalt kaitsnud.

Ü. Kaasik on meie vabariigi matemaatikutest üks produktiivsemaid autoreid. Tema trükis avaldatud tööde arv ulatub üle 40. Siia kuuluvad teaduslikud artiklid, õpikud, metoodilised kirjutised ja populaarteaduslikud tööd.

Juubilar on ka «Matemaatika ja kaasaja» üks rajajaid ja suuri entusiaste, olles selle ühiskondliku toimetuskolleegiumi esimeheks juba asutamisest alates.

Tähtsaks probleemiks tänapäeval on teatavasti spetsialistide-matemaatikute arvu kiire kasv. Ka see küsimus pole Ü. Kaasiku silmapiirist välja jäänud. Ta võttis osa matemaatika-klasside ja Mittestatsionaarse Matemaatikakooli organiseerimisest.

Aastatel 1961—1962 viibis Ü. Kaasik Ameerika Ühendriikides. Ka oma 40. sünnipäeva pühitses ta USA-s, viibides seal teaduslikul komandeeringul.

H. Õiglane

UUSI TEADUSE DOKTOREID

16. mail 1966. a. kaitses oma doktoriväitekirja «Ligikaudsete meetodite kasutamisest elastsete plaatide ja koorikute deformatsiooni üleminekuprotsesside uurimisel» ENSV TA Küberneetika Instituudi rakendusmatemaatika ja mehhaanika sektori vanem teaduslik töötaja **Uno Nigul.** Doktoritööd oponeerisid füüsika-matemaatika-

doktorid professorid A. Goldenveiser (Moskvast), N. Kiltševski (Kiievist) ja Ü. Lepik (TRÜ-st).

Väitekirjas uuritakse lainetusprotsesside levikut plaatides ja koorikutes (koorikuks nimetatakse kõverpinnalist plaati) lühiajalise koormuse mõjul. Probleem on väga aktuaalne, sest paljudes tänapäeva tehnika ülesannetes tuleb kokku puutuda koormuste väga järskude muutustega (nn. löökkoormustega). Töös on analüüsitud mitmesuguseid ligikaudseid lahendusmeetodeid, selgitatud nende kasutusala ja töötatud välja põhivõrrandite süsteemi mitmeid uusi integreerimismeetodeid.

Pärast edukat kaitsmist otsustas ENSV TA füüsika-matemaatika ja tehnikateaduste nõukogu esitada Uno Niguli Kõrgemale Atestatsioonikomisjonile tehnikadoktori teadusliku kraadi saamiseks.

U. Nigul on sündinud 1929. a. Tallinnas. Lõpetanud 1948. a. kevadel Tallinna X Keskkooli, astus samal aastal õppima Tallinna Polütehnilise Instituudi ehitusosakonda, mille lõpetas 1953. a., omandades autoteede inseneri kvalifikatsiooni. Aastatel 1953—1956 õppis U. Nigul aspirantuuris sama instituudi ehituskonstruktsioonide kateedris. Kandidaadiväitekirja kaitses U. Nigul 1956. a., dotsendi kutse omistati talle 1964. a.

* * *

25. juunil 1966. a. kaitses **Hillar Aben** Eesti NSV Teaduste Akadeemia füüsika-matemaatika ja tehnikateaduste nõukogu avalikul koosolekul edukalt oma doktoriväitekirja «Karakteristlike suundade meetod fotoelastsuses». Väitekirja oponeerisid tehnikadoktor professor N. Prigorovski Moskvast, tehnikadoktor professor A. Aleksandrov Novosibirskist ja Eesti NSV TA korrespondentliige füüsikamatemaatikadoktor P. Kard Tartust.

Dissertatsioonis töötatakse välja läbivalgustusmeetodi optiline teooria. Tuletatakse fotoelastsuse optika võrrandid nõrgalt anisotroopse keskkonna jaoks ja tõestatakse, et nende võrrandite maatriks on unitaarne. Viimase asjaolu abil näidatakse, et ruumiliste fotoelastsuse mudelite puhul leidub alati kaks üksteisega risti olevat polarisaatori asendit, millede puhul mudelist väljuv valgus on lineaarselt polariseeritud. Vastavad langeva ja väljuva laine võnke suunad on karakteristlikeks suundadeks ja võnkumiste faaside vahe väljumisel vastavatel suundadel — karakteristlikuks faasivaheks. Näidatakse, et need karakteristlikud suurused optiliste süsteemide läbivalgustamisel määravad täielikult valguse polarisatsiooniteisenduse. Väitekirjas esitatakse meetod, mis võimaldab karakteristlike suuruste eksperimentaalse määramise teel määrata objekti pingeoleku.

Hillar Aben sündis 1929. aastal Tartus. Kõrgema hariduse omandas ta Tallinna Polütehnilises Instituudis, mille lõpetas 1953. aastal. Järgnesid õpingud aspirantuuris Ehituse ja Ehitusmaterjalide Instituudi juures 1953.—1956. a. Kandidaadiväitekirja «Plaatide mittelineaarse teooria ülesannete lahendamisest fotoelastsusmeetodil» kaitses H. Aben 1957. a. Alates 1958. a. töötas H. Aben vanema teadusliku töötaja ametikohal Ehituse ja Ehitusmaterjalide Instituudis ja hiljem Küberneetika Instituudis. 1961. aastast alates on ta Küberneetika Instituudis mehhaanika ja rakendusmatemaatika sektori juhataja.

Hillar Abeni peamiseks uurimisalaks on olnud fotoelastsus — tal on ilmunud sellel alal üle 30 teadusliku töö, mis on üldist tunnustust leidnud. H. Aben on rahvusvaheliste teaduslike ühingute «Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik» ja «Society for Experimental Stress Analysis» liige.

Peale fotoelastsuse on H. Aben viimastel aastatel edukalt töötanud ka majandusküberneetika valdkonnas. Tunnustust on leidnud siin ta uurimistööd linnade optimaalse planeerimise alal.

L. Ainola

UUSI TEADUSE KANDIDAATE

11. juunil 1966. a. toimus Eesti NSV Teaduste Akadeemia füüsika-matemaatika ja tehnikateaduste nõukogu avalik koosolek, kus TRÜ algebra ja geomeetria kateedri assistent **Leida Tuulmets** kaitses kandidaadidissertatsiooni «Mõned joonhüperpindade V_3 klassid eukleidilises ruumis R_4».

L. Tuulmets lõpetas 1954. a. Põltsamaa Keskkooli ja 1959. a. ülikooli matemaatikaosakonna. Tema väitekiri käsitleb joonpindade teoorias olulisi probleeme ja sisaldab rea huvipakkuvaid tulemusi. Töö valmis dotsent Ülo Lumiste juhendamisel. Oponeerisid prof. V. V. Rõžkov Moskvast ja dots. L. J. Berezina Riiast. Leida Tuulmetsale omistati füüsika-matemaatikakandidaadi kraad.

* *

21. mail kaitses Tallinnas ENSV TA füüsika-matemaatika ja tehnikateaduste nõukogu ees **Aleksander Tümanok** oma väitekirja «Silindrilises koorikus lainetena levivast deformatsiooniprotsessist liikuva telgsümmeetrilise rõhu korral». Ametlikeks oponentideks olid füüsika-matemaatikadoktor prof. Ü. Lepik ja füüsika-matemaatikakandidaat L. Ainola, kes andsid tööle kõrge hinnangu. Nõukogu omistas A. Tümanokile füüsika-matemaatikakandidaadi kraadi.

Aleksei Nikolai p. Tümanok sündis 22. oktoobril 1928. a. Tallinnas maamõõtja perekonnas. Tallinna II Keskkooli lõpetas ta 1947. a. ja TRÜ mehhaanikaosakonna 1952. a. Kuni 1954. a. kevadeni töötas ta pedagoogina Vändra Keskkoolis, edasi aga Tallinna Pedagoogilises Instituudis ja alates 1957. a. TPI teoreetilise mehhaanika kateedris.

UUS LEND MATEMAATIKUID TARTU RIIKLIKUST ÜLIKOOLIST

1966. a. juunis lõpetasid TRÜ matemaatikaosakonna ja omandasid matemaatiku kvalifikatsiooni:

1. Abel, Mati
2. Aladjev, Viktor.

Matemaatik-arvutusmatemaatiku kvalifikatsiooni said:

3. Jurkatamm, Kalju
4. Staub, Rein.

Matemaatiku ja matemaatikaõpetaja kvalifikatsiooni omandasid:

5. Järve, Ly
6. Kask, Linda
7. Loog, Leida
8. Muks, Anne
9. Mägestik, Mare
10. Mättas, Eva
11. Oja, Maie
12. Rammo, Kaja
13. Rootalu, Kaie
14. Simson, Milvi
15. Soome, Eevi
16. Tomberg, Koidu
17. Uba, Elvi
18. Utt, Elvi
19. Varik, Maria
20. Tamm, Jaak.

JÄRJEKORDSED LENNUD KESKHARIDUSEGA MATEMAATIKUID

1965/66. õppeaastal lõpetas A. H. Tammsaare nimelise Tartu I Keskkooli kolmas lend ning Tallinna I Keskkooli teine lend programmeerijaid.

Eksamikomisjoni otsusega (18. märts 1966) omistati Tartu I Keskkooli kahekümne kaheksale lõpetajale matemaatik-programmeerija kvalifikatsioon ning järgmised erialalised kategooriad:

3. kategooria:

1. Harju Toivo
2. Hiiesalu, Asta
3. Kasemets, Heli
4. Kiis, Helle
5. Klaassen, Kaido
6. Margusoo, Vello
7. Rutto, Liie
8. Taniroo, Olav
9. Traat, Andres
10. Unt, Jaan;

2. kategooria:

1. Alber, Vello
2. Altosaar, Olav
3. Alttoa, Kaur
4. Kask, Juta
5. Kivimaa, Jüri
6. Kure, Hele
7. Kuusk, Toomas
8. Käosaar, Ivar
9. Maalma, Koidu
10. Paal, Saima
11. Ratt, Merike
12. Sirge, Mare
13. Suniste, Ellen
14. Vainer, Kaie;

1. kategooria:

1. Joosu, Eva
2. Karlis, Mait
3. Koppel, Lea
4. Moks, Mallina.

Tallinna I Keskkoolis said arvutaja-programmeerija kvalifikatsiooni järgmised kakskümmend kuus lõpetajat:

1. Altmaa, Tiit
2. Hammer, Jüri
3. Järvet, Feliks
4. Kobin, Mihkel
5. Künnap, Olav
6. Laus, Merle
7. Multer, Toivo
8. Mänd, Ülle
9. Männik, Toomas
10. Narusk, Anu
11. Plaks, Toomas
12. Pork, Ene
13. Psennikova, Nina
14. Randrüüt, Heinar
15. Rebane, Krista
16. Ringo, Toomas
17. Saan, Jüri
18. Saarmäe, Malle
19. Tambek, Vello
20. Tamm, Ebu
21. Teesalu, Mait
22. Vaim, Sulev
23. Vain, Eeva
24. Veetõusme, Rein
25. Viilup, Agu
26. Võrk, Mai.

Bibliograafia

Eesti NSV-s ilmunud matemaatikaalase kirjanduse nimestik

Märts—august 1966

(Koostanud E. Annus)

RAAMATUD

E t v e r k, E. **Read.** Konspekt ja metoodilised juhendid kaugüliõpilastele. Tln., 1966, 56 lk. (TPI matemaatika kateeder.) — Trükitud rotaprindil.

Harjutuste kogumik füüsika, keemia ja matemaatika alalt. Trt., 1966, 62 lk. (Tartu Riiklik Ülikool.) — Trükitud rotaprindil. — Sama, ilmunud ka vene k.

Kaldnurksete kolmnurkade lahendamine. Õpetajate teadusliku uurimistöö kursuse metoodiline katsematerjal. Tln., 1965, 62 lk. (TRÜ pedagoogika ja metoodika kateeder. ENSV Vabariiklik Õpetajate Täiendusinstituut.) — Trükitud rotaprindil.

K r u l l, M. **Elektronarvutid ja programmeerimine.** Tln., «Valgus», 1966, 64 lk.

L e p a m a a, A. **Tõenäosusteooria ja matemaatilise statistika põhijooni.** Tln., 1966, 88 lk. (TPI arvutustehnika kateeder.) — Trükitud rotaprindil.

L e p a m a a, A. **Tõenäosusteooria ja matemaatilise statistika metoodiline juhend ja kontrolltööde ülesanded ökonoomika erialade kaugüliõpilastele.** Tln., 1966, 24 lk. (TPI arvutustehnika kateeder.) — Trükitud rotaprindil.

P i s k u n o v, N. S. **Diferentsiaal- ja integraalarvutus kõrgematele tehnilistele õppeasutustele.** 2. kd. 5. tr., Tln., «Valgus», 1966, 407 lk.

P o p o v, I. **Matemaatilised meetodid põllumajanduses.** Tln., «Valgus», 1966, 248 lk.

R i i v e s, S. ja R u u b e l, A. **Kujutava geomeetria kontrolltööde metoodiline juhend.** Trt., 1966, 16 lk. (Eesti Põllumajanduse Akadeemia.) — Trükitud rotaprindil.

Т е л г м а а А. Э. **Метод последовательных приближений как годегетический принцип школьной математики.** Автореферат. М., 1966. 55 lk.

KOGUMIKKUDES JA AJAKIRJADES ILMUNUD ARTIKLID

Matemaatika ja kaasaeg. Abimaterjale matemaatika õpetajatele ja õppijatele. VIII. Trt., 1965. 112 lk. (Tartu Riiklik Ülikool.)

Sisu: R. M u l l a r i. Matemaatika ja tegelikkus. — S. B a r o n. Elementaarfunktsioonidest. — T. R o o s i n u p p. Tuletis on alati pidev! — J. G a b o v i t š. Algebra põhimõisteid. III. — I. K u l l. Semiootika ja õppeprotsess. — C. S h a n n o n. Inimene vestleb masinaga. — L. M o l n á r. Igaüks võib kiiremini arvutada. — O. P r i n i t s. Koolimatemaatika sisu moderniseerimisest nõukogude koolis. — J. G a b o v i t š. Täiuslikud arvud. — T. S õ r m u s. 150 aastat K. Weierstrassi sünnist. — J. G a b o v i t š. Euleri probleem. — J. D e p m a n. Ühest matemaatika ajaloo populariseerimise katsest Eestis. — Sam Loydi ülesanded. — I. T a m m e r a i d. 20 aastat Stefan Banachi surmast. — A. O j a. Konverents «Täppisteaduste arengu metoodika põhiküsimusi Eesti NSV-s.» — Lenini preemia laureaate. — I. G e l f a n d. Autorid: õpetaja ja õpilane. — N. A. T š a i k o v s k i ja E. M. P a r a s j u k. Lenini preemia mittelineaarsete süsteemide uurimise eest. — Matemaatilise majandusteaduse loojad. O. R ü n k. Nurgapaaridest, mis tekivad kahe sirge lõikumisel kolmandaga. — Ü. L u m i s t e. Professor Jaan Depman 80-aastane. — L. A i n o l a. Akadeemik N. Alumäe 50-aastane. — Bibliograafia. — Ülesandeid.

Материалы двадцать первой научной студенческой конференции. Часть I. Химия, математика, физика, биология. Тарту, 1966. 72 стр. (Тартуский гос. ун-т.) — Ротапринт.

Резюме докладов по математике: К о л ь к Э. Множители суммируемости для пространства. — Р и е з е н А. О минимизации множества признаков при опознании образов. — Р я б о в ы й т р а М. Нахождение характерной реализации класса при опознании образов. — А б е л ь М. Множители — сходимости. — Р и й в е с К. О подгруппах евклидовых движений. и об их орбитах. — Л и с к о в е ц В. и Ф е й н б е р г В. О централизаторе отображения. — В е л х в а д з е Т. Об одной формуле Успенского. — Г о г и ш в и л и Г. О представлении чисел некоторыми квадратичными формами с четырьмя переменами.

Межвузовский научный симпозиум по общей алгебре. Доклады, сообщения, резюме. Тарту, 1966. 232 стр. (Тартуский гос. ун-т.) — Ротапринт.

Содерж.: Барабаш В. В. Топологические свойства полугрупп непрерывных гомоморфизмов топологических полугрупп. — Бирюков А. П. Разрешимость проблемы изоморфизма для конечно определенных коммутативных полугрупп с двумя образующими. — Вагнер В. В. Обобщенные грудоиды и грудоиды и их приложения. — Габович Е. Я. Упорядоченные полугруппы. — Глускин Л. М. Алгебры многоместных функций. — Гуревич Ю. Ш. Некоторые алгоритмические вопросы теорий классов алгебраических систем. — Калманович А. М. О полугруппе взаимно однозначных частичных эндоморфизмов графа. — Когаловский С. Р. О свойствах, сохраняющихся при алгебраических конструкциях. — Лесохин М. М. Об аппроксимируемости полугрупп и отделимости подполугрупп. — Левич Е. М. Об одной теореме Ф. Холла. — Ливчак Я. Б. О некоторых вопросах теории предела. — Ляпин Е. С. Полугруппы эндоморфизмов. — Мустафаев Л. Г. Об идеальных эквивалентностях полугруд. — Потемкин Л. В. О строении полугрупповых колец. — Розен В. В. Гомоморфизмы структур, ассоциированных с упорядоченными множествами. — Сандик М. Д. Гомоморфизмы в — лупах. — Фрейдман П. А., Андрианов В. И. Гамильтоновы кольца. — Хенно Я. А. Радикалы полугрупп. — Хион Я. В. — системы. — Шайн Б. М. Алгебры отношений. — Шайн Б. М. Теория полугрупп как теория суперпозиций многоместных функций. — Шайн Б. М. Полугруппы преобразований. — Шеврин Л. Н. О полуизоморфизмах полугрупп. — Шеврин Л. Н., Филиппов Д. Н. Частично упорядоченные множества и их графы сравнения. — Шимельфениг О. В. К теории полугруд и обобщенных груд. — Шнеперман Л. Б. Неподвижная точка полугруппы преобразований и инвариантное интегрирование. — Шутов Э. Г. Погружения полугрупп.

Тезисы докладов V Всесоюзного Совещания пользователей ЭВМ типа «Урал». Тарту, 1966. (Тартуский гос. ун-т. Вычислительный центр.) — Ротапринт.

Секция I. Программы математических методов. 115 стр.

Секция II. Автоматизация программирования. Трансляторы с алгоритмических языков.

Секция III. Математическое программирование. 104 стр.

Секция IV. Техническое обслуживание и модернизация машина типа «Урал». 156 стр.

Gluškov, V. Elektronarvutid ja matemaatika tulevik. — «Tehnika ja Tootmine», 1966, nr. 8, lk. 369—371.

Henno, J. Millal võeti kasutusele mehaanilised arvutusvahendid? — «Küsimused ja Vastused», 1966, nr. 7, lk. 30—34.

Humal, A. Akadeemik A. Humal räägib... Teadlase elukutsest. Üles kirjutanud Ü. Tuulik. — «Noorus», 1966, nr. 4, lk. 6—9.

Kull, H. Programmõpe keskkooli vanemates klassides. Kogemusi trigonomeetria õpetamisel. — «Nõukogude Kool», 1966, nr. 8, lk. 571—577.

Kärner, O. Mõnest valemist keskkooli matemaatika kursuses. — «Nõukogude Kool», 1966, nr. 3, lk. 197—202.

Raidna, I. Tehnikumide vastuvõtueksameilt matemaatikas. — «Nõukogude Kool», 1966, nr. 4, lk. 297—300.

Rünk, O. Koduste ülesannete andmisest ja nende täitmise kontrollist esimestel kursustel. — Rmt.: Õppemetoodika küsimusi, 1, 1966, lk. 52—58.

Vaher, E. Mõtteid programmõppest ja selle rakendamisest. Kogemusi logaritmide õpetamisel. — «Nõukogude Kool», 1966, nr. 8, lk. 565—571.

Vihman, A. Matemaatika õpetamise ümberkorraldamine algklassides. — «Nõukogude Kool», 1966, nr. 6, lk. 431—436.

Ульм С. О построении алгорифмов для приближенного решения некоторых задач оптимального управления. — «Известия акад. наук Эстонской ССР». Серия физико-математических и технических наук т. 15, 1966, № 2, lk. 167—177.

Ээк Р. Н. Вычисление определителей, режение систем линейных уравнений и обращение матриц путем последовательного нахождения миноров. — «Труды Таллинского Политехн. ин-та. Серия А, 1966, № 241, lk. 109—120.

Matemaatika ja kaasaeg. Abimaterjale matemaatika õpetajatele ja õppijatele, IX. Trt., 1965, 116 lk. (Tartu Riiklik Ülikool.)

Sisu: G. Kangro. Bourbaki «Matemaatika elemendid». — Katkendeid P. R. Halmosi artiklist «Nicolas Bourbaki». — J. Gabovitš. Algebra põhimõisteid IV. — Ü. Kaasik. Genereerivad funktsioonid ja summade arvutamine. — R. Mullari. Masinad ja mõtlemine. — A. Jägel. Elektronarvutite massilisest rakendamisest majandusllikkude protsesside juhtimisel. — J. Gabovitš ja S. Zetel. Erinurksed kolmnurgad. — I. Gaiduk. Ühest tüüpilisest algebralisest veast ja selle allikatest. — O. Prinits. Matemaatika õpetamise reformimisest Saksa Demokraatliku Vabariigi koolides. — E. T i i t. Mis on tõenäosus? — E. T a m m e. 100 aastat Jacques Hadamard'i sünnist. — L. R o o t s. William Rowan Hamilton. — S. B a r o n. Uus eestikeelne matemaatilise analüüsi õpik G. Kangro «Matemaatiline analüüs I. — Ü. L u m i s t e. Diferentsiaalgeomeetria konverents Tartus. — E. R e i m e r s. Üleliiduline summeeruvusteooria-alane suvekool Käärikul. — L. V õ h a n d u. Ameerikast Tartu matemaatiku pilguga. — O. R ü n k. Mõnede paralleelterminite vajalikkusest. — Kroonika. — Bibliograafia. — Ülesandeid.

Nõukogude pedagoogika ja kool. I. Trt., 1966. Sisaldab järgmised matemaatika-alased artiklid:

O. P r i n i t s. Uued suunad koolimatemaatikas ja selle kasutamine Eesti koolis. — H. O k s a. Ettevalmistavatest harjutustest matemaatika õpetamisel. — J. R e i m a n d. Lineaarse planeerimise õpetamisest Tartu I ja VIII keskkoolis. — T. P a l m. Õpilaste iseseisvast tööst matemaatika tundides programmõppe põhimõttel. — H. K u l l. Kaldnurksete kolmnurkade lahendamine jada- ja hargprogrammi järgi. — G. R o s e n b e r g. Integraali rakendamine keskkoolis.

Tartu Riikliku Ülikooli Toimetised. Trt., 1965. 177. vihik. Matemaatika- ja mehhaanika-alaseid töid. Matemaatika-alased tööd (vene k., resümeed eesti, saksa ja inglise k.):

Г. К а н г р о. Проф. Херманн Яаксон (некролог). — Ü. L u m i s t e. Indutseeritud seostused sidestatud projektiivsetes ja afiinsetes kihtruumides. — E. J ü r i m ä e. Konullmenetluste topoloogilisi omadusi. — E. J ü r i m ä e. Märkmeid koregulaarsete üldistatud maatriksmenetluste kohta. — T. S õ r m u s. Jakimovski menetlustega seoses olevad Tauberi tüüpi teoreemid. — G. K a n g r o ja J. L a m p. Ühest maatriksmenetluste klassist. — M. A b e l. Kompleksset järku summeeruvustegurid Cesaro menetluse korral. — S. B a r o n. Fourier' ridade absoluutse summeeruvuse lokaalsuse omadusest. — O. C h e k m a r e v. Mõõtuvate funktsioonide nivoopindade variatsioonomadus. — T. S õ r m u s. Ühest asümptootilisest ülesandest. — P. N u u m a. Ühest integraalide summeerimismenetlusest. — G. V a i n i k k o. Tarvilikud ja piisavad tingimused Galjorkin-Petrovi meetodi stabiilsuseks. — G. V a i n i k k o. Galjorkini meetodi koondumisest. — E. T a m m e. Elliptilist tüüpi integro-diferentsiaalvõrrandite lahendamisest diferentsmeetodiga. — R. M u l l a r i. Ühest bilansimaatriksite pööramise meetodist. — A. H v o s t o v. Kahe muutuja funktsiooni esitamisest kujul a(x) (y). — Ü. L e p i k. Temperatuuripinged nõtketes plastilistes mittehomogeensetes plaatides. — K. S o o n e t s. Ristkülikukujulise horisontaalprojektsiooniga elastilis-plastiliste nõtkete paneelide tasakaalust suurte läbipainete puhul.

Всесоюзная конференция «Использование математики и вычислительной техники в экономике». Тезисы докладов. Тарту, 1966. 84 стр. (ВЦ ТГУ). — Ротапринт.

Содерж.: А б е н А., А д а м с о н И. Об одном подходе к определению номенклатуры квартир в перспективе. — А к к е л ь Т. Определение оптимальной структуры посевных площадей под кормовые культуры. — А к к е л ь Т. Применение математических методов в сельском хозяйстве. А р и с т е А. П., Н о о р м а Р. Ю. Об автоматизации учета складов в Таллинской торговой базе ЭРСПО. — В е р х о в с к и й Б. С. Стохастическая задача орошаемого земледелия. — Д а н и л о в - Д а н и л ь я н В. И. Модель текущего планирования и итеративный алгоритм оптимизации производственно-транспортного комплекса. — Д е з а М. Е., Д а д а м я н Г. Г. Проблематика социологического обеспечения автоматизированных систем управления предприятием. — З и н г е р И. М., К о р о т я е в М. Ф. Исследование потоков информации с помощью СПМ на промышленном предприятии. — И с к а к о в - П л ю х и н Б. И., Г у с е в А. А., С а е н к о П. П. Экономико-математические модели оптимального планирования и управления сельским хозяйством. — К а с к И. Составление сельскохозяйственных планов заготовок при помощи математических моделей. — К а ц е н е л и н б о й г е н А. И., О в с и е н к о Ю. В., Ф а е р м а н Е. Ю. К теории оптимального планирования народного хозяйства. — Л а н д р а Э. К., К а н г у р Э. М. Метод составления календарного плана для механического цеха машиностроительного завода. — Л а п ш и н Н. П. Основные свойства и структура системы управления промышленным предприятием. — Л е п п и к К. В., С а р в Э. Н. О моделировании процесса планирования. — Л у х т С., М у л л а р и Р. Механическое составление производственных заданий. — М а р г у л и с Х. Ш. Некоторые вопросы статического моделирования сложных систем. — М е д н и ц к и й В. Г., П и т е л и н А. К. Некоторые модели и алгоритмы отраслевого планирования и управления. — М о в г н о в и ч С. М. Исследование метода штрафных функций для решения задач линейного и выпуклого программирования. — М я н д Х. Автоматизированная обработка информации, необходимой для управления промышленным предприятием. — П а с с о в Б., С а р в Э. Многовариантные расчеты перспективной численности населения Эстонской ССР на ЭВМ. — П р и с к Л. Составление карт раскроя на ЭВМ «Урал-4». — Р е й г о М. Ежедневные маршруты для однотипных автомашин. — Р о з е н б е р г В. О значении производственных функций для сельскохозяйственной практики. — С а р в Э. О подходе к проблемам создания системы вычислительных программ для плановых расчетв. — Т а м м М. Об одном приближенном способе решения задачи оптимальной унификации. — Т о о м е Р. Организация учета в автоматизированной системе управления промышленными предприятиями. — Ф р и д м а н Г. Я. Динамическая модель оперативного управления производством. — Х е й н л а Л., Л у т с А., Р е м м е л ь Ю., Р ы м у с Э., С а р в Э. Программа расчета потребностей в материалах и средневзвешенных норм расхода. — Э н н у с т е Ю. Математическое моделирование в экономике. — Э х и н И. О моделировании Ягель А. Общие задачи параметрического линейного программировани и их возникновения социального коллектива. — применения в экономике.

Ülesandeid

Ülesandeid elementaarmatemaatikast

1. On antud võrdkülgne kolmnurk ABC. Küljel BC on võetud punkt D nii, et $3BD = BC$ ning küljel CA punkt E nii, et $3CE = CA$. Sirgete AD ja BE lõikepunkt on O. Tõestada, et $OC \perp AD$.
2. Leida summa

$$S_{np} = n! + \frac{(n+1)!}{1!} + \frac{(n+2)!}{2!} + \ldots + \frac{(n+p)!}{p!}.$$

3. Leida süsteemi

$$\begin{cases} |x+1| + |y-3| = 4 \\ y = |x+1| + 3 \end{cases}$$

reaalarvulised lahendid.
4. On antud ruutvõrrand

$$p_2x^2 + (p_1 - 1)x + p_0 = 0,$$

kus p_0, p_1 ja p_2 on positiivsed ning $p_0 + p_1 + p_2 = 1$. Tõestada: kui võrrandil on lahend x_0, kusjuures $0 < x_0 < 1$, siis $p_1 + 2p_2 > 1$.
5. Konstrueerida kolmnurk, teades selle kolmnurga külgedele (väljapoole kolmnurka) ehitatud ruutude keskpunkte.

Ülesandeid kõrgemast matemaatikast

6. Olgu

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}.$$

Näidata, et $|D| = (a^2 + b^2 + c^2)^{\frac{3}{2}}$, kui $ab + bc + ca = 0$.
7. Segmenti, mille moodustavad parabool ja tema teljega ristuv kõõl, on joonestatud ringjoon raadiusega r. Leida parabool, mille puhul segmendi pindala on minimaalne.
8. Leida rea

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

summa.

KOGUMIKU ÜHEKSANDA VIHIKU ÜLESANNETE LAHENDUSED

Ülesande nr. 1 lahendus. Et $\frac{1}{1\cdot 3} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right)$, $\frac{1}{3\cdot 5} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right)$ jne., siis $S = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \ldots + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{97} - \frac{1}{99}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{99}\right) = \frac{49}{99}$.

Ülesande nr. 2 lahendus. 8-, 9- ja 10-kopikalist summat saab tasuda 3- ja 5-kopikaliste müntidega järgmiselt:

$$8 = 3 + 5, \quad 9 = 3 + 3 + 3, \quad 10 = 5 + 5.$$

Kuna iga suurem summa erineb 8, 9 või 10-st mingi arvu kolmekordse võrra, siis saab tasuda samuti ainult 3- ja 5-kopikaliste müntide abil.

Ülesande nr. 3 lahendus. Ärajäetav null ei saa olla arvus viimasel kohal, sest siis väheneks arv 10 korda. Seega peavad otsitavad arvud olema kujuga $a\,0\,b$, kusjuures ülesande tingimuse kohaselt

$$a0b = 9 \cdot ab,$$
$$100a + b = 9(10a + b).$$

Siit

$$5a = 4b,$$
$$a = 4, \quad b = 5.$$

Seega on otsitav arv 405.

Ülesande nr. 4 lahendus. Olgu võrdkülgses kolmnurgas ABC ($AB = BC = CA = a$) võetud punkti M kaugused kolmnurga külgedest h_1, h_2, h_3. Siis

$$S_{\Delta ABM} + S_{\Delta BCM} + S_{\Delta CAM} = S_{\Delta ABC} \cdot$$

$$\frac{ah_1}{2} + \frac{ah_2}{2} + \frac{ah_3}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4},$$

millest leiame, et

$$h_1 + h_2 + h_3 = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Ülesande nr. 5 lahendus. Kui ostetakse x parti, y hane ja z kalkunit, siis

$$\begin{cases} x + y + z = 12 \\ 5x + 7y + 8z = 80. \end{cases}$$

Lahutades teisest võrrandist viiekordse esimese võrrandi, saame

$$2y + 3z = 20,$$

$$y = 10 - \frac{3y}{2} \cdot$$

Kuna y peab olema positiivne täisarv, siis z peab olema kaheksast väiksem positiivne paarisarv. Andes tundmatule z väärtused 2, 4 ja 6, saame ülesande kolm erinevat lahendit:

$$x = 3, \quad y = 7, \quad z = 2;$$
$$x = 4, \quad y = 4, \quad z = 4;$$
$$x = 5, \quad y = 1, \quad z = 6.$$

Ülesande nr. 6 lahendus. Kuna $S_3 = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1 q} + \ldots + \frac{1}{a_1 q^{n-1}} = \frac{1}{a_1 q^{n-1}}(1 + q + \ldots + q^{n-1}) = \frac{S_2}{a_1^2 q^{n-1}}$,

siis

$$\frac{S_2}{S_3} = a_1^2 q^{n-1}.$$

Seega

$$S_1 = a_1 \cdot a_1 q \cdot a_1 q^2 \ldots a_1 q^{n-1} = a_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} = (a_1^2 q^{n-1})^{\frac{n}{2}} = \left(\frac{S_2}{S_3}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

Ülesande nr. 7 lahendus. Olgu $z = a + bi$. Siis

$$\sqrt{a^2 + b^2} - a - bi = 2 + 3i.$$

Reaal- ja imaginaarosade võrdlemisel saame

$$\begin{cases} \sqrt{a^2+b^2}-a=2 \\ -b=3, \end{cases}$$

millest $b=-3$, $a=\frac{5}{4}$. Võrrandi lahendiks on

$$z=\frac{5}{4}-3i.$$

Ülesande nr. 8 lahendus. Et $\triangle CHF \sim \triangle DHB$ ja $\triangle DHF \sim \triangle KLF$, siis

$$\frac{m}{h}=\frac{q}{n} \text{ ja } \frac{k}{e}=\frac{n}{m}.$$

Neist seoseist järeldub, et

$$\frac{k}{h}=\frac{eq}{m^2}. \tag{1}$$

Kolmnurgast AHC saame nurgapoolitaja omaduse põhjal

$$\frac{b}{h}=\frac{p-m}{m},$$

$$b^2=\frac{h^2(p-m)^2}{m^2}.$$

Asendades saadud avaldise seosesse $p^2=b^2-h^2$, saame

$$m^2p=h^2(p-2m).$$

Kuna $h^2=pq$ (täisnurksest kolmnurgast ABC), siis viimane võrdus annab $m^2=q(p-2m)$.

Seega saame nüüd seose (1) kirjutada kujul

$$\frac{k}{h}=\frac{e}{p-2m}.$$

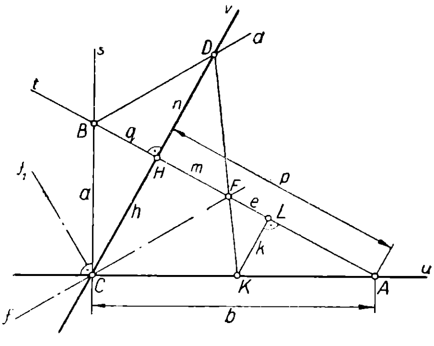
Kolmnurkade ALK ja AHC sarnasusest järeldub, et

$$\frac{k}{h}=\frac{p-m-e}{p}.$$

Seega $$\frac{e}{p-2m}=\frac{p-m-e}{p},$$

millest suuruse e avaldamisel saame:

$$e=\frac{p}{2}-m.$$



Järelikult $\frac{p}{2}\,HL = \; = LA$ ning $KL \parallel CH$ tõttu ka $CK=KA$.

III osa

Ülesande nr. 1 lahendus. Tuhande kuubi hulgas on värvimata külgedega kuupe $8^3=512$, ühe värvitud küljega kuupe $6\cdot 8^2=384$, kahe värvitud küljega kuupe $12\cdot 8=96$, kolme värvitud küljega kuupe 8 ja nelja värvitud küljega kuupe 0.

Seega $p(A_0)=0{,}512$, $p(A_1)=0{,}384$, $p(A_2)=0{,}096$, $p(A_3)=0{,}008$, $p(A_4)=0$, $p(A_1+A_2)=p(A_1)+p(A_2)=0{,}48$, $p(\bar{A}_4)=1-p(A_4)=1$, $p(A_1\cdot A_2)=0$ (sest A_1 ja A_2 on teineteist välistavad sündmused), $p(A_1\bar{A}_2)=0{,}384$ (sest $A_1\bar{A}_2=A_1$).

Sündmus $\bar{A}_0$ toimub siis, kui saadud kuubil on värvitud külgi. Sündmus $\bar{A}_1$ toimub siis, kui saadud kuubil on kas kaks või kolm külge värvitud või on kõik küljed värvimata. Seega sündmus $\bar{A}_0 + \bar{A}_1$ on kindel sündmus ning $p(\bar{A}_0 + \bar{A}_1) = 1$. Analoogilise aruteluga leiame, et $p(\bar{A}_1 + \bar{A}_2 + \bar{A}_3) = 1$.

Ülesande nr, 2 lahendus. Viit tähte 23 tähe hulgast saab ritta laduda

$$V_{23}^5 = 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19 = 4\,037\,880$$

erineval viisil. Soodus on nende juhtude hulgast ainult üks, mistõttu otsitav tõenäosus on $1 : 4\,037\,880$.

Ülesande nr. 3 lahendus. Antud 11 tähest saab moodustada $\frac{4!\ 2!\ 2!}{11!}$ erinevat kordumistega permutatsiooni[1], mille hulgast soodsaks osutub ainult üks. Seega on otsitav tõenäosus $\frac{4!\ 2!\ 2!}{11!} \approx 2{,}4 \cdot 10^{-6}$.

Ülesande nr. 4 lahendus. Kõigi paigutuste arv on 10!, nendest soodsaid on $2 \cdot 5! \cdot 5!$ (sest noormeeste erinevaid järjestusi on 5!, neidude erinevaid järjestusi on 5! ning iga soodne järjestus annab jällegi soodsa järjestuse, kui iga noormees oma naabriga kohad vahetaks).

Seega on otsitav tõenäosus $\frac{2 \cdot 5! \cdot 5!}{10!} \approx 0{,}008$.

Teisel juhul on soodsaid järjestusi $4 \cdot 5!$ ning otsitav tõenäosus on $\frac{4 \cdot 5!}{10!} \approx$ $\approx 0{,}0001$.

Ülesande nr. 5 lahendus. Minimaalne vihtide arv keha kaalumisel 1., 2. ja 3. vihtide valiku korral on esitatav tabelina:

Kaalutava keha raskus	Minimaalne vihtide arv					
	1. valik		2. valik		3. valik	
	a	b	a	b	a	b
1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1
3	2	2	1	1	2	2
4	2	2	1	1	3	2
5	1	1	2	2	1	1
6	2	2	2	2	2	2
7	2	2	2	2	2	2
8	3	2	3	2	3	2
9	3	2	3	2	4	2
10	1	1	1	1	1	1
Kokku	18	16	17	15	20	16
Vihtide arvu keskväärtus.	1,8	1,6	1,7	1,5	2	1,6

Seega annab ülesandele vastuse vihtide teine valik nii juhul a) kui ka juhul b).

Ülesande nr. 6 lahendus. a) Et $P(W_4^3) = \frac{1}{4} > P(W_3^5) = \frac{7}{32}$, siis on esimene võimalus tõenäosem. b) Teine võimalus on tõenäosem, sest

[1] Kordumistega permutatsioonidest on juttu Ü. Kaasiku artiklis «Ühendid». — Matemaatika metoodiliste artiklite kogumik I, Tln., 1963, lk. 18—30.

$$P(W_8^5 + W_8^6 + W_8^7 + W_8^8) > P(W_4^3 + W_4^4).$$

c) Nimetatud võimalused on sama tõenäosusega, sest binoomkordajate omadusele $C_n^k = C_n^{n-k}$ tuginedes saame

$$P(W_{2n}^0 + W_{2n}^1 + \ldots + W_{2n}^n) = P(W_{2n}^n + W_{2n}^{n+1} + \ldots + W_{2n}^{2n}).$$

d) Binoomkordajate eelmainitud omadusele tuginedes leiame, et teine võimalus on tõenäosem.

T. ROOSINUPU ÜLESANNTE LAHENDUSED

(ülesanded vt. lk. 72 ja 90)

1. Vastuolu saab vältida vaid siis, kui eeldada, et Roosinupu tavaline tõearmastus võrdub nulliga. Siis aga võrdub nulliga ka otsitav tõenäosus.

2. Vähim selline arv on:

$$7\,241\,379\,310\,344\,827\,586\,206\,896\,551.$$

3. Roosinupp «juhtus» valima järgmised arvupaarid:

$$8 \cdot 86 = 688$$

$$41096 \cdot 83 = 3410968$$

$$16393442622950819672131147540983606557377049180327 87 \cdot 71 =$$
$$= 1163934426229508196721311475409836065573770491803278 77.$$

BRIDŽIÜLESANDE LAHENDUS

(ülesanne vt. lk. 43)

S võtab esimese tihi ruutu emandaga ja käib risti nelja. Sõltuvalt W tegevusest on nüüd kaks võimalust:

a) Kui W ei pane kuningat või emandat, siis N paneb sõduri ja O muidugi võtab ässaga. O parim käik on nüüd ruutu, mille N võtab ja käib risti kahe. S katab selle kümnega ning W peab üle lööma. Et W ruutud on otsas, siis peab ta midagi muud käima ning S saab igal juhul oma viimase risti lauda trumbata.

b) Kui W paneb teisel käigul risti kuninga (või emanda), siis N viskab risti kahe, võtab järgmise ruutu käigu (W parim kaitse) sisse ja tõmbab veel kord ruutu, (millele W viskab väikese risti). Edasi võtab S kolm korda pada ja käib siis oma ärtu sõduri (tingimata sõduri!) laua ässa alla. N käib nüüd oma viimase pada, mille S trumpab, ja tõmbab siis oma viimase trumbi (N viskab ärtu kolme). Kui O vahepeal risti ässa ära ei visanud, siis käib S risti ja O on sunnitud ärtut tagasi käima (ta pidi ju hoidma vähemalt kahte ärtut). Kui aga O viskas risti ässa ära, siis käib S ärtu nelja, võtab selle lauas kuningaga üle ning käib sealt risti sõduri. Et W viimane kaart on risti, siis saab S selle tihi oma risti kümnega.

SISUKORD

Тартуский государственный университет
г. Тарту, ул. Юликооли, 18

МАТЕМАТИКА И СОВРЕМЕННОСТЬ. XII

Вспомогательные материалы для преподающих и изучающих математику

На эстонском языке

Toimetaja J. Gabovitš
Korrektor E. Oja

Ladumisele antud 28. XII 1966. Trükkimisele antud 6. III 1967. Paber 60 × 90, 1/16. Trükipoognaid 9,25. + 1 kleebis. Arvestuspoognaid 8,5. Trükiarv 4000. MB-02817. Tellimise nr. 112. Hans Heidemanni nim. trükikoda, Tartu, Ülikooli 17/19. II.

Hind 35 kop.

2—2