0001011

Matemaatika ja kaasaeg

1101000

TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

MATEMAATIKA JA KAASAEG

XI

ABIMATERJALE MATEMAATIKA ÕPETAJATELE JA ÕPPIJATELE

TARTU 1966

RUUMI MÕISTE GEOMEETRIAS

Ü. Lumiste

Sõnal «ruum» on igapäevases kõnepruugis rohkesti varjundeid: koosolekuks vajatakse ruumi, täiskiilutud trammis on sõitjatel vähe ruumi jne. Ka teadusliku terminina on sellel sõnal eri teadusharudes erinev sisu. Materialistlikus filosoofias defineeritakse ruumi kui mateeria olemasolu objektiivselt eksisteerivat, teadvusest sõltumatut vormi. See väga üldine ja puhtkvalitatiivne lähenemine ruumi mõistele saab konkreetsema sisu füüsikas, milles mateeria ning ruumi ja aja vaheline seos avatakse ka juba kvantitatiivselt. Igapäevaste makromaailmast saadud kogemuste baasil tekkinud klassikalise mehaanika juurest on kaasaegne füüsika jõudnud ühelt poolt mikromaailma kirjeldava kvantmehaanikani, teiselt poolt relatiivsusteooriale tugineva kosmoloogiani, mille eesmärgiks on selgitada megamaailma seaduspärasusi. Selle tulemusena on ruum kui füüsika mõiste säilitanud tänapäeval ainult suhtelise tähenduse. Tema kvantitatiivne kirjeldamine on võimalik ainult mingi materiaalse taustsüsteemi suhtes ja sedagi vaid teatava täpsusega ja teatavates piirides (sõltuvalt praegusest mõõtmistehnikast piirides $\sim 10^{-16}$ m kuni $\sim 10^{17}$ m).

Ruumi kui mateeria olemasolu vormi s i s e m i s e struktuuri kirjeldamisel kerkivate probleemide uurimisega ei tegele filosoofia ega füüsika. See ülesanne usaldatakse matemaatika ühele osale — geomeetriale. Siin saab sõna «ruum» veelgi konkreetsema sisu. Käesoleva kirjutise aineks ongi õieti ruum mitte kui filosoofia või füüsika, vaid kui geomeetria mõiste.

Juba nimetus «geomeetria» (kr. k. *geo* — maa, *metreo* — mõõdan) viitab selle teadusharu igivanale päritolule. Alguse sai ta rohkem kui 4000 aastat tagasi Vana-Egiptuses ja Vana-Babüloonias maa mõõtmisel ja ehituste kavandamisel ammutatud kogemustest. Ligikaudu 2300 aasta eest valati ta Antiik-Kreekas esimese teadusharuna rangesse deduktiivsesse vormi, mis püsis loogilise ranguse klassikalise eeskujuna isegi veel XIX sajandi esimesel veerandil. Alles siis avastati seni absoluutseks peetud teadmiste suhtelisus ja piiratus ka geomeetrias. Esimese mitteeukleidilise geomeetria avastamine 1820-ndail aastail N. Lobatševski ja J. Bolyai poolt mõjustas murrangut tekitavalt mitte üksnes matemaatikat, vaid ka naaberteadusi. Selgus, et neid matemaatilisi teooriaid, neid «geomeetriaid», mis kirjeldavad ruumi võimalikke struktuure, ei ole mitte üksainus, nagu väga pikka aega usuti, vaid kaugelt rohkem. Selle revolutsiooni loomulikuks jätkuks teoreetilises füüsikas kujunes A. Einsteini poolt 1919. aastal loodud üldrelatiivsusteooria, mis tähistas füüsikalise ruumi teoreetilise uurimise algust kosmoloogilises ulatuses. Vajalikuks matemaatiliseks aparatuuriks osutus siin Riemanni geomeetria, mis haarab endasse erijuhtudena nii tavalise eukleidilise geomeetria kui ka Lobatševski geomeetria.

Ruumi mikrostruktuuri iseärasused on aga veel praegugi suurel määral saladuseks. Ei ole isegi selge, missugune peaks olema see matemaatiline teooria, see «geomeetria», mis oleks kohane mikromaailma ruumiliste vahekordade teoreetiliseks kirjeldamiseks. Mateeria peidab endas veel mitmeid avastamata saladusi. Nähtavasti ei piisa isegi seni loodud arvukatest «geomeetriatest» ruumi kui mateeria olemasolu vormi kõigi aspektide kirjeldamiseks.

Olgu need read sissejuhatuseks järgnevasse ülevaatesse. Selles on tehtud katse jälgida populaarses vormis seda protsessi, mis viis matemaatikuid uute geomeetriateni, ning selgitada, mida mõistetakse õieti ruumi all tänapäeva geomeetrias.

Eukleides ja eukleidiline ruum

Rohkem kui kahe tuhande aasta jooksul valitses üksmeelne seisukoht, et ruumi sisemise struktuuriga seotud probleemid olid põhimõtteliselt täielikul ja lõplikul kujul lahendatud juba Antiik-Kreekas. Kreeklaste loodud elementaargeomeetria baasil tekkis XVII sajandil küll analüütiline geomeetria ja järgmise sajandi lõpuks diferentsiaalgeomeetria, kuid need täiendasid ainult uurimismetoodikat ja aparatuuri samade üldiste kontseptsioonide raames. Geomeetria põhimõttelised alused jäid muutmatuiks.

Milles siis peitub vana-kreeka õpetlaste loomingu saladus, miks jäi see püsima aastatuhandeteks? Lühidalt võib vastata nii: kreeklased lõid selles uue meetodi — matemaatilise uurimismeetodi, demonstreerides veenvalt selle meetodi suurt jõudu geomeetria kui deduktiivse süsteemi ülesehitamisega. Kehade ruumilised vormid ja vahekorrad said sel viisil esimesteks katsekivideks matemaatilise käsitlusviisi kujunevatele võtetele. Isegi mõningaid tänapäeval aritmeetikasse või algebrasse kuuluvaid võtteid, nagu näiteks Eukleidese algoritmi suurima ühisteguri leidmiseks või ruutvõrrandi lahendamist, käsitleti tollal geomeetrilises vormis kui teatava lõigu konstrueerimist antud lõikude järgi.

Kehade ruumiliste vormide ja vahekordade uurimisel ei piirdunud kreeklased enam vaatlusest ja kogemusest saadud faktide kirjeldamisega ning üksikute empiiriliste seaduspärasuste formuleerimisega. (Sellest kaugemale Vana-Egiptuses ja Vana-Babüloonias veel ei jõutud.) Peamiseks kujunes kreeklaste juures asjadevaheliste loogiliste seoste leidmine, küllalt üldiste paindlike mõistete kujundamine ja nende vahekordi väljendavate lausete järjestamine ühtseks deduktiivseks süsteemiks.

Mingi keha puhul säilitasid nad ainsa geomeetriale olulise omadusena ainult selle vormi, abstraheerides kõik muud ebaolulised omadused nagu värvi, kaalu jms. Nii kujunesid sellised abstraktsed mõisted nagu «kuup», «kera», «silinder» jt. Kui reaalsete kehade puhul saab väiteid püstitada ainult teatava täpsuse, teatava mõõtmisvea piirides, siis selliste puhaste geomeetriliste vormide puhul on väited juba absoluutse täpsusega kas õiged või väärad. See annab võimaluse rakendada geomeetria mõistete puhul formaalset loogikat. (Viimane kujunes samuti Vana-Kreekas — muide, tihedas seoses geomeetria muutumisega matemaatiliseks teaduseks — ja fikseeriti juba IV sajandil e. m. a. Aristotelese töödes.) Selguvad vahekorrad mõistete vahel, võimalused ühtesid vorme tuletada teistest, lihtsamatest. Kogemusest pärit tähelepanekute ahel pöörati Vana-Kreekas õieti «pea peale». Kui kogemused algavad ruumilistest kehadest ning alles nende uurimine viib tasandiliste tahkude ja sirgjooneliste servade juurde, siis loogilise järgnevuse seisukohalt osutus asi vastupidiseks. Lihtsam on alustada sirglõikudest, nende abil defineerida näiteks ruut, ruudu mõistet kasutades defineerida kuup jne. Geomeetriliste mõistete vahekorra analüüsimine viis Vana-Kreekas kogu süsteemi korraldamiseni selliselt, et lähteks said mõningad lihtsamad mõisted, kõik järgnevad mõisted aga defineeriti rangelt eelnenud mõistete abil.

Mõistete süsteem iseendast aga ei moodusta veel mingit teooriat. Teooria — antud juhul geomeetria — tekib siis, kui küllaldase hulga neid mõisteid siduvate lausete puhul on selgitatud, missugused neist on tõesed, missugused väärad. Siin tuleb jällegi vahet teha kogemusliku tõestuse ja abstraktse loogilise tõesuse vahel. Reaalsete kehade puhul ei saa ühegi väite puhul absoluutse kindlusega öelda, et väide on tõene või et väide on väär. Kõik «õiged» väited kehtivad siin ainult teatava täpsuse piirides, teatava «mõõtmisveaga». Teistsugune on lugu geomeetria abstraktsete väidetega. Need on kas tõesed või väärad, kolmandat võimalust pole. Selgitame öeldut ühe näitega. Kui füüsiku kätte satub täisnurkse kolmnurga kujuline plaat, siis ta võib mõõta selle küljed, leida saadud arvude ruudud ning öelda, et kaatetite ruutude summa ja hüpotenuusi ruut on võrdsed täpsusega näiteks $\pm 10^{-5}$ m^2. Kui matemaatik on defineerinud täisnurkse kolmnurga, ruudu ja tasandiliste kujundite pindvõrduse mõisted ning võtnud aluseks teatavad aksioomid, siis ta võib täiesti rangelt tõestada, et tõene on lause: «täisnurkse kolmnurga kaatetitele ehitatud ruutudest koosnev kujund on pindvõrdne hüpotenuusile ehitatud ruuduga». Siin ei ole juttu suuremast või väiksemast täpsusest, väide on tõene niiöelda absoluutse täpsusega, sest ta käib mitte mõõtmisele alluvate konkreetsete kehade, vaid abstraktsete geomeetriliste vormide kohta. Kreeklaste saavutustest üks hinnatavamaid ongi see põhimõtteline avastus, et geomeetria abstraktseid mõisteid siduvate lausete puhul saab ühtede tõesust tunnistades teha puhtloogiliste arutluste teel kindlaks teiste lausete tõesust või väärust. Selles õieti väljendubki Aristotelese deduktiivse teooria idee.

Kuidas kreeklastel õnnestus seda ideed geomeetrias realiseerida? Nende saavutused sel alal võtab kokku III sajandil e. m. a. Aleksandrias elanud kreeka õpetlase Eukleidese klassikaline teos «Elemendid». Selles sisaldub juba kogu see geomeetria-alane tarkus, mida praegu õpetatakse keskkoolis. Järgnenud sajandid tõid koolidesse uuendusi ainult aine käsitlemise metoodikas. Kuid Eukleidese teos on tähelepanuväärne mitte üksnes oma sisulise rikkuse, vaid ka ülesehituse poolest. Eelkäijatele tuginedes teeb autor selles grandioosse katse esitada kogu geomeetriat range deduktiivse teooriana. Niisugune teooria ei saa muidugi alata tühjalt kohalt, ta peab millelegi tuginema. Teatavate lausete puhul tuleb lihtsalt võtta teatavaks, et nad on tõesed. Nendest saavad siis selle teooria aksioomid. Nad peavad moodustama lausete sellise küllaldase süsteemi, et teooria teised laused on nendest järjest saadavad kui puhtloogilised järeldused.

Eukleides eraldaski välja teatava arvu selliseid aksioomide ossa sobivaid lauseid. Hilisem analüüs aga näitas, et tema aksioomide süsteem pole veel küllaldane. Eukleides võttis geomeetria käsitlemisel aluseks järgmised aksioomid.

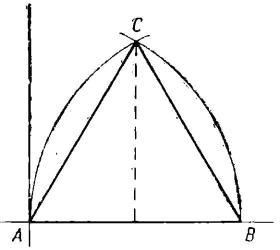
1. *Läbi iga kahe punkti saab asetada sirge.*
2. *Iga sirget võib mõlemas suunas lõpmatult pikendada.*
3. *Iga punkti ümber saab iga raadiusega tõmmata ringjoone.*
4. *Iga kaks täisnurka on võrdsed.*
5. *Kui kaks sirget, lõigates kolmandat, tekitavad sellest ühel pool sisenurgad, millede summa on väiksem sirgnurgast, siis need sirged pikendamisel lõikuvad.*

Siinjuures tuleb märkida, et sirge all mõistab Eukleides seda, mida me praegu nimetame sirglõiguks. (Kui sirget mõista nii nagu tänapäeval, siis langeks ära aksioom 2 ja aksioomis 5 sõna «pikendamisel».) Ringjoone ja täisnurga defineeris Eukleides meile tuttaval viisil juba enne aksioomide formuleerimist.

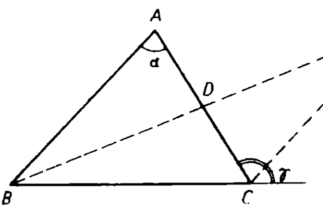
Edasi sisaldab tema teos ainult uute mõistete definitsioone, teoreeme ja nende tõestusi. Iga teoreemi tõestuse juurde teeb ta joonise, millel illustreerib tõestuskäiku. Analüüsime näiteks esimese lause tõestust. Lause väidab, et *iga lõik on teatava võrdkülgse kolmnurga küljeks.* Tõestus on järgmine. Olgu antud lõik AB. Aksioomi 3 põhjal saab punkti A ümber tõmmata ringjoone raadiusega AB ning punkti B ümber ringjoone raadiusega BA (joon. 1). Eukleides n ä e b j o o n i s e l t, et need ringjooned lõikuvad teatavas punktis C. Aksioomi 1 põhjal leiduvad sirged AC ja

BC. On konstrueeritud kolmnurk $\triangle ABC$. Edasi on Eukleidesel juba lihtne kontrollida, et see on võrdkülgne. Lause on tõestatud.

Tõestuses on aga üks nõrk koht, millele me juhtisime tähelepanu sõrendusega — Eukleides kasutab joonise näitlikkust! Kui ta joonist ei teeks, kas ta saaks oma aksioomidest puhtloogiliselt järeldada, et tõestuses esinevatel ringjoontel on ühine punkt C? Võib ju väga hästi kujutleda tasandit, millest on välja heidetud kõik punktid, mille kas või üks koordinaat on irratsionaalarv. Järelejäänud punktid moodustavad siis nn. ratsionaalse tasandi. Kui me valime nüüd punktideks A ja B vastavalt punktid (0, 0) ja (1, 0), siis punkt C oleks irratsionaalse ordinaadiga $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{1-(1/2)^2}$ ja tuleks seetõttu ratsionaalsest tasandist välja heita. Järelikult ratsionaalsel tasandil eespool kirjeldatud viisil tõmmatud ringjoontel pole ühist punkti! Samal ajal aga kõik Eukleidese aksioomid on ratsionaalse tasandi puhul tõesed. Sellest nähtub, et Eukleidese viiest aksioomist ei saa puhtloogiliselt järeldada isegi tema teose esimest lauset. Eukleides kasutab siin veel midagi, mida ta näeb jooniselt, kuid aksioomina ei formuleeri. Selliselt talitab ta ka paljudel teistel juhtudel.



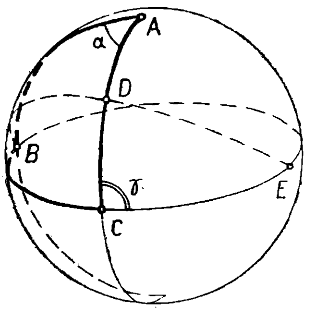
Joonis 1



Joonis 2.

Analüüsime veel näiteks Eukleidese tõestust tuntud lausele, mille järgi *kolmnurga iga sisenurk on väiksem igast välisnurgast, mis ei ole tema kõrvunurgaks*. See on Eukleidese 16. lause, nii et ta võib siin kasutada mitmeid juba eespool tõestatud teoreeme. Väite $\alpha < \gamma$ tõestamiseks (joon. 2) poolitab Eukleides külje AC punktiga D, määrab punkti E mediaani BD pikendil selliselt, et $BD \equiv DE$, ning tõestab seejärel meile tuttaval viisil, et $\triangle ABD \equiv \triangle CED$. Kolmnurga $\triangle CED$ sisenurk tipu C juures on järelikult võrdne nurgaga α. Eukleides näeb jooniselt, et E asub nurga γ sees, millest järeldabki väite tõesuse.

Küsime jällegi, kas Eukleides ilma joonist tegemata saaks oma aksioomidest järeldada puhtloogiliselt, et E on nurga γ sees? Selles kahtlema paneb meid järgmine näide. Vaatleme gloobusel sfäärilist kolmnurka $\triangle ABC$, mille moodustavad ekvaator ja kaks põhjapooluses ristuvat meridiaani. Kui me kordaksime siin Eukleidese konstruktsiooni, asendades sirglõigud suurringjoonte kaartega — lühimate joontega sfääril kahe punkti vahel, siis punkt E satuks ekvaatorile ega oleks enam nurga γ sees (joon. 3). Samal ajal Eukleidese aksioomid 1—5 kehtiksid, kui neis «sirgete» ossa asetada «suurringjoonte kaared». (Ei ole ju Eukleidese 2. aksioomis nõutud, et sirge pikendamisel ei tohi jõuda tagasi lähtepunkti!). Kerapinnal kehtiva geomeetria teistest iseärasustest väärib tähelepanu näiteks see, et selles on kolmnurga sisenurkade summa suurem kui kaks täisnurka — ülalvaadeldud kolmnurk $\triangle ABC$ on ju koguni kolme täisnurkse sisenurgaga. Ei kehti ka eespool analüüsitud lause kolmnurga sise- ja välisnurga kohta.



Joonis 3.

Toodud näidetest selgub, et Eukleides ei saavutanud veel seatud ideaali — ehitada üles geomeetria rangelt deduktiivse teooriana. Tema käsitlus kujutab endast omapärast segu rangetest loogilistest arutlustest ja argumentidest, mida ta on saanud lihtsalt joonise vaatamisest. Seejuures ei ole päris selge, mida võib ja mida ei või võtta jooniselt. Hea joonis teeb sageli usutavaks ka tõestatava teoreemi enda!

See on muidugi ränk kriitika Eukleidese aadressil, kuid ei tohi unustada, et see on XX sajandi kriitika ja seetõttu, nagu sellistel puhkudel ikka, ajalooliselt täiesti ebaõiglane. Eukleideselt ei saa nõuda võimatut, seda, milleks aeg polnud veel küps. Kreeklaste looming geomeetria valdkonnas on ja jääb põhjapanevaks. Mitte asjatult ei ole suurimadki teadlased sajandite vältel suhtunud sellesse austusega kui klassikalisse eeskujju.

Pikka aega teaduse ja tehnika areng aina kinnitas usku eukleidilise geomeetria kõigutamatusse. Seda kasutas ja kasutab tänapäevalgi inseneripraktika, märkamata temas ainsatki ebakõla. Sügava mulje jättis XVII—XVIII sajandil Newtoni gravitatsiooniõpetus, mis eukleidilisele geomeetriale toginedes selgitas tolle aja kohta ülima täpsusega taevakehade liikumisi. Ei ole imeks panna, et kuulus XVIII sajandi saksa filosoof Immanuel Kant seadis teesi eukleidilise geomeetria kõigutamatusest ja ainuvõimalikkusest oma filosoofilise süsteemi üheks nurgakiviks. Muide, selles küsimuses jäi Kant idealismi pinnale. Tema seisukohalt polegi geomeetria ülesandeks objektiivselt eksisteeriva reaalse ruumi omaduste kajastamine matemaatikas, vaid hoopis inimestega «kaasa sündinud» ruumiliste kujutluste korraldamine ja süstematiseerimine. Seejuures on need aprioorsed kujutlused Kanti järgi muidugi eukleidilised, nii et teistsugused «geomeetriad» pole üldse mõeldavadki. Juurdus kujutlus ruumist kui lõpmata suurest tühjast «kastist», kui üksteise kõrvale asetatud ühesuguste mõtteliste kuupide kogust, mida võib igas kolmes suunas lõpmata laiendada uute samasuguste kuupide lisamisega. Tänapäeval niisugust mõttelist konstruktsiooni nimetatakse eukleidiliseks ruumiks. Seejuures eespool antud näitlik kirjeldus asendatakse muidugi range, teatavale kindlale aksiomaatikale tugineva definitsiooniga. Niiviisi kujundasid matemaatikud paljude põlvkondade sajandeid läbinud ühistöö viljana oma esimese ruumi — eukleidilise ruumi mõiste. Kuid see ei jäänud ainsaks!

(Järgneb)

NORBERT WIENERI ARVAMUSI[1]

Matemaatika on noorte teadus. Teisiti ei saagi olla. Matemaatikaga tegelemine on selline mõistuse treening, milleks läheb vaja nooruse kogu paindlikkust ja vastupidavust. Kuid väga sageli noored lootustandvad õpetlased, kirjutanud üks-kaks huvitavat tööd, jäävad ootamatult vait; möödub natuke aega ja nende nimed on jäädavalt vajunud unustuse hõlma, samuti nagu ekstšempionide nimed spordis.

Kurvaks vaatepildiks on inimese elu, milles lühike õitseaeg asendub ilmetute, ühetaoliste päevade lõputu reaga. Kui matemaatik tahab vältida seda saatust, kui ta tahab, et tema karjäär teadlasena ei kujuneks aeglaseks allakäiguks, siis peab ta kasutama oma loominguliste jõudude õitseaega sellise tundmatu teadusala või selliste uute ülesannete otsinguteks, mis, omades küllaldast sisu ja reaalset väärtust, kindlustavad temale kogu elu jooksul töötamise valitud suunas.

* *
*

Muide, ma olen veendunud, et kui on olemas üks mingi omadus, mis eristab tõeliselt andekat matemaatikut tema vähem andekatest kolleegidest, siis seisneb see oskuses opereerida ajutiste, vaid temale mõistetavate sümbolitega, mis võimaldavad väljendada tekkivaid ideid mingis tingkeeles, mida läheb vaja vaid teataval ajavahemikul. Kui matemaatikul pole niisugust oskust, ei saavuta ta kunagi midagi, sest on absoluutselt võimatu säilitada mõtet formuleerimata kujul.

* *
*

Ma püüdsin elada vastavalt oma veendumustele, et parimaks ja võib-olla ka ainsaks viisiks hästi ette valmistada teadusega tegelevaid üliõpilasi on — teha midagi nendega koos.

*
*

Teadlane peab olema kursis sellega, mis toimub ümberringi, muidu tema töö ei anna tõelisi tulemusi. Ta peab elama maailmas, kus teadusega tegelemine annab võimaluse eksisteerimiseks, kus on seltsimehed, kellega vesteldes saab oma võimeid tiivustada.

On täiesti tõenäoline, et 95% originaalsetest teaduslikest töödest kuulub vähemale kui 5% kutselistest teadlastest, kuid suuremat osa neist poleks üldse kirjutatud, kui ülejäänud 95% ei oleks kaasa aidanud teaduse üldise küllaltki kõrge taseme loomisele. Annavad ju isegi teadlased-iseõppijad andami omakasupüüdmatu põlemise atmosfäärile, mille on loonud meie ülikoolid, sest see ongi konkreetne miljöö, milles toimub nende töö.

---

[1] Autobiograafiast: Винер, Н., Я — математик. М., 1964, 256 lk.

GENEREERIVAD FUNKTSIOONID JA KOMBINATOORIKA

L. Võhandu

Kas te olete kunagi proovinud lahendada keerukamaid kombinatoorikaülesandeid? Näiteks sellist:

Kosmoselaeva meeskonna moodustamisel tuleb kandidaatide hulgast valida viis kosmonauti. Et laeval on täita küllalt keerulised ülesanded, siis peab mõnede erialade esindajaid meeskonnas olema garanteeritud arv: nõutakse, et kosmonautide hulgas oleks paarisarv arste (vähemalt 2) ja paaritu arv geolooge. Ülejäänud erialade kohta mingeid kitsendusi ei ole seatud. Mitu erinevatüübilist meeskonda saab olemasolevatest kosmonautidest koostada, kui on teada, et nende hulgas leidub kuue erineva põhielukutsega inimesi?

Ega vist ole?! Selliseid kombinatoorikaülesandeid on üsna ebamugav lahendada ja isegi pärast arvatava vastuse kättesaamist ei ole selle autor oma tulemuse õigsuses tavaliselt eriti kindel: äkki jäi mõni võimalik variant vahele. Järgnevas annamegi selliste ülesannete lahendamise meetodi, mis garanteerib tulemuste saamise suhteliselt väikese vaevaga.

«Matemaatika ja kaasaja» üheksandas vihikus [1] oli juttu sellest, kuidas genereerivaid funktsioone kasutada mitmesuguste lõplike või lõpmatute summade arvutamisel. Enamikus valemites oli sealjuures tegemist kombinatsioonide arve sisaldavate avaldistega. See viib mõttele, kas poleks otstarbekohane kasutada genereerivaid funktsioone kombinatoorikas. Tõepoolest, need funktsioonid osutuvadki üsna efektiivseks vahendiks kombinatoorikaprobleemide lahendamisel.

Kombinatsioonide arvu leidmine

Vaatleme kombinatsioonide moodustamist kolmest objektist a, b ja c. Need kõik võib esitada järgmise tabelina:

$$\begin{array}{lll} a & ab & abc \\ b & ac & \\ c & bc & \end{array} \tag{1}$$

Selle tabeli esimeses veerus on kolmest objektist ühekaupa võt-

[1] K a a s i k, Ü., Genereerivad funktsioonid ja summade arvutamine. — Matemaatika ja kaasaeg, IX, lk. 25—39.

misel saadavad võimalused (kas a või b või c), teises veerus kahekaupa võtmisel saadavad võimalused (kas ab või ac või bc), kolmandas veerus aga ainus kolmekaupa võtmisel tekkiv kombinatsioon (abc).

Ülevaate saamine kõikidest võimalikest kombinatsioonidest niisuguse tabeli kujul on küll konkreetne ja tundub loomulikuna, kuid seda on raske jätkata objektide vähegi suurema arvu ja keerulisemate valikutingimuste korral. Mõni kombinatsioon võib vahele jääda, lisatingimuste korral võib aga juhtuda ka mingi muu äpardus.

Kombinatsioonide väljakirjutamise automatiseerimiseks võtame tabelisse (1) juurde veel ühe valikuvõimaluse — kui ühtegi objekti ei valita — ja tähistame seda olukorda lihtsalt arvuga 1 (niisuguse tähistamisviisi kasulikkus selgub kohe). Lugedes sümboleid a, b, c arvudeks kirjutame välja polünoomi $g(x)$:

$$g(x) = 1 + (a + b + c)x + (ab + ac + bc)x^2 + abc\,x^3. \qquad (2)$$

Nagu lihtne võrdlus näitab, sisaldab see polünoom täpselt sama palju informatsiooni kui tabel (1). Erinevus on vaid selles, et meid huvitav informatsioon on nüüd kirja pandud teisiti süstematiseeritud viisil ja moodustab tavalise matemaatilise objekti — kolmanda astme polünoomi. Et sellisel üleminekul polünoomkujule on sügavam sisu, avaldub kõige paremini, kui me kirjutame selle polünoomi ümber järgmisel kujul

$$g(x) = (1 + ax)(1 + bx)(1 + cx). \qquad (3)$$

Otsene kontroll näitab, et esitusviisid (2) ja (3) on tõepoolest identsed. Korrutisena antud esitus (3) osutab aga kätte tee, kuidas kombinatsioone välja kirjutada ka objektide suurema arvu korral. Nimelt näeme, et iga valitava objekti (näiteks a) jaoks leidub polünoomis $g(x)$ tegur, milles on kaks liiget — 1 (kui objekti a ei valita) ja ax (kui objekt a valitakse). Kui meil on üldjuhul tegemist n objektiga $c_1, c_2, \ldots, c_n$, siis vastav polünoom omandab kuju

$$g(x) = (1 + c_1x)(1 + c_2x)\ldots(1 + c_nx). \qquad (4)$$

Selle polünoomi tegureid läbi korrutades ja sarnaseid liikmeid koondades saame

$$g(x) = 1 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_kx^k + \ldots + a_nx^n,$$

kus kordajad a_i on teatavad avaldised suurustest $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

Niisugusel viisil esitatud polünoom $g(x)$ on jada a_i genereeriv funktsioon. Selles polünoomis x^k-ees olev kordaja a_k annab meile parajasti n objektist k-kaupa tehtud valikute täieliku kirjelduse. Kui meid ei huvita otseselt kõik kombinatsioonid ise, vaid ainult nende arv, siis tarvitseb võtta $c_i = 1$ ($i = 1$,

$2, \ldots, n$) ning genereeriv funktsioon (4) omandab kuju

$$g(x)=(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k. \qquad (5)$$

Selles avaldises x^k ees olev kordaja $\binom{n}{k}$ näitabki, mitmel erineval viisil saab n objekti hulgast valida k objekti, kusjuures ainult objektide ümberjärjestuse poolest erinevaid valikuid ei peeta erinevateks.

Näide 1. Võttes võrduses (5) $x=1$, saame tuttava võrduse

$$2^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k},$$

s. t. n objektist on kokku üldse võimalik moodustada 2^n erinevat kombinatsiooni.

Pöördume nüüd uuesti n erineva objekti hulgast teostatavate valikutega seotud genereeriva funktsiooni (4) juurde. Selles avaldises on iga olemasolev objekt esindatud kaksliikme (binoomi) abil. Iga binoom $(1+c_ix)$ näitab, et vastaval objektil on igas kombinatsioonis kaks võimalust: see objekt kas puudub (liige 1) või on olemas (liige c_ix objekti c_i puhul). Kui objekt c_i peab kombinatsioonis igal juhul esinema, siis jätame ära tema puudumist võimaldava liikme 1 ja säilitame vaid liikme c_ix.

Näiteks kolmest objektist a, b ja c niisuguseid valikuid tehes, et üks objekt (a) alati valitakse, saame vastava genereeriva funktsiooni

$$ax(1+bx)(1+cx)=ax+(ab+ac)x^2+abcx^3.$$

Kui meid huvitab ainult erinevate valikuvõimaluste arv, siis võttes $a=b=c=1$, saame nn. l o e n d a v a g e n e r e e r i v a f u n k t s i o o n i

$$x(1+x)(1+x)=x+2x^2+x^3,$$

mille kordajad loendavad erinevaid valikuid (x^i kordaja näitab, mitmel viisil saab valida i-ndat objekti).

Sama mõttekäiku edasi arendades jõuame järelduseni, et genereerivas funktsioonis esinev tegur

$$1+x+x^2$$

kirjeldab olukorda, kus vastavat objekti võib mitte võtta, võib võtta ühe korra ja võib võtta ka kaks korda (selleks paneme objekti pärast esimest valimist tagasi või eeldame, et algkogumis on seda tüüpi objekte rohkem kui üks). Näiteks genereeriv funktsioon

$$(1+x+x^2)(1+x)(1+x)=1+3x+4x^2+3x^3+x^4$$

võimaldab loendada viise, kuidas kolme tüüpi objektidest saab valida k objekti, kusjuures ühte tüüpi objekti võib valida ka kaks korda.

Nagu näeme, on analoogilisi polünoome mitmesuguste valikuprobleemide lahendamiseks üsna kerge välja kirjutada. Üldiselt n tüüpi objektidest k objekti valimisel mitmesuguste kitsenduste korral on loendavaks genereerivaks funktsiooniks

$$g(x) = \prod_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_{ij} x^i\right),$$

kus

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{kui } j\text{-ndat objekti võib valida } i \text{ korda,} \\ 0, & \text{kui } j\text{-ndat objekti ei või valida } i \text{ korda.} \end{cases}$$

Näide 2. Nõutakse leida, mitmel viisil saab kuut tüüpi objektide hulgast välja valida k objekti nii, et üht tüüpi objekti oleks valitud paaritu arv korda, kolme tüüpi objekte paarisarv korda ja ülejäänud kaht tüüpi objekte mistahes arv korda. Vastava genereeriva funktsiooni võib kirjutada kujul

$$g(x) = (x + x^3 + x^5 + \ldots)(1 + x^2 + x^4 + \ldots)^3(1 + x + x^2 + \ldots)^2 =$$

$$= \frac{x}{1 - x^2} \cdot \frac{1}{(1 - x^2)^3} \cdot \frac{1}{(1 - x)^2} = \frac{x}{(1 - x)^6(1 + x^4)}.$$

Arendades viimase avaldise suuruse x astmete järgi ritta, saamegi x^k kordajana meid huvitava kombinatsioonide arvu. Iga konkreetse k korral on selle kordaja leidmine puhas tehniline töö (kuigi võib võtta üsna palju aega).

Muide, arvutuste lihtsustamiseks võib kasutada tegurpolünoomide lühendatud korrutamist. Näiteks eespool esines genereeriv funktsioon

$$(1 + x + x^2)(1 + x)(1 + x) = (1 + x + x^2)(1 + 2x + x^2).$$

Kirjutades ruutliikmete kordajad kõrvuti välja (111 ja 121) korrutame need läbi kui tavalised arvud: $111 \cdot 121 = 13431$. Võrreldes seda tulemust genereeriva funktsiooni arendusega $1 + 3x + 4x^2 + 3x^3 + x^4$ näeme, et korrutise üksikutel kohtadel olevad numbrid on parajasti arenduspolünoomi vastavate astmete kordajateks.

Siin tekib muidugi loomulik küsimus: mida teha siis, kui osakorrutised on nii suured, et läheb vaja kümneliste ülekannet? Lahendus on lihtne. Kirjutame tegurite kordajad välja nii, et paneme üksikute kordajate vahele nullid. Näiteks $(5 + 3x + 4x^2)(4 + 5x + 6x^2)$ leidmiseks arvutame korrutise

$$5\,03\,04 \cdot 4\,05\,06 = 20\,37\,61\,38\,24.$$

Siit

$$(5 + 3x^2 + 4x^2)(4 + 5x + 6x^2) = 20 + 37x + 61x^2 + 38x^3 + 24x^4.$$

Vajalikud modifikatsioonid, mida praktikas küll üsna harva tarvis läheb, jäävad lugeja enda leida.

Mõnikord tuleb kitsendavate tingimuste rahuldamiseks valitavaid objekte sobival viisil ümber defineerida. Olgu meil näiteks tegemist kolme tüüpi objektidega — a, b ja c, kusjuures nõutakse, et objekte a ja b esineks valikutes sama arv kordi. Selle garanteerimiseks defineerime uue objekti ab, millega genereeriva funktsiooni vastav tegur omandab kuju

$$(1 + abx^2 + a^2b^2x^4 + \ldots).$$

Kui veel lisaks nõuda, et objekt c peab valikus esinema näiteks paaritu arv korda, siis näeb genereeriv funktsioon välja nii:

$$(1 + abx^2 + a^2b^2x^4 + \ldots)(cx + c^3x^3 + \ldots).$$

Võttes $a = b = c = 1$, saame kombinatsioone loendava polünoomi

$$(1 + x^2 + x^4 + \ldots)(x + x^3 + \ldots).$$

Toome veel mõne näite mõeldavatest kitsenduste tüüpidest.

Nõuame, et üht objekti a tuleb valida igasse kombinatsiooni vähemalt sama palju kui teist objekti b. Vastav genereeriv funktsioon on siis

$$g(x) = (1 + abx^2 + a^2b^2x^4 + \ldots)(1 + ax + a^2x^2 + \ldots),$$

ehk kombinatsioone loendavas vormis

$$(1 + x^2 + x^4 + \ldots)(1 + x + x^2 + \ldots).$$

Kui üht objekti tuleb valida alati rangelt rohkem kui teist, siis saame polünoomi

$$g(x) = (1 + abx^2 + a^2b^2x^4 + \ldots)(ax + a^2x^2 + \ldots).$$

Kui üht objekti tuleb valida alati kindla arvu s võrra rohkem kui teist, siis

$$g(x) = a^sx^s(1 + abx^2 + a^2b^2x^4 + \ldots).$$

Neid vahekordi võib üldistada ka enamale kui kaht tüüpi objektidele. Näiteks kui nõuda, et a esineks sagedamini kui b ja see omakorda sagedamini kui c, siis

$$g(x) = a^2bx^3(1 + ax + a^2x^2 + \ldots)(1 + abx^2 + a^2b^2x^4 + \ldots)(1 + abcx^3 + a^2b^2c^2x^6 + \ldots).$$

Tõenäosuste arvutamisest

Tõenäosusteooria praktiliste ülesannete lahendamisel on sageli tegemist olukorraga, kus üht ja sama katset korratakse mitu korda. Iga katse tulemusena võib mingi sündmus A toimuda tõenäosusega p või mitte toimuda tõenäosusega $q = 1 - p$. Kui suur on tõenäosus selleks, et sündmus A toimuks n katse korral parajasti m korda? Lugeja tunneb siin kindlasti ära probleemiseade, millest oli juttu juba «Matemaatika ja kaasaja» üheksandas vihikus (lk. 82—83). Seal näidati, et vastav tõenäosus $P_{m,n}$ avaldub kujul

$$P_{m,n} = \binom{n}{m} p^m q^{n-m},$$

kus $q = 1 - p$. Iga lugeja võib ilma raskusteta veenduda, et tõenäosused $P_{m,n}$ on leitavad binoomi

$$(q + px)^n$$

arendisest liikme x^m kordajana.

Näide 4. Mõnevõrra «rakendusliku» probleemina küsime, kui suur on tõenäosus selleks, et neljalapselises perekonnas oleks parajasti 2 poissi ja 2 tüdrukut. Eeldame, et poisi ja tüdruku sünni tõenäosused on võrdsed ($p=q=0{,}5$). Enne arvutama asumist püüame anda sellele küsimusele intuitiivset vastust, nagu esimesel hetkel pähe tuleb. Enamusele inimestest vist tundub, nagu oleks vastus 50%. Kontrollime nüüd seda tulemust sel teel, et leiame kahe poisi sündimise tõenäosuse nelja lapse korral:

$$P_{2,4}=\binom{4}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}=37{,}5\%.$$

Sama vastuse saame seega ka bridžimängus sageli esinevale küsimusele: vastaste käes on neli trumpi; kui tõenäoliselt need jagunevad 2 — 2?

Näide 5. Vaatleme veel ühte analoogilist ülesannet. Olgu märklauda tulistamisel tabamise tõenäosus 0,7. Milline on tõenäosus, et n lasu korral tabatakse 0, 1, 2, ... korda? Kasutades näiteks $n=5$ korral eespool välja kirjutatud binoomkuju

$$(0{,}3+0{,}7x)^5=0{,}0024+0{,}0284x+0{,}1323x^2+0{,}3087x^3+$$
$$+0{,}3601x^4+0{,}1681x^5,$$

leiame vastavad tõenäosused polünoomi kordajatena.

Näide 6. Oletame nüüd, et tegemist on mõnevõrra keerukama situatsiooniga. Esimese lasu korral on tabamise tõenäosus 0,7; teise lasu puhul 0,8; kolmanda puhul 0,9; neljanda ja viienda lasu ajaks tekkinud väsimuse tõttu aga vastavalt 0,5 ja 0,4. Kui nüüd küsida, mitu tabamust on kõige tõenäolisem, siis päris lihtsalt saame vastuse genereeriva funktsiooni abil:

$$(0{,}3+0{,}7x)(0{,}2+0{,}8x)(0{,}1+0{,}9x)(0{,}5+0{,}5x)(0{,}6+0{,}4x)=$$
$$=0{,}0018+0{,}0306x+0{,}1666x^2+0{,}3686x^3+0{,}3316x^4+0{,}1008x^5.$$

Arendusest võib kohe näha, et kõige tõenäolisem tabamuste arv on 3, aga ka nelja tabamuse tõenäosus osutub peaaegu sama suureks. Üpris vähe tõenäoline on aga märklaua tabamine kõigi 5 lasuga.

Lõpuks veel paar lihtsat **harjutusülesannet:**

1. Lahendage artikli alguses toodud kosmonautide valimise probleem.
2. Eksamineeritaval tuleb vastata kontrollimasinas «Lastotška» olevale kümnele küsimusele. Seejuures võib küsitav valida kolme võimaliku vastuse vahel, millest üks on õige. Oletades, et küsitav valib vastuse täiesti juhuslikult, leidke tõenäolisem õigete vastuste arv.
3. Kaks korvpallurit viskavad vabaviskeid. Korvi tabamise tõenäosus on vastavalt 0,6 ja 0,7. Leida viie viske korral tõenäosus selleks, et mõlemal mängijal oleks ühe palju tabamusi.

MATEMATISEERIMINE[1]

Nagu üldiselt teada, osutub enamus teaduslikke tõdesid, kui neist aru on saadud, suhteliselt üsna lihtsateks. Sellepärast peab endast lugu pidav teadlane juba enesekaitse eesmärgil püüdma takistada oma kolleegidel aru saamast, et ka tema ideed on tegelikult päris lihtsad. Kui te oskate anda oma kirjutistele küllalt arusaamatu ning ebahuvitava vormi, siis keegi ei püüagi neid lugeda, kuid kõik tunnevad siirast aukartust teie eruditsiooni ees.

Oma artiklite arusaamatus keeles kirjutamise üldtuntud mooduste hulgas on tänapäeval kõige hinnatavamaks kujunenud kunst kasutada matemaatilisi

---

[1] В а н с е р г Н., Математизация. «Наука и жизнь», 1966, № 1, lk. 87—88. Tõlkinud L. Tuulmets.

sümboleid kõikjal, kus see vähegi võimalikuks osutub. Sel kunstil on vaid üks puudus: võib leiduda nurjatu kavalpea, kes pole selliste primitiivsete nõksude kasutamises teist sugugi vähem vilunud, kes harutab lahti segiaetud argumentatsioonid ning avastab osavalt peidetud triviaalsuse. Õnneks siiski on olemas terve rida vahendeid, mis võimaldavad niisuguseid alatuid katseid juba eos maha suruda.

Kõige antiiksemaks viisiks on kirjutada valemitesse mitte need tähed mis vaja, näiteks ψ asemel φ. Isegi sümboli *exp* lihtne paigutamine sulgudest paremale võib vahel imesid teha. Sellise teadliku sulitembuga kaasneb vaid harva karistus, sest alati saab süü laduja kaela ajada. Tegelikult autoril endal ei olegi reeglina tarvis selliste püüniste leiutamisel vaeva näha, sest ladujad tunnevad autorite vajadusi hästi ning ilmutavad selles suhtes ise initsiatiivi ja head tahet. Teil tarvitseb ainult nende peale lootma jääda ning korrektuure mitte lugeda.

Kui valemid asjaolude juhusliku kokkusattumise tõttu kogemata pääsesid tundmatuseni moonutamisest, siis võib lugeja neist isegi aru saada, eeldades muidugi, et ta teab, mida iga sümbol tähendab. Siin kulgebki teie kaitse eesliin: tehke nii, et ta seda iialgi teada ei saaks. Nii näiteks võite te 35. lehekülje allviites teatada, et V_1 on esimese faasi ruumala ning alles 873. leheküljel viia see suurus rahulikult võrrandisse sisse. Teie südametunnistus jääb absoluutselt puhtaks: kunagi te ju ütlesite, mida antud sümbol tähendab. Võttes niiviisi salaja kasutusele kõik ladina, kreeka ja gooti tähed, võite te mingi paragrahvi vastu huvi tundvat uudishimulikku lugejat sundida kogu raamatu vastupidises järjekorras läbi lugema (eriti tugeva mulje tekitavadki raamatud, mis on tagant ettepoole sama hästi loetavad kui eest tahapoole).

Kui tagurpidi lugemine muutub lugejale juba harjumuseks ja ta hakkab just sellist viisi normaalseks pidama, siis segage jälgi. Paigutage näiteks μ võrrandisse juba 66. leheküljel, tema defineerimisega oodake aga kuni 86. leheküljeni.

Lõpuks saabub moment, kus lugeja arvab, et ta teab juba kõiki tähti. Nüüd on viimane aeg teda veidi pidurdada. Näiteks iga koolipoiss teab, mis asi on π, aga see teadmine võimaldab teil end vastasest uuesti lahti rebida. Lugeja vaeseke korrutab tükk aega kõike automaatselt arvuga 3,14, enne kui ta lõpuks aru saab, et π on hoopis osmootne rõhk. Kui te olete ettevaatlik ning asja enneaegselt välja ei lobise, siis läheb see lugejale oma poolteist tundi maksma. Sama printsiipi võib muidugi kasutada ka mistahes teise tuntud tähe puhul. Nii võite te näiteks 141. leheküljel täiesti ausalt kirjutada, et F on vaba energia; kui kõigesse tungida püüdev lugeja jõuab juba harjuda sellega, et F on vaba energia Helmholtzi mõttes, siis kulutab ta teie võrrandite dešifreerimiseks tohutul hulgal oma vaba energiat, kuni ta ükskord aru saab, et teie pidasite kogu aeg silmas Gibbsi vaba energiat, mis lugeja arvates pidi olema G. Muide, F on üldse suurepärane täht, sellega võib tähistada mitte ainult mistahes vaba energiat, vaid ka fluori, tungi, faradit, samuti funktsiooni suvalisest arvust reaal- ja kompleksmuutujatest.

Viidete tähistamiseks kasutatavaid tärnikesi ja numbrilisi indekseid saab samuti «sõjakavalustena» rakendada. Tähistage näiteks mingisugune rõhk sümboliga P^*, et lihtsameelne lugeja hakkaks lehekülje alt otsima viidet, mida seal loomulikult ei ole. Aga kui tõeotsija loeb, et S väärtuseks on 10^{14} kalorit, siis ta mõtleb: «Tohoo, milline päratu hulk kaloreid!» ja mõtleb niiviisi seni, kuni loeb lehekülje lõpuni ning põrkub seal vastu viidet number 14.

Kuid suurimat edu saavutatakse ikkagi järgmise lihtsa võttega: valmis käsikirjast rebitakse välja mõne tõestuskäigu kaks lehekülge ja nende asemele pannakse sõna «järelikult» koos kooloniga. Niisugune operatsioon paneb lugeja tubliks kaheks päevaks mõistatama, kust küll on võetud see järeldus. Veel parem on kirjutada «järelikult» asemel «ilmselt», sest ei leidu lugejat, kel jätkuks julgust paluda endale selgitada mingit ilmset asja. Sellega te mitte ainult lööte lugeja tummaks, vaid arendate temas veel alaväärsuskompleksi; aga see ongi üks teie peamistest eesmärkidest.

IMITEERIMINE UURIMISMEETODINA

A. Oja

Küberneetilise uurimismeetodi üheks iseloomustavaks jooneks on mudelite kasutamine komplitseeritud dünaamiliste süsteemide uurimisel. Mudel on nagu vaheastmeks uuritava süsteemi (objekti) ja uurija vahel. Uurimistöö teatud etapil uuritakse mudelit, mitte objekti, selletõttu võib mudelit nimetada kvaasiobjektiks.

Seoses elektronarvutite kasutamisega dünaamiliste süsteemide uurimisel on üsna tuntuks saanud loogilis-matemaatilised mudelid, mis kujutavad enesest võrrandite, võrratuste ja loogiliste tingimuste kogumit. Selline võrratuste-võrrandite süsteem peab olema koostatud nii, et ta teatud lähenduses peegeldaks kõiki olulisi seoseid, mis esinevad reaalset uurimisobjekti iseloomustavate üksikute näitajate vahel. Kui selline mudel on koostatud, siis taandatakse reaalse objekti uurimine näiteks vastava võrrandite-võrratuste süsteemi lahendamisele elektronarvuti abil.

Tihti on aga tarvis uurida ka niivõrd komplitseeritud reaalseid dünaamilisi objekte, et nende jaoks ei ole võimalik koostada mudelit võrrandite-võrratuste süsteemi kujul. See juhtub näiteks siis, kui objekt-süsteemi elemendid kas pole omavahel pidevalt (ajas) mingil viisil seotud või nendevahelisi seoseid pole võimalik küllalt lihtsal viisil väljendada. Elementidevaheliste seoste ebastabiilsus on enamasti tingitud sellest, et süsteemisisesed mikroprotsessid alluvad paljudele täiesti juhuslikele mõjudele. Toomegi paar näidet niisuguste nn. stohhastiliste süsteemide kohta (näited on võetud TRÜ arvutuskeskuse senise uurimistöö käigus üleskerkinud probleemide hulgast).

Olgu meil uuritavaks objektiks mingi tehas, mida võib vaadelda komplitseeritud dünaamilise süsteemina. Elementideks on sel juhul töölised, tööpingid, töödeldavad detailid jne. Huvitagu meid sellise süsteemi uurimisel näiteks toodangu valmimise rütmilisus, toormaterjalide igapäevane vajadus, vaheoperatsioonide lõpetamise niisugused tähtajad, mis kindlustaksid lõpptoodangu valmimise jne. Kui kogu töö kulgeks igasuguste häireteta ja kõik operatsioonid üksikute pinkide juures (mikroprotsessid) toimuksid vastavalt normatiivsetele aegadele, siis võiks teha katset kirjeldada tehase tööd võrrandite ja loogiliste tingimuste teatava süsteemi abil. Et aga mikroprotsessidele mõjuvad väga paljud juhuslikud asjaolud — rikked, praak, tööliste haigestumine, toormaterjali ebaühtlus jne., siis osutub kogu süsteemi dünaamika kirjeldamine näiteks mingi võrrandisüsteemi abil üsna lootusetuks.

Teise analoogilise näitena võiks nimetada kaevanduse maaalust transpordisüsteemi. Elementideks on sel juhul elektrivedurid, vagonetid, liiklusteed, laadimis- ja tühjendamispunkrid, kaevanduskambrid jne. Olgu kogu transpordisüsteemi uurimise eesmärgiks niisuguse vedude korralduse leidmine, mille puhul vajaliku hulga maagi maa peale toomiseks kulub võimalikult vähe tööjõudu ja tehnikat, s. t. mis võimaldab tühiseisakud transpordisüsteemi osas muuta minimaalseteks. On päris selge, et täpset «liiklusgraafikut» ette arvutada ei ole põhimõtteliselt võimalik, sest süsteemi iga üksiku elemendi töö sõltub väga mitmetest juhuslikku laadi asjaoludest.

Siin näitena toodud, aga ka paljude teiste küllalt suurte stohhastiliste süsteemide uurimiseks võib edukalt kasutada pseudoeksperimentaalset meetodit. Selgitame järgnevalt selle meetodi olemust.

Vahetu eksperimenteerimine suurte süsteemidega, näiteks tehasega, osutub enamasti praktiliselt võimatuks. Seetõttu tuleb leida või konstrueerida nn. kvaasiobjekt ehk mudel, mis oleks tehasega teatavas mõttes sarnane. Kui meil on aga kaks ühtmoodi või sarnaselt käituvat objekti, siis saab sageli ühe objekti uurimise tulemused üle kanda ka teisele objektile. Selline põhimõte on muide üldse modelleerimise kui teadusliku uurimismeetodi aluseks. Sarnasus objekti ja kvaasiobjekti vahel ei pruugi olla igakülgne, vaid võib piirduda ainult selle osaga, mis meid uuritava objekti juures huvitab. Suurte süsteemide uurimisel pakub meile enamasti huvi nende dünaamika; tehase puhul näiteks tööde üldine käik, tööpinkide ülekoormatused või seisakud, toodangu väljalaske rütmilisus jne. Seega peab konstrueeritav «kvaasiobjekt» tehasega just selles osas võimalikult sarnane olema.

Suurte süsteemide dünaamika modelleerimiseks on väga sobiv kasutada numbrilisi elektronarvuteid nende kiiretoimelisuse, mälu suure mahu ja automaatjuhtimise küllalt paindliku süsteemi tõttu. Elektronarvutit saab vastava programmi olemasolu korral panna tööle selliselt, et ta piisava täpsusega imiteerib uuritava objekti tööd. Näiteks võib ta täiesti analoogiliselt reaalsele tehasele «anda toodangut», tekitada «tööpinkide seisakuid» ja «detailide järjekordi» «tööpinkide» juures.

Elektronarvutite abil saab suhteliselt kergesti imiteerida stohhastilisi protsesse. Tavaliselt takistab just reaalsete protsesside stohhastiline iseloom nende n.-ö. analüütilist uurimist. Kui aga õnnestub konstrueerida reaalset uuritavat protsessi imiteeriv stohhastiline mudel, siis võib analüütilise uurimise teatud määral asendada statistilise eksperimendiga. Eksperimenteerimisel sellise elektronarvutil realiseeritud mudeli abil on kolm olulist eelist võrreldes vahetu eksperimendiga:

1) eksperimenteerimine on suhteliselt odav; 2) eksperimenteerimine ei mõjusta ega ohusta mingil määral reaalset objekti (näiteks tehast); 3) eksperimentide tegemine võtab suhteliselt vähe aega (näiteks mudeli «töö» ühe ööpäeva kestel võib olla vastavuses 10-aastase perioodiga reaalse objekti juures).

Kõigist neist eelistest hoolimata on imiteerimise meetod keeruliste süsteemide uurimisel siiski viimaseks abinõuks. Seda kasutatakse juhul, kui objekti uurimist ei õnnestu taandada analüütilise (võrrandite-võrratuste süsteemi kujul esitatava) mudeli uurimisele. Mingi protsessi imiteerimine ja statistilise eksperimendi tegemine elektronarvutil on tavaliselt kallim võrreldes samaväärse analüütilise mudeli lahendamisega.

Imiteeriva mudeli koostamisel ja kasutamisel võib eristada järgmisi etappe.

1. Reaalsele süsteemile (protsessile) vastavate loogiliste blokk-skeemide koostamine.
2. Mudeli konstrueerimiseks vajaliku informatsiooni hankimine ja selle teisendamine sobivasse vormi.
3. Blokk-skeemide järgi programmi koostamine elektronarvuti jaoks.
4. Mudeli töö (funktsioneerimise) järkjärguline katsetamine osade kaupa.
5. Tervikliku mudeli korduv katsetamine ja täienduste tegemine kuni vajaliku täpsuse saavutamiseni.
6. Katsete plaani koostamine.
7. Katsetamine.
8. Tulemuste interpreteerimine.

Blokk-skeemide koostamisel kaldutakse sageli liigselt arvesse võtma reaalse protsessi pisidetaile. Need detailid aga ei mõjusta tavaliselt kuigi oluliselt stohhastilise protsessi iseloomu. Muidugi ei saa anda mingeid üldisi reegleid selle kohta, millised protsessi komponentidest on olulised ja millised mitte. Detailide arvestamise ulatus sõltub nii modelleeritavast protsessist, modelleerimise eesmärgist, mudeli koostaja kogemustest kui ka protsessi iseärasuste tundmisest.

Väga oluliseks etapiks on vajaliku informatsiooni hankimine uuritava süsteemi üksikute sõlmede kohta, sest süsteemi töö tervikuna sõltub oluliselt üksikute sõlmede töö üldisest iseloomust. Näiteks tehase mudeli koostamisel on oluline teada, millise seaduspärasuse järgi toimub detailpartiide töötlemine ühel või teisel tööpingil. Kui anda ühele pingile töötlemiseks järjest mitu näiliselt ühesugust detailide partiid, siis partiide töötlemise ajad (nn. teenindamisajad) pole kõikide partiide puhul tavaliselt ühesugused. Modelleerimiseks on vaja teada reaalseid teenindamisaegade keskväärtusi ja vastavaid jaotusi enamiku tüüpiliste detailide ja pinkide korral. Sellise informatsiooni hankimiseks ei piisa tavaliselt normatiivsetest tabelitest, vaid tuleb vastavaid parameetreid mõõta reaalse tööprotsessi käigus.

Katsetamise plaan tuleb koostada siis, kui mudelit kavatsetakse kasutada statistiliste andmete kogumiseks samalaadiliste süsteemide kohta. Vahel on aga vaja ainult kindlaks teha, kas uuritav süsteem on küllalt stabiilne, või leida sellised parameetrid, mille puhul süsteem muutub stabiilseks. Siis tuleb lihtsalt mudelil lasta töötada ja jälgida, kuidas ta reageerib mitmesugustele mõjudele (mudeli parameetrite muutmistele).

Tihtipeale on tarvis leida uuritava süsteemi kõige ratsionaalsem «juhtimispoliitika». Näiteks tehase puhul on vaja leida selline toormaterjalide töötlemisse andmise seaduspärasus (kui suurte kogustena korraga ja kui sageli), et toodangu üldmaht oleks vajalikul tasemel ja selle väljastamine oleks võimalikult rütmiline. Sellisel juhul tuleb neid mudeli parameetreid, mis vastavad nn. sisendvoole, varieerida ja leida neile niisugused väärtused, mis kindlustavad rütmilise väljundvoo.

Stohhastiliste mudelite konstrueerimisel on võimalik kasutada kaht erinevat lähenemisviisi. Esimene neist seisneb selles, et süsteemi uurimiseks konstrueeritakse puhtstohhastiline mudel ja reaalse objekti asemel uuritakse ainult seda mudelit. Teiselt poolt võib aga püüda mudelit lihtsustada, kasutades reaalse protsessi uurimisel (kus vähegi võimalik) arvutamist. Niisuguse lihtsustamise võimalikkus tuleneb asjaolust, et reaalse süsteemi põhjalikul tundmaõppimisel võib tavaliselt leida üksikute näitajate vahelisi sõltuvusi, mis on matemaatiliselt üsna lihtsalt avaldatavad. Neid sõltuvusi saab aga enamasti arvestada ka mudeli koostamisel. Selline stohhastilis-matemaatiline mudel on puhtstohhastilise mudeliga võrreldes tavaliselt palju efektiivsem nii elektronarvuti aja ökonoomsema kasutamise kui ka eksperimenteerimisel saadavate resultaatide tõepärasuse poolest.

Senini pole imiteerimise meetodi kohta veel tehtud põhjalikumaid üldistusi. Ilmselt sõltub meetodi konkreetse rakendamise viis suurel määral uuritavast objektist. On aga selge, et imiteerimismeetodi osatähtsus kahtlemata tõuseb suurte komplitseeritud süsteemide uurimisel, kus analüütilist laadi meetodid pole rakendatavad.

UUT MASINTÕLKE AJALOOS

I. Kull, R. Palm

Nagu üldiselt teada, toimus esimene avalik masintõlke demonstratsioon 7. jaanuaril 1954. a. New Yorgis. Tõlgiti universaalsel elektronarvutil IBM-701 vene keelest inglise keelde, kusjuures tõlkimiseks valiti suhteliselt lihtsad teaduslik-tehnilise sisuga laused.

Mis puutub esimesesse seni teadaolevasse spetsialiseeritud «tõlkimismasina» projekti, siis pärineb see aga tunduvalt varajasemast ajast. Nimelt anti 5. septembril 1933. a. nõukogude teadlasele P. P. Trojanskile (1894—1950) autoritunnistus seadmele «sõnade valimiseks ja trükkimiseks tõlkimisel ühest keelest teise või samaaegselt mitmesse keelde». Trojanski masina eesmärgiks oli tõlkija vabastamine lähtekeele (tõlgitava teksti esialgse keele) sõnavara tundmise vajadusest. Kahjuks jäi nimetatud «tõlkimismasin» tol ajal aga konstrueerimata.

Käesoleva kirjutise autoreil on õnnestunud leida mõningaid materjale, mis täiendavate andmete saamisel võimaldaksid ülaltoodud daatumeid tuua veelgi varajasemale ajale. Mõnevõrra ootamatuna tundub vahest see asjaolu, et need katsetused on tehtud Eestis.

Nimetatud sündmusest kõneleb artikkel ajalehes «Vaba Maa» 24. veebruarist 1924. a. Toome selle artikli täielikult: [1]

Kirjutusmasin-tõlk.

Hiljuti ilmus ühes kohalikus lehes teade, et Londonis üles leitud masin, millega võõra keele tundmata tõlkeid igasugusest keelest võib teha. Ehk küll meie aeg iga päev uusi üllatusi pakub, siiski leidis see teade vist vähe uskujaid. Kuid üllatus oli aga veel suurem, kui neil päevil meile hr. A. Vaher oma tõelist kirjutusmasin-tõlgi mudelit demonstreeris. Ühtlasi tõendas ta ka, et Londonis sarnast masinat üles leitud pole, milleks ka tal vastav tõenduskiri Londoni saatkonnalt oli ette näidata.

---

[1] Esitatavate artiklite kirjaviis ja interpunktsioon on jäänud igal pool muutmata.

Hr. Vaher olla ligi 10 aastat oma ülesleiduse kallal töötanud ja nüüd enam-vähem oma tööga nii kaugele jõudnud, et poolteise kuu pärast proovi masin-tõlgiga esineda võib. Mudeliga võis ta see kord ainult masinatõlkimise põhimõtet demonstreerida, mis ka õnnestas. Ülesleidja arvab, et tal ka, nagu selle aparaadi, tegelikus elus tarvitamiseks valmistamine korda läheb.

Meil on raske otsustada, kuivõrd see uus ülesleidus teostatav, arvame aga, kui tõesti sarnane masin-tõlk kord tõeasjaks saab, siis «Päevalehe» vilumata jõud, kes Läti keelega meeleheitliselt maadleb, päike kord paistma hakkab.

I. Kull vestlemas J. Vahtraga (paremal) 1962. a. maikuul

1960. a. sai R. Palm andmeid, et tõlkimismasina konstruktor Johannes Aleksander August Vaher elab Räpina rajoonis, ja alustas J. Vahtraga kirjavahetust. 1962. a. maikuus, kui J. Vaher viibis Tartus ravil, oli käesoleva kirjutise autoreil võimalik temaga üksikasjalikumalt vestelda. Kuid kõrge vanuse ja tervisliku seisundi tõttu polnud J. Vaher kahjuks enam suuteline selgitama vajaliku täpsusega oma tõlkimismasinate tehnilisi üksikasju.

Vahest pole liigne tuua siinkohal ka mõningaid biograafilisi andmeid J. Vahtra kohta. Johannes Aleksander August Vaher sündis 14. juulil 1887. a. Virumaal Kohtla vallas. Mõne aja pärast siirdus perekond elama Peterburisse, kus isa töötas kooliõpetajana.[2] Käesoleva sajandi alul õppis J. Vaher Stieglitzi kunstikoolis (koos Konrad Mäe ja Jaan Koortiga). 1920. a. paiku asus ta elama Tallinnasse, kus tegutses fotograafina. Ta valdas eesti, vene, saksa ja prantsuse keelt. J. Vaher suri Valgas 22. juunil 1962. a.

J. Vahtra näpunäidetel leidsime veel kaks meile huvipakkuvat artiklit sellest perioodist. Esiteks leidsime sõnumi, millele viidatakse «Vaba Maa» artiklis. See ilmus ajalehes «Esmaspäev» 19. nov. 1923. a. Esitame ka selle sõnumi, sest see on kaudseks kinnituseks esimese artikli tõepärale.

Kirjutusmasin-tõlk.

Londonis äratab tähelepanu isesugune kirjutusmasin, mis kahest osast koos seisab ja nii on ehitatud, et ühel masinal kirjutamise korral, teine kirjutuse automaatlikult soovitavasse keelde tõlgib. Uut aparaati saab tarvitada ka telegraafijaamades vastuvõetavate telegrammide tõlkimiseks. Leidusele kuulutatakse suurt tulevikku.

Hoopis olulisem on aga artikkel, milles kõneldakse J. Vahtra enese konstrueeritud tõlkimismasinast. See artikkel ilmus 6. sept. 1930. a. «Uudislehes» pealkirjaga[3]

Päewapiltniku kõmulised leidused.

Masin, mis kirjutab ja tõlgib Johannes Waher Edisoni jälgedes.

Artiklile oli lisatud foto J. Vahtrast ja tema tõlkimismasinast. Esitame sellest artiklist olulisema osa, kus kõneldakse tõlkemasinast.

Teisest küljest — Johannes Vaher oli leidur ka praktilisemais asjus. Suurem teos, mis tal kavatsusel ja konstrueerimisel oli, oli kirjutusmasin, millega ühel ajal võib ka tõlkida. Säärase masina idee kallal oli mees pead murdnud ligi 10 aastat. Tagajärjeks oli see, et Vaheril oli valmistatud ajajooksul mitu mudelit tõlkimismasinast.

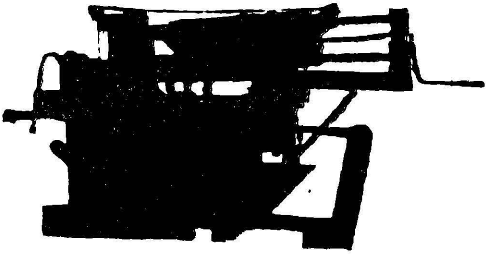
Mis puutub nimetatud masina konstruktsioonisse, siis tuletas see üldiselt meele kirjutusmasinat. Klahvid olid samuti varustatud tähtedega. Kui oli vaja tõlkida midagi, ütleme eestikeelest saksakeele või vastupidi, oli vaja vaid teksti

[2] Esitame siinkohal ühe senini mitteteadaoleva kultuuriajaloolise fakti. Üldiselt teatakse, et kujur August Weizenberg on loonud sadakond lauluviisi. Et ta ise aga viise üles kirjutada ei osanud, siis pidi seda tegema keegi teine. Kes — see polnudki tänini teada. Vestluses J. Vahtraga selgus aga, et nende viiside kirjapanijaks oli J. Vahtra isa Karl Vaher.

[3] Nimetatud artikli leidis TRÜ arvutuskeskuse töötaja J. Tapfer 1962. a. mais.

järele tippida klahvidel maha sõnad ja masin toob ülevalt esile tõlgitud teksti.

Tõlkimismasin oli ehitatud nii, et tõlgitav sõna moodustas mingi terviklise komplekti, mis pani liikuma masina sisemised osad, nii et vastaval rullil, tuli esile vastav tõlkesõna teisest keelest, mis kanti paberile.



J. Vahtra leiutatud tõlkimismasin

Leiduri enese seletuse järele on tõlkimismasin töötanud päris hästi, väljaarvatud mõned väiksemad defektid ja vead, mis mudeli juures loomulikud. Mis puutub tõlkimismasina väärtusse, siis, leiduri arvates, ei ole see ehitatud mitte selleks, et võõrast keelt kohe kukkuda tõlkima, vaid selle koht oleks olnud igapäevases ärielus. Teatud sõnade hulga ja laadi juures oleks võimalus olnud äriomanikul ärikirja ühest keelest, ilma tõlkija abita, lahtishifreerida.[4]

Mitmest keelest võis tõlkida. Kas või kogu maailma keeltest, mille tähestik sarnane ladina tähestikule. Selleks, et tõlkida näiteks kirja ungarikeele, oli vaid vaja vahetada vastav keelerull masinas ja töö võis edasi minna. Tuli prantsuskeel, oli tarvilik asendada ungarikeele rull uuega jne.

Mis puutub kirjutusmasina kasutamisele võtmisse, siis oli mehel selleks, kuna puudus kapital, et leidust teostada, raskuseid nagu kõigil leiduritel.

Kuna mees valdas saksa- ja venekeelt, oli ta ühendusse astunud mitmete väljamaa firmadega, kes oleks võinud sääraseid leidusi kasutada. Et asjatundjatel ja ärimeestel usku oli mehe võimetesse, näitab see, et ühe Ameerika firma poolt nõuti lähemaid jooniseid masina kohta. Hiljem, kui firma oleks leidnud, et masin kõlbab kasutada, oleks see ostnud leiduse kasutamise õiguse ära.

---

[4] Sõrendus käesoleva kirjutise autoritelt.

Vestlustest J. Vahtraga ja tema kirjalikest märkmetest saime veel mitmeid täiendavaid andmeid tema poolt konstrueeritud tõlkimismasinate (resp. tõlkimismasina mudelite) kohta. Selgus, et ta oli konstrueerinud vähemalt 3 tõlkimismasinat (resp. tõlkimismasina mudelit) ja mitmeid vahepealseid mudeleid. Vahepealsed mudelid jäid lõpule viimata, need demonteeriti ja nende detaile kasutati uute mudelite konstrueerimisel. J. Vahtra enese andmetel jäid tõlkimismasinad enne Suure Isamaasõja algust Tallinnasse. Sõja ja sellega kaasnenud tulekahjude tõttu pole säilinud neist ühtegi. Samuti pole säilinud masinate jooniseid ja masinate kohta käivat tehnilist dokumentatsiooni. Muide, tolleaegsed iseõppinud leidurid tulid enamasti toime ilma ulatuslikuma tehnilise dokumentatsioonita, mis võis olla nähtavasti niimoodi ka J. Vahtra puhul.

Oma tõlkimismasinate konstruktsiooni kohta kirjutas J. Vaher ise järgmist:[5] «Rakendusviisi võib realiseerida põhiliselt kolmes erinevas süsteemis, nimelt: 1) mehaanilises, 2) valgustundlikus (fotoelemendi abil), 3) elektroonika süsteemis. Kuid põhiprintsiip jääb üheks ja samaks kõikidel juhtudel. Igal sõnal on oma kindel arv ja vastavalt sellele suunavale või määravale arvule fikseeritakse soovitava keele[6] iga sõna kindlaksmääratud kohal trumlil või lindil vastava keele jaoks . . .»

Mis puutub tsiteeritud artiklisse «Uudislehes», siis selle kohta oli J. Vahtral mõningaid faktilisi märkusi. Nii näiteks polnud õige artikli väide, et tema ise oli ühendusse astunud välismaa firmadega. Õige oli aga näiteks see, et ühe ameerika firma esindaja oli huvitatud masina joonistest. Masina jooniseid J. Vaher firma esindajale aga ei näidanud.

«Uudislehes» ilmunud artikli autor polnud J. Vahtrale teada, «Vaba Maas» ilmunud artikli autoriks oli aga selle lehe toimetaja A. Veiler.

Tõlkedemonstratsioonist 1924. a. kõneles J. Vaher ise järgmiselt:[7] «Sel korral oli mul ehitatud väikene mudel, millega ma korraldasin demonstratsiooni. See oli tehtud ainult selles mõttes, et kiiremini valmis saada oma ülesandega. Asi tahtis võtta imelikku pööret. Kohalikus ajalehes teatati, et Inglismaal olevat see asi juba lahendatud. Siis ma pöörasin oma abilise kaudu Inglise saatkonna poole, et järele uurida, kas niisugune asi on Inglismaal olemas. Vastus tuli eitav. Kui vastus Inglismaalt tuli, siis ma käisin selleaegse ajalehe «Vaba Maa» toimetuses ja küsisin, et ma tahaks ajalehes «Esmaspäev» ilmunud teadet ümber lükata . . . ja me seal koos leppisime kokku, et ma korraldan väikse demonstratsiooni. Demonstratsioon oli määratud 23. veebruariks kl. 5

[5] Väljavõte J. Vahtra märkmetest TPI dots. L. Naretsile 1958. a.
[6] S. t. keel, millesse tõlgitakse.
[7] Tsiteeritud magnetofonilindi järgi. Kõnelus lindistati 1962. a. mais.

õhtul. Kell 5 õhtul sammusin mina siis oma sõbraga sinna, masin kaenla all. Sääl paistis rahvast küllalt olevat. Paljud tulid minu juurde, teretasid mind — ma ei tundnud neid. Lamp põles kirjutuslaua juures. Sääl seisis ka harilik kirjutusmasin, minu kirjutusmasina asetasime siis kõrvale. Demonstratsiooni ajal seisis minu kõrval paremat kätt minu sõber, Kopli-nimeline (ta on ammu surnud juba). Teisel pool istus minu kõrval keegi tundmata inimene. Sai küll nimetatud tema nimi, aga minul ei ole meeles. Ta vaatas minu tõlkimise töö protsessi pealt, kuidas see sündis. Oli väga imestunud. Ja siis ... vaatas masina peale, uuris tema jalgu, ja paistis, et see mees mõtles midagi imelikku minu kohta. Noh, tegelikult muidugist midagi imelikku siin ei olnud. Tema mõistus ei seedinud seda, kuidas on võimalik, et ühes keeles trükkida ja saada resultaat teises keeles. Niisiis, lõppude lõpuks pidi leppima. Tema kõrval pool-püsti seisis toimetaja Veiler. Ta tuli kirjutuslaua juurde, kirjutas paberi peale saadud kirjatõlke, võttis selle paberi ja läks temaga minema. Vähe aja pärast tuli ta tagasi ja ütles, et andis (artikli) trükki lehele, mis ilmub homme. Ja sellega lõppes see demonstratsioon. Järgmisel päeval ilmus siis teade «Vaba Maas», täpselt nii, nagu ta oli sääl tehtud.»

Mida tuleks siis öelda käesoleva kirjutise lõpetuseks? Teatavasti on igal suuremal avastusel ja leiutisel, uurimissuunal, -meetodil ja teoorial oma ajalugu ja ka eelajalugu. Nii oli see näiteks aurumasina leiutamisel, programmjuhtimisega arvutite konstrueerimisel või ka küberneetika loomisel. Nii oli see ka masintõlke ja tõlkimismasinate puhul.

Mõistagi võiksid omal ajal J. Vahtra konstrueeritud tõlkimismasinad pakkuda tänapäeval ainult ajaloolist huvi. Kahjuks pole aga säilinud ühtki tema konstrueeritud masinat. Ka pole säilinud masinate jooniseid. Praeguste andmete põhjal on väga raske öelda, kuidas need masinad just täpselt funktsioneerisid. Mida aga kindlasti on võimalik öelda, on see, et J. Vaher oli täiesti teadlikult sõnastanud masintõlkimise ülesande, oli veendunud selle lahendatavuses ja oli ise asunud selle lahendamisele. Sõrendatud lõik «Uudislehe» artiklist näitab, et ta mõistis ülesande raskust ja asus selle lahendamisele ka võrdlemisi realistlikult. Kõikide meile teadaolevate andmete hindamise ja summeerimise tulemusena arvame, et J. Vahtra katsetused tõlkimismasinate loomise ja masintõlke alal seisnesid tegelikult automatiseeritud «sõnaraamatu» (nn. sõnaraamat-masina) konstrueerimise püüetes.

Majandusmatemaatika

JUURDELÕIKUSKAARTIDE KOOSTAMINE ELEKTRONARVUTIL

Ettevõtetes tuleb alatasa lahendada mitmesuguseid ülesandeid, mis lähemal analüüsimisel osutuvad matemaatilise planeerimise valdkonda kuuluvateks. Seda arvestades saab nende lahendamist vastavate matemaatiliste meetodite ning arvutustehnika kasutamise teel sageli tunduvalt efektiivsemaks muuta. Käesolevas kirjutises vaatlemegi ühte niisugust ülesannet, mille esitas TRÜ arvutuskeskusele Tartu õmblusvabrik «Sangar».

Õmblusvabrikus valmistatakse mitmekümne erineva nimetuse ja suurusega tooteid. Nende materjaliks kasutatakse mitmesuguse kvaliteedi, pikkuse ja laiusega kangaid, kusjuures samast kangast võib üldiselt valmistada mitmeid erinevaid tooteid (näiteks eri suurustes meestesärke, samuti aga ka poistesärke jne.). Iga päev korduvalt lahendada tulevaks ülesandeks on järgmine: missuguseid tooteid peab igast antud kangast valmistama, et järelejäänud restide arvel tekkivad kaod oleksid minimaalsed?

Ülesannet lihtsustab see, et iga toote jaoks vajaminevate detailide p a i g u t u s kangale (mitmesuguste laiuste jaoks) on juba ette teada; selle paigutusega on ühtlasi määratud riide kulunorm vastava toote jaoks iga laiusega kanga puhul. Lihtsuse mõttes mahutatakse ühe toote kõik detailid võimalust mööda alati ristkülikukujulisele kangaosale. Kui see otstarbekohaseks ei osutu, siis koondatakse ühele ristkülikukujulisele paigutusele kuni nelja toote detailid. Seetõttu taandub probleem lihtsalt kangaste lõikamisele teatud etteantud pikkustega tükkideks.

Kõigi töötlemisele minevate kangaste tükeldamise plaan koostatakse eriliste nn. j u u r d e l õ i k u s k a a r t i d e kujul. Ühel juurdelõikuskaardil (see koostatakse järgmisel leheküljel toodud tabeli kujul) esitatakse terve rea kangaste jaotused paigutusteks. Ühel kaardil kasutatud erinevate paigutuste arv ei tohi sealjuures olla suurem kui neli, sest paigutuste suurema arvu korral muutub kangaste faktiline tükeldamine liialt töömahukaks.

Tegeliku juurdelõikuskaardi (vt. tabel) ülemises osas on andmed kasutatavate paigutuste sisu kohta (toote šiffer, suurus ja kasv, paigutuse pikkus), vasakul aga kangaste kohta (passi number, kanga defektideta osade pikkused). Kaardi sisu näitab iga

Tartu Õmblusvabrik «Sangar»

Juurdelõikuse kaart nr. 17 23. oktoober 1965. a.

Toode, mudel: M. päevasärk	99/1	99/1	99/1	L-54/a	Riide art. 5332
Suurused, kasvud	39II 37II	41III 41II	38II	27I	Laius 0,88
Riide kulunormid	4,36	4,78	2,20	0,79	

Kanga nr.	Pikkus	Kihte	Riide kulu	Kihte	Riide kulu	Kihte	Riide kulu	Kihte	Riide kulu	Arvutuslik jääk	Tegelik jääk
32	34,32			7	33,46			1	0,79	0,79	
	12,0			2	9,56	1	2,20			0,24	
	10,75			2	9,56			1	0,79	0,40	
	22,45	4	17,44	1	4,78					0,23	
38	16,80			3	14,34	1	2,20			0,26	
	2,77					1	2,20			0,57	
	33,0	1	4,36	6	28,68					—0,04	
18	8,40	1	4,36			1	2,20	2	1,58	0,26	
	33,92			7	33,46					0,46	
41	16,17			3	14,34			2	1,58	0,25	
	14,70			3	14,34					0,36	
	38,70			8	38,24					0,46	
7	2,49					1	2,20			0,29	
	41,16	9	39,24					2	1,58	0,34	
	17,80	4	17,44							0,36	
	0,96							1	0,79	0,17	
	19,45	4	17,44					2	1,58	0,43	
39	6,53	1	4,36			1	2,20			—0,03	
	16,30	3	13,08			1	2,20	1	0,79	0,23	
	46,32	10	43,60			1	2,20			0,52	
	3,40					1	2,20	1	0,79	0,41	

kanga jaotamist nende nelja paigutuse vahel, paremal on aga leitud tekkiva resti pikkus. Olgu märgitud, et ühe niisuguse kaardi koostamisele kulub vabrikus seni kasutatud metoodika korral 30—40 minutit, päevas tuleb aga koostada umbes 10 juurdelõikuskaarti.

Juurdelõikuskaardi koostamise ülesande matemaatilisel sõnastamisel taandub see võrrandite

$$a_1x_{1j}+a_2x_{2j}+a_3x_{3j}+a_4x_{4j}+\delta_j=A_j \quad (j=1, 2, \ldots, n) \quad (1)$$

mittenegatiivsete täisarvuliste lahendite x_{ij} leidmisele, mis tähendavad j-ndast kangast pikkusega a_i lõigatavate paigutuste arvu. Seejuures A_j on j-nda kanga pikkus, n — kangaste arv ja a_i ($i=1, 2, 3, 4$) — väljavalitud paigutuste pikkused. Mittenegatiivsed tundmatud δ_j näitavad tükeldamisel tekkivate restide pikkusi. Juurdelõikuskaart tuleks koostada nii, et restide pikkuste summa $\sum_{j=1}^{n}\delta_j$ oleks võimalikult väike.

Toodangu väljalaske rütmilisuse tagamiseks tuleb lisaks seostele (1) arvestada veel teatavaid lisanõudeid. Nimelt antakse väljavalitud paigutuste (s. t. neile vastavate toodete) soovitavat vahekorda iseloomustav s k a a l a (s_1, s_2, s_3, s_4) ning nõutakse, et paigutusi pikkusega a_i tuleb lõigata vähemalt s_i tükki ja mitte enam kui p protsendi võrra rohkem («Sangaris» $5 \leqslant p \leqslant 10$). Sellisel juhul lisanduvad seostele (1) veel võrratused

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \geqslant s_i, \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant \left(1+\frac{p}{100}\right) s_i \quad (i=1, 2, 3, 4). \quad (3)$$

Juurdelõikuskaardi koostamine taandub seega võrrandisüsteemi (1), (2) ja (3) selliste mittenegatiivsete täisarvuliste lahendite leidmisele, mille korral restide pikkuste summa $\sum_{j=1}^{n}\delta_j$ on minimaalne. See on täisarvulise lineaarse planeerimise ülesanne. Et ühele kaardile kantakse tavaliselt 20—30 kangast, siis vastavas planeerimisülesandes on umbes 100 tundmatut x_{ij}.

Niisuguste planeerimisülesannete kogemuslik-intuitiivne lahendamine on loomulikult kaunis ebatäpne. Nagu õmblusvabriku «Sangar» senised kogemused näitavad, kujuneb sellise lahendamisviisi korral restide kogupikkuseks umbes 1% kangaste kogupikkusest (leheküljel 28 toodud näite puhul isegi 1,5%).

Selleks, et materjali kadu restide osas vähendada, on otstarbekohane rakendada lahendamiseks matemaatilisi meetodeid ja arvutustehnikat. Tuleb aga muidugi arvestada, et arvutustehnika rakendamine on ühtlasi vajalik veel tootmisega kaasneva arveldustöö mehhaniseerimiseks.

Juurdelõikuskaardi koostamisel lahendatavas täisarvulise planeerimise ülesandes on küllalt palju tundmatuid. Et esialgu pole veel olemas efektiivseid algoritme selliste suurte ülesannete täpseks lahendamiseks, siis otsustati kasutada teatavat ligikaudset algoritmi, mis arvestab vaadeldava ülesande struktuuri iseärasusi (algoritmi koostasid TRÜ arvutuskeskuse töötajad A. Jägel, L. Prisk ja I. Urmet).

Koostatud algoritmi korral leitakse eraldi iga võrrandi (1) lahend, s. t. iga kanga tükeldamisviis. Seejuures nõutakse, et resti pikkus δ_j ei ületaks etteantud suurust q («Sangari» ülesannete korral $q = 10$ cm), ning peetakse silmas ka tingimusi (2) ja (3).

Süsteemi (1) j-nda võrrandi lahendit otsitakse järgmiselt. Kõigepealt vaadeldakse selle võrrandi lahendeid, milles ainult üks x_{ij} on positiivne täisarv ja ülejäänud nullid, s. t. vaadeldakse kanga tükeldamist ainult ühe pikkusega paigutusteks. Kui selliste hulgas leidub lahend, mille korral $0 \leqslant \delta_j \leqslant q$ ning on rahuldatud tingimused (3) (seejuures tuleb arvestada ka eelmiste kangaste jaotusi), siis vastav lahend võetakse j-nda kanga tükeldamisel aluseks. Kui aga sellist lahendit ei leidu, siis vaadeldakse j-nda võrrandi niisuguseid lahendeid, mille korral kaks või kolm otsitavat x_{ij} on positiivsed täisarvud ning ülejäänud nullid. Võimalusi vaadatakse läbi seni, kuni jõutakse lahendini, mille korral $0 \leqslant \delta_j \leqslant q$ ning on rahuldatud tingimused (3). Vastav lahend trükitakse välja reana juurdelõikuskaardil ning asutakse vaatlema järgmise kanga tükeldamist. Võib aga juhtuda, et nõutud omadustega lahendit ei leidu. Siis jäetakse kangas esialgu kõrvale ning võetakse vajaduse korral vaatlusele alles hiljem (lahendeid, milles kõik neli suurust x_{ij} on positiivsed, enam ei vaadelda, sest nende puhul nõuaks kõigi võimaluste läbivaatamine elektronarvutilt liiga palju aega).

Kirjeldatud viisil vaadatakse järjest läbi kõik tükeldamiseks eraldatud kangad. Kui teataval sammul jõutakse olukorrani, et mingi i korral on juba rahuldatud tingimus (2), siis järgmiste kangaste jaotamisel paigutusi pikkusega a_i enam ei lubata lõigata. See aga vähendab oluliselt kombineerimisvõimaluste arvu. Seetõttu nähakse programmis ette, et kui mõne pikkusega paigutusi on vaja lõigata veel tunduvalt vähem ülejäänutest, siis vastavate pikkustega paigutusi lubatakse igast kangast eraldada ülimalt mõne tüki kaupa (näiteks kahekaupa).

Tingimusi (2) võimaldab rahuldada asjaolu, et kangaid eraldatakse umbes 20% võrra rohkem, kui seda skaalaga määratud minimaalplaani täitmiseks vaja läheks. Seetõttu osa vähemsobivaid kangaid jääb tükeldamata. Skaalaga seotud nõuete paremaks rahuldamiseks eraldatakse pikematest kangastest kõigepealt teatav hulk selliseid paigutusi, milliseid on rohkem vaja, järelejäänud keskmise pikkusega kangas aga jaotatakse eespool kirjeldatud algoritmi abil.

Niisugune algoritm on üsna lihtsalt programmeeritav. Vastava programmi abil on TRÜ arvutuskeskuses juba hakatud koostama juurdelõikuskaarte õmblusvabrikule «Sangar». Esitame näite elektronarvutil «Ural-4» koostatud juurdelõikuskaardist.

КАРТИНА НР I			355I	355I	355I	355I	АРТ 0333	
			383	372	38I	37I		
			432	393	442	000	ШИРИНА 0079	
			04I2	0405	0400	0I9I		
НОМЕР ТКАНИ		ДЛИНА КУСКА	КОЛИЧЕСТВО ПОЛОТЕН КАЖДОГО КУСКА				ОЖИД. ОСТАТОК	ФАКТ. ОСТАТОК
		I40I	I	I	I	I		
					ЦВЕТ - 000I			
0382		I8I5	03			03	006	
007I	I	I960		02		06	004	
007I	2	2007		0I	04		002	
0I23		I620		04			000	
009I		4628	04	05		05	000	
0087		3648		09			003	
0I27		3277	05	03			002	
0III		2050	03	02			004	
0092		3270	04	04			002	
03I2		43I0	09	0I		0I	006	
0I62		429I	07	03		0I	00I	
0I56		4000	0I		08	02	006	
0I54		40I8	0I		09		006	
0I5I		4605		02	09	0I	004	
0I53		4387		0I	09	02	000	
0I30		5005		06	05	03	002	
0I32		I948			02	06	002	
0I32		I796			04	0I	005	
0230		49I0	07	05			00I	
0245	I	4045		09	0I		000	
СУММА		КУСКОВ	0045	0058	0052	0032	0056	
		ШКАЛА	0045	0058	0050	0030		
		6899I	I8538	23488	20798	6III		

Elektronarvutil koostatud juurdelõikuskaart

Seniste kogemuste põhjal võib väita, et elektronarvutiga koostatud juurdelõikuskaartide kasutamisel ei tule restide kogupikkus suurem kui 0,1% kangaste kogupikkusest, mis on umbes 10 korda vähem kui käsitsi koostatud juurdelõikuskaartide korral ning annab aastas umbes 20 000 rubla kokkuhoidu. Muidugi ei anna kirjeldatud algoritm veel optimaalset lahendit. Tegelikult optimaalse lahendi leidmine ei osutu aga enam majanduslikult kasulikuks, sest arvuti aja maksumus läheks sel korral niivõrd suureks, et seda ei õigustaks materjali suhteliselt väike kokkuhoid.

Lõpuks märgime, et materjali kokkuhoiu põhiliseks reserviks on sisekadude vähendamine paigutustes. Kuid väikeste sisekadudega paigutuste saamise algoritmid on käesoleval ajal alles teoreetilise uurimise tasemel. Seetõttu püütakse käsitsi leida võimalikult väikeste sisekadudega paigutusi, milleks neid iga toote jaoks koostatakse sageli mitmes erinevas variandis.

NORBERT WIENERI ARVAMUSI[1]

Teadlase distsipliin seisneb selles, et ta pühendab end tõe otsimisele. See distsipliin kutsub esile soovi minna ükskõik millistele ohvritele, olgu need materiaalsed, moraalsed või äärmisel (kuigi mitte pretsedenditul) juhul isegi oma isikliku julgeoleku ohvrid. Enamasti on see sisemine distsipliin, mis eelkõige sõltub teadlase suhtumisest teadusse, mitte aga välistest asjaoludest, millistes toimub tema teaduslik töö.

* *
*

Ma olen õnnelik, et sündisin enne Esimest maailmasõda, kui teadlaste maailma jõude ja püüdlusi veel ei ujutanud üle nelikümmend aastat väldanud katastroofid. Ma olen eriti õnnelik, et mul ei tulnud olla kaasaegse teadusliku vabriku üheks kruvikeseks, teha, mida kästakse, töötada ülesannete kallal, mida annavad ülemused... Kogu südamest tunnen ma kaasa tänapäeva noortele teadlastele, kellest paljud, tahavad nad seda või mitte, on «ajavaimu» tõttu määratud teenima intellektuaalsete lakeidena ja tabelipidajatena, kes registreerivad end tööle saabumisel ja töölt lahkumisel.

* *
*

Enne sõda[2]*, eriti depressiooni perioodil, oli pääs teadusse raske. Neile, kes tahtsid tegelda teadusliku tööga, esitati väga kõrgeid nõudmisi. Sõja ajal toimus kaks olulist muudatust. Esiteks ilmnes puudus inimestest, kes oleksid võimelised realiseerima kõiki sõja jaoks vajalikke projekte. Teiseks, et neid ikkagi oli vaja ellu viia, tuli kogu süsteem ümber korraldada nii, et oleks võimalik kasutada minimaalse ettevalmistusega, minimaalsete võimetega ja minimaalse kohusetundlikkusega inimesi.*

Tulemusena, noored inimesed, selle asemel, et valmistuda pikaks ja raskeks teeks, elasid kerge südamega, ei muretsenud homse päeva pärast, lugesid, et buum teaduses vältab igavesti. Distsipliin ja raske töö polnud nende jaoks kohustuslikud...

See on üheks moraali üldise languse avalduseks, mis siis algas teadlaste seas ja kestab senini. Peaaegu kõigil varasematel ajajärkudel tulid teadusse vaid need, kes ei kartnud karmi tööd ega kasinaid tulemusi.

---

[1] Autobiograafiast: Винер Н., Я — математик. М.. 1964.

[2] St. enne Teist maailmasõda. Selles tsitaadis kõneleb N. Wiener teadusest Ameerika Ühendriikides.

HULKTAHUKATE JOONISTE RAKENDAMISEST RUUMIKUJUTUSE ARENDAMISEL

S. Riives

Meie kaasaega iseloomustab matemaatika ja tema uurimismeetodite üha laienev kasutamine väga mitmesugustel elualadel. Matemaatikat saavad mitmekülgselt ja ratsionaalselt rakendada praktilises elus aga ainult need isikud, kes on saanud vajaliku ettevalmistuse. Eesmärgiks ei tohi seejuures seada ainult faktide tundmaõppimist, suurt tähelepanu tuleb pöörata ka nende asjalikule ja efektiivsele rakendamisele. Vaatleme käesolevas artiklis mõningaid probleeme geomeetria alalt.

Geomeetria õpetamise spetsiifilisteks eesmärkideks on teatavasti 1) geomeetriliste teadmiste omandamine, 2) loogilise mõtlemise arendamine ja 3) ruumikujutluse arendamine.[1] Käesolevas artiklis peatume mõningatel kolmanda eesmärgi saavutamise abinõudel.

Ruumikujutlus peab olema arenenud tehnilistel aladel töötavavatel spetsialistidel-inseneridel, samuti kunstnikel-konstruktoritel, kelle ülesandeks on hoolitseda tehniliste konstruktsioonide esteetilise kujundamise eest. Ruumikujutlusel on tähtis koht ka paljude looduslike protsesside geomeetrilisel ja graafilisel interpreteerimisel.

Praktika tõendab, et stereomeetria ja projektsioonimeetodite põhijoonte õigesti organiseeritud õpetamisega on võimalik arendada head ruumikujutlust rõhuva enamuse inimeste juures. Õpetamise esimesel etapil on geomeetriliste mõistete ja ruumikujutluse allikaks meid ümbritsevad esemed. Nii näiteks õpib laps peagi märkama toa, tikutoosi ja kapi ühist omadust, s. t. omandab ettekujutuse risttahukast. Järgmisel etapil kasutatakse meid ümbritsevate esemete kõrval ka spetsiaalseid mudeleid. Tuleb aga märkida, et mudelite ja esemete geomeetriliste omaduste vaatlemine võib pideva ühekülgse kasutamise korral teataval määral pidurdada abstraheerimisvõime arengut. Lubamatult sageli esineb näiteks juhte, kus silindrilise pinna all mõistetakse ainult pöördsilindrilist pinda, lainelises eterniitplaadis aga taolist pinda näha

[1] Бескин Н. М., Методика геометрии. М.—Л., 1947, lk. 3.

ei osata. Mudelite õige demonstreerimise abil on muidugi võimalik tutvuda ühe või teise kujundi iseloomulike omadustega, tema elementide vastastikuse asendiga, kuid selle võtte efektiivsust tuleb kindlasti kontrollida, nõudes käsitletava kujundi kirjeldamist pärast seda, kui mudel on kõrvaldatud. Sel viisil on saavutatav muu hulgas ka vaatlusvõime süstematiseerimine ja süvendamine. Vanemates klassides on aga mudelite kasutamise asemel sageli otstarbekohane teha jooniseid uuritavatest kujunditest. Nende kasutamine võimaldab vaadelda kujundeid üldisemalt ning nõuab sügavamat kujutlusvõimet. Sellega kaasneb ruumikujutluse kiirem ja mitmekesisem areng. Joonis õppeprotsessis asendab konkreetset mudelit aga ainult siis, kui ta rahuldab kindlaid nõudeid. N. Tšetveruhhin[2] rõhutab nendest järgmisi: 1) joonis peab olema õige, s. t. ta peab esitama vaadeldava kujundi (originaali) teatavat projektsiooni; 2) joonis peab olema ilmekas, s. t. ta peab esile kutsuma originaali ruumilise kujutluse; 3) joonis peab olema tehtud vabalt, s. t. ta ei tohi sisaldada lisakonstruktsioone, mis ei ole vahetult seotud läbivõetava teemaga.

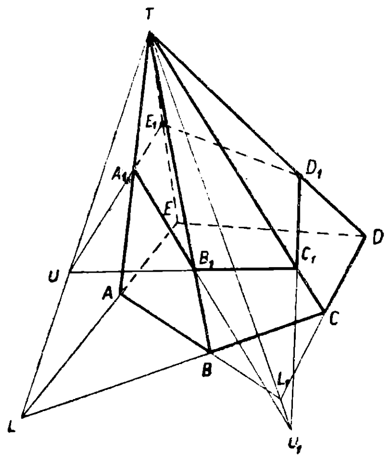
Esimese punkti vastu eksitakse sageli mitte ainult tahvlijoonistel vaid ka õpikuis. Nii näiteks võetakse tetraeedri mediaani näitamisel tihti vabalt mingi sirglõik, mis ühendab tippu vastastahu mingi punktiga. Ometi defineeritakse mediaan sirglõiguna, mis ühendab tetraeedri tippu vastastahu mediaanide lõikepunktiga. Paralleelprojektsiooni korral, mida me tahvlijoonisel tavaliselt kasutame, aga säilivad nii paralleelsete kui ka samal sirgel asetsevate lõikude suhted. Seega tahu mediaanide lõikepunkt on joonisel üheselt määratud ja ka vaadeldava sirglõigu saame üheselt näidata. Kui joonist õigesti valmistada, siis täidab ta ka oma ülesande õigesti, sest ta võimaldab ühtlasi kinnistada mediaani definitsiooni.

Printsipiaalselt ebaõigete jooniste kasutamine õppeprotsessis on täiesti lubamatu, sest see võib esile kutsuda vääraid tõlgendamisi ning oodatud kasu asemel tuua koguni kahju. Seepärast peab õpetaja hästi tundma kujundite projektiivseid omadusi ning neid joonise valmistamisel alati arvestama. Ka nn. vabajoonise valmistamisel (kui projekteeriv aparaat jääb fikseerimata), on otstarbekohane juhtida õpilaste tähelepanu nendele nõuetele, mida peab rahuldama joonise elementide (näiteks punktide) vastastikune paigutus, tuginedes seejuures varem omandatud teadmistele. Nii näiteks püramiidi tasandilise lõike joonestamisel (joon. 1) võib vabalt valida kolm punkti külgservadel. Lõike kui teatava tasandilise hulknurga ülejäänud tipud on aga siis juba täielikult määratud. Tõepoolest, kui valida vabalt näiteks punktid A_1, B_1 ja C_1, siis määravad nad lõiketasandi $A_1B_1C_1$. Servad

---

[2] Четверухин Н. Ф., Чертежи пространственных фигур в курсе геометрии. М., 1946, lk, 7.

C_1D_1 ja A_1B_1, olles samal tasandil, võivad lõikuda ainult tahutasandite ABT ja CDT lõikesirgel. Viimane on joonisel juba määratud punktidega T ja L_1. Niisiis, punkt D_1 on sirgete TD ja U_1C_1 lõikepunkt. Samuti on konstrueeritav punkt E_1. Õpetajal muidugi ei tarvitse neid lisajooni oma tahvlijoonisel näidata, kuid arvestada tuleb neid kindlasti ning samal ajal juhtida sellele ka õpilaste tähelepanu (joonistel on need näidatud abijoontena). Niiviisi saavutame ühtlasi õpilaste teadmiste kinnistamise ja nende oskusliku rakendamise konstruktsiooniülesannete korral. Analoogilisi näiteid, kus me peame arvestama joonise täielikkust pärast teatavate elementide vaba valikut, võib tuua rohkesti.



Joonis 1.

Tänapäeva tehnikas esinevate probleemide korral tuleb püramiidide ja prismade kõrval sageli kokku puutuda märksa keerukamate pindadega, eeskätt mitmesuguste hulktahukatega. Nendega tutvumine võiks kuuluda koolis ka klassivälise töö hulka. Juhime siin tähelepanu ühele probleemile, mis sageli esineb praktiliste ülesannete lahendamisel. On teada, et kui hulktahukal on antud teatav arv tippe, siis ülejäänud tippe ei saa enam valida päris vabalt. Prisma korral näiteks peab olema garanteeritud külgservade omavaheline paralleelsus, mistõttu pärast ühe põhja tippude ning ühe külgserva valikut peavad prisma ülejäänud tipud asetsema kindlasihilistel sirgetel.

Siit jõuame järgmise üldise probleemini. Olgu joonisel antud mingi hulktahukas. Fikseeritakse selle hulktahuka teatavate tippude kujutised. Nõutakse selgitada, missuguse vabadusega on võimalik muuta teiste tippude kujutisi, ilma et seejuures muutuks hulktahuka t ü ü p. Seejuures loeme hulktahukaid sama tüüpi kuuluvaiks, kui neil on võrdne arv tippe, tahke ning servi, kusjuures kõigi vastavate tippude juures on sama arv tahke nii, et võrdse tippude arvuga hulknurgad esinevad samas järjestuses. Nii näiteks kuuluvad samasse tüüpi kõik kaheksatipulised hulktahukad kuue nelinurkse tahuga (nende seas ka kuup ja neljatahuline tüvipüramiid). Probleemi rakenduslik väärtus selgub kasvõi järgmisest näitest. Masinad komplekteeritakse teatavatest üksikosadest. Masina korpuse konstrueerimiseks tuleb kujundada masinat hõlmav pind, mis toetub antud tugipunktidele ning rahuldab vajalikke tehnilisi ja esteetilisi nõudeid. Kunstnik-konstruktor võib sel puhul hulktahukaid kasutada kattepindade esimeste lähendustena, valides tugipunktid hulktahuka tippudeks.

Selle probleemi puhul on oluline teada, kui palju on üldse neid tippe, mida võib vaadeldava tüübi hulktahuka joonisel valida vabalt. Viimase küsimuse analüüsimisel on võimalik kasutada niinimetatud parameetrite loendamise meetodit. Seejuures tuleb rõhutada, et saadav tulemus kehtib nii paralleel- kui ka tsentraalprojektsiooni korral. Kirjeldame lühidalt seda meetodit, mille üksikasju ja põhjendusi võib asjast huvitatud lugeja leida autori artiklist [3].

Hulktahukad jaotatakse kahte põhiliiki: üldised hulktahukad ja erihulktahukad. Ü l d i s t e k s nimetatakse hulktahukaid, mille kõik ruuminurgad tippude juures on kolmetahulised (näit. tüvipüramiid). E r i h u l k t a h u k a t e l leidub vähemalt üks tipp, mille juures olev ruuminurk on enam kui kolme tahuga (näit. püramiid). Parameetrite loendamisel tuleb arvestada hulktahuka liiki. Punkt tasandil esitatakse kahe koordinaadiga. Seetõttu iga vabalt valitud tipp nõuab enda määramiseks kahte parameetrit. Kui tippude arv on e, siis nende esitamisel joonisel kuluks seega $2e = p_v$ parameetrit, kui tipud oleksid sõltumatud. On teada, et üldise hulktahuka korral on j o o n i s e t ä i e l i k k u s e saavutamiseks (s. t. selleks et järgnevad positsiooniülesanneté lahendused oleksid olemasolevate punktide või sirgete põhjal ette määratud, nagu näiteks joonisel 1 punktid E_1 ja D_1), tarvilik määrata joonisel $p_t = 3n - 4$ parameetrit, kus n on tahkude arv. Erihulktahukatel on joonise täielikkuse saavutamiseks tarvilik parameetrite arv

$$p_t = 3n - 4 - \sum (i - 3) e_i,$$

kus n on tahkude arv, i — ühest ja samast tipust lähtuvate servade arv ja e_i — nende tippude arv, mille juures on i-tahulised ruuminurgad.[4] Sama parameetrite arvu on võimalik avaldada ka hulktahuka servade kaudu:

$$p_t = k + 2,$$

kus k on hulktahuka servade üldarv.

Kui on antud hulktahuka tippude arv, siis vastavalt liigile võime nüüd määrata, kas hulktahukal on tippe, mille kujutised joonisel pole vabalt valitavad. Kõik sõltub p_t ja p_v vahekorrast. Kui $p_v = p_t$, siis on kõik tipud joonisel vabalt valitavad. Kui $p_v > p_t$, siis osa tippe tuleb leida varem valitud tippude järgi. Kui aga $p_v < p_t$, siis võib kõik tipud vabalt valida, kusjuures jääb veel teatav täiendav vabadus.

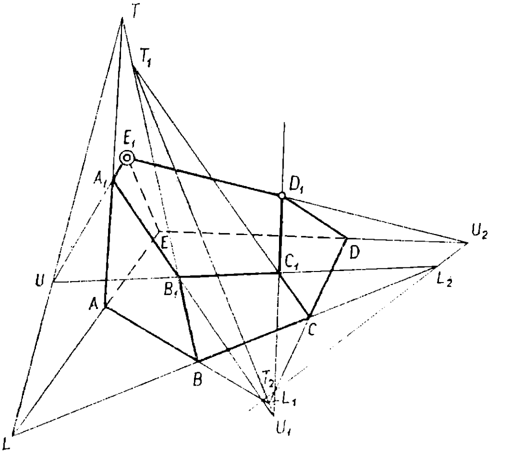
---

[3] Р и й в е с З. Ю., О применении параметрического метода для исследования проекций многогранников. — EPA Teaduslike Tööde Kogumik, 22, 1961, lk. 77—91.

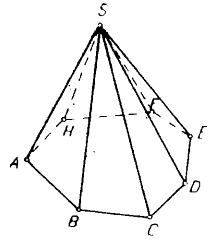
[4] Ч е т в е р у х и н Н. Ф., Полные и неполные изображения. — Вопросы современной начертательной геометрии, М.—Л., 1947, lk. 127—187.

Näide 1. Määrame suurused p_v ja p_t joonisel 1 kujutatud püramiidi puhul. Sel korral $p_v = 2 \cdot 6 = 12$, sest tippe on 6, s. t. $e = 6$, ning $p_t = 3 \cdot 6 - 4 - 1 \cdot (5 - 3) = 12$, sest tahke on 6 ja viietahulisi tippe üks (s. t. $n = 6$, $e_i = 1$ ja $i = 5$). Teisel viisil saame $p_t = 10 + 2 = 12$, sest servi on 10 (s. t. $k = 10$). Siit näeme, et $p_v = p_t$, seega kõik tipud on vabalt valitavad, nagu tahvlijoonisel alati tehaksegi.

Näide 2. Vaatleme joonisel 2 antud seitsetahku, millel on kaks viisnurkset tahku, ülejäänud aga nelinurgad. Me näeme, et on tegemist üldise hulktahukaga, kusjuures tippude arv $e = 10$. Seega $p_v = 2 \cdot 10 = 20$, $p_t = 3 \cdot 7 - 4 = 17$, sest $n = 7$. Siin $p_v > p_t$ ja $p_v - p_t = 3$, millest järeldub, et vabalt võime valida 8 tippu, ühe peame valima etteantud sihil, kümnes tipp aga on leitav konstruktsiooni teel. Nii on joonisel vabalt võetud tipud A, B, C, D, E, A_1, B_1, C_1. Tipp D_1 on aga valitud sirgel U_1C_1. Nimelt lähteandmete järgi saime määrata sirge T_1L_1, mis kujutab tasandite ABB_1 ja C_1CD lõikesirget. Et aga A_1B_1 ja C_1D_1 on samal tasandil ja nad lõikuvad, siis nende lõikepunkt peab asetsema sirgel T_1L_1. Pärast seda, kui D_1 on joonisel näidatud, leiame sama põhimõtet rakendades, et E_1 on määratud sirgete UA_1 ja U_2D_1 lõikepunktina. Märgime, et sama tüüpi seitsetahukaks on ka püramiidi alumine osa joonisel 1. Sel juhul on tegemist vaid erandjuhuga, kus $T = T_1$ ning ka sirge DD_1 läbib punkti T.



Joonis 2.

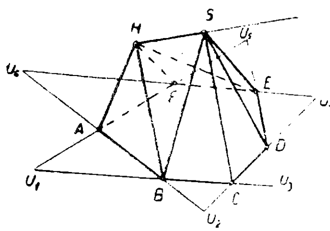


Joonis 3.

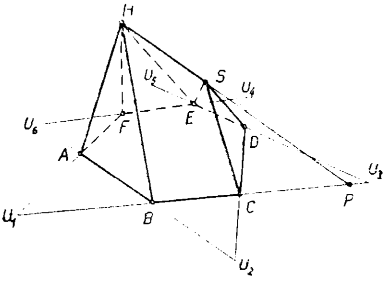
Ruumikujutluse arendamisel võib kasutada ka niisugust ülesannet, mille puhul hulktahuka tippude arv on ette antud ja tuleb uurida, missugused hulktahukad tekivad punktide vastastikuse asendi muutmisel. See on just probleem, mis kerkib praktikutel kattepindade konstrueerimisel. Olgu näiteks antud kaheksa punkti, mis ei asetse kõik ühel ja samal tasandil. Uurime, milliste hulktahukate tippudeks need võivad olla.

Kõige lihtsamal juhul tekib püramiid, nimelt siis, kui üks tipp on väljaspool tasandit, millel asetsevad seitse ülejäänud punkti (joon. 3).

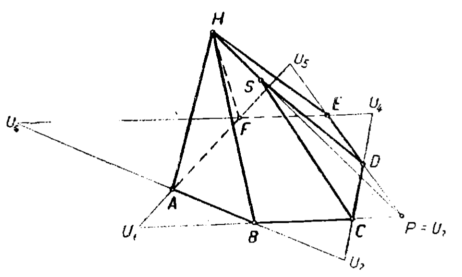
Edasi võib vaadelda juhtu, kus kuus punkti on samal tasandil, kaks ülejäänut on aga väljaspool seda tasandit. Joonise abil on kerge näha, et siin võib esineda mitu eritüübilist hulktahukat, kusjuures peale kuusnurkse tahu võib esineda veel kas ainult kolmnurkseid (nagu näiteks joonisel 4, kus *HS* ei läbi ühtegi punktidest U_i) või ka nelinurkseid (nagu joonistel 5 ja 6). Seejuures on joonise abil kerge selgitada, et ühe nelinurkse tahu korral (joon. 5) peab serv *HS* asetsema sirgel, mis lõikub kuusnurkse tahu mingi serva poolt määratud sirgega, näiteks sirgega *BC* punktis *P*, mis ei ühti ühegi punktiga U_i. Kahe nelinurga olemas-



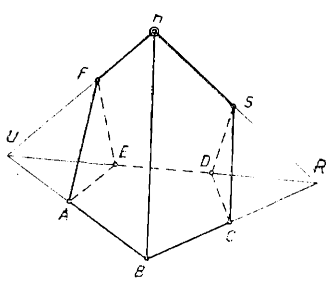
Joonis 4.



Joonis 5.



Joonis 6.



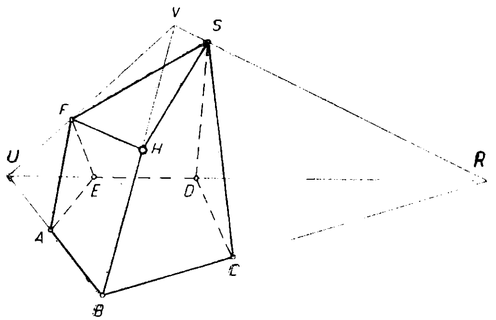
Joonis 7.

olu korral (joon. 6) peab tippe *H* ja *S* ühendav sirge läbima kuusnurkse tahu mingi kahe serva poolt määratud sirge lõikepunkti U_i (näit. $P \equiv U_3$).

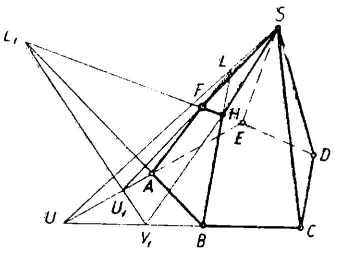
Analoogiliselt võib uurida hulktahuka muutumist ühel tasandil asetsevate tippude arvu edasisel vähendamisel. Joonistel 7—10 on näidatud hulktahukad, millel on üks viisnurkne tahk ja ülejäänud kolm tippu on väljaspool seda tasandit.

Sellisel viisil võib kaheksatipulise hulktahuka kuju muutumist jälgida seni kuni jõuame hulktahukani, mille tahkudeks on vaid kolmnurgad. Jooniste abil on kerge lahendada siis ka näiteks pöördülesannet: kuidas tuleb paigutada tippe selleks, et tekiks hulktahukas mingite etteantud omadustega. Nii näiteks selleks, et kaheksatipulisel hulktahukal oleks üks viisnurkne ja kolm järjestikust nelinurkset tahku, peavad abipunktid L_1, U_1, V_1, ja U, L, S olema omavahel kollineaarsed, nagu nähtub jooniselt 9.

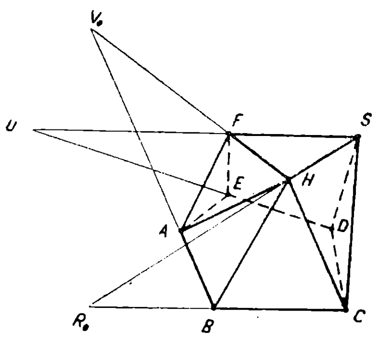
Eespool käsitletud küsimuste kõrval on jooniste kasutamisel õppeprotsessis vaja silmas pidada ka joonise meetrilist määratavust paralleelprojektsiooni korral. Alustame järgmise lihtsa näitega. Vaatleme tetraeedri sissekujundatud koonilist pinda, mille põhjaks on ühel tahul asetsev siseringjoon. Siseringjoone keskpunkti võime sel puhul näidata vabalt ainult teata-



Joonis 8.



Joonis 9.



Joonis 10.

vas piirkonnas, sest iga punkt joonisel ei osutu kolmnurga siseringjoone keskpunkti projektsiooniks[5]. Pealegi ei või enam kolmnurga külgede pikkusi fikseerida arvuliste andmetega pärast seda, kui on antud siseringjoone keskpunkti projektsioon. Kui kolmnurka määravad elemendid olid antud juba varem, siis tuleb siseringjoone keskpunkt joonisel konstrueerida, mitte aga vabalt näidata.

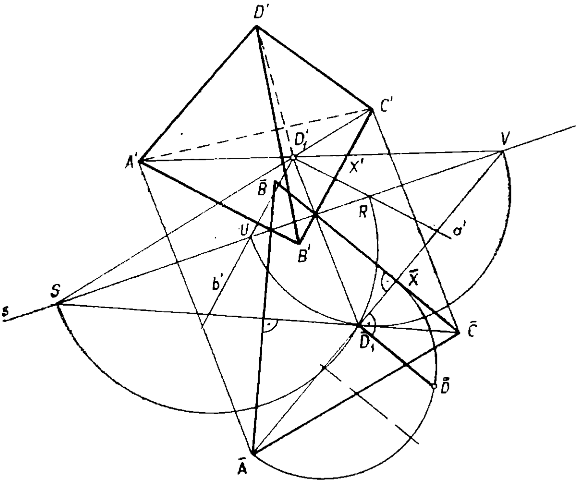
Selle näite juurest jõuame järgmise üldise definitsioonini. Kõneldakse, et joonis on meetriliselt määratud, kui tema järgi on võimalik rekonstrueerida ruumiline kujund. See

---

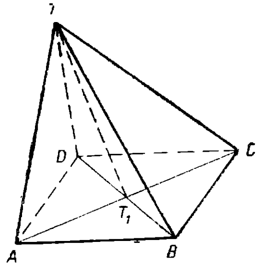
[5] Vt. Четверухин Н. Ф., Чертежи пространственных фигур в курсе геометрии. М., 1946, lk. 103.

tähendab ühtlasi, et meetriliselt määratud joonisel on kõik kujundis esinevad elemendid konstrueeritavad, neid ei tohi vabalt näidata.

Näide 3. Joonise meetrilise määratavuse näitena vaatleme erikujulist tetraeedrit $ABCD$, mille kõrguste lõikepunkt ühtib ühe tipuga D. Sel juhul on tipu D juures kolmetahuline täisnurk. Olgu joonisel 11 antud tetraeedri tippude projektsioonid A', B', C' ja D', ning kõrguse projektsioon $D'D'_1$, kusjuures D'_1 valikul on arvestatud olemasolu piirkonda [6]. Et D'_1 peab olema kolmnurga ABC kõrguste lõikepunkti kujutis, siis teljelist afiinsust [7] kasutades saame määrata selle kolmnurga kuju. Selleks vaatleme punkti D'_1 läbivaid sirgete paare $C'D'_1$ ja $a' \parallel A'B'$, millele vastavad ruumis ristiolevad sirged, ning $A'D'_1$ ja $b' \parallel B'C'$, millele vastavate sirgete vahel on ruumis samuti täisnurk. Valime vabalt afiinsuse telje s ning konstrueerime lõikudele SR ja UV kui



Joonis 11.



Joonis 12.

diameetritele ringjooned, selleks et määrata punktile D'_1 afiinselt vastavat punkti $\overline{D}_1$. Pärast seda on kerge leida punkte $\overline{A}$, $\overline{B}$ ja $\overline{C}$. Sellega on meil määratud tetraeedri ühe tahu tõeline kuju, kui tema kõrguste lõikepunktiks on D_1.

Järgnevalt saame määrata kolmnurga AXD tõelise kuju. Arvestades, et tipu D juures on täisnurk, konstrueerime eespool leitud lõigule $\overline{A}\overline{X}$ kui diameetrile ringjoone kaare. Siis punkti $\overline{D}_1$ läbiv diameetri ristkõõl $\overline{D}_1\overline{\overline{D}}$ määrab vastava kõrguse. Pärast seda saame ruumis näidata vaadeldava tetraeedriga $ABCD$ sarnase tetraeedri $A_0B_0C_0D_0$, mille alus $A_0B_0C_0$ ühtib konstrueeritud kolmnurgaga $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$, vastav kõrgus $\overline{D}_{10}\overline{D}_0$ aga lõiguga $\overline{D}_1\overline{\overline{D}}$.

Üldiselt on tetraeeder meetriliselt määratud, kui me oskame määrata temal esineva kahe ristioleva kolmnurga kujud.

---

[6] Vt. Рийвес З. Ю., О проекционных свойствах ортоцентрического тетраэдра. — ENSV TA Toimetised, IX, Tehn. ja füüs.-mat. tead. seeria, 1960, 1, lk. 69—74.

[7] Vt. näit. Глазунов Е. А., Четверухин, Н. Ф., Аксонометрия, M., 1953, lk. 15.

Selliste jooniste kasutamine, kus on antud vaadeldava kujundi suurust ja kuju iseloomustavad elemendid, võimaldab kontrollida andmete kooskõla või sobivust kujundi määramiseks. Ühtlasi on otstarbekohane kasutada jooniseid ülesannete iseseisval koostamisel, seades probleeme selliselt, et nad õpetaksid õigesti hindama jooniseid ruumikujundite uurimisel. Nii võib näiteks seada probleeme, mis innustaksid uurima muutusi ruumikujundeis, kui andmeid joonistel varieerida.

Näide 4. Vaatleme korrapärast neljatahulist püramiidi. Joonisel 12 on antud parallelogramm *ABCD* ja veel punkt *T*. Kõigepealt saab küsida, kas see võib esitada meie uuritavat kujundit. Vastus on siin jaatav. Edasi küsime, kas iga sirglõik joonisel, mis ühendab tippu *T* nelinurga *ABCD* sisepunktiga, võib olla korrapärase püramiidi kõrguseks. On ilmne, et vaadeldaval erijuhul sobib vaid lõik, mille teiseks otspunktiks T_1 on parallelogrammi diagonaalide lõikepunkt.

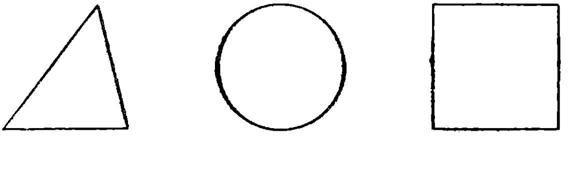
Järgnevalt võib uurida näiteks põhjatipust külgtahkudele tõmmatud kõrgusi. Tipust *A* tahule *BCT* tõmmatud kõrguse puhul saab küsida, kas ta lõikab antud kõrgust TT_1, kas tema aluspunkt võib asetseda $\triangle BCT$ sees või külgedel; uurida nende kõrguste aluspunktide geomeetrilist kohta ja jälgida püramiidi kuju muutust sõltuvalt aluspunkti valikust kiirel, millel ta võib asetseda jne.

Joonise oskuslikul kasutamisel on alati võimalus õigesti varieerida ülesannetes lähteandmeid selleks, et võimalikult laialdasemalt rakendada õpilaste iseseisvat tööd ja arendada nende ruumikujutlust.

NUPUTAMISEKS

1. Rätsepale toodi parandada kallihinnalisest karusnahast kasukas, milles oli isekülgse kolmnurga kujuline auk. Rätsep võttis paigaks toodud naha, asetas selle lauale karvapoolega alla, selle peale kasuka karvapoolega üles. Seejärel märkis ta augu kontuuri ja lõikas paiga välja. Õmblema asudes selgus, et paik ei sobi: augu märkimisel oli ta naha paigutanud valepidi. Mida teha? Rätsep mõtles, mõtles ja lõpuks lõikas paiga kolmeks tükiks, õmbles need uuesti kokku ning saigi vajaliku kujuga paiga. Kuidas ta seda tegi?

2. On 3 allpool esitatud kujuga auku, kusjuures kolmnurga alus ja sellele tõmmatud kõrgus ning ringi diameeter võrduvad ruudu küljega. Kas on võimalik puust valmistada ühist korki kõigi nende kolme augu sulgemiseks?



PARABOOLI MÕNINGAID OMADUSI

M. Rahula

Parabool tekib pöördkoonuse lõikumisel tasandiga, mis on paralleelne ühe (ja ainult ühe) sirgjoonelise moodustajaga (kui lõiketasand on paralleelne kahe sirgjoonelise moodustajaga või pole paralleelne ühegi sirgjoonelise moodustajaga, siis on lõikejooneks vastavalt kas hüperbool või ellips).

Parabooliga puutume kokku juba keskkoolikursuses, sest ta on ruutfunktsiooni

$$y = ax^2 + bx + c \tag{1}$$

graafikuks.

Vaatleme mõningaid parabooli omadusi.

Olgu tasandil antud ristkoordinaadistik. Tähistame parabooli, mis on ruutfunktsiooni (1) graafikuks, lühidalt tähega π. Olgu punkt $T(x_0, y_0)$ parabooli π tipuks (vt. joon. 1).

Esiteks tõestame kolm lihtsat teoreemi.

Teoreem 1. *Parabooli π tipu koordinaadid avalduvad*

$$x_0 = -\frac{b}{2a}, \quad y_0 = c - ax_0^2. \tag{2}$$

T õ e s t u s. Tõmbame sirge $y = h$, mis lõikab parabooli π punktides $A(x_1, h)$ ja $B(x_2, h)$. Paneme seejuures tähele, et $h > y_0$, kui $a > 0$, ja $h < y_0$, kui $a < 0$, sest muidu sirge $y = h$ ei lõika parabooli. Et A ja B on parabooli punktid, siis nende abstsissid x_1 ja x_2 on võrrandi

$$ax^2 + bx + c - h = 0 \tag{3}$$

lahendeiks. Tipu T abstsiss on ilmselt sama, mis kõõlu AB keskpunkti E abstsiss

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a}$$

(Vieta teoreemi järgi). Tipu T ordinaadi arvutame järgmiselt:

$$y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c = (2ax_0 + b)x_0 + c - ax_0^2 = c - ax_0^2.$$

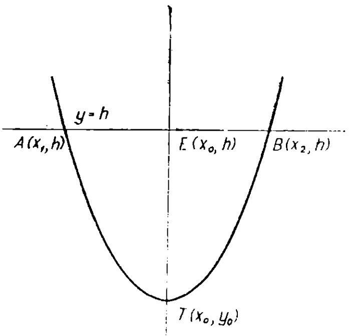
Teoreem 2. *Punktide A, B ja T koordinaadid on omavahel seotud võrdustega*

$$x_1 = x_0 - \sqrt{\frac{h - y_0}{a}}, \quad x_2 = x_0 + \sqrt{\frac{h - y_0}{a}}. \tag{4}$$

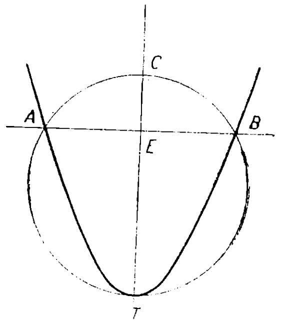
Tõestus. Et x_1 ja x_2 on võrrandi (3) lahendeiks, siis

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \mp \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c-h}{a}} = x_0 \mp \sqrt{x_0^2 - \frac{c-h}{a}} =$$
$$= x_0 \mp \sqrt{\frac{h-y_0}{a}}.$$

Kuna $x_1 < x_2$, siis x_1-le vastab märk miinus, x_2-le aga pluss.



Joonis 1.



Joonis 2.

Valemid (4) võimaldavad leida parabooli π x-teljega paralleelse kõõlu otspunktide koordinaate tipu koordinaatide kaudu. Siit saame kaks olulist järeldust.

Järeldus 1. Kõõlu AB pikkust saab avaldada tipu ordinaadi y_0 kaudu:

$$AB = 2\sqrt{\frac{h-y_0}{a}} \tag{5}$$

Järeldus 2. Ruutfunktsiooni (1) nullkohad saame valemeist (4) juhul, kui sirgeks $y = h$ on abstsisstelg, s. t., kui $h = 0$:

$$x_{1,2} = x_0 \mp \sqrt{-\frac{y_0}{a}}. \tag{6}$$

Seega ruutfunktsiooni (1) nullkohad on avaldatavad tipu koordinaatide kaudu.

Vaatleme nüüd ringjoont, mis läbib punkte A, B ja T, ning lõiku CE, mis on segmendi ABC kõrguseks (vt. joon. 2).

Teoreem 3. *Segmendi ABC kõrgus*

$$CE = \frac{1}{|a|}. \tag{7}$$

Tõestus. Et $AE \cdot EB = CE \cdot ET$ ja $AE = EB$, siis $CE = \dfrac{AE^2}{ET}$.

Arvestades, et $ET = |h - y_0|$ ja $AE = \frac{1}{2}AB = \sqrt{\frac{h - y_0}{a}}$ (vt. (5)), saame

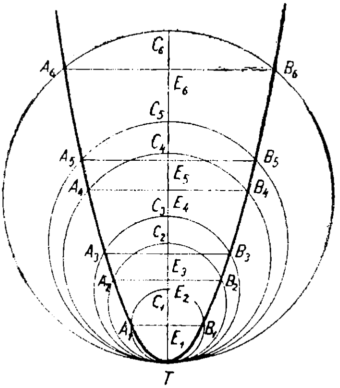
$$CE = \frac{h - y_0}{a|h - y_0|}.$$

Et $h > y_0$, kui $a > 0$, ja $h < y_0$, kui $a < 0$, siis

$$\frac{h - y_0}{a} = \frac{|h - y_0|}{|a|}$$

ja seega

$$CE = \frac{1}{|a|}.$$



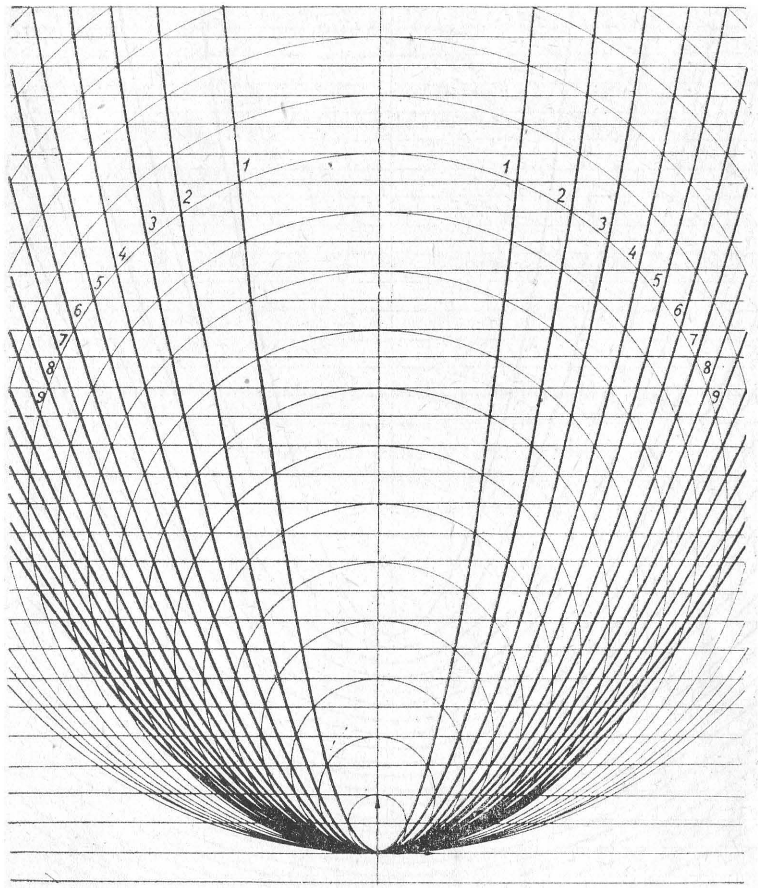
Joonis 3.

Teoreemist 3 järeldub, et lõigu CE pikkus ei sõltu suurusest h ja seega ka mitte ringjoone raadiusest. Joonisel 3 on võetud läbi punkti T kuus juhusliku raadiusega ringjoont (keskpunktidega parabooli teljel $x = x_0$); nende ringjoonte ja parabooli ühised kõõlud A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4, A_5B_5, A_6B_6 moodustavad kuus võrdse kõrgusega segmenti:

$$E_1C_1 = E_2C_2 = E_3C_3 = E_4C_4 = E_5C_5 = E_6C_6 = \frac{1}{|a|}.$$

Ülalöeldut arvestades saame järgmise võimaluse ruutfunktsiooni (1) graafikuks oleva parabooli konstrueerimiseks. Võtame sirge (telje) ning sellel punkti T (parabooli tipu). Läbi punkti T joonestame teatud arvu ringjooni nii, et nende keskpunktid asuksid teljel ühel pool tippu, ning kanname ringjoonte diameetritele võrdsed lõigud (segmentide kõrgused) pikkusega $\frac{1}{|a|}$ (vt. joon. 3). Seejärel tõmbame ringjoonte kõõlud risti teljega. Kõõlude otspunktid ongi otsitava parabooli punktideks. Kui viimaseid on küllalt palju, võime nad lekaali abil ühendada ning saamegi parabooli. Sellest arutlusest näeme, et parabooli kuju sõltub ainult arvust $|a|$. Järelikult arvud b, c ja arvu a märk määravad parabooli asendi teljestiku suhtes (vt. näit. tipu koordinaate (2)).

Joonis 4, millel on kujutatud ühise tipuga paraboolide parv, annab ettekujutuse sellest, kuidas parabooli kuju sõltub arvust $|a|$. Joonisel on igale paraboolile antud oma järjekorranumber 1,



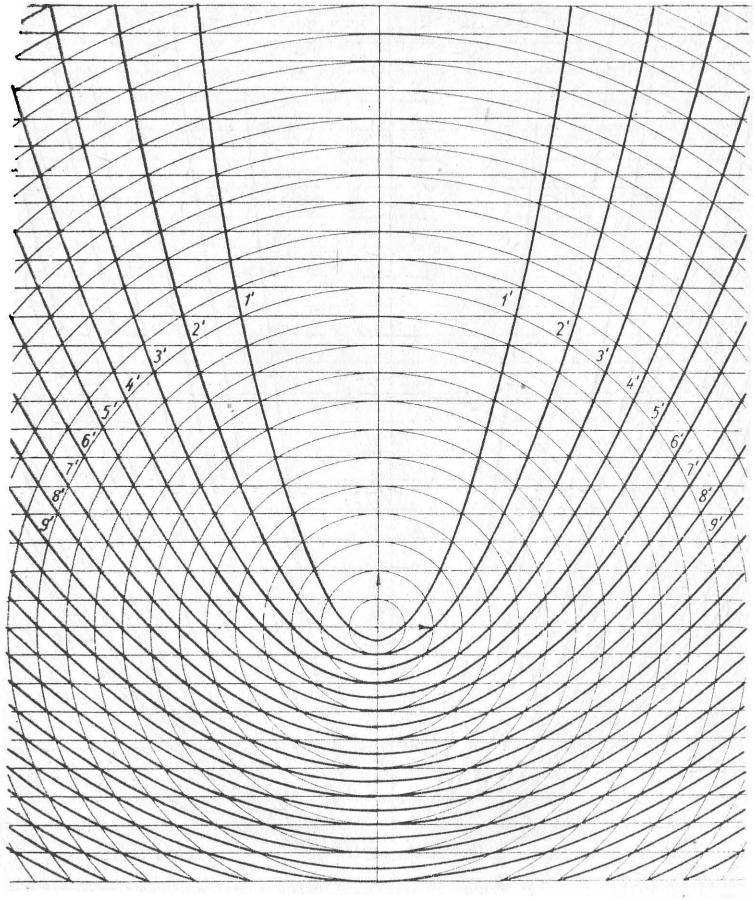
Joonis 4.

2, . . . , n, ... Jätame lugejale tõestada, et n-da parabooli võrrand on $y=\frac{2}{n}x^2$ (teljestik ja telgedele vastavad ühiklõigud on joonistel 4 ja 5 näidatud nooltega). Võrrandist näeme, et $|a|=\frac{2}{n}$. Järelikult, mida suurem on $|a|$ (s. o. mida väiksem on n), seda teravam on parabool, ja vastupidi, mida väiksem on $|a|$ (s. t. mida suurem on n), seda lamedam on parabool.

Ruutfunktsiooni

$$y = x^2 + px + q, \tag{8}$$

korral lihtsustuvad valemid (2), (4) ja (6) tunduvalt. Tipu koor-



Joonis 5.

dinaadid on siis

$$x_0 = -\frac{p}{2}, \qquad y_0 = q - x_0^2, \tag{9}$$

punktide A ja B abstsissid

$$x_1 = x_0 - \sqrt{h - y_0}, \quad x_2 = x_0 + \sqrt{h - y_0} \tag{10}$$

ning ruutfunktsiooni (8) nullkohad

$$x_{1,2} = x_0 \mp \sqrt{-y_0} \tag{11}$$

(paneme tähele, et sel juhul $CE = 1$).

Näide. Vaatleme ruutfunktsiooni

$$y = x^2 - 172x + 7227.$$

Kasutades valemeid (9) leiame vastava parabooli tipu koordinaadid

$$x_0 = 86, \quad y_0 = 7227 - 86^2 = 7227 - 7396 = -169.$$

Nullkohad arvutame valemi. (11) abil:

$$x_{1,2} = 86 \mp \sqrt{-(-169)} = 86 \mp 13; \quad x_1 = 73, \quad x_2 = 99.$$

Leiame veel näiteks sirge $y = -25$ lõikepunktid parabooliga. Valemite (10) põhjal

$$x_1 = 86 - \sqrt{-25 + 169} = 86 - 12 = 74,$$
$$x_2 = 86 + 12 = 98.$$

Seega otsitavad lõikepunktid on $A(74, -25)$ ja $B(98, -25)$. Kõõlu AB pikkus $AB = 98 - 74 = 24$.

Lõpuks juhime lugeja tähelepanu paraboolide parvele joonisel 5. Need paraboolid on saadud kontsentriliste ringjoonte ja paralleelsete sirgete vastavate lõikepunktide ühendamisel. Nad on nummerdatud numbritega $1'$, $2'$, ..., n', ... Saab kontrollida, et n'-nda parabooli võrrand on

$$y = \frac{1}{n'} x^2 - \frac{n'}{4}$$

(tõestada!). Huvitav on ka see, et parabool $1'$ joonisel 5 on samakujuline parabooliga 2 joonisel 4, samuti on ühesugused paraboolid $2'$ ja 4, $3'$ ja 6, ..., n' ja $2n$ (miks?). Pange tähele, et parabool $1'$ (aga ka paraboolid $2'$, $3'$, ...) moodustavad võrdsete kõrgustega segmendid vaadeldavatel kontsentrilistel ringidel. Püüdke seda omadusega (7) analoogilist omadust tõestada!

Neil lugejatest, kes on tuttavad kõrgema matemaatikaga, on huvitav tähele panna, et mõlemad paraboolide parved joonistel 4 ja 5 on imprimitiivsed teisenduste

$$\begin{cases} x = kx^* \\ y = ky^* \end{cases}$$

suhtes, s. t. sarnased (esimesel juhul on sarnasuskeskpunktiks paraboolide tipp, teisel juhul aga ringjoonte keskpunkt). Mainigem veel, et paraboolid joonisel 4 on diferentsiaalvõrrandi

$$xy' - 2y = 0$$

integraalkõverateks, joonisel 5 aga diferentsiaalvõrrandi

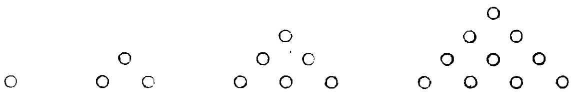
$$x(y')^2 - 2yy' - x = 0$$

integraalkõverateks.

ÜLDISTATUD KOLMNURKARVUD, MIS ON ÜHTLASI RUUTARVUD [1]

S. I. Zetel

Kolmnurkarvudeks nimetatakse teatavasti arve $t_n = \frac{n(n+1)}{2}$, kus $n = 1, 2, 3, \ldots\ldots$ Oma nimetuse said need geomeetrilisest interpretatsioonist, mis on esitatud juuresoleval joonisel, kus punktide arv esimeses hulgas on $t_1 = 1$, teises hulgas $t_2 = 3$, kolmandas $t_3 = 6$ jne.



Käesolevas artiklis võtame vaatlusele arvud

$$t(n, a) = \frac{n(n+a)}{2},$$

kus $n = 1, 2, 3, \ldots$ ja a on paaritu naturaalarv. Nimetame neid arve üldistatud kolmnurkarvudeks alusega a. Et iga n korral $t_n = t(n, 1)$, siis tavaline kolmnurkarv on ühtlasi üldistatud kolmnurkarvuks alusega 1. Ühe ja sama aluse a korral nimetame arve $t(n, a)$ ja $t(n+a, a)$ järjestikusteks üldistatud kolmnurkarvudeks.

Nii kolmnurkarvude kui ka üldistatud kolmnurkarvude hulgas leidub ruutarve (täisruute), näiteks $t_1 = 1$, $t_8 = 6^2$, $t_{49} = 35^2$; $t(18,7) = 15^2$, $t(121, 7) = 88^2$, $t(1, 49) = 5^2$, $t(1, 1\,681) = 29^2$ jne. Poola matemaatik W. Sierpiński on tõestanud rea huvitavaid teoreeme [2] kolmnurkarvude kohta, mis on ühtlasi ruutarvud. Käesolevas artiklis üldistatakse neid teoreeme üldistatud kolmnurkarvude juhule.

Teoreem 1. *Kui kolmnurkarv $t(x, 1)$ on ruutarv, siis ka üldistatud kolmnurkarv $t(xa, a)$ on ruutarv.*

---

[1] Toimetusele saadetud artikli venekeelse käsikirja tõlkis L. Kivistik.

[2] Sierpiński, W., Sur les nombres triangulaires carrés. — Publikacije Electratehn. Fakulteta Univerzitetu Beogradu, 1961, № 65—69, lk. 1—4.

T õ e s t u s on täiesti vahetu. Tõepoolest, kui

$$t(x, 1)=\frac{x(x+1)}{2}=y^2, \text{ siis } t(xa, a)=\frac{ax(ax+a)}{2}=(ay)^2.$$

Näiteks on $t(a, a)=a^2$, $t(8a, a)=(6a)^2$.

Teoreem 2. *Kui $t(x, a)=y^2$ on ruutarv, siis ka $t(3x+4y+ +a, a)$ on ruutarv, kusjuures $t(3x+4y+a, a)=(2x+3y+a)^2$.*

T õ e s t u s. Teisendame $t(3x+4y+a, a)$ avaldist:

$$t(3x+4y+a, a)=\frac{1}{2}(3x+4y+a)(3x+4y+2a)=\frac{1}{2}(9x^2+ $$
$$+12xy+3ax+12xy+16y^2+4ay+6ax+8ay+2a^2)=$$
$$=\frac{9x(x+a)}{2}+8y^2+6y(2x+a)+a^2.$$

Kuna

$$\frac{9x(x+a)}{2}=4x(x+a)+\frac{x(x+a)}{2}=4x^2+4ax+y^2,$$

siis

$$t(3x+4y+a, a)=9y^2+6y(2x+a)+(2x+a)^2=$$
$$=(2x+3y+a)^2,$$

s. t. $t(3x+4y+a, a)$ on ruutarv.

Teoreemi 2 põhjal saame igast üldistatud kolmnurkarvust, mis on samaaegselt ruutarv, tuletada lõpmatu jada uusi üldistatud kolmnurkarve, mis on samuti ruutarvud.

Näiteks, lähtudes ruutarvust $t(1, 1681)=29^2$ saab moodustada uued üldistatud kolmnurkarvud, mis on ühtlasi ruutarvud:

$$t(3\cdot 1+4\cdot 29+1\,681, 1\,681)=t(1\,800, 1\,681)=(2\cdot 1+$$
$$+3\cdot 29+1\,681)^2=1\,770^2,$$
$$t(3\cdot 1\,800+4\cdot 1\,770+1\,681, 1\,681)=t(14\,161, 1\,681)=10\,591^2,$$
$$t(86\,528, 1\,681)=61\,776^2, \text{ jne.}$$

Teoreem 3. *Kui n, a ja $t(n, a)$ on kõik ruutarvud, siis ka $t(a, n)$ on ruutarv.*

T õ e s t u s. Et a on paaritu, siis on ka n paaritu. Tõepoolest, kui n oleks paarisruutarv, siis $t(n, a)=\frac{n(n+a)}{2}$ ei saaks olla ruutarv, sest ta sisaldaks tegurit 2 paaritul astmel. Seega on n paaritu ruutarv ja $\frac{n+a}{2}$ — ruutarv. Viimasest järeldubki, et $\frac{a(a+n)}{2}=$ $=t(a, n)$ on ruutarv.

Näiteks on $t_{49}=t(49, 1)=35^2$ ja $t(1, 49)=5^2$.

Edasi vaatleme üldistatud kolmnurkarvude seost Pythagorase kolmnurkadega. P y t h a g o r a s e k o l m n u r g a k s nimetatakse täisnurkset kolmnurka, mille külgede pikkused avalduvad mingi kindla mõõtühiku korral naturaalarvudena. Külgede pikkustele vastavaid arve nimetatakse **Pythagorase arvudeks**. Hästi on tuntud Pythagorase arvud 3, 4 ja 5; 5, 12 ja 13 jt. Pythagorase arve on lõpmata palju. Selleks et saada kõiki Pythagorase arve (ja kolmnurki), tuleb leida võrrandi

$$x^2 + y^2 = z^2 \tag{1}$$

kõik täisarvulised lahendid. On ilmne, et kui x_0, y_0, z_0 on võrrandi (1) mingi lahend, siis on lahendiks ka kx_0, ky_0, kz_0 iga naturaalarvulise k korral. Lahendeid, kus arvud x_0, y_0, z_0 on ühistegurita, nimetatakse **põhilisteks**, lahendeid kx_0, ky_0, kz_0 aga tuletatud leidmisest. Osutub[3], et kõik põhilised lahendid avalduvad valemilahendeiks. Kõigi lahendite leidmiseks piisab põhiliste lahenditetega

$$x = pq, \quad y = \frac{p^2 - q^2}{2}, \quad z = \frac{p^2 + q^2}{2},$$

kus p ja q on suvalised ühistegurita paaritud arvud $(p > q)$. Lihtne on näha, et sealjuures x on paaritu, y — paarisarv ja z seega paaritu arv. Arusaadavalt võib x ja y osad ka vahetada, võttes $x = \frac{p^2 - q^2}{2}$ ja $y = pq$.

Võib püstitada mingi kindla omadusega Pythagorase arvude leidmise ülesande. Üks huvitavamaid on nn. **Fermat' ülesanne**: leida Pythagorase arvude kolmik (x, y, z), mille korral $x + y$ ja z on ruutarvud. Selliseid kolmikuid on lõpmata palju, kusjuures vähimatest niisugustest arvudest koosnevaks kolmikuks osutub

$$x = 4\,565\,486\,027\,761, \quad y = 1\,061\,652\,293\,520,$$
$$z = 4\,687\,298\,610\,289 \tag{2}$$

(siin $x + y = 2\,372\,159^2$, $z = 2\,165\,017^2$).

Ei leidu Pythagorase arvude kolmikuid, milles vähemalt kaks arvu oleksid ruutarvud. Järgnevas aga tõestame, et leidub lõpmata palju kolmikuid, milles kaks arvu on üldistatud kolmnurkarvud.

Teoreem 4. *Eksisteerib lõpmata palju Pythagorase kolmnurki, mille kaatetite mõõtarvudeks on järjestikused üldistatud kolmnurkarvud.*

Tõestus. Et võrrandil (1) on lõpmata palju naturaalarvulisi lahendeid, siis leidub lõpmata palju naturaalarve u, $u + a$, v, kus a on paaritu, mille korral

$$u^2 + (u + a)^2 = v^2. \tag{3}$$

---

[3] Vt. näit. Серпинский В., Пифагоровы треугольники. М., 1959; Литцман В., Теорема Пифагора. М., 1960, lk. 82—91; Gabovitš, J., Veidi kolmnurga aritmeetikat. — Matemaatika ja kaasaeg, V, lk. 57—67.

Korrutades viimast võrdust teguriga $(2u+a)^2$ saame

$$\left[\frac{2u(2u+a)}{2}\right]^2+\left[\frac{(2u+a)(2u+2a)}{2}\right]^2=(2u+a)^2v^2$$

ehk

$$[t(2u,a)]^2+[t(2u+a,a)]^2=(2u+a)^2v^2,$$

mida oligi tarvis näidata.

Lähtume näiteks Pythagorase arvudest 5, 12, 13, mille korral $u=5$, $a=7$, $v=13$, ja korrutame seost

$$5^2+12^2=13^2$$

teguriga $(2u+a)^2=17^2$; saame

$$85^2+204^2=221^2$$

ehk

$$[t(10,7)]^2+[t(17,7)]^2=221^2.$$

Näitame veel, et Pythagorase arvude teadmine võimaldab lihtsalt tuletada üldistatud kolmnurkarve, mis on samaaegselt ruutarvud, ja vastupidi, iga üldistatud kolmnurkarv, mis on samaaegselt ruutarv, määrab Pythagorase kolmnurga.

Teoreem 5. *Iga Pythagorase kolmnurk*[4] $(x, x+a, z)$, *kus* a *on paaritu, määrab üldistatud kolmnurkarvu* $t(u, a)$, *mis on ühtlasi ruutarv, kusjuures* $u=z-x-a$; *vastupidi, iga üldistatud kolmnurkarv* $t(u, a)$, *mis on ühtlasi ruutarv, määrab Pythagorase kolmnurga* $(x, x+a, z)$, *kus* $x=u+2v$, $z=2u+2v+a=$ $=x+a+u$ *ja* $v^2=t(u, a)$.

Tõestus. Samasusest

$$\frac{u(u+a)}{2}-\left(x-\frac{z-a}{2}\right)^2=\frac{(z-x-a)(z-x)}{2}-\frac{1}{4}(2x+a-z)^2=$$

$$=\frac{1}{4}[z^2-x^2-(x+a)^2]=0$$

näeme, et $t(u,a)=\left(x-\dfrac{z-a}{2}\right)^2$ on ruutarv, kui $u=z-x-a$. Vastupidi, olgu üldistatud kolmnurkarv $t(u, a)$ ühtlasi ruutarv, s. t.

$$t(u,a)=\frac{u(u+a)}{2}=v^2.$$

Siis

$$x^2+(x+a)^2-z^2=(u+2v)^2+(u+2v+a)^2-$$

$$-(2u+2v+a)^2=-2u^2+4v^2-2ua=4\left[v^2-\frac{u(u+a)}{2}\right]=0,$$

s. t. $(x, x+a, z)$ on Pythagorase kolmnurk.

[4] Sümboliga (x, y, z) tähistame kolmnurka, mille külgede pikkused on x, y ja z.

Nagu juba nägime, võime teoreemi 2 abil tuletada lõpmatu jada üldistatud kolmnurkarve, mis on samaaegselt ruutarvud. Teoreemi 5 tõttu seostub nimetatud jadaga Pythagorase kolmnurkade lõpmatu jada. Märgime, et üldistatud kolmnurkarvude leidmine, mille alus on a ja mis on ühtlasi ruutarvud, on samaväärne

$$\frac{u(u+a)}{2} = v^2 \qquad (4)$$

täisarvuliste lahendite leidmisega.

Vaatleme näiteks juhtu $a = 7$. Siis võrrandi (4)

$$\frac{u(u+7)}{2} = v^2 \qquad (5)$$

üheks lahendiks on $u = 1$, $v = 2$. Vastava Pythagorase kolmnurga $(x, x+7, z)$ küljed on $x = u + 2v = 5$, $x + 7 = 12$ ja $z = x + 7 + u = 13$. Edasi leiame võrrandi (5) uue lahendi teoreemi 2 abil. Et

$$t(3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 7,\ 7) = t(18,\ 7) = (2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 7)^2 = 15^2,$$

siis $u = 18$ ja $v = 15$. Vastavaks Pythagorase kolmnurgaks $(x, x+7, z)$ saame: $x = u + 2v = 18 + 2 \cdot 15 = 48$, $x + 7 = 55$, $z = 55 + u = 73$. Edasi leiame $t(3 \cdot 18 + 4 \cdot 15 + 7, 7) = t(121, 7) = 88^2$, $u = 121$, $v = 88$, millele vastab Pythagorase kolmnurk (297, 304, 425) jne.

Tekib küsimus, kas niiviisi saadav arvupaaride lõpmatu jada (1, 2), (18, 15), (121, 88), ... annab võrrandi (5) kõik lahendid? Lihtne on kontrollida, et eksisteerivad lahendid, mis ei kuulu sellesse jadasse, näiteks $u = 2$, $v = 3$. Lähtudes viimasest lahendist saame võrrandi (5) lahendite uue lõpmatu jada (2, 3), (25, 20), (162, 117), (961, 682), ... ja sellele vastava Pythagorase kolmnurkade jada

(8, 15, 17), (65, 72, 97), (396, 403, 565), (2 325, 2 332, 3 293), ...

Peale saadud lahendite ja põhiliste Pythagorase kolmnurkade jadade võib leida veel võrrandi (5) lahendi (7, 7) ja vastava Pythagorase kolmnurga (21, 28, 35), mis pole põhiline. Edasi saame teoreemi 2 põhjal võrrandile (5) uueks lahendiks (56, 42), millele vastab Pythagorase kolmnurk (140, 147, 203), jne. Jääb lahtiseks küsimus, kas leitud kolme jadaga on ammendatud võrrandi (5) kõik lahendid ja vastavate Pythagorase kolmnurkade jadadega kõik põhilised ja tuletatud Pythagorase kolmnurgad, mille kaatetite vahe on 7.

Olgu märgitud, et hoopis lihtsam on olukord $a = 3$, s. t. võrrandi $\frac{u(u+3)}{2} = v^2$ kõikide lahendite leidmise ülesande korral. Kuna puuduvad põhilised Pythagorase kolmnurgad kaatetite vahega 3, siis võrrandi kõik lahendid saadakse ühest jadast (3, 3), (24, 18), (147, 105), (864, 612), (5 043, 3 567), ...

Lõpuks arvutame veel üldistatud kolmnurkarvu, mis on ühtlasi ruutarv, lähtudes Fermat' kolmnurgast (2):

$$\begin{array}{r} x + a = 4\,565\,486\,027\,761 \\ - \quad x = 1\,061\,652\,293\,520 \\ \hline a = 3\,503\,833\,734\,241 \end{array} \qquad \begin{array}{r} z = 4\,687\,298\,610\,289 \\ - \quad x + a = 4\,565\,486\,027\,761 \\ \hline u = z - (x + a) = 121\,812\,582\,528 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x = 1\,061\,652\,293\,520 \\ - \quad u = 121\,812\,582\,528 \\ \hline x - u = 939\,839\,710\,992 \end{array}$$

Et $x = u + 2v$, siis

$$v = \frac{x - u}{2} = 469\,919\,855\,496.$$

Seega

$$t(121\,812\,582\,528,\ 3\,503\,833\,734\,241) = 469\,919\,855\,496^2.$$

LEIDKE TÄISRUUT!

Üks ja ainult üks allolevatest arvudest osutub täisruuduks. Kas te suudate selle täisruudu leida ilma juuri tegelikult arvutamata?

3 668 517 136 205 224
1 898 732 825 398 318
4 751 006 864 295 101
5 901 643 220 186 100
7 538 062 944 751 882
2 512 339 789 576 516
8 536 409 370 678 375
9 308 154 716 883 466
6 177 381 417 000 000

Enne selle ülesande lahendamisele asumist soovitame lugejal tõestada järgmised väited.

Täisruudu viimaseks numbriks on kas 0, 1, 4, 5, 6 või 9.
Numbriga 5 lõppeva täisruudu eelviimane number on 2.
Nulliga lõppeva täisruudu lõpus peab olema paarisarv nulle.
Numbriga 1, 4 või 9 lõppeva täisruudu eelviimane number on paarisnumber.
Numbriga 6 lõppeva täisruudu eelviimane number on paaritu.

Täisruudu (ja seega ka selle ristsumma) jagamisel 9-ga saame jäägiks kas 0, 1, 4 või 7.

MITTESTATSIONAARSE MATEMAATIKAKOOLI ESIMENE TÖÖAASTA

Jevgeni Gabovitš

1965. aasta lõpul organiseeriti meie vabariigis TRÜ matemaatikaosakonna õppejõudude initsiatiivil Mittestatsionaarne Matemaatikakool (MMK). Selle kooli eesmärgiks on aktiviseerida klassivälist tööd meie vabariigi kõikides (eriti aga maal ja väiksemates linnades asuvates) keskkoolides ja tõsta õpilaste huvi matemaatika vastu.

Sisseastumiseksamist osavõtjad lükkasid ümber nii mõnegi matemaatiku pessimistlikud prognoosid MMK populaarsusest õpilaste hulgas. Avaldusi tuli kõikidest meie vabariigi rajoonidest ja linnadest kokku üle 450. Peale selle laekus veel enam kui 40 kollektiivset avaldust umbes 550 õpilaselt.

MMK tööd juhtis nõukogu, kuhu kuulusid O. Prinits (esimees), J. Gabovitš (aseesimees), K. Ariva (metoodikaosakond), H. Türnpu (toimetaja), M. Rahula (propagandaosakond), M. Abel (loengute korraldamine), O. Karma (ülesanneteosakond). Kõigepealt vaatas MMK nõukogu läbi sisseastumiseksamite ülesannete lahendused ja võttis nende põhjal vastu 328 õpilast. MMK õpilaste jaotus rajoonide ja linnade järgi on esitatud kõrvaloleval leheküljel toodud tabelis (esimene arv käib eesti õppekeelega koolide õpilaste, sulgudes olev arv aga vene õppekeelega koolide õpilaste kohta).

Hindele «väga hea», mis anti vähemalt 10 ülesande korrektse lahendamise eest 13-st, sooritas sisseastumiseksami 39 õpilast. Nende hulgast paistsid silma Toomas Täht (Tallinna I Keskkool), Endel Triik (elektrik Kohtla-Järvelt), Julia Stepanova (Tartu IV Keskkool), Galina Ivanova (Tallinna XIX Keskkool), Avo Kivikas (Viljandi I Keskkool) jt.

Veebruari alguses saatis MMK välja oma esimese kontrolltöö, mis käsitles võrratusi. Selle brošüüri said peale MMK õpilaste (kuigi kontrolltöö väljasaatmise ajaks oli vastuvõtt juba lõppenud), kõik MMK-sse kandideerinud õpilased ning samuti kõik meie vabariigi keskkoolide matemaatikaõpetajad.

Teine kontrolltöö sisaldas mitmesuguseid nuputamist vajavaid ülesandeid algebrast ja geomeetriast ning mõningaid loogikaülesandeid. Esimese kontrolltöö esitamise tähtajaks oli 15. märts, teise — 15. aprill.

	Esitati avaldusi	Võeti vastu	Kollektiivsete rühmade arv	Liikmete arv nendes
Linnad:				
Tallinn	88(48)	61(48)	7	99
Tartu	31(8)	21(8)	2	61
Kohtla-Järve	26(7)	21(5)	—(1)	—(5)
Pärnu	25(1)	19(1)	3(1)	24(13)
Narva	—(12)	—(10)	—	—
Rajoonid:				
Harju	10	2	—(1)	—(24)
Haapsalu	4	3	1	22
Hiiumaa	4	3	2	15
Jõgeva	7	2	—	—
Kohtla-Järve	5(4)	5(2)	—	—
Kingissepa	14	13	3	24
Paide	13	6	1	11
Põlva	14	11	5	44
Pärnu	3	1	2	27
Rakvere	23	16	3	56
Rapla	18(3)	12(3)	1	17
Tartu	9	7	1(2)	6(26)
Valga	13	3	1	7
Viljandi	48(1)	39(1)	2	17
Võru	13	2	1	
Väljaspool ENSV-d	5	3	2	10
Kokku	373(84)	250(78)	37(5)	

Kontrolltöö nr. 3 ülesanded said õpilased kätte brošüüri «Absoluutväärtus» näol, milles peale lühikest teoreetilist sissejuhatust olid veel harjutusülesanded koos lahendustega.

Kontrolltöö nr. 4 tuli õpilastel esitada 1. septembriks. See kontrolltöö sisaldas valiku mitmesuguseid ülesandeid geomeetriast ja algebrast. Septembri algul saadeti MMK õpilastele brošüür «Loogiliste keerdülesannete lahendamisest», mis sisaldas viienda kontrolltöö, novembri algul aga tõenäosusteooria põhimõistetele pühendatud brošüür kuuenda kontrolltööga.

MMK brošüürides on antud ka sisseastumiseksami ja kontrolltööde ülesannete lahendused.

Kuigi MMK põhiliseks töövormiks on kirjavahetus MMK ja tema õpilaste vahel, korraldati juba kooli eksisteerimise esimesel aastal ka matemaatilised lektooriumid ühingu «Teadus» kaasabil Tartus ja Tallinnas. Vaatamata sellele, et loengud olid tasulised, kujunes osavõtt neist küllaltki aktiivseks.

Järgmine vastuvõtt MMK esimesele kursusele toimus 1966/67. õppeaasta alguses. MMK vastuvõtueksami ülesannete tekstid saadeti juba 1. septembriks kõikidesse koolidesse ning avaldati ka vabariiklikes noorsooajalehtedes. Esitame need ülesanded.

1966. A. SISSEASTUMISEKSAMI ÜLESANDED

1. Teatud aastal ei olnud mingi kuupäev ühelgi kuul pühapäevaks. Mis kuupäev see oli?

2. Võrdhaarses kolmnurgas on alusnurga poolitaja võrdne ühega kolmnurga külgedest. Leida selle kolmnurga nurgad.

3. Lahendada järgmine võrrand (a on suvaline arv):

$$x^4 + a^4 - 3ax^3 + 3a^3x = 0.$$

4. Linnad A ja B asuvad jõe kaldal teineteisest 10 km kaugusel. Laev sõidab linnast A linna B ning sealt peatumata tagasi linna A ühe tunniga. Kas 20 km läbimiseks järvel kulub sellel laeval aega rohkem või vähem kui üks tund?

5. Kui palju leidub ühest miljonist väiksemaid naturaalarve, mis ei jagu ei kahe, kolme ega viiega)?

6. Kuusnurgas $ABCDEF$ on kõik nurgad võrdsed. Tõestage, et $AB - DE = EF - BC = CD - FA$.

7. Tavaliselt jõudis kapten Luik linna kell 19.00. Jaamas ootas teda auto, mis viis ta koju. Kuid ükskord jõudis kapten Luik linna kell 18.00. Ta hakkas koju minema jalgsi, kuid mõne aja pärast kohtas ta autot, mis viis ta koju 20 minutit varem kui tavaliselt. Kui kaua tuli tal jalgsi minna?

8. Tõestada, et kui

$$\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} = 0,$$

siis ka

$$\frac{a}{(b-c)^2} + \frac{b}{(a-c)^2} + \frac{c}{(a-b)^2} = 0.$$

9. 1966 poissi seisavad ringis. Nad tahavad ühte enda hulgast välja valida ja teevad seda järgmiselt: esimene jääb ringi, temale järgnev (päripäeva lugedes) lahkub aga ringist, kolmas jääb ringi, neljas lahkub jne. Ring tõmbub koomale seni, kuni järele jääb vaid üksainus poiss. Selgitage, kes nimelt jääb viimasena ringi, s. t. mitmendal kohal (esimesest poisist päripäeva lugedes) asus ta alguses.

10. Leida kõik niisugused naturaalarvude paarid m, n, mille puhul järgmistest väidetest kolm on õiged ja üks vale:

1) $m+1$ jagub n-ga,
2) $m = 2n+5$,
3) $m+n$ jagub kolmega,
4) $m+7n$ on algarv.

11. Trapetsi pindala võrdub ühega. Millise vähima väärtuse võib omandada selle trapetsi pikem diagonaal?

12. a) Tõestada, et $a > 0$ korral $a + \frac{1}{a} \geqslant 2$.

b) Konstrueerida funktsiooni $y = x + \frac{1}{x}$ graafik.

13. Kui mootorpaat liigub kiirusega v km/t, siis läheb see maksma $90 + 0{,}4v^2$ rubla tunnis. Missuguse kiirusega peab mootorpaat liikuma, et teekonna ühe kilomeetri hind oleks minimaalne (vähim)?

Matemaatika ajaloost

BERNHARD RIEMANNI ELUST JA LOOMINGUST

E. Tamme

Käesoleval aastal möödub 140 aastat ühe suurima saksa matemaatiku Bernhard Riemanni sünnist ja 100 aastat tema surmast. Riemanni looming kuulub ajajärku, millal matemaatikas toimus üks sügavamaid murranguid — hakkas arenema kaasaegne matemaatika, mille alusmüüri esimesteks kivideks on Nikolai Lobatševski ja Evariste Galois' tööd möödunud sajandi 20-ndatest aastatest. Bernhard Riemann on matemaatikat rikastanud tohutu hulga uute viljakate ideedega, mis on suunanud paljude matemaatikaharude arengut viimasel aastasajal. V. I. Gontšarov kirjutab [1]: «Riemanni kohta võib veel suuremal määral kui Gaussi kohta öelda, et ta seisab kahe epohhi piiril, ühendades endas nende vastuolusid: ta on kindlalt seotud klassikutega, eriti Gaussiga, kellele ta on lähedane temaatikas (kuigi vastandlik iseloomuomaduste ja loomingulise temperamendi poolest), kuid veel tihedamad sidemed seovad teda järgnevate põlvkondadega. «Mitte keegi teine pole avaldanud olulisemat mõju kaasaegsele matemaatikale kui Riemann,» — nii ütles tema kohta F. Klein ja tuleb arvata, et need sõnad pole kaotanud oma tähendust ka tänapäeval.»

Georg Friedrich Bernhard Riemann sündis 17. septembril 1826. a. Hannoveri kuningriigis Breselenzi külas (Dannenbergi ligidal Elbe ääres). Tema lapsepõlv möödus läheduses asuvas Quickborni kiriklas, kuhu nende perekond peatselt siirdus. Isa Friedrich Bernhard Riemann oli kirikuõpetajaks. Bernhard oli nende perekonnas teiseks lapseks 6 lapse hulgas, tal oli 4 õde ja noorem vend Wilhelm. Alghariduse sai Bernhard kodus isalt.

1840. aastal lahkub 13-aastane Bernhard isakodust, asub õppima Hannoveri gümnaasiumis ja elama emapoolse vanaema juurde. Õpingud kulgesid edukalt. Ilmneb aga nooruki argus ja inimestekartlikkus ning kalduvus üksindusse, millest Riemann ei saa täielikult lahti kogu oma elu jooksul. Hannoveris ja ka hiljem tunneb ta end alati tihedalt seotud olevat oma perekonnaga, elab sügavalt kaasa selle muredele ja rõõmudele, külastab ikka ja jälle Quickborni, kui selleks avaneb võimalusi.

---

[1] Риман Б., Сочинения. М.—Л., 1948, lk. 7.

Pärast vanaema surma 1842. a. jätkab Bernhard Riemann õppimist kodule lähemas Lüneburgi gümnaasiumis. Ta õpib hästi, hiilgavaid võimeid näitab aga matemaatikas. Seetõttu annab kooli direktor Schmalfuss talle lugeda matemaatika-alaseid töid oma raamatukogust ning on sageli hämmastunud, kui Riemann need juba mõne päeva pärast tagasi toob, kusjuures vestlusest selgub, et ta on raamatud läbi töötanud ja neist täielikult aru saanud. Nii tutvub Riemann juba gümnaasiumis kõrgema matemaatika probleemidega, näiteks Euleri tööde kaudu matemaatilise analüüsiga, Legendre'i tööde kaudu arvuteooria ja geomeetriaga. Schmalfuss iseloomustas hiljem Riemanni[2]: «Tal oli peaaegu uskumatu anne tajumiseks, loominguliseks fantaasiaks ja samal ajal ka kõige abstraktsemateks üldistusteks.»

1846. a. kevadel astus Riemann Göttingeni ülikooli õppima filoloogiat ja teoloogiat. Isa soovis nimelt, et ka tema pojast saaks kirikuõpetaja. Vaatamata juba selgelt ilmnenud huvile matemaatika vastu, nõustus Riemann isa otsusega. Nähtavasti lootis ta nii rutem abistada perekonda rahaliselt. Filoloogia- ja teoloogialoengute kõrval kuulas Riemann aga ka matemaatikaloenguid, nimelt Sterni loenguid võrrandite numbrilisest lahendamisest ja määratud integraalidest ning Gaussi loenguid vähimruutude meetodist. Õpingutes ilmnes Riemanni vastupandamatu kalduvus matemaatikale ning lõpuks sai ta isalt loa end täielikult oma lemmikainele pühendada.

Uute teadmiste ja ideede järele janunevat Riemanni ei rahuldanud aga Göttingeni ülikool, kuigi selles töötas möödunud sajandi suurimaid matemaatikuid Carl Friedrich Gauss (1777—1855), kelle ideeliseks järglaseks Riemann hiljem kujunes. F. Klein kirjutab[3]: «Hämmastav ja peaaegu mõistatuslik meile on Riemanni lähedus Gaussi teaduslikele ideedele. Riemann ei saanud palju kuulata sel ajal juba 70-aastast Gaussi, kes üldse vähe loenguid pidas. Noor arg üliõpilane ei saanud kahtlemata luua ka isiklikke suhteid Gaussiga, kes õpetas vastumeelselt, ei rahuldanud oma kuulajate enamiku huvisid ja oli siis üldse kättesaamatu. Siiski peame me Riemanni lugema Gaussi õpilaseks, seejuures ainsaks tema tõeliseks õpilaseks, kes tungis, nagu me võime nüüd järk-järgult selgitada tema pärandist, Gaussi varjatud ideedesse: samuti nagu Gauss otsis ta funktsiooni $f(x+iy)$ seost ühelt poolt konformse kujutamisega ning teiselt poolt võrrandiga $\Delta u = 0$ ja füüsika mitmesuguste naaberaladega.»

1847. a. kevadel sõidab Riemann Berliini, kus õpib 2 aastat. Berliini ülikoolis kuulab Riemann eeskätt Carl Gustav Jacobi (1804—1851) ja Peter Gustav Lejeune Dirichlet' (1805—1859)

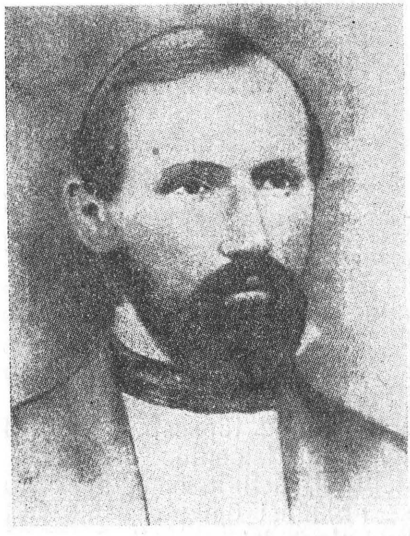
---

[2] Prashad, G., Some great mathematicians of the nineteenth century I. Benares, 1933, lk. 295.

[3] Клейн Ф., Лекции о развитии математики в XIX столетии I. М.—Л., 1937, lk. 291.

loenguid, nimelt Jacobi loenguid analüütilisest mehhaanikast ja kõrgemast algebrast ning Dirichlet loenguid arvuteooriast, määratud integraalide teooriast ja osatuletistega diferentsiaalvõrranditest. Jacobi ja Dirichlet polnud mitte ainult sügavad matemaatikud, vaid ka suurepärased pedagoogid. Loengutes tutvustasid nad matemaatika aktuaalseid probleeme, sealhulgas ka oma saavutusi, ja kogusid enda ümber arvuka õpilaste pere. Eriti sügavat sisemist sümpaatiat tundis Riemann Dirichlet' vastu, kelle töödega on seotud paljud Riemanni uurimused.

1849. a. kevadel pöördub Riemann, tulvil uusi ideid ja kavatsusi, tagasi Göttingeni. Juba Berliinis oli ta hakanud töötama kompleksmuutuja funktsioonide teooria küsimuste kallal, mis said tema doktoritöö aineks ning määrasid edasiste uurimuste põhisuuna. Kuid doktoritöö valmis alles kahe aasta pärast. Selline viivitus on ühelt poolt seletatav selle äärmise hoolikusega, millega Riemann suhtus kõigisse trükki suunatud töödesse (see asjaolu isegi takistas Riemannil tööde avaldamist, mistõttu tema elu ajal ilmunud uurimused moodustavad kogutud teostes kokku ainult umbes 200 lk.), teiselt poolt aga füüsika probleemidega tegelemisega.



B. Riemann

Nimelt leidis Riemann endale Göttingenis isaliku sõbra ja nõuandja füüsikaprofessor Wilhem Weberi (1804—1891) näol. 1850. a. astub Riemann Göttingenis äsja asutatud füüsika-matemaatikaseminari liikmeks ning abistab Weberit assistendina füüsika praktikumis. Weber äratas Riemannis ka sügava huvi looduse matemaatilise uurimise vastu, mis on avaldanud tugevat mõju Riemanni loomingule.

1851. a. ilmub trükist Riemanni esimene uurimus «Kompleksmuutuja funktsioonide üldise teooria alused», mille ta kaitseb doktoritööna sama aasta 16. detsembril. Gauss annab tööle kiitva hinnangu, märkides, et see ületab kaugelt doktoritööle seatavaid nõudeid. V. S. Gontšarov kirjutab[4]: «Riemanni doktoriväitekiri *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer veränderlichen complexen Grösse* on üheks tema tähtsamaks teo-

[4] Риман Б., Сочинения. М.—Л., 1948, lk. 481.

seks: see märgib ära kogu tema edasise töö põhisuuna. Ühtlasi sisaldub selles töös terve teaduslike uurimuste programm analüütiliste funktsioonide valdkonnas, mis näitab selle teooria ühte arenguteed terveks aastasajaks kuni meie ajani. Oma väitekirjas andis Riemann soliidse põhjenduse analüütilise funktsiooni mõistele (selles ta jagab kuulsust Cauchyga) ning koos sellega lõi uue «geomeetrilise» suuna kompleksmuutuja funktsioonide teoorias.» Öeldut arvestades tundub kummalisena, et see töö esialgu ei kutsunud esile peaaegu mingeid vastukajasid.

Pärast doktoriväitekirja kaitsmist kirjutab Riemann isale, et pole enam mingeid takistusi tema määramiseks eradotsendi kohale, kui habilitatsioonitöö on valmis. Kuid möödub veel kaks ja pool aastat, enne kui Riemann saab Göttingeni ülikooli dotsendiks. Habilitatsioonitöö teemaks on ta juba siis valinud trigonomeetrilised read, mis on tihedalt seotud Lejeune Dirichlet' töödega. 1852. a. sügisesel õppevaheajal viibib Göttingenis ka Dirichlet, kellega Riemann põhjalikult arutab selle töö probleeme.

1853. a. detsembris esitab Riemann habilitatsioonitöö «Funktsiooni esitatavusest trigonomeetrilise rea abil» (*Ueber die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe*). Trükist ilmus see trigonomeetriliste ridade ja üldse reaalmuutuja funktsioonide teooria arengus olulist osa etendanud töö aga alles pärast autori surma 1868. a. Selles ta uurib põhjalikult koonduvate trigonomeetriliste ridade omadusi ning selliste ridade abil esitatavate funktsioonide klassi. Seejuures tekib Riemannil kõigepealt vajadus täpsustada määratud integraali mõistet ja integreeruvate funktsioonide klassi. Nii esitabki Riemann siin määratud integraali definitsiooni, mis tänapäeval esineb kõigis matemaatilise analüüsi õpikutes, ning näitab selle olemasolu tingimused. Muuhulgas leiame sellest tööst ka Riemanni teoreemi all tuntud tulemuse, et tingimisi koonduva rea saab nii ümber järjestada, et tema summaks on mistahes etteantud reaalarv.

Koos habilitatsioonitööga andis Riemann ka kolm teemat prooviloengu jaoks, millest teaduskond valis välja ühe. B. Riemann kirjutas 28. detsembril 1853. a. vennale[5]: «Mõlemad esimesed teemad olid mul juba valmis ja ma lootsin, et valitakse üks neist; Gauss aga valis kolmanda ja nii olen ma nüüd jälle kimbus, sest selle pean ma veel välja töötama.» Kolmandaks teemaks oli «Hüpoteesidest, mis on geomeetriale aluseks» (*Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*). Gauss ilmselt tundis huvi, mida noormees suudab öelda teda ennast nii palju erutanud küsimuste kohta.

Et sellel talvel Riemann haigestus, siis toimus prooviloeng alles 10. juunil 1854. a. Göttingeni ülikooli filosoofiateaduskonna ees. Kohal viibis ka Gauss, kellele see eeskätt oli mõeldud. Püüdes

[5] Riemann, B., Gesammelte mathematische Werke. Leipzig, 1892, lk. 547.

teha ettekannet arusaadavaks ka kuulajatele-mittematemaatikutele, vältis Riemann selles peaaegu täielikult matemaatilisi valemeid. Ettekanne kujutab nii sisult kui ka vormilt tõelist meistriteost, selle järele on taastatav ka vastav matemaatiline aparatuur. Oma sisulise sügavuse poolest ületas loeng kõik Gaussi ootused. Selles sisaldub terve geomeetria suuna programm ja ideestik, nimelt n-mõõtmeliste nn. Riemanni ruumide teooria tuum. Trükis aga ilmus ka see töö alles 1868. a. ja moodustab umbes 15 lehekülge.

Suve veetis Riemann Quickbornis ning sügisel asus Göttingenis eradotsendina lugema osatuletistega diferentsiaalvõrrandite teooriat koos rakendustega füüsikasse. Ta kirjutab oma vanemale õele Idale, et kuulajaid oli registreerunud üle ootuste palju, nimelt 8. Vaatamata loengute põhjalikule ettevalmistamisele, põhjustas nende suuline ettekandmine esimesel õppeaastal Riemannile üsna palju raskusi. Sageli ei suutnud kuulajad jälgida ettekande mõttesügavust ja esineja kiiret mõttelendu. F. Klein kirjutab[6]: «Oma esimestel argadel, oskamatutel esinemistel pidi noor dotsent, kellele meie, kes me oleme tulnud ellu ja teadusse pärast teda, vaatame kui pühakule, taluma oma kolleegide mitmesuguseid torkeid ja iroonilist suhtumist. Väga sageli langes ta süngesse meeleollu, mis viisid melanhooliahoogudeni... Eraldudes ümbritsevast maailmast elas ta vaikselt oma erakordselt rikast isiklikku elu. Riemann oli tüüpiline geeniuse kuju; vaikne ja veidi veidrik väliselt, täis jõudu ja erakordse haardega sisemiselt.»

Riemann luges aastatel 1854—1862 igal poolaastal üks kuni kaks kursust. Ta õppis lugema arusaadavamalt ning juhtima kuulajaid sügavate matemaatiliste probleemideni, sealjuures mõistma ka tema oma tulemusi. Pärast Riemanni surma andsid tema õpilased välja «Osatuletistega diferentsiaalvõrrandid ja nende rakendamine füüsikas» (K. Hattendorff, 1869), «Raskus, elekter, magnetism» (K. Hattendorff, 1875), «Elliptilised funktsioonid» (H. Stahl, 1899) ja veel mõned teised loengud «lisana» (*Nachträge*) Riemanni töödele (1902). Nendest loengutest leiti tulemusi, mida pärast Riemanni surma olid uuesti avastanud teised matemaatikud.

23. veebruaril 1855. a. suri Gauss, tema järglaseks kutsuti Berliinist Lejeune Dirichlet. Paljud taotlesid Riemanni nimetamist erakorraliseks professoriks, kuid tagajärjeta. Ainuke, mida saavutati, oli teatav palga tõus. Riemann ei leidnud veel tunnustamist, kuigi tema kolmes töös sisaldus juba suur osa tulemustest, mis panevad tema nime tänapäeval kõlama kogu matemaatikas.

Dirichlet' toetusel valib Riemann 1855/56. õppeaastal loengute temaatika omaenda uurimustest, nimelt kompleksmuutuja funktsioonide teooriast. Eriti peatub ta elliptiliste ja Abeli funktsioonide

---

[6] Клейн Ф., Лекции о развитии математики в XIX столетии I. М.—Л., 1937, lk. 290.

teoorial. Kuulajaid oli 3. Järgmisel aastal loeb ta kursust uuesti, kuid spetsiaalsete funktsioonidena vaatleb hüpergeomeetrilist rida ja sellele lähedasi funktsioone.

Nende loengute materjalidest kasvas välja Riemanni kaks suuremat uurimust «Gaussi rea $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ abil esitatavate funktsioonide teooriast» *(Beiträge zur Theorie der durch die Gauss'sche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ darstellbaren Funktionen)* ja «Abeli funktsioonide teooria» *(Theorie der Abel'schen Funktionen)*, mis ilmusid 1857. a. Need tööd panid oma sügavuse ja rikkusega hämmastama kogu maailma matemaatikuid. Esimene neist on seotud Gaussi töödega, teine Jacobi ja Weierstrassi töödega.

Vaadeldavatel aastatel tabab Riemanni perekonda rida raskeid hoope, mis teda sügavalt vapustavad. 1855. a. sureb B. Riemanni isa ja õde Clara. Kolm õde (ema suri juba varem) siirduvad Quickbornist Brehmenisse vend Wilhelmi juurde. 1857. a. sureb Wilhelm ja järgmise aasta algul ka õde Marie. Kaks veel elavat õde võtab Bernhard Riemann oma ülalpidamisele. Õdede saabumine Göttingeni tõstab mõningal määral Riemanni vägagi masendatud meeleolu ja töötahet.

1857. a. nimetati Riemann filosoofiateaduskonna erakorraliseks professoriks ja Lejeune Dirichlet' surma järel 1859. a. korraliseks professoriks. Sama aasta detsembris valiti ta ka Göttingeni Teadusliku Ühingu liikmeks, mõni kuu varem nimetati Berliini Teaduste Akadeemia korrespondeerivaks liikmeks. Seoses sellega sõidab ta koos kolleeg Richard Dedekindiga (1831—1916) Berliini, kus teda sealsed matemaatikud E. E. Kummer ja L. Kronecker, K. Weierstrass jt. suure austuse ja südamlikkusega vastu võtavad.

Berliini Teaduste Akadeemia annab 1959. a. välja Riemanni töö «Antud suurust mitte ületavate algarvude arvust» *(Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse)*, milles on kokku võetud tema uurimused algarvude jaotuse kohta. Selles 9-leheküljelises töös vaatleb ta juba Euleril esinenud funktsiooni

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}$$

(korrutis on võetud üle kõigi algarvude) kompleksmuutujafunktsioonina (tänapäeval nimetatakse seda Riemanni dzeeta-funktsiooniks) ning näitab rea selle väga sügavaid omadusi, kuid alati ei too ammendavaid tõestusi. Tekstist pole ka sageli selge, millised väited olid Riemannil rangelt tõestatud ja millised vaid hüpoteesid. Riemannile on üldse omane, et ta tavaliselt ei peatu detailidel ja tõestuste formaliseerimisel, vaid, olles veendunud oma mõttekäikude õigsuses, läheb suurte sammudega edasi. Ka vaadeldava töö tulemuste tõestuskäikude taastamine sai matemaatikute järgnevate põlvkondade ülesandeks, selle käigus tekkisid ja hakkasid arenema uued matemaatilised teooriad. Dzeeta-funktsiooni käitumise uurimine komplekstasandil pani aluse nn. analüütilise arvuteooria arengule.

Märgime, et mõnedes dzeeta-funktsiooni olulistes omadustes pole veel tänapäevalgi selgust. Riemann näitas, et sellel funktsioonil on ainult üks poolus $s = 1$ ja nn. triviaalsed nullkohad $s = -2, -4, -6, \ldots$ ning peale selle veel nullkohti, mille reaalosa rahuldab tingimusi $0 < \mathrm{Re}\, s < 1$. Ta püstitas hüpoteesi (nn. Riemanni hüpoteesi), et kõik sellised nullkohad asuvad komplekstasandi sirgel $\mathrm{Re}\, s = \frac{1}{2}$. Viimast, mitmetes probleemides olulist väidet pole õnnestunud ei tõestada ega ka ümber lükata. Muide, David Hilbert olevat küsimusele, mida ta kõigepealt teada tahaks, kui ta 100 aastat pärast oma surma veel kord matemaatikutega kohtuks, vastanud: «Seda, kas Riemanni hüpotees on tõestatud».

Peale Dirichlet' surma tugevneb Weberi mõju Riemannile ning nii loengutes kui ka uurimustes pöördub ta suuremal määral matemaatilise füüsika probleemide poole. Kui varasemas loomingu-perioodis huvitasid Riemanni eeskätt üldiste loodusseaduste matemaatiline kirjeldamine, siis loomingu küpsel perioodil asub ta uurima konkreetsemaid probleeme, rakendades seejuures sügavamat matemaatilist aparatuuri. Selle perioodi tähtsamateks töödeks on 2 suurt uurimust: «Tasandiliste lõpliku amplituudiga õhulainete levimisest» (*Ueber die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwindungsweite*, 1860) ja «Kirjutis uurimustest vedela homogeense ellipsoidi liikumise kohta» (*Ein Beitrag zu den Untersuchungen über die Bewegung eines flüssigen gleichartigen Ellipsoides*, 1861). Viimane neist on seotud kosmogooniliste teooriatega ja taevakehade kuju uurimisega. Riemann on vedela keha liikumist kirjeldava diferentsiaalvõrrandite süsteemi lahendanud vägagi üldisel juhul, mis erijuhtudena haarab kõik varemtuntud juhud. Esimeses uurimuses töötab ta muuhulgas välja üldise meetodi teist järku hüperboolset tüüpi osatuletistega diferentsiaalvõrrandite lahendamiseks.

3. juunil 1862. a. abiellub Riemann Elise Kochiga, oma õdede sõbratariga. Juba järgmisel kuul haigestub Riemann külmetuse tagajärjel kopsukelmepõletikku. See toob endaga kaasa kopsutuberkuloosi, mis põhjustabki Riemanni varajase surma.

Arstid soovitavad Riemannile pikemaajalist ravi lõunas. Wilhelm Weberi eestkostmisel õnnestub tal saada pikem puhkus ja tõhus toetus ning 1862. a. novembris siirdubki Riemann Itaaliasse. Pikemat aega viibib ta Messiinas, paranemise järel aga sooritab reisi läbi kogu Itaalia, naudib selle loodust, arhitektuuri ja kunsti ning kohtub ka itaalia matemaatikutega. Parimate lootustega saabub ta 1863. a. juunis Göttingeni. Teel aga külmetub ta tugevasti, tervis halveneb uuesti ning juba sama aasta augustis sõidavad Riemannid uuesti tagasi Itaaliasse. Pikemat aega peatub Riemann Pisas, kus 1863. a. detsembris sünnib tal tütar, kellele nimeks pandi Ida; 1864. a. kevadel aga kaotab õe Helene.

1865. a. oktoobris pöördub Riemann jälle Göttingeni, kus lõpetab juba Itaalias alustatud töö «Teeta-funktsiooni nulliks muutumisest» *(Ueber das Verschwinden der Theta-Functionen)*, mis jääb viimaseks tema eluajal avaldatud uurimuseks. See on teatav täiendus tööle «Abeli funktsioonide teooria».

Riemanni looming leiab järjest suuremat tunnustust. 1866. a. märtsis valiti ta Berliini Teaduste Akadeemia liikmeks ja Pariisi Akadeemia korrespondeerivaks liikmeks, sama aasta juunis Londoni Kuningliku Ühingu välismaiseks liikmeks. Kuid tema haigus süveneb. Juunis siirdub Bernhard Riemann kolmandat korda Itaaliasse, kus sureb 20. juulil 1866. a. Selescas Lago Maggiore järve ääres.

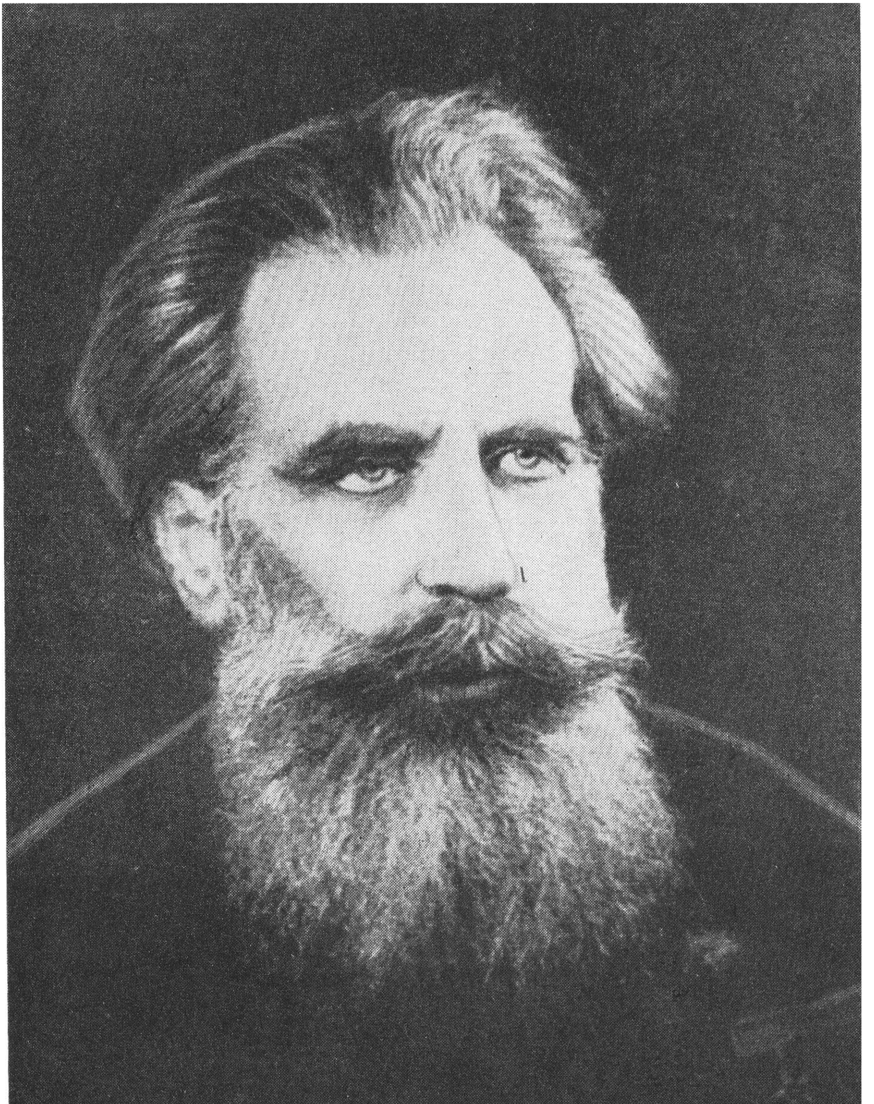
Kuid Riemanni looming alles alustab oma võidukäiku. Palju sellest on matemaatikutele veel peaaegu tundmatu. Riemanni perekond andis kogu tema teadusliku pärandi Richard Dedekindi käsutusse, kes avaldas rea käsikirja jäänud uurimusi, sealhulgas ka kuulsa habilitatsioonitöö ja prooviloengu. Riemanni kogutud tööd ilmusid Heinrich Weberi toimetamisel 1876. a., selle kordustrükk 1892. a. ja venekeelne tõlge 1948. a. Lisaks anti välja ka rida Riemanni loenguid, millest oli juttu juba eespool.

Riemanni looming on teatava määrani vastandlik teise suure saksa matemaatiku Weierstrassi loomingule. Kui viimane taotles kõikjal matemaatilist rangust, järjekindlust ja süstemaatilisust, siis Riemannile on omane ideede uudsus, sügavus ja laiahaardelisus. Nende detailne läbitöötamine, rangesse matemaatilisse vormi valamine jäi matemaatikute järgnevate põlvkondade ülesandeks. F. Klein kirjutas käesoleva sajandi 20-ndatel aastatel[7]: «Riemann on hiilgavaima intuitsiooni mees. Oma kõikehaarava geniaalsusega ületab ta kõiki oma kaasaegseid. Seal, kus puhkeb tema huvi, läheneb ta uurimistele alati uut moodi, mitte lastes end segada traditsioonidel, mitte tunnustades ühegi süsteemi kitsendavaid raame.» — «Kõigi väidete tõestuste loomine on kahtlemata iga matemaatilise teooria nurgakiviks. Kui matemaatika loobuks vajalikest tõestustest, määraks ta end kahtlemata hukkumisele. Kuid geeniuse loomingu saladuseks jääb alatiseks uute probleemide otsimine, uute teoreemide tajumine... Ilma uute vaatenurkade loomiseta, uute sihtide seadmiseta võiks matemaatika kogu oma loogilises ranguses end ammendada ja tarduda, kasutanud ära kogu materjali. Seega soodustavad matemaatika arengut teatavas mõttes enam need, kes ei paista silma mitte niivõrd oma tõestuste rangusega, kuivõrd oma intuitsiooniga. Riemann on viimaste aastakümnete matemaatik, kes ka tänapäeval mõjustab tööd tunduvalt suuremal määral kui keegi teine.»

---

[7] Клейн Ф., Лекции о развитии математики в XIX столетии I. М.—Л., 1937, lk. 288, 314.

Bernhard Riemann
17. IX 1826—20. VII 1866



Otto Juljevitš Schmidt
30. IX 1891—7. IX 1956

RIEMANN TOPOLOOGIA JA ÜLDISE KÕVERA RUUMI GEOMEETRIA LOOJANA

Ü. Lumiste

Riemanni töödest matemaatilise analüüsi ja selle rakenduste valdkonnas on raske saada lähemat ülevaadet ilma kõrgema matemaatika spetsiaalsete harude tundmiseta. Teistsugune on olukord Riemanni töödega topoloogia ja geomeetria alal. Nendele on lähteks mõningad lihtsad ideed, mida on võimalik selgitada ka näitlikult ilma analüüsi aparatuuri ulatuslikuma kasutamiseta.

Riemanni loetakse õigustatult topoloogia loojaks. N. Bourbaki iseloomustab Riemanni loomingu seda osa järgmiselt[1]: «Ta püüdis esimesena eritleda topoloogilise ruumi mõistet, esitas nende ruumide iseseisva teooria idee, defineeris invariandid («Betti arvud»), mis etendasid peamist osa topoloogia järgnenud arengus, ja andis nende esimesed rakendused analüüsis (Abeli integraalide perioodid)». Topoloogiat nimetati tollal *Analysis situs* (asendi analüüs). Enne Riemanni töid oli sellelt alalt ilmunud ainult üks töö — J. B. Listingi (1808—1882) artikkel ajakirjas *«Göttinger Studien»* 1847. aastal. Nelja aasta pärast ilmus Göttingenis B. Riemanni doktoriväitekiri, milles Riemann muu hulgas arendas silmapaistvalt uut, peaaegu veel puutumatut uurimissuunda ja näitas selle väärtuslikke rakendusi kompleksmuutuja funktsioonide teoorias.

Lähteks said Riemannile kompleksmuutuja mitmeste funktsioonide esitamisega seotud probleemid. Alustame järgmisest näitest. Valemiga $z = w^2$, kus $z = x + iy$ ja $w = u + iv$ on kompleksarvulised muutujad, esitatakse lihtne kompleksmuutuja funktsioon, mis kompleksarvule w seab vastavusse tema ruudu. On teada, et kui $w = \sigma(\cos\psi + i\sin\psi)$, siis $z = \sigma^2(\cos 2\psi + i\sin 2\psi)$. Kui kompleksarve kujutada tasandi punktidena, siis $z = w^2$ määrab sellel tasandil teatava teisenduse (joon. 1).

Valemit $z = w^2$ võib aga tõlgendada ka vastupidiselt kui eeskirja, mis igale kompleksarvule z seab vastavusse need kompleksarvud w, mis antud z korral rahuldavad seda võrrandit. Selliselt jõuame esialgse funktsiooni pöördfunktsiooni $w = z^{\frac{1}{2}}$ mõiste juurde. Osutub, et see pöördfunktsioon pole enam ühene: antud

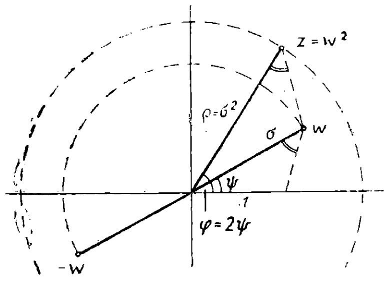
[1] Бурбаки Н., Очерки по истории математики. М., 1963, lk. 138.

$z = \varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \varrho(\cos(\varphi + 2\pi) + i\sin(\varphi + 2\pi))$ puhul vastab talle koos kompleksarvudega $w = \sqrt{\varrho}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right)$ ka kompleksarv

$$\sqrt{\varrho}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi}{2} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi}{2}\right) = -\sqrt{\varrho}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right) = -w.$$

Tegemist on kahese funktsiooniga.

Kujutleme nüüd järgmist olukorda. Lähtume teatavast punktist $z_0 = \varrho_0 e^{i\varphi_0}$ (siin oleme kasutanud seda, et Euleri valemi põhjal $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$) ja valime ühe kahest temale vastavast punktist, näiteks $w_0 = \sqrt{\varrho_0}\, e^{\frac{i\varphi_0}{2}}$. Paneme punkti $z = \varrho_0 e^{i\varphi}$ liikuma mööda ringjoont alguspunktiga 0, s. t. laseme argumenti φ muutuda väärtusest φ_0 väärtuseni $\varphi_0 + 2\pi$. Sel korral $w = \sqrt{\varrho_0}\, e^{\frac{i\varphi}{2}}$ liigub mööda kontsentrilist ringjoont, kuid ainult poolpöörde võrra, minnes asendist w_0 asendisse $\sqrt{\varrho_0}\, e^{\frac{i\varphi_0 + 2\pi}{2}} = -\sqrt{\varrho_0}\, e^{\frac{i\varphi}{2}} = -w_0$



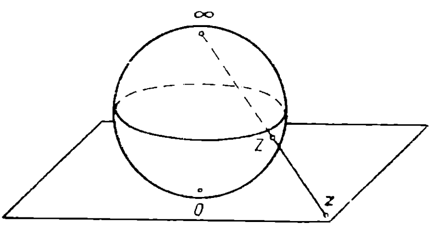
Joonis 1.

(joon. 1). Seejuures punkt $-w_0$ vastab samale punktile z_0 (sellest tulenebki funktsiooni kahesus tasandil). Kõneldakse, et punkt $z = 0$ tasandil on vaadeldava kahese pöördfunktsiooni $w = z^{\frac{1}{2}}$ hargnemispunkt — kui me punktiga z joonestame ükskõik missuguse aasa punkti $z = 0$ ümber, siis tagasi jõuame mitte enam sama, vaid juba teise funktsiooniväärtuse w juurde. (Märgime, et iga punkti $z \neq 0$ jaoks võib alati leida aasa, mis toob tagasi sama funktsiooniväärtuse w juurde — on vaja ainult jälgida, et haaratud poleks punkt $z = 0$.)

Riemanni uus idee seisneb järgnevas. Funktsiooni mitmesusest lahtisaamiseks tuleb määramispiirkonda laiendada selliselt, et niisugused «ebanormaalsed» aasad punkti $z = 0$ ümber poleks enam võimalikud. Vaadeldava funktsiooni $w = z^{\frac{1}{2}}$ puhul tuleb lisaks sellele veel garanteerida, et punkti $z = 0$ ümbritseva aasa kahekordne läbimine annaks tagasi uuesti sama punkti z_0 (sest siis jõuame jälle sama funktsiooniväärtuse $-(-w_0) = w_0$ juurde tagasi).

Sellise laiendatud määramispiirkonna defineerib Riemann järgmiselt. Ta asetab ühele tasandile veel teise tasandi, lõikab mõlemad lahti mööda rõhttelje positiivset poolsirget ning «kleebib kokku» (s. t. samastab mõttes) esimese tasandi lõike alumise ääre teise tasandi lõike ülemise äärega. Teisiti öeldes, ta loeb, et kui aasa tegemisel $z=0$ ümber punktiga z esimesel tasandil on jõutud lõike ääreni, siis tuleb «üle hüpata» teisele tasandile. Edasi tuleb «kleepida kokku» teise tasandi lõike alumine äär esimese tasandi lõike ülemise äärega (s. t. teisel tasandil lõike ääreni jõudmisel tuleb «tagasi hüpata» esimesele tasandile). Saadaval uuel «määramispiirkonnal» on vaadeldav funktsioon juba ühene. Harjumatuks võib siin osutuda see, et taolist «määramispiirkonda» saab ette kujutada ainult abstraktselt: tavaliste paberilehtedega võib teostada küll esimese kleepimise, kuid teist kleepimist siis enam tegelikkuses realiseerida ei saa.

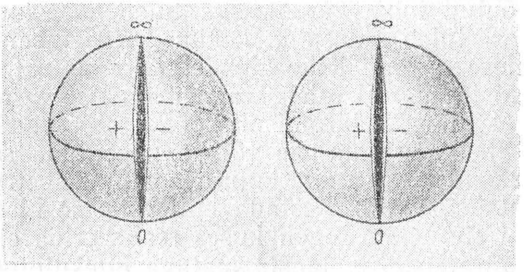
Sellest «määramispiirkonnast» teatava ettekujutuse saamiseks tulebki minna topoloogia valdkonda. Kompleksmuutuja funktsioonide teoorias täiendatakse tasandit teatavasti üheainsa lõpmata kauge punktiga, mis loetakse vastavaks sümbolile $z=\infty$. Viimase ainsaks iseloomulikuks omaduseks on see, et tema pöördväärtuseks on $z=\frac{1}{\infty}=0$. Riemann pani ette selliselt täiendatud tasandit — komplekstasandit — kujutleda näitlikult sfäärina («Riemanni sfäär»), seades tasandi igale punktile z vastavusse sfääri sellise punkti Z, mis asub sirgel ∞z, kus ∞ on sfääri ja tasandi puutepunktile 0 diametraalselt vastupidine punkt (joon. 2). (Saadud vastavust tasandi ja sfääri punktide vahel, mida uuris juba Ptolemaios II sajandil, nimetatakse stereograafiliseks projektsiooniks.) Komplekstasandi lõpmata kaugele punktile vastab sel korral tõesti üksainus punkt ∞. Märgime, et iga aas punkti 0 ümber on samal ajal aasaks ka punkti ∞ ümber. Seetõttu omab vaadeldav kahene pöördfunktsioon $w=z^{\frac{1}{2}}$ tasandil õieti kaks harunemispunkti 0 ja ∞.



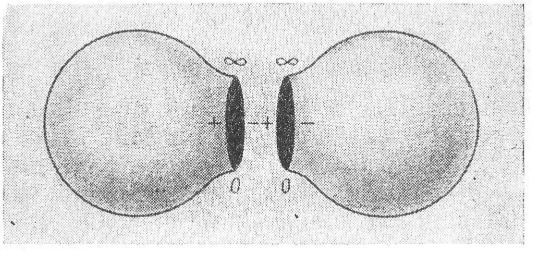
Joonis 2.

Eespool tehtud lõiked kahel komplekstasandil tähendavad nüüd seda, et kaks Riemanni sfääri tuleb lõigata lahti piki punkte 0 ja ∞ ühendavat meridiaani (joon. 3). Järgnevalt tuleb samastada servad (I, —) ja (II, +) ning servad (II, —) ja (I, +). Ei ole raske kindlaks teha, et sel puhul saadav pind on pidevalt deformeeritav sfääriks, ilma et seda tuleks vahepeal rebestada või täiendavalt kokku kleepida (võib näiteks kujutleda, et esialgsed sfäärid on tehtud kummist). Tarvitseb vaid sfääre pöörata nii, et lõiked satuksid kohakuti (joon. 4), teha kleepimised (joon. 5) ja seejärel saadud pind «täis puhuda».

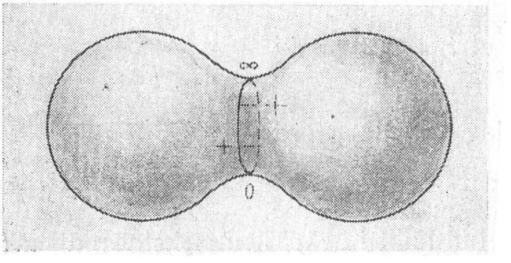
Peale seda saadud sfääri tulebki vaadelda uue «määramispiirkonnana» funktsiooni $w = z^{\frac{1}{2}}$ jaoks. Selle sfääri igale punktile



Joonis 3.



Joonis 4.

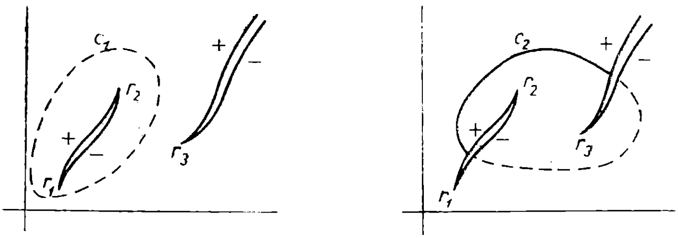


Joonis 5.

vastab juba funktsiooni $w = z^{\frac{1}{2}}$ üksainus väärtus ja «ebanormaalsed» aasad on seetõttu kadunud. On selge, et vaadeldud kahese funktsiooni loomulikuks määramispiirkonnaks ongi just selline laiendatud piirkond. Viimast nimetatakse funktsiooni $w = z^{\frac{1}{2}}$ Riemanni pinnaks. Nagu näha, on ta ülalkirjeldatud mõttes samaväärne sfääriga. Tänapäeval kõneldakse, et ta on topoloogiliselt ekvivalentne ehk homöomorfne sfääriga.

Olukord on täiesti analoogiline võrrandiga $w^2 = a_0 z^2 + a_1 z + a_2$ määratud funktsiooni $w = f(z)$ puhul. Siin võib võrrandi esitada kujul $w^2 = a_0 (z - r_1)(z - r_2)$. Funktsiooni $w = f(z)$ harunemispunktideks on siis punktid r_1 ja r_2 (punktide 0 ja ∞ asemel). Tuleb kaks komplekstasandit lõigata lahti mööda mingit neid punkte ühendavat joont ja teha kleepimised täpselt samuti nagu üIal näidatud. Selle funktsiooni Riemanni pind on samuti homöomorfne sfääriga.

Teistsuguseks muutub olukord võrrandiga $w^2 = a(z - r_1)(z - r_2)(z - r_3)$ määratud funktsiooni $w = f(z)$ korral. Sellel kahesel funktsioonil on komplekstasandil juba neli harunemispunkti — punktid r_1, r_2, r_3 ja ∞. Selleks et konstrueerida selle funktsiooni Riemanni pind — uus loomulik määramispiirkond, millel funktsioon oleks juba ühene, tuleb võtta jällegi kaks komplekstasandit, lõigata nad lahti mööda mingeid punkte r_1 ja r_2 ning r_3 ja ∞ ühendavaid jooni ning seejärel teha samalaadsed kleepimised (joon. 6).



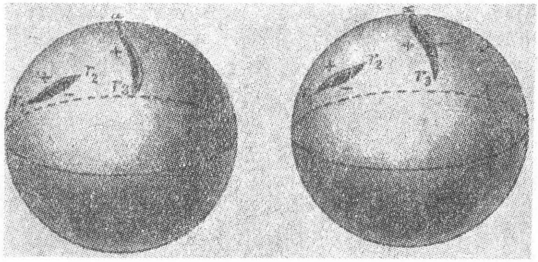
Joonis 6.

Osutub, et saadav Riemanni pind ei ole enam homöomorfne sfääriga. Oma topoloogiliselt ehituselt on ta samastatav rõngaspinnaga ehk tooriga. Tõepoolest, teeme vajalikud lõiked kahel Riemanni sfääril (joon. 7). Seejärel pöörame sfääre nii, et tekkinud avad satuksid kohakuti ja venitame need avad väikesteks torukesteks (joon. 8). Kokkukleepimisele kuuluvad servad satuvad just kohakuti. Jääb ainult avadega sfäärid lükata kokku (joon. 9), teha vajalikud kleepimised ja saadud pind seejärel «ümaraks puhuda» (joon. 10). Saamegi rõngaspinna ehk toori.

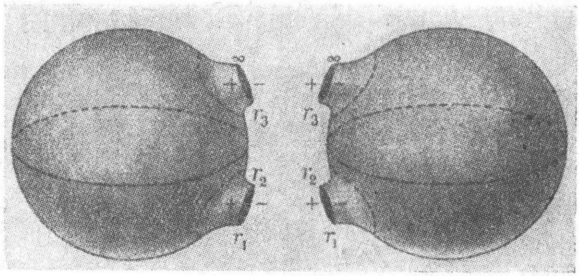
Selliselt käsitles Riemann kõikide algebraliste funktsioonide loomulikke määramispiirkondi. (Algebraliseks nimetatakse iga funktsiooni $w = f(z)$, mis rahuldab mingit algebralist võrrandit

$$a_0(z) w^n + a_1(z) w^{n-1} + \ldots + a_n(z) = 0,$$

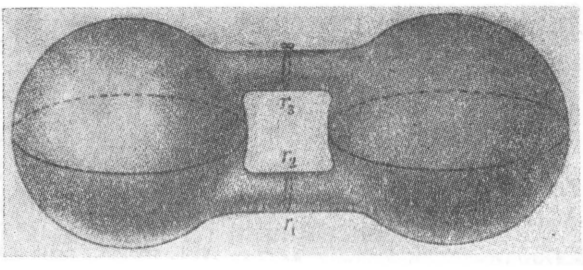
kus $a_i(z)$ on polünoomid kompleksarvuliste kordajatega.) Osutub, et iga algebralise funktsiooni Riemanni pind on topoloogiliselt



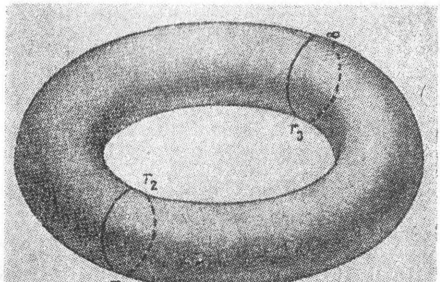
Joonis 7.



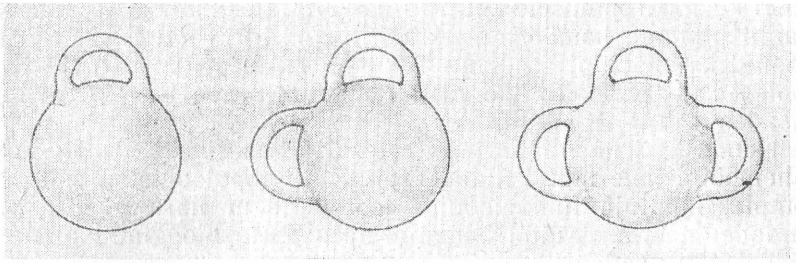
Joonis 8.



Joonis 9.



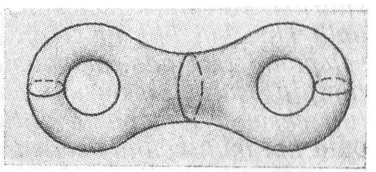
Joonis 10.



Joonis 11.

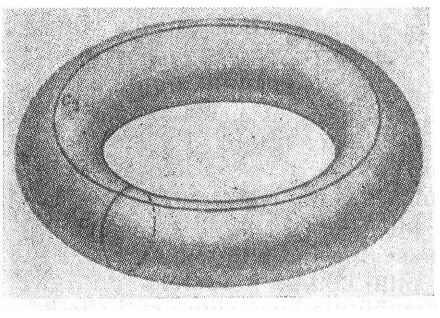
samaväärne «sangadega sfääriga» (joon. 11). Seejuures 1 sangaga sfäär on homöomorfne tooriga, kahe sangaga sfäär «kringliga» (joon. 12) jne. Kehtib järgmine huvitav Riemanni leitud seos:

$$p = \frac{\omega}{2} - m + 1,$$



Joonis 12.

kus ω on algebralise funktsiooni $w = f(z)$ harunemispunktide arv komplekstasandil (kui harunemispunkte lugeda nende kordsusega), m näitab, mitmene on see funktsioon (s. t. mitu w väärtust vastab ühele punktile z komplekstasandil), ja p näitab, mitu sanga tuleb lisada sfäärile, et saada funktsiooni Riemanni pinnaga homöomorfne pind.



Joonis 13.

Funktsiooni $w = z^{\frac{1}{2}}$ korral on näiteks $\omega = 2$, $m = 2$ ja $p = 1 - 2 + 1 = 0$. Võrrandiga $w^2 = a(z - r_1)(z - r_2)(z - r_3)$ määratud funktsiooni $w = f(z)$ puhul on need arvud järgmised: $\omega = 4$, $m = 2$, ja $p = 1$.

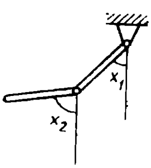
Arvu p hakati hiljem nimetama kinnise pinna liigiks. Riemann sidus selle pinnal määratud algebraliste funktsioonide integreerimisel tekkivate funktsioonide (Abeli integraalide) ja nende pöördfunktsioonide (Abeli funktsioonide) mõningate oluliste omadustega. Ta näitas, et kui teatava funktsiooni Riemanni pinna liik on p, siis vastaval Abeli funktsioonil on $2p$ perioodi. Nad vastavad sellistele aasadele Riemanni pinnal, mida ei saa mööda pinda tõmmata kokku punktiks ega pidevalt deformeerida üksteiseks. Joonisel 6 ja 13 on näidatud sellised aased c_1 ja c_2

kahel kokkukleepimisele kuuluval komplekstasandil ja tekkiva Riemanni pinnaga homöomorfsel tooril. Tooriga seotud Abeli funktsioonideks on elliptilised funktsioonid, millédel on teatavasti tõepoolest kaks perioodi; üks vastab c_1 tüüpi aasadele, teine c_2 tüüpi aasadele.

Nendest Riemanni uurimustest sai alguse ühelt poolt kinniste kahemõõtmeliste muutkondade (pindade) topoloogia, teiselt poolt kompleksmuutuja funktsioonide teooria suur haru — Riemanni pindade teooria. Kuid Riemanni teened topoloogia loojana ei piirdu ainult sellega.

Märksa üldisemaid lähtekohti käsitleb ta oma prooviloengus 1854. aastal. Selle esimeses osas esitab ta topoloogilise ruumi üldise idee, kõneldes järgmist.[2] *«Mõõtmine seisneb võrreldavate suuruste teineteisele asetamises, tähendab, mõõtmiseks peab olema võimalus kanda üht suurust, mis võetakse ühikuks, mööda teist suurust. Kui niisugust võimalust pole, saab kaht suurust võrrelda vaid siis, kui üks neist on teise osaks ... Uurimused, mida saab sel puhul teostada, moodustavad suuruste teooria mõõtmisest sõltumatu osa, kus suurusi vaadeldakse mitte oma asendist sõltumatult eksisteerivatena ja mitte kui mõõtühiku kaudu väljendatuina, vaid kui muutkonna osadena. Sedalaadi uurimused said tarvilikuks matemaatika paljudes harudes, eriti mitmeste analüütiliste funktsioonide teoorias»*. Edasi väljendab Riemann ka juba lõpmatamõõtmelise funktsionaalruumi idee.

Tema ettekande põhiosa on aga pühendatud C. Fr. Gaussi poolt pinnateooriasse sisse toodud sisegeomeetria mõiste üldistamisele mistahes n-mõõtmelise muutkonna juhule. Sellega pani Riemann aluse tänapäeva geomeetria ühele suurele ja rakenduslikult tähtsale harule — Riemanni geomeetriale. Kõigepealt defineerib Riemann muutkonna kui teatavate ühesuguste objektide hulga, mille iga elemendi saab üksüheselt määrata reaalarvude järjestatud süsteemiga $(x_1, \ldots, x_n)$. Hulga elementi (vaadeldavat objekti) nimetatakse muutkonna punktiks, reaalarve $x_1, \ldots, x_n$ — selle punkti koordinaatideks. Naturaalarvu n nimetatakse muutkonna mõõtmeks.



Joonis 14.

Kahemõõtmelise muutkonna näideteks on iga pind tavalises kolmemõõtmelises ruumis, kaksikpendli asendite hulk (joon. 14) jmt. Neljamõõtmelise muutkonna moodustavad näiteks elementaarsündmused (s. t. paarid punkt (x_1, x_2, x_3) + ajahetk $(x_4 = t)$; seda muutkonda nimetatakse aegruumiks), sirged ruumis (sest sirge asend sõltub neljast reaalarvulisest parameetrist) jne. Kui tegemist on mingi mehaanilise süsteemiga, millel on n vabadus-

[2] Р и м а н Б., Сочинения. М.—Л., 1948, lk. 280—281.

astet, siis selle süsteemi asendite hulk moodustab n-mõõtmelise muutkonna (näiteks kaksikpendli puhul $n = 2$).

Muutkond iseendast on aga veel liiga üldine mõiste, selleks et ta saaks olla sisuka geomeetrilise uurimise objektiks. Üks võimalus selle mõiste kitsendamiseks sobivas suunas on meetrika sisseviimine muutkonda, s. t. kauguse mõiste defineerimine muutkonna punktide vahel. Riemann lähebki seda teed. Lähtekohaks on talle siin, nagu juba märgitud, pinna sisegeomeetria Gaussi poolt väljatöötatud kujul. Viimases määratakse pinnal asuva joone pikkus teatavasti integraaliga $s = \int_a^b ds$, kus ds — kaarepikkuse diferentsiaal — tuleb arvutada valemist

$$ds^2 = E\,dx_1^2 + 2F\,dx_1dx_2 + G\,dx_2^2. \tag{1}$$

Viimane üldistab planimeetriast — tasandi sisegeomeetriast — tuttavat Pythagorase teoreemi $ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2$ kõverpinnal asuva «lõpmata väikese» kolmnurga juhule.

Analoogiliselt defineerib Riemann kaarediferentsiaali ds n-mõõtmelises muutkonnas valemiga

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}dx_idx_j. \tag{2}$$

Siin paremal pool on nn. diferentsiaalruutvorm, mille kordajad on muutujate $x_1, \ldots, x_n$ diferentseeruvad funktsioonid $g_{ij} = g_{ij}(x_1, \ldots, x_n)$. Muutkonda sellel defineeritud ruutvormiga (2) nimetatakse tänapäeval Riemanni ruumiks, niisuguse ruumi teooriat — Riemanni geomeetriaks. Selles mõttes üldistab Riemanni geomeetria tõepoolest kõverpinna sisegeomeetriat — viimase saamiseks tuleb vaid lugeda, et $n = 2$ ja $g_{11} = E$, $g_{12} = g_{21} = F$, $g_{22} = G$. On arusaadav, et Riemanni geomeetria mõisted üldistavad vastavaid mõisteid pinna sisegeomeetriast. Nii näiteks joone $x_i = x_i(t)$ pikkuse väärtustele $t = a$ ja $t = b$ vastavate punktide vahel defineerib Riemann valemiga

$$s = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x_1(t), \ldots x_n(t))x'_i(t)x'_j(t)}\,dt. \tag{3}$$

Näitlikult võib siin samuti kujutleda, et joone pikkust mõõdetakse «lõpmata väikeste» sammude kaupa, kusjuures iga sammu puhul leitakse ds valemist (2). Kõikide lõpmata paljude sammude puhul saadud tulemused seejärel liidetakse (s. t. leitakse integraal (3)). Jooni, mis on lühimad oma iga kahe küllalt lähedase punkti vahel võrreldes iga teise neid kaht punkti ühendava joonega, nimetatakse Riemanni ruumi geodeetilisteks joonteks. Nad on seega teatava variatsioonülesande lahendeiks ja asendavad tavalise geomeetria sirgeid.

Kahe punktis X_0 lõikuva kõvera $x_i = u_i(t)$ ja $x_i = v_i(\tau)$ vahelise nurga α defineerib Riemann valemiga

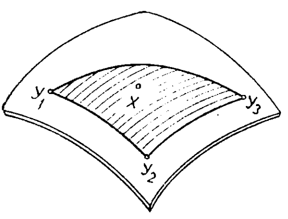
$$\cos\alpha = \frac{\sum\limits_{i,j=1}^{n} g_{ij}u'_i v'_j}{\sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^{n} g_{ij}u'_i u'_j}\ \sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^{n} g_{ij}v'_i v'_j}},$$

mille paremal pool olevad suurused tulevad kõik arvutada lõikepunktis X_0. Mingi ruumiosa Ω ruumala V defineerib Riemann valemiga

$$V = \overbrace{\int\int\ldots\int}^{n}_{\Omega} \sqrt{\det|g_{ij}|}\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n,$$

milles ruutjuure all on kordajatest g_{ij} moodustatud n-järku determinant. Selliste definitsioonide õigustamiseks on küllalt märkida, et $n = 3$ puhul saame neist tavalised nurga α ja ruumala V avaldised tavalises ruumis kasutusele võetud kõverjoonsete koordinaatide puhul (näit. sfäärilise või silindriliste koordinaatide puhul), Descartesi ristkoordinaatide puhul aga, mil $g_{ij} = 0$ kui $i \neq j$ ja $g_{ii} = 1$, saame tavalised analüütilisest geomeetriast tuntud valemid.

Riemanni geomeetria kõige iseloomulikum mõiste on ruumi kõverus. Kahemõõtmelisel juhul ühtib see mõiste pinna kõverusega ning on defineeritav järgmiselt. Olgu pinnal antud punkt X, mis olgu ümbritsetud mingi geodeetiliste (s. t. lühimate) joonte kaartest koosneva väikese kolmnurgaga $Y_1Y_2Y_3$ — geodeetilise kolmnurgaga Δ (joon. 15). Eespool antud valemid võimaldavad arvutada selle kolmnurga Δ sisenurgad ja pindala S («ruumala» kahemõõtmelisel juhul). Seejuures sisenurkade summa ei tarvitse sugugi olla π, nagu tavalises planimeetrias, vaid on üldiselt $\pi + \delta$. Näiteks sfääri puhul on δ (geodeetilise kolmnurga Δ nurgadefekt) alati positiivne ja võrdeline kolmnurga Δ pindalaga S.



Joonis 15.

Suhte δ/S piirväärtust geodeetilise kolmnurga Δ kokkutõmbumisel punktiks X nimetatakse pinna Gaussi kõveruseks punktis X. C. Fr. Gauss näitas juba 1827. aastal, kuidas arvutada seda suurust ruutvormi (1) kordajate E, F ja G kaudu.

Ruumi kõverust vaatles esimesena Riemann. Tema mõttekäiku võib edasi anda järgmiselt. Nii nagu tavalises ruumis läbi iga punkti kulgeb igas sihis parajasti üks sirge, nii ka Riemanni ruumis läbi iga punkti igas sihis kulgeb parajasti üks geodeetiline joon. Kui siht mingis punktis X kirjeldab teatava kahemõõtmelise tasandi, siis punkti X selles sihis läbiv geodeetiline joon kirjeldab teatava kahemõõtmelise pinna, millele antud kahemõõtmeline tasand on puutujatasandiks. Gaussi valemi põhjal võib arvutada selle pinna kõveruse punktis X. Saadud arvu nimetatakse Riemanni ruumi kõveruseks punktis X antud tasandiga määratud kahemõõtmelises sihis. Selliselt võib talitada iga kahemõõtmelise sihi puhul punktis X. Tähendab, Riemanni ruumi kõverust antud punktis iseloomustab mitte enam üks arv, nagu pinna korral, vaid terve arvude süsteem. Osutub, et see süsteem on täielikult määratud oma teatava $N = \frac{n^2(n^2-1)}{2}$ arvuga, millede abil saab antud punktis ühesel viisil arvutada ruumi kõverust ükskõik missuguses kahemõõtmelises sihis. (Märgime, et $n = 2$ puhul $N = 1$ ja $n = 3$ puhul $N = 6$; kui $n \to \infty$, siis $\frac{N}{n^4} \to \frac{1}{12}$.) Tänapäeval kõneldakse, et need N arvu määravad Riemanni ruumi kõverustensori. Nad avalduvad teataval kindlal viisil ruutvormi (2) kordajate kaudu; ühe võimaluse nende arvutamiseks näitas juba Riemann oma ettekandes 1854. aastal.

Kõverustensori abil saab välja eraldada Riemanni ruumi lihtsaimad erijuhud. Maksimaalselt lihtne on olukord juhul, kui kõverustensor on võrdne nulliga (s. t. kõik teda määravad arvud on nullid). Siis ruumi kõverus on null igas punktis igas kahemõõtmelises sihis. Sel puhul kõneldakse, et Riemanni ruum on lokaalselt eukleidiline. Küllalt väikestes piirkondades on niisugust ruumi võimatu eristada tavalisest eukleidilisest ruumist. Vahe võib tulla ilmsiks ruumi kui tervikut haaravate uurimuste puhul (samuti nagu näiteks pöördsilindri pinna sisegeomeetriat on küllalt väikestes piirkondades võimatu eristada geomeetriast tasandil, samal ajal kui terviklikul silindril on kogu aeg ühes suunas — moodustajatega risti liikudes võimalik jõuda tagasi lähtepunkti, mis tasandil on muidugi võimatu).

Lihtsuse poolest järgmise klassi moodustavad sellised Riemanni ruumid, mille igas punktis kõverus ei sõltu sellest kahemõõtmelisest sihist, milles teda arvutatakse. Niisuguseid ruume nimetatakse konstantse kõverusega ruumideks. Fr. Schuri tuntud teoreemi [3] kohaselt jääb sellise ruumi kõverus muutmatuks ka üleminekul ruumi ühelt punktilt teisele. Seega konstantse kõverusega ruumi kõverus on täielikult iseloomustatav üheainsa arvuga K. Kui $K < 0$ siis ruumi iga küllalt väikese piirkonna geomeetria ühtib Lobatševski ruumi teatava piirkonna geomeetriaga; kui $K = 0$, siis on tegemist lokaalselt eukleidilise ruumiga:, kui $K > 0$, siis kõneldakse lokaalselt elliptilisest ruumist. Sellest näh-

[3] Märgime, et teoreemi autor Friedrich Schur (1856—1932) oli aastatel 1888—1892 Tartu ülikooli matemaatikaprofessoriks. Teoreemi avaldas ta 1886. aastal, töötades sellal Leipzigi ülikoolis.

tub, et üldine Riemanni geomeetria haarab erijuhtudena nii antiikajast pärineva eukleidilise geomeetria kui ka XIX sajandil loodud mitteeukleidilised geomeetriad. Lihtsaima negatiivse konstantse kõverusega ruumi geomeetria olid teistest seisukohtadest lähtudes välja arendanud N. I. Lobatševski ja J. Bolyai 1820-ndail aastail. Lihtsaima positiivse konstantse kõverusega ruumi — elliptilise ruumi — tõi teadusse esimesena Riemann ise, mistõttu seda ruumi nimetatakse tihti ka Riemanni ruumiks (kitsamas mõttes).

Oma ettekandes 1854. aastal kasutas Riemann ainult üksikuid ilma põhjendusteta antud valemeid. Nii väitis ta ilma tõestuseta, et konstantse kõverusega ruumi puhul võib ruutvormi (2) teisendada järgmisesse lihtsasse kujju

$$ds^2 = \frac{1}{1 + \frac{K}{4}\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i)^2} \sum_{i=1}^{n} (dx_i)^2.$$

Alles 1940-ndail aastail õnnestus B. Kaganil veenvalt rekonstrueerida Riemanni mõttekäik. Täiendavat selgust Riemanni kasutatud meetodeisse toob tema enda uurimus, mille ta esitas 1861. aastal Pariisi Teaduste Akadeemiale. Selle üks osa sisaldab sissejuhatuse diferentsiaalruutvormide teisenduste teooriasse ning on seetõttu tihedas seoses 1854. a. ettekandega. Töö ei leidnud kahjuks väärilist hindamist ja avaldati alles 1876. aastal pärast Riemanni surma tema kogutud teostes. Selleks ajaks oli vastav teooria E. B. Christoffeli ja R. Lipschitzi poolt juba välja arendatud ja kujunenud paindlikuks aparaadiks Riemanni ruumide geomeetria uurimisel. Sajandivahetuseks oli see aparaat täienenud veel G. Ricci loodud tensorarvutusega (*Ricci-Calcul*'iga, nagu seda esialgu nimetati). Vektori paralleelülekande sissetoomine Riemanni ruumis 1917. aastal T. Levi-Civita poolt oli selle arengu loogiliseks jätkuks ja lõpuleviimiseks. Siitpeale võis Riemanni geomeetriast kõnelda kui iseseisvast matemaatikaharust, mis leidis väärtuslikke rakendusi mehaanikas ja teoreetilises füüsikas.

Riemanni geomeetria kõige olulisema rakenduse andis A. Einstein oma üldrelatiivsusteoorias 1919. aastal. Einsteini järgi on füüsikaline aegruum kui neljamõõtmeline muutkond Riemanni ruum, milles meetriline ruutvorm (2) määratakse teatava erilise väljavõrrandi kaudu mateeria jaotuse ja liikumisega. Gravitatsioonivälja olemasolu ilmneb sel puhul selle Riemanni ruumi kõveruse nullist erinevuses. Niiviisi osutus Riemanni poolt suure läbinägelikkusega rajatud matemaatiline teooria hädavajalikkus füüsika kõige üldisemate ja sügavamate küsimuste käsitlemisel. Arusaadavalt sai Riemanni geomeetriast ja selle mitmesugustest üldistustest suure hulga matemaatikute pingsa uurimise objekt. Selliste üldistatud ruumide teooria areng jätkub raugematu hooga veel tänapäevalgi.

OTTO SCHMIDT — SUUR NÕUKOGUDE TEADLANE

Jevgeni Gabovitš

Kümme aastat tagasi, 8. septembril 1956 avaldati Nõukogude ajalehtedes järgmine teadaanne.

NSV Liidu Ministrite Nõukogu teatab sügava kurbusega, et pärast pikaajalist ja rasket haigust suri k. a. 7. septembril 65-aastasena väljapaistev nõukogude teadlane geograafia ja matemaatika alal, NSV Liidu kangelane akadeemik Otto Juljevitš Schmidt.

Sellele teadaandele järgnes nekroloog, millele olid alla kirjutanud NSV Liidu Teaduste Akadeemia, NSVL Kõrgema Hariduse Ministeerium, NSVL Merelaevastiku Ministeeriumi Põhjameretee Peavalitsus, M. V. Lomonossovi nimeline Moskva Riiklik Ülikool, ajakirja «Природа» toimetus, Üleliiduline Astronoomia-Geodeesia Ühing, NSVL Geograafia Ühing ning Üleliiduline Poliitiliste ja Teadusalaste Teadmiste Levitamise Ühing.

Kes oli see inimene, kelle tegevus oli seotud nii paljude ja nii mitmesuguste organisatsioonidega? Otto Schmidt oli väljapaistev matemaatik, kaasaegse algebra nõukogude koolkonna rajaja. Kuid peale selle oli ta sugugi mitte vähem silmapaistev geofüüsik ja astronoom, kes on loonud üldtunnustatud teooria Päikesesüsteemi tekkimise kohta — Schmidti kosmogoonilise teooria. O. Schmidt oli laialdaselt tuntud ka kui geograaf ja reisija, Pamiiri ja Arktise uurija, väsimatu teaduse organiseerija ja propagandist, kirjanik ja riigitegelane. Tema surm oli raskeks kaotuseks nõukogude teadusele ja kultuurile.

Otto Schmidt sündis 30. septembril 1891 Mogiljovis. Tema vanemad pärinesid Lätist, talupoegade peredest (isa oli sakslane ja ema lätlane). Schmidtide perekond oli vaene. Andekale poisile keskhariduse andmine osutus võimalikuks ainult tänu sugulaste abile, kelle toetusel astus Otto 1900. aastal Mogiljovi gümnaasiumi ning järgmisel aastal, pärast perekonna kolimist Odessasse, Odessa II Gümnaasiumi. Juba siin ilmnes Otto suur andekus ja püsiv huvi teadmiste omandamise vastu. Peale ladina keele, mis oli selle kooli programmis, hakkas ta õppima ka vanakreeka keelt. Olgu märgitud, et elu jooksul õppis Schmidt valdama paljusid keeli — peale ladina, kreeka, vene, läti ja ukraina keele tundis ta veel saksa, inglise, prantsuse ja itaalia keelt.

1907. aastal asus Schmidtide perekond elama Kiievisse. Algas kümneaastane Kiievi periood, mille jooksul kujunes ja sai kuulsaks Schmidt kui matemaatik. Selle perioodi esimese kahe aasta jooksul õppis O. Schmidt Kiievi II Klassikalises Gümnaasiumis, mille ta lõpetas 1909. aastal kuldmedaliga. Samal aastal astus ta Kiievi ülikooli füüsika-matemaatikateaduskonda.

O. Schmidt 1912. a.

Huvi teaduslike uurimuste vastu äratas Schmidtis Kiievi ülikooli professor, väljapaistev matemaatik ja suurepärane pedagoog Dmitri Grave. Tollal suunas Grave oma õpilasi tegelema rühmateooriaga — algebra uue ja sel ajal kiiresti areneva haruga. Aastatel 1911—1912 pidas Schmidt rea ettekandeid Grave rühmateooria seminaris ning avaldas juba 1912. aastal oma esimese teadusliku artikli *«Über die Zerlegung endlicher Gruppen in directe unzerlegbare Faktoren»* (Lõplike rühmade esitamisest lahutumatute tegurite otsekorrutisena). Järgmisel aastal avaldas Schmidt koguni kaks artiklit, teise neist Pariisi Teaduste Akadeemia toimetistes. Üliõpilasaastail alustas Schmidt ka rühmateooriale pühendatud monograafia «Abstraktne rühmateooria» kirjutamist, mis ilmus 1916. aastal. Töö autorit autasustati prof. Rahmaninovi nimelise suure kuldmedaliga. See O. Schmidti monograafia on avaldanud suurt mõju algebra arengule NSV Liidus. 1933. aastal ilmus selle raamatu teine trükk, kolmandat korda avaldati ta 1959. aastal O. Schmidti valitud teoste esimeses köites. Oma ilmumise ajal oli ta rühmateooriale pühendatud raamatute seas kahtlemata parim.

Alates 1915. aastast hakkas Schmidt töötama Kiievi ülikoolis. Ühtlasi valiti ta sel aastal Kiievi Füüsika-Matemaatikaühingu liikmeks. Ülikoolis juhendas Schmidt algul analüütilise geomeetria harjutusi, 1916. aastal aga pidas esimesi loenguid. Samal aastal omistatakse talle eradotsendi kutse.

O. Schmidti järgnevat eluteed mõjutasid oluliselt Suure Oktoobrirevolutsiooni murrangulised aastad. Juba Veebruarirevolutsiooni päevil algas noore O. Schmidti ühiskondlik tegevus. Ta töötas Kiievi linnanõukogus, võttis osa Peterburis toimunud kõrgemate koolide tegevusele pühendatud kongressi tööst. Alates 1917. aasta novembrist juhatas ta toiduainete eraldamise valitsust toiduainete rahvakomissariaadis, tegeles kaardisüsteemiga. Järgmise aasta algul sõitis ta koos nõukogude asutustega Moskvasse.

Pedagoogilist tegevust jätkas O. Schmidt 1920. aastal Moskva Metsandustehnilises Instituudis matemaatikaprofessorina. Lisaks sellele oli ta 1921. aastast peale õppejõuks Moskva I Ülikoolis (praeguses Moskva Riiklikus Ülikoolis), 1923. aastast alates ka Moskva II Ülikoolis (praeguses V. I. Lenini nimelises Pedagoogilises Instituudis). 1929. aastal läheb ta täielikult üle Moskva Riiklikku Ülikooli, kus mitme aastakümne jooksul töötab professorina ja algebra kateedri juhatajana.

Jätkus ka O. Schmidti matemaatika-alane teaduslik tegevus. 1920. aastal pidas ta oma esimese ettekande Moskva Matemaatikaseltsis, 1922. aastal aga valitakse ta selle seltsi tegevliikmeks. 1927. a. viibis O. Schmidt 2 kuud teaduslikul komandeeringul Göttingenis, kus tegeles rühmateooriaga ja kohtus paljude tuntud saksa matemaatikutega. Eriti suurt mõju avaldasid Schmidtile kohtumised sajandi suurima matemaatiku D. Hilbertiga, rühmateooria silmapaistva spetsialisti I. Schuriga ja tuntud saksa naismatemaatiku E. Noetheriga.

O. Schmidt võttis osa paljudest NSV Liidu matemaatikakongressidest. 1927. a. esines O. Schmidt üleveneemaalisel matemaatikakongressil ettekandega «Mõningatest rühmateooria ülesannetest, mis seovad teda arvuteooriaga, muuhulgas aditiivsega»; 1930. aastal toimus Harkovis esimene üleliiduline matemaatikakongress. Schmidt esines seal ettekandega «Matemaatika osatähtsus sotsialismi ülesehitamisel». Teisel üleliidulisel matemaatikakongressil, mis toimus 1934. a., valiti ta Üleliidulise Matemaatikaassotsiatsiooni esimeheks. Alates 1930. aastast oli ta NSV Liidu tähtsaima matemaatilise ajakirja «Математический сборник» peatoimetaja.

Samal 1930. aastal alustas Moskva Riikliku Ülikooli juures tegevust O. Schmidti poolt organiseeritud algebra seminar, millest võrsusid hilisemad tuntud nõukogude algebraistid A. Kuroš, A. Kulakov, A. Ditsman, V. Turkin, S. Tšunihhin jt. Sellest algul Schmidti korteris koos käivast väikesest seminarist, kus tegeldi peaaegu eranditult rühmateooriaga, kasvas hiljem välja Moskva ülikooli algebra seminar, mis pani aluse nõukogude koolkonnale kaasaegses algebras.

Rühmateooriale pühendatud O. Schmidti artiklid, mis iga kord hämmastasid filigraanse tehnika, leidlikkuse ja teravmeelsusega ning avaldasid suurt mõju rühmateooria arengule, ilmusid 1924., 1925., 1929., 1932., 1938., 1940. (kaks artiklit) ja 1945. aastal. Viimane teaduslik uurimus algebra alal, mis oli lõpetatud 1947. a., avaldati esmakordselt alles pärast Schmidti surma 1959. a. tema valitud teoste esimeses, matemaatikale pühendatud köites. Peale nende tööde kirjutas Schmidt veel rea ilmekaid artikleid Suure Nõukogude Entsüklopeedia esimese väljaande jaoks, näiteks «Algebra» ja «Rühm». Ta oli ka selle entsüklopeedia loomise initsiaatoriks ja peatoimetajaks aastail 1924—1948.

Matemaatika kõrval kuulus O. Schmidti huvialade hulka ka geograafia. Just geograafina ja reisijana saigi Schmidt väga populaarseks NSV Liidus ja kogu maailmas.

1927. a. alustas NSVL Teaduste Akadeemia ettevalmistusi ühiseks Nõukogude-Saksa ekspeditsiooniks, mille ülesandeks oli Pamiiri tundmatute alade põhjalik uurimine. Schmidt, kes oli juba varem tegelnud alpinismiga (ta oli tõusnud mitmetele tippudele Kaukaasias ja Alpides), määrati selle ekspeditsiooni alpinistide rühma juhiks. Ekspeditsioon algas 1928. a. juulis. Septembriks oli vallutatud mitu mäetippu (üks neist 6000 m kõrgune — sel ajal oli see NSVL rekordiks alpinismi alal), avastatud ja ületatud tähtsad mäekurud, läbi uuritud üks maailma suuremaid jääliustikke — Fedtšenko gletšer.

1929. a. juulis määrati Schmidt jäälõhkujal «G. Sedov» Franz-Joseph'i saartele suunduva ekspeditsiooni juhiks ning ühtlasi Franz-Joseph'i maa valitsuskomissariks. 1930. aasta juulis suundus Schmidti juhtimisel uus ekspeditsioon Franz-Joseph'i maale ja Severnaja Zemljale. Ekspeditsioon avastas rea uusi saari, milledest ühele omistati Schmidti nimi.

1932. a. suvel näeme Schmidti uue ekspeditsiooni eesotsas. Seekord tehti jäälõhkujal «A. Sibirjakov» esmakordselt Arktika ajaloos ühe navigatsiooniperioodi jooksul retk Arhangelskist Vladivostokki (kahe kuu ja viie päevaga). Seejärel viibis Schmidt Jaapanis, kus esines Jaapani Teaduste Akadeemias ettekandega «A. Sibirjakovi» retkest. Sama aasta lõpul määrati Schmidt Põhjameretee Riikliku Valitsuse juhatajaks.

1933. a. augustis algas uus ekspeditsioon, mille eesotsas oli jällegi Schmidt. Laeval «Tšeljuskin» kavatses ta korrata «A. Sibirjakovi» retke. Kuid olles läbinud kogu Põhjameretee ja jõudnud Beringi väinas 6 km kaugusele lahtisest merest, sattus «Tšeljuškin» jäävangi ning alustas sunnitud teekonda tagasi Tšuktši merre. 1934. a. 13. veebruaril kell 13.50 vajus laev põhja. Ekspeditsioon, mille koosseisus oli 104 inimest, organiseeris jääl telklaagri. Ekspeditsiooni päästmine nõukogude lennukite poolt kujunes sel ajal maailma suursündmuseks nr. 1. Telklaagris haigestus Schmidt raskesti. Vaatamata sellele jätkas ta Arktika vallutamise juhtimist, kuigi ei saanud enam isiklikult osa võtta polaarekspeditsioonidest.

1933. a. valiti O. Schmidt NSVL TA korrespondentliikmeks ja 1935. a. akadeemikuks. 1934. a. valis Ukraina NSV TA ta oma tegevliikmeks.

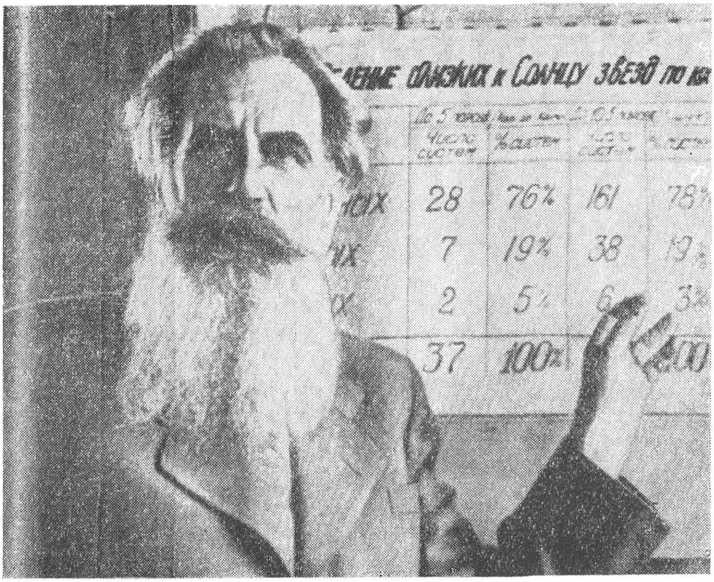
O. Schmidt ja I. Spirin Põhjapoolusel (1937)

1937. a. määrati Schmidt juhtima uut ekspeditsiooni, mille ülesandeks oli Põhjapooluse vallutamine õhust. 21. mail 1937. a. maandus ta seal ja organiseeris teadusliku uurimisjaama «Põhjapoolus 1». Selle ekspeditsiooni eduka juhtimise eest sai O. Schmidt Nõukogude Liidu kangelaseks. 1938. a. veebruaris suundus Schmidt ekspeditsiooni juhina jäälõhkujal «Jermak» uuesti jääpanga juurde, millel triivis «Põhjapoolus 1».

Rahvusvahelise olukorra teravnemine ja sellele järgnenud sõda sundisid NSV Liitu katkestama polaarbasseini uurimise. Pärast sõja lõppu aga ei lubanud Schmidti tervis tal enam sellest osa võtta. Tema peamiseks uurimisalaks sai geofüüsika.

Juba Kiievi perioodil tekkis Schmidtil huvi kosmogoonia vastu, teaduse vastu, mis uurib taevakehade tekkimise ja evolutsiooni seaduspärasusi. Ka edaspidi juurdles ta palju kosmogooniliste probleemide üle, eriti seoses mitmete aktuaalsete geofüüsika-alaste küsimustega, mille lahendamisele olid pühendatud O. Schmidti ekspeditsioonid.

1937. aastal organiseeriti O. Schmidti juhtimisel Teoreetilise Geofüüsika Instituut (praegune NSVL TA O. Schmidti nimeline Geofüüsika Instituut), mille direktoriks ta oli 1949. aastani. Oma



O. Schmidt P. Sternbergi nim. astronoomia instituudis 1948. a.

elu lõpuni jäi O. Schmidt Maa evolutsiooni osakonna juhatajaks selles instituudis. Instituudis töötades veendus O. Schmidt korduvalt, et niisugused geofüüsikalised probleemid, nagu mägede tekkimine, maavärisemised, Maa tuuma ja koore ehitus jne. on lahutamatult seotud meie ettekujutustega Maa tekkimisest.

Päikesesüsteemi ja planeetide tekkimise teooriad, mis olid sel ajal levinud, ei suutnud seletada paljusid geofüüsikalisi ja astronoomilisi fakte. Oli ilmne, et on vaja luua täiesti uus teooria, mis, olles kooskõlas kõikide teadaolevate faktidega, võimaldaks seletada ühtlasi ka Maa tekkimist. Selle üliraske ülesande lahendamisele asuski O. Schmidt.

1943. aasta novembris teeb ta sellal Kaasanisse evakueeritud P. K. Sternbergi nimelises Riiklikus Astronoomia Instituudis ettekande oma kosmogoonilisest teooriast. Teooria arenemisega kaasnesid uued teaduslikud ettekanded, hiljem ka publikatsioonid. 1949. aastal avaldas O. Schmidt populaarteadusliku raamatu «Neli loengut Maa tekkimise teooriast». Ta kavatses uuele teooriale pühendada ka ulatusliku monograafia, kuid raske haigus, mis alates 1945. aasta jaanuarist takistas tema teaduslikku tegevust ning 1954. aasta algusest aheldas ta voodisse, ei võimaldanud seda eesmärki realiseerida.

* *

*

Kuid eelkõige oli O. Schmidt siiski matemaatik. Ta jäi seotuks matemaatikaga terveks oma eluks, tegi väga palju matemaatika arengu heaks NSV Liidus nii teadusliku kui ka organisatsioonilise tööga. Ükskõik missuguse teadusega ta ka tegeles, ikkagi jäi ta matemaatikuks, rakendades matemaatilisi meetodeid selle teaduse probleemide lahendamisel.

Tema huvide kõige püsivamaks objektiks oli kahtlemata rühmateooria. See õigustab meid alljärgnevalt peatuma mõnevõrra üksikasjalikumalt O. Schmidt algebra-alasel loomingul.

Perioodil, mil O. Schmidt hakkas uurima rühmateooria[1] probleeme, ei piirdunud matemaatikud enam konkreetsete rühmadega (substitutsioonidega), kuid nende uurimisobjektiks olid ikka veel ainult lõplikud rühmad. Ka Schmidti esimesed tööd olid pühendatud lõplikele rühmadele.

1911. a. tõestas saksa matemaatik R. Remak, et kui lõplik rühm G on kahel viisil esitatud alamrühmade otsekorrutisena[2] nii, et need alamrühmad ise pole enam esitatavad otsekorrutistena (niisuguseid alamrühmi nimetatakse lahutamatuteks otseteguriteks), siis mõlema lahutuse tegurite vahel saab korraldada üksühese vastavuse nii, et üksteisele vastavad tegurid on isomorfsed. Selle rühmateoorias väga tähtsa teoreemi tõestus oli Remakil üpris keeruline ja vähe ülevaatlik.

Oma esimeses teaduslikus töös, mis oli avaldatud Kiievi ülikooli väljaandes, esitab Schmidt Remaki teoreemi uue, lühema ja ülevaatlikuma tõestuse. Eriti õnnestunuks tuleb lugeda veelgi lühemat tõestust, mille Schmidt esitas 1913. aastal Pariisis ilmunud artiklis *«Sur le produits directs»* («Otsekorrutistest»). See teravmeelne tõestus jääb tänapäevani kõige lühemaks (3 lehekülge) Remaki teoreemi arvukatest tõestustest ning just selle leiame tavaliselt rühmateooriale pühendatud monograafiates.

1913. aastal avaldas Schmidt ka veel teise ulatusliku teadusliku uurimuse «Об уравнениях, решаемых в радикалах, степень которых есть степень простого числа» («Radikaalides lahenduvatest võrranditest, mille järk on algarvu aste»), mille eest Kiievi ülikooli füüsika-matemaatikateaduskond andis talle kuldmedali. Selles töös jätkab ta uute meetoditega rühmateooria klassiku C. Jordani uurimusi substitutsioonide rühmade kohta.

Ta vaatleb siin lahenduvaid (s. t. mittekommutatiivseid, kuid teatavat elementide ümberpaigutust lubavaid) substitutsioonide

---

[1] Rühma mõiste ja mõned rakendused on esitatud autori artiklite sarjas «Algebra põhimõisteid», mis ilmus kogumiku «Matemaatika ja kaasaeg» vihikutes VI—X. Järgneva mõistmiseks piisab tutvumisest selle sarja II artikliga (avaldatud kogumiku VII numbris).

[2] Rühmade A ja B otsekorrutiseks $A \times B$ nimetatakse paaride (a, b) hulka (kus $a \in A$ ja $b \in B$), milles korrutamine on defineeritud eeskirjaga

$$(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1a_2, b_1b_2).$$

Saab kontrollida, et selline hulk on rühm.

rühmi, mis on üheaegselt primitiivsed. Märgime, et substitutsioonide rühma nimetatakse transitiivseks, kui iga kahe numbri korral 1-st kuni n-ni leidub rühma element, mis teisendab ühe numbri teiseks. Transitiivset rühma nimetatakse primitiivseks, kui numbrite 1, 2, ..., n hulka pole võimalik jaotada alamhulkadeks, mida oleks rohkem kui üks ja mis kõik ei koosneks ühest elemendist, selliselt et rühma iga element (substitutsioon) säilitaks selle alamhulkadeks jaotuse, s. t. teisendaks iga alamhulga kas iseendaks või mõneks teiseks alamhulgaks.

Ülalnimetatud töös arendab Schmidt täiesti uutel alustel niisuguste primitiivsete lahenduvate rühmade teooriat, millede järk on algarvu aste. Selliste rühmade ehitus on tihedalt seotud töö pealkirjas nimetatud võrranditega. Oma teooriat rakendab Schmidt muuseas niisuguste vaadeldavat tüüpi rühmade määramisel, mis sisaldavad p^2 elementi. Sellega ta tõestas uuesti ja lihtsamini rea Jordani tulemusi. Hiljem kasutasid Schmidti teooriat mitmed nõukogude matemaatikud oma töödes.

O. Schmidti silmapaistva monograafia «Abstraktne rühmateooria» puhul on eriti märkimisväärne see, et kuigi tollal tegeldi eranditult alles lõplike rühmadega, arendab Schmidt monograafia esimestes peatükkides lõpmatute rühmade teooriat, näidates sellega rühmateooria tulevase arengu suunda.

Esimene nõukogude võimu aastail ilmunud Schmidti algebralistest artiklitest «Группы, все подгруппы которых специальные» («Rühmad, mille kõik alamrühmad on spetsiaalsed») oli pühendatud lõplikele mittenilpotentsetele rühmadele, milledes kõik alamrühmad on nilpotentsed (tolle aja terminoloogia järgi — spetsiaalsed). Nilpotentsed rühmad moodustavad väga tähtsa rühmade klassi, mis hõlmab kõikide kommutatiivsete rühmade klassi ja ise sisaldub lahenduvate rühmade klassis. Nagu näitas Schmidt, osutuvad kõik vaadeldud rühmad lahenduvateks ja elementide arv niisuguses rühmas võib jaguda ainult kahe erineva algarvuga. See töö üldistas ameerika matemaatikute Milleri ja Moreno tulemusi lõplikest rühmadest, mille kõik alamrühmad on kommutatiivsed, ning inspireeris paljude uute algebraliste uurimuste tekkimist.

Lahenduvate ja nilpotentsete rühmade uurimisele ning nende üldistamisele, nüüd aga juba lõpmatute rühmade puhul, pühendas Schmidt ka oma viimased algebralised tööd «О бесконечных специальных группах» («Lõpmatutest spetsiaalsetest rühmadest», 1940) ja «Бесконечные разрешимые группы» («Lõpmatud lahenduvad rühmad» 1945). Sellesuunaliste uurimuste jätkamine paljude tuntud nõukogude algebraistide töödes muutis üldistatud nilpotentsete ja lahenduvate rühmade teooria kauaks ajaks rühmateooria põhiliseks uurimisvaldkonnaks.

Suurt mõju algebra arengule avaldas ka Schmidti töö *«Über unendliche Gruppen mit endlicher Kette»* («Lõpmatutest rühmadest lõplike ahelatega» 1928), mis valmis 1927. a. Göttingenis, kus Schmidt viibis teaduslikus komandeeringus. See periood oli saksa tuntud naismatemaatiku E. Noetheri koolkonna õitsengu aastateks. Olles haaratud selle koolkonna üldistest ideedest andis Schmidt hiilgava üldistuse saksa matemaatiku W. Krulli ühele teoreemile — Remaki teoreemi analoogile lõpmatute kommutatiivsete rühmade puhul. See teoreem oli tõestatud esialgu väga kohmakalt ja ainult võrdlemisi kitsa rühmade klassi jaoks. Schmidtil õnnestus anda väga elegantne teoreem, mis üldistas nii Remaki kui ka Krulli teoreeme väga laia rühmade klassi juhule. Tänapäeval on seda klassikalist teoreemi, mida tuntakse Remak-Schmidti, Krull-Schmidti või lihtsalt Schmidti teoreemi nime all, mitmed matemaatikud üldistanud paljudele teistele algebralistele süsteemidele ja kasutanud paljudes töödes algebra kõige erinevamates osades. Tuntud nõukogude algebraisti prof. A. Kuroši arvates tähistab just see Schmidti töö uue tänapäevase rühmateooria arengu algust.

F. Rešetnikovi sõbralik šarž
O. Schmidtist

MIS ON TÕENÄOSUS? [1]

E. Tiit

III. Tõenäosuse aksiomaatiline mõiste

1. Tõenäosusteooria kriis. XIX sajandi teisel poolel algas matemaatika aluste ulatuslik revideerimine, mille eesmärgiks oli tagada matemaatika range loogilis-aksiomaatiline struktuur ning tõestuste laitmatu korrektsus [2]. Seda põhjustas matemaatika ning loodusteaduste vahelise seose komplitseerumine, mis kaasnes matemaatika arenemisele üha suurema abstraktsiooni suunas; seetõttu muutus tulemuste vahetu kontrollimine praktikas raskeks, sageli võimatukski, ning matemaatiliste teooriate ja järelduste õigsust pidi paratamatult garanteerima aine enese rangem sisemine struktuur.

Suuremas osas matemaatilistest distsipliinidest oli selline aluste revideerimise protsess sajandivahetuseks põhilistes joontes juba toimunud. Nimetaksime meid huvitavatest matemaatika harudest siin eeskätt hulgateooriat [3], reaalmuutuja funktsioonide teooriat [4], kaasaegset algebrat [5].

Tõenäosusteoorias polnud samal ajal see protsess veel õieti alanudki. Hoolimata sellest, et juba XIX sajandi teisel poolel saavutati tõenäosusteoorias tõsiseid matemaatilisi tulemusi vene matemaatikute koolkonna poolt tõestatud piirteoreemide näol, mis teatud mõttes lähendasid tõenäosusteooriat teistele matemaatilistele distsipliinidele, säilis siiski veel XX sajandi künniselgi suurel määral tõenäosusteooria empiiriline iseloom ja suhteline eraldatus teistest matemaatika harudest. Selle aja tõenäosusteooriat ei saa veel nimetada kaasaegseks matemaatiliseks distsipliiniks. Tõepoolest, kaasajal me ütleme, et *teooria muutub mate-*

---

[1] Kirjutise algus vt. Matemaatika ja kaasaeg, IX, lk. 74—90, X, lk. 70—88.

[2] Jürimäe, E., Hulgateoreetilised paradoksid ja matemaatika aluste uurimine. — Matemaatika ja kaasaeg, VII, lk. 3—13.

[3] Jürimäe, E., Hulgateoreetilistest paradoksidest. — Matemaatika ja kaasaeg, I, lk. 5—12.

[4] Kangro, G., Kaasaja matemaatilise analüüsi mõned iseloomulikud jooned. — Matemaatika ja kaasaeg, V, lk. 3—13.

[5] Gabovitš, Jevg., Algebra põhimõisteid I—IV. — Matemaatika ja kaasaeg, VI, lk. 3—13; VII, lk. 14—27; VIII, lk. 18—33; IX, lk. 12—24; X, lk. 12—19.

maatiliseks siis, kui ta esitab temaga seotud nähtuste matemaatilise mudeli, mis areneb vastavalt selle alla mahutatud nähtuste hulga suurenemisele abstraheerumise ja üldistamise suunas.

Tõenäosusteoorias aga selline ühtne mudel veel puudus. Tõsi küll, klassikalisele tõenäosuse mõistele baseeruv mudel siiski eksisteeris, kuid sellest oli teooria ammu n.-ö. «välja kasvanud». Ja nii puudus selgus isegi teooria põhimõisteis — ei olnud ühtset definitsiooni ei sündmuse ega tõenäosuse mõistele (paralleelselt kasutati kolme üksteisega vähe seotud tõenäosuse mõistet: klassikalist, geomeetrilist ja statistilist); polnud täit selgust, kas (ja missugusel määral) kehtivad klassikalise tõenäosuse jaoks tuletatud seaduspärasused geomeetrilise ning statistilise tõenäosuse korral.

Selle kõige tulemusena levisid tõenäosusteooria väärrakendused, paljud matemaatikud aga kippusid suhtuma tõenäosusteooriasse kui matemaatika teisejärgulisesse, «ajast-arust läinud» harusse. Järjest rohkem hakati tõenäosusteoreetikute ringides rääkima «tõenäosusteooria kriisist». Sellised vastuolud, mis sageli kriisidekski kujunevad, esinevad teaduste arengus etappidel, kus vana mudel on «jäänud kitsaks» uutele faktidele, mis ei lase end tõlgendada senituntud seaduspärasuste kaudu; kriisidele järgneb reeglina uue, täiuslikuma mudeli kasutuselevõtt vaadeldavas teoorias ning eriti hoogne areng. Niisuguseid kriise on üle elanud matemaatiline analüüs enne reaalmuutuja funktsioonide teooria sündi, samuti teoreetiline füüsika, mille tulemusena loodi relatiivsusteooria ning kvantmehaanika [6] jt.

Niisiis, tõenäosusteoreetikutele sai ilmseks vajadus võtta revideerimisele tõenäosusteooria alused, defineerida üldine tõenäosuse mõiste (mille erijuhtudeks oleksid kõik senituntud — klassikaline, geomeetriline, statistiline), ehitada teooria üles *aksiomaatiliselt,* s. t. luua teooria matemaatiline mudel kaasaegsel kujul, mis haaraks ühtsesse süsteemi kõik tõenäosusteooria senituntud tõed.

Aksiomaatiliselt ülesehitatud teoorias valitakse mõningad mõisted *põhimõisteiks*, mille omadused *postuleeritakse*, s. t. *antakse ette teatavate aksioomidena.* Nimetatud aksioomidele tuginedes tõestatakse loogiliselt kõik vaadeldavasse teooriasse kuuluvad tulemused.

Üks esimesi katseid aksiomaatilise tõenäosusteooria loomisel kuulub saksa teadlasele Richard von Misesile (1883—1953), kes tõenäosuse mõiste defineeris statistiliselt, lugedes selleks relatiivse sageduse piirväärtuse katseseeria lõpmatul pikenemisel. Aksiomaatika sissetoomisel tekkisid aga raskused, mida põhjustas tõenäosuse definitsiooni mitteküllaldane abstraktsus;

[6] Vt. Õiglane, H., Vestlus relatiivsusteooriast. Tln., 1965 ja Mikromaailma sügavusse. Tln., 1963.

empiiriliselt defineeritud põhimõistetele ei saa tugineda abstraktne aksiomaatika.

Nagu see matemaatikas sageli esineb, leiti lahendus hoopis teiste matemaatiliste distsipliinide abil.

2. Sündmuste ruum. Kõige otsesemat mõju avaldas tõenäosusteooria arengule hulgateooria areng. Suurt analoogiat tõenäosusteooria ja hulgateooria[7] mõistete vahel märkasid mitmed matemaatikud, kelle hulgast esmajärjekorras väärib märkimist üks funktsiooniteooria rajajaid Emile Borel (1871—1956).

Kasutades hulgateooria tulemusi töötas nõukogude matemaatik Valeri Ivanovitš Glivenko (1897—1940) käesoleva sajandi 20-ndatel aastatel välja sündmuste algebra mõiste, mis saigi hiljem aluseks sündmuse mõiste üldisele käsitlusele.

Sündmuste vaatlemisel huvitab tõenäosusteoreetikut ainult üks asjaolu — kas antud tingimustes (mille esilekutsumist nimetame katseks) vaadeldav sündmus esineb või ei esine. Igal katsel on alati teatav hulk võimalikke tulemusi (neid on kindlasti rohkem kui 1, muidu ei ole katsel üldse mõtet).

Nimetame edaspidi kõigi võimalike katsetulemuste hulka sündmuste ruumiks ja tähistame selle sümboliga Ω. Iga üksiku katsetulemuse loeme ruumi Ω punktiks ja tähistame sümboliga ω (kui vaja, lisame ka mõne indeksi).

Näide 1. Täringu viskamisel on võimalikud järgmised tulemused (elementaarsündmused):

ω_1 — 1 silma esiletulek,
ω_2 — 2 silma esiletulek,
. . . .
ω_6 — 6 silma esiletulek,

kusjuures iga elementaarsündmuse tõenäosus $P(\omega_i) = \frac{1}{6}$ $(i = 1, 2, \ldots, 6)$. Kõigi elementaarsündmuste hulk $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$ moodustab sündmuste ruumi, mille tähistame sümboliga Ω_t. Mõnikord pakuvad huvi aga ka mitmest elementaarsündmusest koosnevad sündmused, näiteks sündmus, mis seisneb kas 1 või 3 silma esiletulekus, s. o. elementaarsündmuste summa $\omega_1 + \omega_3$, mille tõenäosus $P(\omega_1 + \omega_3) = P(\omega_1) + P(\omega_3) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

Kui iga elementaarsündmus on punktiks sündmuste ruumis, siis mitmest elementaarsündmusest koosnevale sündmusele vastab mitmepunktiline hulk ruumis Ω_t. Nii vastab sündmusele $\omega_1 + \omega_3$ hulk $\{\omega_1, \omega_3\}$ ruumis Ω_t; sündmusele $\omega_2 + \omega_4 + \omega_6$ (s. o. 2, 4 või 6 silma esiletulekule) vastab hulk $\{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$ jne. Arvestades, et ka ruumi üksikud punktid on vaadeldavad selle ruumi hulkadena (ühepunktiline hulk), näeme, et *igale juhuslikule sündmusele vastab teatav hulk sündmuste ruumis.* Võimatule sündmusele (täringut visatakse, kuid ühtegi tulemust ei saada) on loomulik vastavusse seada *tühi* hulk, mille tähistame sümboliga Θ; kindlale sündmusele (täringuviske tulemuseks on ükskõik milline silmade arv) vastab aga ruumi Ω_t hulk, mis sisaldab kõiki tema punkte, s. t. ruum Ω_t ise.

---

[7] Vt. Gabovitš, Jevg., Opereerimine hulkadega. — Matemaatika ja kaasaeg, III, lk. 3—12.

Lihtne on veenduda, et täringuviske tulemuste abil saab kirjeldada 64 erinevat sündmust, millele vastavad ruumi Ω_t kõikvõimalikud alamhulgad. Need sündmused on esitatud allolevas tabelis. Tabeli esimeses veerus on näidatud, mitmest elementaarsündmusest koosneb vaadeldav sündmus, s. t. mitu elementi on sellele sündmusele vastavas alamhulgas. Teises veerus on esitatud sündmusele vastavate elementaarsündmuste indeksid. Näiteks rühmas $k=1$ tähistab number 2 sündmust ω_2, millele vastab ruumi Ω_t üheelemendiline hulk $\{\omega_2\}$, rühmas $k=4$ tähistab kombinatsioon 1345 aga sündmust $\omega_1+\omega_3+\omega_4+ +\omega_5$, millele vastab alamhulk $\{\omega_1, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$ jne. Tabeli kolmandas veerus P on antud vaadeldavate sündmuste tõenäosused, mille väärtuseks on arv $k \cdot \frac{1}{6}$ ja viimases veerus vastavasse rühma kuuluvate sündmuste arv.

k	Sündmused	P	n
0		0	1
1	1 2 3 4 5 6	$\frac{1}{6}$	6
2	12 13 14 15 16 23 24 25 26 34 35 36 45 46 56	$\frac{1}{3}$	15
3	123 124 125 126 134 135 136 145 146 156 234 235 236 245 246 256 345 346 356 456	$\frac{1}{2}$	20
4	1234 1235 1236 1245 1246 1256 1345 1346 1356 1456 2345 2346 2356 2456 3456	$\frac{2}{3}$	15
5	12345 12346 12356 12456 13456 23456	$\frac{5}{6}$	6
6	123456	1	1

Kokku sündmusi: 64

Näide 2. Raha viskamisel on võimalik saada 2 tulemust: peale jääb kas vapp (tähistame selle sündmuse sümboliga V) või kiri (toimub sündmus K); kummagi elementaarsündmuse tõenäosus $P(V)=P(K)=\frac{1}{2}$. Seega moodustab rahaviske tulemuste hulk $\{V, K\}$ sündmuste ruumi, mille tähistame sümboliga Ω_r. Ruumi Ω_r kõikvõimalikud alamhulgad on $\{V\}$, $\{K\}$, Θ ja Ω_r. Igale neist alamhulkadest vastab üks rahaviske tulemuste abil kirjeldatav sündmus; osutub, et kirjeldatud nelja sündmusega (vapi pealelangemine, kirja pealelangemine, mitte kummagi poole pealelangemine ning ükskõik kumma poole pealelangemine) piirdubki kõigi ühe rahaviske abil defineeritavate sündmuste hulk.

Näide 3. Rahavisete abil võime defineerida veel ühe sündmuste ruumi, mille tähistame Ω_v. Koosnegu Ω_v järgmistest punktidest (sulgudes on märgitud vastava sündmuse tõenäosus):

ω_1 — 1. viskel langeb peale vapp $\left(P(\omega_1)=\frac{1}{2}\right)$,

ω_2 — 1. viskel langeb peale kiri, 2. viskel vapp $\left(P(\omega_2)=\frac{1}{4}\right)$;

. . .

ω_i — 1., 2., ..., $(i-1)$-sel viskel langeb peale kiri,

i-ndal viskel vapp $\left(P(\omega_i)=\frac{1}{2^i}\right)$.

Näeme, et ruum Ω_v sisaldab *lõpmata palju* punkte. Tõepoolest, igale naturaalarvule i vastab sündmus ω_i. Et aga naturaalarve on lõpmata palju, siis on ka kirjeldatud sündmuste hulk lõpmata suur. Sündmused ω_i pole elementaarsündmusteks klassikalise tõenäosuse mõttes — esiteks on nende hulk lõpmatu ning teiseks pole nad kaugeltki võrdtõenäolised. Ometi on võimalik ka nende sündmuste abil defineerida uusi sündmusi.

Vaatleme näiteks sündmust A, milleks olgu vapi vähemalt ühekordne esinemine kolme esimese viske vältel. Sündmuse A saame esitada katsetulemuste summana:

$$A=\omega_1+\omega_2+\omega_3,$$

ja et sündmused ω_i on üksteist välistavad, siis A tõenäosus

$$P(A)=P(\omega_1)+P(\omega_2)+P(\omega_3)=\frac{7}{8}.$$

Sündmuse B defineerime kui vapipoole esmakordse esiletuleku paarituarvulise järjekorranumbriga viskel. Siis B on esitatav lõpmata paljude katsetulemuste summana:

$$B=\omega_1+\omega_3+\omega_5+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}\omega_{2k+1}.$$

Kasutades geomeetrilise progressiooni summa valemit saame sündmuse B tõenäosuse aga lihtsalt leida:

$$P(B)=\sum_{k=0}^{\infty}P(\omega_{2k+1})=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2k+1}}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{2}{3}.$$

Näeme, et sündmusele A vastab ruumi Ω_v punktide hulk $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$; sündmusele B aga punktide $\{\omega_1, \omega_3, \ldots, \omega_{2k+1}, \ldots\}$ lõpmatu hulk ruumist Ω_v. Ka selle näite korral, samuti nagu eelmistes näideteski, vastab igale sündmusele (ühe- või mitmepunktiline) hulk sündmuste ruumist ning sündmuste ruumi mistahes alamhulgale saab vastavusse seada sündmuse; tühjale hulgale Θ vastab võimatu sündmus (vapipool ei lange peale, ükskõik kui pika katserea me ka teeksime) ning kogu ruumile Ω_v kindel sündmus (vapipool langeb peale ükskõik millisel katsel). Erinevuseks on vaid asjaolu, et kõikvõimalike sündmuste hulk on viimases näites lõpmatu ning ka üksiksündmuse võime defineerida sündmuste ruumi lõpmata paljudest punktidest koosneva alamhulga kaudu.

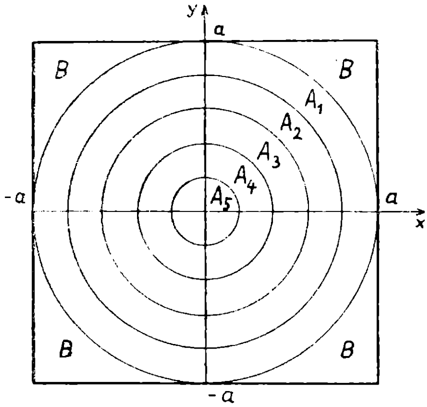
Näide 4. Märkilaskmisel (punktikujuliste kuulidega) võime sündmuste ruumiks Ω_m võtta märklaua kõigi punktide hulga (eeldame lihtsuse mõttes, et iga lask tabab märklauda). Oletame, et meil on ruudukujuline märklaud küljepikkusega $2a$ (vt. joonis 1). Valides koordinaadistiku nii, et märklaua keskpunkti oleks koordinaatide alguspunktiks ning teljed oleksid märklaua külgedega paralleelsed, saame sündmuste ruumi Ω_m defineerida järgmiselt:

$$\Omega_m = \{\omega\} = \{(x, y): \quad -a \leqslant x \leqslant a, \quad -a \leqslant y \leqslant a\},$$

s. t. ruum Ω_m on kõigi selliste punktide $\omega = (x, y)$ kogu, kus x ja y rahuldavad võrratusi $-a \leqslant x \leqslant a$, $-a \leqslant y \leqslant a$.

Samuti kui ruum Ω_v sisaldab ka Ω_m lõpmata palju punkte, kusjuures erinevalt ruumi Ω_v punktide hulgast ei ole ruumi Ω_m punktide hulka võimalik järjestada ja indeksitega varustada, see on nn. *mitteloenduv hulk.*

Vaatleme nüüd, millised tõenäosused me saame omistada ruumi Ω_m punktidele. Lihtsuse mõttes oletame, et märklaua kõigi punktide tabamine on võrdtõenäoline. Et punktide hulk on lõpmata suur, kogu ruumi tõenäosus on aga 1, peab iga üksiku punkti tabamise tõenäosus olema 0. Iga pinnatüki tabamise tõenäosuse võime aga leida, kasutades geomeetrilise tõenäosuse definitsiooni.



Joonis 1.

Peale võimatu sündmuse (mitte ühegi punkti tabamine) ja kindla sündmuse (märklaua mistahes punkti tabamine) tuleb meil sündmuseks lugeda veel mingi kindla punkti tabamise (sündmus tõenäosusega null), aga samuti märklaua mingi pinnatüki tabamise (sellise sündmuse tõenäosuseks on pinnatüki pindala ja kogu märklaua pindala suhe).

Nii on sisemise ringi tabamise tõenäosus $P(A_5) = \dfrac{\left(\frac{a}{5}\right)^2 \pi}{4a^2} = \dfrac{\pi}{100}$; järgmise rõnga tabamise (sündmuse A_4) tõenäosus on $\dfrac{3\pi}{100}$ (arvutada), aga piirkonna B tabamise (sündmuse B) tõenäosus

$$P(B) = P(\Omega_m - \sum_{i=1}^{5} A_i) = 1 - \frac{a^2\pi}{4a^2} = \frac{4-\pi}{4}.$$

Näeme, et ka siin vastab igale sündmusele teatav hulk sündmuste ruumist Ω_m, sest iga piirkond A märklaual on märklaua kõigi punktide hulga (s. t. ruumi Ω_m) alamhulgaks. Erinevalt eelnevatest näidetest, ei saa me aga vastupidist seost: igale hulgale ruumis Ω_m ei saa vastavusse seada sündmust!

Raskus on nimelt selles, et ruumi Ω_m punktidest on võimalik moodustada niivõrd keerulise struktuuriga hulki, et neil ei ole pindala (näiteks jooned, mis täidavad kogu ruudu). Et sellistele hulkadele ei saa ka mõistlikul viisil tõenäosust omistada, ei loetagi neile vastavaks ühtegi sündmust.

3. **Kolmogorovi aksiomaatika.** Ülaltoodud näiteid arvestades püüame üldistada sündmuse ning tõenäosuse mõisteid. Igas näites määrasime kõigepealt sündmuste ruumi Ω ning seejärel saime teatud osale ruumi Ω alamhulkadest seada üksühesesse vastavusse sündmused; selline üksühene vastavus võimaldab sündmusi samastada ruumi Ω hulkadega, nii et tavaliselt kõneldaksegi: sündmus A on sündmuste ruumi Ω hulk.

See näitabki kätte tee sündmuse üldise mõiste defineerimiseks: võtame mingi hulga Ω ja nimetame selle sündmuste ruumiks. Teatud osa selle ruumi hulki (aga võib-olla ka kõik hulgad — nagu näidetes 1—3) moodustavadki sündmused. Kuidas aga tuleks ruumi kõigi hulkade seast valida välja need, mis sobivad sündmusteks?

Oletame nüüd, et me oleme mingil viisil määranud sündmused. Kuidas tuleks siis neile omistada tõenäosused? Osutub, et sündmuste ruumi ning sündmuste fikseerimisega ei määrata veel üheselt nende sündmuste tõenäosusi. Nii võiksime näites 1 vaadelda võltsitud täringut, milles näiteks tulemus 6 esineks suurema tõenäosusega kui ülejäänud tulemused. Siis jääksid kõik sündmused samadeks, muutuksid aga nende tõenäosused. Ka teistes näidetes võiksime sündmuste tõenäosused määrata mitmel viisil. Ometi ei või tõenäosusi määrata päris meelevaldselt — näiteks on päris loomulik nõue, et sündmuste tõenäosused ei või olla negatiivsed arvud ega ka ületada arvu 1. Missuguseid nõudeid peaksid siis rahuldama sündmuste tõenäosused?


A. Kolmogorov (1930)

Esitatud küsimused võtab kokku järgnev: *missugused aksioomid määravad sündmuse ning tema tõenäosuse*?

Ühe võimaliku lahenduse sellele probleemile andis nõukogude tõenäosusteoreetik Andrei Nikolajevitš Kolmogorov (sünd. 1903. a.). Nimelt 1933. a. ilmunud raamatukeses[8] «*Tõenäosusteooria põhimõisted*» andis ta sündmuse ja tõenäosuse aksio-

[8] *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Berlin, 1933, 62 lk. Venekeelne tõlge ilmus 1936. a.

maatilise definitsiooni ning sellele tuginedes lihtsa ja selge ülesehituse kogu tõenäosusteooriale; kõigile sellal tuntud faktidele oli leitud loomulik koht üldises süsteemis. Kolmogorovi töös olid kokku võetud aastakümnete vältel tehtud pingutused tõenäosusteooria aksiomatiseerimiseks: M. F r e c h e t' mõõduteooria, E. B o r e l i tähelepanekud analoogiast hulgateooria ja tõenäosusteooria vahel, R. M i s e s i aksiomaatika, F. P. C a n t e l l i, P. L é v y jt. tööd.

Esitame nüüd K o l m o g o r o v i a k s i o m a a t i k a.

Olgu meil sündmuste ruum Ω. Sündmusteks loeme kõiki ruumi hulki A, mis kuuluvad hulkade klassi $\mathcal{A}$.

Hulkade klass $\mathcal{A}$ on määratud järgmiste aksioomidega:

1° *Kui* $A_1 \in \mathcal{A}, A_2 \in \mathcal{A}, \ldots,$ *siis ka* $\sum_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

2° Kui $A \in \mathcal{A}$, siis ka $\bar{A} = \Omega - A \in \mathcal{A}$.

Igale sündmusele A seame vastavusse mittenegatiivse reaalarvu $P(A)$ (sündmuse A tõenäosuse), mis rahuldagu järgmisi tingimusi:

3° $P(\Omega) = 1$.

4° *Kui A_i ja A_j on ühisosata sündmused, alati kui indeksid i ja j on erinevad, siis*

$$P(\sum_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

(siin kasutasime asjaolu, et vastavalt aksioomile 1° on ka $A = \sum_{i=1}^{\infty} A_i$ sündmus, kui iga A_i on sündmus, ning seega ka temale vastab arv $P(A)$).

Esimesed kaks aksioomi määravad, *millised sündmuste ruumi alamhulgad on sündmused.* Osutub, et nende valik on mõnevõrra meelevaldne, oluline on vaid see, et *sündmuste summa on alati sündmus ning iga sündmuse täiend — samuti sündmus.*

Nii me võiksime oma märklaual (joonis 1) selle asemel, et defineerida sündmused nii, nagu see oli tehtud näites 4, lugeda sündmusteks ainult piirkondade A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 ja B ning kõigi nende kombinatsioonide tabamise; ruudu $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ tabamine ei oleks sel juhul sündmus.

Kui sündmuste ruum on määratud lõpliku või loenduva hulga elementaarsündmustega, siis võib sündmusteks lugeda kõik selle ruumi alamhulgad. Seega sündmus klassikalises mõttes — lõpliku hulga elementaarsündmuste summa — on üldise sündmuse erijuhtum, sest ta rahuldab aksioome 1° (sündmuste summa on ka sündmus) ja 2° (sündmuse vastandsündmus on sündmus).

Samuti on lihtne näha, et klassikaline tõenäosus on üldise tõenäosuse erijuhtum — aksioomi 3° täidetus järeldub asjaolust, et kindla sündmuse klassikaline tõenäosus on 1, ning aksioom 4° tõenäosuste liitmise teoreemist.

Võib tekkida küsimus, kas aksiomaatiliselt defineeritud tõenäosusel on samad omadused kui klassikalisel tõenäosusel — näiteks, kas on võimatu sündmuse tõenäosus 0, kas kehtib tõenäosuste korrutamise teoreem, kas on sündmuse A vastandsündmuse $\bar{A}$ tõenäosus määratud seosega

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) \qquad (*)$$

jne. Aksiomaatika järgi ei ole isegi vahetult selge, kas sündmuste korrutis on üldse sündmus või mitte.

Osutub, et kõik ülalloetletud, aga mitmed teisedki omadused *järelduvad aksioomidest*, nende kehtivuse saab aksiomaatilise tõenäosuse korral *tõestada.*

Tõestame näiteks, et sündmuste korrutis on sündmus. Olgu meil 2 sündmust A ja B. Nende jaoks on kaks võimalust.

1. Sündmused A ja B välistavad teineteist, s. t. kui esineb A, ei esine kindlasti B ja vastupidi. Nende sündmuste koosesinemine on võimatu, s. t. nende korrutis on võimatu sündmus. Seega $AB = \Theta$.

2. Sündmused A ja B ei ole üksteist välistavad. Nende korrutis on siis sündmus, mis esineb parjasti siis, kui esinevad nii A kui ka B. Niisugune sündmus vastaks hulkade A ja B ühisosale. Kas aga hulkade A ja B ühisosa AB kuulub klassi $\mathcal{A}$, kui A ja B kuuluvad sellesse klassi?

Avaldame hulkade A ja B ühisosa nende hulkade täiendite ja summade kaudu

$$AB = \Omega - (\bar{A} + \bar{B}).$$

Kui $A \in \mathcal{A}$ ja $B \in \mathcal{A}$, siis ka $\bar{A} \in \mathcal{A}$ ja $\bar{B} \in \mathcal{A}$ (aksioomi 2° põhjal), järelikult $(\bar{A} + \bar{B}) \in \mathcal{A}$ (aksioomi 1° põhjal) ja $\Omega - (\bar{A} + \bar{B}) \in \mathcal{A}$ (aksioomi 2° põhjal).

Tähendab, AB on sündmus.

Lihtne on näidata ka seose (*) kehtivust. Kuna A ja $\bar{A}$ on alati üksteist välistavad, ja

$$A + \bar{A} = \Omega,$$

siis aksioomide 3° ja 4° põhjal:

$$P(A) + P(\bar{A}) = P(\Omega) = 1.$$

Siit järeldubki seos (*).

Et $\bar{\Omega} = \Omega - \Omega = \Theta$, siis seose (*) põhjal $P(\Theta) = 1 - 1 = 0$.

Samal viisil tulenevad aksioomidest ka paljud teised klassikalise tõenäosuse korral kehtivad seosed.

Geomeetrilise tõenäosuse korral on sündmuste ruumiks Ω tasandiline pinnatükk (märklaud) ning sündmusteks — pindala omavad pinnaosad; aksioomide 1°—4° täidetus järeldub vahetult definitsioonist. Raske pole kontrollida aksioomide 1°—4° täidetust ka statistilise tõenäosuse korral. Seega näeme, et niihästi *klassikaline, geomeetriline kui ka statistiline tõenäosus on aksiomaatilise tõenäosuse erijuhtudeks.* Et aga tõenäosuse aksiomaatiline definitsioon ei anna konkreetset eeskirja tõenäosuse arvulise väärtuse määramiseks, tuleb praktikas sageli määrata sündmuse tõenäosus (kui see vaid võimalik on) vastavalt klassikalise, geomeetrilise või statistilise tõenäosuse arvutamise eeskirjale. Tõenäosusteooria aksiomaatiline ülesehitus võimaldas avardada ja täpsemalt piiritleda selle teooria rakendusala, aga näitas ka selle tihedat seost matemaatika teiste distsipliinidega.

Osutub, et *sündmuse mõiste* langeb ühte hulgateoorias defineeritud *mõõtuva hulga mõistega*. *Tõenäosus* osutub erijuhuks *mõõdust*, mis on põhimõisteks üldises mõõduteoorias (erijuhul uuritakse mõõtuvaid hulki ka reaalmuutuja funktsioonide teoorias). Juhusliku muutuja mõiste langeb ühte tõenäosusruumis defineeritud *mõõtuva funktsiooni* mõistega; juhusliku muutuja *jaotus* osutub samuti *mõõduks*, nüüd aga juba *juhusliku muutuja väärtuste ruumis*.

Saavutatud tulemused likvideerisid igasuguse segaduse tõenäosuse mõiste ümber ning võimaldasid tõenäosusteooria tulemuste ranget loogilis-matemaatilist põhjendamist, tuginedes tõenäosuse aksiomaatilisele mõistele.

Tõenäosusteooria on muutunud kaasaegseks matemaatiliseks distsipliiniks. Viimastel aastakümnetel saavutatud tulemused tõenäosusteoorias, sellele baseeruvas juhuslike protsesside teoorias ning matemaatilises statistikas kinnitavad uue meetodi viljakust.

ÜLESANNE TÕENÄOSUSTEOORIAST

Inglismaa ülemkohtus tuli kord lahendada järgmine keeruline pärandusasi. Keegi miljonär sõitis laeval üle ookeani. Miljonäriga olid kaasas tema isiklik puusepp P. Rätsep, isiklik kokk K. Puusepp, isiklik aednik A. Kokk ja isiklik rätsep R. Aednik, kes kõik pikemat aega olid olnud selle miljonäri teenistuses (nimed on muidugi eesti keelde tõlgitud). Laev läks põhja ning kõik reisijad uppusid. Päranduse jagamisel selgus, et miljonäri testament oli trükitud suurte tähtedega ja kõlas järgmiselt.

KUUENDIKU MINU VARANDUSEST SAAB AEDNIK (VÕI TEMA PÄRIJAD), KUI AEDNIK MINU SURMA AJAL ON VEEL MINU TEENISTUSES. VASTASEL JUHUL LÄHEB SEE OSA LONDONI VANADEKODULE. KOLMANDIKU MINU VARANDUSEST SAAB KOKK (VÕI TEMA PÄRIJAD), KUI KOKK MINU SURMA AJAL ON VEEL MINU TEENISTUSES. VASTASEL JUHUL SAAB SELLE OSA PUUSEPP (VÕI TEMA PÄRIJAD). POOLE MINU VARANDUSEST SAAB RÄTSEP (VÕI TEMA PÄRIJAD), KUI RÄTSEP MINU SURMA AJAL ON VEEL MINU TEENISTUSES. VASTASEL JUHUL TULEB SEE OSA VÕRDSELT JAGADA AEDNIKU (VÕI TEMA PÄRIJATE) JA LONDONI VANADEKODU VAHEL.

Ülemkohus otsustas järelejäänud varanduse (mille suurus oli 1 200 000 naela) jaotamisel lähtuda järgmistest seisukohtadest.

Pole võimalik kindlaks teha, mis järjekorras laeval olnud reisijad uppusid, kuid tuleb eeldada, et ühegi kahe korral neist see ei toimunud samaaegselt.

Pole võimalik kindlaks teha, kas pärijaid (peale vanadekodu) on nimetatud nende nimede või ametite järgi, kuid tuleb eeldada, et kogu testamendis kasutatakse ühesugust nimetamisviisi.

Päranduse jaotamisel tuleb eeldada, et mitme variandi olemasolu korral on need alati võrdvõimalikud.

Kuidas jaotati pärandus?

Matemaatiline päevakaja

SADA AASTAT V. ALEKSEJEVI SÜNNIST

Ü. Lumiste

Möödunud sajandi viimasel aastakümnel toimusid Tartu ülikooli elus olulised muutused. Algas tsaarivalitsuse poolt 1884. aastal kinnitatud ülikoolide põhimääruse rakendamine ka Tartus, kus seni oli valitsevaks olnud saksa vaim. Kadus professorite ja administratiivisikute valitavus, muudeti kohustuslikuks õppetöö läbiviimine vene keeles. Seoses linna ümbernimetamisega 1893. aastal hakkas ülikool kandma Jurjevi Imperaatorliku Ülikooli nime. Saksa professoreist jäid kohale vaid üksikud, lahkunute asemele määrati noori vene ülikoolide kasvandikke.

Sellises olukorras alustas 1895. aastal Tartu ülikoolis oma pedagoogilist tegevust ka matemaatik V. Aleksejev. Käesoleval aastal, mil möödub sada aastat tema sünnist, ei ole liigne põgusalt meenutada selle, kogu oma järgnenud elu jooksul Tartu ülikooliga seotud olnud teadlase ja õppejõu tegevust.

V. Aleksejev noore magistrina

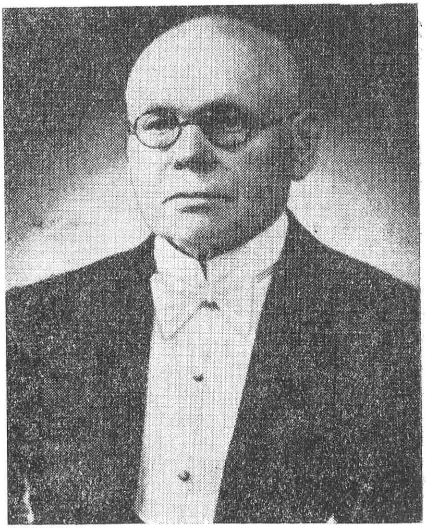
Vissarion Grigorjevitš Aleksejev sündis 18. juunil 1866. aastal Novotšerkasskis Doni kahurväe ohvitseri pojana. Pärast Moskva ülikooli lõpetamist 1888. aastal jäeti ta prof. V. J. Tsingeri soovitusel ülikooli juurde ette valmistuma professori kutseks. 1893. aastal omistati talle seal töö «Joonesüsteemide arvuliste karakteristikute teooria» eest magistrikraad ja suunati ta kaheks aastaks end täiendama välismaa ülikoolidesse. Komandeeringu vältel kuulas Aleksejev Zürichis V. Fiedlerit ja A. Hurwitzit, Pariisis G. Darboux'd, E. Picard'i ja Ch. Hermite'i ning Leipzigis Sophus Lie'd. Pärast tagasisaabumist Venemaale koostas ta oma sõidu teadusliku aruandena töö «Sirgjoon-kongruentside teooria seoses pinnateooriaga» (avald. 1897. a.) ning siirdus seejärel 1895. aastal Tartusse (Jurjevisse), kuhu ta oli määratud matemaatika erakorraliseks professoriks.

Aleksejevi lähemateks kolleegideks olid siin puhta matemaatika erakorraline professor L. K. Lahtin (1863—1927) — esimene Tartusse (juba 1892. aastal) määratud noor vene matemaatik — ja samuti noor rakendusmatemaatika professor A. Kneser (1862—1930) — viimane Tartus (kuni 1900. aastani) töötanud saksa matemaatik. Aleksejevile usaldati analüütilise, kujutava ja kõrgema geomeetria kursuste lugemine. Peale Lahtini tagasipöördumist Moskvasse 1896. aastal oli ta kahe aasta jooksul faktiliselt ainsaks puhta matemaatika professoriks (sest Lahtinit asendama määratud N. V. Bervi haigestus juba 1897. aasta algul, paigutati närvikliinikusse ja vallandati 1898. aastal). Järgmise vene matemaatikuna määrati talle kolleegiks Kaasani ülikooli kasvandik P. P. Grave (1867—1919), kellega Aleksejev töötas Tartus koos kuni ülikooli evakueerimiseni 1918. aastal Voroneži.

Matemaatika-alase teadusliku töö osas oli see aeg Tartus mõõnaajaks. On küllalt märkida, et aastatel 1901—1918 ei kaitsnud siin väitekirja ükski matemaatik. Kneseri asemel 1903. aastal Tartusse tulnud V. G. Kolossov lõpetas siin küll 1909. a. oma silmapaistva doktoriväitekirja kompleksmuutuja funktsioonide teooria rakendustest elastsusteoorias, kuid kaitses seda Peterburis. Väga loiult tegeles teadusliku tööga P. P. Grave.

Aleksejev säilitas esialgu elava huvi uurimistöö vastu. Välismaise komandeeringu ajal oli tal olnud võimalus tutvuda tollal moodsa algebraliste invariantide teooriaga. Omandatud teadmisi kasutades kirjutas ta selle ala esimese venekeelse monograafia «Binaarsete vormide ratsionaalsete invariantide teooria Sophus Lie, Cayley ja Aronholdi suunas» (Jurjev, 1899), mille eest Moskva ülikool omistas talle doktorikraadi. Aleksejevil tuli korduvalt lugeda kõrgema matemaatika kursust keemikutele. Ta märkas teatavat analoogiat formaalse keemia meetodite ja invariantide sümboolse teooria vahel. Oma teise välismaareisi ajal 1899—1900. a. arutas ta Erlangenis seda küsimust tuntud saksa algebraisti P. Gordaniga (1837—1912) ning selle tulemusena ilmus nende ühine töö «Vastavusest keemia valemite ja invariantideteooria vahel»(1900). Tema poolt märgatud analoogia juurde pöördus Aleksejev veel hiljemgi mitmes oma teaduslikus publikatsioonis. Seda tema uurimissuunda iseloomustavad ilmekalt M. Noetheri sõnad, kes P. Gordani nekroloogis kirjutas:

«V. Aleksejevi initsiatiivil ja ühes temaga ühises töös näidati seos invariantide binaarse teooria sümboolsete valemite ja keemia atomistlike struktuurvalemite vahel... Mõlemale autorile jäi kuni avaldamiseni teadmatuks, et niisuguse vastavuse oli juba 22 aasta eest väljendanud Sylvester. Kuid nende eesmärgiks polnud ainult vastavuse korraldamine: et see selgitab ka lihtsamaid protsesse, siis mõtlesid nad süsteemi mõiste rakendamisele keemias. Ometi pole see publikatsioon nähtavasti tema formaalkombinatoorse iseloomu ja ebatäieliku analoogia tõttu leidnud jätkamist».



V. Aleksejev Tartu ülikooli rektorina

Käesoleva sajandi esimestel aastatel oli V. Aleksejev üsna viljakas õppe-metoodilise kirjanduse autor. Temalt on ilmunud «Invariantide sümboolse teooria alused (keemikutele)» (Jurjev, 1901), «Analüütilise geomeetria lühikursus harjutustega» (Jurjev, 1902), kirjutis matemaatika vajalikkusest loodusuurijatele (1902) jm. Oma hilisemates töödes kaldus Aleksejev matemaatika filosoofia valdkonda. Matemaatika ja reaalsuse vahekorda puudutavates küsimustes jäi ta puhtakujuliseks idealistiks. Ta jagas oma õpetajate N. V. Bugajevi ja P. A. Nekrassovi filosoofilisi vaateid, populariseerides nende «aritmoloogiat» oma mõningates kirjutistes. Aleksejev toetas ka Nekrassovi püüdlusi, kes tsaarivalitsuse haridusministeeriumi nõukogus taotles tõenäosusteooria sissevimist gümnaasiumi kursusse eesmärgiga tugevdada sellega võitlust materialismi vastu, mis oli võitnud õppiva noorsoo sümpaatia.

Aastatel 1909—1914 ja 1917—1918 oli V. Aleksejev Tartu ülikooli rektoriks, 1914. aastast peale Vilno õppekonna kuraatoriks. Tema toimikus säilinud kirjavahetusest selgub, et ta suhtus heasoovlikult eestlastesse, võttis tööle esimesed eesti professorid, arstiteadlased A. Paldrocki ja H. Koppeli, soetas ülikoolile uusi hooneid. On iseloomulik, et kui peale 1917. a. veebruarirevolutsiooni toimus üliõpilastematemaatikute üldkoosolek, siis palus see jätta Aleksejevi edasi tööle, «sest ta pole kateedrit kunagi kasutanud poliitilise agitatsiooni jaoks» (protokollile on teiste hulgas alla kirjutanud V. Nano ja hilisem eesti matemaatikaprofessor J. Sarv).

Aleksejevi osaks langes ka ülikooli evakueerimise juhtimine 1918. aastal läheneva saksa okupatsiooni eest. Koos ülikooliga siirdus ta Voroneži, kust hiljem sõitis edasi Moskvasse. Nendel rasketel aastatel sattus ta seal suurde kitsikusse. Nagu selgub ühest tema kirjast, tuli tal seal elada külmas vagunis, algas näljapaistetus. Selle kirjaga pöördus ta 1920. aastal Tartus 1919. a. tegevust alustanud eesti ülikooli rektori poole, paludes end tööle võtta. Oma taotlust motiveeris ta muuseas sellega, et tal on Tartus eramaja ja Elvas suvila, ning et Tartusse jäi tema abikaasa (Aleksejev oli teistkordses abielus sakslannaga). Samuti taotles ta enda vastuvõtmist eesti kodakondsusesse. Kuigi tollal Tartus matemaatikaprofessorina töötanud soomlane K. Väisälä oli Aleksejevi taotluse vastu, saavutas J. Sarv siiski oma endise õpetaja määramise Tartu ülikooli eradotsendiks. Esimese loengukursuse invariantideteooriast kuulutas Aleksejev välja 1921. aasta sügissemestriks. Sama ainet (ja aegajalt ka diferentsiaalvõrrandite geomeetrilist teooriat) luges ta vähestele kuulajatele vene või saksa keeles korduvalt kuni 1939. aastani. Mitmel korral on ta sunnitud olnud teatama, et kuulajaid polnud. Faktiliselt elas Aleksejev Tartus kinnisvaraomaniku ja rantjee mugavat elu. Oma sel ajal «Postimehes» ja mujal ilmunud kirjutistes käsitles ta peaasjalikult pedagoogikat, propageerides innukalt J. Fr. Herbarti reaktsioonilisi seisukohti.

Viimastest Aleksejevi toimikus leiduvatest materjalidest selgub, et ta 1943. aasta märtsis fašistliku okupatsiooni ajal esitas palvekirja pensioni saamiseks. Tema edasise saatuse kohta puuduvad dokumentaalsed andmed. Teda tundnud isikutelt saadud suuliste teadete põhjal võib siiski üsna kindlalt väita, et Aleksejev lahkus Tartust kõrges vanuses 1943. aasta suvel, nähtavasti kartusest läheneva rinde ees. Surm olevat saabunud samal aastal Poolas.

KESKKOOLIÕPILASTE 13. TÄPPISTEADUSTE OLÜMPIAAD

E. Mitt

Ajavahemikus 19.—22. märtsini 1966. a. toimus ENSV Haridusministeeriumi ja Tartu Riikliku Ülikooli organiseerimisel vabariigi keskkoolide lõpuklasside õpilaste traditsioonilise täppisteaduste olümpiaadi lõppvoor [1]. Kolm päeva kestis pingeline võistlus vabariigi koolide parimate noorte matemaatikute, füüsikute ja keemikute vahel.

Matemaatikaolümpiaadi III voorule, mis viidi läbi 19. märtsil Nõo Keskkoolis, oli II vooru tulemuste põhjal kutsutud 68 õpilast 34-st koolist; kõigil osavõtjatel tuli 5 tunni jooksul lahendada järgmised 5 ülesannet.

1. Näidata, et kui kolmnurga küljed a, b ja c moodustavad aritmeetilise progressiooni, siis ka $\cot\frac{A}{2}$, $\cot\frac{B}{2}$ $\cot\frac{C}{2}$ moodustavad aritmeetilise progressiooni.

2. Lahendada süsteem
$$\begin{cases} 2x^2 = y^2 + z^2 \\ xyz = 64 \end{cases}$$
teades, et $\log_y x$, $\log_z y$, $\log_x z$ moodustavad geomeetrilise progressiooni.

[1] Olümpiaadide korraldamise kohta vt. Matemaatika ja kaasaeg, VII, lk. 109—110.

3. Ruumala A moodustab poole ruumalade B ja C summast, ruumala B — kolmandiku ruumalade A ja C summast. Missuguse osa ruumalade A ja B summast moodustab ruumala C?

4. Punktid D, E ja F asetsevad lõigu AB keskristsirgel. Nende kaugused on lõigust AB vastavalt $\frac{1}{2}AB$, AB ja $\frac{3}{2}AB$. Arvutada nurkade summa $\angle ADB + \angle AEB + \angle AFB$.

5. Lahendada võrrand

$$\sqrt{a - \sqrt{a + x}} = x.$$

Kuigi lõppvooru ülesanded olid möödunudaastastega võrreldes märksa raskemad, kujunesid tulemused heaks: õigeid ning igati korrektseid lahendusi oli leitud: 1. ülesandele — 30, 2. ülesandele — 19, 3. ülesandele — 45, 4. ülesandele — 26 ja 5. ülesandele — 15.

Parimate tööde autorid T. Kändler (paremal) ja K. Kaarli

MATEMAATIKAOLÜMPIAADI PARIMAD

Koht	Nimi	Keskkool			Klass	Punkte
1.	Kändler, Tiit	Tallinna	2.	Keskkool	10b	49,5
2.	Kovbasa, Sergei	”	15.	”	10	48
3.	Sarv, Ain	”	21.	”	11a	47
4.	Martin, Eve	”	1.	”	10a	46
5.	Striž, Aleksander	”	6.	”	11b	41
6.	Aul, Mihkel	Tartu	5.	”	11a	41
7.	Tooming, Peeter	Viljandi	1.	”	11c	40
8.	Prank, Rein	Nõo		”	10a	40
9.	Krigul, Meelis	Viljandi	1.	”	11b	40
10.	Vaim, Sulev	Tallinna	1.	”	11a	40
11.	Jaagupalu, Külli	Viljandi	1.	”	11	39,5
12.	Kolka, Indrek	”	1.	”	11b	39
13.	Vorobjova, Larissa	Tallinna	31.	”	11	39
14.	Sokolov, Vladimir	”	15.	”	10a	39
15.	Lukki, Tiit	Kohila		”	11	39
16.	Kikas, Jaak	Tallinna	2.	”	10b	39
17.	Merivoo, Mihkel	Nõo		”	10	38
18.	Antiškina, Galina	Tallinna	31.	”	11	38
19.	Kollo, Tõnu	Orissaare		”	11a	38
20.	Groger, Lev	Pärnu	3.	”	11b	37
21.	Harju, Taivo	Tartu	1.	”	11c	33
22.	Mõts, Arvo	Võru	1.		11a	33
23.	Kalinkina, Tatjana	Tartu	6.		11b	33
24.	Repetun, Sergei	Narva	6.		11	32
25.	Kljuškina, Irina	Narva	7.		10	30

ENSV Koolivalitsuse juhataja R. Virkus annab A. Sarvele diplomi ja auhinna

Olümpiaadi esikoha pälvis Tallinna 2. Keskkooli õpilane Tiit Kändler 49,5 punktiga (50-st võimalikust). Edasisest kohtade ning punktide jaotusest annab pildi lisatud tabel. Väljaspool konkurssi esitasid väga häid lahendusi Kalle Kaarli Tallinna 2. Keskkoolist ja Vladimir Mürk Tallinna 6. Keskkoolist.

Parima kooli nimetuse matemaatika alal kindlustasid Viljandi 1. Keskkoolile selle õpilased Tooming (7. koht), Krigul (9. koht), Jaagupalu (11. koht) ja Kolka (12. koht). Seega läheb TRÜ ränddiplom, mis möödunud aastal oli Tallinna 6. Keskkoolis, Viljandisse.

Järgnevatel päevadel, 20. ja 21. märtsil toimusid keemia- ja füüsikaolümpiaadi lõppvoorud. Keemias osutusid parimateks:

1. Mihkel Aul Tartu 5. Keskkooli 11a klassist;
2. Jaak Loit Märjamaa Keskkooli 11 klassist;
3. Rein Mäll Tartu 5. Keskkooli 11a klassist.

Parimaks kooliks keemia alal tunnistati ka tänavu Tartu 5. Keskkool.

Füüsikaolümpiaadil tulid võitjateks:

1. Mihkel Aul Tartu 5. Keskkooli 11a klassist;
2. Peeter Oja Nõo Keskkooli 10 klassist,
3. Vladimir Mürk Tallinna 6. Keskkooli 10 klassist.

TRÜ ränddiplomi füüsikas saab tagasi Tallinna 6. Keskkool tänu selle kooli õpilaste Mürgi (3. koht), Striži (8. koht) ja Tsvetkovi (21. koht) tublile esinemisele.

Kõigil kolmel alal (matemaatika, keemia, füüsika) osutusid parimateks Mihkel Aul, Ain Sarv ja Ants Saabas.

Olümpiaadist osavõtjatele korraldati ekskursioone Nõo ja TRÜ arvutuskeskustesse, Tõravere observatooriumi, TRÜ keemia laboratooriumidesse. TRÜ õppejõud esinesid olümpiaadist osavõtjatele loengutega. Kohtumisõhtul TRÜ kollektiiviga vastasid olümpiaadist osavõtjate küsimustele dotsendid V. Palm, K.-S. Rebane, L. Võhandu ja E. Jürimäe. Kõigi olümpiaadiga seotud ürituste organiseerimisel ja läbiviimisel oli olümpiaadi komisjonile suureks abiks Nõo Keskkooli kollektiiv, ülesannete lahendamisel ning tööde läbivaatamisel abistasid TRÜ Füüsika-Matemaatikateaduskonna üliõpilased.

Olümpiaadi pidulikul lõpetamisel TRÜ klubis 22. märtsil k. a. anti kätte diplomid ja auhinnad iga ala kümnele parimale. Võitjaid tervitasid ENSV Haridusministeeriumi Koolivalitsuse juhataja sm. R. Virkus, ENSV Haridusministeeriumi koolide inspektor sm. H. Saarsoo, TRÜ Füüsika-Matemaatikateaduskonna prodekaan sm. R. Tani ja varasematel olümpiaadidel edukalt esinenud TRÜ keemiaosakonna II kursuse üliõpilane T. Püssa. Olümpiaadist osavõtjate nimel võttis sõna olümpiaadi üldvõitja Mihkel Aul.

„Matemaatika ja kaasaja" keelenurk

MATEMAATILISE TEKSTI ÕIGEKIRJUTUSEST

Ü. Kaasik, E. Vääri

Matemaatilise sisuga teksti kirjutamisel tuleb peale üldtuntud õigekirjutustavade arvestada veel mõningaid täiendavaid reegleid. Järgnevas ongi lühidalt esitatud mõned olulisemad nendest.

Matemaatilised sümbolid ja valemid kuuluvad a l a t i lause koosseisu. Seda tuleb arvestada nii lause sõnastamisel kui ka kirjavahemärkide panemisel. Lause peab olema sõnastatud nii, et pärast selles esinevate sümbolite ja valemite väljakirjutamist vastavate sõnade abil saaksime korrektse eestikeelse lause.

Sõnastuse (ja kirjavahemärkide) õigsuse kontrollimine selle reegli abil võib osutuda üsna tülikaks, kui lauses esinevad valemid on keerulisema struktuuriga, näiteks

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

või muud sellist. Seetõttu on sümbolite ja valemite iga tüübi jaoks oluline leida mingi võimalikult lühike sõnaline ekvivalent. Sellelt seisukohalt jagunevad kõik matemaatilised sümbolid ja valemid kahte suurde klassi.

Ühe klassi moodustavad sümbolid ja valemid, mida lausetes kasutatakse täpselt samuti nagu mittematemaatilises tekstis pärisnimesid. Võrrelgem näiteks järgmisi lausepaare:

1a) *Siit järeldub, et A on singulaarne maatriks.*

1b) *Siit järeldub, et «Edasi» on loetav ajaleht.*

2a) *Teostame nüüd samasuguse teisenduse võrrandis $f(x) = c$.*

2b) *Teostame nüüd samasuguse teisenduse eeposes «Kalevipoeg».*

Selliseid pärisnime funktsioonis kasutatavaid konstruktsioone nimetame lühidalt a v a l d i s t e k s. Paneme ühtlasi tähele, et kui avaldise ees on lisand, siis käänatakse ainult lisandit (samuti nagu lisandi ja sellele järgneva jutumärkides oleva pärisnime korral).

Teise klassi moodustavad niisugused konstruktsioonid, mille sõnalised ekvivalendid sisaldavad aluse, öeldise ja veel teisi lauseliikmeid, moodustades seega omaette tervikliku lause. Selliste konstruktsioonide põhitüübid on järgmised (sulgudes on näitena toodud sama struktuuriga laused):

$a > b$ *(Tallinn on suurem kui Tartu.)*

$G(x) = 0$ *(Lüüasaamine on võrdne kaotusega. Kaks võrdub kahega.)*

$n \to 0$ *(Rong läheneb jaamale.)*

$x \geqslant y$ *(Kindral on aukraadilt kõrgem või võrdne kui admiral.)*

$A \sim B$ *(Laisk on samaväärne loodriga.)*

Nimetame niisuguseid konstruktsioone v õ r d l u s t e k s (grammatiliselt on need enamasti võrdlusega laused). Rõhutame, et võrdluse ees ei paikne kunagi lisandit (täpsemalt, lisand muudab võrdluse avaldiseks — vt. näide 2a).

Lausete konstrueerimisel võime seega kõik avaldised asendada pärisnimedega jutumärkides (näiteks *«Edasi»*) ja kõik võrdlused lihtlausetega (näiteks *kaks võrdub kahega*). Sealjuures tuleb aga arvestada järgmisi erinevusi, mis nõuavad teatava kindla sõnastuslaadi kasutamist matemaatilistes tekstides.

Lauset ei alustata avaldise või võrdlusega. Kui seda ei saa vältida sõnade üldise järjekorra muutmisega lauses, tuleb avaldise ette panna sobiv lisand ja võrdluse ette mõni side- või kohamäärsõna. Näiteid: *Suuruse x sobiva valikuga...* (pro: *x sobiva valikuga...*); *Et $x = a$, siis saame...* (pro: *$x = a$ tõttu saame...*). Kui lause algul oleva avaldise ette ei saa panna lisandit (avaldis on lause aluseks ning lisandiks sobiv sõna esineb öeldistäitena), siis tuleb ka avaldise ees kasutada mõnd side- või kohamäärsõna. Näiteks: *Siin A on punkt, mille kaugus...* (pro: *A on punkt, mille kaugus...*).

Kõrvallause ei tohi koosneda ainult võrdlusest, vaid peab sisaldama veel vähemalt ühe sõna. Näiteks: *Seega A on raskuskese, järelikult $AB = 3$ ja valemi (25) kohaselt $x = 7$* (pro: *Seega A on raskuskese, $AB = 3$ ja $x = 7$*).

Avaldiste käänamist peab nii palju kui võimalik vältima. Avaldise käänamise asemel tuleb panna sobiv lisand ja käänata seda. Näiteks: ... *liikudes punktist A sirgeni CD* (pro: ... *liikudes A-st CD-ni*). Ei tohi kasutada ka lauseid, milles avaldise käänamine on juurde mõeldud. Näiteks: ... *vaatleme vahet $x - y$* (pro: ... *vaatleme $x - y$*). Lausete tarbetu kohmakuse vältimiseks võib mõnikord siiski kasutada ühest tähest koosnevate avaldiste käänamist. Näiteks: ... *liites b-kordse i-nda rea k-ndale reale* (mitte: ... *liites b-kordse rea number i reale number k*).

Seoses viimase reegliga esitame lõpuks lugejaile arvamuste avaldamiseks veel ühe vaieldava ettepaneku, mille suhtes isegi käesoleva artikli autorid ei ole ühesugusel seisukohal. Küsimus on nimelt selles, kas lubada avaldise omastava käände juurdemõtlemist, s. t. vastava käändelõpu kirjutamatajätmist. Näiteks kas võib kasutada lauset: *Paneme x asemele arvud 3, 4 ja 5*, või peab kirjutama: *Paneme suuruse x asemele arvud 3, 4 ja 5*? Aga võib-olla saab omastava käände juurdemõtlemist lubada ühestainsast tähest koosnevate avaldiste korral, muudel juhtudel aga mitte?

TÕENÄOSUSTEOORIA JA MATEMAATILISE STATISTIKA TERMINITEST

E. Tiit

Teatavasti ootab eestikeelne matemaatika oskussõnastik ikka veel tegijaid, kuigi vajadus selle järele üha kasvab. Veidi leevendab olukorda eestikeelse matemaatilise kirjanduse ilmumine, kuna sellega vähemalt üksikutel erialadelgi teatud ulatuses fikseeritakse põhisõnavara. Eriti suure vastutuse asetab see aga trükkisuunatavate teoste terminoloogia valikule.

Tõenäosusteooria ja matemaatilise statistika alal on senini ilmunud kirjandus küllaltki kasin. Seetõttu on siin terminoloogia-alane segadus suurem kui matemaatika teistes harudes. Paljude mõistete kohta on käibel mitu terminit, mida põhjustab osalt asjaolu, et neid mõisteid kasutavad peale matemaatikute ka majandusteadlased, bioloogid jt. sageli täiesti «oma» terminoloogiana. Mõningaid termineid on erinevad autorid kasutanud täiesti erinevate mõistete väljendamiseks.

Et võimaluse piires ühtlustada matemaatilise statistika ja tõenäosusteooria terminoloogiat, otsustati arutada kõige põhilisemaid ning segadust tekitavamaid termineid Tartu ülelinnalisel matemaatikaseminaril (17. märtsil 1966. a.). Sellest seminarist võttis osa FAI arvutuslaboratooriumi, TRÜ biofüüsika laboratooriumi ja arvutuskeskuse töötajaid, EPA ning TRÜ õppejõude, kellel kõigil on tulnud oma töös kokku puutuda tõenäosusteooria või matemaatilise statistikaga.

Soovitatavad vormid	Mittesoovitatavad vormid
sündmus esineb, sündmus toimub	*sündmus ilmub, sündmus tuleb esile*
üksteist (teineteist) välistavad sündmused, ühisosata sündmused	*mitteühtjad sündmused*
juhuslik suurus, juhuslik muutuja	*juhumuutuja, variant, juhuslik funktsioon*
jaotus	*jaotumus, jaotusseadus*
jaotusfunktsioon $(F_X(x) = P(X < x))$	*integraalne jaotusfunktsioon, integraalne jaotusseadus*
tõenäosuse tihedus, tihedusfunktsioon $\left(f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)\right)$	*tõenäosuse tihedusfunktsioon, diferentsiaalne jaotusfunktsioon, diferentsiaalne jaotusseadus, jaotuskõver*
Laplace'i funktsioon $\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt\right)$	*tõenäosusintegraal*
normaalkõver, Gaussi kõver	*kellakõver, tõenäosuse kõver*
binomiaaljaotus, binomiaalne jaotus	*binoomjaotus*
keskväärtus	*matemaatiline ooteväärtus, matemaatiline ootus, matemaatiline oode, ooteväärtus*
mediaan	*keskväärtus* $\left(\frac{1}{2}\right.$*-kvantiili tähenduses*$\left.\right)$
kvantiil	*kvantill*
tsentraalmoment	*keskmoment*
korrelatsioonikordaja	*korrelatsioonikoefitsient*
mitmene korrelatsioon	*hulkkorrelatsioon*
osakorrelatsioon	*partsiaalkorrelatsioon*
suhteline sagedus, relatiivne sagedus	
absoluutne sagedus, sagedus	
üldkogum	*populatsioon, generaalkogum, statistiline kollektiiv*
väljavõte	*väljavõtt, kogum, võend, väljavõtukogum*
standardhälve	*ruutkeskmine hälve*
tõepärasus (ingl. k. likelihood)	
nihutamata hinnang	
variatsiooniulatus $(x_{max} - x_{min})$	
usalduspiirid	*usaldatavuspiirid*

Terminite valikul lähtus seminar järgmistest põhimõtetest:

1. Mitte välja mõelda uusi termineid, kui vastavate mõistete jaoks on käibel ning juba juurdunud enam-vähem sobivad terminid.

2. Võimalikult vähendada põhiterminite hulka. Näiteks peeti soovitavaks mitte võtta kasutusele erinevaid termineid üldkogumi ja väljavõtte samade karakteristikute jaoks, vaid vajaduse korral kasutada vastavalt eesliidet *üld-* või *väljavõtte-*. Samuti ei peetud esialgu vajalikuks fikseerida kõiki kitsastes probleemides vajaminevaid spetsiaalseid termineid.

3. Taotleda terminitelt võimalikult suurt selgust (võimaluse korral sisu väljendamist — näit. termin *üksteist välistavad*).

4. Võimaluse piires püüti eelistada eestikeelseid termineid.

Leheküljel 103 on esitatud seminaril läbiarutatud sõnad ning nende suhtes vastuvõetud otsused.

Sõna *kogum* otsustati kasutada mistahes statistilise kogumi (üldkogumi või väljavõtte) tähistamiseks. *Tsentraalmomendi* eelistamist *keskmomendile* põhjustas ühelt poolt teise sõna üldkeeleline tähendus, teiselt poolt aga mõiste vahetu seos tsentreeritud juhusliku suurusega.

Seminar jääb lootma, et astutud sammud terminoloogia ühtlustamiseks leiavad toetust ning kaasaaitamist vabariigi matemaatikute hulgas.

Kroonika

JUUBILAR HILDA ROOS

Käesoleval aastal möödub 60 aastat TPI matemaatika kateedri dots. k. t. Hilda Roosi sünnist ja 40 aastat sellest hetkest, mil ta noore üliõpilasena esmakordselt astus üle Tartu ülikooli läve.

Hilda Otto t. Roos sündis 17. juulil 1906. a. Tallinnas. Miks ja millal tuli tal mõte matemaatikuks õppida, seda ei oska juubilar isegi öelda, kuid ülikooli astumisel 1926. aastal langes valik matemaatikale. Sooritanud normaalajaga kõik eksamid ja praktikumid lõpetas ta õpetajakutse andva didaktilis-metoodilise seminari ning 12. juunil 1931. a. kuulutati ülikooli lõpetanuks *cum laude* matemaatika erialal (ainukese naisena).

Noorel matemaatikul Hilda Roosil tuli tunda sellele ajale omaseid raskusi töö muretsemisel. Ta teenis ülalpidamist eratundidega, töötas ajutise õpetajana Narvas ja paar aastat õpetajana ühes Rakvere eragümnaasiumis, kuid käskjala palgaga, ning alles seejärel õnnestus tal saada püsivamat tööd Tallinnas H. Kubu tütarlaste eragümnaasiumis ja hiljem Tallinna Õpetajate Seminaris.

Juba soliidse staažiga pedagoog Hilda Roos kutsutakse 1944. a. Tallinna Polütehnilisse Instituuti, kus ta töötab matemaatika kateedris assistendi ja alates 1962. aastast dotsendi kohal.

Matemaatika õpetamisele on Hilda Roos pühendanud 34 aastat, neist 22 aastat kõrgemas koolis. Ta on pidevalt tundnud elavat huvi matemaatika õpetamise metoodika vastu, on avaldanud sellekohaseid töid, kirjutanud loengukonspekte ja metoodilisi juhendeid TPI üliõpilastele, on esinenud lektorina õpetajate kvalifikatsiooni tõstmise kursustel jne. Tema nõuanded on hinnatavad nii noorte kui ka vanade kolleegide hulgas.

Laiemalt on H. Roosi nimi matemaatikat õppiva noorsoo hulgas tuttavaks saanud kõrgema matemaatika ülesannete kogu kaudu, mille kaasautoriks ta on.

Nõudliku, järjekindla, visa ja range suhtumisega töösse, ülesannete kohusetundliku täitmisega, elava huviga oma aine ja selle rakenduste vastu, abivalmi, asjaliku ja siira suhtumisega kaasinimestesse on juubilar võitnud üliõpilaste ja kõigi töökaaslaste üldise lugupidamise. Meie ühiseks sooviks on (ja meie loodame, et sellega ühinevad kõik vabariigi matemaatikud), et juubilaril jätkuks veel kauaks ajaks elutuld, energiat ja tahet olla innustavaks eeskujuks noortele.

Töökaaslased

UUSI TEADUSTE KANDIDAATE

25. detsembril 1965. a. kaitses oma väitekirja «Wieneri integraaliga seotud numbrilistest meetoditest» Eesti NSV TA Küberneetika Instituudi teaduslik töötaja **Teet Tobias.** Tööd juhendas füüsika-matemaatikakandidaat Ivar Petersen, oponeerisid füüsika-matemaatikadoktor prof. G. Kangro ja füüsika-matemaatikakandidaat dots. A. Särev.

Väitekirjas vaadeldakse pidevate (ühe- ja mitmemuutuja) funktsioonide hulgal määratud lineaarsete funktsionaalide ruutkeskmist lähendamist. Funktsionaalide määramispiirkonnas on defineeritud mõõt (nn. Wieneri mõõt). Lähendusvalemi headuse kriteeriumiks võetakse vea dispersiooni minimaalsus. Väitekirjas antakse veel eeskirjad teatud tüüpi Wieneri integraalide ligikaudseks arvutamiseks.

Eesti NSV TA Füüsika-Matemaatika ja Tehnikateaduste Osakonna Nõukogu otsustas T. Tobiasele omistada füüsika-matemaatikakandidaadi kraadi.

Teet Tobias on sündinud Tallinnas 15. novembril 1938. a. Ta lõpetas 1956. a. Tallinna 7. Keskkooli ja 1961. a. TRÜ matemaatikaosakonna arvutusmatemaatika erialal. Aastail 1961—1964 oli T. Tobias aspirantuuris TA Küberneetika Instituudis, kus nimetatud väitekiri valmiski.

*

*

4. märtsil 1966. a. kaitses oma väitekirja «Rõngasplaatide kandevõimest ja viskoosplastilisest voolamisest» EPA maakorralduse ja matemaatika kateedri vanemõpetaja **Hillar Vallner.** Tööd juhendas professor Ü. Lepik, oponeerisid professorid G. Šapiro Moskvast ja D. Ivlev Voronežist.

Väitekirjas tuletatakse valemid rõngasplaatide kandevõime, painutavate momentide ja läbipainete arvutamiseks erinevate kinnitus- ja koormamisviiside korral. Samuti tuletatakse valemid painutavate momentide ja läbipainete arvutamiseks juhul, kui rõngasplaat on viskoosplastilises seisundis. Oponendid märkisid, et tööl on suur praktiline väärtus. TRÜ Füüsika-Matemaatikateaduskonna nõukogu otsustas H. Vallnerile omistada füüsika-matemaatikakandidaadi kraadi.

H. Vallner on sündinud 8. oktoobril 1930. a. Tallinnas. Ta lõpetas 1949. aastal Tallinna 1. Keskkooli, kus tema matemaatikaõpetajaks oli F. Männik, ning 1954. aastal Tartu Riikliku Ülikooli matemaatikaosakonna. Tööle suunati dissertant Eesti Põllumajanduse Akadeemiasse, kus ta töötab pidevalt käesoleva ajani, välja arvatud vaid aspirantuuriaastad 1962—1964 TRÜ-s.

H. Vallneri avarast teaduslikust silmaringist kõneleb fakt, et EPA-s töötamise vältel on ta lugenud tervet rida mitmesuguseid distsipliine — kõrgemat matemaatikat, lineaarset planeerimist, elektronarvutite kasutamist ja programmeerimist, geodeesiat, aerofotogeodeesiat jm., millel on üsna vähe ühist tema peamise teadusliku huviala — teoreetilise mehhaanikaga. Üliõpilastele peetavatele loengutele lisanduvad juba teist aastat veel loengud EPA õppejõududele matemaatiliste meetodite juurutamisest. Tuleb veel märkida, et H. Vallner on üks programmõppe entusiaste, kes sel alal on tuntud isegi väljaspool vabariigi piire.

MEIE JUURES KAITSTI VÄITEKIRJU

Käesoleva aasta jaanuarikuu lõpul kaitsesid kandidaadiväitekirju TRÜ Füüsika-Matemaatikateaduskonna Nõukogu ees matemaatikud J. A. Ponomarenko Dnepropetrovskist ja D. A. Kogan Sverdlovskist. Nimetatud sündmus tõi Tartusse ka Nõukogude reateoreetikutest kaks tuntumat — dots. I. J. Žaki (Volgograd) oponendina ühele ja dots. M. F. Timani (Dnepropetrovsk) juhendajana teisele dissertandile. Meie ülikoolist olid oponentideks prof. G. Kangro ja dots. E. Reimers. Külaline M. F. Timan esines Tartus ühtlasi ettekandega teemal «Mõningaid küsimusi summeeruvuse mõiste rakendamisest lineaarsete funktsioonide lähendusteoorias».

J. A. Ponomarenko väitekiri «Mõningaid kordsete Fourier' ridade summeeruvuse küsimusi» käsitleb aktuaalset probleemi — mitme muutuja funktsiooni lähendamist selle funktsiooni Fourier' rea või tema lineaarteisenduse osasummadega. Lähenduse headust hinnatakse mitmesuguste karakteristikute kaudu. Viimased sõltuvad vaadeldavate funktsioonide struktuursetest või konstruktiivsetest omadustest. Väitekirja tulemuste väärtus seisneb nende suhtelises lihtsuses, mis on saavutatud sel teel, et kordse Fourier' rea absoluutse koonduvuse ja summeeruvuse kriteeriumid on antud funktsiooni (struktuursete või konstruktiivsete) omaduste kaudu iga muutuja jaoks eraldi.

D. A. Kogani väitekiri «Lõpmatute maatriksite konvolutsioonid ja nende rakendusi funktsionaalridade summeerimisel» on seotud ühega kõige uuematest ja vähemuuritud küsimustest ridade teoorias. Väitekirjas uuritakse koonduvust säilitavate maatriksmenetluste konvolutsioonide ringi üldisi omadusi, vaadeldakse kahe Euler-Knoppi menetluse, kahe Fejeri menetluse jt. konvolutsioone. Summeerimismenetluste konvolutsioonid leiavad dissertatsioonis rakendamist Taylori ja Fourier' ridade summeerimisel ja lähendusprobleemide uurimisel.

T. Sõrmus

Bibliograafia

Eesti NSV-s ilmunud matemaatika-alase kirjanduse nimestik

November 1965—veebruar 1966

(Koostanud E. Annus)

RAAMATUD

K a l l a k, J. ja L i n t s, A. **Matemaatika õpetamisest IV klassis.** Tln., «Valgus», 1966. 48 lk.

Matemaatika ja kaasaeg. Abimaterjale matemaatika õpetajatele ja õppijatele. VII. Trt., 1965. 120 lk. (Tartu Riiklik Ülikool.)

Sisu: E. J ü r i m ä e. Hulgateoreetilised paradoksid ja matemaatika aluste uurimine. — J. G a b o v i t š. Algebra põhimõisted. II. — Ü. K a a s i k ja R. M u l l a r i. Kalendrilise planeerimise ülesannete matemaatiline lahendamine. — R. P é t e r. Matemaatika on kaunis. — E. T i i t. Arvuridadest. — J. G a b o v i t š. Uus klassivälise töö vorm. — T. R o o s i n u p p. Maagilise geomeetria alused. — A. K o p p e l. Albert Einstein ja kaasaegne füüsika. — Ü. L u m i s t e. Albert Einsteini mõtteid matemaatikast. — E. T a m m e. Logaritmide sünd. — Matemaatiline päevakaja. — Kroonika. — Bibliograafia. — Ülesandeid.

M e r i l o, H. **Analüütiline geomeetria.** Trt., 1966. 99 lk. (Eesti Põllumajanduse Akadeemia.) — Trükitud rotaprindil.

Metoodilisi juhendeid matemaatika õpetamiseks IX—XI klassis. Tln., 1965. 60 lk. (ENSV Haridusministeerium.)

Mittestatsionaarse matemaatikakooli 1965. a. sisseastumiseksami ülesanded. Trt., 1966. 15 lk. (TRÜ mittestatsionaarne matemaatikakool. Nr. 2.) — Trükitud rotaprindil. — Sama ka vene k.

P i s k u n o v, N. S. **Diferentsiaal- ja integraalarvutus kõrgematele tehnilistele õppeasutustele.** Tln., «Valgus».
1. kd. 1965. 456 lk.
2. kd. 1966. 407 lk.

Võrratused. Trt., 1966. 15 lk. (TRÜ mittestatsionaarne matemaatikakool. Nr. 1.) — Trükitud rotaprindil. — Sama ka vene k.

К о г а н, Д. А. **Свертки бесконечных матриц и их приложения к суммированию функциональных рядов.** Автореферат. Тарту, 1965, 9 с. (Тартуский гос. ун-т.)

ARTIKLID

Eesti NSV Teaduste Akadeemia toimetised. Füüsika-matemaatika- ja tehnikateaduste seeria. Tln., 1965.

Nr. 4. Matemaatika-alased artiklid (vene k., resümeed eesti, inglise ja saksa k.):

U l m, S. Ühest kolmandat järku koonduvuskiirusega iteratsioonmenetluste klassist. — I. P e t e r s e n. Peakomponentide meetodi kasutamine korreleeritud sisendparameetritega tehnoloogiliste protsesside kirjeldamiseks. — V. K u u s i k. Programmeerimise keel majandusliku informatsiooni töötlemiseks.

N o o r, E. Märkide osa matemaatiliste mõistete kujunemisel. — «Nõukogude Kool», 1965, nr. 12, lk. 901—907.

P r i n i t s, O. Matemaatikaalased võimed. — «Nõukogude Kool», 1965, nr. 11, lk. 875—879.

P r i n i t s, O. Tänapäeva reformitaotlusi matemaatikas. — «Nõukogude Kool», 1965, nr. 10, lk. 749—758.

R ü n k, O. Nupukuse proovipähkleid. — «Tehnika ja Tootmine», 1965, nr. 11, lk. 522, nr. 12, 576; 1966, nr. 1, lk. 47, nr. 2, lk. 95—90.

S õ e r d, J. Õpilaste matemaatikavigade seosest signaalsüsteemide suhte tüpoloogiliste iseärasustega — «Nõukogude Kool», 1966, nr. 1, lk. 30—34.

U n d u s k, A. Koolialgebra üksikosade vahelistest seostest. — «Nõukogude Kool», 1965, nr. 10, lk. 792—799, nr. 11, lk. 873—874.

Л е в и н, М. И. Решение экстремальной задачи для одной квадратурной формулы с весовой функцией. — Труды Таллинского политехн. и-та. Серия А, № 222, 1965, стр. 15—19.

Ülesandeid

Ülesandeid elementaarmatemaatikast

1. Lahendada võrrandisüsteem

$$
\begin{aligned}
&x_1 + x_2 + x_3 = 0\\
&x_2 + x_3 + x_4 = 0\\
&\quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; .\\
&x_{98} + x_{99} + x_{100} = 0\\
&x_{99} + x_{100} + x_1 = 0\\
&x_{100} + x_1 + x_2 = 0.
\end{aligned}
$$

2. Kolmliikme $x^{10} - x^5 + 1$ astendamisel astendajaga 1965 saadakse polünoom $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$. Leida

$$a_1 - a_3 + a_5 - a_7 + \ldots$$

3. Leida võrrandi

$$1! + 2! + \ldots + x! = y^2$$

naturaalarvulised lahendid.

4. Ehitada võrdkülgne kolmnurk, mille tipud asuvad kolmel antud paralleelsel sirgel.

5. Tasandil on antud 2 punkti B ja C. Määrata piirkond, millest võib valida punkti A, et kolmnurgas ABC oleks

$$BC \leqslant AB \leqslant 2BC \text{ ja } BC \leqslant AC \leqslant 2BC.$$

6. Millises piirkonnas peab asuma punkt A, et oleksid rahuldatud võrratused

$$AB \leqslant BC \leqslant CA?$$

7. On antud sirge a ja sellel punkt O. Vaatleme punkti A ning tema ristprojektsiooni A' sirgele a. Millises piirkonnas asub punkt A, kui kolmnurga $OA'A$ pindala S rahuldab ainult mingit ühte järgmisest kolmest tingimusest:
a) $OA' \leqslant S \leqslant 1$, või b) $2OA' \leqslant S \leqslant 2$, c) $3OA' \leqslant S \leqslant 3$?

Ülesanded 5, 6 ja 7 koostas **M. Rahula**

KOGUMIKU KAHEKSANDA VIHIKU ÜLESANNETE LAHENDUSED

A. Elementaarmatemaatika

Ülesande nr. 1. lahendus. Toodangu väljalase suureneb 5% võrra.

Ülesande nr. 2. lahendus. Võrrand teisendub kujule

$$\frac{5-x}{(x-3)(x-2)} = \frac{5-x}{(x-4)(x-1)}.$$

Võrrandi lahendiks on $x = 5$.

Ülesande nr. 3 lahendus. Ülesandes toodud mõttekäik vastab juhule, kui punkt O asub kolmnurga sees. On aga kerge tõestada, et punkt O asub kas kolmnurga kaatetil või väljaspool kolmnurka.

Ülesande nr. 4 lahendus. Ehitame antud nurgale täiendusnurga (36°) ning poolitame viimase; saame nurga 18°, mis moodustabki ühe kolmandiku antud nurgast.

Ülesande nr. 5 lahendus. Olgu linnade A ja B vaheline kaugus y km, ooteaeg lennuki väljumiseni x tundi. Siis on rongi kiirus $\frac{y}{20}\frac{\text{km}}{\text{t}}$ ning lennuki kiirus $\frac{y}{10-x}\frac{\text{km}}{\text{t}}$. Ülesande tingimuse põhjal saame koostada võrrandi

$$\frac{8}{9}\cdot\frac{y}{10-x}=\left(x+\frac{8}{9}\right)\cdot\frac{y}{20},$$

millest

$$x_1=8 \text{ ja } x_2=\frac{10}{9}$$

(viimane ei sobi, sest on väiksem viiest). Järelikult lennuki kiirus on $\frac{y}{2}\frac{\text{km}}{\text{t}}$ ning ta sõidab rongist 10 korda kiiremini.

Ülesande nr. 6 lahendus. Asendades antud võrrandis $x=1+\sqrt{3}$, saame peale lihtsustusi

$$4a+b+42+(2a+b+18)\sqrt{3}=0.$$

Seega võrrandi lahendiks on $x=1+\sqrt{3}$, kui

$$\begin{cases} 4a+b+42=0 \\ 2a+b+18=0, \end{cases}$$

s. o. kui $a=-12$ ja $b=6$.

Ülesande nr. 7 lahendus. Et

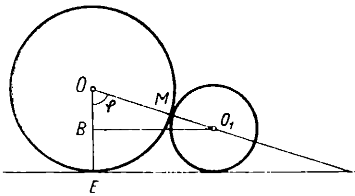
$OB=1-r$ ja $OO_1=1+r$

(vt. joonis 1), siis

$$\cos\varphi=\frac{1-r}{1+r}.$$

Siit

$$r=\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}=\tan^2\frac{\varphi}{2}.$$



Joonis 1.

Ülesande nr. 8 lahendus. Teisendades võrrandit saame

$$9^{\frac{1}{2}\log_9(x^2)}-1=3^{\log_9 9+\log_9 x}-3^{\log_9 x-\log_9 9},$$

$$9^{\log_9 x}-1=3^{\log_9 9x}-3^{\log_9\frac{x}{9}},$$

$$x-1=\sqrt{9x}-\sqrt{\frac{x}{9}},$$

$$x-\frac{8}{3}\sqrt{x}-1=0.$$

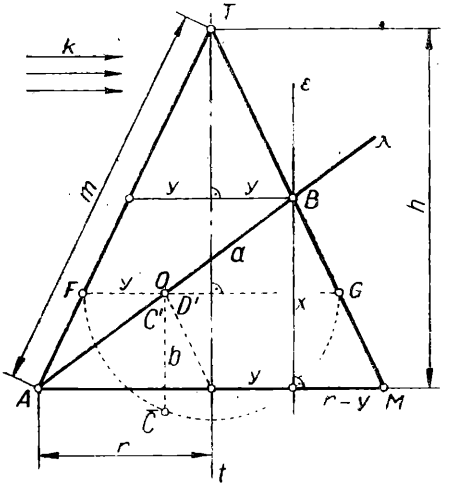
Lahendades selle võrrandi kui ruutvõrrandi $\sqrt{x}$ suhtes saame

$$\sqrt{x}=3, \quad \sqrt{x}=-\frac{1}{3} \text{ (ei sobi)}.$$

Seega $x=9$.

B. Kõrgem matemaatika

Ülesande nr. 1 lahendus. Olgu antud pöördkoonus kõrgusega h ja põhja raadiusega r (joon. 2). Et pöördkoonuse tasandilised lõiked, mis moodustavad teljega võrdsed nurgad, on kõik omavahel sarnased, võime üldsust kitsendamata võtta lõikava tasandi λ nii, et ta puutub ringjoont (joonisel punktis A) ning on joonisel esitatav sirgena. Lõigaku tasand λ koonuse moodustajat TM punktis B. Siis lõik AB mõõdab lõikeellipsi pikemat telge, lühemaks teljeks aga on koonuse punkte C ja D ühendav lõik CD, mis läbib lõigu AB keskpunkti O ning on lõiguga AB ja koonuse teljega t risti. Lõik CD on joonisel projekteerunud punktiks ($C' \equiv D' \equiv O$). Jooniselt selgub kohe lühema pooltelje $b = O\overline{C}$ tuntud konstruktsioon, milles kasutatakse tsentri O kõrgusel võetud rööbiku pööramist joonisetasandile (meie joonisel on see konstruktsioon esitatud kriipsjoonega).



Joonis 2.

Ülesande tingimusi rahuldava projektsioonitasandina (ekraanina) kasutame tasandit ε läbi punkti B ($\varepsilon \parallel t$; $\varepsilon \parallel OC$), mis meie joonisel on esitatud sirgena; vastavad projekteerivad kiired $k \perp \varepsilon$ aga on meie joonise tasandiga paralleelsed. Ellipsi telgede vaheline täisnurk projekteerub ekraanile ε jälle täisnurgaks (sest haar $OC \parallel \varepsilon$), järelikult ellipsi telgede projektsioonid osutuvad kujutisellipsi telgedeks.

Ülesande tingimuse kohaselt peab pikema telje ristprojektsioon x võrduma lühema teljega $CD = 2b$ (sest viimane, olles ekraaniga ε paralleelne, projekteerub originaalpikkuses). Arvestades jooniselt loetavaid võrdusi $OF = y$ ja $OG = r$, tuletame hõlpsasti seosed

$$b^2 = ry \quad \text{ja} \quad \frac{r-y}{x} = \frac{y}{h-x},$$

mis koos tingimusega $2b = x$ annavad suuruse x avaldamiseks (parameetrite r ja h kaudu) järgmise ruutvõrrandi:

$$hx^2 + 4r^2x - 4r^2h = 0;$$

siit

$$x = \frac{2r}{h}\left(-r \pm \sqrt{r^2 + h^2}\right) = \frac{2r(-r \pm m)}{h}, \tag{1}$$

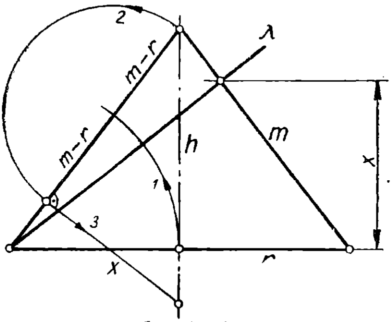
kus m on koonuse moodustaja. Jättes kõrvale negatiivse lahendi, mis ei tule arvesse antud ülesande tingimuste korral, võime kirjutada võrde:

$$\frac{r}{h}=\frac{x}{2(m-r)}.$$

Sellest järeldame, et täisnurkne kolmnurk kaatetitega x ja $2(m-r)$ on sarnane kolmnurgaga, mille kaatetiteks on koonuse kõrgus ja põhja raadius. Selle põhjal saame äärmiselt lihtsa konstruktsiooni suuruse x jaoks (joon. 3).

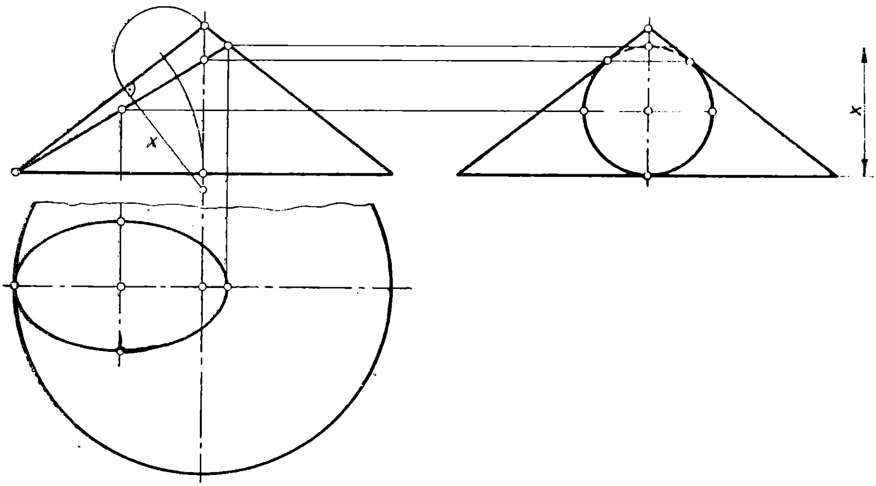
Jääb üle uurida, kas ülesandel leidub alati lahend. Vastus on jaatav, kui $0 < x < h$, sõltumata koonuse kujust ehk suhte $r:h$ väärtusest $\left(0<\frac{r}{h}<\infty\right)$. Kasutades seost $m^2-r^2=h^2$ kujul $(m+r)(m-r)=h^2$, teisendame avaldise (1) kujule

$$x=\frac{2rh}{m+r}.$$



Joonis 3.

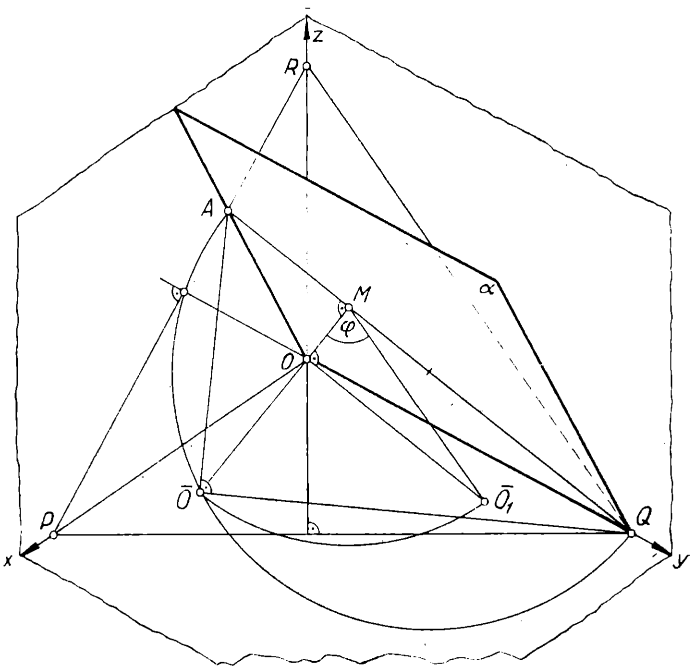
Kuna meil $m>r$, siis järeldub siit kohe, et $x<h$, s. t. ülesandel on alati lahend olemas.



Joonis 4.

Tulemusi võib kokku võtta ka järgmiselt: *igal põhjaga ekraanile toetuval pöördkoonusel on süsteem paralleelseid, esiekraaniga ristuvaid tasandilisi lõikeid, mis külgvaates projekteeruvad ringideks.* Joonisel 4 on esitatud üks koonus kolmes vaates koos oma niisuguse tasapinnalise lõikega, mille külgvaateks on ring.

Ülesande nr. 2 lahendus. Et projektsioonitasandi (ekraani) paralleelnihutus ei muuda paigalejääva objekti ristprojektsiooni, võime ekraani võtta läbi punkti A (joon. 5). Edasi joonestame teljestiku jälgkolmnurga PQR, tõmmates selle küljed (ehk koordinaattasandite jäljed) risti vastavate telgede kujutistega ($AP \perp y$, $PQ \perp z$, $QR \perp x$, kus viimane ristseis saavutatakse juba kahe eelmise järeldusena). Sirge AQ on tasandi $\alpha(A, y)$ jälgsirge ekraanil. Nurk AOQ ruumis on muidugi täisnurk. Pöörates kolmnurga AOQ ekraanile ümber jälgsirge AQ, satub koordinaatide algus O sirgele, mis on tõmmatud tema kujutisest risti selle jälgsirgega — punkti $\overline{O}$ — nii, et nurk $A\overline{O}Q = 90°$ (punktis $\overline{O}$ lõikab ristjoont ringjoon diameetriga AQ). Sellega oleme saanud lõiguks OM projekteerunud langusjoone lõigu originaalpikkuse $\overline{O}M$; see võimaldab juba ehitada täisnurkset kolmnurka $OM\overline{O}_1$ (kus $M\overline{O}_1 = M\overline{O}$), milles nurk φ tipu M juures osutubki ülesande vastuseks.



Joonis 5.

KOOSTAGEM NUPUTAMISÜLESANDEID!

Ü. Kaasik

Loogiliste keerdülesannete ühe küllaltki suure rühma moodustavad niisugused, kus tuleb taastada teatav aritmeetiline tehe. Sellistes ülesannetes on numbrid sageli asendatud tähtedega, kusjuures samale tähele vastab kõikjal sama number ja erinevatele tähtedele erinevad numbrid. Ühtlasi loetakse veel, et ükski arv ei alga numbriga null.

Väliselt eriti efektseteks osutuvad seda tüüpi ülesanded siis, kui numbreid asendavatest tähtedest moodustuvad põhiarvsõnad ning nende sõnadega väljendatud arvude puhul vastav tehe annab tõepoolest võrduse. Niisuguse omadusega on näiteks järgmiste tehete taastamist nõudvad ülesanded:

$$
-\begin{array}{r}\text{NELI}\\ \text{KAKS}\\ \hline \text{KAKS}\end{array}
\qquad
+\begin{array}{r}\text{KAKS}\\ \text{KOLM}\\ \hline \text{VIIS}\end{array}
\qquad
+\begin{array}{r}\text{ÜKS}\\ \text{NELI}\\ \hline \text{VIIS}\end{array}
\qquad
-\begin{array}{r}\text{KOLM}\\ \text{ÜKS}\\ \hline \text{KAKS}\end{array}
$$

Kahjuks on siintoodud ülesannetel aga igaühel tunduvalt rohkem kui üks lahend.

Nimetame aritmeetilise tehte taastamise ülesannet r e g u l a a r s e k s, kui ta on äsjakirjeldatud omadusega ning üheselt lahenduv. Kui erinevaid lahendeid on täpselt kaks, siis võib kasutada nimetust p s e u d o r e g u l a a r n e. Loomulikult kerkib nüüd küsimus, kas eesti keeles üldse leidub näiteks regulaarseid liitmis- või lahutamisülesandeid (võrdluseks vt. Matemaatika ja kaasaeg, VIII, lk. 53, kus on toodud kaks ingliskeelset regulaarset liitmisülesannet ja üks lahutamisülesanne).

Liitmisülesannete osas osutub vastus sellele küsimusele jaatavaks. Suhteliselt väikese vaevaga õnnestus leida tervelt üheksa regulaarset liitmisülesannet. Need on järgmised:

$$
\begin{array}{r}\text{NULL}\\ \text{NULL}\\ \text{NULL}\\ \text{NULL}\\ \text{NULL}\\ \text{NULL}\\ \text{NULL}\\ \text{ÜKS}\\ \text{ÜKS}\\ \text{ÜKS}\\ \text{ÜKS}\\ \text{ÜKS}\\ \hline \text{VIIS}\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}\text{NULL}\\ \text{NULL}\\ \text{NULL}\\ \text{NULL}\\ \text{NULL}\\ \text{ÜKS}\\ \text{ÜKS}\\ \text{ÜKS}\\ \text{KAKS}\\ \hline \text{VIIS}\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}\text{NULL}\\ \text{NULL}\\ \text{NULL}\\ \text{NULL}\\ \text{ÜKS}\\ \text{ÜKS}\\ \text{ÜKS}\\ \text{KAKS}\\ \hline \text{VIIS}\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}\text{NULL}\\ \text{NULL}\\ \text{NULL}\\ \text{NULL}\\ \text{NULL}\\ \text{NULL}\\ \text{ÜKS}\\ \text{ÜKS}\\ \hline \text{KAKS}\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}\text{NULL}\\ \text{NULL}\\ \text{NULL}\\ \text{NULL}\\ \text{NULL}\\ \text{NULL}\\ \text{NULL}\\ \text{NULL}\\ \text{ÜKS}\\ \text{ÜKS}\\ \hline \text{KAKS}\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}\text{ÜKS}\\ \text{ÜKS}\\ \text{ÜKS}\\ \text{ÜKS}\\ \text{ÜKS}\\ \hline \text{VIIS}\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}\text{NULL}\\ \text{NULL}\\ \text{NULL}\\ \text{ÜKS}\\ \text{KAKS}\\ \text{KAKS}\\ \hline \text{VIIS}\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}\text{NULL}\\ \text{NULL}\\ \text{NULL}\\ \text{NULL}\\ \text{ÜKS}\\ \text{KAKS}\\ \text{KAKS}\\ \hline \text{VIIS}\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}\text{ÜKS}\\ \text{ÜKS}\\ \text{ÜKS}\\ \text{ÜKS}\\ \text{KAKS}\\ \hline \text{KUUS}\end{array}
$$

Peale selle õnnestus leida kaks pseudoregulaarset liitmisülesannet:

NULL	*NULL*
NULL	*NULL*
NULL	*NULL*
KAKS	*NULL*
KOLM	*ÜKS*
VIIS	*ÜKS*
	KAKS

Esialgu pole aga teada, kas üldse leidub regulaarseid lahutamisülesandeid (kuigi näib, et neid vist ei ole).

Nende näidete konstrueerimise käigus tekkis veendumus, et ka kõikide regulaarsete (või pseudoregulaarsete) liitmisülesannete väljaotsimine ei ole sugugi lootusetu ettevõte, kui vaid piirata liidetavate lubatavat arvu. Käesolevad read ongi kirjutatud selles lootuses, et lugejate hulgas leidub entusiaste, kes selle ülesande lahendamise käsile võtavad ning tulemused «Matemaatika ja kaasaja» toimetusele saadavad. Ühtlasi tuleks kontrollida, kas siintoodud ülesanded on ikka tõepoolest regulaarsed (või pseudoregulaarsed).

RISTARVUD

Täita tühjad ruudud numbritega nii, et veergude summad võrduksid vastavates ridades saadud tulemustega. Seejuures ükski arv ei alga nulliga ning tehted tuleb sooritada nende esinemise järjekorras.

6 2	−	□ □	:	9	×	2 4	=	□ □
□ 0	:	4	+	□ □	×	□	=	□ □
□	×	1 2	−	2 7	+	1 0	=	5 □
□	−	3	×	□	−	□	=	□ □
□ □	+	□ □	+	□ □	+	□ 1	=	□ □ □

□ 6 9	:	□ □	×	3 7	+	□ □	=	□ □ □
□ 0 □	:	□ □	−	□	×	7	=	4 □
□ 2 1	:	□ □	×	8	+	□	=	□ □
□ 0 5	+	□ 2	−	□ □	−	□ 4	=	□ □
□ □ □	+	□ □	+	□ 9	+	□ □	=	6 8 7

SISUKORD