0001010

# Matemaatika ja kaasaeg

0101000

TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

# MATEMAATIKA JA KAASAEG

## X

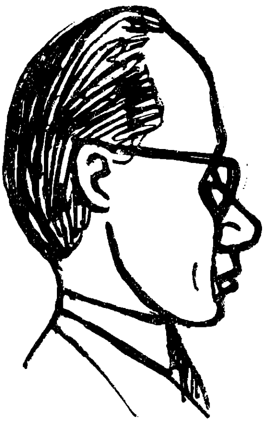
ABIMATERJALE MATEMAATIKA ÕPETAJATELE JA ÕPPIJATELE

KIRJASTUS „VALGUS"
TALLINN 1966

Kaanekujundus: *V. Allsalu*

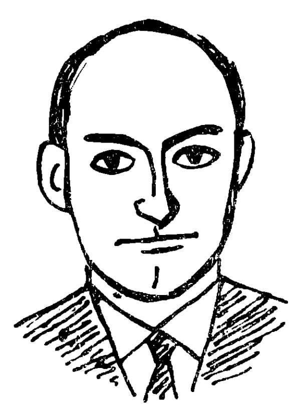


Обложка: *В. Аллсалу*



*Lugupeetud lugeja!*

*«Matemaatika ja kaasaja» kümnenda kogumiku ilmumise puhul ei saa ühiskondlik toimetuskolleegium hoiduda soovist jagada Sinuga mõningaid mõtteid. Asunud koostama esimest hallikaanelist vihikut, ei osanud me veel ette näha, milliseks kujuneb väljaande edasine saatus. Olime vaid veendunud taolise kogumiku vajalikkuses ja rajasime oma lootused sellele, et vabariigis leidub lugejaskond, kes huvitub, samuti nagu meie ise, matemaatika ja selle kaasaegse rakenduse probleemidest, matemaatika õpetamise paremustamisest koolis, kes tahab saada ülevaadet matemaatika päevasündmustest. Me ei pettunud oma lootustes ja nüüd võime teha esimesi kokkuvõtteid.*



*Oma olemasolu kolme aasta jooksul on «Matemaatika ja kaasaeg» esimese eestikeelse (ja praegu kogu Nõukogude Liidus ainukese omataolise) väljaandena võitnud sõpru mitte ainult Eesti NSV-s, vaid ka väljaspool. Laekunud vastukajad tunnistavad, et kogumik on leidnud püsiva koha matemaatikaõpetaja töölaual, on kujunenud hinnatavaks lugemisvaraks matemaatikast huvitatud ja matemaatikat vajavatele töötajatele mitmetelt elualadelt. Tänuväärt lisa klassiruumis või auditooriumis pakutavaile teadmistele on temast leidnud õppiv noorsugu kesk- ja kõrgemates koolides.*

*Mõnevõrra üllatuseks on olnud tähelepanu, mida «Matemaatika ja kaasaeg» on võitnud üleliidulises ulatuses. Autorite seas leiame teadlasi Moskvast, Harkovist, Lvovist, Riiast, Joškar-Olast jm. Teda tutvustavatele kirjutistele on veerge avanud juhtivad nõukogude matemaatikaajakirjad «Успехи математических наук» (1965, nr. 3) ja «Математика в школе» (1965, nr. 6), ajakiri «Природа» (1965, nr. 3), ajaleht «Учительская газета» (5. X 1965) jt. Tähtsamaid kogumikus ilmunud artikleid refereerib ülemaailmselt levinud «Реферативный журнал. Математика». Kõik see rõõmustab meid ja näitab, et oleme oma jõudeaja pühendanud kasulikule üritusele.*

*Ülevaate hõlbustamiseks «Matemaatika ja kaasaja» esimese kümne kogumiku sisust avaldame käesolevate kaante vahel nendes kogumikes ilmunud materjalide koondsisukorra. Seda tehes loodame, et järgnevate aastatega täieneb ka autorite indeks. Eesmärgiks on ju kajastada kõike, mis pakub huvi meie erialal, millega tegeldakse koolides ja teaduslikes asutustes. Seda saab teha ainult ühistöös!*

A. Suumanni visandid toimetuskolleegiumi liikmetest.

# MATEMAATIKA JA ESTEETIKA

**N. A. Tšaikovski**[1]

*Pühendatud J. J. Depmanile tema 80. sünnipäevaks*

Matemaatika on muutunud üheks tänapäeva teaduste alussambaks. Seetõttu räägitakse suhteliselt palju tema vajalikkusest. Kahjuks kõneldakse sealjuures üsna vähe aga matemaatikas peituvast ilust.

Kellel pole matemaatikaga õieti kunagi tegemist olnud või kes õudusega meenutab oma kunagise (nähtavasti üsna halva) õpetaja matemaatikatunde või kes matemaatika samastab «rehkendamisega» — sellel on vahest isegi raske uskuda, et matemaatikas leidub midagi ilusat. Ometi on matemaatikas oma eriline ilu, mida me aga sageli ei näe või, õigemini, ei oska näha, mõned koguni ei taha näha. Viimaste hulka kuuluvad kõik need, kes ilma pikemalt järele mõtlemata peavad matemaatikat tardunuks, kuivaks ja igavaks. Leidub ju (õnneks küll harva) isegi niisuguseid «tarkpäid», kes koguni hooplevad sellega, et on unustanud «mingisugused» siinused ja koosinused, integraalid ja diferentsiaalid. Sellised kah-intelligendid meenutavad kurikuulsat saksa feldmarssalit Moltket, kes kiitles, et pole kogu oma elu jooksul lugenud midagi peale sõjaväemäärustiku.

Ilusaks me nimetame kõike seda, mis meile meeldib, mida me naudime, mida me meeleldi vaatame või kuulame. Esteetilise tunnetamisega on seotud kogu inimese elu, see on iga inimese eluline vajadus. Inimesed püüavad muuta ilusaks oma elamut, ilusasti riietuda, teha «ilusat» tööd...

Matemaatika puhul saab rääkida nii vormi kui ka sisu ilust. Alustame esimesest.

Et ilusatel esemetel on enamasti mingis mõttes korrapärane geomeetriline kuju, siis seostub esteetiline tunnetamine geomeet-

---

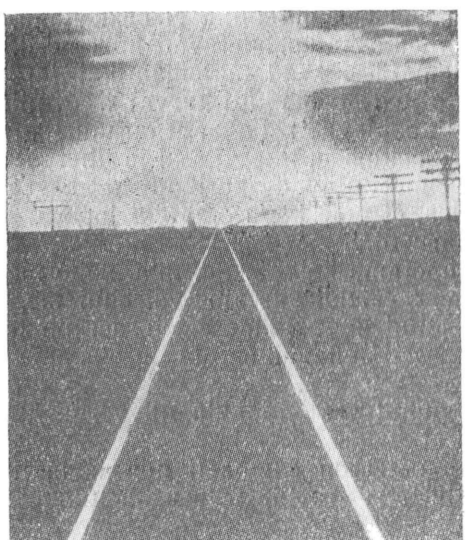
[1] Artikli autor Nikolai Andrejevitš Tšaikovski on Lvovi Riikliku Ülikooli matemaatikaprofessor. Toimetusele saadetud venekeelse käsikirja järgi on artikli (mõningate kärbetega) tõlkinud H. Espenberg.

ühiste kujunditega. Geomeetria enda arengule on see olnud üheks üsna oluliseks stiimuliks.

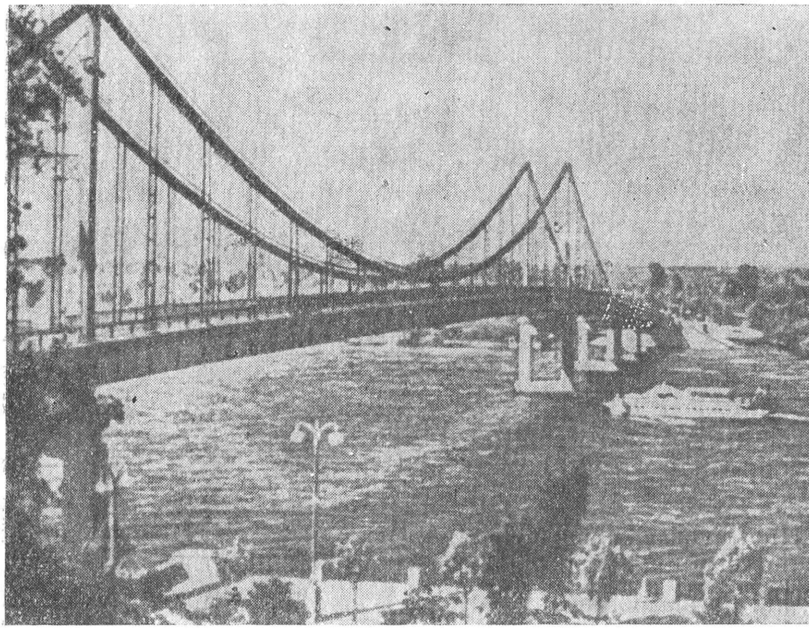
Ilu mõiste on aja jooksul muutunud, erinevatel rahvastel ja isegi erinevatel inimestel on ta erinev («maitse üle ei vaielda»). Kas saab siis üldse rääkida mingisugustest ilu üldistest seaduspärasustest, suruda «see, mis meile meeldib» mingite matemaatiliste valemite raamidesse? Osutub, et ilu mõistmise ajaloolist arengut uurides saab siiski näidata toimuvate muutuste seaduspärasusi. Sellise uurimise käigus õieti tekkis ja arenebki esteetika — teadus ilu seaduspärasustest.

Mõned geomeetrilised kujundid, nagu näiteks sirge ja ringjoon, meeldisid ning meeldivad kõigile inimestele. See näitab, et nende kujundite puhul on «meeldiv ühendatud kasulikuga». Samuti tekitavad meeldiva mulje ka paralleelsed sirged. Vaadeldes näiteks sirget raudteeliini, allume meeleldi illusioonile, et need paralleelid ühtivad kuskil «lõpmatuses» (vt. joonis 1).

Ringjoont nimetas juba vana-kreeka matemaatik Proklos (V saj. m. a.) «kõige lihtsamaks kõveraks». Ringjoone pöörlemisel ümber diameetri tekkivat kujundit — sfääri — pidas Platon aga kõige täiuslikumaks kujundiks. Ringjoone ja sfääri erakordse ilu üldtunnustatus takistas isegi taevakehade tõeliste orbiitide ja nende kujude avastamist. See ilu osutus isegi niivõrd köitvaks, et lahkuminekuid arvutuste ja taevakehade tegelike vaatluste vahel püüdsid teadlased sajandite vältel seletada mitmekordsete epitsüklite (ringjoonte!) kunstliku sissetoomisega. Alles Kepler, kes näitas,



*Joonis 1.*



*Joonis 2.*

et planeetide orbiitideks on hoopis ellipsid, suutis teadlased nendest kammitsatest vabastada.

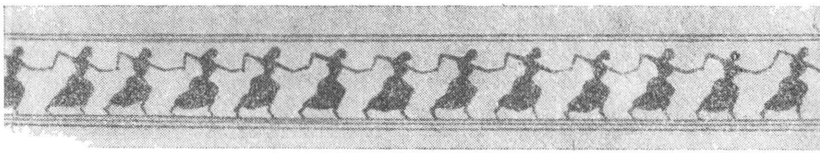
On aga veel teisi meeldivalt mõjuvaid kõveraid. Ilus on näiteks sild, mis koosneb paraboolsetest või elliptilistest kaartest (vt. joonis 2; siin on esteetilised tunded seotud tehniliste huvidega — niisugused kaared vastavad kõige paremini staatika nõuetele). Meeldiv on parabool kui nurga all üles visatud keha liikumise trajektoor. Samuti hämmastavad meid oma iluga sellised kõverad, nagu tsükloidid, mitmesugused rosetid, spiraalid jne.

Matemaatilise esteetika omaette peatüki moodustab sümmeetria teooria ning praktika [2].

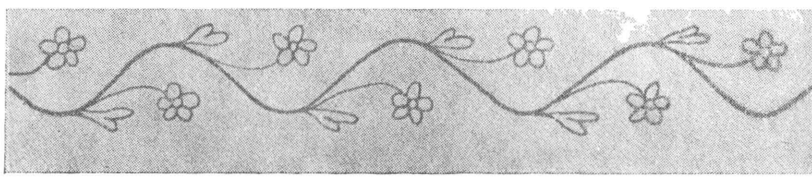
Sageli esinevaks ja kõigile hästi tuntud sümmeetria liigiks on telgsümmeetria. Joonistel 3 ja 4 leiame aga näiteid ornamentikast mõningate teiste lihtsamate sümmeetria liikide kohta. Joonisel 3 on ornamendi elementi korratud perioodiliselt võrdsete kauguste järel paralleellükke abil (nn. nihkesümmeetria). Joonisel 4 on aga koos paralleellükkega kasutatud iga poolperioodi järel peegeldust sirgest (nn. kahepoolne nihkesümmeetria).

---

[2] Sellega seoses juhime lugeja tähelepanu hiljuti ilmunud raamatule A. Hansen, Ornamendi kujundamise alustest (Tallinn, 1965), millest võib leida rohkesti täiendavat materjali, nii teoreetilist kui illustratiivset. (Toim.)

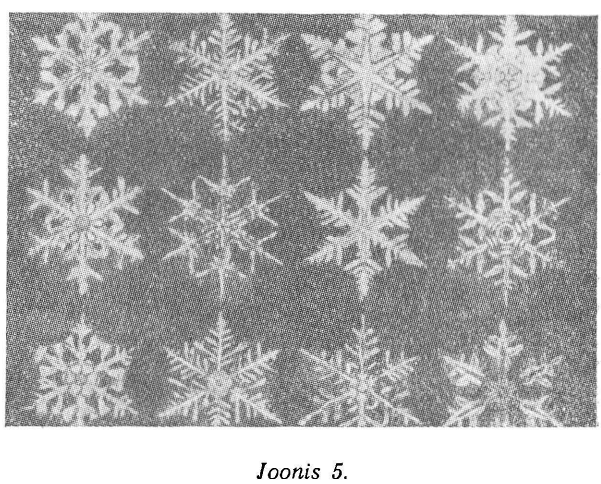


Joonis 3.



Joonis 4.

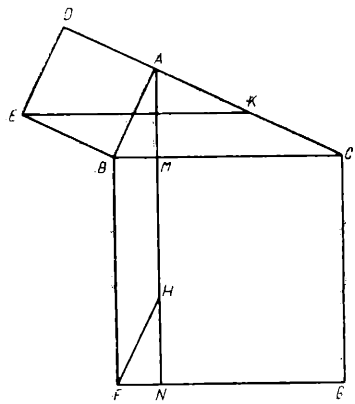
Huvitavaks sümmeetria liigiks on tsentraalsümmeetria. Me ütleme, et kujundil on $n$ järku tsentraalsümmeetria punkti $O$ suhtes, kui pärast pööret nurga $\frac{360°}{n}$ võrra ümber punkti $O$ ta ühtib iseendaga. Teist järku tsentraalsümmeetria on sinusoidil, tangensoidil ja kootangensoidil nullpunkti suhtes. Kolmandat järku tsentraalsümmeetria on näiteks ristikheinalehel, neljandat järku tsentraalsümmeetria aga paljude lillede õitel. Ka viiendat järku tsentraalsümmeetriat võime leida loodusest (näit. kibuvits, tulikas taimeriigist, meritäht loomariigist). Kuuendat järku tsentraalsümmeetriat võime imetleda talvel lumekristallide juures (joon. 5).



Joonis 5.

Eespool me peatusime geomeetriliste kujundite välisel ilul — ilul, mida võtavad vastu me silmad. Kuid geomeetrial on ka seesmine ilu, mida me võime tajuda ainult oma mõistusega. Meid hämmastab geomeetria harmooniline, loogiliselt range ülesehitus, mis baseerub aksioomide süsteemil. Meeldiv on jälgida teoreemi tõestust, kui ta on mittestandardne, selge ja lühike.

Võtame kas või igale koolipoisile tuttava Pythagorase teoreemi. Selle tõestamiseks piisab, kui me näitame, et kaatetile ehitatud ruut on pindvõrdne selle kaateti projektsioonile ja hüpotenuusile ehitatud ristkülikuga (vt. joon. 6). Joonistame $FH \| BA$ ja $EK \| BC$.




*Joonis 6.*

Ristkülikuga $BMNF$ pindvõrdset rööpkülikut $BAHF$ pöörame ümber punkti $B$ $90°$ võrra. Ta võtab asendi $BEKC$ (tõestada!). Kuid rööpkülik $BEKC$ on ju pindvõrdne ruuduga $BEDA$!

Tõesti — nagu väljendas tuntud nõukogude algebraist N. G. Tšebotarjov — «ilu matemaatikas käib käsikäes otstarbekusega; harva me nimetame ilusaks arutlust, mis ei vii lõppeesmärgile või mis on pikem kui vajalik».

Toome Tšebotarjovi sõnade kinnituseks veel ühe lihtsa näite. Lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} x + y = a, \\ xy = b. \end{cases}$$

Koolis lahendatakse seda süsteemi mõnikord nõnda: avaldatakse ühest võrrandist üks tundmatutest, asendatakse teise võrrandisse, saadud võrrandi lahendamisel leitakse teine tundmatu ning seejärel saab leida esimese tundmatu. Kõik see on matemaatiliselt täiesti õige, kuid õpetajal, kes lubab ülesannet selliselt lahendada, puudub algelisim matemaatiline maitse. Ning veel halvem — sellised lahenduskäigud surmavadki õpilastes huvi matemaatika vastu.

Vaatleme nüüd mõningaid teisi võimalusi antud süsteemi lahendamiseks. Tõstes esimese võrrandi mõlemad pooled ruutu ja lahutades seejärel tulemustest teise võrrandi vastavad pooled, saame

$$(x-y)^2 = a^2 - 4b.$$

Siit leiame, et

$$x - y = \varepsilon \sqrt{a^2 - 4b},$$

kus $\varepsilon$ on võrrandi $\varepsilon^2 = 1$ lahend, s. o. $\varepsilon = 1$ või $\varepsilon = -1$. Tuginedes süsteemi esimesele võrrandile on nüüd lihtne leida, et

$$x = \frac{1}{2}(a + \varepsilon \sqrt{a^2 - 4b}),$$

$$y = \frac{1}{2}(a - \varepsilon \sqrt{a^2 - 4b}).$$

Siit saame süsteemi lahendi $\varepsilon = 1$ korral ning teise lahendi $\varepsilon = -1$ korral.

Ent sama süsteemi võime lahendada ka Viéte'i valemite abil. Ruutvõrrandi

$$z^2 - az + b = 0$$

lahendeiks on ju arvud, mille summa on $a$ ning korrutis $b$. Selle ruutvõrrandi lahendamisel jõuame eespool leitud vastuseni

$$z = \frac{1}{2}(a + \varepsilon \sqrt{a^2 - 4b}).$$

Huvipakkuv on ka antud süsteemi geomeetriline tõlgendus. Ristkoordinaatides esitab süsteemi esimene võrrand sirge ja teine võrrand võrdhaarse hüperbooli tippudega $(\varepsilon\sqrt{b}, \varepsilon\sqrt{b})$. Sirge ja hüperbooli lõikepunktid aga määravadki süsteemi lahendid.

Peatume lõpuks veel järgmisel ülesandel. Esitada korrutis

$$M = (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$$

kahe ruudu summana. Sulge avades ja liikmeid rühmitades saame

$$M = (a^2x^2 + b^2y^2) + (b^2x^2 + a^2y^2).$$

Liites nendele sulgavaldistele vastavalt $2\varepsilon abxy$ ja $-2\varepsilon abxy$, saame nn. Lagrange'i samasuse

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \equiv (ax + \varepsilon by)^2 + (bx - \varepsilon ay)^2.$$

Võttes näiteks $a = 1$, $b = 2$, $x = 5$, $y = -3$, saame

$$(1^2 + 2^2)(5^2 + 3^2) = (5 - 6\varepsilon)^2 + (10 + 3\varepsilon)^2.$$

Siit leiame, et

$\varepsilon = 1$ puhul $170 = 1^2 + 13^2$

ning $\varepsilon = -1$ puhul $170 = 11^2 + 7^2$.

Tuntud prantsuse naismatemaatik Sophie Germain (1776—1831) leidis, et

$$x^4 + 4 \equiv (x^4 + 4x^2 + 4) - 4x^2 \equiv (x^2 + 2)^2 - (2x)^2,$$

s. o.

$$x^4 + 4 \equiv (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2).$$

Sellest samasusest järeldub, et iga naturaalarv kujuga $x^4 + 4$ $(x > 1)$ on kordarv. Võttes selles samasuses $x$ asemele $\frac{1}{x}$ ning korrutades seejärel $x^4$-ga, saame

$$4x^4 + 1 \equiv (2x^2 + 2x + 1)(2x^2 - 2x + 1).$$

Seega ka iga naturaalarv kujuga $4x^4 + 1$ $(x > 1)$ on kordarv.

Kui viimases samasuses võtta $x = 2^m$, saame

$$2^{4m+2} + 1 = (2^{2m+1} + 2^{m+1} + 1)(2^{2m+1} - 2^{m+1} + 1),$$

millest $m = 14$ korral järeldub, et

$$2^{58} + 1 = (2^{29} + 2^{15} + 1)(2^{29} - 2^{15} + 1),$$

s. o.

$$288\,230\,326\,151\,711\,745 = 536\,903\,681 \cdot 536\,838\,145.$$

Prantsuse matemaatik Landry, kes leidis vahetu arvutamise teel arvu $2^{58} + 1$ tegurid (kuna tal ei olnud teada ülalnäidatud võte), kirjutas: «Kui minu märkmed läheksid kaduma, siis mul ei jätkuks mehisust selle töö uuesti alustamiseks ning tõenäoliselt kuluks palju aega, enne kui keegi jõuaks jällegi selle tulemuseni.»

Näiteid sellistest ülesannetest, mille lahendamine nõudis aastatepikkust tööd, võib tuua üpris palju. Ent vististi piisab sellestki näitest, et mõista, millist huvi tunneb matemaatik oma töö vastu, töö vastu, milleks keegi teda ei sunni.

## ALGEBRA PÕHIMÕISTEID

Jevgeni Gabovitš

### 14. Algebralise operatsiooni mõiste laiendamine

Me oleme tutvunud juba paljude algebraliste süsteemidega. Nende seas olid ühe operatsiooniga süsteemid, nagu rühm, grupoid ja poolrühm, ning terve rida kahe operatsiooniga süsteeme: ringid, struktuurid, korpused, Lie' ja Jordani ringid jne. Matemaatikas ja selle rakendustes tuleb aga tegemist teha ka mitmete teiste algebraliste süsteemidega. Tutvustame siin mõningaid nendest.

1. *Korpus* on ring, milles nullist erinevad elemendid moodustavad korrutamise suhtes kommutatiivse rühma. Korpuse moodustavad nii ratsionaalarvud, reaalarvud kui ka kompleksarvud, mistõttu korpuse mõiste on arvuvalla mõiste väga tähtsaks üldistuseks. Alles korpuseteooria abil õnnestus näiteks täielikult välja selgitada, millal on algebralised võrrandid radikaalides lahenduvad ja kuidas tuleb üldistada täisarvude jaguvusteooriat.

2. *Kvaasirühm* on grupoid, milles võrranditel $ax = b$ ja $ya = b$ on iga $a$ ja $b$ korral olemas parajasti üks lahend; lahendi ainsust seejuures ei nõuta.

3. *Kaldkorpuseks* nimetatakse ringi, mille nullist erinevate elementide multiplikatiivne grupoid on ühikelemendiga kvaasirühm.

Kõikidel nendel algebralistel süsteemidel on üks ühine joon — nendes on defineeritud *binaarsed operatsioonid*, s. o. sellised, mis on rakendatavad korraga vaid kahele elemendile. Kuid mõningates küsimustes tuleb tegemist ka nn. *ternaarsete operatsioonidega*, s. o. operatsioonidega, mis pole rakendatavad vähem kui kolmele elemendile, seevastu aga antud hulga igale kolmele elemendile $a$, $b$, $c$, mis on võetud kindlas järjekorras, seavad vastavusse mingi elemendi $abc$ samast hulgast. Seda elementi nimetatakse elementide $a$, $b$, $c$ *ternaarseks korrutiseks.*

Vaatleme näiteks hulga $M = \{1, 2, 3, 4\}$ üksüheseid kujutusi hulgaks $N = \{6, 7, 8, 9\}$. Kahte sellist kujutust, näiteks kujutusi

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & 9 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

pole võimalik korrutada, sest esimese kujutuse $\varphi$ rakendamise tulemusena saame hulga $N$ elemendid, millele teine kujutus $\psi$ aga pole rakendatav. Me võiksime küll saadud elementidele rakendada teise kujutuse $\psi$ pöördkujutust

$$\psi^{-1}=\begin{pmatrix}6 & 7 & 8 & 9\\ 1 & 4 & 3 & 2\end{pmatrix},$$

s. o. defineerida korrutamist järgmiselt:

$$\varphi^0\psi=\varphi\psi^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 8 & 7 & 9 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6 & 7 & 8 & 9\\ 1 & 4 & 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 2 & 1\end{pmatrix},$$

kuid siis saaksime kahe kujutuse korrutamise tulemusena hulga $M$ kujutuse iseendaks ning seega poleks vaadeldav üksüheste kujutuste hulk sellise korrutamise suhtes kinnine. Nimelt on tegurid $\varphi$ ja $\psi$ üksühesed kujutused hulgast $M$ hulka $N$, nende korrutis $\varphi^0\psi$ aga hulga $M$ üksühene teisendus iseendaks.

Olukord muutub, kui vaadelda korraga hulga $M$ kolme üksühest kujutust $\varphi$, $\psi$ ja $\chi$ hulka $N$ ning moodustada nende ternaarne «korrutis» $[\varphi\psi\chi]$ järgmise reegli järgi:

$$[\varphi\psi\chi]=\varphi\psi^{-1}\chi.$$

Näiteks, kui

$$\chi=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 9 & 8 & 6 & 7\end{pmatrix}$$

ning $\varphi$ ja $\psi$ säilitavad endise tähenduse, siis saame

$$[\varphi\psi\chi]=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 8 & 7 & 9 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6 & 7 & 8 & 9\\ 1 & 4 & 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 9 & 8 & 6 & 7\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 9 & 8 & 6 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 6 & 7 & 8 & 9\end{pmatrix}.$$

Sellise ternaarse tehtega on tegemist näiteks diferentsiaalgeomeetrias (üldiselt lõpmatu hulga osahulkade vaheliste üksüheste kujutuste korral). Sellel tehtel on terve rida samasuste abil üleskirjutatavaid omadusi. Niisuguse tehte uurimiseks on otstarbekas defineerida ühe ternaarse tehtega algebralised süsteemid. Tuntud nõukogude matemaatik, Saraatovi ülikooli professor V. V. Vagner, kes esimesena selliseid süsteeme uurima hakkas, andis neile nimeks «gruuda» (vene keeles *груда*).

Mõningates teistes matemaatika osades on mugav opereerida ka selliste tehetega, mis on korraga rakendatavad neljale, viiele või isegi $n$ elemendile (kus $n$ on kuitahes suur). Näiteks kui $a_1, a_2, \ldots, a_n$ on mingi ringi $A$ elemendid, võime valemitega $[a_1a_2\ldots a_n]=a_1a_2\ldots a_n$ või $(a_1a_2\ldots a_n)=a_1a_2\ldots a_{n-1}+a_n$ defineerida $n$-kohalised tehted hulgas $A$.

Teiselt poolt on hästi tuntud sellised tehted, nagu vektori või maatriksi korrutamine antud arvuga, mis toimub väga lihtsa reegli järgi: vektori iga komponent või maatriksi iga element tuleb korrutada selle arvuga. Taolisi tehteid nimetatakse *unaarseteks teheteks* (*uno* = üks), sest nad on rakendatavad hulga igale üksikule elemendile. Ka pöördelemendi võtmine rühmas on vaadeldav unaarse algebralise tehtena.

Unaarsete tehete teisi näiteid saame, kui vaatleme matemaatilises loogikas eituse operatsiooni kõikide lausete hulgas või täiendi operatsiooni antud hulga kõikide alamhulkade hulgas.

Unaarsed tehted kujutavad endast faktiliselt teisendusi vastavates hulkades. Seepärast ei peaks lugejat imestama panema see fakt, et käsitluse ühtlustamiseks räägitakse ka ühe elemendi (nullelement, ühikelement) eraldamisest algebralises süsteemis kui operatsioonist, seekord *nullaarsest*.

Nüüd peaks olema selge, kuidas on jõutud järgmise definitsioonini: kõneldakse, et hulgas $A$ on defineeritud *$n$-naarne* ($n \geqslant 1$) *tehe* $\omega$, kui igale kindlas järjekorras võetud $n$ elemendile $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$ hulgast $A$ on seatud vastavusse mingi kindel element hulgast $A$. Seda elementi tähistatakse sümboliga $a_1 a_2 \ldots a_n \omega$ ning nimetatakse nende elementide *$\omega$-korrutiseks*.

Muidugi pole selline kirjutusviis alati mugav, eriti binaarsete operatsioonide korral, kus me oleme harjunud kirjutama näiteks $a + b$, mitte aga $ab^+$. Kuid unaarsete operatsioonide puhul on selline üleskirjutus peaaegu kõige mugavam. Näiteks kui $a\omega$ asemel kirjutada $\bar{a}$ ja $a\omega_1$ asemel $a'$, siis võivad esineda sellised kirjutised nagu

$$\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{a'}}'}}}',$$

mis meie tähistusviisi korral tähendab lihtsalt elementi $a\omega_1\omega^2\omega_1\omega^3\omega_1$. Pealegi on selline kirjutusviis universaalne ja rakendatav iga $n$ korral.

**Ülesandeid:**

45. Näidata, et käesolevas punktis vaadeldud kujutuste gruudas kehtib järgmine assotsiatiivsuse taoline seadus

$$[[\varphi_1\varphi_2\varphi_3]\,\varphi_4\varphi_5] = [\varphi_1\varphi_2[\varphi_3\,\varphi_4\varphi_5]] = [\varphi_1\,[\varphi_4\varphi_3\varphi_2]\,\varphi_5]$$

ning seadused

$$[\varphi\varphi\varphi] = \varphi \quad \text{ja} \quad [\varphi\psi\psi] = \varphi.$$

46. Tähistame $[\varphi\psi\chi] = \varphi\psi\chi\omega$. Kuidas kirjutada sümboli $\omega$ abil korrutisi $[[\varphi\,[[\varphi\psi\chi]\chi\varphi]\,\varphi]\varphi[\varphi\,\varphi\psi]]$ ja $[\varphi\,\psi[[\chi\varphi\,[\varphi[\psi\varphi\varphi]\varphi]]\chi\psi]$? Lihtsustada need korrutised.

47. Millise algebralise süsteemi moodustavad kõik paarid $(a, \lambda)$, kus $\lambda$ on suvaline paarisarv ja $a$ mingi täisarv ning

$$(a, \lambda) + (b, \mu) = (a + b, \lambda + \mu),$$
$$(a, \lambda)\,(b, \mu) = (ab, a\mu + b\lambda + \mu\lambda),$$

kas korpuse, integriteetkonna (vt. p. 12) või ringi? (Kontrollige, kas kehtivad liitmise ja korrutamise assotsiatiivsuse ning kommutatiivsuse seadused, kas on olemas null- ja ühikelement, kas kehtib distributiivsuse seadus.)

## 15. Universaalsed algebrad

Olles üldistanud algebralise tehte mõiste, võime tutvuda nüüd tänapäeva algebra kõige üldisema ja seetõttu väga tähtsa mõistega — universaalse algebra mõistega. *Universaalseks algebraks* nimetatakse hulka $G$, milles on defineeritud teatav $n$-naarsete tehete hulk ($n$ võib erinevate tehete puhul omandada erinevaid väärtusi, muuhulgas ka väärtust 0, s. t. hulgas $G$ võivad esineda mõned fikseeritud elemendid). Universaalses algebras võib olla näiteks kaks binaarset ja üks nullaarne tehe (nii on see kvaasiringi puhul) või kaks binaarset ja kaks nullaarset (Boole'i algebra) või üks unaarne (graaf) või üks ternaarne (guuda) jne. Universaalseid algebraid kujutavad endast peaaegu kõik ülal vaadeldud algebralised süsteemid: grupoidid, poolrühmad, rühmad ja ringid. Kuid korpus ei ole universaalseks algebraks, sest temas üks unaarne operatsioon — pöördelemendi leidmine — pole alati teostatav: nullil ei ole pöördelementi.

Vajadus universaalse algebra mõiste järele on tingitud sellest, et erinevaid algebralisi süsteeme käsitlevate teooriate (näiteks rühma- ja ringteooria, rühma- ja Lie' algebrate teooria) mõningate osade vahel on olemas suur analoogia. Niisugune analoogia haarab suuremal või väiksemal määral faktiliselt kõiki teadaolevaid algebralisi süsteeme. See ühine, mis on olemas erinevatel algebralistel süsteemidel, moodustabki universaalsete algebrate teooria uurimisvälja. Muidugi ei saa üldine teooria viia nii sügavate tulemusteni kui märksa kitsamad ning aksiomaatika poolest palju rikkamad üksikute algebraliste süsteemide teooriad. Kuid ta võimaldab väga üldisel kujul uurida paljusid laialt kasutatavaid põhimõisteid ning saavutada selgust järgmises küsimuses: millised antud algebralise süsteemi omadused sõltuvad ainult algebraliste tehete olemasolust, millised aga antud konkreetsest aksiomaatikast.

Antud algebralist süsteemi võib mõnikord vaadelda universaalse algebrana mitmel viisil, erinevalt defineerides operatsioonide süsteemi $\Omega$. Näiteks rühma korral võib $\Omega$ koosneda kahest (kommutatiivne rühm) või isegi kolmest (mittekommutatiivne rühm) binaarsest operatsioonist: korrutamisest ning vasak- ja parempoolsest jagamisest, võib aga koosneda ainult ühest binaarsest (korrutamine) ja ühest nullaarsest operatsioonist (ühikelemendid võtmine). Veel enam, nagu näitasid G. Higman ja B. Neumann, võib rühma defineerida ka üheainsa binaarse operatsiooni $\omega$ abil, mis rahuldab seost

$$x[(((xx\omega)y\omega)z\omega)(((xx\omega)x(\omega)z\omega)\omega]\omega=y. \qquad (*)$$

Tavalise korrutamistehte abil defineeritud rühmas võib selleks operatsiooniks olla näiteks ühepoolne jagamine $ab\omega = ab^{-1}$. Siis on

$$e = aa\omega; \quad a^{-1} = (aa\omega)a\omega \quad \text{ja} \quad ab = a[(bb\omega)b\omega]\omega,$$

sest

$$aa\omega = aa^{-1} = e, \quad (aa\omega)a\omega = (aa^{-1})a\omega = ea\omega = ea^{-1} = a^{-1}$$

ja

$$a[(bb\omega)b\omega]\omega = a(eb\omega)\omega = ab^{-1}\omega = ab.$$

Ka ringi võib vaadelda universaalse algebrana, milles peale aditiivse rühma operatsiooni (liitmine) on veel määratud üks binaarne operatsioon (korrutamine). Teda võib aga (nagu 1951. a. näitas nõukogude matemaatik J. I. Sorkin) vaadelda ühe ternaarse tehtega universaalse algebrana. See tehe $\omega$ tuleb tavalisel viisil antud ringi defineerida järgmiselt:

$$abc\omega = ac - bc + a - b.$$

Siis on

$$0 = aac\omega, \quad \text{sest} \quad aac\omega = ac - ac + a - a = 0 + 0 = 0;$$

$$-a = (aac\omega)a(aac\omega)\omega, \quad \text{sest} \quad 0a0\omega = 0 \cdot 0 - a \cdot 0 - 0 - a = -a;$$

$$a + b = a[(bbc\omega)b(bbc\omega)\omega](aac\omega)\omega, \quad \text{sest}$$

$$a(-b)0\omega = a \cdot 0 + b \cdot 0 + a - (-b) = a + b.$$

Korrutise $ab$ avaldamise tehte $\omega$ abil jätame lugeja enda hooleks. Vajalikud näpunäited on toodud käesoleva punkti lõpus ülesandes nr. 52.

Ühe ja sama tehete süsteemiga universaalseid algebraid nimetatakse *ühetüübilisteks*. Ühetüübilised on näiteks grupoid ja poolrühm, tehte $\omega$ suhtes vaadeldud ringid ja gruudad jne. Ühetüübilisuse mõiste on ühelt poolt liiga lai (poolrühmaga ühetüübiline universaalne algebra ei tarvitse olla poolrühm), teiselt poolt aga veidi ebamäärane (nagu nägime, ei pea isegi kõik rühmad või kõik ringid alati olema ühetüübilisteks universaalseteks algebrateks). Muidugi võib lugeda, et kõiki rühmi vaadeldakse alati ühe ja sama operatsioonide süsteemi $\Omega$ suhtes, kõiki ringe samuti ühe ja sama operatsioonide süsteemi $\Omega_1$ suhtes jne. Sel juhul on kõik rühmad ühetüübilised universaalsed algebrad, kõik ringid ühetüübilised universaalsed algebrad jne.

Palju tähtsam on aga universaalsete algebrate primitiivse klassi mõiste. Vaatleme kõiki ühetüübilisi algebraid (näiteks tehete süsteemiga $\Omega$) ja ühte või mitut samasust, mis on väljendatavad tehte abil. Neile samasustele vastavaks *primitiivseks klassiks* nimetatakse kõigi ühetüübiliste algebrate hulka, milles on rahuldatud kõik nimetatud samasused. Kui näiteks $\Omega$ koosneb ainult korrutamisest, siis kõigi ühetüübiliste algebrate klass koosneb kõigist grupoididest. Samasus $(ab)c = a(bc)$ määrab kõigi poolrühmade primitiivse klassi. Samasugused $(ab)c = a(bc)$ ja $ab = ba$ määravad kommutatiivsete poolrühmade primitiivse klassi. Omaette primitiivsed klassid moodustavad ka ringid, struktuurid, Boole'i algebrad, Lie' ringid jne.

Meile juba hästi tuttav isomorfismi mõiste on üldistatav ka universaalsete algebrate juhule. Nimelt kahte ühetüübilist algebrat $G$ ja $H$ operatsioonide süsteemiga $\Omega$ nimetatakse *isomorfseteks*, kui $G$ ja $H$ vahel on korraldatav niisugune üksühene vastavus $\varphi$

$$g_i \longleftrightarrow h_i = g_i\varphi,$$

et $G$ suvaliste elementide $g_1, g_2, \ldots, g_n$ ja suvalise $n$-naarse tehte $\omega \in \Omega$ puhul on $(g_1 g_2 \ldots g_n \omega)\varphi = (g_1\varphi)(g_2\varphi) \ldots (g_n\varphi)\omega = h_1 h_2 \ldots h_n \omega$ ning peale selle $o_\nu\varphi = e_\nu$, kus $o_\nu$ ja $e_\nu$ on nullaarse operatsiooni $\nu$ poolt märgitavad elemendid vastavalt algebrates $G$ ja $H$. Isomorfsed universaalsed algebrad kuuluvad ühte primitiivsesse klassi.

Universaalsete algebrate teoorias, samuti nagu üksikute algebraliste süsteemide teoorias, on alati põhiülesandeks anda kõigi uuritavasse universaalsete algebrate klassi kuuluvate algebrate kirjeldus isomorfismi täpsusega. See kirjeldus antakse tavaliselt invariantide abil, millest igaüks mingil määral iseloomustab antud algebraid. Invariantide süsteem koosneb alati suurustest, mida on võimalik omavahel võrrelda. Muidugi pole niisugune invariantide abil kirjeldamine alati teostatav, igatahes on ta «peaaegu alati» väga komplitseeritud. Selleks et anda ettekujutust sellise kirjeldamise iseloomust, tutvume mõningate triviaalsete näidetega.

Vaatleme näiteks ühe nullaarse tehtega universaalseid algebraid (neid nimetatakse *punkteeritud hulkadeks* ja kasutatakse topoloogias). Sellised universaalsed algebrad on isomorfsed parajasti siis, kui nende võimsused on samad. Nimelt kui $\Omega$ koosneb ainult tehtest $\nu$, mis märgib algebrates $G$ ja $H$ ära vastavalt elemendid $O_\nu$ ja $e_\nu$, ja kui nende algebrate võimsused on võrdsed ($|G| = |H|$), siis isomorfismi $\varphi$ algebrate $G$ ja $H$ vahel korraldame järgmiselt. Loeme, et $O_\nu\varphi = e_\nu$, ja korraldame mistahes viisil mingi üksühese vastavuse $\varphi$ hulkade $G \backslash \{O_\nu\}$ ja $H \backslash \{e_\nu\}$ vahel. Teiselt poolt $|G| \neq |H|$ korral algebrad $G$ ja $H$ ei saa olla isomorfsed, sest siis ei saa nende vahel korraldada isegi üksühest vastavust. See ongi antud klassi kirjeldus, milles invariandina esineb hulga võimsus.

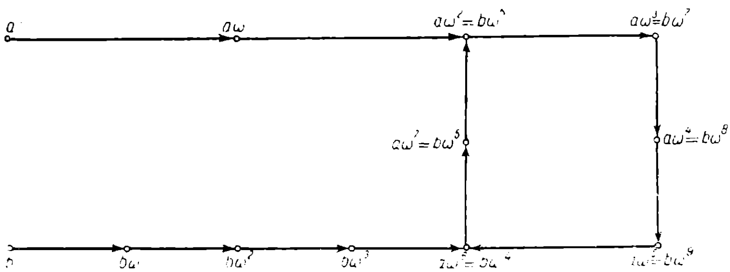
Kui nüüd vaadelda universaalseid algebraid $G$ suvalise nullaarsete tehete hulgaga $\Omega$ ning lihtsuse mõttes nõuda, et erinevatele tehetele vastaksid alati erinevad elemendid, siis üldiselt ei piisa sellise algebra etteandmiseks (isomorfismi täpsusega) ainult hulga $G$ võimsusest $|G|$. Muidugi, kui $G$ on lõplik ja nullaarseid tehteid on niisama palju kui elemente hulgas $G$, siis $|G|$ on $G$ ainsaks invariandiks. Ka juhul kui $G$ on lõpmatu ja nullaarsete tehete hulga võimsus on väiksem kui $|G|$, osutub $G$ ainsaks invariandiks $|G|$.

Kui aga $G$ ja tehete hulga $\Omega$ võimsused on võrdsed ja lõpmatud, siis ühe ning sama võimsuse $|G|$ korral võib seda tüüpi universaalseid algebraid olla mitu. Näiteks loenduva $G$ korral võib olla kaks (või mistahes teine lõplik arv) nullaarsete tehete poolt märkimata jäetud elementi, võib aga olla, et selliseid elemente pole üldse või et nad moodustavad ise loenduva hulga. Selgituseks vaatleme hulgana $G$ naturaalarvude hulka. Järgmises tabelis ongi näidatud mõned ülalmainitud juhud.

| | Nullaarsete operatsioonide poolt märgitud elemendid | Märkimata jäetud elemendid |
|---|---|---|
| $G_1$ | 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ... | — |
| $G_2$ | 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ... | 1, 2 |
| $G_3$ | 1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 10, ... | 5, 8 |
| $G_4$ | 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, ... | 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 ... |
| $G_5$ | 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, ... | 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, ... |

Siin algebrad $G_2$ ja $G_3$, samuti $G_4$ ja $G_5$ on omavahel isomorfsed. See on tingitud asjaolust, et neil juhtudel on ka märkimata jäetud elementide hulkade võimsused võrdsed. Seega algebral $G$ on antud juhul kaks invarianti: hulga $G$ enda võimsus $|G|$ ning märgitud elementide hulga täiendi võimsus $|G \setminus \Omega|$.

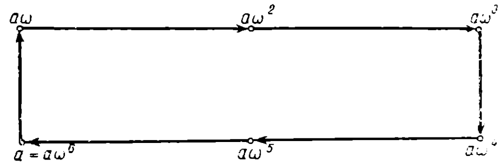
Olgu $G$ lõplik universaalne algebra ühe unaarse tehtega $\omega$. Teda nimetatakse *sidusaks*, kui iga kahe elemendi $a$ ja $b$ korral leiduvad naturaalarvud $k$ ja $l$ nii, et tehte $k$-kordsel rakendamisel elemendile $a$ ja $l$-kordsel rakendamisel elemendile $b$ saame ühe ning sellesama elemendi. Sidus on näiteks järgmise skeemiga defineeritud algebra (nool näitab, milleks teisendab $\omega$ mingi ele-




*Joonis 1.*

mendi; $\omega^n$ tähendab, et tehet $\omega$ on rakendatud $n$ korda). Siin vähimateks seatud nõudeid rahuldavateks naturaalarvudeks on $k = 2$ ja $l = 6$.

Algebrat $G$ nimetatakse *perioodiliseks*, kui iga $a$ korral leidub $n$ nii, et rakendades $a$-le $n$ korda operatsiooni $\omega$, saame tulemuseks jälle $a$. Viimase näite korral oli tegemist mitteperioodilise algebraga, järgmine algebra aga on perioodiline ($n = 6$).



*Joonis 2.*

Ülesandeid:

48. Olgu $G$ lõplik universaalne algebra nullaarsete tehete hulgaga $\Omega$. Millised on $G$ invariandid, kui erinevad tehted hulgast $\Omega$ võivad märkida ühesuguseid elemente?

49. Millised on kõik kahe- ja kolmeelemendilised ühe unaarse tehtega algebrad? Millised on sidusa ja perioodilise algebra invariandid? Millised on perioodilise, kuid mitte tingimata sidusa algebra invariandid?

50. Tõestada, et igas rühmas on täidetud seos ($*$), kui lugeda $ab\omega = ab^{-1}$.

51. Näidata, et seosest ($*$) järelduvad kõik rühma aksioomid.

52. Avaldada ringi elemendid $a - b$ ja $ab$ ternaarse tehte $\omega$

$$abc\omega = ac - bc + a - b$$

kaudu. Elemendi $ab$ avaldise leidmiseks kasutada seost

$$(a + c)cb\omega - a = (a + c)b - c \cdot b + a + c - c - a = a \cdot b.$$

## Lõppsõna

Käesoleva artikliga lõpetab autor algebra põhimõistete käsitlemise «Matemaatika ja kaasaja» veergudel. Tänu kogumiku toimetuse lahkele vastutulelikkusele osutus võimalikuks pühendada tänapäeva algebra küsimustele isegi rohkem ruumi, kui seda loota võis. Vaatamata sellele ei suutnud autor täita kõiki artiklite sarja alguses lugejatele antud lubadusi ja ka oma soove. Käsitlemata jäid niisugused tähtsad algebra põhimõisted, nagu korpus (korpuseteooria ja sellega tihedalt seotud Galois' teooria kohta kavatseb autor edaspidi kirjutada omaette artikli), struktuur, automorfism, homo- ja endomorfism.[1] Huvi peaksid äratama ka niisugused mõisted, nagu normaaljagaja rühmateoorias ja ideaal ringi- või poolrühmateoorias või faktorrühma, faktorringi ja faktoralgebra mõisted. Oleks väga soovitav tutvustada lugejale veel tähtsat matemaatilist fakti rõhutavat ning ka üldfilosoofiliselt väga huvitavat teoreemi homomorfismidest.

Kõigi nende küsimustega tutvumiseks soovitab autor lugejatele pöörduda sarja esimese artikli lõpus toodud kirjanduse loetelus mainitud teoste poole, eriti aga lugeda A. G. Kuroši raamatut «Лекции по общей алгебре» (M., 1962).

[1] Kirjastus «Valgus» kavatseb 1967. a. alguses välja anda käesoleva artikli autori raamatu pealkirjaga «Jutustusi tänapäeva matemaatikast». Selle raamatu ühes peatükis käsitleb autor just tänapäeva algebrat.

## ÜHEST PROBLEEM-ORIENTATSIOONIGA PROGRAMMEERIMISSÜSTEEMIST

E. Pruuden, J. Pruuden, B. Tamm

Seoses arvutustehnika tungimisega inimtegevuse kõikidele aladele muutuvad järjest aktuaalsemaks probleemid, mis on seotud inimese ja elektronarvuti omavahelise suhtlemisega — informatsiooni vahetamisega. Käesoleval ajal on eriti oluline küsimuse see külg, mis käsitleb informatsiooni andmist inimeselt arvutile. See aga taandub praegusel momendil, kus kujundite äratundmise teooria pole veel jõudnud efektiivsete rakendusteni, peaaegu sajaprotsendiliselt programmeerimisküsimuste lahendamisele.

Elektronarvutite algaastail ei nõutud neilt reeglina muud kui puhtmatemaatiliste ülesannete lahendamist. Need ülesanded, tõsi küll, olid tihti seotud suuremahulise arvutustööga, kuid nende programmeerimine masinkoodis ei valmistanud põhimõttelisi raskusi. Lisaks sellele oli programmeerijate ring kitsas ning koosnes peamiselt väga kvalifitseeritud matemaatikutest.

Sedamööda, kuidas laienes arvutitel lahendatavate ülesannete klass ja kuidas see täienes kõige erinevamate loogiliste tingimustega, tekkis vajadus mõelda ka programmeerimise täiustamise peale. Tekkisid programmide kartoteegid, töötati välja operaatormeetod algoritmide kirjeldamiseks jne. Probleemide ring laienes aga nii kiiresti, et peagi jäi ka sellest väheseks. Inimene pidi arvutile antavat informatsiooni ise enne liialt formaliseerima. See nõudis sedavõrd suurt hulka tööd ja põhjustas nii palju vigu, et sageli muutusid arvuti teoreetiliselt hiilgavad ekspluatatsioonilised näitajad väga tagasihoidlikeks. Ei rahuldanud enam nn. esimese nivoo programmeerimiskeeled — elektronarvutite koodide süsteemid, mida võiks nimetada ka *tehte-orientatsiooniga* keelteks.[1]

ALGOL-60 on juba tüüpiline teise nivoo programmeerimiskeel — *protseduur-orientatsiooniga* keel. Tema põhielemendiks on arvutusprotseduur. ALGOL-i paljud modifikatsioonid ning teised tema tüüpi keeled (FORTRAN, MALGOL jne.) on

[1] Vt. näit. Kaasik, Ü., Elektronarvutid ja programmeerimine. Matemaatika ja kaasaeg, IV, lk. 18—30.

osutunud võimsaks relvaks arvutite efektiivsel kasutamisel keerukate ülesannete lahendamisel.[2] Kuivõrd kaasaegsed universaalsed elektronarvutid on oma struktuurilt tehte-orientatsiooniga masinaiks, nõudsid protseduur-orientatsiooniga keeled ühtlasi ka vastavate translaatorite olemasolu. Tekkisid esimesed programmeerimissüsteemid.

Nii esimese kui ka teise nivoo programmeerimiskeeled on küllalt mugavad selliste ülesannete kirjeldamiseks, mille lähteinformatsiooniks on põhiliselt numbriliste parameetrite massiivid ja mille lahendamise tulemusena saadakse inimesele tagasiantavad (masina väljundis ilmuvad) numbrilised resultaadid. Saabus aga hetk, kus universaalne elektronarvuti lülitati ühe elemendina keerukasse automaatjuhtimise süsteemi ja tema ülesandeks sai juhtprogrammi väljatöötamine juhitavale objektile mingi alginformatsiooni alusel. Reeglina pole niisuguste ülesannete korral masinale antav informatsioon (algandmed, ülesande kirjeldus) esitatav tavaliste matemaatiliste või loogiliste funktsioonide kujul. Probleemi keerukus ei kätke tavaliselt mitte niivõrd matemaatilistes raskustes kui suure hulga võimalike situatsioonide, tehnoloogiliste iseärasuste jne. kirjeldamises. Hakkasid tekkima programmeerimissüsteemid, mille aluseks on probleem-orientatsiooniga keeled, nn. kolmanda nivoo programmeerimiskeeled. Need võimaldavad märksa enam arvestada antud probleemi spetsiifikat ning, tänu sellele, märksa vähem formaliseerida inimese suhtlemist masinaga. Vaatamata sellele, et niisugusel juhul translaator muutub keerukamaks (tuleb näiteks kasutada mitmeastmelist ümberkodeerimist arvutis), annab selliste programmeerimissüsteemide kasutamine paljude keerukate tootmisprotsesside numbrilisel juhtimisel suurt tehnilist ja majanduslikku efekti. Seda tõendavad Ameerika Ühendriikides väljatöötatud probleem-orientatsiooniga programmeerimissüsteemid, nagu APT-I, -II ja -III, AUTOPROMT jt., kuid ka nendega umbes samaaegselt käesoleva kirjutise autorite poolt loodud[3] САП-II, mis meile teadaolevatel andmetel on esimene niisugune praktiliselt kasutatav süsteem NSV Liidus.

Püüame järgnevalt selgitada, milles siis seisneb antud probleem ja kuidas on see põhimõtteliselt lahendatud, jäädes populaarse käsitluse raamidesse.

Kaasaegset tehnikat iseloomustab masinate ja automaatide tormiline areng ning keeruliste, kiiresti muutuva konstruktsiooniga detailide järjest kasvav osatähtsus. Seetõttu valmistatakse paljudes tööstusharudes enamik masinaid ja seadmeid individuaal- või väikeseseerialise tootmise meetodil. Selle tootmisviisi automatisee-

---

[2] Vt. Kaasik, Ü., Korjus, A., Automaatne programmeerimine. Matemaatika ja kaasaeg, VI, lk. 14—24; VII, lk. 28—39.

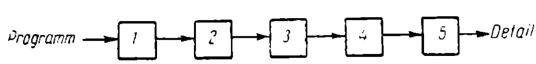
[3] САП — lühend venekeelsest nimetusest система автоматического программирования.

rimise efektiivseks vahendiks detailide töötlemise osas on aga numbrilise programmjuhtimisega metallilõikepinkide kasutamine.

Funktsionaalsete tööpinkide numbriline programmjuhtimine kujutab endast keerulist juhtimissüsteemi, kus informatsioon töödeldavast detailist ja töötlemisrežiimidest antakse kodeeritud kujul interpolaatorisse, mille väljundsignaalid juhivad ajameid ja abimehhanisme.[4]

Pingi tööorgani liikumistrajektoori võib ette anda sellel üksteisest kindlal kaugusel asuvate nn. tugipunktide abil. Instrumendi liikumine ühest tugipunktist teise määratakse tugipunktide enda, nendevahelise trajektoori osa geomeetrilise kuju ja mõnede täiendavate parameetrite abil. Kõiki neid andmeid võib esitada mingis koordinaadistikus. Lisades sellele informatsioonile (samuti kodeeritud kujul) veel pingi ajamite kiirused, käsud, abimehhanismide sisse- ja väljalülitamiseks jne., saamegi kaadri. Selliste kaadrite kindlas järjestuses organiseeritud jada, salvestatuna programmikandjale, kujutab endast pingi juhtimisprogrammi.

Funktsionaalse lõikepingi numbrilise programmjuhtimise süsteemi blokkskeem (ühe juhtimiskoordinaadi jaoks) on toodud joonisel 1.




*Joonis 1.*

Kaadreid loeb sisendseade *1*, nad dešifreeritakse ja antakse elektriliste signaalidena interpolaatorisse *2*. Viimane määrab kaadris sisalduva informatsiooni alusel instrumendi liikumistee kahe tugipunkti vahel ja vastavad töötlemisrežiimi parameetrid. Interpolaatori väljundeis avaldub see informatsioon impulsside jadadena unitaarkoodis. Väljundkanalite arv vastab pingi juhtimiskoordinaatide arvule. Igale väljundimpulsile vastab juhitava tööorgani diskreetne ümberpaigutus antud koordinaadi järgi. Impulsside omavaheline ajaline jaotus määrab trajektoori geomeetrilise kuju, nende sagedus mingis kanalis aga liikumiskiiruse antud koordinaadi suhtes. Impulsid võimendatakse võimendajas *3* ning antakse täiturmehhanismidele, näiteks sammelektrimootorite

[4] Funktsionaalseks tööpingiks nimetatakse sellist pinki, mille tööorgani liikumistrajektoor antakse ette kahe- või enammuutuja funktsioonide abil. Interpolaator on numbriline arvutusseade, mille sisendisse antakse kaadrid, väljundid omavad aga ühetüübiliste diskreetsete elektriliste impulsside jada kuju, millest igaüks kutsub esile juhitava objekti tööorgani kindla elementaarse ümberpaiknemise antud koordinaattelje suunas. Kaader on arvudena kodeeritud informatsiooni kogum, mis sisaldab vajalikud topoloogilised ja tehnoloogilised andmed juhitava objekti tööorgani ümberpaigutamiseks detaili ühe elementaarlõigu töötlemisel.

mähistele *4*. Sammelektrimootor reageerib igale impulsile oma rootori pööramisega täpse pöördenurga võrra kindlas suunas. Mootori igale pöördenurgale vastab aga pingi tööorgani *5* diskreetne joonliikumine antud koordinaadi järgi.

Peamiseks kitsaskohaks programmjuhtimisega metallilõikepinkide edukal kasutamisel oli neile alginformatsiooni ettevalmistamise efektiivsete meetodite puudumine. Informatsiooni ettevalmistamise protsess sisaldab tööorgani tsentri trajektoori (ehk töödeldava kontuuri ekvidistandi) osi iseloomustavate parameetrite arvutamist, nende kaarte üleminekupunktide arvutamist, informatsiooni lõplikku kindlaksmääramist iga kaadri kohta, kodeerimist jne. Kogu see protsess on äärmiselt töömahukas, nõuab palju aega ja kvalifitseeritud tööjõudu. Seetõttu ei tule selle teostamine klahvarvutustehnika baasil kõne allagi. Ainus võimalus on pöörduda elektronarvutustehnika poole.

Veidi sügavamal analüüsimisel aga selgub, et ka siin kipub asi takerduma programmeerimisraskuste taha. Niipea, kui me püüame (ja seda püütigi!) programmeerida vajalikke arvutusi käsitsi ning iga detaili puhul eraldi, kasvab kümmet-kahtkümmet tööpinki ning nende tarvis töötavat elektronarvutit teenindav programmeerijate armee mitmesajani. Seetõttu seisis küsimuse lahendus niisuguse automaatse programmeerimissüsteemi loomises, mille kasutajatelt ei nõutaks tõsiseid teadmisi arvutus- ja programmeerimistehnikas ning mille abil oleks samal ajal võimalik kiiresti ja kergesti saada juhtimisprogramme valdava enamiku detailide töötlemiseks.

САП-II kasutamisel taandub programmeerija või tehnoloogi kogu «käsitöö» lihtsa mnemoonilise programmi koostamisele spetsiaalses algoritmilises keeles. Süsteem vabastab programmeerija detaili kontuuri arvutusalgoritmide koostamisest, ekvivalendi ja tehnoloogiliste parameetrite arvutamisest ning detailsest programmeerimisest, andes need funktsioonid üle elektronarvutile endale.

САП-II koosneb kahest osast — translaatorist ja spetsiaalsest algoritmilisest programmeerimiskeelest.

Kõnesoleva translaatori funktsioonid on märksa laiemad nendest, mida me oleme harjunud mõistma tavalise protseduur-orientatsiooniga programmeerimissüsteemi translaatori funktsioonide all (see pole ka ootamatu, sest tegemist on kolmanda nivoo keelega). Ta näiteks mitte ainult ei koosta elektronarvutile programmi ega juhi arvutuste käiku, vaid määrab ka automaatselt kindlaks kõik probleemi lahendamiseks, s. t. tööorgani juhtimise programmi koostamiseks vajalikud arvutus- ja loogilised operatsioonid ning nende täitmise järjekorra. Seega võtab ta osa temale antud ülesande algoritmeerimisest. Süsteemi keele sõnavara, süntaks ja semantika on välja töötatud protsessi üksikasjalise analüüsi tulemusena ning on vastavuses kogu süsteemi ülesehituse põhimõistetega. Programmeerimiskeele terminiteks või sõnadeks on teatud venekeelsed sõnad, nende lühendid, mõningad matemaatilised märgid ja sümbolid. Nendes terminites kirjutatud keeleline programm sisaldab vajaliku informatsiooni detailist ja tema töötlemise nõuetest.[5] Tuleks märkida, et detaili geomeetrilise kuju määramisel kirjeldatakse üksnes tema kontuuri osade omavahelisi asendeid ja mõningaid numbrilisi põhimõõtmeid. See võimaldab minimiseerida etteantavat numbrilist informatsiooni. Keelelise programmi koostamisel kasutatakse keele termineid nagu sõnu tavalistes lausetes või nagu matemaatilisi märke matemaatilistes avaldistes. Oma vormilt on kirjutis seetõttu sarnane kõnekeeles koostatud konspektiga.

Selline kirjutusviis tagab hea ülevaatlikkuse ja käepärase kontrolli võimaluse, vähendades samaaegselt tugevasti programmeerija vaimset pinget võrreldes sellega, mis oleks vajalik tavaliste tehnoloogilises programmeerimises tarvitatavate meetodite rakendamisel.

САП-II on ette nähtud peaasjalikult nn. «tasandiliste detailide» töötlemise programmeerimiseks. Nende töötlemise trajektoorid asuvad tasanditel, mis on paralleelsed kolmemõõtmelise koordinaadistiku koordinaat-tasanditega. Seega on võimalik programmeerida ka selliste «ruumiliste detailide» töötlemist, mille töötlemistrajektooride osad asuvad vastastikku paralleelsetel või ristuvatel tasanditel.

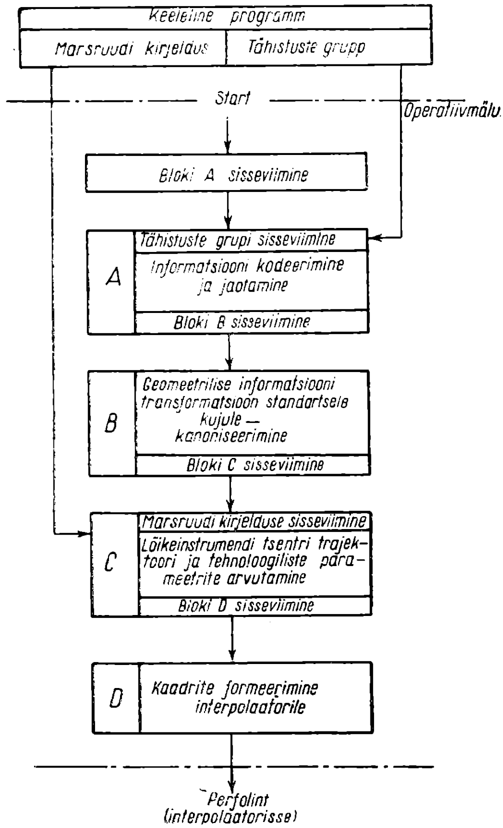
САП-II translaatori lihtsustatud blokkskeem on näidatud joonisel 2. Ta koosneb neljast blokist *A*, *B*, *C* ja *D*, mida väikese operatiivmäluga arvutite (nagu *M-3*) kasutamise puhul võib üksteise järel operatiivmällu viia kas perfolindilt või välismälust. Iga järgnev blokk kutsutakse operatiivmällu eelmise bloki poolt pärast tema enda ülesannete sooritamist. Iga bloki töötulemused säilitatakse operatiivmälus ning nad on lähteandmeteks järgmisele blokile.

Translaatori töö algab bloki *A* sisseviimisega perfolindilt operatiivmällu. Blokk *A* omakorda organiseerib tähistuste grupi sisseviimise perfolindilt. Seejärel teostatakse informatsiooni ümberkodeerimine nn. vahekoodi ning tema paigutamine operatiivmälu pesadesse kindla süsteemi järgi. Sellise muundamise tulemusena võtab iga vahekoodis esitatud tähistus enda alla ühe mälupesa.

Bloki *B* ülesandeks on eelmise bloki poolt kodeeritud geomeetrilise informatsiooni transformeerimine standardsetesse vormidesse — kanoniseerimine. Need geomeetriliste elementide rangelt kindlaksmääratud kujud on aluseks järgnevatele arvutustele. Sõltumata geomeetrilise informatsiooni määramise viisist keelelises

---

[5] Keeleline programm (языковая программа) koosneb tähistuste grupist ja marsruudi kirjeldusest. Tähistuste grupp koosneb elementaartähistuste ja komplekstähistuste alagruppidest. Marsruudi kirjeldus on programmeerimiskeeles kirjutatud üksikasjaline informatsioon töötlemistrajektoorist, s. t. tööorgani tsentri liikumisteest ning samuti töötlemisrežiimidest tema mitmesugustel lõikudel.




*Joonis 2.*

programmis (näiteks võib punkte määrata 15 eri viisil, sirgeid 23 eri viisil jne.), avaldatakse punktid pärast kanoniseerimist oma koordinaatidega, sirged — tõusunurga tangensi või kootangensi ja telglõiguga, ringjooned — tsentri koordinaatide ja raadiusega.

Lõikeinstrumendi tsentri trajektoori arvutuse viib läbi blokk *C*. Ta organiseerib programmeeritud kontuuri tugipunktide ja ekvidistandi arvutamise ning salvestab saadud informatsiooni töötlemisele vastavas järjekorras arvuti mällu. Samuti teostab ta tehnoloogiliste parameetrite viimise kaadrite formeerimiseks sobivasse vormi. Bloki *C* tööd juhib marsruudi kirjeldus, mis tuuakse operatiivmällu perfolindilt enne bloki töö algust.

Viimaseks funktsionaalses skeemis on blokk *D* — interpolaatori kaadrite formeerimise blokk. Ta koondab eespool väljaarvutatud informatsiooni kindlate reeglite järgi kaadritesse ning teostab ühtlasi ka ringjoonte kaarte lineaarse aproksimeerimise nõutava täpsusega. Väljundinformatsioon (kaadrid) kantakse kas perfo- või mangetlindile.

Kõik translaatori blokid on varustatud kontrollsüsteemiga. Juhtimine antakse järgmisele blokile üle ainult pärast eelmise bloki töötulemuste õigsuse tuvastamist.

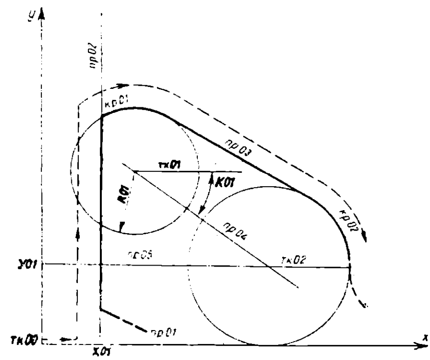
Nagu juba mainitud, on translaatori sisendinformatsiooniks keeleline programm, mis kirjutatakse programmeerimiskeele terminites, pidades silmas vastavaid semantilisi ja süntaktilisi reegleid. Keele sümboliteks on kümnendsüsteemi numbrimärgid ning lisaks sellele 28 vene, ladina ja kreeka tähte ning matemaatilist märki, millest moodustatakse üle kolmekümne eritüübilise sõna ehk termini. Keeleline programm koosneb kahest osast: tähistuste grupist ja marsruudi kirjeldusest. Neist esimene jaguneb omakorda kaheks: elementaartähistusteks ja komplekstähistusteks. Elementaartähistuste abil pannakse kirja kogu numbriline informatsioon detaili geomeetrilise kuju ja töötlemise tehnoloogia kohta. Komplekstähistused võimaldavad kirjeldada detaili neid elemente, mis on määratud kaudselt, teiste kaudu, s. t. elemente, mida on algandmetest lähtudes võimalik translaatori abil välja arvutada. Mitmete komplekstähistuste olemasolu ühe ja sama elemendi määramiseks lihtsustab oluliselt programmeerija tööd detaili kontuuri kirjeldamisel, eriti kui numbrilist informatsiooni on minimaalselt.

Tööorgani liikumistee kirjeldus, abiinformatsioon töötlemisrežiimidest üksikutel lõikudel ja lõikeinstrumentidest antakse keelelise programmi teises osas — marsruudi kirjelduses. Viimane kujutab endast programmeerimiskeeles kirjutatud käskude jada, kus käsud asuvad nende täitmise järjekorras programmeeritava detaili töötlemisel.

Käesoleva artikli raamides ei ole võimalik anda täpsemat ülevaadet ei keelelise programmi koostamise reeglitest ega ka keele sõnavarast, seepärast piirdume asjast ettekujutuse saamiseks ainult ühe näitega ning vaatleme terminoloogiat sedavõrd, kui see on vajalik näite seletamiseks.

Joonisel 3 on kujutatud mingi detaili üks osa, mille kohta on konstruktori poolt antud mõningad numbrilised andmed (need on joonisel märgitud rasvase kirjaga). Samas on esitatud ka keeleline programm detaili selle osa töötlemiseks vajaliku informatsiooni täielikuks väljaarvutamiseks.

Olgu märgitud, et enne keelelise programmi koostamist nummerdab programmeerija detaili geomeetrilised elemendid suvalises järjekorras ning kirjutab nad joonisele koos vastava elemendi tähistusega. Pärast seda programm perforeeritakse lindile spetsiaalselt selleks kohandatud perforaatoril (mis ühtlasi annab ka trükitud äratõmbe). Seejärel viiakse arvutisse tähistuste grupp ning pärast kanoniseerimisprotsessi lõppemist — marsruudi kirjeldus.




*Joonis 3.*

*Elementaartähistused*

| | | |
|---|---|---|
| X00/ = /00,0000/ | Y01/ = /21,0000/ | r01/ = /06,0000/ |
| X01/ = /15,0000/ | Y02/ = /46,0000/ | δ01/ = /00.0020/ |
| X02/ = /24,0000/ | R01/ = /16,5000/ | $S_y$00/ = /04,0000/ |
| Y00/ = /00,0000/ | K01/ = /00,7000/ | $S_p$01/ = /00,5000/ |

*Komplekstähistused*

| | |
|---|---|
| тк00/ = /X00/Y00/ | кр01/ = /тк01/R01/ |
| тк01/ = /X02/Y02/ | кр02/ = /тк02/пр01/ |
| тк02/ = /пр04/пр05/ | пр03/ = / + кр01/ + кр02/ |
| пр01/ = /Y00/ | пр04/ = /тк01/хуK01/ |
| пр02/ = /X01/ | пр05/ = /У01/ |

*Marsruudi kirjeldus*

r01, 01, *от тк* 00, *фр* 0, $S_y$00, *по пр* 01, *фр*—, $S_p$01, *по пр* 02, *бу тк*, *по* + *кр* 01, *по пр* 03, *по* + *кр* 02, ...

Kanoniseerimisprotsessi kulgemise illustreerimiseks vaatleme toodud näite korral sirge järjekorranumbriga 3 («пр 03») kanoniseerimist. Translaator, jõudnud informatsiooni vaatlemisel nimetatud sirge koodini, «avastab», et sirge 03 on määratud kui väline puutuja ringjoontele 01 ja 02:

пр 03/ = /+ кр 01/ + кр 02/ (vt. joon 3 komplekstähistused).

Edasi arvuti selgitab, et üks nendest ringjoontest, nimelt кр 01 on antud kanoonilisel kujul (keskpunkti ja raadiuse abil) ning numbriliselt, sest (vt. joon. 3)

кр 01/ = /тк 01/R 01/,
тк 01/ = /X 02/Y 02/,
X 02/ = /24,0000/, Y 02/ = /46,0000/, R 01/ = /16,5000/.

Samuti leiab arvuti, et teine ringjoon, mille abil tuleb määrata-пр 03, on defineeritud kaudselt kui ring, mis on määratud keskpunkti ja ühe puutujaga

кр 02/=/тк 02/пр 01/.

Tähendab ta tuleb kanoniseerida. Selleks tuleb aga välja arvutada tema keskpunkti koordinaadid ja raadius. Keskpunkt

тк 02/=/пр 04/пр 05/

on aga määratud kui kahe sirge lõikepunkt, mis pole ka arvuliselt teada. Seetõttu jätkab arvuti oma tegevust nende sirgete uurimisega. Ta leiab, et

пр 04/ = /тк 01/xyK 01/

ja

пр 05/=/Y 01/.

See tähendab, et mõlemad sirged on määratud elementaartähistustest leiduvate numbriliste suuruste abil. Lugenud vastavad numbrilised väärtused, asetab arvuti nad пр 04 ja пр 05 võrranditesse ja arvutab тк 02 koordinaadid, seejärel ringjoone кр 02 raadiuse kui punkti тк 02 kauguse sirgest пр 01 ja saabki teise ringjoone kanoniseeritud kujul. Seega ongi leitud kõik vajalikud lähteandmed sirge пр 03 järgnevaks kanoniseerimiseks. Sageli, nagu toodud näitegi korral, toimub ühe elemendi kanoniseerimise käigus veel rea teiste elementide kanoniseerimine.

Bloki *C* töö käigus translaator dešifreerib üksteise järel marsruudi kirjelduse käsud ja korraldab nende järgi oma töö.

Joonisel 3 esitatud näite puhul tõlgitseb arvuti marsruudikirjeldust järgmiselt. Frees, mille raadius on määratud järjekorranumbriga 01, (r 01), teostades edaspidi ringi kaarte lineaarset aproksimeerimist täpsusega, mis on määratud tähistusega $\delta$ 01, algab oma liikumist punktist 00 (тк 00). Ta liigub kõrgendatud kiirusega ($S_y$ 00) mööda (фр 0) sirget 01 (пр 01) kuni sirgeni 02 (пр 02). Sealt ta liigub edasi normaalse töökiirusega ($S_p$ 01) mööda sirgest 02 (по пр 02) freesi raadiuse võrra vasakul (фр—) asuvat paralleelsirget kuni ringjoone 01 ja sirge 02 ekvidistantide suuremat ordinaadi väärtust omava lõikepunktini (бу тк). Tuleb silmas pidada, et käsud, nagu фр$\nu$($\nu$ = +, —, 0), toimivad kuni järgmise analoogilise käsu ilmumiseni marsruudi kirjelduses. Seetõttu liigub freesi tsenter meie näite puhul kogu aeg mööda kontuuri vasakpoolset ekvidistanti temast freesi raadiuse kaugusel. Mainitud punktist (mille koordinaadid masin arvutab) liigub frees edasi mööda ringjoont 01 kellaosuti suunas (по + кр 01). Edasi läheb ta puutepunktis üle sirgele 03 (по пр 03), sealt edasi liikumisele mööda ringjoont 02 kellaosuti suunas (по + кр 02) jne.

САП-II on olnud ekspluatatsioonis üle aasta ja, nagu võis arvata, võimaldab ta kvalitatiivselt muuta informatsiooni ettevalmistamise protsessi. Programmeerijad ja tehnoloogid vabanevad igasugusest arvutustööst ja vajadusest tunda masina koodidesüsteemi. Nad peavad tundma üksnes programmeerimiskeelt ning keelelise programmi koostamise reegleid. Kuna need on märksa lihtsamad ja käepärasemad esimese nivoo programmeerimiskeelest ja -reeglitest ning kuna selliselt koostatud programmid tulevad endistega võrreldes palju kordi lühemad, võimaldas САП-II kasutamine oluliselt vähendada inimese intellektuaalse töö mahtu informatsiooni ettevalmistamise protsessis.

Süsteemi tööstuslikust ekspluatatsioonist saadud andmed näitavad, et aeg, mis kulub joonise ümbertöötamisest kuni interpolaatori juhtprogrammi saamiseni, väheneb keskmiselt 7—8 korda, ulatudes üksikutel juhtudel 22—24 korrani. Mitmekordselt vähenes protsessi maksumus ning samaaegselt suurenes saadavate tulemuste usaldatavus, täpsus ja operatiivsus. Tänu inimtöö mahu ja protsessi kestuse tunduvale vähenemisele, on võimalik varustada suurt hulka numbrilise programmjuhtimisega lõikepinke juhtprogrammidega tõesti operatiivselt, kasutades selleks väga piiratud arvu programmeerijate tööd. Peab siiski märkima, et vaatamata autorite pingutustele vähendada inimese intellektuaalse töö osatähtsust ja võimalikult rohkem anda seda arvuti teha, näitavad tulemused, et siin oleme veel eesmärgist kaugel. Nii näiteks ühe suhteliselt keerulise detaili (46 elementaar- ja 77 komplekstähistust) programmeerimisel oli keelelise programmi koostamiseks kuluva aja ja selle järgi juhtprogrammi arvutamiseks vajaliku arvutiaja suhe 31,2, kusjuures kasutati küllalt madala töökiirusega arvutit (ilma САП-II kasutamiseta on see suhe veidi alla 300).

Lõpuks märgime veel tähendusrikast momenti, et САП-II kasutamisel on võimalik loobuda detailide täpsete tööjooniste valmistamisest (neid on aga väga palju ja nende valmistamine on kallis) ning piirduda vaid eskiisidega, millele on kantud minimaalne arv põhimõõtmeid, mis võimaldavad programmeerimissüsteemil määrata detaili kõik ülejäänud mõõtmed. САП-II loomisel väljatöötatud põhimõtete alusel on võimalik automatiseerida informatsiooni ettevalmistamist teistegi numbrilise programmjuhtimisega süsteemide juures, kus on tegemist mingi objekti juhtimisega keerulist trajektoori mööda.

# TARBIMISE MATEMAATILINE UURIMINE

Ü. Kaasik, Ü. Remmel

Pidevalt kasvab elektronarvutite rakendamine rahvamajanduse planeerimisel. Seoses sellega muutub ka planeerimise ja majandusliku prognoosi mitmesuguste ülesannete matemaatilise formuleerimise vajadus üha aktuaalsemaks. Põhiülesandeks on sealjuures enamasti teatava optimaalse plaani leidmine. Optimaalse plaani leidmise matemaatiliselt sõnastatud ülesanne [1] sisaldab tavaliselt terve rea mitmesuguseid kitsendusi (tootmise taset, tootmisharude vahelisi seoseid jms. iseloomustavaid võrdusi või võrratusi) ja kriteeriumi (sihifunktsiooni), mille ekstreemumit antud kitsendustel otsitakse. Et meie majanduse arendamise põhiülesandeks on elanikkonna vajaduste maksimaalne rahuldamine, siis tulebki selliseid plaane lugeda paremateks, mis seda ülesannet paremini täidavad.

Iga plaanivariandi elluviimisega saab ühiskond oma käsutusse teatud hulga hüvesid, s. t. igale plaanivariandile vastab kindel ühiskondliku ja isikliku tarbimise struktuur. Seega peab rahvamajandusplaanide võrdlemise aluseks olema objektiivne kriteerium, mis võimaldaks teatud tarbimisstruktuure eelistada teistele. Käesoleva artikli eesmärgiks ongi tutvustada majandusmatemaatika selle suuna aluseid, mis tegeleb isikliku tarbimise struktuuride võrdemisega ning püüab erinevate produktide ja teenuste tarbimise näitajaid taandada ühele üldistatud näitajale.

Vaatleme $n$ erineva produkti tarbimist (produktide all võib siin mõista nii üksikuid esemeid, esemete gruppe kui ka teenuseid). Tähistame $i$-nda produkti selle koguse, mis vaadeldava tarbija poolt ajaühikus keskmiselt tarbitakse, sümboliga $x_i$. Vektorit $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ nimetatakse siis **tarbimise struktuuriks** ehk **tarbimisvektoriks**.

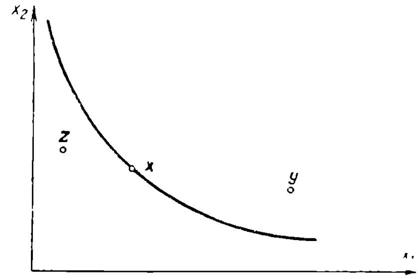
Üsna pikaajalisi statistilisi tähelepanekuid arvestades võib väita, et igal konkreetsel tarbijal on välja kujunenud teatav kindel

[1] Niisugustest nn. matemaatilistest planeerimisülesannetest on kirjutatud näit. artiklites: Kaasik, Ü., Lineaarsed planeerimisülesanded. Matemaatika ja kaasaeg, II, lk. 31—46; Kull, I., Transport ja matemaatika. Matemaatika ja kaasaeg, III, lk. 39—49; Kull, I., Dünaamiline planeerimine. Matemaatika ja kaasaeg, V, lk. 37—48.

e e l i s t a m i s s u h e. See tähendab, et mistahes kahe tarbimisvektori **x** ja **y** korral suudab tarbija alati otsustada, kas ta eelistab vektorit **x** vektorile **y** või vektorit **y** vektorile **x** või peab neid vektoreid samaväärseteks (on eelistamise osas ükskõikne). Niisugune eelistamissuhe defineerib tarbimisvektorite hulgas teatava, vaadeldavale tarbijale iseloomuliku järjestuse. Selle järjestusetüübi lähem uurimine on näidanud, et tema omadusi saab kaunis hästi matemaatiliselt kirjeldada.

Kõigepealt osutub, et eelistamissuhtega defineeritud järjestus rahuldab üht n.-ö. tavalise järjestuse põhiomadustest — ta on ülekanduv ehk t r a n s i t i i v n e. See tähendab, et kui tarbija eelistab vektorit **x** vektorile **y** ja vektorit **y** vektorile **z**, siis ta eelistab ka vektorit **x** vektorile **z**. Edasi selgub, et üsna suurtes piirides rahuldab vaadeldav järjestus nn. m o n o t o o n s u s e omadust: tarbija eelistab vektorit **x** vektorile **y** alati siis, kui vähemalt üks vektori **x** koordinaat on suurem ja ülejäänud mitte väiksemad kui vektori **y** vastavad koordinaadid[2]. Eelistamissuhte kolmandaks oluliseks omaduseks on k u m e r u s. Nimelt kui vektor **z** pole eelistatavam ei vektorist **x** ega vektorist **y**, siis osutub, et kõik vektorid kujul $\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y}$ (kus arv $\lambda$ on 0 ja 1 vahel) on eelistatavamad kui **z**.

Nende omaduste tähendust saab kergesti geomeetriliselt illustreerida juhul, kui tegemist on ainult kahe produktiga, s. t. tarbimisvektoreid $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ võib vaadelda tasandi punktidena. Siis kõik vektoriga **x** samaväärsed punktid paiknevad teataval rangelt kumeral kõveral[3] (nn. ü k s k õ i k s u s k õ v e r), sellest kõverast allpool asuvatest punktidest **z** on **x** eelistatavam, kõverast ülalpool paiknevad punktid **y** on aga kõik eelistatavamad kui **x** (vt. joonis 1).




*Joonis 1.*

[2] See tähendab, et tarbija eelistab alati rohkem tarbida. Muidugi kehtib niisugune omadus vaid teatud piirides, sest vaevalt leidub tarbijat, kes eelistaks tarbida tonn leiba päevas!

[3] Kõverat nimetatakse r a n g e l t k u m e r a k s, kui ta paikneb igast oma kõõlust ülalpool.

Eelistamissuhe annab küll eeskirja tarbimisvektorite kvalitatiivseks võrdlemiseks, kuid ei vasta näiteks küsimusele, millisel määral tarbija üht tarbimisvektorit teisele eelistab. Tarbimisvektorite kvantitatiivseks võrdlemiseks tuuakse sisse huvifunktsiooni mõiste. H u v i f u n k t s i o o n i k s nimetatakse funktsiooni $h(\mathbf{x})$, mis on defineeritud kõikide tarbimisvektorite hulgal ja mille väärtus kasvab üleminekul eelistatavamale tarbimisvektorile.

Harilikult tehakse huvifunktsiooni $h(\mathbf{x})$ kohta järgmised eeldused:

1) $h(\mathbf{x})$ on pidev koos oma esimest ja teist järku tuletistega;

2) hulk $\{\mathbf{x} : h(\mathbf{x}) \geqslant c\}$ on iga $c$ korral rangelt kumer [4];

3) $h(\mathbf{x})$ on iga argumendi järgi kasvav, s. t. $\frac{\partial h}{\partial x_i} > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$. Osutub, et iga neid eeldusi rahuldav funktsioon määrab omakorda just ülalkirjeldatud omadustega eelistamissuhte (huvifunktsiooniga määratud eelistamissuhe on selline, kus $\mathbf{x}$ loetakse eelistatavamaks kui $\mathbf{y}$ siis ja ainult siis, kui $h(\mathbf{x}) > h(\mathbf{y})$).

Nagu definitsioonist näeme, ei ole huvifunktsioon eelistamissuhtega üheselt määratud. Praktikas meid aga ei huvitagi selle funktsiooni konkreetsed väärtused, vaid väärtuse vahekord, suhted «suurem» ja «väiksem». Just need suhted kirjeldavad ühtede tarbimisstruktuuride eelistamist teistele. Kui $h(\mathbf{x})$ on teatavale eelistamissuhtele vastav huvifunktsioon, siis on seda iga $\alpha > 0$ korral ka $\alpha h(\mathbf{x})$. Üldjuhul võib öelda, et samaväärseks huvifunktsiooniks on ka iga funktsioon $f(\mathbf{x})$ kujul

$$f(\mathbf{x}) = H[h(\mathbf{x})],$$

kus $H(h)$ on mistahes monotoonselt kasvav funktsioon. Et kõik need huvifunktsioonid vastavad samale eelistamissuhtele, siis praktikas tarvitseb meil teada vaid ühte neist.

Viimasel ajal on ilmunud mitmed tööd, kus statistilise materjali varal tõestatakse eelistamissuhte ja seda kirjeldava funktsiooni olemasolu. See annab võimaluse vaadelda huvifunktsiooni kui tarbijaskonna käitumise objektiivset iseloomustust. Muidugi tuleb siinjuures arvestada, et mida väiksema ja homogeensema tarbijate rühmaga on tegemist, seda paremini kirjeldab mingi huvifunktsioon nende tegelikku tarbimist. Sellepärast jagataksegi tarbijaskond sageli rühmadesse just nii, et iga rühma piirides saaks võimalikult suurema täpsusega kasutada ühtainsat huvifunktsiooni. Järgnevas me sellist rühmadesse jaotamist siiski ei vaatle, vaid piirdume lihtsuseks ühe tervikliku huvifunktsiooni käsitlemisega. See tähendab, et tarbija all mõistetakse teatavat keskmist perekonda [5], millele kõik tegelikud tarbimised on vasta-

---

[4] Hulka nimetatakse k u m e r a k s, kui ta koos oma iga kahe punktiga sisaldab ka neid ühendava sirglõigu. Range kumeruse puhul on sirglõigu punktid hulga sisepunktid.

[5] Perekond võetakse tarbija ühikuks sellepärast, et kõik büdžetiuurimiste andmed sisaldavad just perekondade kohta käivaid koguseid ja maksumusi.

vate koefitsientide abil ümber arvutatud. Peab küll ütlema, et niisuguste koefitsientide süsteem pole veel täielikult välja töötatud, kuid selles suunas toimuvad üsna intensiivsed uurimused.

Tarbimise uurimisel on harilikult põhiülesandeks tarbimise mahu muutude ennustamine hindade ja sissetulekute süsteemi oodatava muutuse korral. Vaatlemegi, kuidas saab huvifunktsiooni selle ülesande lahendamisel kasutada.

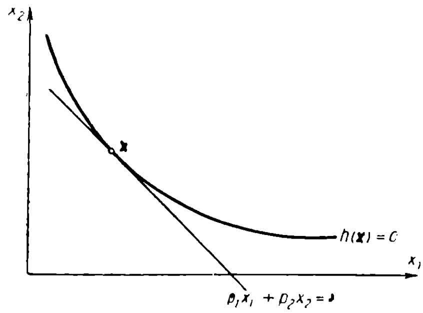
Olgu $s$ tarbija keskmine sissetulek ja $p_1, \ldots, p_n$ vaadeldavate produktide hinnad. Tarbija kulude ja tulude tasakaalu väljendab siis seos

$$p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n = s$$

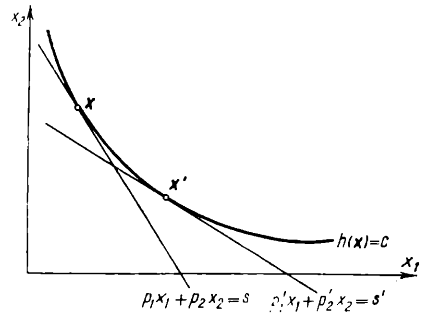
($s$ on õigemini keskmine väljaminek, kuid lihtsuse mõttes loeme sissetuleku võrdseks väljaminekuga: üldiselt võib ju ka hoiused lugeda üheks produkti liigiks). Arvestades huvifunktsiooni definitsiooni määrab «keskmine» tarbija oma tarbimise struktuuri $\mathbf{x}$ alati nii, et see oleks funktsiooni $h(\mathbf{x})$ maksimumpunkt tingimusel (1). Eeldused, mis me huvifunktsiooni kohta tegime, tagavadki sellise maksimumi olemasolu ja ainsuse. Niisuguse tingliku ekstreemumi leidmiseks võib kasutada nn. Lagrange'i kordajate meetodit. Selle meetodi kohaselt peab tegelik (s. t. antud hindade ja sissetuleku korral kõige eelistatavam) tarbimine rahuldama võrrandeid

$$\frac{\partial h}{\partial x_j} = \lambda p_j \quad (j = 1, \ldots, n), \tag{2}$$

kus $\lambda$ on teatav hindade ja sissetuleku funktsioon. Graafiliselt tähendab antud ülesande lahendamine näiteks kahe produkti korral seda, et tuleb leida sirget $p_1x_1 + p_2x_2 = s$ (ainult sellel sirgel paiknevaid punkte on tingimuse (1) kohaselt võimalik tarbida) puudutav kõver $h(\mathbf{x}) = c$ (vt. joonis 2). Puutepunkt $\mathbf{x}$ annabki siis otsitava tegeliku tarbimise, sest selle sirge teiste punktidega võrreldes on huvifunktsiooni väärtus seal kõige suurem.




Joonis 2.




Joonis 3.

Tarbimise mahu muutumise ennustamisega on nüüd seotud terve rida ülesandeid. Kõik nad eeldavad, et teatud hindadele $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ ja sissetulekule $s$ vastav tarbimine $\mathbf{x}$ on juba teada. Leida tuleb näiteks uutele hindadele $\mathbf{p}' = (p'_1, \ldots, p'_n)$ ja uuele sissetulekule $s'$ vastav tarbimine $x'$ (funktsioonina suurustest $p'_1, \ldots, p'_n$ ja $s'$). Võib aga püstitada ka näiteks niisuguse uue sissetuleku $s'$ leidmise ülesande, et oleks $h(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}')$, s. t. et uute hindade puhul tarbija vajadused oleks endisel määral rahuldatud.

Viimase ülesande põhimõttelist lahenduskäiku on kahe produkti juhul kujutatud joonisel 3. Hindade muutmine tähendab sirge $p_1x_1 + p_2x_2 = s$ sihi muutmist. Uue sissetuleku $s'$ leidmiseks tuleb uutele hindadele vastava sirgega $p'_1x_1 + p'_2x_2 = \text{const}$ lihtsalt teostada paralleellüke kuni puutumiseni endist tarbimisvektorit $\mathbf{x}$ läbiva kõveraga $h(\mathbf{x}) = c$ punktis $\mathbf{x}'$.

Seni me eeldasime, et tulude ja kulude tasakaalu tingimus (1) on ainsaks tarbija valikut kitsendavaks asjaoluks. Suure praktilise tähtsusega on aga ka juhtum, kus mõnda produkti nõutakse rohkem, kui toodetakse. Olgu sellise defitsiitse produkti keskmine kogus tarbija kohta $\bar{x}_k$ ühikut. Kuigi tarbija eelistaks osta $k$-ndat produkti suuremas koguses kui $\bar{x}_k$ (ja seda lubaks ka tema sissetulek), pole see piiratud varude tõttu võimalik. Seega lisanduvad defitsiitsete produktide korral veel kitsendused

$$x_k \leqslant \bar{x}_k. \tag{3}$$

Antud hindadele $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ sissetulekule $s$ vastava tegeliku tarbimise $\mathbf{x}(s, p_1, \ldots, p_n)$ analüütiliseks leidmiseks saadud võrrandeist (1) ja (2) võib üsna lihtsalt teha mõningaid olulisi järeldusi.

Neid võrrandeid $s$ järgi diferentseerides leiame

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial x_i}{\partial s} = 1 \\ &\sum_{i=1}^{n} h_{ij} \frac{\partial x_i}{\partial s} = p_j \frac{\partial \lambda}{\partial s} \quad (j = 1, \ldots, n) \end{aligned}\right\}, \tag{4}$$

kus sümboliga $h_{ij}$ on tähistatud huvifunktsiooni teist järku osatuletis

$$h_{ij} = \frac{\partial^2 h(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Kui veel tähistada

$$M = \begin{pmatrix} 0 & p_1 & & p_n \\ p_1 & h_{11} & & h_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ p_n & h_{n1} & \ldots & h_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \mathbf{s} = \left(-\frac{\partial \lambda}{\partial s}, \frac{\partial x_1}{\partial s}, \ldots, \frac{\partial x_n}{\partial s}\right),$$

siis võrdused (4) võib kirjutada kujul

$$Ms = (1, 0, \ldots 0).$$

Siit näeme, et vektori s koordinaadid võrduvad lihtsalt pöördmaatriksi $M^{-1} = (m_{ik}^{-1})$ esimese veeru elementidega. Muuhulgas

$$\frac{\partial x_i}{\partial s} = m_{i0}^{-1} \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{5}$$

Sissetuleku muutusega kaasnev nõudmise muutus on seega avaldatav huvifunktsiooni teist järku tuletiste ja hindade funktsioonina.

Märgime veel, et suuruse $\frac{\partial x_i}{\partial s}$ märk ei tarvitse iga $i$ korral ühesugune olla. See tähendab, et üldiselt leidub produkte, mille puhul nõudmine kasvab sissetuleku suurenemisega, kuid leidub ka produkte, mida hakatakse sissetuleku suurenemisel hoopis vähem tarbima.

Vaatleme nüüd tarbitavate produktide koguste sõltumist hindadest. Analoogiliselt äsjatooduga saab tuletada valemi

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_k} = \lambda m_{ik}^{-1} - x_k \frac{\partial x_i}{\partial s} \qquad (i, k = 1, \ldots, n). \tag{6}$$

Siit on lihtne välja lugeda, kuidas muutub nõudmine selle produkti järele, mille hind muutus. Võttes valemis (6) $i = k$, saame

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_i} = \lambda m_{ii}^{-1} - x_i \frac{\partial x_i}{\partial s} \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

On võimalik tõestada, et suurused $m_{ii}^{-1}$ osutuvad alati negatiivseteks. Lähtudes sellest, saabki valemi vasakul pool asuvate tuletiste märgi kohta teha mõned järeldused: 1) nõudmine niisuguse produkti järele, mille puhul $\frac{\partial x_i}{\partial s} \geqslant 0$, on selle produkti vajalikkuse korral ($x_i > 0$) alati normaalne, s. t. kahaneb produkti hinna kasvamisel ja kasvab hinna kahanemisel; 2) nõudmine produkti järele, mille puhul $\frac{\partial x_i}{\partial s} \leqslant 0$, võib mõnel juhul olla ka anormaalne, s. t. kasvada hinna kasvamisel ja kahaneda hinna kahanemisel.

Valemitest (6) võib tuletada veel ühe huvitava seaduspärasuse [6]. Toimigu nimelt mingi produkti hinna tõus, millega kaasneb sissetuleku niisugune tõus, et antud produkti oleks võimalik osta endises koguses. Osutub, et sel juhul ei pea tarbija oma endist tarbimise struktuuri üldiselt enam kõige eelistatavamaks: vaadeldava produkti osas toimub nõudmise vähenemine. Seega,

[6] Lähemalt on sellest kirjutatud kogumikus «Народнохозяйственные модели. Теоретические вопросы потребления», М., 1963.

kuigi näiteks leiva hinna tõus kompenseeritakse sissetuleku tõusuga sellises ulatuses, et oleks võimalik sama palju tarbida kui varem, väheneb nõudmine leiva järele.

Seostest (5) ja (6) näeme, et kui ülesandeks on tarbimise mahu muutuste leidmine hindade ja sissetulekute muutumise tagajärjel, siis piisab huvifunktsiooni aproksimeerimiseks tema Taylori rea esimest ja teist järku liikmete tundmisest. Teisest küljest, suurused $\frac{\partial x_i}{\partial s}$ ja $\frac{\partial x_i}{\partial p_j}$ on põhimõtteliselt empiiriliselt leitavad ja neid saaks seega kasutada huvifunktsiooni määramiseks. Selle meetodi otsene rakendamine ei näi aga võimalik olevat, sest suuruste $\frac{\partial x_i}{\partial p_j}$ leidmisel peaks eksperimendid seisnema kõigi produktide hindade muutmises mitmel korral, mis pole aga praktiliselt teostatav. Sellepärast on huvifunktsiooni konstrueerimisel ainsaks empiiriliseks materjaliks siiski büdžetiuurimuste resultaadid.

Harilikult toimub huvifunktsiooni konstrueerimine sel teel, et valitakse ette funktsiooni niisugune üldkuju (mudel), mis sisaldaks võimalikult vähem tundmatuid suurusi, ja püütakse viimaseid seoste (2) abil määrata (kasutades näiteks vähimruutude meetodit). Funktsiooni üldkuju etteandmisel tuleb sealjuures kasutada puhtmatemaatilisi aproksimeerimise meetodeid, sest antud probleemi korral ei saa seda üldkuju tuletada mingitest üldistest eeldustest objekti kohta.

Arvutuste lihtsuse seisukohalt on huvifunktsiooni mudelitest kõige otstarbekohasemad näiteks järgmised:

$$1)\quad h(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{n} b_k x_k + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j,$$

$$2)\quad h(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{n} b_k^* \ln (b_k + x_k).$$

Siinjuures eeldatakse, et kordajad $b_k$ võivad veel lineaarselt sõltuda teatavatest parameetritest $a_1, \ldots, a_m$, mis iseloomustavad näiteks perekonna keskmist koosseisu, korteriolusid jms.

Sellise kujuga huvifunktsioone on püütud ka konkreetsetele andmetele tuginedes konstrueerida. Ühe esimese niisuguse katse puhul kasutati 1952.—1959. aastate andmeid, kusjuures arvutused toimusid $n = 3$ puhul (toiduained, mittetoiduained ja teenused). Suurused $a_i$ valiti järgmiselt: esimesel juhul võeti parameetriks eelnevate aastate tarbimine, teisel juhul keskmine laste arv perekonnas ja kolmandal juhul arvestati mõlema nimetatud faktoriga.

Tulemuste täpsuse hindamisel selgus, et logaritmiline mudel andis kõigil kolmel juhul võrdlemisi ebatäpse tulemuse, ruutmudeli puhul oli aga viga suhteliselt üsna väike.

Loomulikult niisugused kolmeproduktilised huvifunktsioonid tegeliku planeerimise juures veel kasutatavad ei ole. Sellepärast toimubki praegu üsna laialdane uurimistöö nii vastava statistilise materjali kogumise, huvifunktsioonide mõeldavate mudelite täpsuse hindamise kui ka huvifunktsioone sisaldavate planeerimisülesannete püstitamise korrektsuse analüüsimise osas. Nende tööde tulemustest on aga esialgu veel vara rääkida.

* *
*

## AMEERIKA AVASTAMINE

Paljud on juhtinud tähelepanu asjaolule, et hüpoteesi muutumist teaduslikuks avastuseks saab väga hästi illustreerida näitega sellest, kuidas Kolumbus avastas Ameerika.

Kolumbusel oli kinnisidee, et Maa on ümmargune ja et läände purjetades võib jõuda Ida-Indiasse. Eriti tuleb tähele panna järgmisi tüüpilisi momente:

a) idee polnud kaugeltki originaalne, kuid Kolumbusel õnnestus hankida täiendavat informatsiooni;

b) Kolumbusel tuli ületada tohutuid raskusi nii ettevõtet finantseerida võivate isikute otsimisel kui ka eksperimendi enese teostamisel;

c) Kolumbus ei leidnud uut teed Indiasse, kuid ta leidis uue maailmajao;

d) vaatamata vastupidist tõestavatele asjaoludele uskus Kolumbus siiski, et ta avastas tee Indiasse;

e) oma eluajal ei jõudnud Kolumbus ära oodata ei erilist kuulsust ega märkimisväärset tasu;

f) pärast teda on leitud ümberlükkamatuid tõendeid selle kohta, et Kolumbus polnud üldse esimene eurooplane, kes jõudis Ameerikasse.

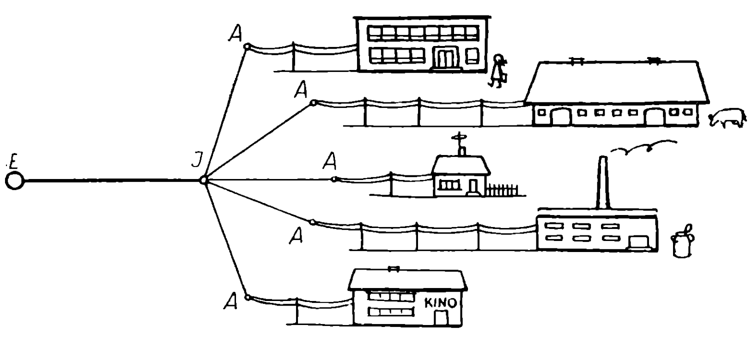
See lugu on tõlgitud hiljuti ilmunud kogumikust «Физики шутят» (Moskva, 1966), mida kõigile lugejatele soojalt soovitame.

# ÜHEST ELEKTRIVÕRKUDE PROJEKTEERIMISEL TEKKINUD ÜLESANDEST

E. Pillikse, E. Tiit

1. Käesoleval ajal varustatakse tarbijaid elektrienergiaga ühtsest energiasüsteemist, kus rida suure ja keskmise võimsusega elektrijaamu (Balti, Ahtme, Püssi jt. soojuselektrijaamad, Narva hüdroelektrijaam jt.) töötab paralleelselt. Elektrijaamadest antakse elektrienergia elektriülekandeliinide (330, 220, 110 ja 35 kV liinid) kaudu tarbimispiirkondade keskustes paiknevatesse rajoonialajaamadesse, mis kõrgepinge-jaotusvõrkude (15, 10 ja 6 kV võrgud) kaudu toidavad tarbija-alajaamu, s. o. alajaamu, mille poolt toidetavatest madalpingevõrkudest (220/380 V võrgud) saavad elektrienergiat üksiktarbijad — tööstusettevõtted, elamud, koolid, kolhooside ja sovhooside tootmishooned jne. Kõrgepinge-jaotusvõrkudega võivad paralleelselt töötada ka kohalikku tähtsust omavad väikesed elektrijaamad (Saesaare, Kunda, Leevaku jt.).

Rajoonialajaamadest $E$ lähtuv kõrgepingeliin toidab $n$ tarbija-alajaama. Nende alajaamade ühise toiteliini $EJ$ projekteerimiseks on tarvis teada seda liini läbiva voolu maksimaalset võimsust. Siinjuures on teada kõigi alajaamade maksimaalsed võimsused, kuid puudub informatsioon selle kohta, milline on alajaamade voolutarbe jaotus ööpäeva jooksul.




*Joonis 1.*

Liinilõiku läbiva voolu arvutuslik maksimaalne võimsus $z(k_n)$ leitakse valemist

$$z(k_n) = k_n \sum_{i=1}^{n} S_i^*, \qquad (1)$$

kus $S^*_i$ on $i$-nda alajaama maksimaalne võimsus ja $k_n$ — nn. üheaegsustegur. Seni puudub kahjuks põhjendatud kriteerium $k_n$ määramiseks ja praktikas valitakse üheaegsustegur mõnevõrra meelevaldselt, sageli oluliselt väiksem kui 1. Nii võetakse $k_n$ enamasti 0,6 kuni 0,8, suurte $n$ väärtuste puhul aga koguni 0,3 kuni 0,4.

Tekkis aga kahtlus, et niiviisi arvutatud $z(k_n)$ on tugevasti alahinnatud: praktikas esineb tarbimise tipp-perioodil sageli pinge langemist alla lubatud normi, mis põhjustab elektrimootorite läbipõlemist, häireid televisiooni jälgimises jne. Ilmselt on sellise olukorra põhjuseks liinide ebaõige projekteerimine, mis omakorda tuleneb kordaja $k_n$ valikust.

Küllaldase hulga vaatlusandmete põhjal on võimalik kordajat $k_n$ statistiliselt määrata. Käesolevas artiklis püüamegi seda teha, kasutades sealjuures lisaks «traditsioonilisele» statistilisele aparatuurile mõningaid tõenäosusteooria [1] tulemusi.

2. Mingi $i$-nda alajaama tegelik võimsus $S_i(t)$ ajamomendil $t$ on juhuslik muutuja, mille väärtuste hulga määravad võrratused

$$0 \leqslant S_i(t) \leqslant S_i^*,$$

kus $S_i^*$ on vaadeldava alajaama maksimaalvõimsus (vt. seos (1)). Ka $n$ alajaama summaarne tegelik võimsus

$$\sum_{i=1}^{n} S_i(t)$$

igal ajamomendil [2] $t$ on juhuslik muutuja, kusjuures

$$0 \leqslant \sum_{i=1}^{n} S_i(t) \leqslant \sum_{i=1}^{n} S_i^*.$$

Erilist huvi pakub meile $n$ alajaama maksimaalne summaarne võimsus. Realiseerugu see ajamomendil $t_n^*$, s. t. olgu

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant 24} \sum_{i=1}^{n} S_i(t) = \sum_{i=1}^{n} S_i(t_n^*) = \Sigma_n^* .$$

[1] Käesoleva artikli lugejalt eeldatakse tõenäosusteooria mõistete tundmist vähemalt artiklite «Mis on tõenäosus?» (Matemaatika ja kaasaeg, IX, lk. 74—90, ja X, lk. 70—88) ulatuses; ka kasutatud sümboolika on põhiliselt sama.

[2] Aega $t$ vaadeldakse muutuvana vaid ühe ööpäeva ulatuses.

Seega ajamomendil $t_n^*$ läbib $n$ alajaama toitvat liinilõiku $EJ$ vool võimsusega $\Sigma_n^*$. Olgu meil selle liinilõigu jaoks mingil viisil määratud kordaja $k_n$ ning arvutatud vastav $z(k_n)$. Avariide võimalikkuse määrab tõenäosus

$$P(\Sigma_n^* > z(k_n)),$$

s. o. tõenäosus selleks, et liini tegelikult läbiv võimsus ületab arvutusliku. On loomulik nõuda, et niisuguse sündmuse tõenäosus — nn. usaldatavusnivoo oleks küllalt väike[3]: kordaja $k_n$ tuleb määrata nii, et oleks

$$P(\Sigma_n^* > z(k_n)) \leqslant \varepsilon, \qquad (2)$$

kusjuures ökonoomseim lahend saadakse $k_n$ sellise väärtuse korral, mille puhul seoses (2) kehtib võrdus.

Usaldatavusnivoo arvuline väärtus $\varepsilon$ määratakse majanduslikest kaalutlustest lähtudes. Selleks tuleb kindlaks teha, kui suurt kahju ning missuguse tõenäosusega põhjustab arvutusliku võimsuse ületamine vaadeldavatel liinidel.

Käesolevas artiklis kasutame $\varepsilon$ väärtust 0,1. Praktiliselt tähendab see, et suure hulga liinide korral, mille jaoks $k_n$ on ($\varepsilon = 0{,}1$ puhul) määratud seosest (2), ületab tegelik võimsus $\Sigma_n^*$ maksimumkoormuse hetkel umbes 10 protsendil juhtudest arvutusliku võimsuse $z(k_n)$.

**3.** Püstitatud ülesande lahendamiseks oleks meil tarvis teada juhusliku muutuja $\Sigma_n^*$ jaotust, mille abil saaksime vastavalt etteantud usaldatavusnivoole $\varepsilon$ alati määrata konstandi $k_n$ nii, et kehtiks seos (2).

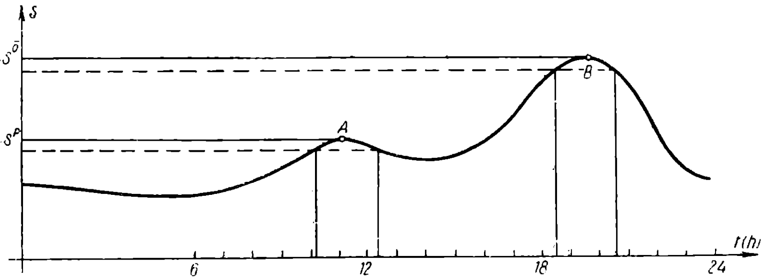
Et $\Sigma_n^*$ on juhuslike muutujate $S_i(t_n^*)$ summa $(i = 1, 2, \ldots, n)$, siis tema jaotuse määramiseks peab teadma kõigi liidetavate jaotusi. Siinjuures on loomulik lugeda kõik liidetavad statistiliselt sõltumatuteks (ei sõltu ju voolutarve ühes alajaamas milgi määral voolutarbest teises alajaamas).

Suuruste $S_i(t_n^*)$ jaotuse määramisel tugineme vaatlusandmetele. Vaatlusi on teostatud 240 juhuslikult valitud põllumajandusliku alajaama kohta. Vaadeldav alajaamade kogum (väljavõte) on piisav selleks, et kirjeldada meie arvutuste jaoks küllaldase täpsusega kõikvõimalike samatüübiliste alajaamade populatsiooni, s. t. me võime analüüsitud alajaamade hulgas täheldatud seaduspärasused lugeda üldkehtivaiks.

Vaatlusandmetest saime järgmist informatsiooni.

---

[3] N.-ö. mittesoovitava tulemuse esinemise lubamine teatud väikesel protsendil juhtudest on statistikas väga levinud võte, mis sageli annab suurt ökonoomiat. Ka käesoleva ülesande korral oleks lihtne projekteerida elektrivõrk nii, et mitte ühelgi juhul ei esineks arvutatust suuremat võimsust (selleks tuleks vaid valemis (1) võtta $k_n = 1$). Ilmselt on selline projekteerimine aga liiga ettevaatlik ning seega ebaökonoomne, sest selle tagajärjel kulutatakse ebaotstarbekalt defitsiitset juhtmematerjali.




*Joonis 2.*

1° Kõigil alajaamadel esineb 2 koormuse maksimumperioodi — päevane (ajavahemikus 10.00—12.00) ja õhtune (ajavahemikus 18.00—21.00); tähistame $i$-nda alajaama päevase maksimumkoormuse sümboliga $S_i^p$, õhtuse — $S_i^{\bar{o}}$. Sama kehtib ka $n$ alajaama summa korral. Kummagi perioodi summaarsed maksimummomendid tähistame vastavalt $t_n^p$ ja $t_n^{\bar{o}}$, koormusmaksimumid aga $\Sigma_n^p$ ja $\Sigma_n^{\bar{o}}$, s. t.

$$\max_{10 \leqslant t \leqslant 12} \sum_{i=1}^{n} S_i(t) = \sum_{i=1}^{n} S_i(t_n^p) = \Sigma_n^p,$$

$$\max_{10 \leqslant t \leqslant 12} S_i(t) = S_i^p, \tag{3}$$

$$\max_{18 \leqslant t \leqslant 21} \sum_{i=1}^{n} S_i(t) = \sum_{i=1}^{n} S_i(t_n^{\bar{o}}) = \Sigma_n^{\bar{o}},$$

$$\max_{18 \leqslant t \leqslant 21} S_i(t) = S_i^{\bar{o}}.$$

Ilmselt kehtivad siin seosed:

$$\Sigma_n^* = \max(\Sigma_n^{\bar{o}}, \Sigma_n^p), \quad S_i^* = \max(S_i^p, S_i^{\bar{o}}). \tag{4}$$

2° Maksimumperioodi vältel püsib koormus kõigis jaamades ligikaudu stabiilsena, s. t. suure tõenäosusega kehtivad võrratused (vt. joon. 2)

$$S_i^p - 0{,}1S_i^* \leqslant S_i(t) \leqslant S_i^p \qquad (10 \leqslant t \leqslant 12),$$

$$S_i^{\bar{o}} - 0{,}1S_i^* \leqslant S_i(t) \leqslant S_i^{\bar{o}} \qquad (18 \leqslant t \leqslant 21).$$

3° Alajaama päevase maksimumkoormuse ning absoluutse maksimumkoormuse suhte $S_i^p : S_i^*$ (aga samuti ka vastavalt suhte $S_i^{\bar{o}} : S_i^*$) jaotus ei sõltu alajaama absoluutsest koormusmaksimumist[4] $S_i^*$. Seda silmas pidades võime juhuslikke muutujaid $S_i^p$ ja $S_i^õ$ (s. t. iga alajaama koormust tema koormuse päevasel ja õhtusel maksimummomendil) vaadelda korrutistena

$$S_i^p = S_i^* \cdot S^p; \qquad S_i^õ = S_i^* \cdot S^õ.$$

Juhuslike muutujate $S^p$ ja $S^õ$ jaotuse saame määrata vaatlusandmete põhjal. Nimelt kasutame asjaolu, et suurte arvude seaduse kohaselt läheneb vaatlustulemuse esinemise relatiivne sagedus vaatluste arvu suurenemisel selle tulemuse tõenäosusele. Tabelis 1 on aga esitatud suuruste $S^p$ ja $S^õ$ sageduste jaotus (näiteks $S^p \leqslant 0{,}40$ kolme alajaama puhul 240-st, seega sündmuste $S^p \leqslant \leqslant 0{,}40$ esinemise sagedus $p_7 = 3 : 240 \approx 0{,}012$ jne.).

Tabel 1

| $S^p$ väärtuste vahemik | $\leqslant 0{,}40$ | 0,41—<br>—0,50 | 0,51—<br>—0,60 | 0,61—<br>—0,70 | 0,71—<br>—0,80 | 0.81—<br>—0,90 | 0,91—<br>—0,99 | 1,00 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Tõenäosus | $p_7 =$<br>$= 0{,}012$ | $p_6 =$<br>$= 0{,}023$ | $p_5 =$<br>$= 0{,}033$ | $p_4 =$<br>$= 0{,}083$ | $p_3 =$<br>$= 0{,}129$ | $p_2 =$<br>$= 0{,}158$ | $p_1 =$<br>$= 0{,}117$ | $p_0 =$<br>$= 0{,}446$ |
| $S^õ$ väärtuste vahemik | $\leqslant 0{,}40$ | 0,41—<br>—0,50 | 0,51—<br>—0,60 | 0.61—<br>—0,70 | 0,71—<br>—0,80 | 0,81—<br>—0,90 | 0,91—<br>—0,99 | 1,00 |
| Tõenäosus | $q_7 =$<br>$= 0{,}033$ | $q_6 =$<br>$= 0{,}033$ | $q_5 =$<br>$= 0{,}029$ | $q_4 =$<br>$= 0{,}023$ | $q_3 =$<br>$= 0{,}075$ | $q_2 =$<br>$= 0{,}092$ | $q_1 =$<br>$= 0{,}138$ | $q_0 =$<br>$= 0{,}579$ |

Et vaatluste arv $n$ on küllalt suur, võime saadud sageduste jaotust lugeda ligikaudselt võrdseks nende suuruste tõenäosuste jaotusega. Tavaliselt niisuguseid nn. empiirilisi (vaatlusest saadud) jaotusi kasutataksegi statistiliste ülesannete lähteandmetena[5].

**4.** Püüame nüüd saadud tulemuste põhjal määrata juhusliku muutuja $\Sigma_n^p$ jaotust. Raskuseks on siin asjaolu, et erinevate alajaamade päevased maksimummomendid ei lange ühte omavahel ega ühti ka summaarse koormuse maksimummomendiga $t_n^p$. Pealegi puuduvad täpsed vaatlusandmed alajaamade koormusmaksimumide jaotuse kohta. Kuid vaatlustulemusi 2° arvestades on selge, et momendil $t_n^p$ erinevad üksikute alajaamade koormused $S_i(t_n^p)$ nende vaadeldava perioodi maksimumkoormusest $S_i^p$ vaid mõne protsendi võrra.

---

[4] Täpsemini, teatud sõltuvus nende suuruste vahel küll eksisteerib — nimelt jaamades, kus $t^* = t^õ$, on suhe $S_i^p : S_i^*$ üldiselt seda väiksem, mida väiksem on $S_i^*$. Kuid see sõltuvus on niivõrd nõrk, et tema arvestamine ei paranda saadavat tulemust meie kasutatava arvutustäpsuse piirides.

[5] Teine võimalus juhusliku muutuja jaotuse määramiseks vaatlusandmete põhjal tugineb vaadeldava juhusliku muutuja sageduste jaotuse võrdlemisele mõne tuntud jaotusega (enamasti kasutatakse võrdlusjaotusena normaaljaotust). Ka käesolevas ülesandes võiks kasutada juhuslike muutujate $\Sigma_n^p$ ja $\Sigma_n^õ$ lähenemist normaaljaotusega.

Ülesande lahendamise lihtsustamiseks teeme järgmised eeldused.

1. Oletame, et kõigi liini poolt toidetavate alajaamade koormusmaksimumid on võrdsed. (Tingimuse 3° tõttu ei teki selle eelduse tagajärjel süstemaatilist viga.)

$$S_i^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S_i^* = S^*.$$

2. Asendame meid huvitavad juhuslikud muutujad $S_i(t_n^p)$ juhuslike muutujatega $S^* \cdot S'^p$, kusjuures $S'^p$ defineerime järgmiselt:

$S'^p = S^p = 1$ kõigi selliste alajaamade korral, mille absoluutne koormusmaksimum on päeval;
$S'^p = 1 - 0{,}1m$, kui $1 - 0{,}1\,m \leqslant S^p < 1{,}1 - 0{,}1m$ kõigi ülejäänud alajaamade korral.

Sellise juhusliku muutuja jaotus on esitatud tabelis 2.

Tabel 2

| $S'^p$ väärtused | 1,00 | 0,90 | 0,80 | 0,70 | 0,60 | 0,50 | 0,40 | 0,30 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Tõenäosused | $p_0 = 0{,}446$ | $p_1 = 0{,}117$ | $p_2 = 0{,}158$ | $p_3 = 0{,}129$ | $p_4 = 0{,}083$ | $p_5 = 0{,}033$ | $p_6 = 0{,}023$ | $p_7 = 0{,}012$ |

Võrreldes tabelit 2 tabeliga 1 näeme, et $S'^p$ on diskreetne juhuslik muutuja, mille väärtused on keskmiselt 2—3 protsendi võrra väiksemad pideva juhusliku muutuja $S^p$ väärtustest.

5. Neid eeldusi kasutades saame

$$\Sigma_n^p = \sum_{i=1}^{n} S_i(t_n^p) = \sum_{i=1}^{n} S_i^* \cdot S'^p = S^* \sum_{i=1}^{n} S'^p.$$

Seega on meil tarvis leida $n$ sõltumatu diskreetse juhusliku muutuja summa jaotus, kusjuures liidetavad on ühesuguse jaotusega.

Pidades silmas $S'^p$ jaotust tabelis 2, näeme, et $\Sigma_n^p$ on samuti diskreetne juhuslik muutuja, mille maksimaalseks väärtuseks on $nS^*$. Sellise väärtuse omandab $\Sigma_n^p$ parajasti siis, kui kõigil liidetavatel $S_i^* \cdot S'^p$ on väärtus $S^*$; sellise sündmuse tõenäosus on aga (tõenäosuste korrutamise teoreemi põhjal) üksiksündmuste tõenäosuste korrutis, s. t.

$$0{,}446 \cdot 0{,}446 \cdot \ldots \cdot 0{,}446 = 0{,}446^n.$$

Järgmine võimalik $\Sigma_n^p$ väärtus on $(n - 0{,}1)S^*$. Sellise väärtuse omandab juhuslik muutuja parajasti siis, kui ühel (ükskõik millisel) liidetavatest on väärtus $0{,}9S^*$, ülejäänutel aga $S^*$. Selle sündmuse tõenäosus on

$$n \cdot 0{,}117 \cdot 0{,}446^{n-1}.$$

Samasuguse arutelu tulemusena võime leida juhusliku muutuja $\Sigma_n^p$ kõigi väärtuste esinemise tõenäosused. Kõigil neil väärtustel on kuju

$$(n - 0{,}1m)S^*,$$

kus $m$ on mistahes täisarv 0 ja $7n$ vahel. Osutub, et $\Sigma_n^p$ jaotuse määrab valem

$$P(\sum_n^p = (n - 0{,}1m)S^*) = n! \sum \frac{p_0^{l_0} \cdot p_1^{l_1} \dots p_r^{l_r}}{l_0!\, l_1! \dots l_r!},$$

kus summa on leitud kõigi selliste naturaalarvude $l_0, l_1, \dots, l_r$ kombinatsioonide korral, mis rahuldavad tingimusi

$$\sum_{j=0}^{r} l_j = n, \qquad \sum_{j=0}^{r} l_j \cdot j = m.$$

**6.** Kogu kirjeldatud mõttekäiku võib korrata ka alajaamade õhtuste maksimumide korral, s. t. leida ka juhusliku muutuja $S_n^õ$ jaotus (mis arvudes väljendatuna tuleb kahtlemata $S_n^p$ jaotusest erinev (vt. tabel 1)).

Et liini absoluutne koormusmaksimumi hetk võib langeda ühtekas päevase või õhtuse koormusmaksimumiga, siis [6]

$$P(\sum_n^* > z(k_n)) = P(\sum_n^p > z(k_n)) + P(\sum_n^õ > z(k_n)).$$

Saame nüüd lihtsalt määrata ka $\Sigma_n^*$ jaotuse [7]:

$$P(\sum_n^* = nS^*) = P(\sum_n^p = nS^*) + P(\sum_n^õ = nS^*);$$

$$P(\sum_n^* = (n - 0{,}1)S^*) = P(\sum_n^p = (n - 0{,}1)S^*) + $$
$$+ P(\sum_n^õ = (n - 0{,}1)S^*);$$

$$P(\sum_n^* = (n - 0{,}1m)S^*) = P(\sum_n^p = (n - 0{,}1m)S^*) +$$
$$+ P(\sum_n^õ = (n - 0{,}1m)S^*) \qquad m = 1, 2, \dots, n.$$

**7.** Vaatleme nüüd, kuidas määrata üheaegsustegur $k_n$, kasutades leitud $\Sigma_n^*$ jaotust.

Kõigepealt kontrollime, kas üheaegsustegur $k_n$ võib üldse olla väiksem kui 1.

Juhul kui

$$P(\sum_n^* = nS^*) > \varepsilon,$$

---

[6] See väide oleks täpne siis, kui liinidel ei oleks võimalust omandada absoluutselt maksimumi niihästi päeval kui ka õhtul: tegelikult niisugune **võimalus** siiski eksisteerib, kuid äärmiselt väikese tõenäosusega.

[7] Selline $S_n^*$ jaotus on meie $S^p$ ja $S^õ$ jaotuse korral **õige siis**, kui $m < n$; praktiliselt ei lähe arvutustes aga suuremaid $m$ väärtusi tarvis.

ei ole võimalik valida ühtegi $k_n$ väärtust nii, et $k_n < 1$ ja kehtiks võrratus (2). Järelikult peab siis alati olema $k_n = 1$.

Kui aga

$$P(\Sigma_n^* = nS^*) < \varepsilon,$$

siis võib $k_n$ olla väiksem kui 1. $\Sigma_n^*$ jaotuse järgi leiame siis alati niisuguse mittenegatiivse täisarvu $m$, et kehtiksid võrratused:

$$P(S_n^* \geqslant (n - 0{,}1m)S^*) < \varepsilon,$$
$$P(S_n^* \geqslant [n - 0{,}1(m+1)]S^*) \geqslant \varepsilon.$$

Interpoleerimise teel saame leida siis ka niisuguse arvu $\delta$ $(0 < \delta \leqslant 1)$, et

$$P(S_n^* \geqslant [n - 0{,}1(m+\delta)]S^*) = \varepsilon,$$

ning võttes nüüd arvutusliku võimsuse $z(k_n)$ võrdseks suurusega $[n - 0{,}1(m+\delta)]S^*$, saamegi rahuldada võrratuse (2), sealjuures võimalikult ökonoomselt. Et

$$z(k_n) = k_n \sum_{i=1}^{n} S_i^* = k_n n S^*,$$

siis saame üheaegsusteguri jaoks avaldise

$$k_n = \frac{[n - 0{,}1(m+\delta)]S^*}{nS^*} = 1 - 0{,}1\,\frac{m+\delta}{n} \qquad (5)$$

ning meie ülesanne ongi lahendatud.

8. Ülalkirjeldatud meetodil arvutati $k_n$ väärtused $n = 1, 2, \ldots, 10$ jaoks.

Et

$$P(\Sigma_1 = 1S^*) = 1,$$
$$P(\Sigma_2 = 2S^*) = 0{,}446^2 + 0{,}579^2 = 0{,}534,$$
$$P(\Sigma_3 = 3S^*) = 0{,}446^3 + 0{,}579^3 = 0{,}283$$

ja

$$P(\Sigma_4 = 4S^*) = 0{,}446^4 + 0{,}579^4 = 0{,}152,$$

siis

$$k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 1.$$

Kuid:

$$P(\Sigma_5 = 5S^*) = 0{,}446^5 + 0{,}579^5 = 0{,}083,$$
$$P(\Sigma_5 \geqslant 4{,}9S^*) = 0{,}083 + 5 \cdot 0{,}117 \cdot 0{,}138 \cdot 0{,}579^4 = 0{,}183,$$

seega $m = 0$, kuid $\delta = \frac{0{,}100 - 0{,}083}{0{,}183 - 0{,}083} = 0{,}17$ ja valemist (5) leiame:

$$k_5 = 1 - 0{,}1\,\frac{0{,}17}{5} = 0{,}997.$$

Samuti leiame:

$P(\sum_6 = 6S^*) = 0{,}046,$ $P(\sum_6 \geqslant 5{,}9S^*) = 0{,}112,$ $k_6 = 0{,}903;$

$P(\sum_7 \geqslant 6{,}9S^*) = 0{,}068,$ $P(\sum_7 \geqslant 6{,}8S^*) = 0{,}132,$ $k_7 = 0{,}987;$

$P(\sum_8 \geqslant 7{,}8S^*) = 0{,}085,$ $P(\sum_8 \geqslant 7{,}7S^*) = 0{,}147,$ $k_8 = 0{,}980;$

$P(\sum_9 \geqslant 8{,}7S^*) = 0{,}103,$ $k_9 \geqslant 0{,}975;$

$P(\sum_{10} \geqslant 9{,}7S^*) = 0{,}066;$ $P(\sum_{10} \geqslant 9{,}6S^*) = 0{,}108,$ $k_{10} = 0{,}970.$

Paneme tähele, et $n$ suurenedes $k_n$ väheneb. Kuna suurte $n$ väärtuste korral on $k_n$ arvutamine küllaltki tülikas, anname suuremate $n$ väärtuste jaoks kordajale $k_n$ hinnangu. Selleks leiame $n$ alajaama toitva liini keskmise koormuse päevasel ja õhtusel tippmomendil (juhuslike muutujate $\Sigma_n^p$ ja $\Sigma_n^{\tilde{o}}$ keskväärtused $\overline{S}^p$ ja $\overline{S}^{\tilde{o}}$):

$$\overline{S}^p = S^* \sum_{m=0}^{7} (1 - 0{,}1m) P(S'^p = 1 - 0{,}1m) \approx 0{,}870S^*$$

ja

$$\overline{S}^{\tilde{o}} = 0{,}850S^*;$$

$$\overline{S}^* = \max(\overline{S}^p, \overline{S}^{\tilde{o}}) = 0{,}870S^*.$$

Kuna juhuslikud muutujad $\Sigma_n^p$ ja $\Sigma_n^{\tilde{o}}$ suurte $n$ väärtuste korral piirteoreemi põhjal lähenevad normaaljaotusega juhuslikele muutujatele, siis $P(\Sigma_n^p < n\overline{S}^p) \approx 0{,}5;$ $P(\Sigma_n^{\tilde{o}} < n\overline{S}^{\tilde{o}}) \approx 0{,}5,$ mistõttu igasuguse $n$ väärtuse korral

$$k_n > 0{,}870.$$

Saadud tulemused näitavad, et üheaegsusteguri $k_n$ väärtus peab alati olema küllalt lähedane arvule 1. Tulemus ongi ootuspärane: langevad ju kõigi alajaamade koormusmaksimumid ühele kahest maksimumperioodist, kusjuures mõlemal perioodil on kõigi alajaamade koormus ka absoluutsele maksimumile küllalt lähedane (vt. tabel 1). Seetõttu on ka siis $n$ alajaama summaarne koormus maksimumperioodidel küllaltki lähedane nende alajaamade maksimaalkoormuste summale. Väikeste üheaegsustegurite kasutamine liinide projekteerimisel on täiesti põhjendamatu ning põhjustab tarbimise tipp-perioodidel paratamatult liinide suuremat koormamist, kui on arvestatud.

Toodud ülesanne on huvitav näide selle kohta, kuidas suhteliselt lihtsate matemaatiliste vahenditega saab anda lahenduse praktiliselt suurt huvi pakkuvale ülesandele. Õigete üheaegsustegurite kasutamise majanduslik efekt (ärahoitud avariide ja liinide paratamatute ümberprojekteerimiste arvel) on ootuste kohaselt üsna suur.

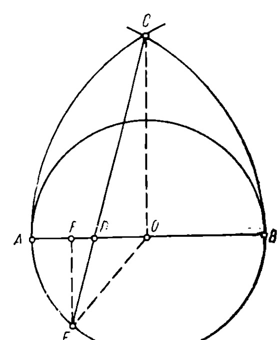
# RINGJOONE LIGIKAUDNE JAOTAMINE $n$ VÕRDSEKS OSAKS

**T. Semjonova** [1]

Ülesanne jaotada ringjoon $n$ võrdseks osaks sirkli ja joonlaua abil on tihedalt seotud ringi kvadratuuri probleemiga [2], mis pärineb antiikajast. 1796. a. tõestas Göttingeni ülikooli noor kasvandik, tollal alles 19-aastane, hilisem silmapaistev matemaatik Carl Friedrich Gauss, et sellel ülesandel üldiselt ei leidu täpset lahendust; ringjoont ei saa tükeldada ainult sirkli ja joonlauaga $n$ võrdseks osaks iga $n$ väärtuse korral. Küll saab seda aga alati teha ligikaudselt. Paljude sajandite jooksul on leitud selle ülesande lahendamiseks üha uusi ligikaudseid meetodeid. Sageli mõni leitud meetodeist unustati ja avastati siis uuesti teiste autorite poolt.

Järgnevate ridade eesmärgiks on tutvustada üht meetodit — nn. Renaldini meetodit ja selle ajalugu.

Kui õnnestub ühe ringjoone jaotamine $n$ võrdseks osaks, siis on seda hõlpus teha iga teise ringjoonega, s. t. ringjoone raadius on ülesande lahendamisel ebaoluline. Seepärast vaatleme ühikringjoont keskpunktiga $O$ (joon. 1). Selleks et määrata ligikaudselt selle ringjoone $\frac{1}{n}$ osa, jaotame diameetri $AB$ $n$ võrdseks osaks ning tõmbame punktidest $A$ ja $B$ kaared raadiusega $AB$ lõikumiseni punktis $C$. Olgu $D$ diameetri teine jaotuspunkt vasakult poolt lugedes. Sirge $CD$ ja ringjoone lõikepunkt $E$ määrab kaare $\breve{AE}$, mille loeme ligikaudselt võrdseks otsitava kaarega.




*Joonis 1.*

Hindame tehtud viga. Et $AO = 1$, siis $AD = \frac{4}{n}$ ja $OD = 1 - \frac{4}{n}$.

[1] Artikli autoriks on Mari ANSV Pedagoogilise Instituudi (Joškar-Ola) aspirant. Artikkel on kirjutatud kogumiku «Matemaatika ja kaasaeg» jaoks. Vene keelest tõlkinud K. Ariva.

[2] Vt. näit. A r i v a, K., Konstruktsioonid sirkli ja joonlauaga. Matemaatika ja kaasaeg, VI, lk. 40—51.

Kolmnurkade $DEF$ ja $DOC$ sarnasuse tõttu $\frac{DF}{EF} = \frac{DO}{OC}$. Olgu kaarele $\overset{\smile}{AE}$ vastav kesknurk $\alpha$, siis $EF = \sin\alpha$, $OF = \cos\alpha$, ja $DF = OF - OD = \cos\alpha - \left(1 - \frac{4}{n}\right)$. Kolmnurga $ABC$ iga külje pikkus on 2, järelikult tema kõrgus $OC = \sqrt{3}$. Lõikude $DF$, $EF$, $DO$ ja $OC$ võrdelisuse tõttu

$$\frac{\cos\alpha - \left(1 - \frac{4}{n}\right)}{\sin\alpha} = \frac{1 - \frac{4}{n}}{\sqrt{3}}.$$

Lahendame selle võrrandi $\cos\alpha$ suhtes, siis pärast lihtsaid teisendusi saame:

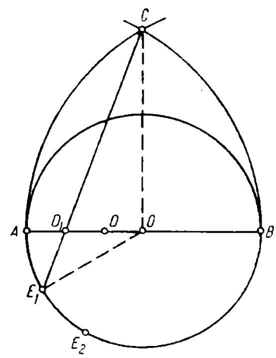
$$\cos\alpha = \frac{(n-4)}{4} \cdot \frac{3n + \sqrt{(n+8)^2 - 96}}{(n-1)^2 + 3}. \qquad (1)$$

Koostame selle valemi abil kesknurga $\alpha$ väärtuste tabeli $n$ erinevate väärtuste korral.

| $n$ | $\alpha = \frac{360^\circ}{n}$ | $\alpha$ ligikaudne väärtus valemi (1) põhjal | Absoluutne viga |
|---|---|---|---|
| 3 | 120°00′00″ | 120°00′00″ | 0°00′00″ |
| 4 | 90°00′00″ | 90°00′00″ | 0°00′00″ |
| 5 | 72°00′00″ | 71°58′13″ | —1′47″ |
| 6 | 60°00′00″ | 60°00′00″ | 0°00′00″ |
| 7 | 51°25′43″ | 51°32′06″ | 6′23″ |
| 8 | 45°00′00″ | 45°12′15″ | 12′15″ |
| 9 | 40°00′00″ | 40°16′40″ | 16′40″ |
| 10 | 36°00′00″ | 36°21′21″ | 21′21″ |
| 11 | 32°43′38″ | 33°08′52″ | 25′14″ |
| 12 | 30°00′00″ | 30°28′25″ | 28′25″ |
| 13 | 27°41′32″ | 28°12′29″ | 30′57″ |
| 14 | 25°42′51″ | 26°15′48″ | 32′57″ |
| 15 | 24°00′00″ | 24°34′31″ | 34′31″ |
| 16 | 22°30′00″ | 23°05′43″ | 35′43″ |
| 17 | 21°10′35″ | 21°47′13″ | 36′38″ |
| 18 | 20°00′00″ | 20°37′23″ | 37′23″ |
| 19 | 18°56′51″ | 19°34′35″ | 37′44″ |
| 20 | 18°00′00″ | 18°38′02″ | 38′02″ |
| 21 | 17°08′34″ | 17°46′44″ | 38′10″ |
| 22 | 16°21′49″ | 17°00′06″ | 38′17″ |
| 23 | 15°39′08″ | 16°17′21″ | 38′13″ |
| 24 | 15°00′00″ | 15°38′05″ | 38′05″ |
| 25 | 14°24′00″ | 12°36′28″ | 37′55″ |
| 30 | 12°00′00″ | 09°32′40″ | 36′28″ |
| 40 | 09°00′00″ | 15°01′55″ | 32′40″ |
| 50 | 7°12′00″ | 7°41′00″ | 29′00″ |
| 60 | 6°00′00″ | 6°26′00″ | 26′00″ |
| 70 | 5°08′34″ | 5°32′00″ | 23′26″ |
| 80 | 4°30′00″ | 4°51′20″ | 21′20″ |
| 90 | 4°00′00″ | 4°19′30″ | 19′30″ |
| 100 | 3°36′00″ | 3°52′50″ | 18′50″ |

Tabelist ilmneb, et jaotuspunktide arvu kasvamisel 1-st kuni 100-ni absoluutne viga esialgu kasvab, saavutab maksimaalse väärtuse $n = 22$ korral ja hakkab siis aeglaselt kahanema.

Konstruktiivse geomeetria küsimusi käsitlevas kirjanduses valgustatakse selle meetodi ajalugu sageli vääralt. Näit. S. Zetel [2] nimetab seda «Meyeri» meetodiks, lugedes avastamisajaks XX saj. algust. H. Haubold (1958) väidab, et meetod esines esmakordselt Kehri töös 1880. a. ja seejärel unustati. Tegelikult on vaadeldaval meetodil rohkem kui kolme sajandi pikkune ajalugu.



*Joonis 2.*

Esimene viide taolise võtte kohta esineb A. de Ville'i fortifikatsiooni-alases töös, mis ilmus 1628. a. A. de Ville ühendab punkti $C$ mitte teise, vaid esimese jaotuspunktiga $D_1$ diameetril $AB$ (joon. 2) ja kasutab lähendina kaart $\breve{AE_2} = 2\breve{AE_1}$.

Korrates valemi (1) tuletamisel esinenud arutlusi, saab väljendada nurga $\angle AOE_1 = \frac{\alpha}{2}$ koosinuse valemiga

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{(n-2)}{4}\cdot\frac{3n+\sqrt{(n+4)^2-24}}{n^2-n+1}.$$

Arvutame selle valemi abil nurga $\frac{\alpha}{2}$ erinevail $n$ väärtustel, leiame $\alpha = \angle AOE_2$ ja koostame tabeli:

| $n$ | $\alpha$ ligikaudne väärtus | Absoluutne viga |
|---|---|---|
| 3 | 120°00′00″ | 0°00′00″ |
| 4 | 90°24′30″ | 24′30″ |
| 5 | 72°42′38″ | 42′38″ |
| 6 | 60°56′50″ | 56°50″ |
| 7 | 52°31′34″ | 1°05′51″ |
| 8 | 46°11′14″ | 1°11′14″ |
| 9 | 41°14′34″ | 1°14′34″ |
| 10 | 37°16′04″ | 1°16′04″ |
| 15 | 25°12′58″ | 1°12′58″ |
| 20 | 19°05′00″ | 1°05′00″ |
| 21 | 18°12′20″ | 1°03′46″ |
| 22 | 17°24′00″ | 1°02′11″ |
| 23 | 16°40′00″ | 1°00′56″ |
| 24 | 15°22′00″ | 59′30″ |
| 25 | 15°59′30″ | 58′00″ |

Nagu näeme, on de Ville'i meetod tunduvalt väiksema täpsusega. Viga on maksimaalne $n = 10$ korral.

De Ville'i meetodit kirjeldab hiljem N. Bion 1703. a. Ta hindab ka selle täpsust $n = 5$ ja $n = 7$ puhul. Bion märgib ühtlasi, et A. de Bosse täpsustas meetodit ja andis sellele joonisel 1 näidatud kuju juba a. 1653. Trükis ilmus täpsustatud variant 1665. a. Viimasele asjaolule juhtis tähelepanu ka Th. Vahlen (1911. a.).

Bioni kaasaegne J. Chr. Sturm (1695) loeb täpsustatud meetodi autoriks mitte de Bosse'i, vaid C. Renaldinit (1655). Samal arvamisel on Chr. Wolff (1730). Sellepärast 18. sajandi matemaatika ajaloolane Kästner nimetabki täpsustatud varianti «Renaldini meetodiks».

A. 1803 avaldab Adams oma konstruktsiooni, mis erineb eelnevast vaid ühe detaili poolest: punkt $C$ määratakse mitte võrdkülgse kolmnurga tipuna, vaid punktina diameetri $AB$ ristsirgel $OC$ kaugusel $1{,}75r$ keskpunktist $O$. Kuid see konstruktsioon on tülikas; pealegi osutub ta vähem täpseks. Tõepoolest, kui $OC = 1\frac{3}{4}$, siis

$$\cos\alpha = \frac{(n-4)\left(49n + 16\sqrt{n^2 + 16{,}5n - 33}\right)}{16(n-4)^2 + 49n^2}.$$

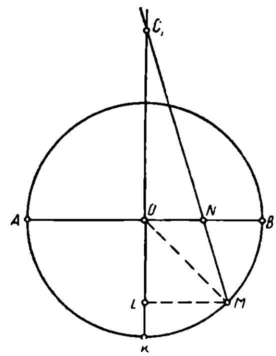
Vastavad arvutused on toodud alljärgnevas tabelis.

| $n$ | $\alpha$ ligikaudne väärtus | Absoluutne viga |
|---|---|---|
| 3 | 119°52′53″ | —0°07′07″ |
| 4 | 90°00′00″ | 0°00′00″ |
| 5 | 72″02′08″ | 0°02′08″ |
| 6 | 60°07′07″ | 0°07′07″ |
| 7 | 51°39′16″ | 0°13′33″ |
| 8 | 45°20′10″ | 0°20′10″ |
| 9 | 40°24′54″ | 0°24′54″ |
| 10 | 36°29′40″ | 0°29′40″ |
| 15 | 24°42′18″ | 0°42′18″ |
| 20 | 18°44′56″ | 0°44′56″ |
| 25 | 15°08′03″ | 0°44′03″ |

Akadeemik E. S. Fjodorov tegi a. 1910 ettepaneku asendada punkt $C$ sirgete $OK$ ja $MN$ lõikepunktiga $C_1$ (joon. 3), kusjuures $OK$ on diameetri $AB$ keskristsirge, $M$ on kaare $\breve{BK}$ keskpunkt ja $N$ on raadiuse $OB$ keskpunkt. Kolmnurkade $OC_1N$ ja $LC_1M$ sarnasuse tõttu

$$OC_1 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Nurga $\alpha$ jaoks saame nüüd valemi




*Joonis 3.*

$$\cos \alpha = \frac{(n-4)\left[(3+2\sqrt{2})n+2\sqrt{n^2+4(1+2\sqrt{2})(n-2)}\right]}{n^2(5+2\sqrt{2})-16(n-2)}.$$

| $n$ | $\alpha$ ligikaudne väärtus | Absoluutne viga |
|---|---|---|
| 3 | 120°07′19″ | +0°07′19″ |
| 4 | 90°00′00″ | 0°00′00″ |
| 5 | 71°52′23″ | —0°07′37″ |
| 6 | 59°52′40″ | —0°07′20″ |
| 7 | 51°21′43″ | —0°04′00″ |
| 8 | 44°59′43″ | —0°00′07″ |
| 9 | 39°54′53″ | +0°05′07″ |
| 10 | 36°09′34″ | +0°09′34″ |
| 15 | 24°23′32″ | +0°23′32″ |
| 20 | 18°28′22″ | +0°28′22″ |
| 25 | 14°53′18″ | +0°29′18″ |
| 30 | 12°23′56″ | +0°23′56″ |

Tabelist ilmneb, et viga on absoluutväärtuselt minimaalne, kui $n = 4$ või $n = 8$, kusjuures $n = 8$ korral viga on väiksem kui de Bosse'i konstruktsiooni puhul.

**Kirjandus**

1. Гордон В. О., Черчение плоских и пространственных фигур (Пособие для учителей). М., 1951, стр. 69.
2. Зетель С. И., Деление окружности. «Математика в школе», 1956, № 6, стр. 4—8.
3. Кордемский Б. А., Деление окружности. «Математика в школе», 1953, № 1, стр. 50—51.
4. Школьник А. Г., Задача деления круга, М., 1961.
5. Perelman, J. I., Huvitav geomeetria, Tln., 1953, lk. 227.

# SUPERELLIPS[1]

M. Gardner

Kõikjal, nii kodus kui tänaval võib tsiviliseeritud inimene märgata kaht asjade kujundamise igivana vormi — ümmargust ja kandilist. Ümmarguse rooliga autod sõidavad ümmargustel ratastel mööda tänavaid, mis moodustavad sadu ristkülikuid. Hooned on ehitatud enamasti kandilistena, kuid nende juures võib kohata ka kumeraid aknaid või kupleid. Me lõunatame kandilise või ümmarguse laua taga, kandiline salvrätik põlvedel, sööme ümmarguselt taldrikult ja joome ringjoonelise ristlõikega klaasidest, seejärel võtab suitsetaja silindrikujulise sigareti ja kandilise tikutoosi, ka raha, millega tasutakse ristkülikukujulise arve järgi, on kandiline või ümmargune. Sportlased mängivad ümmargust palli kandilisel väljakul, tubaseid lauamänge aga mängitakse ümmarguste nuppudega ruudulisel laual. Iga trükitäht sellel ristkülikukujulisel leheküljel koosneb kumeratest kaartest ja sirglõikudest. Kuhu me ka ei vaataks, kõikjal näeme ruute, ringe ning nende afiinseid kujutisi — ristkülikuid ja ellipseid (ellipsi mõiste on ringjoone mõistest isegi üldisem, sest iga ringjoon näib ellipsina, kui teda vaadelda mingi nurga all).

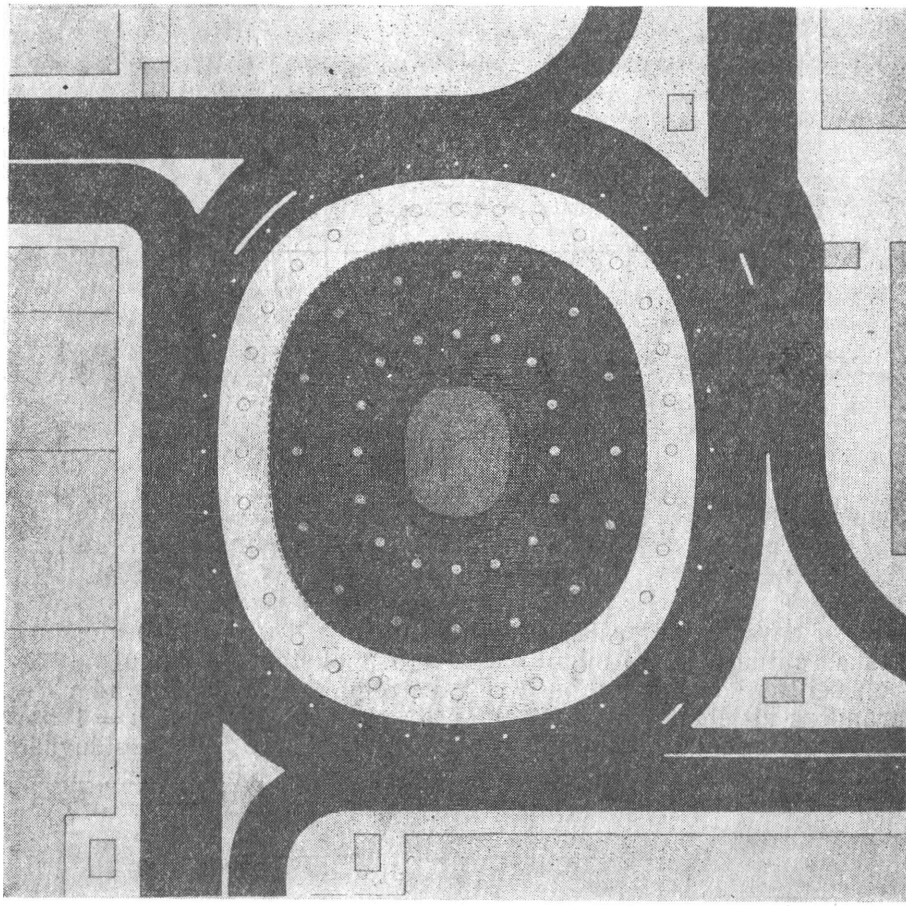
Hiljuti esitas taani kirjanik ja leidur Piet Hein (kellele muide on pühendatud Norbert Wieneri viimane teos) huvitava küsimuse: milline lihtne ja meeldiv kinnine kõver võiks mängida «kuldse keskmise» osa ühelt poolt ringi ja ellipsi, teiselt poolt ruudu ning ristküliku vahel.

See küsimus on seotud ühe keeruka probleemiga, mis kerkis Rootsis 1959. aastal. Stokholmi kesklinna rekonstrueerimisel tekkis vajadus rajada kahe laia peatänava ristumiskohale ristkülikukujuline, umbes 200 jardi[2] pikkune väljak. Väljaku keskele oli kavas ehitada ovaalne bassein purskkaevudega ja läbipaistva põhjaga, nii et päevavalgus valgustaks basseini all (allpool tänavapinda) asuvat ovaalse kujuga iseteeninduslikku sööklat. Söökla alla kavatseti ehitada veel kaks maa-alust korrust restorani, tantsusaali, riieteruumi ja köögi jaoks.

---

[1] Ajakirjast «*Scientific American*», sept. 1965, köide 213, nr. 3, lk. 222—232. A. Kolde ja M. Rahula tõlge.

[2] 1 jard = 91,44 cm. (Toim.)



Stokholmi maa-aluse restorani ja basseini plaan.

Sellise keskuse täpse kuju valikul tekkisidki rootsi arhitektidel raskused. Ellipsist loobuti, sest selle otsad segaksid sujuvat tänavaliiklust; samuti poleks ellips harmoonilises kooskõlas kandilise väljakuga. Mitmest erinevast kaarest koostatud ovaal oleks aga hoopis inetu ja sobimatu. Originaalse soovituse andiski Piet Hein.

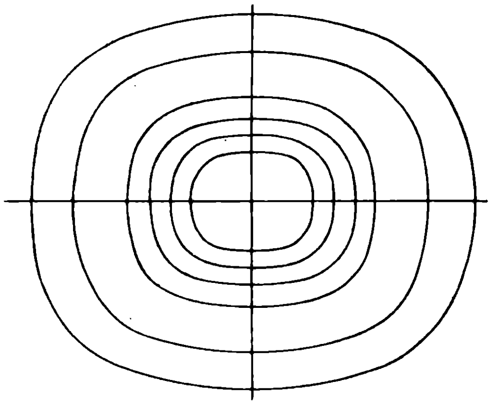
Vaatleme kõverate parve, mida ristkoordinaatides esitab võrrand [3]

---

[3] Originaalis toodud võrrand

$$\frac{x^n}{a^n}+\frac{y^n}{b^n}=1$$

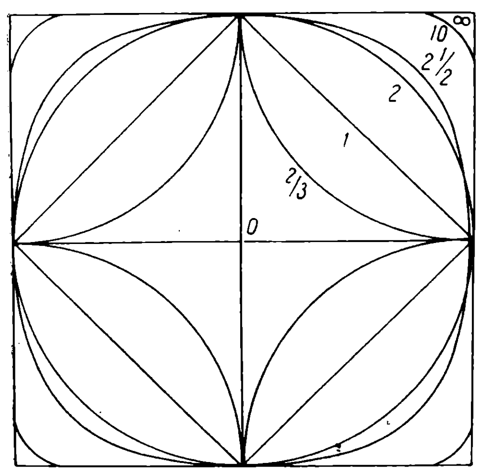
on ebatäpne — selline võrrand esitab keerulisemaid, nn. Lamé kõveraid (vt. Савелов А. А., Плоские кривые, М., 1960, lk. 179).



Kontsentrilised superellipsid.

$$\frac{|x|^n}{a^n} + \frac{|y|^n}{b^n} = 1, \qquad (1)$$

kus $n$ on suvaline positiivne arv. Suurusi $a > 0$ ja $b > 0$ nimetatakse antud $n$ puhul määratud kõvera pooltelgedeks. Juhul $n = 2$ on selleks kõveraks ellips. Kui $n$ kahaneb 2-st 1-ni, lähevad võrrandiga kirjeldatava ovaali otsad teravamaks, ja juhul $n = 1$ on kõverast saanud romb. Kui $n$ kahaneb 1-st 0-ni, siis koolduvad rombi küljed sissepoole. Kui aga $n$ kasvab 2-st lõpmatuseni, muutub ovaal üha «kandilisemaks» ja läheneb ristkülikule.

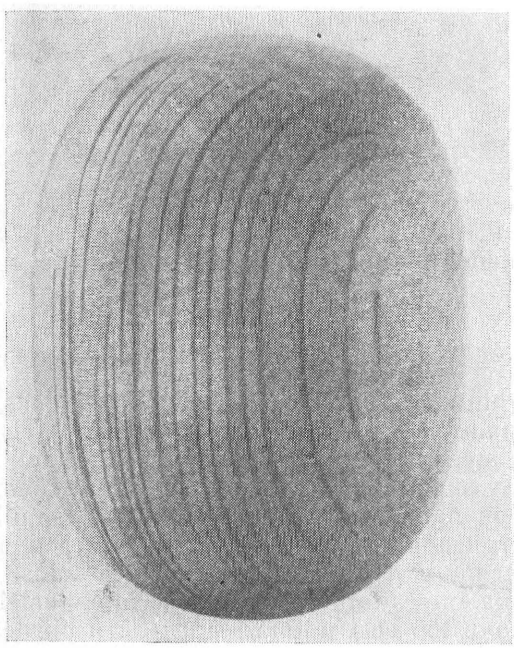



Sub- ja superringjooned (määratakse võrrandiga (1), milles $a = b$).

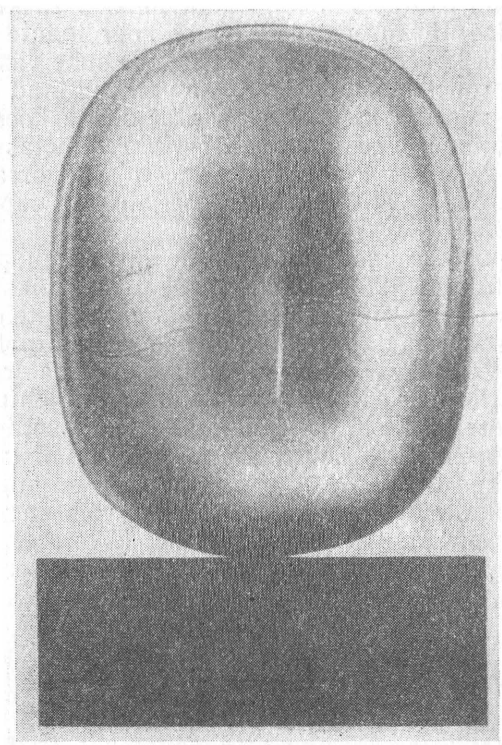
Milline kõver osutus siis kõige sobivamaks? Elektronarvuti abil leiti 15-kohalise täpsusega 400 paari koordinaate ja joonestati välja terve hulk kõveraid, mille pooltelgede suhe vastab Stokholmi keskväljaku proportsioonidele. Kõver ei tohtinud olla ei liiga ümmargune ega liiga kandiline, ta pidi olema kooskõlas ümbrusega ning mõjuma meeldivalt. Piet Hein nimetas vaadeldavaid kõveraid $n < 2$ korral «subellipsiteks», $n > 2$ korral «superellipsiteks». Stokholmis valiti uue keskuse aluseks superellips, mille korral $n = 5/2$.

See suur pooleldi maa-alune ehitis on praegu pooleli. Kui ta valmib (oletatavasti 1967. aastal), saab temast üks Rootsi suurepärasemaid vaatamisväärsusi (eriti matemaatikutele!).

Superellipseid kasutatakse ka paljude teiste probleemide lahendamisel, kus vajatakse «ümar-kandilise» kujuga jooni ja kujundeid. Taanis, Rootsis, Norras ja Soomes on tehtud palju ettepanekuid superelliptiliste laudade, istmete, kušettide, taldrikute, kandikute, hõbeesemete, riidemustrite jne. valmistamiseks. (Milleks on vajalikud nurgad?) Muide, lubamatu on superellipsit segi ajada «kartulikujuliste» kõveratega, mida võib sageli näha (näiteks televiisoriekraanid); nendel inetutel kõveratel puudub lihtne võrrand, mis garanteeriks nende esteetilise ühtsuse.



Puust supermuna.



Hõbedast supermuna.

Samal viisil, nagu ellipsist saadi superellips, võib saada uusi pindu suurendades astet ellipsoidi võrrandis:

$$\frac{|x|^2}{a^2} + \frac{|y|^2}{b^2} + \frac{|z|^2}{c^2} = 1. \tag{2}$$

Saadud kehi nimetab Piet Hein superellipsoidideks, juhul $a = b$ aga supermunadeks. Kui superellips on lähedane ristkülikule, siis superellipsoid meenutab ümmarguste nurkadega telliskivi.

Üks huvitav supermunade omadus on nende võime otstel püsti seista. Fotol on näha seisev puust supermuna, mille puhul $n = 5:2$ ja kõrguse-laiuse suhe on $4:3$. Teisel fotol näeme aga hõbedast super-muna $n = 5:2$ korral kõrguse-laiuse suhtega $6:5$. See supermuna on esitatud auhinnaks üliõpilastele väljapaistvaima teadusliku töö eest mitme teaduseharu piirdealalt.

# PRIMITIIVSED AUTOMEDIAANSED KOLMNURGAD

Jakob Gabovitš

Kolmnurka nimetatakse automediaanseks[1], kui ta on sarnane oma mediaanidest konstrueeritud kolmnurgaga.

Olgu kolmnurga külgede pikkused $a$, $b$ ja $c$, kusjuures $a < b < c$. Selle kolmnurga automediaansuseks on tarvilik ja piisav, et kehtiks seos

$$a^2 + c^2 = 2b^2, \tag{1}$$

mis on samaväärne nõudega, et külgede ruudud moodustaksid aritmeetilise progressiooni.

Kui valida automediaanse kolmnurga kahe külje pikkused ühisjagajata täisarvudena, siis valemist (1) arvutatav kolmas külg osutub tavaliselt irratsionaalseks (näiteks $a = 3$, $c = 5$ korral saame $b = \sqrt{17}$). Seepärast pakub huvi küsimus, kas eksisteerib primitiivseid automediaanseid kolmnurki, s. t. niisuguseid, mille külgede pikkused on ühisjagajata täisarvud. Aritmeetilises tõlgenduses taandub ülesanne diofantilise võrrandi (1) selliste lahendite $(a, b, c)$ leidmisele, et lõikudest pikkustega $a$, $b$ ja $c$ saaks konstrueerida kolmnurga. See aga tähendab, et tuleb leida võrrandi (1) niisugused lahendid, mis rahuldavad tingimusi

$$a < b < c, \qquad a + b > c. \tag{2}$$

Selles, et võrrandi (1) kõik lahendid ei rahulda tingimusi (2), võib veenduda näite $a = 1$, $b = 5$, $c = 7$ varal. Need arvud annavad küll võrrandi (1) lahendi, kuid kolmnurka külgedega 1, 5 ja 7 pole võimalik konstrueerida. Tõestame kõigepealt, et *kui primitiivne automediaanne kolmnurk eksisteerib, siis tema külgede pikkused avalduvad paaritute arvudena.* Eriti lihtne on näidata, et küljed $a$ ja $c$ peavad olema paarituarvulised. Tõepoolest, kui näiteks $a$ oleks paarisarvuline, siis võrrandist (1) järelduks ka $c$ paarisarvulisus. Sel juhul aga võrrandi vasak pool jagub neljaga ja $b^2$ järelikult kahega. Seega $b$ on paarisarvuline ning kolmnurk $(a, b, c)$ ei ole primitiivne.

---

[1] Vt. Zetel, S., Automediaansed kolmnurgad. Matemaatika ja kaasaeg, V, lk. 68—73.

Oletame nüüd, et $b$ on paarisarvuline. Võrrandist (1) järeldub siis, et $a^2+c^2$ jagub kaheksaga. See pole aga võimalik, sest kahe paaritu arvu $a$ ja $c$ ruutude summa jagub küll alati kahega, kuid ei jagu neljaga (ja ammugi mitte kaheksaga). Seega peab ka $b$ olema paarituarvuline.

Saadud tulemusest järeldub, et võrdustega

$$x=\frac{c+a}{2}, \quad y=\frac{c-a}{2} \tag{3}$$

defineeritud arvud $x$ ja $y$ on täisarvud (sest kahe paaritu arvu $c$ ja $a$ summa ja vahe on alati paarisarv), kusjuures $x>y$. Võrdustest (3) saame

$$a=x-y, \quad c=x+y. \tag{4}$$

Asetades $a$ ja $c$ need väärtused võrrandisse (1), omandab see Pythagorase võrrandi [2] kuju

$$x^2+y^2=b^2. \tag{5}$$

Arvudest $x$ ja $y$ peab siin üks olema paaritu, teine aga paarisarv (sest nii nende vahe kui ka summa peab võrduste (4) kohaselt olema paaritu). Olenevalt sellest, kumb arvudest $x$ ja $y$ on paarisarv, peame me eraldi vaatlema kahte juhtu.

Esimesel juhul ($x$ on paarisarv) avalduvad võrrandi (5) lahendid kujul [2]

$$x=2mn, \quad y=m^2-n^2, \quad b=m^2+n^2,$$

kus $m>n>0$ ning üks ühisjagajata arvudest $m$ ja $n$ on paarituarvuline. Siit saamegi võrrandi (1) lahendi:

$$a=(m+n)^2-2m^2, \quad b=m^2+n^2, \\ c=(m+n)^2-2n^2. \tag{6}$$

Nagu me varem selgitasime, peab see lahend rahuldama tingimusi (2). Esimene nendest tingimustest on alati täidetud, sest mistahes positiivsete $x$ ja $y$ korral kehtivad võrratused

$$x-y<\sqrt{x^2+y^2}<x+y;$$

arvestades seoseid (4) ja (5), saamegi siit $a<b<c$. Teine tingimustest (2) (võrdusi (6) arvesse võttes) on samaväärne võrratusega

$$m^2<3n^2.$$

Kokkuvõttes võime seega öelda, et kui $m$ ja $n$ rahuldavad tingimusi

---

[2] Vt. Gabovitš, J., Veidi kolmnurga aritmeetikat. Matemaatika ja kaasaeg, V, lk. 57—67.

$$n^2 < m^2 < 3n^2, \qquad (7)$$

siis leidub primitiivne automediaanne kolmnurk külgedega (6). Iga konkreetse $n$ valiku puhul on $m$ valik piiratud mitte ainult võrratustega (7), vaid ka asjaoluga, et arvudel $m$ ja $n$ on erinev «paarilisus». Nii näiteks, kui $n = 10$, siis tulevad arvesse vaid $m$ väärtused 11, 13 ja 17.

Teisel juhul ($y$ on paarisarv) peab olema

$$x = m^2 - n^2, \quad y = 2mn, \quad b = m^2 + n^2$$

ja võrrandi (1) lahend avaldub kujul

$$a = (m - n)^2 - 2n^2, \quad b = m^2 + n^2, \quad c = (m + n)^2 - 2n^2. \qquad (8)$$

Ka siin peab kehtima võrratus $a + b > c$. Valemeid (8) arvesse võttes saame

$$m^2 - 4mn + n^2 > 0.$$

Siit ja tingimusest $m > n$ järeldub, et peab olema

$$m > (2 + \sqrt{3})n \qquad (9)$$

ehk ligikaudu $m > 3{,}732\ n$. Kui viimane võrratus on rahuldatud, siis leidub primitiivne automediaanne kolmnurk külgedega (8).

Seosed (6)—(9) võimaldavad primitiivsete automediaansete kolmnurkade tabuleerimist etteantud piirini. Nii näiteks on alljärgnevas tabelis antud kõik sellised primitiivsed automediaansed kolmnurgad, mille külgede pikkused ei ületa arvu 200. Tabeli esimeses veerus on märgitud arvutusteks kasutatud valemi number,[3] järgnevas kahes veerus suuruste $m$ ja $n$ vastavad väärtused ning lõpuks kolmnurga küljed $a$, $b$ ja $c$.

| Valem | $m$ | $n$ | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|---|---|
| I | 3 | 2 | 7 | 13 | 17 |
| II | 4 | 1 | 7 | 17 | 23 |
| I | 4 | 3 | 17 | 25 | 31 |
| II | 6 | 1 | 23 | 37 | 47 |
| I | 5 | 4 | 31 | 41 | 49 |
| I | 6 | 5 | 49 | 61 | 71 |
| II | 8 | 1 | 47 | 65 | 79 |
| I | 7 | 6 | 71 | 85 | 97 |
| II | 9 | 2 | 41 | 85 | 113 |
| I | 8 | 5 | 41 | 89 | 119 |
| II | 10 | 1 | 79 | 101 | 119 |
| I | 8 | 7 | 97 | 113 | 127 |
| II | 11 | 2 | 73 | 125 | 161 |
| I | 9 | 8 | 127 | 145 | 161 |
| II | 12 | 1 | 119 | 145 | 167 |
| I | 10 | 7 | 89 | 149 | 191 |
| I | 10 | 9 | 161 | 181 | 199 |

[3] Valem (6) on tähistatud I, valem (8) — II.

## TRISEKTSIOON JA HÜPERBOOL

Vastukajana M. Rahula artiklile «Nurga trisektsioon hüperbooli abil» (Matemaatika ja kaasaeg, VI, lk. 52—53) saabus toimetusse kiri prof. N. Tšaikovskilt Lvovist. Kirjas märgitakse, et ülesande lahendus on originaalne ja võimaldab lihtsamini saavutada suuremat täpsust kui klassikaline Archimedese võte kahe märgiga joonlaua abil (selle kohta vt. «Matemaatika ja kaasaeg», VI, lk. 44). Ühtlasi annab N. Tšaikovski lihtsa algebralise tõestuse võrdhaarse hüperbooli sellele omadusele, millele tugineb M. Rahula lahendus: võrdhaarse hüperbooli $xy = 1$ kaht punkti $P(x_1, y_1)$ ja $Q(x_2, y_2)$ ühendava kõõlu keskpunkt $K\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ poolitab samal ajal sirgel $PQ$ hüperbooli asümptootide vahele jääva lõigu $AB$ (vt. «Matemaatika ja kaasaeg», VI, lk. 53, joon. 2).

Tõepoolest, sirge $PQ$ võrrandi

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

võib võrdusi $x_1y_1 = 1$, $x_2y_2 = 1$ kasutades teisendada kujule

$$\frac{x}{x_1 + x_2} + \frac{y}{y_1 + y_2} = 1.$$

(Kuidas on seda kõige lihtsam teha?) Seetõttu selle sirge ja koordinaattelgede lõikepunktideks on $A(x_1 + x_2, 0)$ ja $B(0, y_1 + y_2)$. Siit on kohe näha, et lõigu $AB$ keskpunktiks on samuti punkt $K$.

Toimetuse poolt märgime, et ka M. Rahula andis võrdhaarse hüperbooli mainitud omadusele esialgu algebralise tõestuse, kuid loobus sellest enam sünteetilise tõestuse kasuks, mis on paremas kooskõlas ülesande elementaargeomeetrilise iseloomuga.

# SOFIA KOVALEVSKAJA

A. Ruubel

Käesoleva aasta 10. veebruaril möödub 75 aastat kuulsa naismatemaatiku Sofia Kovalevskaja surmast. Sofia Kovalevskaja oli teadlane, kes võitis matemaatika ja mehhaanika alal üldise tunnustuse ja sai esimeseks naisprofessoriks. Ta oli ühtlasi ka kirjanik ja energiline teerajaja naistele kõrgema hariduse kättesaadavaks tegemisel. Tema elulugu annab kujuka pildi neist raskustest, millega tuli tol ajal nii Venemaal kui ka mujal maailmas võidelda naisel, kes tahtis saada kõrgemat haridust ja töötada teadusepõllul.

Sofia Kovalevskaja sündis 15. jaanuaril 1850. a. Moskva rikka mõisniku, suurtükiväe kindrali Vassili Korvin-Krukovski perekonnas. Ema Elisabeth (sünd. Schubert), rahvuselt sakslane, pärines teadlaste perekonnast. Nii tema isa kui ka isaisa Feodor Schubert (1758—1825) — tuntud astronoom ja matemaatik — olid mõlemad Vene TA akadeemikud.

Erru läinud, asus V. Korvin-Krukovski koos perekonnaga elama oma mõisa Palibinosse Vitebski kubermangus, kus mööduski Sofia Kovalevskaja lapsepõli. Sellest võib saada üsna kujuka pildi tema enese jutustuse «Mälestused lapsepõlvest» järgi. Isa hoidis kõrgel perekonnapea väärikust, eraldus kodus oma kabinetti ja puutus perekonnaga kokku vaid lõunalauas. Lastega ei tegelnud ka ema, kes end armastas näidata üksnes peole mineku eel, et lapsed võiksid imetleda tema ehetes säravat ilu.

Laste kasvatamine oli täielikult usaldatud lapsehoidja ja hiljem guvernantide hooleks. Hoidjaks oli lihtne heasüdamlik vene naine, kes lapsi armastas, kuid kellel nii puhtusest, korrast kui ka kasvatusküsimustest palju aimu ei olnud. (Prantslasest guvernandi halvustavad märkused said alati tõhusa vastulöögi lastehoidja sõnadevalingu näol.) Seetõttu lapsed (Sofia, temast 6 a. vanem Anjuta ja 3 a. noorem vend Fedja) kasvasid suurel määral omapead.

Kui Sofia oli 7-aastane, võeti tema guvernandiks inglanna miss Smith, kes lõi range korra majja. Uudne oli ülestõusmine täpselt kell 7, hommikune külma veega karastamine, uudseks olid ka pealelõunased poolteisetunnised jalutuskäigud ja paljud muud asjad. Eriti külmadel päevadel tuli jalutuskäigu asemel minna saali palli mängima. Need pallimängutunnid olid Sofiale ilusaimad hetked: ta ei mänginud siis palli, vaid luges suure õhinaga kirjandust raamatukogus, mis asetses saali kõrval. Lugeda sai ta muidugi väga väheseid guvernandi poolt valitud raamatuid. Sofias ärkas juba väga noorelt õe eeskujul luuletamise kirg. Kirja panna ta aga oma luuletusi ei saanud, sest tal puudus panipaik, kust guvernant neid poleks leidnud, leidmise korral oleks alanud nende mõnitavatooniline deklameerimine ning nöökimine lõunalauas. Pallimängutunnid said Sofiale ka ainsateks omaette vabadeks luuletamise ja luuletuste päheõppimise hetketeks.

Huvi matemaatika vastu ärkas Sofias alateadlikult juba väga noorelt. Ta ise jutustab selle kohta oma mälestustes huvitava episoodi. Mõisa kolimisel ja maja remontimisel ei jätkunud tapeete kõigile, tubadele ja lastetoa seintele said lehed Ostrogradski diferentsiaal- ja integraalarvutuse loengute litografeeritud konspektist. Sageli vaatles tüdrukuke huviga salapäraseid valemeid, püüdes mõista, kuidas nad üksteisele järgnevad. Kui tal 15-aastasena tuli õppida diferentsiaal- ja integraalarvutust, siis ei jõudnud tema õpetaja imestada, kui kiiresti Sofia omandas piirväärtuse ja tuletise mõisted ja valemid. «See oli tal kõik nagu enne teada,» ütles õpetaja.

Huvi matemaatika vastu äratas temas isa vend Pjotr, kes oli laialdaste teadmistega väga palju lugenud inimene. Onu polnud küll matemaatik, kuid tundis suurt lugupidamist matemaatika vastu ja andis seda oma sagedaste Palibinos viibimiste puhul edasi ka Sofiale, rääkides ringi kvadratuurist, asümptootidest ja teistest küsimustest, mis äratasid lapses huvi matemaatika kui kõrge ja salapärase teaduse vastu, mis avab tema tundjale uue iseväärse ilma. Sofia iseseisev loominguvõime avaldus juba järgmisest juhtumist. Tutvunud lausega ringi ümbermõõdu ja diameetri suhtest, andis Sofia sellele oma tõestuse. Kui õpetaja näitas, et on veel otsesem tee, punastus õpilane ja hakkas nutma.

Sofiale taheti anda haridus, mida oli kombeks anda tolleaegse kõrgema seltskonna tütarlastele. Et Sofial siiski õnnestus edasi õppida kõrgemat matemaatikat, tuli appi juhus. Isa tuttav, füüsikaprofessor Tõrtov tõi neile oma füüsika õpiku. Suur oli tema imestus, kui ta hiljem nägi, et 14-aastane tütarlaps luges huviga füüsikat ja kuigi ta trigonomeetriat polnud õppinud, oli ta andnud seal esinevatele mõningatele trigonomeetrilistele valemitele õige tõlgenduse. Prof. Tõrtov juhtis isa tähelepanu Sofia haruldastele võimetele matemaatika alal, ja kui ema talvel tütardega järjekordselt Peterburis viibis, lubati Sofial võtta matemaatikas eratunde. Tunniandja valik oli õnnelik: õpetaja A. N. Strannoljubski, Mereväe Akadeemias end täiendav merekooli matemaatikaõpetaja oli avara silmaringiga matemaatik ja laialdaste huvidega inimene.

Kuuekümnendate aastate — esimese revolutsioonilise situatsiooni ajajärgu uued ideed tungisid ka väikese Palibino mõisani. Need kandusid siia kihelkonna preestri poja kaudu, kes oli lõpetanud vaimuliku seminari, kuid keeldunud vastu võtmast preestri ametit. Darvini ideede suure austajana läks ta omal käel, isa toetuseta, ülikooli loodusteadust õppima. Kuulnud sellest, lõi Anjuta temaga salaja tutvuse. Temalt said õed Krukovskid ajakirju «Sovremennik», «Russkoje slovo» ja isegi ühe keelatud «Kolokoli» numbri, samuti raamatuid, mille kaudu tutvusid õed Darvini õpetusega ning revolutsiooniliste demokraatide Tšernõševski, Dobroljubovi, Pissarevi ja teiste ideedega. Sofia kirjutab oma mälestustes: «See oli väga õnnelik aeg. Meid haarasid need ideed väga, olime sügavalt veendunud, et kehtiv ühiskondlik kord ei või kaua kesta, ja nägime juba kujutluses uut aega, vabaduse ja üldise hariduse saamise aega. Me unistasime sellest.»

Raske oli naisel tol ajal omandada kõrgemat haridust, millest unistas Sofia. Venemaal oli keelatud võtta naisi ülikooli kuulajaiks. Välismaal olid võimalused küll mõnevõrra paremad, kuid vanemad ja tolleaegne ühiskondlik arvamus ei lubanud vallalistel tütarlastel välismaale õppima minna. Võimaluse saamiseks sõlmiti fiktiivseid abielusid. Tuttavad otsisid ka Anjuta jaoks sellise fiktiivse abiellumise võimaluse. Koos abielupaariga lootis välismaale pääseda ka Sofia. Kandidaadiks osutus Vladimir Kovalevski, kes tahtis välismaale loodusteadust õppima minna. Hiljem sai temast tuntud teadlane, kes lõi uue teadusharu — evolutsioonilise paleontoloogia.

Kovalevski tutvuski õdede Krukovskitega. Anjuta oli küll mõtte algataja, kuid lõi järsku kartma ja ei julgenud isa jutule minna. Sofia aga leidis, et asja nii jätta ei või, ning otsustas plaani ise täide viia. Fiktiivne abiellumine Sofiaga meeldis ka Vladimir Kovalevskile rohkem, sest Sofia huviala oli lähem Kovalevskī omale ja pealegi oli Sofial palju julget pealehakkamist ning energiat.

Sofia isa teatas Kovalevskile, et ta ei ole üldiselt selle abielu vastu, kuid soovitas, et noored enne teineteisega tutvuksid, ja lükkas otsustamise seetõttu esialgu edasi. Sofia otsustas kasutada kavalust. Ühel suurel perekonnapeol Peterburis Schubertite juures jäi Sofia kõigi suureks üllatuseks peolauda tulemata ja laskis teenijat külaliste kuuldes isale teatada, et ta ei saa tulla, kuna valmistub pulmadeks oma peigmehe Kovalevskiga. Et mitte piinlikku seisukorda sattuda, tegigi isa nüüd teatavaks oma tütre peatse abiellumise ja määras kindlaks pulmapäeva. 1868. aastal sõlmitigi abielu.

18-aastane Sofia oli nüüd iseseisev. Ta asus elama Peterburi ja kutsus enese juurde hiljem ka Anjuta. Et Vladimir Kovalevskil polnud kohe võimalik välismaale minna, siis püüdsid nad saada Sofiale loengute kuulamise võimalust Peterburis. Nad pöördusid kõigepealt kuulsa füsioloogi professor I. M. Setšenovi poole, kes oli nende tuttav. Vabade vaadetega inimesena pooldas ja toetas Setšenov naistele kõrgema hariduse andmist. Kuigi professor oli nõus, tuli ka tema loengule ikkagi minna nii, et kuuldused sellest ei läheks kohe juhtkonna kõrvu. Töötati välja plaan, mille järgi Sofia viidi sisse tagaukse kaudu rühma teadlaste ja vanemate üliõpilaste keskel. Nad istusid vähem märgatavale kohale ülemisse ritta. Kuid pikemat aega märkamatult loenguid külastada polnud võimalik. Professor Setšenov hakkas energiliselt taotlema Sofiale loengute kuulamise luba. Talle öeldi ära, viidates seda keelavale seadusele. Ainult pärast seda, kui Setšenov andis koguni ähvarduse töölt lahkuda, sai Sofia Kovalevskaja lõpuks erandlikult loa käia professori loengutel. Loengute kuulamist matemaatika alal, vaatamata kõigile püüdlustele, Peterburis korraldada ei õnnestunud.

1869. a. kevadel sõitsid Vladimir ja Sofia välismaale — Vladimir Viini, Sofia Heidelbergi. Kui Sofia läks Heidelbergi ülikooli endale loengutel käimise luba hankima, vastati talle algul põiklevalt, siis eitavalt. Sofia sai teada, et võõrastust äratas asjaolu, et tema — naine läks ise luba hankima. Tolleaegsete vaadete järgi oleks abielus naise asemel pidanud taotluse esitama tema mees. Nüüd kutsus Sofia Viinist oma abikaasa ning sellel õnnestuski saada Sofiale loengutel käimise luba. Vladimir Kovalevski leidis lahkemat vastuvõttu ja vastutulekut ka veel seetõttu, et tema vend Aleksander oli juba kuulus teadlane, keda tunti ka Heidelbergis.

Heidelbergis oli Sofia Kovalevskaja kolm semestrit, kuulates loenguid matemaatikute L. Köningsbergeri ning P. Du Bons Reymondi, füüsiku G. R. Kirchhoffi ja füsioloogi H. Helmholtzi juures.

Kovalevskitega koos sõitis välismaale ka Sofia õde Anjuta, kes peatus algul Heidelbergis. Ta uuris siin raamatukogus mitmesugust revolutsioonilist kirjandust ja sõitis siis Prantsusmaale, kus lülitus sealsesse elavasse töölisliikumisse. Pariisis töötas ta lihttöölisena, kirjanikuna ja ajakirjanikuna ühe revolutsioonilise ajalehe juures, abiellus arstiteaduse üliõpilase, tuntud revolutsionääri H. Jaclard'iga ja võttis koos abikaasaga aktiivselt osa Pariisi Kommuuni võitlustest 1871. a. (teda nimetab ka Marx ühes oma kirjas Engelsile). Anjuta tõttu satuvad Pariisi Kommuuni võitluspäevil Prantsusmaale ka Sofia ja Vladimir Kovalevski. Vladimir

*S. Kovalevskaja 1868. aastal.*

koos Anjuta ja Sofia isaga organiseerivad vangilangenud Jaclard'ile salajase põgenemise Vladimiri riietuses, Sofia aga hoolitseb haiglas haavatute eest.

Heidelbergist sõitis Sofia Kovalevskaja Berliini, et kuulata kuulsa matemaatiku Karl Weierstrassi loenguid. Berliinis ei õnnestunud tal aga saada loengute kuulamise luba. Seetõttu läks Kovalevskaja Weierstrassi juurde koju ja palus, et see töötaks temaga eraviisiliselt. Weierstrass oli tuntud kui naiste ülikoolis õppimise vastane. Ta oli siiski viisakas, andis Kovalevskajale prooviks mõned väga rasked ülesanded. Suur oli tema üllatus, kui Kovalevskaja lahendas need hiilgavalt. Sofia Kovalevskajast sai Weierstrassi lähim ja lugupeetavaim õpilane. Weierstrass kordas talle oma loenguid ja arutas uurimisel olevaid matemaatilisi probleeme.

Berliinis elas Kovalevskaja väga kitsastes materiaalsetes tingimustes, sest ta toetas ka Anjutat. Sofia Kovalevskaja õppis Weierstrassi juures neli aastat, sellest ajast oli ainult 1871. a. kevadel ja suvel Pariisis.

Teadusliku kraadi taotlemisel tuli Kovalevskajal kokku põrgata ootamatute juhuslike takistustega. Esimest selleks valmistatud tööd ei saanud ta esitada, sest Zürichi matemaatik H. A. Schwartz jõudis temast samade tulemuste avaldamisega ette. Doktori kraadi taotlemise asjus oli juba läbi räägitud Göttingeni ülikooli rektori matemaatik A. Clebschiga, kuid viimane suri just ajal, mil Kovalevskaja tahtis talle saata oma uue töö Abeli funktsioonidest. Kovalevskaja oli sellest kõigest väga löödud, kuid Weierstrassi õhutusel hakkas uuesti energiliselt tööle. Nii valmis tal kolm tööd: «Osatuletistega diferentsiaalvõrranditest», «Mõningate Abeli funktsioonide taandamisest elliptilistele funktsioonidele» ja «Saturni rõnga kujust». Esimeses töös antakse lausele, mida praegu tuntakse Cauchy-Kovalevskaja lause nime all, lihtsam tõestus kui Cauchy oma ja esitatakse selle lause lõplik kuju. Teises töös taandatakse mõningad integraalid lihtsamale kujule ja kolmandas töös täpsustatakse Laplace'i tulemust Saturni rõnga kohta ja saadakse selle rõnga ristlõikeks ellipsi asemel teatud ovaal.

1874. a. astus Weierstrass Göttingeni ülikoolis samme Sofia Kovalevskajale filosoofiadoktori kraadi andmiseks esitatud tööde põhjal, millest juba igaüht eraldi pidas Weierstrass doktoritöö vääriliseks. Kuna töid oli kolm ja nad said kõrge hinnangu osaliseks, andis Göttingeni ülikool Weierstrassi soovitusel Kovalevskajale doktori kraadi ilma sel puhul ettenähtud eksamiteta ja töö kaitsmiseta.

Kovalevskite perekond pöördus nüüd tagasi Peterburi. Vaatamata teaduslikule kraadile ei leidnud Sofia kui naine tööd ei kõrgemates õppeasutustes ega isegi Naiste Kõrgematel Kursustel, mis avati Peterburis 1878. a. ja mille organiseerimisele Sofia Kovalevskaja tõhusalt kaasa aitas. Ta hakkas töötama publitsistina, kirjutades populaarteaduslikke artikleid ja teatriarvustusi. Sel ajal liikus Kovalevskaja teadlaste ja kirjanike ringis, kuhu kuulusid Mendelejev, Setšenov, Butlerov, Tšebõšov, Stoletov, Turgenev, Dostojevski ja teised. Pärast tütre sündimist 1878. a. pühendus ta täielikult selle kasvatamisele. Matemaatikaga ta kodumaal peaaegu ei tegelnud. Seda mõjutas kogu tolleaegse Peterburi miljöö, kus Sofia Kovalevskaja mälestuste järgi valitsesid vaid ärilised huvid.

Matemaatika juurde tõi Sofia Kovalevskaja tagasi Tšebõšovi poolt temale tehtud ettepanek esineda ettekandega vene loodusteadlaste ja arstide konverentsil 1880. a. Peterburis. Sellel konverentsil oli koos palju teadlasi ja sellest ajast alates algas kirjavahetus Sofia Kovalevskaja ja Helsingi ülikooli professori G. Mittag-Leffleri vahel (säilinud 420 kirja, fotokoopiad neist on NSVL Teaduste Akadeemia arhiivis). Mittag-Leffler oli samuti endine Weierstrassi õpilane. Ta hindas kõrgelt Sofia Kovalevskaja võimeid ja hakkas energiliselt hoolitsema selle eest, et saada talle õppejõu kohta mõnes välismaa ülikoolis.

Varsti pärast konverentsi asusid Kovalevskid elama Moskvasse, kus Sofia otsustas uuesti anduda teaduslikule tööle. Ta tahtis siin sooritada magistri eksameid, kuid ei saanud selleks luba. Nimelt vastas Göttingeni doktori kraad Venemaal ainult kandidaadi kraadile, kuid sellele järgnesid siin veel magistri ja doktori kraadid. Et uuesti matemaatikasse süveneda, sõitis Kovalevskaja 1880. a. lühikeseks ajaks jälle Berliini Weierstrassi juurde.

1882. a. sõitis Sofia Kovalevskaja Pariisi, kus tutvus prantsuse matemaatikute C. Hermite'i, E. Picard'i ja teistega. Pärast seda kirjutas ta töö «Valguskiire murdumisest kristallides».

1883. a. sai traagiliselt surma tema abikaasa Vladimir Kovalevski. Selle teate peale Sofia haigestus ja tervenenud, pöördus kohe tagasi Moskvasse.

Samal 1883. aastal sai Kovalevskaja Mittag-Lefflerilt, kes oli hiljuti asutatud Stokholmi ülikooli rektor, ettepaneku tulla õppejõuks sellesse ülikooli. Ta võttis kutse rõõmuga vastu ja sõitis 1883. a. novembris Stokholmi. Seal luges ta ühe aasta vältel eradotsendina saksa keeles üht erikursust. Selle ajaga õppis ta ära rootsi keele niivõrd, et hakkas edaspidi loenguid pidama ainult rootsi keeles.

1884. a. valiti Kovalevskaja Stokholmi ülikooli matemaatika professoriks. Hiljem töötas ta samas ülikoolis ka mehhaanika professorina. Tingimused loominguliseks tööks olid Stokholmi ülikoolis eriti soodsad. Peale loengute ei olnud Kovalevskajal mingisugust muud õppetööd, loenguidki oli ainult 4 tundi nädalas, kuulajaid 17—18. Palk oli hea, 6000 krooni aastas. Õppetöö vaheajad, mida oli aastas kaks, veetis ta tavaliselt Nizzas. Stokholmi miljöö ja noore ülikooli vabameelne õhkkond olid soodsad loominguliseks tööks. Enam tagurlike vaadetega Upsala ülikooli ringkondades vaatasid paljud siiski vaenulikult niisugusele nähtusele nagu naise valimine professoriks. Kui Mittag-Leffler 1885. a. rääkis Sofia Kovalevskajale kavatsustest esitada ta Rootsi Teaduste Akadeemia akadeemikuks, siis soovitas Kovalevskaja ise seda edasi lükata, öeldes, et ta pole veel saanud oma töid üldsusele tutvustada nii nagu tarvis, mis võib põhjustada ühelt poolt pahameelt, teiselt poolt arvamist, et tema pooldajad teda naismatemaatikuna eriti soosivad ja temale väiksemaid nõudeid esitavad kui meestele.

1888. a. kirjutas Sofia Kovalevskaja oma põhilise teadusliku töö «Ülesanne jäiga keha pöörlemisest raskustungi mõjul ühe kinnituspunkti ümber». See teema oli paljude teadlaste huviobjektiks. Täielikult oli probleem seni läbi uuritud vaid ainult kahel erijuhul: sümmeetrilise keha juhul, kui raskuskese on pöördteljel, ja suvalise keha juhul, kui raskuskese on tugipunktiks. Pariisi Teaduste Akadeemia oli kuulutanud välja preemia selle ülesande lahenduse edasiviimise eest mingis olulises osas.

Kovalevskaja, keda see probleem juba ammu oli huvitanud, pühendus sellele ülesandele kogu hinge ja jõuga. Ühes sellest ajast säilinud kirjas ta kirjutab: «Minu pea on nüüd nii täis matemaatikat, et ma ei saa mõelda ega kõnelda millestki muust. Ma jõudsin teatud tulemusele ja pealegi väga meeldivale, nimelt juhu avastamisele, kus integreerimine on teostatav ultra-elliptiliste funktsioonide kaudu.» Sofia Kovalevskaja töötas sel ajal väga palju, väsis seejuures füüsiliselt ja ainult tõsine loomingurõõm aitas teda lõpuni vastu pidada. Töö valmis tähtpäevaks.

Võistlusele saabus 15 tööd ja preemia sai nendest ainult Sofia Kovalevskaja töö. Selles töös Kovalevskaja näitab ühe uue juhu, mille puhul lahendamine on täielikult teostatav. Preemia üleandmine toimus 24. detsembril 1888. a. Saadud tulemuste tähtsuse tõttu ja seetõttu, et see teema oli välja kuulutatud juba kolmandat korda, suurendati preemiat 3000 frangilt 5000 frangile.

1889. a. sai Kovalevskaja preemia Rootsi teaduste akadeemialt teise töö eest jäiga keha pöörlemise kohta.

Need Kovalevskaja tööd leidsid elavat vastukaja ka vene matemaatikute ja mehhaanikute hulgas. N. E. Žukovski andis Kovalevskaja juhu parameetritele geomeetrilise tõlgenduse, B. N. Delone ehitas Kovalevskaja güroskoobi mudeli. Gorjatsev, Tšaplõgin, Suslov jt. teostasid rea uurimusi seoses samade küsimustega. Kovalevskaja sai üldtuntuks kogu matemaatika ja mehhaanika teaduseilmas. Ta oli tihedas kirjavahetuses mitmete tähtsate teadlastega paljudest riikidest.

Tšebõšovi, Imšenetzki ja Bunjakovski ettepanekul valiti Sofia Kovalevskaja novembris 1889. a. Peterburi Teaduste Akadeemia korrespondeerivaks liikmeks. Sellele vaatamata ei õnnestunud Kovalevskajal ka nüüd saada oma erialale vastavat kohta kodumaal. Üks tema sugulastest, A. I. Kossitz tahtis teda tagasi tuua Venemaale ning pöördus Peterburi Teaduste Akadeemia presidendi poole palvega Sofia Kovalevskajale tema erialale vastava töö võimaldamiseks Venemaal, mõeldes kohta Teaduste Akadeemia juures. Akadeemia presidendi K. Vesselovski vastus algab pika kiidulauluga Sofia Kovalevskajale (kus räägitakse tema erakordsest andekusest, hiilgavatest võimetest teaduse alal, võidetud tunnustusest ja kuulsusest, mida täielikult on õigustanud tema edukas töö professorina), lõpeb aga väitega, et Vene ülikoolides on naiste vastuvõtmine ülikooli kateedritesse keelatud, ükskõik missugused ka ei oleks nende võimed ja teadmised. Seepärast ei leiduvat Venemaal Sofia Kovalevskaja jaoks kohta, mis oleks sama kõrge ja sama hästi tasutav kui koht, mis tal on välismaal. Sofia Kovalevskaja jäigi elama Rootsi.

Sofia Kovalevskaja ja tema õde Anjuta olid mõlemad ka kirjanikud. Tütarlapsena kirjutas Anjuta kord jutustuse ja saatis selle vanemate teadmata ühe teenija vahetalitusel ajakirjale «Epohha», kus toimetajaks oli Dostojevski. Kui see jutustus trükiti ja saabus honorar, tuli sellest väga suur pahandus. Tutvus Dostojevskiga oli aga loodud. Temale näitas ka noorukene Sofia oma töid, mis said Dostojevskilt kiitva hinnangu. Hiljem jätkasid mõlemad õed kirjanduslikku tegevust. Sofia Kovalevskaja sai selleks kõige rohkem aega nüüd, kus ta matemaatika alal oli lõpetanud oma tähtsad uurimused. Kirjanikest oli ta eriti tihedas kontaktis Mittag-Leffleri õe kirjanik Edgren-Lefleriga ja Ellen Keiga. Kovalevskajale omane poolehoid eesrindlike revolutsiooniliste demokraatide ideedele, kaasaaitamine revolutsionääridele ja kaastunne oma meelsuse tõttu tsaarivalitsuse poolt tagakiusatutele, väljendus ka tema kirjanduslikus loomingus. Edgren-Leffler koos Sofia Kovalevskajaga kirjutasid draama «Võitlus õnne eest», mis lõpeb väljendusega «Ühenduses on jõud». Rootsis kirjutas Sofia ka «Mälestused lapsepõlvest», milles ta kirjeldab laste kasvatust, vahekorda teenritega, andes kujuka pildi tolleaegsest vene mõisast. Tema «Jutustuse Poola ülestõusust» peategelaseks on noor poolakas — Poola vabaduse eest võitleja. Kovalevskaja romaan «Nihilist» oli tsaari-Venemaal koguni keelatud raamatute nimekirjas. Selles jutustatakse tütarlapsest, kes tahtis tuua kasu rahvale ja võttis osa revolutsioonilisest tegevusest. Romaani kangelane on tõsielust ja tegelikult viis Kovalevskaja ise peategelase prototüübi kontakti revolutsiooniliste ringkondadega. Sofia Kovalevskaja ütleb romaanis: «Meie ajal peab iga korralik inimene huvituma ainult lühimast teest, mis viib ühise eesmärgi saavutamisele. Venelase jaoks niisuguseks eesmärgiks võib olla üksnes sotsiaalne ja poliitiline revolutsioon.»

Kovalevskaja kirjutas veel artikli Saltõkov-Štšedrinist, jutustused «Kolm päeva talupoegade ülikoolis Rootsis», «Romaan Rivieral», «Mälestusi G. Elliott'ist» ning teisi jutustusi ja luuletusi. Kõigis neis avaldub kirjaniku sügav ja elav kujutamisvõime, lai huvidering ning võime tungida tegelaste hingeellu.

1890. a. talvisel õppetöö vaheajal oli Sofia Kovalevskaja Nizzas, tagasisõidul Rootsi külmetus ta ja haigestus raskesti. Surm saabus ootamatult kiiresti. Ta suri 10. veebruaril 1891. a. ja maeti Stokholmi. Teda oli saatma tulnud suurearvuline teadlaste ja kirjanike pere Rootsist ja väljastpoolt. Sofia Kovalevskajast on kirjutatud mitmeid mälestusi. Iseloomulik on, et Mittag-Leffleri mälestusi taheti trükkida ka Venemaal, kuid tsaari-Venemaal seda ei lubatud.

Sofia Kovalevskaja jättis endast jäädava mälestuse nii teaduses kui kirjanduspõllul ning järjekindla energilise teerajajana naiste raskel võitlusteel kõrgemale haridusele. Ta näitas, mida naine võib ja suudab.

## MIDA VÕIB KUULDA EKSAMIL

Küsimus: «Millega võrdub $a^3 - a^3$?»
Vastus: «Ühega.»
Küsimus: «Aga millega võrdub 27 — 27?»
Vastus: «Muidugi nulliga.»
Küsimus: «Aga millega võrdub $3^3 - 3^3$?»
Vastus: «Ühega.»
Küsimus: «Kuid $3^3 = 27$. Kumb vastus siis õige on?»
Vastus: «Mõlemad, oleneb ainult sellest, kuidas võtta.»

* *
*

Küsimus: «Mis on kujutav geomeetria?»
Vastus: «Kujutava geomeetria ülesandeks on anda ruumilistest kujunditest veel ruumilisemaid kujutusi.»

* *
*

Küsimus: «Mida nimetatakse enesekaasoperaatoriks?»
Vastus: «Enesekaasoperaatoriks nimetatakse niisugust operaatorit, mis võrdub iseendaga.»
Küsimus: «Aga nimetage mõni operaator, mis ei võrdu iseendaga.»
Vastus (pärast pikka mõtlemist): «Mitte ei tule meelde. Hommikul kui õppisin, siis ma veel teadsin, aga . . .»

## MIS ON TÕENÄOSUS?[1]

E. Tiit

### II Tõenäosuse statistiline mõiste.

**1. Tõenäosusteooria varasematest rakendustest.** Tõenäosusteooria on leidnud praktilist rakendamist juba oma arengu algetappidest peale. Jättes kõrvale hasartmängudega seotud probleemid, näeme tõenäosusteooria tulemuste kasutamist inimese praktilises tegevuses alates XVII sajandist.

Nii kasutas hollandi matemaatik Jan de Witt (1625—1672) 1671. aastal tõenäosusteooria äsja avaldatud tulemusi (keskväärtust) eluaegse rendi arvutamiseks. Sama tegi 1693. aastal ka sakslane Edmund Halley (1656—1742), kelle tulemused ületavad ta eelkäija omi konkreetsuse ja usutavuse poolest. Lähteandmeid Halley arvutusteks sisaldas tema enese poolt koostatud nn. *suremustabel*, mis oli saadud Breslau (praegu Wroclaw) linna statsionaarse elanikkonna kohta aastail 1687—1691. Halley tabeli algus näeb välja järgmiselt:

| | |
|---|---|
| 1 | 1000 |
| 2 | 855 |
| 3 | 798 |
| 4 | 760 |
| . . . . . . . | . . . . . . . |

Tabeli vasakpoolsesse veergu on paigutatud eluaastad (muide, pole päris selge, kas Halley mõtleb siin eluaasta algust või lõppu, s. t. kas esimeses reas on andmed vastsündinute või 1-aastaste laste kohta), parempoolsesse aga vaadeldud 1000 inimese hulgast vastava eani elanud inimeste keskmine arv.

Eluaegse rendi arvutamisel kasutas Halley tabeli parempoolses veerus paiknevaid arve *vastava vanuseni elamise tõenäosustena*, leides nende põhjal ka vanuseni $n+m$ elamise *tingliku tõenäosuse* tingimusel, et inimene on elanud vanuseni $n$. Korrutades vanuseni $n+m$ elamise tingliku tõenäosuse ettenähtud rendisummaga $m$ aasta pärast ning summeerides need korrutised kõik-

[1] Käesoleva artikli algus vt. Matemaatika ja kaasaeg, IX, lk. 74—90.

võimalike $m$ väärtuste korral (piiriks on siin maksimaalne võimalik eluiga $n+m$), leiab Halley eluajal makstava rendisumma keskväärtuse, mille soovitabki lugeda eluaegse rendi suuruseks. Halley tabeleid kasutati ka leskede ja orbude abistamiskassa asutamisel 1699. aastal Londonis.

Tõenäosusteooria üheks teiseks levinumaks rakendusalaks XVII—XVIII sajandil oli õigusteadus. Kuigi sellelaadiliste probleemidega tegelesid mitmedki nimekad matemaatikud (J. Caramuel, Nicolaus Bernoulli), olid saadud tulemused ometi väga kaheldava väärtusega. Veelgi viljatumaks osutusid katsed rakendada tõenäosusteooriat ennustamisel. Kurioosse näitena sellest valdkonnast võib märkida John Craigi 1699. aastal ilmunud arutlust, mille põhjal aastaks 3150 lakkab eksisteerimast ristiusk ning saabub ka maailma lõpp.

Tekib loomulik küsimus: milliste ülesannete lahendamisel on tõenäosusteooria tulemuste rakendamine õigustatud, milliste puhul aga on nende tulemuste rakendamine ebaõige või vähemalt kahtlane?

Vastus sellele küsimusele anti alles paar sajandit hiljem *statistilise tõenäosuse* mõiste range defineerimise tulemusena. Vahepealse perioodi vältel aga laienesid tõenäosusteooria rakendusalad ning teooria ise rikastus — suurelt osalt praktika nõudeil — paljude uute tulemustega.

XVII—XVIII sajandist peale esitavad tõenäosusteooriale probleeme ka loodusteadused. Esimestena hakkasid intensiivselt arenema astronoomia ja geodeesia. Nendele teadustele, mis baseeruvad ulatuslikel vaatlustel (tollal pealegi väga ebatäiuslike instrumentidega) oli eluliselt tähtis lahendada probleem, kuidas saada ebatäpsete mõõtmistulemuste põhjal võimalikult täpselt teada mõõdetava suuruse õiget väärtust. Selle ülesande lahendamise jälgimiseks on meil tarvis tutvuda kaasaegse tõenäosusteooria ühe põhimõiste — juhusliku muutujaga.

**2. Juhuslik muutuja** (juhuslik suurus). Küllap on iga lugeja märganud, et püüdes korduvalt mingit suurust eriti täpselt mõõta, saame erinevatel mõõtmistel üldiselt erinevad tulemused (mis, tõsi küll, võivad olla üksteisele kaunis lähedased). Mõõtmise tulemus sõltub paljudest teguritest: välistingimustest (temperatuur, õhurõhk, tuul, valgustus), mõõtjast (väsimus, meeleolu), instrumendist jne. Kokkuvõttes ütleksime: mõõtmistulemus sõltub *juhusest* — ta on juhuslik suurus. Üldiselt *nimetame juhuslikuks muutujaks muutuvat suurust, mis võib sõltuvalt juhusest omandada erinevaid reaalarvulisi väärtusi.* Mõningate lihtsate juhuslike muutujatega oleme me juba kokku puutunud. Nii oli juhuslikuks muutujaks täringuviskel saadav silmade arv $X_1$, see võib omandada väärtusi 1, 2, 3, 4, 5 ja 6. Samuti on $n$ täringu viskel saadav silmade arv $X_n$ juhuslik muutuja; $X_n$ väärtuseks on $n, n+1, \ldots, 6n$. Juhuslik muutuja on ka $n$-kordsel rahaviskel saadav vappide arv

$Y_n$, mis võib omandada väärtusi 0, 1, 2, ..., $n$; juhuslik muutuja on loteriivõit $Z$, mille suuruseks võib olla 0, 10, 100, 1000 ja 10 000 rbl.

Juhusliku muutuja iseloomustamiseks on vähe sellest, kui me teame, missuguseid väärtusi ta võib omandada. Meil on tarvis teada ka seda, kuivõrd tõenäoline on ühe või teise väärtuse esinemine. Pole ju kaugeltki ükskõik, kas loteriil on 10 000-rublase võidu saavutamise tõenäosus 0,00001 või 0,5!

Kui juhuslik muutuja $X$ omandab lõpliku hulga väärtusi $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$, siis võime defineerida sündmused $X = x_1$, $X = x_2$, ..., $X = x_n$; sellised sündmused on üksteist välistavad ning moodustavad täieliku sündmuste süsteemi (sest iga juhuslik muutuja omandab alati ühe ja ainult ühe väärtuse kõigi oma võimalike väärtuste hulgast). Sündmuste $X = x_1$, $X = x_2$, ..., $X = x_n$ tõenäosuste $P(X = x_1) = p_1$, $P(X = x_2) = p_2$, ..., $P(X = x_n) = p_n$ hulka nimetatakse *juhusliku muutuja X jaotuseks.* Jaotus on üks tähtsamaid juhusliku muutuja karakteristikuid. Sageli esitatakse jaotus tabelina:

$X_2$:

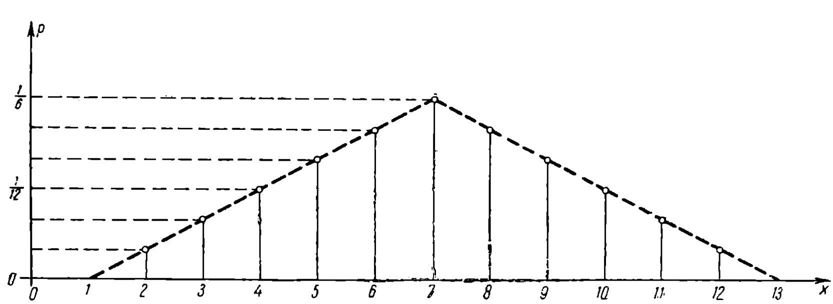
| $x_i$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{18}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{18}$ | $\frac{1}{36}$ |

$Z$:

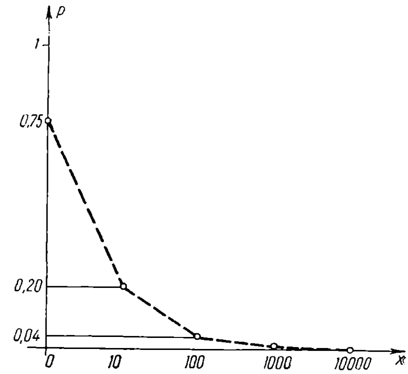
| $x_i$ | 0 | 10 | 100 | 1000 | 10000 |
|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0,75 | 0,20 | 0,04 | 0,008 | 0,002 |

või ka graafikuna (vt. joon. 1 ja 2). Sellistel graafikutel (nagu ka binomiaaljaotuse graafikul) on määratud ainult lõplik arv punkte — nimelt need, mille abstsissideks on juhusliku muutuja võimalikud väärtused. Mõnikord aga ühendatakse need punktid ülevaatlikkuse mõttes pideva joonega (meie joonisel punktiir).

Mõningal juhul on jaotus esitatav ka valemina: nii on teata-




*Joonis 1.*




*Joonis 2.*

vasti binomiaaljaotus (sündmuse $A$ esinemiste arvu $Y_n$ jaotus $n$ katse korral) esitatav valemiga

$$P(Y_n = k) = C_n^k p^k q^{n-k} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

(p on sündmuse $A$ esinemise tõenäosus ühel katsel, $q = 1 - p$). Defineerime juhusliku muutuja $U$ järgmiselt: viskame münti seni, kuni langeb peale vapipool. Viimase viske järjekorranumber olgu $U$ väärtuseks. $U$ jaotus on siis esitatav valemiga

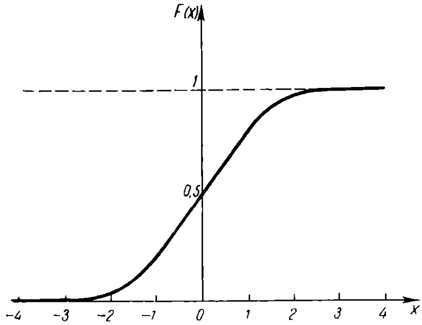
$$P(U = k) = 2^{-k} \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Nagu nägime, võib ka lõpmatu hulga väärtustega juhusliku muutuja jaoks mõnikord esitada jaotuse (kuid mitte tabelina!). Alati ei ole see aga võimalik,[2] eriti siis, kui juhuslik muutuja võib omandada mistahes reaalarvulise väärtuse mingist vahemikust; sellist juhuslikku muutujat nimetatakse *pidevaks juhuslikuks muutujaks.* Niisuguste juhuslike muutujate iseloomustamiseks on defineeritud reaalarvulise argumendiga *jaotusfunktsioon* $F_X(x)$:

$$F_X(x) = P(X < x),$$

s. t. *juhusliku muutuja $X$ jaotusfunktsiooni väärtuseks argumendi $x$ korral* (kohal $x$) *on tõenäosus selleks, et juhusliku muutuja $X$ väärtus on väiksem kui $x$. Näeme* (vt. joonis 3), et jaotusfunktsiooni väärtused (tõenäosuse väärtused) võivad muutuda ainult 0 ja 1 vahel, kusjuures siis, kui $x$ on väiksem juhusliku muutuja $X$ minimaalsest väärtusest (kui sellist üldse eksisteerib), on $F_X(x) = 0$, aga kui $x$ on suurem $X$-i maksimaalväärtusest (mis üldiselt ei tarvitse eksisteerida), siis $F_X(x) = 1$; alati

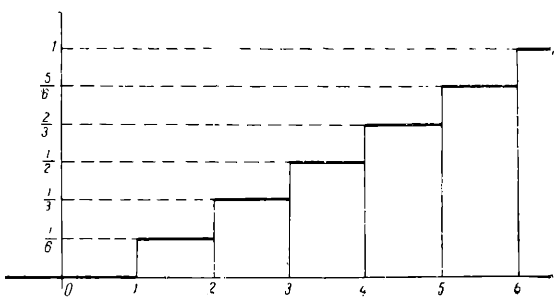
[2] Täpsemalt, jaotus on defineeritud küll iga juhusliku muutuja jaoks, kuid ta ei ole alati ei valemi, graafiku ega ka tabelina hõlpsasti esitatav.




*Joonis 3.*

$$\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0, \qquad \lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1.$$

Kui $x_1 < x_2$, siis alati $F_X(x_1) \leqslant F_X(x_2)$. Jaotusfunktsiooni võib defineerida ka lõpliku hulga väärtustega juhuslike muutujate jaoks; nende puhul on aga jaotusfunktsiooniks treppfunktsioon (vt. joon. 4, kus on kujutatud $F_{X_1}(x)$).

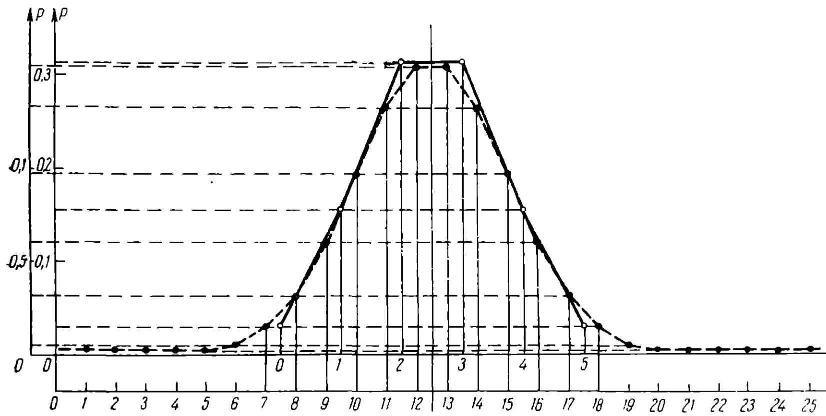



*Joonis 4.*

Pidevate juhuslike muutujate iseloomustamiseks on defineeritud veel teine funktsioon, mis sarnaneb mõnes mõttes diskreetse juhusliku muutuja jaotusega — nimelt *tõenäosuse tihedus.*

Paneme tähele, et kui juhusliku muutuja võimalike väärtuste arv suureneb, siis reeglina iga üksiku väärtuse esinemise tõenäosus väheneb — jaotuse graafik (sama mastaabi korral) muutub lamedamaks. Et jaotuse tõenäosuste summa on alati võrdne ühega, siis on intuitiivselt selge, et pideval juhuslikul muutujal on *peaaegu iga*[3] üksiku väärtuse omandamise tõenäosus 0.

[3] S. t. välja arvatud ülimalt loenduv hulk punkte.




*Joonis 5.*

Binomiaaljaotuse graafikuid saab aga hästi võrrelda (vt. joon. 5), kui me katsete arvu $n$ suurendamisel — see tähendab aga juhusliku muutuja võimalike väärtuste arvu suurendamist — muudame ka graafiku mastaapi, ja nimelt selliselt, et tegelikult tulevad võrdlemisele suhted

$$\frac{P(Y_n = x_k)}{x_{k+1} - x_k} = \frac{F_{Y_n}(x_{k+1}) - F_{Y_n}(x_n)}{x_{k+1} - x_k}$$

ja

$$\frac{P(Y_{n2} = x_{k'})}{x_{k'+1} - x_{k'}} = \frac{F_{Y_{n2}}(x_{k'+1}) - F_{Y_{n2}}(x_{k'})}{x_{k'+1} - x_{k'}},$$

s. t. me iseloomustame oma juhuslikke muutujaid suhte

$$\frac{F_Y(x+\Delta x) - F_Y(x)}{\Delta x}$$

abil. Analoogiliselt võiksime pidevat juhuslikku muutujat $V$ iseloomustada suhte

$$\frac{F_V(x+\Delta x) - F_V(x)}{\Delta x}$$

piirväärtuse abil $\Delta x$ lähenemisel nullile, kui selline piirväärtus vaid eksisteerib. *Suurust*

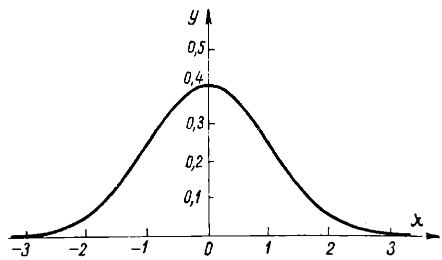
$$F_V(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F_V(x+\Delta x) - F_V(x)}{\Delta x} = \frac{d}{dx} F_V(x)$$

*nimetatakse pideva juhusliku muutuja tõenäosuse tiheduseks.* Näeme, et tõenäosuse tihedus eksisteerib parajasti niisugustel juhuslikel muutujatel, mille jaotusfunktsioon on diferentseeruv.

Osutub, et alati

$$f_V(x) \geqslant 0.$$

Tõenäosuse tihedust kirjeldab graafiliselt kõver, mille alune pindala on alati võrdne ühega; seega väga suurte ja väga väikeste $x$ väärtuste korral läheneb $f_V(x)$ graafik abstsissteljele (vt. joon. 6).




*Joonis 6.*

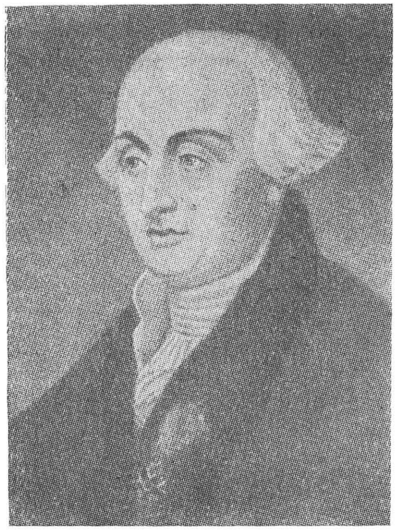
Juhuslikke muutujaid iseloomustab ka terve rida arvulisi karakteristikuid. Meile juba tuttav keskväärtus (matemaatiline ootus) on nende hulgast üks tähtsamaid. Juhusliku muutuja $X$ keskväärtust tähistame sümboliga $E(X)$; diskreetse juhusliku muutuja keskväärtus avaldub jaotuse kaudu:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \quad \text{või} \quad E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i x_i, \tag{1}$$

aga pideva juhusliku muutuja keskväärtus tõenäosuse tiheduse kaudu:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx. \tag{2}$$

3. **Vaatlusandmete töötlemine.** Esimesed matemaatikud, kes pöörasid tähelepanu vaatlusandmete töötlemisele, olid inglased Roger Cotes (1682—1716) ja Thomas Simpson (1710—1761). Nad soovitasid praktilises astronoomias mõõdetava suuruse väärtuseks lugeda terve rea korduvalt teostatud mõõtmiste tulemuste aritmeetilist keskmist. Tuleb märkida, et samal põhimõttel toimitakse sageli praegugi: mõõtmisi sooritatakse (kui see on võimalik) korduvalt ning mõõdetava suuruse väärtuseks loetakse saadud tulemuste aritmeetilist keskmist.



*Joseph Louis Lagrange.*

Järgmine töö vaatlusandmete töötlemise teooriast kuulub tuntud prantsuse matemaatikule Joseph Louis L a g r a n g e'ile (1736—1813), kes matemaatiliselt analüüsis (1770) Simpsoni eeskirja õigustatust mitmesugustel eeldustel. Peamiseks raskuseks oli siinjuures asjaolu, et vaatlustulemuste jaotus ei olnud teada. Kuid juhuslik muutuja on mitte üksnes mõõtmistulemus $X$, vaid ka mõõtmisviga $U$, mis avaldub kujul

$$U = X - a,$$

kus $a$ on mõõdetava suuruse täpne väärtus (mis on meile tundmatu, kuid mida me mõõtmiste teel püüame võimalikult täpselt hinnata). Kui on teada juhusliku muutuja $U$ jaotus (jaotusfunktsioon), siis on lihtne leida ka $X$ jaotust ning vastupidi. Seetõttu ongi põhilise tähtsusega küsimuseks vaatlusandmete töötlemisel vaatlusvigade jaotuse uurimine, millele terve rida matemaatikuid järgnevate aastakümnete vältel tähelepanu pühendas.

Lagrange vaatles näiteks järgmisi vigade jaotusi:

| $-\alpha$ | $-\alpha+1$ | $-\alpha+2$ | ... | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | ... | $\alpha$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $k$ | $2k$ | $3k$ | | $\alpha k$ | $(\alpha+1)k$ | $\alpha k$ | $(\alpha-1)k$ | | $k$ |

(3)

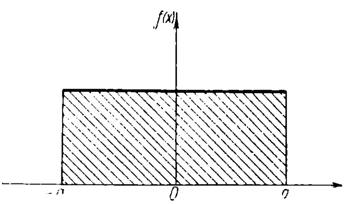
kusjuures konstant $k$ määratakse tingimusest, et jaotuse tõenäosuste summa võrdub ühega[4], s. t. (vt. joon. 1)

$$2(k+2k+\ldots+ak)+(a+1)k=k(a+1)^2=1,$$

$$k=\frac{1}{(a+1)^2}; \tag{4}$$

ning ühtlast jaotust (vt. joon. 7), mis on määratud tõenäosuse tihedusega

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2a}, & -a<x<a,\\ 0, & |x|>a.\end{cases} \tag{5}$$



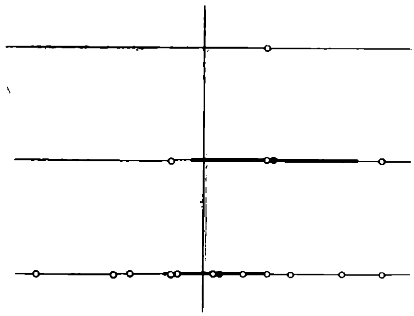
*Joonis 7.*

Eeldades, et vaatlusvigade jaotus on määratud kas seostega (3) ja (4) või (5), lahendas Lagrange praktikas väga olulise probleemi: nimelt ta leidis tõenäosuse selleks, et mõõdetava suuruse väärtus ei erineks mõõtmistulemuste aritmeetilisest keskmisest rohkem kui etteantud suuruse $\delta$ võrra. Ei ole ju mingisugust praktilist tähendust väitel, et mingi mõõdetava suuruse väärtus on $a$, kui pole teada, millise tõenäosusega võib otsitav väärtus tegelikult $a$-st ühe või teise suuruse võrra erineda. Hoopiski sisukam on väide, et mõõdetava suuruse väärtus erineb tõenäosusega $1-\varepsilon$ (kus $\varepsilon$ peab olema küllalt väike, näiteks 0,01 või 0,05) $a$-st vähem kui $\delta$ võrra, s. t. mõõdetava suuruse *$\varepsilon$-usaldatavuspiirkonnaks* on vahemik $(a-\delta, a+\delta)$. Joonisel 8 on kujutatud mingi suuruse $a$ mõõtmistulemused 1-st, 3-st ja 10-st mõõtmisest koosnevate seeriate korral. Valge rõngaga on märgitud üksikud mõõtmistulemused, musta rõngaga — vastava seeria aritmeetilised keskmised ja jämedama lõiguga on teljele kantud usaldatavuspiirkond (mingi *usaldatavusnivoo* $\varepsilon$ korral). Usaldatavuspiirkond sõltub vigade jaotusest, kuid on alati sama nivoo korral seda väiksem, mida rohkem on vaatlustulemusi, s. t. seda täpsemini saame siis mõõdetud tulemust hinnata.

Vaatlusvigade jaotust Lagrange'il ei õnnestunud määrata. Sama probleemi uuris ka Jacob Bernoulli vennapoeg David

[4] Sellist jaotust vaatles esmakordselt Simpson; tema järgi nimetati seda jaotust Simpsoni jaotuseks; kuid praegu mõistetakse Simpsoni jaotuse all enamasti vaadeldava jaotuse pidevat analoogi, mille tõenäosuse tihedus on määratud valemiga

$$f(x)=\begin{cases}x+1, & -1<x<0,\\ 1, & x=0,\\ 1-x, & 0<x<1.\end{cases}$$

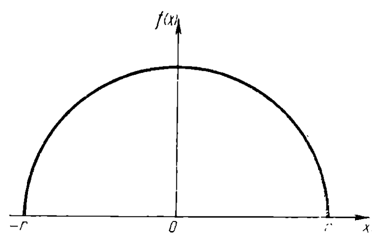


*Joonis 8.*

Bernoulli (1760—1782), kes töötas tollal Peterburi Teaduste Akadeemias. D. Bernoulli märkis õigesti, et suuri vaatlusvigu esineb harvemini, väiksema tõenäosusega kui väikesi. Sellest lähtudes luges Daniel Bernoulli vea $x$ esinemise tõenäosuse võrdeliseks suurusega $\sqrt{r^2 - x^2}$, s. t. valis vigade tõenäosuse tiheduseks

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi r^2} \sqrt{r^2 - x^2}, & |x| < r, \\ 0, & |x| \geqslant r \end{cases}$$

(vt. joonist 9), mis aga osutus jällegi üldiselt mitte rakendatavaks, sest vaatlustel ei saa näidata *maksimaalset võimalikku viga* $r$; kuigi äärmiselt väikeste tõenäosustega, kuid põhimõtteliselt on võimalikud kuitahes suured vead (kõikvõimalike negatiivsete mõjutuste ühesuunalistel kuhjumistel).

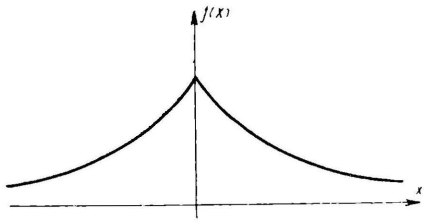



*Joonis 9.*

Lähtudes sellest vigade jaotusest, luges D. Bernoulli *mõõdetava suuruse õigeimaks väärtuseks sellise arvu a, mille korral kõik vead on võimalikult väikesed, s. t. nende vigade esinemise tõenäosused on võimalikult suured,* seega on $a$ määratav tingimusest, et avaldis

$$\sqrt{(r^2 - (a - x_1)^2)(r^2 - (a - x_2)^2)(r^2 - (a - x_3)^2) \ldots}$$

saaks maksimaalseks, kus $x_1, x_2, x_3, \ldots$ on vaatlustulemused. Märkimist väärib Bernoulli printsiip — määrata mõõdetav suurus selliselt, et ta oleks olemasolevate vaatlusandmete korral *tõepäraseim* — mis on laialdaselt kasutatav ka kaasaegses statistikas.



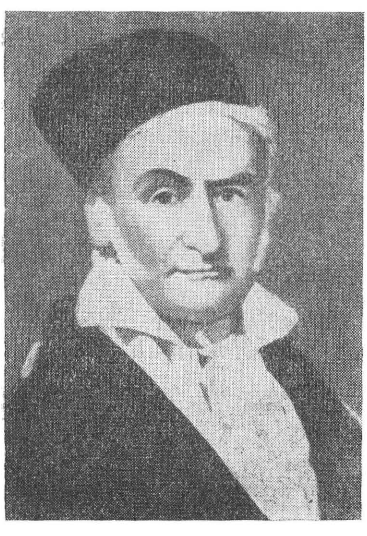

*Joonis 10.*

Ka Laplace püüdis leida vaatlusvigade jaotust ning avaldas arvamust, et vaatlusvigade tõenäosuse tihedus on sümmeetriline ning on esitatav kujul (vt. joon. 10)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{m}{2} e^{-mx} & x > 0 \\ \frac{m}{2} e^{+mx} & x < 0; \end{cases}$$

kuid ka see jaotus osutus tegelikkusega mitte kooskõlas olevaks.

**4. Normaaljaotus.** Vaatlusvigade teooriaga tegeles ka üks oma sajandi suuremaid matemaatikuid Carl Friedrich Gauss (1777—1855), kes töötas ühtlasi ka astronoomia ja geodeesia alal ning tundis vaatlusandmete töötlemise vastu huvi praktilise vajaduse ajendil. Gauss pööras tähelepanu sellele, et vaatlustel esineb kahetüübilisi vigu: regulaarseid (kaasajal nimetatakse neid *süstemaatilisteks*) ning *juhuslikke*. Süstemaatilisi vigu põhjustab näiteks instrumendi defekt või mõõtmise vale metoodika; kõigi mõõtmiste tulemused on selle tagajärjel teatava suuruse võrra ühes suunas nihutatud. Erilist uurimist vajavad Gaussi arvates aga nimelt juhuslikud vead. Juhuslike vigade jaotusseaduse määramisel lähtus Gauss loomulikust eeldusest: *mõõdetava suuruse jaoks annab parima hinnangu mõõtmistulemuste aritmeetiline keskmine* (seda kinnitavad paljukordsed vaatlused) ning vigade tõenäosuse tihedusfunktsioon on sümmeetriline, s. t. sama absoluutväärtusega positiivsete ja negatiivsete vigade esinemise tõenäosused on võrdsed:



*Carl Friedrich Gauss*

$$f(x) = f(-x).$$

Nende eelduste põhjal leidis Gauss vigade tõenäosuse tiheduse kujul, mida me praegu tunneme *normaaljaotusena* (ka Gaussi jaotusena; vt. joonis 5):

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\,e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \tag{6}$$

kuid siinjuures ei väitnud ta sugugi, et see on matemaatiliselt tõestatud ainuvõimalik vigade jaotuse kuju. Mitmete ülesannete lahendamisel kasutas Gauss näidetes ka teisi võimalikke jaotusi (näiteks ühtlast), kuid kõige loomulikumaks luges ta siiski vigade normaalset jaotust.

Olgu märgitud, et normaaljaotusega ei kohtu tõenäosusteooria tegelikult Gaussi töödes esmakordselt. Nimelt tõestas juba de Moivre, et binomiaaljaotuse piirväärtuseks juhul $p=0{,}5$, kui $n\to\infty$, on normaaljaotus, kuid see tema tulemus jäi vähetuntuks. Alles Laplace, kes sama teoreemi tõestas iga $p$ korral (1812), märkis, et erijuhul oli see tulemus juba Moivre'il olemas.

On huvitav, et normaaljaotust uurisid Gauss ja Laplace peaaegu üheaegselt, kuid mõnevõrra erinevatest lähtekohtadest. Kui Laplace huvitus normaaljaotusest eeskätt tõenäosusteoreetiliste ülesannete lahendamise seisukohast, vaadeldes mitmesuguseid aproksimeerimise võimalusi jne., siis Gaussi jaoks pakkus normaaljaotus huvi vaatlusandmete optimaalse töötlemise lähtealusena. Tuleb märkida normaalse jaotusfunktsiooni (vt. joonis 2)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

tabuleerimist mõlema matemaatiku poolt, mis sai aluseks praegusenigi tõenäosusteoorias ja eriti matemaatilises statistikas keskse1 kohal asuvate jaotustabelite loomisele.

Gauss märkis ka, et suurus $\sigma^2$ (vt. valemit (6)) iseloomustab juhusliku muutuja hajuvust, ning märkis, et seda on võimalik vaatlusandmete $x_1, x_2, \ldots, x_n$ põhjal hinnata:

$$\sigma^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2,$$

kusjuures hinnang on seda täpsem, mida rohkem on vaatlusi.

**5. Vähimruutude meetod.** Vaatlusandmete töötlemisel tekib sageli ka selline probleem: mingi mõõdetav suurus sõltub reast mõõdetavatest suurustest, kuid sõltuvust määrav funktsioon ei ole teada. Sageli võib aga sõltuvust lugeda ligikaudu lineaarseks, s. t. oletada, et kehtib seos

$$y = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n,$$

kus suurused $y$ ja $x_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ on vaatlustest määratavad, võrrandite kordajad $a_1, a_2, \ldots, a_n$ aga tundmatud.

Olgu meil teostatud vaatluste seeria, mis sisaldab $N > n$ vaatlust iga mõõdetava suuruse kohta. Saame siis oma $n$ tundmatu määramiseks $N$ võrrandit

$$y^1 = a_1 x_1^1 + a_2 x_2^1 + \ldots + a_n x_n^1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y^N = a_1 x_1^N + a_2 x_2^N + \ldots + a_n x_n^N,$$

ning seega ei ole $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jaoks olemas ühest lahendit. Ülesandeks on määrata saadud võrrandite põhjal mingis mõttes parimad kordajad $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Mitmesuguste astronoomiliste vaatluste töötlemisel põrkas Gauss selle probleemiga kokku juba XVIII sajandi lõpuaastail ning leidis lihtsa lahenduse: loomulikum on määrata kordajad $a_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ nii, et suurus

$$\sum_{i=1}^{n} [y^i - (a_1x_1^i + a_2x_2^i + \ldots + a_nx_n^i)]^2 \tag{7}$$

saavutaks minimaalse väärtuse.

Matemaatilises analüüsis näidatakse, et avaldise (7) miinimumpunktis võrduvad tema osatuletised $a_i$-de järgi nulliga, s. t.

$$\frac{\partial}{\partial a_i} \sum_{i=1}^{n} [y^i - (a_1x_1^i + a_2x_2^i + \ldots + a_nx_n^i)]^2 = 0. \tag{8}$$

Teostades vastava diferentseerimise, jõuame võrrandisüsteemini

$$a_1 \sum_{j=1}^{N} (x_1^j)^2 + a_2 \sum_{j=1}^{N} x_1^j x_2^j + \ldots + a_n \sum_{j=1}^{N} x_1^j x_n^j = \sum_{j=1}^{N} y^j x_1^j,$$

$$a_1 \sum_{j=1}^{N} x_1^j x_2^j + a_2 \sum_{j=1}^{N} (x_2^j)^2 + \ldots + a_n \sum_{j=1}^{N} x_2^j x_n^j = \sum_{j=1}^{N} y^j x_2^j,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_1 \sum_{j=1}^{N} x_1^j x_n^j + a_2 \sum_{j=1}^{N} x_2^j x_n^j + \ldots + a_n \sum_{j=1}^{N} (x_n^j)^2 = \sum_{j=1}^{N} y^j x_n^j,$$

milles on parajasti $n$ võrrandit ja $n$ tundmatut $a_1, a_2, \ldots, a_n$; võrrandite kordajateks on vaatlustulemuste funktsioonid, mis on meile teada. Niisugusel võrrandisüsteemil eksisteerib üldiselt ühene lahend.

Saadud tulemus on ka hästi kooskõlas ühe mõõdetava suuruse määramise printsiibiga tema aritmeetilise keskmise kaudu. Tõepoolest, võttes mõõdetava suuruse väärtuseks $a$ tema mõõtmistulemuste $y^i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ aritmeetilise keskmise

$$a=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} y^j,$$

saame ühtlasi $a$ jaoks sellise väärtuse, mis minimiseerib avaldise

$$\sum_{j=1}^{N}(a-y^j)^2.$$

Kuigi Gauss jõudis vähimruutude meetodini juba 1795. a. Göttingeni ülikooli üliõpilasena ja kasutas seda pidevalt oma astronoomia-alastes töödes, ei avaldanud ta seda trükis. Tõsi küll, enam kui kümne aasta möödudes, 1805. aastal alustas ta teose kirjutamist, millesse võttis kokku mitmeid arvutuslikke meetodeid, mida oli rakendanud astronoomia- ja geodeesia-alastes uurimustes. Kuid mitmesugustel põhjustel töö trükkimine viibis kuni 1808. aastani ning Gaussist jõudis ette Lagrange, kes 1806. aastal avaldas töö, milles esitas käesoleva meetodi vaatlusandmete töötlemiseks, nimetades selle *vähimruutude meetodiks*. Avaldatud meetod leidis kiiresti tunnustust. Tuleb märkida, et mõnedes isiklikes kirjades (näiteks Laplace'ile) mainis Gauss, et ta kasutas vähimruutude meetodit juba kümmekond aastat tagasi, viidates sealjuures mõningatele ülestähendustele oma teaduslikus päevikus. Gauss aga pidas vähimruutude meetodit niivõrd lihtsaks, et oli üllatatud, et seda meetodit juba saja aasta eest polnud avastatud. Tõsist tüli prioriteedi pärast nimekate teadlaste vahel ei tekkinud.

On huvitav, et Lagrange märkis ka seda, et leitud $a_i$-de väärtused on seda täpsemad, mida suurem on vaatluste arv $N$. Gauss aga möönis, et vähimruutude kriteerium on üldiselt suvaline, matemaatiliselt põhjendamatu, kuid juhul, kui juhuslikud suurused $x_i (i=1, 2, \ldots, n)$ ja $y$ on normaaljaotusega, annab vähimruutude meetod sellised $a_i$-de väärtused, mille korral juhuslike suuruste $x_i$ ja $y$ vaatlustel saadud väärtused $x_i^j$, $y^j (j=1, 2, \ldots, N)$ võivad esineda kõige suurema tõenäosusega, s. t. on *tõepäraseimad* $a_i$-de väärtused. (Muide, tõepäraseimaid väärtusi püüdis vaadeldavatele suurustele leida juba D. Bernoulli.)

Tuleb märkida, et vähimruutude meetod on tänapäevani jäänud põhiliseks meetodiks katseandmete töötlemisel. Tõsi küll, rakendades sama põhiprintsiipi juhuslike muutujate teiste, s. t. normaaljaotusest erinevate jaotuste korral, on defineeritud terve rida maksimaalse tõepärasuse meetodeid, kuid nende rakendamine on sageli seotud arvutuslike raskustega.

6. **Matemaatilise statistika arengu algus.** Normaaljaotuse defineerimine ning vähimruutude meetodi kasutuselevõtt panid aluse ka matemaatilise statistika arengule XIX sajandi teisel poolel. Selleks ajaks oli terve rida loodusteadusi (bioloogia, paleontoloogia, hiljem agronoomia, samuti sotsioloogia, psühholoogia jt.) kogunud massiliselt mitmesuguseid vaatlusandmeid ning asusid neid klassifitseerima ning neist järeldusi tegema. Siin aga läks vaja tervet matemaatiliste meetodite süsteemi, mis kahtleldamatult pidi tuginema tõenäosusteooriale, sest kõik uuritavad suurused olid oma iseloomult juhuslikud. Selliseks matemaatiliste meetodite süsteemiks saigi *matemaatiline statistika.*

Üks matemaatilise statistika põhiküsimusi on juhuslike muutujate jaotuse määramine, seda põhiliselt jaotust iseloomustavate parameetrite hindamise teel (näiteks normaaljaotust iseloomustavad täielikult kaks parameetrit — keskväärtus $a$ ja dispersioon $\sigma^2$).

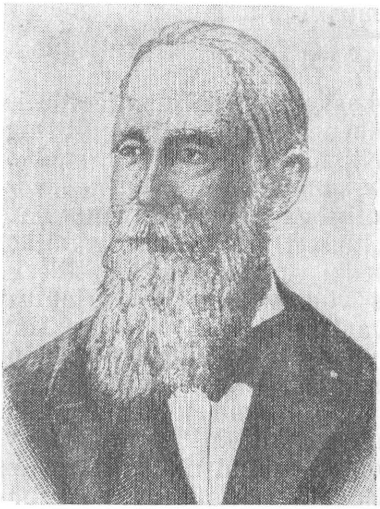
Edasi pakuvad huvi juhuslike muutujate omavahelise *sõltuvusega* seotud küsimused, samuti mitmesugused klassifitseerimise ja süstematiseerimise probleemid.

Tuleb märkida, et matemaatilises statistikas tekkis vajadus terve hulga uute, tõenäosusteoorias seni tundmatute jaotuste defineerimiseks. (Üks selliseid on näiteks $\chi^2$-jaotus — normaaljaotusega juhuslike muutujate ruutude summa jaotus.) Need uued jaotused vajasid lähemat uurimist tõenäosusteooria seisukohalt.

Erilist huvi pakkus matemaatilise statistika seisukohalt küsimus tõenäosusteoreetiliste järelduste õigsusest, s. t. *kus võib edukalt rakendada tõenäosusteooria tulemusi, kus mitte.* Üks selliseid problemaatilisi küsimusi oli näiteks: milliseid jaotusi võib lugeda ligikaudu normaalseteks? Osutub nimelt, et normaaljaotus on matemaatilises mõttes väga hästi käsiteldav jaotus, samuti on teda kõige põhjalikumalt uuritud; seetõttu on väga mugav mitmete juhuslike muutujate jaotusi lähendada normaaljaotusega. Millal võib aga seda teha, kartmata valejäreldusi?

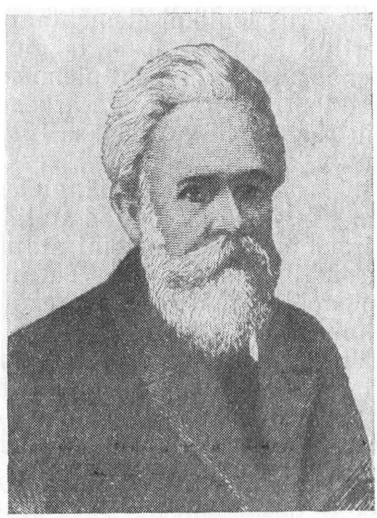
Vastuse neile küsimustele andis tõenäosusteooria edasine areng.

7. **Piirteoreemid.** Alates XIX sajandi keskpaigast asus tõenäosusteoorias juhtivale kohale vene koolkond, kuhu kuulusid P. L. Tsebõšov (1821—1894), A. A. Markov (1856—1922) ja A. M. Ljapunov (1857—1918). Selle koolkonna uurimusi iseloomustavad eelkäijatest hoopis sügavamad probleemid ning ulatuslikum matemaatiline aparatuur. Põhilised küsimused, millele nad tähelepanu pöörasid, olid piirprobleemid, mille olemus seisneb juhuslike muutujate summa jaotuse uurimises liidetavate arvu kasvamisel. Tegelikult oli esimeseks tõestatud piirteoreemiks juba Moivre-Laplace'i teoreem, mis väitis, et lihtsa kujuga juhuslike muutujate — sündmuse $A$ nn. *indikaatorfunktsioonide* $X_A$, mis on defineeritud järgnevalt:



P. L. Tšebõšov

A. A. Markov



A. M. Ljapunov

$$X_A = \begin{cases} 0, & \text{kui sündmus } A \text{ ei toimu} \\ 1, & \text{kui sündmus } A \text{ toimub,} \end{cases}$$

summa jaotus läheneb $n$ piiramatul kasvamisel normaaljaotusele. Osutus aga, et normaaljaotusele läheneb veel paljude teistegi juhuslike muutujate summa jaotus. Nii tõestas Ljapunov, et *ühesuguse jaotusega juhuslike muutujate summa jaotus läheneb normaaljaotusele.* Kuid ka erineva jaotusega juhuslike muutujate summa jaotus võib vägagi üldistel eeldustel läheneda normaaljaotusele. Selle põhjal said selgeks mõnedki varem problemaatiliseks jäänud faktid. Näiteks selgub, miks võib vaatlusvigade jaotust lugeda normaalseks: mõjustavad ju vaatlustulemusi väga arvukad pisitegurid, nii et vaatlusviga võib lugeda terve hulga, isegi lõpmata paljude juhuslike muutujate summaks, mis küllalt sageli alluvad piirteoreemi eeldustele. Siis aga on selle juhusliku muutuja jaotuseks tõepoolest normaaljaotus. Siit on ka arusaadav, miks on normaaljaotus looduses niivõrd levinud ning ühtlasi on sellega normaaljaotuse rakendamise lubatavus väga paljudel juhtudel rangelt põhjendatud.

Hoolimata uutest, rangelt tõestatud tulemustest ning mitmeti juba kaasaegsest aparatuurist, jätkus veel XIX sajandilgi tõenäosusteooria ulatuslik väärrakendamine. Ning üks selle põhjusi seisnes jällegi tõenäosuse mõistes.

**8. Statistiline tõenäosuse mõiste.** Ainus tõenäosuse mõiste, mida tundis XIX sajand, oli Laplace'i poolt defineeritud klassikaline tõenäosus, mis baseerus lõplikul elementaarsündmuste süsteemil. Selliselt defineeritud tõenäosuse — ja ainult selle jaoks — olid tõestatud ka tõenäosusteooria põhitulemused — tõenäosuste liitmise ja korrutamise teoreem jt. On aga arusaadav, et niisugune definitsioon oli ammu jäänud liiga kitsaks. Tõepoolest, niisugune tõenäosus on omistatav ainult vähestele, eeskätt inimese poolt kunstlikult loodud olukordades (hasartmängudes) tekkinud sündmustele. (Erandiks on siin siiski mõningad statistilise füüsika tulemused, nn. Fermi-Diraci ja Bose-Einsteini statistikas, kus rakendatakse edukalt klassikalist tõenäosust. Tuleb aga märkida, et ka need tulemused on teatud mõttes esimeseks lähendiks loodusteaduste tundmaõppimisel.)

Rakenduslikult tähtsates ülesannetes kohtame enamasti ikka sündmusi, millele klassikalist tõenäosust ei saa määrata. Nii ei ole võimalik määrata võrdtõenäosuste üksteist välistavate sündmuste süsteemi, mille põhjal saaks arvutada tõenäosust selleks, et inimene sureb 50-aastaselt, ei ka selleks, et arvutada poisslapse sündimise tõenäosust.

Veelgi enam. Klassikalise tõenäosuse mõiste osutus kitsaks isegi tõenäosusteooria enese tulemuse esitamiseks. Tõepoolest, Bernoulli suurte arvude seadus sisaldab sündmuste jada, milles tõenäosused lähenevad nullile. Klassikalise tõenäosuse mõiste abil saab küll defineerida sellise jada, kuid selle jada piirväärtuseks on sündmus, mille jaoks ei saa enam määrata klassikalist tõenäosust — sündmus, mis pole esitatav lõpliku täieliku elementaarsündmuste süsteemi üksiksündmuste kaudu. Ja tõepoolest, selle jada piirsündmuseks on sündmus tõenäosusega null, mis aga pole põhimõtteliselt võimatu — olukord, mis ei ole kooskõlas klassikalise tõenäosuse mõistega.

Samasugune on olukord sündmuste $U = k$ jadaga (vt. lk. 73). Et $P(U = k) = 2^{-k}$, siis $\lim_{k \to \infty} P(U = k) = 0$. Selline piirväärtus vastab sündmusele, kus lõpmatu rahavisete seeria vältel kogu aeg langeb peale kirjapool. See sündmus aga ei ole põhimõtteliselt võimatu. See on ilmne, kui võrdleme kirjeldatud sündmust kasvõi sündmusega, mis seisneks valge kuuli võtmises urnist, mis sisaldab ainult musti kuule. Niisugune sündmus on põhimõtteliselt võimatu. Samuti on tõenäosusega null sündmus, et 1. jaanuaril 1970. aastal kell 00.00 langeb Tartus Nõukogude väljakule meteoor; kuid see pole võimatu sündmus, sest ta pole vastuolus ühegi loodusseadusega.

Tuleb kohe märkida, et Bernoulli ja ta kaasaegsed, kuid samuti veel XIX sajandi alguse ning keskpaiga matemaatikud ei pööranud siin toodud loogilistele paradoksidele tähelepanu. Nõuded matemaatiliste tõestuste rangusele olid sel perioodil hoopiski nõrgemad kui kaasajal ning tulemuste kriteeriumiks sobis vahetu praktiline kontroll.

Ometi näitas see asjaolu niihästi teoreetilist kui ka praktilist vajadust tõenäosuse mõiste laiendamiseks sündmuste jaoks, mis ei ole määratavad elementaarsündmuste kaudu.

Loogilise aluse tõenäosuse mõiste laiendamiseks andis Bernoulli suurte arvude seadus. Nimelt osutub, et sündmuse relatiivsel sagedusel võib piirväärtus eksisteerida ka siis, kui selle sündmuse jaoks ei ole üldse defineeritud klassikalist tõenäosust, mis Bernoulli teoreemi kohaselt peab olema (väga suure tõenäosusega) selle sageduste jada piirväärtuseks. Seega on päris loomulik lugeda sündmuse $A$ statistiliseks tõenäosuseks piirväärtust $p$, millele läheneb selle sündmuse relatiivne sagedus $\frac{k(n)}{n}$ katsete arvu piiramatul suurenemisel (kui selline piirväärtus $p$ üldse eksisteerib). Loomulikult ei saa rääkida statistilisest tõenäosusest selliste sündmuste puhul, mille relatiivne sagedus ei lähene ühelegi kindlale piirväärtusele. Siinjuures on huvitav märkida, et esmakordselt defineeriti tõenäosus selliselt alles käesoleval sajandil (1917. aastal) R. M i s e s e poolt. Ühtlasi tõestati, et klassikaliste tõenäosuste kohta kehtivad tulemused on õiged ka statistiliste tõenäosuste korral, nii et statistiline tõenäosus on tõepoolest klassikalise tõenäosuse mõiste üldistus, mitte aga hoopis iseseisev ja võib-olla koguni erinevate omadustega mõiste. Siit järeldub ühtlasi, et klassikaliste tõenäosuste jada piirväärtus, mis definitsiooni kohaselt on statistiline tõenäosus, on samade omadustega suurus, seega likvideerus ka paradoks seoses suurte arvude seadusega.

Ka statistilise tõenäosuse korral on võimatu sündmuse tõenäosus 0 ja kindla sündmuse tõenäosus 1, endisel kujul säilib üksteist välistavate sündmuste definitsioon, samuti tõenäosuste liitmise lause üksteist välistavate sündmuste korral. Samuti säilis sündmuste sõltuvuse ja sõltumatuse mõiste; tuleb vaid märkida selle mõiste osatähtsuse suurenemist eriti statistilistes uurimustes.

Praktilistes arvutustes oli aga statistilist tõenäosust rakendatud alates sellest momendist, kui tõenäosusteooria asus lahendama esimesi majanduslikke ülesandeid. Nii olid ka Halley surevustabeli arvud tegelikult statistilised tõenäosused (täpsemalt — nende 1000-kordsed), sest nad olid saadud relatiivsete sagedustena arvukatest vaatlustest, mis suure tõenäosusega erinevad relatiivsete sageduste piirväärtustest väga vähe (piirväärtus pole ju tegelike vaatluste korral kunagi saavutatav, ikka võime saada vaid sellele kuitahes lähedasi suurusi).

Seetõttu osutusidki õigeteks ja praktiliselt kasulikeks de Witt'i, Halley jt. vaatlusandmetel baseeruvad tulemused, kus kasutati tõenäosusteooria tulemusi rakendatuna statistilistele tõenäosustele. Selle tõttu osutus võimalikuks ka suure arvu vaatluste tulemusena määrata uuritava jaotuse parameetreid jne. Seevastu aga kohtuprotsesside tulemuste, inimsaatuste jms. ennustamisel, kus lähteandmetele (näiteks tunnistajate väidete õigsus) omistati meelevaldsed või vähepõhjendatud (ei klassikalised ega ka statistilised) tõenäosused, osutusid ka tulemused vähepõhjendatuteks ja tegelikkusega mitte kooskõlas olevaiks. Neil juhtudel määrati tõenäosus teatava «usaldatavuse mõõduna», mis on aga matemaatilisest seisukohast täiesti suvaline määratlus. See muide ei tähenda, et niisugused alad (näiteks hääletamise tulemuste analüüs) oleksid sellised, kus tõenäosusteooria on põhimõtteliselt mitte rakendatav. Vastupidi, kaasaegsed sotsioloogilised uurimused baseeruvad ulatuslikult tõenäosusteoorial ja annavad vägagi vajalikke ja usaldusväärseid tulemusi. Oluline on siin aga see, et lähtesündmuste tõenäosused määratakse statistiliselt, arvuka vaatlusmaterjali põhjal, mitte aga meelevaldselt, subjektiivselt teatud sündmuse usaldatavust hinnates. Niisuguseks «pseudotõenäosuseks» on (tavaliselt) ka kõnekeeles sageli esinev väide, et mängija $A$ võidab turniiri tõenäosusega 80%, millelt aga matemaatilist põhjendatust sageli ei nõutagi.

## ESIMESEST EESTIKEELSEST ENTSÜKLOPEEDIAST

Seoses Eesti Nõukogude Entsüklopeedia ilmumahakkamisega eeloleval aastal on huvitav meenutada, et esimese katse eestikeelse entsüklopeedia koostamiseks tegi juba K. A. H e r m a n n. Aastal 1900 hakkas ilmuma tema *«Eesti Üleüldise teaduse raamat ehk encyklopädia konversationi-lexikon, see on kõige inimlise teadmise haridusline sõnakiri, hulga kujutustega kaunistatud».* Nelja aasta jooksul jõuti kirjastada entsüklopeedia esimene köide (täht A), mis anti välja 12 vihus, kokku 748 lehekülge.

Selle ainsaks jäänud köite matemaatika-alastest artiklitest on kõige ulatuslikumateks *«Algebra»* (3 lehekülge), *«Analysis»* (1,5 lk.) ja *«Arithmetik»* (1,3 lk.). Järgnevalt toomegi nendest artiklitest mõned väljavõtted.

**Algebra** *on Arabia keele sõna arwuteadusest ja tähendab «maha-arwatawa ümberpanek» teisele poole kokku-arwatawaks võrdluses, näit.* $x - 3 = 8$ *(ütle: iks wähem kolm on kaheksa). Pandakse nimelt* —3 *wõrdluse pahemalt poolt ära parema poole sisse, siis tuleb talle* + *ette panna, nii* $x = 8 + 3$; *selle järele on siis otsitud arw* $x = 11$. *Algebra on arwuteaduse see osa, mis wõrdluste abil tundmata suurusi ehk arwusid tuntud arwudest otsib. Tuntud arwud on kas numbrid* 1, 2, 3, 10, 70 *jne. wõi Ladina tähtkorra esimesed tähed* a, b, c, d *jne., mis arwude asemel tarwitatakse, wõi ka arwud ja tähed ühes. Tundmata arwud, mida wälja arwata ja määrata tarwis, on Ladina tähtkorra wiimased tähed* x, y, z, u *ja teised mõni kord ühes numbritega. Kui tundmata arw õigesti on leitud, üteldakse: wõrdlus on wälja arwatud ehk lunastatud. Paneme näituseks järgmise wõrdluse üles:*

$$\frac{19 + 3x}{5} - x = \frac{17 - 2x}{3}$$

*Seda loetakse nii:* 19 *juurde* 3x *arwatud ja see* 5 *läbi jagatud, sellest* x *maha tõmmatud on just nii suur kui* 17 *millest* 2x *maha arwatud ja see* 3 *läbi jagatud; kui suur on* x?

... *Kui ühe ülesande arwatus mitu tundmata arwu nõuab (x, y, z ...), siis peab ka niisama palju iseseiswaid wõrdlusi sellest wälja juhitama, kui tundmata arvusid olemas on, kui ülesanne määratud olgu.*

**Analysis** *on sama sõna, mis analyse, kuid seda sõna kuju tarwitatakse kõige rohkem arwuteaduses ehk mathematikas mitmel tähendusel. Sõna tähendusel on mitu muutust olnud, mis tarkade õpetlaste arwamisesse puutusiwad, nagu Plato, Archimedes, Cartesius, Leibniz, Euler. Plato leidis analysese taha, mille läbi arwuteadus üle elementide (ainete) seisukoha tõusis; Archimedes leidis raskuse põhjused; Cartesius lõi analysese geometria (lahustlise maamõõtmise); Leibniz mõtles otsatuse arwamise (infinitesimalkalküli); Euler otsatuse ehk rajatuse lahustuse.*

... *Tähtjam kui theoretine oli problematine analysis (mõistatusline lahustus), mis õiget ja loomulikku teed geometriliste mõistatuste saadustele näitab. Plato on selle tee selgele teadlisele methodile ehk tabale tõstnud, mis järgmine on: Kui tarwis on antud määrapaladest geometrilist wigurit sünnitada, mis tarwilisi tingimisi peab täitma, siis on esiti «mudel» mõtelda, s. o. igale pikale* *arwamisele walmis wigur põhjaks panna. Selle mudeli juures tõmmatakse abijooned, mille läbi mudel jagudeks osaneb. Tuntud lausete appiwõtmisel, mis geometrilised tõeasjad on, juba tõeks tehtud mudeli omadustel tehtakse niikaua tööd, mõteldakse nii kaua selle juures, kuni selgesti tuntakse, et ühte mudeliwiguri osa juures tuntud abinõuudega construeerida wõib. Seda mudeli pala wõib nüüd antud põhjaks ehk lühedalt antuseks pidada ja edespidistele mõtlemistele niisamati põhjaks panna kui wiguri muud antused jne., kuni kõik mudeli palad selgeks on saanud. Nüüd on wõimalik nõutud wigurit pikka mööda selle antustest sünnitada ja nimelt just selle korra järele, mida analysis ettekirjutab. Selle juures on näha, kas ja kuda sünnitus wõimalik on wõi ei ole.*

*Arithmetine analysis (arwamise lahustus). Plato taba (method) geometriseid problemesid analysise abil lahustada tarwitati pärast Diophntos-e all ja arablaste läbi ka arithmetiste kohta ja wiis wõrdluste tabale ehk algebrale. Algebrane taba arithmetiste problemite (arwamise mõistatuste) juures on see, et otsitud suurus ehk tundmata nagu antud (antuseks) mõteldakse ja seda ülesande antustega nii ühendatakse, et kaks kujestust (formelit) tekkiwad, mis wäärtuse järele ühesuurused on ja selle pärast ka üks teisega üheks wõiwad pandud olla. Tõuswus, s. o. mis tekkib, on wõrdlus, millest tundmata suurust algebra põhjusmõtete järele arwata wõib. Algebra taba järel wõime kõiki arithmetiseid ülesandeid arwata, milleks muidu synthetiseid methodisid (kokkupanelisi tabasid) ühekordse ja kahekordse regeldetri, ahela-arwamise jm. läbi tarwis on. Iseäranis on analytise methodi tarwitamist wäga waja raskemate arithmetiste, geometriste ja physikaliste arwamise ülesannete juures, sest siin ei ole synthetine tee mitte kerge.*

*Analytine geometria (lahustline maamõõtmine). Iga functioni wõib ära kujestada. Tema kuje on curve (kõwerus) wõi lagedus (platt). Functionide kujestatamine tasadikul (lagedikul) wõi ruumis on coordinatide methodi põhjusline (fundamentaline) ülesanne analytisest geometriast, mis Cartesius 1637 üles leidis. See teaduse olu on uuemal ajal determinantide arwenõuu läbi tugewa toe leidnud, mis teadlased Plücker, Cayley, Hesse, Clebsch, Jordan, Köningsberger täiendasiwad.*

**Arithmetik,** *«arwamine, rehkendamine numbri-õpetus» on nimelt wõidus lihtnumbrite täitel arwudel summasid ja otsusi wälja saada. Selleks tarwitatakse waljul kombel kõigest 12 nummert, need on 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 100, 1000. Kõik teised arwud on neist kokku pandud, ja pääle nende tuleb kõigest miljon, biljon, triljon jm. mis ka õieti esimestest 12-st on sünnitatud.*

*... On arwaja end harjutanud iga nummert õigesti kirjutama, siis wõib üksikuid arwamisi ette wõtta, mida kõige päält neli on, need on 1. kokkuarwamine, 2. mahaarwamine, 3. kaswatamine, 4. jagamine nii hästi nimeta kui nimega numbritel; nimeta numbrid on paljad arwud, nimega numbrid on iga sugu mõõdud ja kaalud, nagu rublad ja kopikad, puudad, leesikad, naelad, penikoormad, werstad ja muud. Saadus tähendatakse ikka märgi = järel päris eksemplites ehk näitustes.*

* * *

## *JALGPALLITURNIIR*

Jalgpalliturniiril esimest nelja kohta jaganud meeskondade vahel korraldati lisaturniir, milles iga meeskond mängis iga ülejäänud meeskonnaga ühe matši. Võidu eest anti 2 ja viigi eest 1 punkt. «Dünamo» sai kokku 5 punkti, «Jõud» 3 punkti ja «Kalev» 1 punkti. Kokku löödi sellel lisaturniiril 11 väravat, neist 5 lõi «Jõud», kes muide võitis «Kalevi» väravate suhtega 2 : 1. Milline oli «Dünamo» ja «Kalevi» vahelise matši tulemus?

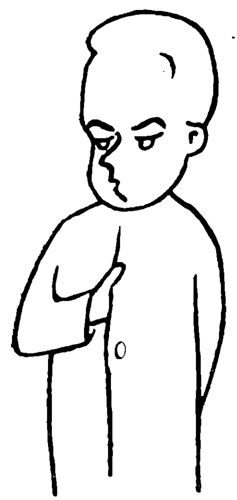
## Matemaatiline päevavaja

# «MATEMAATIKA JA KAASAJA» RELATIIVSE JUUBELI PUHUL

**Tõeleid Roosinupp**

«Matemaatika ja kaasaja» (= M. & k.) kümnenda numbri ilmumisega seoses on ka minul kui toimetuse mittekoosseisulisel liikmel tahtmine avaldusega esineda.

Nimelt tuleb mul kõrgesti ning kaasaegselt haritud matemaatikuna täie resoluutsusega märkida, et tegemist on ikkagi vaid relatiivse juubeliga. Ei saa ju niisugust juubelite pidamise süsteemi lugeda absoluutseks, mis tugineb juubeldajate kümnesõrmelisusele. Kui näiteks lugejaile hästi tuntud marslastel (vt. M. & k., IV, lk. 9) peaks olema kaks kuuesõrmelist või kolm neljasõrmelist kätt, siis juubeldaksid nende matemaatikud alles oma ainsa populaarteadusliku väljaande kaheteistkümnenda (marslaste kirjapildis 10.) vihiku ilmumise ajal. Esimest juubelisünnipäeva peaksid marslased sel juhul aga kas 72-aastaseks (kui neil on kaks kuuesõrmelist kätt) või 48-aastaseks (kui neil on kolm neljasõrmelist kätt) saamise puhul.




Elektronarvutite võidukäigu kõrvaltulemusena on kaasajal eriti populaarseks kujunenud just kahendsüsteem (vt. M. & k., IV, lk. 47). Ja seda täiesti teenitult, sest kahendsüsteemi eelised on absoluutsed! Seda absoluutsust on ka M. & k. rõhutanud, kandes oma numbreid kaanel just nimelt kahendsüsteemis. Selles süsteemis osutub aga iga teine arv ü m m a r g u s e k s (kui kujunenud tava kohaselt lugeda ümmarguse nulliga lõppevad arvud ümmargusteks) ja käesolev on seega M. & k. viies juubelinumber. Kui aga e r i t i ü m m a r g u s t e k s lugeda need arvud, mis kirjutatakse ühe ja sellele järgnevate nullidega, siis tuleb arvestada, et M. & k. ilmunud vihikute hulgas on ju juba olemas nii 10., 100. kui ka 1000. number. Seega 1010. vihiku puhul e r i t i juubeldada pole põhjust (küll aga võib l i h t s a l t juubeldada, sest järjekorranumber on siiski lihtsalt ümmargune).

Äsjatõestatust järeldub juba päris vahetult ka kahendsüsteemi kasutamise peamine eelis — juubelite suur sagedus. Sagedane juubeldamine on aga üsna meeldiv, sest sellega kaasnevad igasugused õnnitlustelegrammid ja muud sinna juurde kuuluvad asjad. Kuuldavasti ootab M. & k. toimetus oma lihtsa juubeli puhul kutset matemaatika metoodiliste artiklite kogumiku matustele, teadet tasuta liimi eraldamise kohta, väljaspool Tartut elavate matemaatikute lubadust vähemalt 100 (ei tea mis süsteemis) artikli kirjutamise kohta aastas jne. jne. Mina omalt poolt kavatsen saata järgmise telegrammi: «Loodan, et järgmise relatiivse juubeli ajal võib M. & k. asemel kirjutada juba M. & K.».

# AKADEEMIK N. I. MUSHELIŠVILI 75-AASTANE

E. Jõgi

Nõukogude silmapaistva mehhaaniku ja matemaatiku, akadeemik Nikolai Ivanovitš Mushelišvili 75. sünnipäeva tähistas 16. veebruaril suurearvuline mehhaanikute ja matemaatikute pere.

Akad. N. I. Mushelišvili on sündinud Tbilisis 16. veebruaril 1891. aastal. 1909. aastal astus ta Peterburi ülikooli füüsika-matemaatikateaduskonda, mille lõpetamise järel 1914. aastal jäeti ta sama ülikooli juurde professori kutseks valmistuma. Siin hakkas juubilari huvitama Guri Vassiljevitš Kolossovi uurimissuund. G. V. Kolossov töötas varem 10 aastat Tartu ülikoolis, kus tal valmis doktoriväitekiri kompleksmuutuja funktsioonide teooria rakendustest elastsusteoorias. 1920. a. pöördus N. J. Mushelišvili tagasi Tbilisi ja hakkas töötama 1918. aastal loodud Tbilisi ülikoolis. Siin kujunes tema juhtimisel viljakas matemaatikute ja mehhaanikute koolkond, kes tegeles esialgu kompleksmuutuja funktsioonide teooria rakendustega elastsusteoorias. Hilisematest suundadest tuleb märkida singulaarsete integraalvõrrandite, elliptilist tüüpi diferentsiaalvõrrandite ja kompleksmuutuja analüütiliste funktsioonide uurimist. Suured on N. I. Mushelišvili teened inseneride kaadri kasvatamisel Tbilisi Polütehnilises Instituudis, kus ta luges elastsusteooriat ja teoreetilist mehhaanikat. Ta on ka rea kõrgematele koolidele määratud õpikute autoriks. Eriti laialt on tuntud tema koostatud analüütilise geomeetria õpik.

N. I. Mushelišvili on kirjutanud üle 80 teadusliku töö. Põhjapanevad monograafiad «Некоторые основные задачи математической теории упругости» (1933) ja «Сингулярные интегральные уравнения» (1946) hinnati riikliku preemia vääriliseks vastavalt 1941. ja 1947. aastal. N. I. Mushelišvili on elastsusteooria mitmete probleemide uute uurimismeetodite loojaks. Need meetodid on arendatud kompleksmuutuja funktsioonide teooria baasil. Tänu nendele uurimustele on elastsusteooria tasapinnaline ülesanne lahendatud mitte ainult teoreetiliselt, vaid tulemusi saab kasutada vahetult praktika ülesannete lahendamisel. N. I. Mushelišvili nimega on seotud mitmest materjalist koosnevate elastsete varraste väände- ja paindeülesannete lahendamine. Ta üldistas klassikalist Saint-Venant'i ülesannet ja andis originaalse meetodi selle probleemi lahendamiseks. Singulaarsete integraalvõrrandite ja analüütiliste kompleksmuutuja funktsioonide teoorias saadud tulemusi on kasutatud elastsusteooria kontaktülesande lahendamisel.

N. I. Mushelišvili tööd on laialt tuntud Nõukogude Liidus ja välismaal. NSVL TA korrespondentliikmeks valiti ta 1933. aastal, akadeemikuks 1939. aastal. Ta on ka Bulgaaria ja Poola TA välismaiseks liikmeks. 1941. aastal asutatud Gruusia Teaduste Akadeemia kauaaegse presidendina on tal suured teened akadeemia loomisel ja väljaarendamisel.

N. I. Mushelišvili viljakas teaduslik, pedagoogiline ning organisatoorne töö on tihedalt põimunud laiaulatusliku ühiskondliku tööga. Ta on olnud NSVL Ülemnõukogu kõikide koosseisude rahvasaadikuks.

Nõukogude rahvas hindab kõrgelt akadeemik N. I. Mushelišvili tööd. Teda on autasustatud 4 Lenini ordeniga, Tööpunalipu ordeniga ning 1945. a. omistati talle sotsialistliku töö kangelase aunimetus.

# PIERS BOHLI 100-NDA SÜNNI-AASTAPÄEVA PUHUL

Ü. Lumiste, E. Tamme

Baltimaadel on tegutsenud ja teadust rikastanud mitmed silmapaistvad matemaatikud. Üheks tähelepanuväärsemaks nende seas oli Tartu ülikooli kasvandik, Riia Polütehnilise Instituudi professor ja kateedrijuhataja Piers Bohl, kelle sünnist möödus 23. oktoobril 1965. a. sada aastat. Selle tähistamiseks korraldasid Läti NSV matemaatikud Riias 21.—23. oktoobril 1965. a. Piers Bohli mälestusele pühendatud juubelisessiooni. Kirjastus «Zinatne» andis välja P. Bohli elu ja tegevust tutvustava brošüüri [1]. Alljärgnevad read püüavad anda nendest põgusa ülevaate.

Juubelisessiooni organiseerisid Läti NSV TA Astrofüüsika laboratoorium ja Füüsika Instituut, Läti Riiklik P. Stučka nim. Ülikool ning Riia Polütehniline Instituut. Istungid peeti Läti NSV TA ruumides Riia kõrghoones. Osa võtma oli kutsutud matemaatikuid mitmetest NSVL teaduslikest keskustest, kus arendatakse loovalt edasi P. Bohli pärandit.

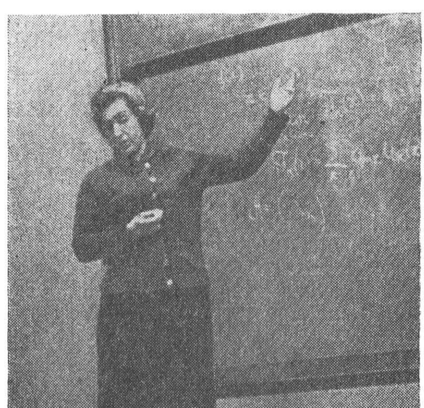
Esimesel istungil kuulati ettekandeid, mis tutvustasid Piers Bohli elu ja loomingut. Üldise ülevaate andsid A. D. Mõškis (Harkov) ja I. M. Rabinovitš (Riia), kellest esimene iseloomustas P. Bohli teaduslikke ideid ja saavutusi ning nende osa kaasaja matemaatikas, teine aga peatus lühidalt P. Bohli biograafial, illustreerides seda fotodega Viljandist ja Tartust, kus möödusid P. Bohli õpinguaastad, Tartu ülikooli professoritest — P. Bohli õpetajatest jms. E. Tamme (Tartu) andis oma ettekandes ülevaate P. Bohli esimesest teaduslikust tööst — tänaseni käsikirjaliseks jäänud auhinnatööst «Lineaarsete diferentsiaalvõrrandite invariantide teooria ja rakendused», mis valmis Tartus 1886. aastal. Ettekandest ja sellele järgnenud diskussioonist selgus, et töö on säilitanud teadusliku värskuse ja väärib trükis avaldamist ka veel tänapäeval. Piers Bohli tegevust Riia Polütehnilise Instituudi professorina tutvustas oma ettekandes A. Bunga (Riia).

Järgnevatel istungitel toimunud teaduslikud ettekanded külalistelt ja Riia matemaatikutelt olid pühendatud P. Bohli töödest lähtunud uurimissuundade arengule tänapäeval. Nii näiteks käsitlesid B. Levitan (Moskva) jt. töid peaaegu-perioodiliste funktsioonide teooria alal, L. Reizins (Riia) jt. topoloogiliste meetodite rakendamist diferentsiaalvõrrandite teoorias.

Sessiooni viimasel istungil anti ülevaateid matemaatika ja selle rakendusalade arengust Läti NSV-s ja Eesti NSV-s. Riia matemaatikutest kõnelesid E. Arinš, E. Riekstiens, L. Rubinstein ja L. Reizins, Tartu matemaatikutest Ü. Lumiste ja T. Sõrmus.

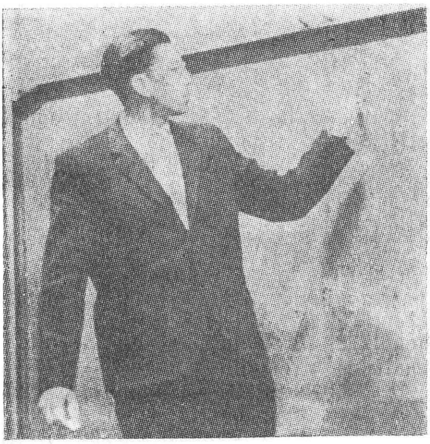
P. Bohli juubelisessiooni puhul oli istungite ruumes korraldatud P. Bohli elu ja teaduslikku loomingut tutvustav näitus, millel eksponeeriti fotosid, teaduslikke artikleid ja nende äratõmbeid, P. Bohli kohta ilmunud kirjandust.

Piers Bohli ja tema loomingulist pärandit tutvustab lähemalt eespool mainitud A. D. Mõškini ja S. M. Rabinovitši brošüür. Selle esimeses osas käsitletakse P. Bohli õpinguid Viljandi gümnaasiumis ja Tartu ülikoolis ning töötamist Riia Polütehnilises Instituudis. Teises osas on antud ülevaade



*T. Sõrmus esinemas*

[1] Мышкис А. Д., Рабинович И. М., Математик Пирс Боль из Риги. Рига, 1965.



*L. Reizins esinemas*

P. Bohli matemaatiliste tööde sisust ja tähtsusest.

Brošüüris leidub uusi andmeid P. Bohli kohta, mis täiendavad varem avaldatud materjale (nende hulgas ka eesti keeles ilmunud ülevaadet[2]). Näiteks on toodud eksamilehtede materjale ning esitatud huvipakkuvaid üksikasju doktoritöö kaitsmisest Tartus 1900. a. Saame teada, et P. Bohl on üliõpilasena kolme õppeaasta jooksul sooritanud kõik 15 eksamit hindele «väga hea» ja nimelt esimesel õppeaastal võrrandite ja determinantide teooria (E. Hartwigi juures), diferentsiaalarvutuse, integraalarvutuse, analüütilise geomeetria ning joonte ja pindade teooria alal (kõik prof. P. Helmlingi juures), teisel õppeaastal uuema geomeetria ja algebra, analüütiliste funktsioonide teooria (mõlemad dots. T. Molieni juures), matemaatilise geograafia (prof. F. Weirauch), vähimruutude meetodi (prof. L. Schwarz) ja diferentsiaalvõrrandite (P. Helmling) alal ning kolmandal õppeaastal analüütilise mehhaanika (prof. E. Staude), arvuteooria (T. Molien), üldise astronoomia (prof. L. Schwarz), füüsika ja praktilise füüsika (mõlemad prof. A. Oettingen) alal.

P. Bohli kui pedagoogi aitab iseloomustada Harkovi tehnoloogia instituudi direktori prof. V. L. Kirpitšovi arvamus tema kohta. Pärast Riia Polütehnilise Instituudi revideerimist 1897. a. kirjutas Kirpitšov oma aruandes: «Noor teadlane loeb alates 1895. a. Riia Polütehnilises Instituudis kõrgemat matemaatikat, esitades seda kaasaegse range analüüsi vaimus. Tema esitus on väga täpne, selge ja range ning avaldab kõige meeldivamat muljet.»

Brošüür sisaldab ka P. Bohli ühe väiksema töö «Kolmeliikmeliste võrrandite teooriast» (*Zur Theorie der trinomischen Gleichungen. Math. Ann.* 1908, **65**, 556—566) venekeelse tõlke.[3] Artiklis on sõnastatud ja tõestatud reegel võrrandi

$$ax^n + bx^m + c = 0 \quad (a,\ b,\ c\ \text{— kompleksarvud})$$

selliste kompleksIahendite arvu määramiseks, mille moodul ei ületa antud positiivset arvu.

Brošüüri lisana on toodud suurmeister M. Botvinniku arvamus P. Bohli kui maletaja kohta ning kaks P. Bohli partiid. M. Botvinnik märgib muuhulgas: «Bohl harrastas lahtist viguritemängu, kippus alati rünnakule, otsis hasartselt võimalusi keerulisteks kombinatsioonideks. Kui tuli end kaitsta, tegi Bohl seda ilmse vastumeelsusega ja ilma erilise eduta ... P. Bohl oli peen avanguteundja; on selge, et ta spetsiaalselt uuris avanguteooriat ... Kuidas hinnata P. Bohli kui maletaja praktilist tugevust? Tänapäeva mõisteid kasutades tuleks teda asetada arvatavasti esimese järgu maletaja ja meistrikandidaadi vahele, mis on vägagi silmapaistvaks tasemeks teadlasele, kes pühendas malele vaid oma jõudeaja.»

---

[2] R a b i n o v i t š, I., Eestist võrsunud matemaatikaklassik, Matemaatika ja kaasaeg, V, 1964, lk. 88—93. Märgime, et selles lk. 88 on trükivea tõttu P. Bohli sünnikuupäevana toodud 28. oktoober, peab aga olema 23. oktoober.

[3] Selle töö tõlge puudub P. Bohli valitud tööde kogumikus: Боль, П. Избранные труды. Изд. АН Латв. ССР, Рига, 1960.

# KAKS KUUD INGLISMAAL

E. Jürimäe

Allakirjutanul oli võimalus viibida 5. oktoobrist kuni 2. detsembrini 1965. a. Inglismaa ülikoolides ning tutvuda seal mõningate matemaatikutega ja matemaatika õpetamisega. Käesolevad read on mõeldud mõningate üldisemate muljete jagamisena «Matemaatika ja kaasaja» lugejatele.

Põhilise aja oma teaduslikust komandeeringust viibisin Wales'i ülikooli Swansea kolledžis nn. puhta matemaatika kateedris (Departement of Pure Mathematics). On huvitav märkida, et enamikus inglise ülikoolides on kaks matemaatika kateedrit. Puhta matemaatika kõrval esineb rakendusmatemaatika (Applied Mathematics). Viimane kujutab endast põhiliselt teoreetilist mehhaanikat, kuid ka teoreetilist füüsikat (näit. relatiivsusteooriat). Rakendusmatemaatika kateedri kaudu õpetatakse enamikul juhtudel ka arvutusmasinatega seotud distsipliine.

Töötasin ülalmainitud kateedris prof. J. D. Westoni juures, kes on küllalt laialdaselt tuntud spetsialist funktsionaalanalüüsi alal. Enamik tolle kateedri liikmetest huvitusid just nimetatud distsipliinist.

Swansea ülikooli kolledžis õpib umbes 2700 üliõpilast, sealjuures matemaatikuid võetakse igal aastal vastu 25—30. Õppejõude-matemaatikuid oli kokku 26 (nendest 18 puhta matemaatika kateedris). Õppeaeg ülikoolis kestab seal 3 aastat, kusjuures üliõpilane ülikooli astudes on saanud juba eelnevalt teatava spetsiaalsuse matemaatikas (tavaliselt keskkoolide juures). Vaatamata sellele eelnevale spetsialiseerumisele alustatakse ülikoolis põhiliselt selle samaga, mis meilgi. Erinevaid aineid on aga vähem. Torkab silma matemaatilise statistika suur osatähtsus nii matemaatikute kui ka teiste spetsialistide ettevalmistuses. Tundub, et (praktika nõudeid silmas pidades) on meil selles osas vaja otsustavalt oma õppeprotsessi täiustada.

Teise erinevusena torkas silma, et neil on loenguid umbes poole vähem kui meil (ca 15 tundi nädalas). Loetakse enamikus teoreetilist materjali ilma ülesandeid lahendamata. Viimased jäetakse üliõpilase enda mureks. Eksamid on aga kirjalikud, kus küsimustena esinevad ülesanded (enamikus teoreetilist laadi, mitte arvutuslikud).

Peale Swansea viibisin veel lühemat aega Exeteri ja Londoni ülikoolides. Neil külastustel toimusid vestlused nii õppeprotsessi kui ka teaduslike probleemide üle. Inglise kolleegide palvel tuli väga mitmel korral kõnelda meie ülikoolide õppeprotsessist. Jäi mulje, et nad hindavad meie ülikoolide õppeprotsessi kõrgemalt kui oma.

Olin huvitatud kohtumistest mitmete matemaatikutega, kes uurivad summeerimismenetluste üldisi küsimusi. Niisuguste küsimustega tegelevad mitmed inglise matemaatikud. Nendest dr. Coppinguga Exeteris ja dr. Mehdiga Londonis oli mul eriti meeldivaid ja kasulikke vestlusi. Kuid ka vestlused dr. Bakeriga Swanseas ja dr. Bosenquet'iga Londonis andsid nii mõndagi kasulikku.

Siinkohal ehk ei ole ülearune märkida, et üsna mitmelgi korral tuli olla meie tööde tutvustajaks (nii vastavas seminari ettekandes kui ka individuaalsetes vestlustes), sest paljudel juhtudel teati meie töödest kaunis pealiskaudselt. Põhjuseks on siin enamikus asjaolu, et inglise matemaatikud ei tunne sel määral vene keelt, et nad võiksid lugeda venekeelseid artikleid.

Tundes mõningal määral huvi koolimatemaatika moderniseerimise probleemide vastu, sai vesteldud ka sellel teemal. Tuleb aga märkida, et haridussüsteemi erinevus ei võimalda meil neist asjadest ühtses plaanis kõnelda. Võis märgata, et mõningad matemaatikud (näit. prof. Weston, kes valmistas ette ulatusliku materjali seoses matemaatilise analüüsi õpetamisega keskhariduse süsteemis) tahavad minna moderniseerimises küllalt kaugele. Teiselt poolt aga (näit. prof. Rogers) taotletakse hoopiski mõõdukamat lähenemist.

Kui teha väikest kokkuvõtet sellest

sõidust, siis tuleb mainida, et sel viisil sai sõlmitud rida otseseid sidemeid Inglismaa ja Tartu matemaatikute vahel, sai kaasa toodud suur hulk huvitavat ja kasulikku kirjandust ning nähtud ja kuuldud palju huvitavat Inglismaast, tema ülikoolidest ning üliõpilastest.

# „Matemaatika ja kaasaja" keelenurk

## MIDA TEHA ELEKTRONARVUTIGA?

**Ü. Kaasik**

Terve 1965. aasta jooksul oli vabariigi ajakirjanduses palju juttu elektronarvutile uue nime panemise küsimustest. Nimemuutmise vajadust põhjendati sealjuures peamiselt kahe asjaoluga: 1) senine nimetus «elektronarvuti» on liitsõna ja kasutamiseks kohmakas; 2) senine nimetus ei võimalda vastava tegusõna moodustamist. Nende puuduste kõrvaldamiseks pakutigi terve rida uusmoodustisi, milledest kõige rohkem kõneainet on andnud «raal» ja «elar».

Nimemuutmise vajaduse esimese põhjenduse vastu on muidugi võimalik vaielda ja koguni mitmelt seisukohalt. Kõige tõsisemaks vastuväiteks on ilmselt see, et «elektronarvuti» asemel kasutatakse praktikas ju enamasti «arvutit» («elektron-» lisatakse vaid siis, kui on tarvis eriti rõhutada). Sõna «arvuti» pole aga enam ei eriti pikk ega ka kohmakas.

Allakirjutanu arvates see vastuväide siiski uue sõna vajadust täielikult ei kõrvalda, sest «arvuti» on ju samuti uus sõna, mis loodi just «arvutusmasina» asendamiseks. Ühe ja sama sõna kasutamine aga nii laiema kui ka kitsama klassi objektide nimetamiseks igatahes keele rikkuse tunnistajaks küll ei ole.

Nimemuutmise vajaduse teine põhjendus on allakirjutanu arvates täiesti kunstlik. Ei ole nimelt arusaadav, milleks oleks tarvis «elektronarvutile» vastavat tegusõna. Kas ta peab tähendama kõike seda, mida elektronarvutiga teha saab või ainult arvuti abil lahendamist, arvutamist, koostamist, uurimist vms.? Pealegi pole selline moodustamisviis eesti keelele üldse omane. Meil puuduvad ju praktiliselt niisugused tegusõnad, mis oleksid tuletatud väga mitmeks otstarbeks kasutatavate tööriistade nimedest. Kui näiteks oletada hetkeks, et eesti keeles on olemas sõna «pliiatseerima», siis kerkib kohe küsimus, mida see sõna peaks tähendama. Kas pliiatsiga kirjutamist või pliiatsiga joonistamist (võrdle: ülesande lahendamine elektronarvutil, protsessi modelleerimine elektronarvuti abil)? Või neid mõlemaid? Kui aga nii, siis kas pliiatsiga hammaste torkimine on ka pliiatseerimine (võrdle: elektronarvutiga maletamine)?

Neid kaalutlusi arvestades tuleks meil elektronarvutile uue nime otsimisel mitte hoolida sellest, kas uus nimi sobib vastava tegusõna moodustamiseks või mitte. Sellega langeb kohe kõrvale ebaõnnestunud uusmoodustis «raal», mille a i n s a k s eeliseks on «raalimine». Teistest seni pakutud võimalustest tundub artikli autorile vastuvõetav olevat vaid «elar», mis sobib nii kõla kui ka saamisloo poolest. Selle sõna kasuks räägib veel asjaolu, et üksteisest sõltumatult on teda pakkunud mitu isikut (nähtavasti oli selle uue sõna esimeseks tuletajaks dots. J. Gabovitš).

## MÕNINGAID MEHHAANIKA-ALASE TERMINOLOOGIA KÜSIMUSI

**Ü. Lepik, L. Roots**

Viimasel ajal on paljudes distsipliinides esiplaanile kerkinud terminoloogia küsimused. See on ka arusaadav, sest järjest laienev eestikeelsete õpikute ja teatmeteoste väljaandmine eeldab ühtset ja hästi läbimõeldud terminoloogiat. Kui vaadata sellelt seisukohalt mehhaanika-alaseid termineid, siis on üldpilt kahjuks üsna kirju. Et teadusliku terminoloogia väljakujunemine mehhaanikas on toimunud suurel määral stiihiliselt, siis on tekkinud olukord, kus meie õppeasutustes kasutatakse sama mõiste jaoks erinevaid termineid. Et aidata kaasa terminoloogia ühtsustamisele, on tekkinud mõte korraldada neis küsimustes väike diskussioon «Matemaatika ja kaasaja» veergudel. Asja alustamiseks esitame mõned vaidlusalused terminid koos omapoolsete lühikeste põhjendustega.

Oleme juba ette tänulikud kõigi kriitiliste (ja ka mittekriitiliste) märkuste ning täiendavate ettepanekute eest.

1. Jäik keha (твердое тело). See tundub olevat kõige lähem mõttele «deformeerimatu», millest sõnad «kõva» ja «kindel» on tähenduselt kaugemal. Sõna «kõva» tähendab hoopis muud mõistet (kõvadus on kõvaduse skaalas mõõdetav omadus); sõnal «kindel» on aga ka teisi tähendusi (näit. kindel — ebakindel). Termin «jäik» vastab kõige täpsemini ka inglis- ja saksakeelsetele vastetele «rigid» ja «starr». Sõna «jäik» kasuks kõneleb veel asjaolu, et nimetust «принцип затвердывания» on tõlgitud eesti keelde (ja see on ka vististi ainus mõistlik vaste) kui «jäigastumisprintsiipi».

2. Seos (связь). Eestikeelses kirjanduses selle kõrval kasutatud vaste «side» (gen. «sideme») oleks mõeldav küll geomeetriliste seoste puhul, ei tundu olevat aga otstarbekohane mitteholonoomsete seoste puhul. Ka ei sobiks tõlkida terminit «энергия связи» «sideme (või sidemete) energiana». Et nimetusel «sideenergia» on pealegi juba teine tähendus, siis ainsaks sobivaks vasteks näib siin olevat «seosenergia».

3. Masspunkt (материальная точка). See on lühem paralleelselt kasutatud vormist «materiaalne punkt» ja peaks selle tõttu olema otstarbekam. Tuleks kaaluda ka nimetust «punktmass» («punktlaengu» eeskujul).

4. Nihutus (перемещение). Termin «nihe» ei ole siin mõeldav, sest see on vasteks sõnale «сдвиг». Hästi sobiv ei ole ka «paigutus» oma staatilise sisu tõttu. Teised soovitatud terminid, nagu «siire», «lüke», pole siiani veel läbi löönud. Meile tundub kõige otstarbekamana kasutada siin vastet «nihutus». Puuduseks oleks vaid asjaolu, et see termin on mõnevõrra sarnane teise terminiga «nihe». See kõlaline sarnasus ei tohiks aga olla määrav.

5. Võimalik nihutus (возможное перемещение). Kõige adekvaatsem oleks siin «virtuaalne nihutus», tundub aga, et selle kõrval oleks vaja ka eestikeelset sõna. Mõnel pool pakutud variant «mõeldav nihutus» hästi ei sobi oma idealistliku värvingu tõttu: välja mõelda võib igasuguseid nihutusi, meid aga huvitab nihutus, mida seosed antud ajamomendil võimaldavad.

6. Liikumishulk ja liikumishulga moment (количество движения и момент количества движения) pole meie arvates üldse vajalikud. Nende asemel tuleks kasutada nimetusi «impulss» ja «pöördeimpulss» (või ka «impulsimoment»). Eelkõige on need nimetused tunduvalt lühemad ja seetõttu kasutamiseks mugavamad. «Liikumishulk» on halb juba sellepärast, et ta ei ole ammendav liikumise mõõt. Liikumishulga mõistet ei kasutata ka analüütilises mehhaanikas, kus suurusi $m\dot{x}$, $m\dot{y}$, $m\dot{z}$ nimetatakse «impulssideks». Märkigem, et mitmetes uuemates mehhaanika õpikutes (näit. Ландау-Лифшиц «Механика») on loobutud liikumishulga mõiste sissetoomisest.

7. Ülekandeliikumine (переносное движение). Mõeldav oleks ka «kaasaliikumine», kuigi sel korral väljend «kaasaminekukiirus» on kohmakam kui «ülekandekiirus». Vähem õnnestunud on ka sõnakujud «ülekantav kiirus» ja «kaasaliikumise kiirus».

8. Põrge (удар). Teine vaste «löök» ei sobi siia, sest löök on osa põrkumise protsessist (põrkel toimub ühe keha löök vastu teist). Põrge jätkub ka pärast löögi lõppemist.

9. Plastilisus (пластичность). Oleme eelistanud seda vormile «plastsus» peamiselt sellepärast, et viimast kuju ei fikseeri Eesti Õigekeelsuse Sõnaraamat. Ka pole sõnaühend «elastne-plastne» kõlaliselt kuigi sobiv.

10. Pideva keskkonna mehhaanika (või ka pidevate keskkondade mehhaanika — механика сплошных сред). Kuigi see nimetus on mõnevõrra lohisev, pole seni paremat õnnestunud leida. Teise termini «kontiinuummehhaanika» (vrd. saksakeelne «Kontinuumsmechanik») vastu kõneleb asjaolu, et kontiinuum ei pruugi olla üldse mingi keskkond (tühi algruum on ka kontiinuum).

# Kroonika

## AUGUST KASVAND 75-AASTANE

Meie vabariigi üks nimekamaid matemaatika pedagooge ja metoodikuid ning paljude matemaatika kooliraamatute autor August Kasvand sai 30. detsembril 1965. a. 75-aastaseks.

August Kasvand sündis Võrumaal Erastvere vallas. 1909. aastal omandas ta Võru Linnakooli juures algkooliõpetaja kutse ning Pärnu Gümnaasiumi juures matemaatika aineõpetaja kutse. Seejärel töötas ta õpetajana Nüpli Algkoolis, Otepää Keskkoolis, Võru Poeglaste Gümnaasiumis ja Tartu Linna 16. Algkoolis. Omades juba 10-aastast pedagoogistaaži, asus August Kasvand oma teadmisi täiendama Tartu ülikooli matemaatika-loodusteaduskonnas, mille lõpetas 1933. a. *cum laude*. Nüüd jätkus tema pedagoogiline tegevus matemaatika ja astronoomia õpetajana Tartu Linna Tütarlaste Gümnaasiumis ning Tartu 1. Keskkoolis.

Alates 1944. aastast töötas August Kasvand Tartu Õpetajate Seminaris matemaatika ja matemaatika õpetamise metoodika õpetajana. Kui 1947. aastal asutati Tartu Õpetajate Instituut, nimetati A. Kasvand selle füüsika-matemaatika kateedri juhatajaks.

1957. aastal siirdus August Kasvand pensionile.

Ka pensionärina on ta reipalt kaasa löönud matemaatikaõpetajate ettevalmistamisele nii Tartu Pedagoogilises Koolis kui ka Tartu Riiklikus Ülikoolis.

Paljud vabariigi matemaatikaõpetajad on oma ettevalmistuse saanud August Kasvandi juures ning rõhuv enamik vabariigi kodanikest on oma matemaatika-alaseid teadmisi ammutanud August Kasvandi kirjutatud kooliraamatuist.

Nende kõigi nimel juubilarile

s ü d a m l i k   õ n n i t l u s!

## UUT LISA MATEMAATIKA AJALOOLE EESTIS

Vilniuses anti Leedu NSV TA Loodusteaduste ja Tehnika Ajaloo Komisjoni toimetusel omaette raamatuna välja Baltimaade VI teaduse ajaloo konverentsi materjalid[1], millest asjahuviline lugeja võib leida mitmeid lisa-

---

[1] Материалы VI-ой конференции по истории науки в Прибалтике. Академия наук Литовской ССР, Комиссия по истории естествознания и техники. Вильнюс, 1965.

Konverents toimus 26.—27. oktoobril 1965. a. Vilniuses.

andmeid matemaatika ja füüsika ajaloo kohta Eestis. Matemaatika ajaloo osas väärivad märkimist näiteks järgmised materjalid: N. D. Bespamjatnõh (Grodno) — Baltimaade matemaatikaõpetajate loomingulisest tegevusest XIX sajandil (lk. 4—5; K. G. Kupfferi ja M. G. Pauckeri uurimustest ja õpikutest), J. M. Gaiduk (Harkov) — T. Klausen matemaatikuna (lk. 9), R. I. Galtšenkova (Leningrad) — Algebra Tartu ülikoolis XIX sajandil (lk. 11—13), S. A. Dahhia (Harkov) — Fr. Schuri tegevus Tartu ülikoolis ja tema hilisemad sidemed vene teadusega (lk. 21), E. P. Ožigova (Leningrad) — F. Minding ja Peterburi Teaduste Akadeemia (lk. 49—50), I. B. Pogrebõsski (Moskva) — Tartu (Derpti) ülikooli matemaatikud XIX saj. keskel (lk. 59). Elav huvi matemaatika ajaloo vastu Eestis, millest annavad tunnistust mainitud kirjutised, näitab, et Tartu ülikool andis hinnatava lisa XIX sajandi matemaatikale Venemaal.

Ka füüsika ja astronoomia ajaloo kohta Tartu ülikoolis võib raamatust leida mitmeid täiendavaid andmeid. Nii käsitletakse J. Mädleri, A. Oettingeni, B. I. Sreznevski, B. B. Golitsõni, A. I. Sadovski jt. tegevust Tartus. V. L. Tšenakal Leningradist on avaldanud lühikese ülevaate päikesekelladest Eestis.

**Ü. Lumiste**

## PROGRAMMEERITUD ÕPETAMISE ALANE KONVERENTS MINSKIS

Ajavahemikul 15.—17. dets. 1965. a. toimus Minskis Valgevene, Eesti, Läti ja Leedu NSV ühine konverents teemal «Programmeeritud õpetamine».

Plenaaristungeil kuulati ära 11 ettekannet. Üks päev oli pühendatud näitlikele õppustele ja sektsioonide tööle. Plenaaristungite ettekannetest olid huvipakkuvamad dots. A. Moliboki (Minsk) ettekanne «Programmeeritud õpetamine ja tema koht spetsialistide ettevalmistamisel», dots. J. Tšubuki (Kiiev) ettekanne «Programmeeritud õpetamise kogemusi Kiievi Ehitusinseneride Instituudis» ning Tartu matemaatiku dots. I. Kulli ettekanne «Mudelid õppeprotsessis».

Näituse stendidel tutvustati programmeeritud õpetamise alast kirjandust ning õppeasutustes koostatud programme. Eesti väljapanekutest äratasid tähelepanu kõige enam perfoplaadid, eriti «Kita». Eraldi näitus oli õpetavatest masinatest. Siin oli esindatud enamik Nõukogude Liidus konstrueeritud masinatest. Minski Pedagoogilises Instituudis võis tutvuda ka kujutava geomeetria klassiga, kus on rakendatud programmeeritud õpetamise elemente. Huvitavad olid enesekontrolli stendid.

Õpetavate masinate kasutamist demonstreeriti lahtistes tundides. «Mintšanka» abil viidi läbi praktikumid kõrgemas matemaatikas, masinat «Pioneer» kasutati võõrkeele tundides. Lahtistest tundidest kõige parema mulje jättis nii tunni metoodika kui ka tehniliste vahendite rakendamise seisukohalt võõrkeele tund Minski Võõrkeelte Instituudis. Kabinetti oli sisse seatud magnetofonidega kabiinid, õpetajal oli võimalus töötada iga üliõpilasega individuaalselt. Tulemused keeleoskuse ja hääldamise osas olid väga head.

ENSV-st oli konverentsil 30 delegaati. Sektsioonides esinesid ettekannetega: U. Agur, J. Sõerd, E. Hendre, T. Palm, U. Usai, A. Metsa, A. Nurk, P. Moosberg, H. Õiglane. Sektsioone oli kokku 9, kõik sektsioonid töötasid samaaegselt, seetõttu polnud võimalik kuulata kõiki ettekandeid, mis oleksid huvi pakkunud.

Matemaatika-füüsika sektsioonis oli 10 ettekannet, neist 4 käsitlesid programmeeritud õpetamise rakendamist matemaatikas. Tallinna 21. Keskkooli õpetaja T. Palmi ettekandes «Õpilaste iseseisev töö matemaatika tunnis programmeeritud õpetamise printsiibil» esitati läbiviidud eksperimendi tulemused ning tulemuste analüüs. T. Palm andis meetodile positiivse hinnangu. Allakirjutanu ettekanne sisaldas analoogilise eksperimendi analüüsi. Eksperiment viidi läbi kõrgema matemaatika praktikumis EPA-s. Ka siin andis programmeeritud õpetamine suhteliselt paremaid tulemusi.

Konverentsi plenaaristung lõppes akadeemik A. Bergi esinemisega, mis meelitas kokku rohkem kuulajaid, kui saal mahutas. Toome siin vaid mõned mõtted akad. Bergi pikast, kuid huvitavast sõnavõtust. Programmeeritud õpetamine on küberneetika pedagoogikas, ta on pedagoogilise töö teaduslik organiseerimine. Õppetöö tulemusi peab pidevalt statistiliselt analüüsima, teisiti kaotab programmeeritud õpetamine oma mõtte. Akad. Berg märkis, et Balti riikides on programmeeritud õpetamise alal seni kõige enam ära tehtud ja ta loodab, et siin kujunebki programmeeritud õpetamise tsentrum.

Konverents leidis, et on aeg üldsõnaliselt propageerimiselt üle minna programmeeritud õpetamise rakendamisele praktikasse laias ulatuses, kusjuures koostatud programme ja töö tulemusi tuleb pidevalt analüüsida, et leida optimaalne programm. Programmeeritud õpetamise hindamisel ei saa aluseks võtta ainult keskmist hinnet, tuleb arvestada ka ajakulu ja iseseisvat tööd.

**Hilja Õiglane**

## ÜLELIIDULINE MAJANDUSMATEMAATIKA-ALANE KONVERENTS

Viimastel aastatel on nii majandusteadlaste kui ka matemaatikute tähelepanu üha enam köitma hakanud küsimused, mis on seotud tööstusettevõtete juhtimise ja planeerimisega ning elektronarvutite kasutamisega selles valdkonnas. Mitmesuguste automaatse juhtimise ja planeerimise süsteemide väljatöötamisega tegelevad praegu paljude teaduslike asutuste ja ettevõtete töötajad.

Et teha kokkuvõtteid senistest tulemustest ja vaagida uusi suundi, toimus 20.—23. dets. 1965. a. Moskvas NSVL TA Majandusmatemaatika Keskinstituudi korraldatud I üleliiduline konverents teemal: «Majandusmatemaatiliste meetodite ja elektronarvutite kasutamine tööstusettevõtete juhtimisel». Konverentsil, mille osavõtjate arv ulatus poole tuhandeni ja kus kõrvuti teenekate teadlastega esinesid ka teadlaste noorema generatsiooni esindajad ning tootmisjuhid, anti ülevaade juhtimise ja planeerimise automatiseeritud süsteemide väljatöötamise metodoloogilistest suundadest, konkreetsetest rakendustest ja nende puhul kasutatud majandusmatemaatilistest meetoditest.

Kuigi välja oli kuulutatud 55 ettekannet, kujunes ettekannete tegelik arv konverentsil tunduvalt suuremaks. Ettekannetele järgnesid sageli elavad ja sisukad mõttevahetused nii istungitel kui ka kuluaarides. Konverentsi istungid toimusid paralleelselt kolmes sektsioonis:

1) tööstusettevõtete juhtimise automatiseeritud süsteemide väljatöötamise metoodika ja etapid;

2) tööstusettevõtete juhtimise automatiseeritud süsteemide konkreetsed projektid ja nende juurutamine;

3) majandusmatemaatiliste meetodite ja mudelite kasutamine planeerimise ja juhtimise automatiseeritud süsteemide väljatöötamisel.

Eesti NSV-d esindasid konverentsil TA Küberneetika Instituudi, Tartu Riikliku Ülikooli, Tallinna Tehnoloogia Instituudi ja teiste asutuste töötajad. Ettekannetega esinesid Ü. Kaasik ja R. Mullari teemal «Matemaatiliste meetodite rakendamise üldpõhimõtetest kalendrilisel planeerimisel» ning R. Mullari ja S. Luht teemal «Tootmisülesande mehhaniseeritud koostamine».

Konverentsil vastuvõetud otsuses juhiti tähelepanu vajadusele tõhustada tööde koordineerimist ja informatsiooni vahetamist majandusmatemaatikas teostatavate uurimuste kohta. Samuti juhiti tähelepanu mõningate organisatsiooniliste muudatuste teostamise vajalikkusele, nagu uue teaduste kandidaadi kraadi sisseviimine, palkade korrigeerimine jne.

**V. Tinn**

## UUS LEND MATEMAATIKUID TARTU RIIKLIKUST ÜLIKOOLIST

Ka käesoleva aasta talvel lõpetasid matemaatikud oma $5\frac{1}{2}$-aastase stuudiumi Tartu Riiklikus Ülikoolis. 20. ja 24. detsembril kaitsti matemaatikaosakonnas järgmisi diplomitöid:

1. A l a p u u, Paul. Ühest $\mu^{-}$-haarde formaalsest mudelist. (Juhendaja ENSV TA FAI van. tead. tööt. M. Kõiv.)

2. K o l k, Enno. Summeeruvustegurid üldistatud absoluutse Cesaro-sum-

meeruvuse jaoks. (Juhendaja prof. G. Kangro.)

3. Riives, Kaarin. Eukleidiliste liikumiste alamrühmadest ja nende orbiitidest. (Juhendaja dots. Ü. Lumiste.)

4. Tammeraid, Ivar. Merceri tüüpi teoreemid integraalteisenduste puhul. (Juhendaja prof. G. Kangro.)

5. Hoolma, Mare. Määratud integraalide ligikaudne arvutamine ja integraalialuse funktsiooni lähendamine Tšebõšovi interpolatsioonipolünoomidega. (Juhendaja Majandusmatemaatika Keskinstituudi juhtiv insener A. Jägel.)

6. Kärner, Olavi. Maatriksite sümmeetriast. (Juhendaja dots. J. Hion.)

7. Lossmann, Aavo. Pöördmaatriksi parandamise algoritmid ja nende rakendamine lineaarse planeerimisülesande lahendamisel. (Juhendaja A. Jägel.)

8. Palge, Anne. Mõned poolpidevate maatriksmenetluste klassid. (Juhendaja dots. E. Jürimäe.)

9. Prisk, Leo. Õmblusvabriku «Sangar» juurdelõikuskaartide arvutamine. (Juhendaja A. Jägel.)

10. Rooba, Elve. Juhtimiskäskude silumise programm. (Juhendaja Nõo Keskkooli arvutuskeskuse insener A. Korjus.)

11. Vihalem, Kai. Suuremõõtmeliste transpordiülesannete lahendusalgoritmi ja alglahendite leidmise algoritmide programmid. (Juhendaja A. Jägel.)

12. Möls, Mart. Mõningaid tulemusi õpilaste võimekuse uurimisest. (Juhendaja dots. O. Prinits.)

Neist neli esimest omandasid matemaatiku, seitse järgnevat matemaatik-arvutusmatemaatiku kvalifikatsiooni; M. Möls ja H. Koplioja (lõpetas riigieksamitega) said matemaatik-matemaatikaõpetaja kutse. Peale nimetatute lõpetasid matemaatikaosakonna riigieksamitega veel Paavo Rooba ja Silvia Aben (matemaatik-arvutusmatemaatiku kvalifikatsiooniga).

Kaugõppe Pedagoogilise Instituudi lõpetasid matemaatika erialal ja omandasid keskkooli matemaatikaõpetaja kutse:

1. Alliksaar, Meeta-Marie
2. Keerend, Aime
3. Ojaots, Jefim
4. Rimm, Karin
5. Sepp, Endla
6. Tamm, Asta
7. Toomingas, Valli.

# Bibliograafia

## Eesti NSV-s ilmunud matemaatika-alase kirjanduse nimestik September—november 1965

(Koostanud E. Annus)

### RAAMATUD

Etverk, E. **Metoodilised materjalid kaugõppe ettevalmistuskursustel õppijaile. Matemaatika.** Tln., 1965. 27 lk. (Tallinna Polütehniline Instituut.)

**Kujutav geomeetria.** Harjutusülesanded. Tln., 1965. 59 lk. (Tallinna Polütehniline Instituut.) — Pealk. ees autorid: M. Kraaving, N. Paluver, O. Rünk, E. Vallas. — Paralleeltekst vene k. — Trükitud rotaprindil.

**Kujutav geomeetria.** Lisaharjutusülesandeid ehituslike erialade jaoks. Tln., 1965. 20 lk. (Tallinna Polütehniline Instituut.) — Pealk. ees autorid: M. Kraaving, N. Paluver, O. Rünk, E. Vallas. — Paralleeltekst vene k. — Trükitud rotaprindil.

**Kõrgem matemaatika.** Programm, metoodilised juhendid ja kontrolltööde ülesanded. Ökonoomika erialade kaugüliõpilastele. Tln., 1965. 35 lk. (Tallinna Polütehniline Instituut.)

Тобиас Т. **О связанных с интегралом Винера численных методах.** Автореферат. Таллин, 1965. 10 с. (АН Эстон. ССР) — Ротапринт.

**Eesti NSV 25-ndale aastapäevale pühendatud III teaduslik-pedagoogilise konverentsi «Täppisteaduste arengu ja metoodika põhiküsimusi ENSV-s» ettekannete resümeed.** Trt., 1965. (Tartu Riiklik Ülikool. ENSV TA Loodusuurijate Selts. ENSV Haridusministeerium.)

Matemaatika-alased resümeed: A. Haamer. Programmeeritud õpetamise kogemusi funktsionaalse sõltuvuse kordamisel keskkooli lõpuklassis. — E. Jürimäe. Kaasaegne matemaatika ja matemaatika õpetamise ülesanded. — Ü. Kaasik. Matemaatilise planeerimise põhisuundadest. — G. Kangro. Mõned ridade teooria uurimissuunad Eesti NSV-s. — H. Kull. Pistikplaatide kasutamisest keskkooli matemaatikatundides. — I. Kull. Matemaatika-alaseid probleeme seoses õppeprotsessi optimiseerimisega. — J. Lõhmus. Sümmeetrilise mikrokosmose matemaatilised probleemid. J. Reimand. Majanduslikud küsimused keskkooli matemaatikakursuses. — A. Telgmaa. Järkjärgulise lähendamise meetodi olemusest. — K. Velsker. Tõenäosusteooria ja matemaatilise statistika elementide käsitlemise vajalikkusest koolis. — E. Virma. Dünaamiline planeerimine ja variatsioonarvutus. — H. Õiglane. Kõrgema matemaatika programmeeritud õpetamisest Eesti Põllumajanduse Akadeemias.

### PERIOODIKAS ILMUNUD ARTIKLID

**Eesti NSV Teaduste Akadeemia Toimetised.** Füüsika-matemaatika- ja tehnikateaduste seeria. Tln., 1965.

**Nr. 3.** Matemaatika-alased artiklid (vene k., resümeed eesti, inglise ja saksa k.):

S. Ulm. Üldistatud Steffenseni meetodi algoritmid. — H. Salum. Numbriliste struktuurskeemide kirjeldamise ja modelleerimise keel.

Lints, A. Arvutusmängud algklassides. — «Nõukogude Kool», 1965, nr. 9, lk. 691—697 (lõpp).

Rünk, O. Nupukuse proovipähkleid. — «Tehnika ja Tootmine», 1965, nr. 8, lk. 382.

Telgmaa, A. Õpilase arvutuskultuuri küsimusi. — «Nõukogude Kool», 1965, nr. 9, lk. 707—710.

## Ülesandeid elementaarmatemaatikast

1. Konstrueerida kolmnurk $ABC$ külje $AB$, nurgapoolitaja $AD$ ja tipust $C$ nurgapoolitajale $AD$ tõmmatud ristlõigu $CG$ järgi.
2. Leida rea $1+3+4+6+7+9+10+\ldots$ $n$ liikme summa.
3. Tõestada, et

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}>2(\sqrt{n+1}-1).$$

4. Koonuse kõrgus on $h=\sqrt{3}$ ja moodustaja on $l=3$. Leida suurima pindalaga lõige, mis tekib koonuse lõikamisel koonuse tippu läbiva tasandiga.

## KOGUMIKU SEITSMENDA VIHIKU ÜLESANNETE LAHENDUSED

### A. Elementaarmatemaatika

Ülesande nr. 1 lahendus. Et nelja aastaga suurenes perekonna koguvanus 15 aasta võrra, siis peab perekonna noorim liige (poeg) olema praegu 3-aastane. Edasi on ülesande tingimuste põhjal kerge leida, et tütar on 5-aastane, ema 31-aastane ja isa 34-aastane.

Ülesande nr. 2 lahendus. a) et arvu 19 paaritud astmed lõpevad 9-ga ja arvu 91 kõik astmed lõpevad 1-ga, siis $19^{91}+91^{19}$ lõpeb nulliga, s. o. ta jagub 10-ga;

b) et

$$43^2=1849,\quad 43^3=79\,507,\quad 43^4=3\,418\,801,\quad 43^5=147\,008\,443$$

ja

$$93^2=8649,\quad 93^3=804\,357,\quad 93^4=74\,805\,201,\quad 93^5=6\,956\,883\,693,$$

siis arvude 43 ja 93 astmete kaks viimast numbrit ei muutu astendaja suurendamisel nelja võrra. Järelikult $43^{93}$ lõpeb numbritega 43 ja $93^{43}$ (nagu $93^3$) lõpeb numbritega 57. Seega $43^{93}+93^{43}$ lõpeb kahe nulliga, s. o. ta jagub 25-ga;

c) et

$$57^2=3249,\quad 57^3=185\,193,\quad 57^4=10\,556\,001$$

ja

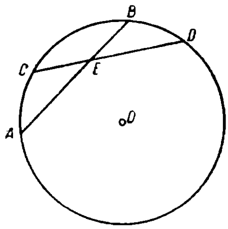
$$75^2=5625,\quad 75^3=421\,875,\quad 75^4=31\,640\,625,$$

siis arvu 57 astme kolm viimast numbrit ei muutu astendaja suurendamisel nelja võrra ning arvu 75 aste lõpeb 875-ga, kui astendaja on ühest suurem paaritu arv. Seetõttu $57^{75}+75^{57}$ lõpeb numbritega 068 $(193+875=1068)$ ning ei jagu 8-ga;

d) Arvud 46 ja 64 annavad 3-ga jagamisel jäägi 1, s. t. nad avalduvad kujul $3a+1$, kus $a$ on naturaalarv. Et kahe seda tüüpi arvu korrutise

$$(3a+1)(3b+1)=9ab+3a+3b+1=3(3ab+a+b)+1$$

jagamisel 3-ga saame ka jäägiks 1, siis nii $46^{64}$ kui ka $64^{46}$ jagamisel aga jäägi 2. Järelikult viimane arv ei jagu 3-ga.



Ülesande nr. 3 lahendus. Oletame väite vastaselt, et kõõlud $AB$ ja $CD$ (mis ei läbi ringjoone keskpunkti) poolitavad teineteist. Siis nende kõõlude lõikepunkti $E$ läbiv raadius poolitab nii kõõlu $AB$ kui ka kõõlu $CD$. Kuna kõõlu poolitav raadius on risti kõõluga, siis $OE \perp AB$, $OE \perp CD$. Et aga antud punktist saab antud sirgele tõmmata ainult ühe ristsirge, siis loeme jõudnud vastuoluni, m. o. t. t.

Ülesande nr. 4 lahendus. Joonestuskolmnurga abil joonestame täisnurga, mille tipp asub ringjoonel ja mille haarad lõikavad ringjoont punktides $A$ ja $B$. Lõik $AB$ on ringjoone diameetriks. Sama võttega leiame veel ühe diameetri ning diameetrite lõikepunkt annabki ringjoone keskpunkti.

Ülesande nr. 5 lahendus. Teine grupp läbib 15 km poolteise tunniga; seega ta kiirus on $10\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Järelikult kulub teisel grupil teeosa $BE$ läbimiseks 1 tund ning esimesel grupil teeosa $AE$ läbimiseks 2 tundi. Seega esimese grupi kiirus on $5\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Teeosa $AC$ pikkuse leidmiseks saame võrrandi

$$\frac{AC}{5}+\frac{AC-5}{10}=1{,}5,$$

millest

$$AC=6\frac{2}{3}\ (\text{km}).$$

Ülesande nr. 6 lahendus. Olgu lõigu $FG$ keskpunkt $H$ ning $H_1$ tema ristprojektsioon tahule $AA_1B_1B$. Olgu kuubi serva pikkus $a$. Siis $AB_1 = a\sqrt{2}$, $AH_1=\frac{3}{4}AB_1=\frac{3\sqrt{2}}{4}a$ ning $HH_1=\frac{a}{2}$. Kolmnurkade $AHH_1$ ja $AEB_1$ sarnasuse tõttu

$$\frac{HH_1}{AH_1}=\frac{EB_1}{AB_1},$$

millest leiame, et

$$EB_1=\frac{2}{3}a.$$

Seega $EC_1=\frac{1}{3}a$ ning punkt $E$ jaotab serva $C_1B_1$ suhtes $1:2$.

Ülesande nr. 7 lahendus. Teisendame antud võrratust järgmiselt:

$$\begin{aligned}&5\sin^2 x+(2\sin x\cos x)^2>4(1-2\sin^2 x),\\&5\sin^2 x+4\sin^2 x(1-\sin^2 x)>4-8\sin^2 x,\\&4\sin^4 x-17\sin^2 x+4<0.\end{aligned}$$

Tähistades $\sin^2 x=y$, saame

$$4y^2-17y+4<0.$$

Kuna selle võrratuse lahendiks on $\frac{1}{4}<y<4$, siis

$$\frac{1}{4}<\sin^2 x<4,$$

$$|\sin x| > \frac{1}{2},$$

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi < \sin x < \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Ülesande nr. 8 lahendus. Kuna $\sin^2\alpha \leqslant 1$, siis

$$2 \sin^2 \frac{x}{2} \sin^2 \frac{x}{6} \leqslant 2.$$

Kuna

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 - 2 + \frac{1}{x^2} \geqslant 0, \quad \text{siis} \quad x^2 + \frac{1}{x^2} \geqslant 2.$$

Seega avaldise $x^2 + \frac{1}{x^2}$ vähim väärtus on 2, mille ta omandab $x = \pm 1$ puhul.

Järelikult võrrandi lahendiks võib olla ainult kas $x = 1$ või $x = -1$. Kuid kerge on veenduda, et nendel $x$ väärtustel võrrandi vasak pool on väiksem kahest. Tõepoolest, kuna

$$\frac{1}{6} < \frac{1}{2} < \frac{\pi}{6}, \quad \text{siis}$$

$$2 \sin^2 \frac{1}{2} \cdot \sin^2 \frac{1}{6} < 2 \sin^2 \frac{\pi}{6} \cdot \sin^2 \frac{\pi}{6} = \frac{1}{8}.$$

## B. Kõrgem matemaatika.

Ülesande nr. 1 lahendus. Rida koondub absoluutselt, sest

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\tan \frac{x}{2^{n+1}}}{\tan \frac{x}{2^n}} = \frac{1}{4}\left(1 - \tan^2 \frac{x}{2^{n+1}}\right),$$

$$\lim_{n \to \infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{1}{4}.$$

Ülesande nr. 2 lahendus. Kuna $a_k = \cos\alpha + \sin\alpha \cot k\Theta$, siis

$$a_1 a_3 - a_2^2 = \sin\alpha \cos\alpha (\cot\Theta - 2\cot 2\Theta + \cot 3\Theta) + \\ + \sin^2\alpha (\cot\Theta \cot 3\Theta - \cot^2 2\Theta).$$

Samasuse $\cot\Theta \cot 3\Theta - \cot^2 2\Theta = \cot 4\Theta (\cot\Theta - 2\cot 2\Theta + \cot 3\Theta)$ põhjal

$$a_1 a_3 - a_2^2 = \sin\alpha (\cot\Theta - 2\cot 2\Theta + \cot 3\Theta)(\cos\alpha + \sin\alpha \cot 4\Theta) = \\ = (a_1 - 2a_2 + a_3) a_4.$$

Järelikult

$$D = \frac{a_1 a_3 - a_2^2}{a_4} + 2a_2 - a_1 - a_3 = 0.$$

## «MATEMAATIKA JA KAASAJA» VIHIKUTE 1—10 SISUKORD

## PROGRAMMEERIMINE



## MAJANDUSMATEMAATIKA



## ARITMEETIKA, ARVUTEOORIA JA ELEMENTAARALGEBRA



## ELEMENTAARGEOMEETRIA

MATEMAATIKA ÕPETAMISEST



MATEMAATIKA AJALOOST



TÄHTPÄEVI

## «MATEMAATIKA JA KAASAJA» AUTORID[1]



[1] Autorite indeksisse pole võetud teistest väljaannetest tõlgitud materjalide autoreid.

## SISUKORD