0001001

# Matemaatika ja kaasaeg

1001000

TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

# MATEMAATIKA JA KAASAEG

## IX

ABIMATERJALE MATEMAATIKA ÕPETAJATELE JA ÕPPIJATELE

TARTU 1965

# BOURBAKI «MATEMAATIKA ELEMENDID»

G. Kangro

1. Kaasajal on matemaatika meetodid ja teooriad paisunud nii arvukaiks ja ulatuslikeks ning matemaatika arengu tempo sedavõrd kiireks, et ka kõige suurema eruditsiooniga spetsialistid ei suuda enam jälgida matemaatika arengut tema kõigis harudes. Enamik teaduslikult töötavaid matemaatikuid on sunnitud põhiliselt piirduma endale valitud kitsa eriala raamidega. Samal ajal matemaatiliste meetodite rakendusväli mitmesugustes teadusalades aga laieneb üha kiiremini. Seepärast on kaasajal vajadus olemasolevate matemaatiliste teadmiste süstematiseerimise järele eriti suur.

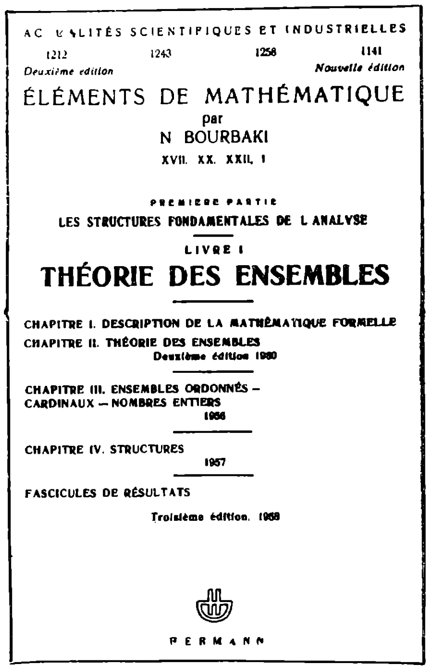
Matemaatika süstematiseerimisega on aegade vältel tegelnud paljud matemaatikud alates Eukleidesest, kelle teos «Elemendid» (III saj. e. m. a.) annab tunnistust laialdasest süstematiseerimisest antiikaja matemaatikas. Paljud XIX ja XX sajandi suured matemaatikud nagu Riemann, Weierstrass, Cantor, Lebesgue, Hilbert, Fréchet, Riesz, Banach jt. seadsid endale ülesandeks välja selgitada kõige põhilisemad mõisted ja printsiibid, millele toetub matemaatiline analüüs kui matemaatika kõige ulatuslikum osa. Nende jõupingutuste tagajärjel kujunes käesoleva sajandi kolmekümnendateks aastateks välja matemaatilise analüüsi uus haru — f u n k t s i o n a a l a n a l ü ü s, mille tekkimine tähendas suurt edusammu analüüsi süstematiseerimise käigus. Osutus näiteks, et kui piirduda B a n a c h i r u u m i d e g a, s. o. täielike lineaarsete normeeritud ruumidega [1], siis kasutatakse analüüsi mingi lineaarse probleemi uurimisel sisuliselt vaid kolme üldist printsiipi, mida tuntakse ü h t l a s e t õ k e s t a t u s e, l a h t i s e k u j u t u s e ja f u n k t s i o n a a l i j ä t k a m i s e p r i n t s i i p i d e [2] nime all. Funktsionaalanalüüsi ideed ja meetodid aga juurdusid niivõrd sügavale paljudesse matemaa-

---

[1] Lineaarse normeeritud ruumi mõiste ja mitmed teised käesolevas artiklis esinevad mõisted on antud artiklis [1]. Lineaarset normeeritud ruumi $R$ nimetatakse t ä i e l i k u k s, kui tingimuse $\lim\limits_{n\to\infty} \| x_{n+p} - x_n \| = 0$ kehtivusest ühtlaselt $p$ suhtes järeldub jada $\{x_n\}$ $(x_n \in R)$ koonduvus ruumis $R$.

tika distsipliinidesse ja rakendusaladesse, et funktsionaalanalüüs muutus üheks kõige mahukamaks matemaatika alaks ja hakkas ise vajama süstematiseerimist.

Matemaatika edasise süstematiseerimise käigus on suurimad teened prantsuse matemaatikutel eesotsas Jean Dieudonné, André Weili, Claude Chevalley, Henri Cartani jt. Kolmekümnendate aastate keskel koondus nende ümber rühm kõige silmapaistvamaid prantsuse matemaatikuid, kes seadsid endale ülesandeks koostada kaasaegse teaduse tasemel põhjalik koguteos matemaatikast, mis kõige üldisematele printsiipidele toetudes annaks sisulise ülevaate võimalikult kõigist matemaatika tähtsamatest aladest. N i c o l a s B o u r b a k i kollektiivse pseudonime all hakati välja andma koguteost «M a t e m a a t i k a e l e m e n d i d» (Éléments de mathématique), mille esimene köide ilmus 1939. a. Koguteos «Matemaatika elemendid» jaguneb o s a d e k s, osad — r a a m a t u t e k s, raamatud — k ö i d e t e k s. Käesolevaks ajaks on ilmunud 27 köidet, mis moodustavad kokku 8 raamatut. Neist 6 raamatut kuulub koguteose esimesse ossa, mis sisaldab matemaatilise analüüsi elemente ja kannab pealkirja «A n a l ü ü s i p õ h i s t r u k t u u r i d». Selle osa raamatute pealkirjad on järgmised:


ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES

1212 1243 1258 1141

*Deuxième édition* *Nouvelle édition*

ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUE

par

N BOURBAKI

XVII. XX. XXII. I

PREMIÈRE PARTIE

LES STRUCTURES FONDAMENTALES DE L ANALYSE

LIVRE I

**THÉORIE DES ENSEMBLES**

CHAPITRE I. DESCRIPTION DE LA MATHÉMATIQUE FORMELLE

CHAPITRE II. THÉORIE DES ENSEMBLES

Deuxième édition 1960

CHAPITRE III. ENSEMBLES ORDONNÉS — CARDINAUX — NOMBRES ENTIERS

1956

CHAPITRE IV. STRUCTURES

1957

FASCICULES DE RÉSULTATS

Troisième édition. 1958

HERMANN

1. Hulgateooria
2. Algebra
3. Üldine topoloogia
4. Reaalmuutuja funktsioonid
5. Topoloogilised vektorruumid
6. Integreerimine.

Viimased kaks raamatut on nummerdamata; nad kannavad pealkirju:

Rühmad ja Lie algebrad
Kommutatiivne algebra.

2. Tekib küsimus, millest on tingitud matemaatilise analüüsi elementide selline ainekäsitlus. Vastus sellele küsimusele saab selgeks, kui tutvuda Bourbaki vaatekohtadega matemaatikale üldse.

Esiteks lähtub Bourbaki sellest, et matemaatika uurimisobjektiks on mitmesugused hulgad, mis koosnevad lõplikust või lõpmatust arvust elementidest. Näiteks uurib klassikaline aritmeetika täisarvude hulka, klassikaline algebra — algebraliste polünoomide hulka, klassikaline analüüs — pidevate funktsioonide hulka, reaalmuutuja funktsioonide teooria — mõõtuvate funktsioonide hulka jne.

Teiseks arvestab Bourbaki, et kaasaegse matemaatika seisukohalt pole niivõrd olulised vaadeldava hulga elemendid, kuivõrd seosed hulga elementide (ja nende elementide moodustiste) vahel. Näiteks jaguvuse teooria seisukohalt on täisarvude hulgal ja algebraliste polünoomide hulgal ühesugused omadused, kuigi nende hulkade elemendid on isesugused. Need ühesugused omadused on tingitud sellest, et nii täisarvude hulk kui algebraliste polünoomide hulk on p e a i d e a a l i r i n g i d [3] ehk, nagu ütleb Bourbaki, mõlemal hulgal on p e a i d e a a l i r i n g i s t r u k t u u r. Üldiselt määravad seosed hulga elementide (või elementide moodustiste) vahel Bourbaki järgi teatava s t r u k t u u r i [1] sellel hulgal.

Kolmandaks kirjeldab Bourbaki hulga struktuuri aksioomide süsteemiga, mida rahuldavad hulga struktuuri määravad seosed. Näiteks peaideaaliringis on elemendid seotud kahe tehtega — liitmise ja korrutamisega, mis rahuldavad ühikelemendiga ringi aksioome koos aksioomidega, et ringis puuduvad nulliteguríd ja et iga ideaal ringis on peaideaal. Struktuuri määramine aksioomide süsteemi kaudu kindlustab struktuuri mõiste andmise kõige üldisemal kujul ja seega selle mõiste kõige avaramad rakendusvõimalused. Ühtlasi etendab formaalne aksiomaatiline meetod ülitähtsat osa üksikute struktuuride avastamisel uuritavas matemaatilises süsteemis.

Algebralised tehted määravad hulgal a l g e b r a l i s e s t r u k t u u r i, hulga elementide ümbruste süsteem, mis määrab hulgas piirprotsessi, — t o p o l o o g i l i s e s t r u k t u u r i ja teatavate paarikaupa võetud elementide järgnevus — j ä r j e s t u s e s t r u k t u u r i. Viimased kolm struktuuri moodustavad matemaatika p õ h i s t r u k t u u r i d. Neid põhistruktuure, mis esinevad juba arvsirgel kõik koos, uuritaksegi Bourbaki «Matemaatika elementide» kolmes esimeses raamatus. Siinjuures tuleb rõhutada, et üldist topoloogiat käsitletakse Bourbaki teoses esmakordselt süstemaatiliselt. Ühtlasi paistab silma, et sel ajal, kui algebralise ja topoloogilise struktuuri uurimisega tegelevad matemaatika iseseisvad osad — a l g e b r a ja t o p o l o o g i a — puudub matemaatikas ala, mis oleks pühendatud spetsiaalselt järjestuse struktuuri uurimisele. Seepärast käsitletakse järjestuse struktuuri «Matemaatika elementide» hulgateooria raamatus, mis on sissejuhatuseks mitte ainult analüüsi põhistruktuuride valda, vaid Bourbaki koguteosele tervikuna. Siit aga ei tule järeldada, et järjestuse struktuuril oleks oluliselt väiksem tähtsus kui teistel põhistruktuuridel. Küll aga võib arvata, et järjestuse struktuuri osa matemaatikas pole seni ammendavalt uuritud. Kaasaegses matemaatikas on igatahes probleeme, mida ollakse harjunud käsitlema topoloogilise struktuuri abil, kuid mida saab üldisemalt uurida, kui kasutada järjestuse struktuuri. Näiteks ridade teoorias on põhilise tähtsusega probleem, missugustel tingimustel lõpmatu maatriksiga $(a_{nk})$ antud jadade teisendus

$$y_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\, x_k \quad (n = 1,2, \ldots)$$

kujutab mingi klassi $X$ jadad $\{x_k\}$ teatava klassi $Y$ jadadeks $\{y_n\}$ (näiteks kõik tõkestatud jadad koonduvateks jadadeks). Selle probleemi lahendamiseks kasutati seni topoloogilist struktuuri klassides $X$ ja $Y$. Nagu näitas aga prantsuse matemaatik Vuilleumier' 1964. a., on võimalik saada üldisemaid tulemusi, kui defineerida klassides $X$ ja $Y$ sobiv järjestuse struktuur.

Bourbaki «Matemaatika elementide» üheks suureks teeneks on topoloogilise vektorruumi (ehk lineaarse ruumi) struktuuri kui matemaatika ühe kesksema struktuuri esiletoomine. Raske on leida matemaatikas mingit vähegi tähtsamat funktsioonide klassi, millel poleks topoloogilise vektorruumi struktuuri. Siinjuures öeldakse, et vaadeldaval hulgal on topoloogilise vektorruumi struktuur, kui sellel hulgal on määratud nii vektorruumi struktuur kui ka topoloogiline struktuur, kusjuures mõlemad struktuurid on omavahel nii seotud, et vektorruumi struktuuri määravad algebralised tehted (s. o. liitmine ja skalaariga korrutamine) on pidevad topoloogilise struktuuriga antud piirprotsessi suhtes. Topoloogiliste vektorruumide hulgast eraldab Bourbaki peale klassikaliste normeeritud ruumide veel nn. lokaalselt kumerad ruumid, s. o. topoloogilised vektorruumid, kus nullpunkti iga ümbrus sisaldab mingit kumerat ümbrust[2]. Lokaalselt kumerate ruumide teooria on vahetuks üldistuseks normeeritud ruumide teooriale (kus kumeraks ümbruseks on kera) ning paistab silma tähtsate rakenduste poolest üldistatud funktsioonide teoorias ja teoreetilises füüsikas.

3. Bourbaki poolt teostatav matemaatika süstematiseerimine ei avaldu ainult selles, et selgitatakse välja matemaatikas esinevad mitmesugused struktuurid. Struktuuri mõistet kasutab Bourbaki eriti selleks, et lahti mõtestada ühe või teise esitatava teooria olemust, tema sisu. «Matemaatika elemendid» ei

[2] Hulka nimetatakse kumeraks, kui hulk sisaldab koos iga kahe punktiga ka neid punkte ühendavat sirglõiku.

ole entsüklopeediline teos, kus koos iga teooriaga püütakse anda võimalikult kõik teoreemid, mis on saadud selles teoorias kuni käesoleva momendini. Bourbaki piirdub põhimõtteliselt nende teoreemidega, mis moodustavad vaadeldava teooria loogilise aluse ja mille teadmine on vajalik selle teooria rakendamiseks praktikas sagedamini esinevatel juhtudel. Siinjuures antakse alati vastavate teoreemide täielik tõestus. Tulemused, millel on vähem rakendusi, esitatakse sageli harjutusülesannete kaudu, kusjuures tavaliselt lisatakse ka nende ülesannete lahendamiseks vajalikud juhendid. Ka nende ülesannete suhtes on tehtud läbimõeldud valik, mistõttu niisuguste ülesannete lahendamine on andnud sageli tõuke järgnevaks teaduslikuks tööks.

Bourbaki rühm, kuhu kuulub 10—20 kõige silmapaistvamat matemaatikut, on väga võimas ja nõudlik kollektiiv. Igal aastal kogunetakse mõnesse Prantsusmaa kuurorti, kus ühiselt arutatakse läbi iga köite projekt. Pärast projekti vastuvõtmist töötab keegi kollektiivi liikmeist välja köite esimese variandi, millega tutvuvad kõik liikmed. Järgmisel rühma kokkutulekul saab esimesele variandile osaks igakülgne halastamatu kriitika. Esimesele variandile järgneb teine variant, mille töötab välja tavaliselt kollektiivi teine liige. On esinenud juhtumeid, kus on koostatud kuus kuni seitse varianti. Integreerimise teooriale pühendatud raamatu esimene variant näiteks lükati täielikult tagasi põhjusel, et selle põhiline osa — integraaliteooria abstraktses ruumis — polnud kirjutatud vajalikul määral originaalselt. Tuleb märkida, et abstraktse integraali väga komplitseeritud ja mitmekesise struktuuri tõttu ei ole kuni käesoleva ajani õnnestunud anda rahuldavat käsitlust integraaliteooriale abstraktses ruumis, kuigi sel teoorial on eriti palju rakendusi (tõenäosusteoorias, funktsionaalanalüüsis, topoloogilises algebras, diferentsiaalvõrrandite kvalitatiivses teoorias, teoreetilises füüsikas jm.) ja temale on pühendatud eriti rohkesti monograafiaid.

4. Bourbaki «Matemaatika elementide» arvel on tehtud mitmeidki kriitilisi märkusi. Järgnevalt vaatleme neist kahte olulisemat.

Bourbaki kasutab mõnikord väga palju mõisteid ja teoreeme, mis väljendavad mitmesugusel väliselt erineval viisil ühte ja sama sisu. See etteheide oleks väga tõsine, kui Bourbaki võtaks kasutusele mitmesuguseid samaväärseid mõisteid ja teoreeme juhuslikult, selgitamata nende sisu ühtelangemist ja nende vajalikkust praktika seisukohalt. Kuid seda Bourbaki põhiliselt ei tee. Teoreetiliselt oleks muidugi võimalik loobuda samaväärsete mõistete ja teoreemide esitamisest, kuid Bourbaki tingimustes muudaks niisuguse «optimaalsuse» printsiibi teostamine tõestustes esinevad arutlused kohmakamaks, vastavate mõistete ja teoreemide sisu aga ühekülgsemaks. Öeldu selgitamiseks vaatame, kuidas käsitletakse matemaatilises analüüsis ühte põhilist küsimust — reaalarvude hulga ehk, geomeetriliselt kõneldes, arvsirge pidevust. Intuitiivselt väljendub arvsirge pidevus selles, et arvsirget saab paberilehele joonestada, eemaldamata joonestusvahendit lehelt. See osutub aga võimatuks, kui eraldada arvsirgest kasvõi üksainus punkt. Matemaatiliselt väljendab arvsirge pidevust nn. pidevuse aksioom. Pidevuse aksioomi võib aga sõnastada väga mitmel, väliselt täiesti erineval viisil. Esitame neist kuus võimalust:

1) igal ülalt tõkestatud reaalarvude hulgal on olemas lõplik ülemine raja;

2) igal ülalt tõkestatud monotoonselt kasvaval reaalarvude jadal on olemas lõplik piirväärtus;

3) kui arvsirgel üksteisesse sisestatud lõikude jadas lõikude pikkused lähenevad piiramata nullile, siis on neil lõikudel ühine punkt;

4) arvsirge kui lineaarne normeeritud ruum on täielik;

5) igast tõkestatud jadast arvsirgel saab eraldada koonduva osajada;

6) kui arvsirge lõik on kaetud mingi lõpmatu vahemike süsteemiga, siis saab sellest vahemike süsteemist eraldada lõpliku osasüsteemi, mis katab antud lõigu.

Siin on tegemist kuue samaväärse lausega: nimelt võib igaühte neist tõestada ükskõik millise teise lause 1)—6) põhjal. Põhimõtteliselt on võimalik üles ehitada reaalarvude teooriat, milles aksioomiks on võetud ükskõik missugune neist lausetest, näiteks esimene. Raskused aga võivad tekkida selle teooria rakendamisel. Kujutleme näiteks, et niisuguse teooria abil tuleb tõestada mingis lõigus pideva funktsiooni tõkestatust. Seda oleks väga lihtne teha teoorias, kus aksioomiks on võetud kas viies või kuues lause. Vaadeldavas teoorias aga osutub lõigus pideva funktsiooni tõkestatuse tõestus tunduvalt kohmakamaks, sest eelnevalt tuleb tõestada üks viimati mainitud lausetest esimese lause põhjal.

On huvitav märkida, et ka eespool toodud kolm lineaarse funktsionaalanalüüsi põhilist printsiipi pole üksteisest sõltumatud, vaid näiteks ühtlase tõkestatuse printsiipi saab tuletada (ja sealjuures suhteliselt lihtsalt) lahtise kujutuse printsiibist. Ometi ei ole käsitluse lihtsuse ja sisulise selguse mõttes ökonoomne ehitada üles lineaarset funktsionaalanalüüsi Banachi ruumis ilma ühtlase tõkestatuse printsiibita. Muidugi ei tule eelnenust järeldada, et Bourbaki «Matemaatika elementides» ei leidu üldse teatavas mõttes liigseid mõisteid ja teoreeme, kuid tõenäoliselt nõuaks nende väljaselgitamine umbes samasugust töömahtu, kui vastava osa koostamine Bourbaki rühmalt. «Matemaatika elementides» toodud mõistete ja teoreemide kasutamist hõlbustab aga tunduvalt üksikute raamatute jaoks antud tulemuste kokkuvõte.

Teine Bourbakile sagedamini tehtav etteheide on seotud «Matemaatika elementides» aluseks võetud formaalse aksiomaatilise meetodi piiratusega. Nimelt tõestas K. Gödel 1931. a. [4], et iga küllalt tugev (s. t. naturaalarvude aritmeetikat sisaldav) mittevasturääkiv formaliseeritud aksiomaatiline teooria on mittetäielik, s. t. vastavas mitteformaliseeritud teoorias leidub tõene teoreem, mis ei ole tõestatav formaliseeritud teooria aksioomidest lähtudes. Gödel annab ühtlasi meetodi niisuguse teoreemi konstrueerimiseks. Seega on põhimõtteliselt võimalik, et «Matemaatika elemendid» peaksid sisaldama teoreemi, mida ei saa tõestada Bourbaki poolt kasutatud formaalse aksiomaatilise meetodiga. On muidugi võimalik lülitada niisugust mittetõestatavat teoreemi vaadeldavasse teooriasse aksioomina, kuid saadud teooria suhtes kerkib omakorda mittetõestatava tõese teoreemi esinemise võimalus jne. Seepärast ei saa «Matemaatika elemente» põhimõtteliselt vaadelda kui mingit lõplikku, kindlaks tähtajaks lõpetatavat, vaid kui pidevalt jätkuvat, täienevat teost — seda enam, et matemaatika kui teadus areneb edasi. Ja polegi tegelikult teada, missuguse kuju võtab Bourbaki teos edaspidi. Kindel on aga see, et «Matemaatika elemendid» on avaldanud äärmiselt suurt mõju XX sajandi matemaatika arengule. Bourbaki stiili on osaliselt või täielikult omaks võtnud paljud juhtivad matemaatikud maailmas. 1958. a. alustati «Matemaatika elementide» avaldamist ka venekeelses tõlkes. Seni prantsuse keeles ilmunud 27 köitest on siiani vene keeles välja antud 13 köidet viies raamatus. «Matemaatika elemendid» on teos, mille tõelist väärtust saab hinnata alles pärast tema pikemaajalist kasutamist, pärast Bourbaki stiiliga harjumist. Nimetatud teos on hädavajalik käsiraamat igale teaduslikult töötavale matemaatikule.

### Kirjandus


1. Kangro, G., Kaasaegse matemaatilise analüüsi mõned iseloomulikud jooned. — Matemaatika ja kaasaeg, V, lk. 3—13.
2. Данфорд Н., Шварц Д., Линейные операторы. М., 1962, lk. 61—83.
3. Kangro, G., Kõrgem algebra. Tln., 1962, lk. 492—498.
4. Kull, I., Matemaatiline loogika. Tln., 1964, lk. 198—201.

## KATKENDEID P. R. HALMOSI ARTIKLIST «NICOLAS BOURBAKI»[1]

Ta on kreeka perekonnanimega, rahvuselt prantslane ja üpris huvitava päritoluga. Ta on üks kõige mõjukamaid XX sajandi matemaatikuid. Tema kohta on hulk legende ja nende arv kasvab iga päevaga. [...] Kõikjal, kuhu koguneb rühm matemaatikuid, leiab ta tuliseid poolehoidjaid ja käratsevaid vastaseid. Kuid kõige imeväärsem on see, et teda pole olemas.

*Sellel ühe gravüüri järgi tehtud pildil on kujutatud kindral Bourbaki, kelle eesnimi pole sugugi Nicolas, vaid Charles-Denis-Sauter. Kord oleks ta äärepealt saanud Kreeka kuningaks.*

See olematu prantslane kreeka perekonnanimega on — Nicolas Bourbaki. Asi on selles, et Nicolas Bourbaki on matemaatikute mitteametliku rühmituse kollektiivne varjunimi. [...] Põhjused, miks autorid võtsid endale nimeks *Bourbaki*, on mähitud saladusse. On alust arvata, et valik on seotud prantsuse armee ohvitseriga, kes mängis teatavat osa Prantsuse-Preisi sõjas. Kindral Charles-Denis-Sauter Bourbaki oli väga koloriitne kuju. Kui ta oli 46-aastane, tehti talle 1862. a. ettepanek hakata Kreeka kuningaks. Kuid ta loobus sellest võimalusest. [...] Kõneldakse, et Nancys on talle püstitatud ausammas. See annab võimaluse viia teda ühendusse nende matemaatikutega, kes võtsid ta nime, sest mõned neist on olnud aegade jooksul seotud Nancy ülikooliga.

* * *

Esialgu esines rühm varjunime all osalt nalja pärast, osalt selleks, et vältida pikka ja tüütavat autorite nimekirja tiitellehel; nüüd kasutatakse seda varjunime rohkem kollektiivse nimena kui maskeeringuks. Rühma liikmete nimed ei ole enam matemaatikute enamikule saladuseks.

Ühe legendi kohaselt tekkis Bourbaki peatöö «Matemaatika elemendid» André Weili ja Jean Delsarte'i vahelisest vaidlusest selle üle, kuidas tuleb õpetada matemaatilist analüüsi. Kuid ükskõik millised olid selle töö tekkimise esialgsed põhjused, käesoleval ajal ei pea see töö silmas üksnes pedagoogilisi eesmärke. Tuleb välja täpselt samuti, nagu oleks arutelu, kuidas paremini õpetada mõistma populaarset muusikat, andnud alguse kõikehaaravale uurimusele harmooniast ja muusikateooriast.

* * *

[1] Scientific American, May 1957, lk. 88—99. Katkendid on artikli venekeelsest väljaandest (Математическое просвещение, 5, 1960, lk. 229—239) tõlkinud Ü. Lumiste.

Kuidas siis tehti seda väga tähtsat ühist tööd? Suurt osa sellest omistatakse Jean Dieudonnée'le (algul töötas Nancys, praegu USA-s, Northwestern University). Dieudonnée oli peaaegu algusest peale rühma kõige aktiivsem liige. Et Dieudonnée on mitme omaenda nime all avaldatud matemaatilise teose autor, siis on üsna raske teha vahet tema enda tööde ja Bourbaki jaoks kirjutatud tööde vahel. Kõneldakse, et ta oskas kord suurepäraselt tulla välja raskest olukorrast ilma fakte moonutamata. Ühes artiklis, mille Dieudonnée avaldas Bourbaki nime all, avastati viga. See parandati artiklis «Bourbaki veast» ja alla kirjutas J. Dieudonnée.

* * *

Bourbaki prantsuse orientatsioon ei tulene šovinistlikest kaalutlustest, vaid on lihtsalt keeleliseks paratamatuseks, sest rühma rajajateks on prantslased. Kui kogunevad sellised esimese järgu tähed nagu Weil, Dieudonnée, Claude Chevalley ja Henri Cartan koos oma kolleegidega, siis on sealjuures voolava prantsuskeelse kõne vood tõepoolest aukartustäratavad. Seetõttu peab, et võidaks jälgida kõnelust ja võtta osa vestlusest, suutma prantsuse keeles mitte üksnes kiiresti ja valjult kõnelda, vaid tuleb tunda ka Pariisi üliõpilaste uusimat žargooni.

Vaatamata sellele, et kuulsatel Bourbaki koosolekutel rahuldavad kõik osavõtjad neid nõudeid, on raske aru saada, mis kavalusega nad töötavad neis tingimusis. Kuid töö liigub ...

*Nicolas Bourbaki on siin kujutatud prantsuse matemaatikute fantastilise ülierutatud kambana. Portreeline sarnasus võis tulla ainult täiesti juhuslikult.*

## ALGEBRA PÕHIMÕISTEID IV

Jevgeni Gabovitš

### 11. Kahe operatsiooniga algebralised süsteemid

Kõikides seni vaadeldud algebralistes süsteemides (grupoidid, poolrühmad ja rühmad) on korraga defineeritud vaid üksainus algebraline operatsioon. Tõsi küll, tihti me nägime, et mingi grupoidi, poolrühma või rühma elementide hulgas võib defineerida veel ühe või isegi mitu uut algebralist operatsiooni. Näiteks täisarvude vallas võib peale tavalise liitmise ja korrutamise defineerida veel järgmise algebralise operatsiooni $a * b = a^2 + 4b$ ($1 * 1 = 5$, $2 * 1 = 8$, $1 * 2 = 9$, $2 * 2 = 12$, ...). Positiivsete reaalarvude vallas on algebraliseks operatsiooniks $a \circ b = (\log_a b)^2$ (näiteks $4 \circ 2 = \frac{1}{4}$, $2 \circ 8 = 9$, jne.) Täisarvuliste elementidega $n \times m$-maatriksite jaoks võib defineerida järgmise algebralise operatsiooni $\#$: maatriksite $A = [a_{ij}]$ ja $B = [b_{ij}]$ $\#$-korrutiseks nimetame maatriksit

$$A \# B = \begin{bmatrix} a_{11} & b_{12} & a_{13} & b_{14} & \dots \\ b_{21} & a_{22} & b_{23} & a_{24} & \dots \\ a_{31} & b_{32} & a_{33} & b_{34} & \dots \\ \cdot & & & \cdot & \cdot \end{bmatrix}.$$

Näiteks:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 3 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \# \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(See operatsioon on assotsiatiivne — miks?)

Varem me uurisime selliseid operatsioone üksteisest eraldi ning meid ei huvitanud, millised on hulga elementide omadused üheaegselt mitme operatsiooni suhtes. Juhul kui need operatsioonid on mingil viisil omavahel seotud, muutub aga vajalikuks nende koosuurimine.

Toome siin mõningad sagedamini esinevad tingimused, mis seovad omavahel kahte operatsiooni — liitmist ja korrutamist.

Tavaliselt esitatakse need mingi samasuse kujul, nagu näiteks järgmistes tingimustes:

| | |
|---|---|
| $ab = -ba$ | *antikommutatiivsus*; |
| $(a+b)c = ac + bc$ | *korrutamise distributiivsus liitmise suhtes*; |
| $(ab)c + (bc)a + (ca)b = 0$ | *Jacobi samasus*; |
| $a(ab+c) = ab + ac$ | *modulaarsus*; |
| $ab + c = (a+c)(b+c)$ | *liitmise distributiivsus korrutamise suhtes*; |
| $a^n = 0$<br>$a_1 a_2 \ldots a_n = 0$ | — *nilpotensus*; |
| $a + ab = a$<br>$a(a+b) = a$ | — *neelamisseadused*. |

Kuigi me nilpotensuse tingimuste kirjutamisel ei ole siin kasutanud liitmise märki, seovad need tingimused ometi korrutamise ja liitmise tehteid, sest neis esineb element 0, mis on määratud tema omapärase käitumisega liitmise suhtes. Analoogiliselt seob antikommutatiivsuse tingimus korrutamist liitmisega, sest seda tingimust võib esitada ka kujul $ab + ba = 0$.

Kahe operatsiooni vahelise seose võib määrata ka nn. tinglike samasustega, näiteks järgmiselt:

I kui $x \neq y$, siis $xy = 0$;
II kui $x \neq y$, siis $xy = x + y$;
III kui $a \neq 0$, siis iga $b$ korral leidub $x$, nii et $ax = b$.

Kahe algebralise operatsiooniga algebralistest süsteemidest vaatleme siin lähemalt nelja kõige olulisemat: ringi, korpust, Lie' ringi [1] ja struktuuri. Igaüks neist on hulk, mis on korrutamise suhtes grupoid ning liitmise suhtes kommutatiivne poolrühm, kusjuures korrutamine on liitmise suhtes distributiivne.

*Ringi* puhul osutub poolrühm liitmise suhtes rühmaks. Kui ringi elemendid, mis erinevad selle rühma nullist, moodustavad rühma ka korrutamise suhtes, siis on tegemist *korpusega* või *kaldkorpusega*, olenevalt sellest, kas korrutamine on kommutatiivne või ei tarvitse seda olla. Kui aga selle asemel ringi elemendid rahuldavad Jacobi samasust ja samasust $a^2 = 0$, siis nimetatakse ringi *Lie' ringiks*.

*Struktuuride* korral on liitmine ja korrutamine n.-ö. võrdõiguslikud, mis väljendub neid siduvate tingimuste sümmeetrias: siin on mitte ainult liitmine, vaid ka korrutamine kommutatiivne ja assotsiatiivne ning kehtib samuti liitmise distributiivsus korrutamise suhtes. Peale selle kehtivad struktuurides ka mõlemad neelamisseadused.

---

[1] Sophus Lie (1842—1899), tuntud norra matemaatik, kelle tööd on avaldanud väga suurt mõju rühmateooria ja kogu kaasaegse algebra arengule.

**Ülesandeid:**

33. Millised selles punktis vaadeldud samasustest ja tinglikest samasustest kehtivad täisarvude hulgas, kui vaadelda liitmisena tavalist täisarvude liitmist, korrutamisena aga operatsiooni:

a) $a * b = a + b + ab$;  d) $a * b = b - a$;
b) $a * b = ab - ba$;  e) $a * b = a$;
c) $a * b = a + b$;  f) $a * b = b^2$.

34. Selgitada sama täisarvuliste elementidega maatriksite tavalise liitmise ja korrutamise suhtes, kui neil maatriksitel on järgmine kuju:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & a_3 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

35. Antud hulga $A$ kõigi alamhulkade hulgas vaatleme liitmisena alamhulkade ühendi leidmist ning korrutamisena ühisosa võtmist[2]. Millised ülalmainitud samasustest kehtivad sel juhul?

36. Näidata, et $(m \times n)$-maatriksite $\#$-korrutamine rahuldab tingimusi

$$A \# A = A, \quad B \# A \# B = B, \quad A \# B \# C = A \# C$$

ning on seotud maatriksite liitmisega järgmiste distributiivsust ja modulaarsust üldistavate tingimustega:

$$(A + B) \# 2C = (A \# C) + (B \# C),$$
$$(A \# B) + C = (A + C) \# (B + C),$$
$$[2A \# (A \# B) + C] = (A \# B) + (A \# C).$$

37. Milliste ülalmainitud operatsioonide suhtes tekivad ringid, korpused, struktuurid või Lie' ringid?

## 12. Ringid

Eespool juba mainisime ringi mõistet. Üksikasjalik definitsioon on järgmine. *Ringiks* nimetatakse hulka, milles on defineeritud kaks distributiivsuse seadusega

$$(a + b)c = ac + bc$$

seotud tehet — liitmine ja korrutamine, kusjuures liitmise suhtes moodustab see hulk kommutatiivse rühma (nimetatakse antud ringi *aditiivseks rühmaks*), korrutamise suhtes aga grupoidi (nimetatakse ringi *multiplikatiivseks grupoidiks*).

Kui ringi multiplikatiivne grupoid osutub assotsiatiivseks või kommutatiivseks, siis nimetatakse ka ringi ennast vastavalt *assotsiatiivseks* või *kommutatiivseks*. Kui multiplikatiivsel grupoidil on ühikelement, siis seda nimetatakse *ringi ühikelemendiks*, ringi enda kohta aga öeldakse, et ta on *ühikuga ring*.

Toome nüüd ringide näiteid. Kõik täisarvud moodustavad ühikuga kommutatiivse ja assotsiatiivse ringi tavalise liitmise ning korrutamise suhtes. Samasuguse ringi moodustavad ka kõik ratsionaal-, reaal- ja kompleksarvud, samuti Gaussi täis- ja ratsionaalarvud.

---

[2] Vt. Gabovitš, Jevgeni, Opereerimine hulkadega. — Matemaatika ja kaasaeg, III, lk. 3—14.

Ringi alamhulka, mis on ise ring selle ringi operatsioonide suhtes, nimetatakse ringi *alamringiks*. Näiteks paarisarvude ring on alamringiks kõikide täisarvude ringis, ise aga sisaldab alamringi, mis koosneb kõikidest neljaga jaguvatest arvudest. Kompleksarvude ring sisaldab reaal-, ratsionaal- ja täisarvude alamringe.

Võrduste jadast

$$([a_{ij}]+[b_{ij}])\cdot[c_{ij}]=[a_{ij}+b_{ij}]\cdot[c_{ij}]=$$
$$=[\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}+b_{ik})c_{kj}]=[\sum_{k=1}^{n}a_{ik}c_{kj}+\sum_{k=1}^{n}b_{ik}c_{kj}]=[\sum_{k=1}^{n}a_{ik}c_{kj}]+$$
$$+[\sum_{k=1}^{n}b_{ik}c_{kj}]=[a_{ij}]\cdot[c_{ij}]+[b_{ij}]\cdot[c_{ij}]$$

nähtub, et maatriksite korrutamine on maatriksite liitmisega seotud distributiivsuse seadusega. Seetõttu moodustavad ringi kõik täisarvuliste elementidega maatriksid, kõik ratsionaalsete elementidega maatriksid jne. Kõik need ringid on assotsiatiivsed, kuid mittekommutatiivsed ühikuga ringid.

Iga kommutatiivne rühm muutub ringiks, kui temas defineerida nn. *nullkorrutamine*: iga kahe elemendi korrutis on null. See ring on kommutatiivne ja assotsiatiivne, kuid tal puudub ühikelement.

Antud hulga kõik alamhulgad ei moodusta ringi ühendi ja ühisosa võtmise operatsioonide suhtes, sest kuigi need operatsioonid on omavahel seotud distributiivsuse seadusega (isegi kahe distributiivsuse seadusega: $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap\cap(B\cup C)$ ja $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$) ning kuigi kõik alamhulgad moodustavad mõlema operatsiooni suhtes ühikuga kommutatiivse poolrühma, ei osutu kumbki neist poolrühmadest rühmaks (vt. p. 3).

Ringidest, mille elementideks on arvud, nimetaksime peale täisarvude ringi veel näiteks hulki $\{a+b\sqrt{5}\}$, $\{a+b\sqrt[3]{3}+c\sqrt[3]{9}\}$ jne., kus $a$, $b$ ja $c$ on täisarvud.

Muutuja $x$ täisarvuliste kordajatega polünoomide $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ jaoks võib korrutamise ja liitmise defineerida tavalisel viisil. Näiteks

$$(5x^3+7x^2-1)+(-x^4+x^3-2x)=-x^4+6x^3+7x^2-2x-1;$$
$$(x^2-1)(3x^5+2x^3+1)=3x^7-x^5-2x^3+x^2-1.$$

Osutub, et ka polünoomid moodustavad kommutatiivse ja assotsiatiivse ühikuga ringi.

Funktsionaalanalüüsi seisukohalt on väga tähtsad funktsioonide ringid. Liitmisena vaadeldakse niisugustes ringides alati tavalist funktsioonide liitmist

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x).$$

Korrutamise operatsiooni võib aga defineerida mitmel erineval viisil. Kõige tavalisem definitsioon näeb välja järgmiselt:

$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x).$$

Tihti aga vaadeldakse korrutamisena nn. funktsioonide *superpositsiooni*

$$(f\circ g)(x)=g[f(x)].$$

Peale selle pakub huvi ka järgmine funktsioonide «korrutamine» [2]

$$(f*g)(x)=\int\limits_0^x f(x-t)g(t)dt.$$

Igaüks neist korrutamistest on distributiivne funktsioonide liitmise suhtes, mistõttu iga liitmise ja korrutamise suhtes kinnine funktsioonide hulk moodustab ringi. Näiteks korrutamiste $\cdot$ ja $\circ$ puhul on selliseks kõigi lõigul $[a, b]$ defineeritud funktsioonide hulk, korrutamise $*$ puhul näiteks samal lõigul pidevate funktsioonide hulk.

Täisarvude ringis leidub vaid kaks elementi, mis võrduvad oma ruuduga — need on arvud 1 ja 0. Maatriksite ringides leidub neid juba rohkem. Näiteks maatriksite

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\text{ ja }\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

ruudud võrduvad nende endiga. Selliseid ringi elemente $e$, mille jaoks $e^2=e$, nimetatakse ringi *idempotentideks*. Idempotentsetel elementidel on tähtis koht ringiteoorias.

Polünoomide ringis pole muid idempotente peale arvude 0 ja 1. Samasugune on olukord funktsioonide ringis tavalise korrutamise mõttes. Kuid funktsioonide ringis, kus korrutamise osas esineb superpositsioon, osutub idempotendiks iga konstantne funktsioon $f(x)=c$, samuti ka funktsioon $f(x)=x$ (kontrollida!).

Täisarvude ringis on kahe elemendi korrutis null siis ja ainult siis, kui vähemalt üks teguritest on null. Samasugune on olukord ka polünoomide ringis. Kuid maatriksite ringides leidub nullist erinevaid elemente, mis korrutamisel annavad nullmaatriksi. Näiteks

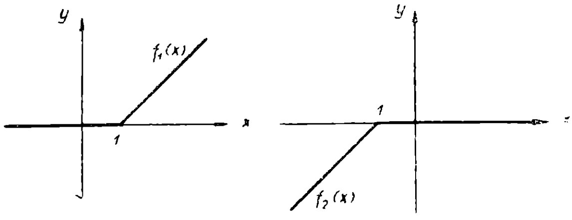
$$\begin{bmatrix}0&2&5\\0&0&3\\0&0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&1&3\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

Ka funktsioonide ringides leidub nullitegureid. Näiteks tavalise funktsioonide korrutamise puhul on funktsioonide

[2] Vt. Kangro, G. Kaasaegse algebra küsimustest. — Loodus ja matemaatika, 3, Tartu, 1963, lk. 88.

$$f_1(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{kui } x \geqslant 1 \\ 0, & \text{kui } x < 1 \end{cases} \quad \text{ja} \quad f_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x \geqslant -1 \\ x + 1, & \text{kui } x < -1 \end{cases}$$

korrutis nullfunktsioon, kuigi need funktsioonid ise erinevad nullfunktsioonist (funktsioonide $f_1$ ja $f_2$ graafikud on toodud joonisel).




Nullist erinevaid ringi elemente, mille korrutis on null, nimetatakse *nulliteguriteks*. Ringe, milles ei leidu selliseid elemente, nimetatakse *nulliteguriteta ringideks*.

Nulliteguriteta ringi moodustavad kõik poolsirgel $0 \leqslant x < \infty$ defineeritud pidevad reaalmuutuja funktsioonid eespool defineeritud korrutamise $*$ suhtes. Nimelt väidab funktsionaalanalüüsis tuntud Titchmarshi teoreem, et kui funktsioonid $f(x)$ ja $g(x)$ ei võrdu samaselt nulliga, siis ka funktsioon

$$\int_0^x f(x - t) g(t) dt$$

ei võrdu samaselt nulliga.

Eriti tähtsad on kommutatiivsed ja assotsiatiivsed nulliteguriteta ühikelemendiga ringid, mis kannavad *integriteetkondade* nime. Integriteetkondades, näiteks täisarvude ja polünoomide ringides, saab edukalt arendada jaguvuse teooriat.

Näite kommutatiivsest ja assotsiatiivsest ühikuga ringist, milles leiduvad idempotendid ja nullitegurid, võib saada, kui defineerida arvudest 0, 1, 2, 3, 4 ja 5 koosneval hulgal liitmine ja korrutamine järgmiselt:

| $\oplus$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 0 |
| 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 0 | 1 |
| 3 | 3 | 4 | 5 | 0 | 1 | 2 |
| 4 | 4 | 5 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 5 | 5 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |

| $\odot$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 2 | 0 | 2 | 4 | 0 | 2 | 4 |
| 3 | 0 | 3 | 0 | 3 | 0 | 3 |
| 4 | 0 | 4 | 2 | 0 | 4 | 2 |
| 5 | 0 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

Nimelt on siin tekkivas ringis kaks idempotenti, mis erinevad ühik- ja nullelemendist (nendeks on elemendid 3 ja 4) ning kaks paari nullitegureid (2 ja 3 ning 3 ja 4).

Praegu vaadeldud ring on erijuht laiemast ringide klassist — jäägiklassiringide klassist. *Jäägiklassiring mooduli n järgi* koosneb nimelt $n$ elemendist — arvudest $0, 1, 2, \ldots, n-1$, millede liitmine $\oplus$ ja korrutamine $\odot$ erineb tavalisest arvude liitmisest ja korrutamisest selle poolest, et tavaline summa ning korrutis jagatakse arvuga $n$ ning operatsioonide $\oplus$ ja $\odot$ tulemuseks loetakse tekkinud jääk. Niisiis:

$$k \oplus l = \begin{cases} k+l, & \text{kui } k+l < n, \\ k+l-n, & \text{kui } k+l \geqslant n, \end{cases}$$

$$k \odot l = \begin{cases} k \cdot l, & \text{kui } kl < n, \\ k \cdot l - n, & \text{kui } n \leqslant kl < 2n, \\ k \cdot l - 2n, & \text{kui } 2n \leqslant kl < 3n, \\ \ldots\ldots & \ldots \end{cases}$$

Võib näidata, et juhul kui $n = p$ on algarv, ei ole jäägiklassiringil mooduli $p$ järgi nullitegureid. Kui aga $n$ on esitatav kahe arvu $k$ ja $l$ korrutisena, siis on alati $k \cdot l = 0$ ja seega moodustavad $k$ ja $l$ nullitegurite paari.

Huvitava ringi näite võib konstrueerida «arvudest», mis on esitatud vasakule lõpmatuseni ulatuva täisarvude jadade abil. Sellisteks «arvudeks» on näiteks $\ldots 0000127$, $\ldots 55554321$, $\ldots 12312312345678910$, $\ldots 2951413$ jne. Nimetame neid siin lihtsalt *lõpmatuteks arvudeks.*

Kahte lõpmatut arvu loeme võrdseteks, kui neil on omavahel võrdsed paremalt poolt lugedes võrdsel kaugusel asuvad numbrid. Kahe lõpmatu arvu summa, vahe või korrutise $n$ viimase numbri leidmiseks tuleb võtta mõlemal arvul $n$ viimast numbrit ja nende poolt moodustatud täisarvud omavahel vastavalt liita, lahutada või korrutada. Tulemuse $n$ viimast numbrit annavadki otsitava lõpmatu arvu $n$ viimast numbrit.

Näiteks

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{r} \ldots 7654321 \\ \ldots 1197531 \end{array} \\ \hline \ldots 8851852 \end{array} \qquad \begin{array}{r} - \begin{array}{r} \ldots 212121 \\ \ldots 323232 \end{array} \\ \hline \ldots 888889 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times \begin{array}{r} \ldots 579323 \\ \ldots 131231 \end{array} \\ \hline \ldots 579323 \\ \ldots 737969\phantom{0} \\ \ldots 158646\phantom{00} \\ \ldots 579323\phantom{000} \\ \ldots 737969\phantom{0000} \\ \ldots 579323\phantom{00000} \\ \hline \ldots\ldots\ldots 136613 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times \begin{array}{r} \ldots 9376 \\ \ldots 9376 \end{array} \\ \hline \ldots 6256 \\ \ldots 5632\phantom{0} \\ \ldots 8128\phantom{00} \\ \ldots 4384\phantom{000} \\ \hline \ldots\ldots 9376 \end{array}$$

Ilmselt moodustavad lõpmatud arvud kommutatiivse rühma liitmise suhtes ja assotsiatiivse ning kommutatiivse ühikuga poolrühma korrutamise suhtes (ühik- ja nullelementideks on vastavalt arvud $\ldots 0001$ ja $\ldots 0000$). See, et liitmine ja korrutamine on assotsiatiivsed ja rahuldavad distributiivsuse seadust, järeldub asjaolust, et kõiki arvutusi lõpmatute arvudega võib kuitahes täpselt lähendada vastavate arvutustega lõplike arvudega, mille jaoks need omadused kehtivad.

Lõpmatute arvude ring sisaldab tavaliste täisarvude ringi, sest iga täisarvu (näiteks arve 273 ja 10073) võib esitada lõpmatu arvuna, kirjutades arvu ette lõpmatul hulgal nulle (meie näite puhul on nendeks lõpmatuteks arvudeks $\ldots 0000273$ ja $\ldots 000010073$).

Peale ühik- ja nullelemendi leidub antud ringis veel kaks idempotenti. Kolmandaks idempotendiks on lõpmatu arv $d$, mis on ümbritsetud raamiga järgmises tabelis, kus iga järgmine arv on eelmise ruut.

$$\begin{array}{cccccccccccc}
&&&&&&&&&&& \boxed{5} \\
&&&&&&&&&& \boxed{2} & 5 \\
&&&&&&&&& \boxed{6} & 2 & 5 \\
&&&&&& 3 & 9 & \boxed{0} & 6 & 2 & 5 \\
1 & 5 & 2 & 5 & 8 & 7 & 8 & \boxed{9} & 0 & 6 & 2 & 5 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}$$

Neljandaks idempotendiks lõpmatute arvude ringis on arv $e = 1 - d = \ldots 09376$. Tõepoolest, $e^2 = (1 - d)^2 = 1 - 2d + d^2 = 1 - 2d + d = 1 - d = e$.

Vaadeldavas ringis leidub ka nullitegureid. Need on idempotendid $e$ ja $d$. Tõepoolest, $e \cdot d = (1 - d)d = d - d^2 = d - d = 0$.

Lihtne on märgata, et nii võib arutleda suvalise ringi puhul: kui ringis leidub idempotent $d$, siis on ka $1 - d$ idempotent ning $d(1 - d) = 0$.

**Ülesandeid:**

38. Millised funktsioonide korrutamise operatsioonid on kommutatiivsed ja millised assotsiatiivsed?

39. Millised idempotendid ja nullitegurid esinevad jäägiklassiringis mooduli 30 järgi?

40. Leida lõpmatu arvu $\ldots 0101010101^2$ viisteist viimast numbrit.

41. Näidata, et jäägiklassiringis mooduli 7 järgi pole nulltegureid.

## 13. Mitteassotsiatiivsed ringid

Kõik senivaadeldud ringid olid assotsiatiivsed. Leidub ka mitteassotsiatiivseid ringe; üks selliseid on kolmedimensionaalsete vektorite hulk liitmise ning vektorkorrutamise operatsiooni suhtes. Tuletame meelde, et vektorite **a** ja **b** vektorkorrutis $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ on vektor pikkusega $ab \sin \gamma$ (kus $a$ ja $b$ on vektorite **a** ja **b** pikkused, $\gamma$ aga nurk vektorite **a** ja **b** vahel), mis asetseb ruumis risti vektoreid **a** ja **b** läbiva tasandiga, kusjuures selliselt, et vektorid **a**, **b** ja $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ moodustavad nn. parema käe kolmiku. Kollineaarsete vektorite korral $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$.

Selleks et veenduda vektorkorrutamise mitteassotsiatiivsuses, valime nullist erinevad vektorid **a**, **b** ja **c** nii, et **a** ja **b** oleksid kollineaarsed, **c** aga nendega risti. Siis $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ ja ka $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{0}$. Samal ajal $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ on risti vektoriga **b** ja ühtlasi ka vektoriga **a** ning erineb nullist; seega $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ on nullist erinev, sest mittekollineaarsete vektorite vektorkorrutis on null vaid siis, kui üks teguritest on null.

On võimalik näidata, et vektorite ringis, milles korrutamiseks on vektorkorrutamine, kehtib Jacobi samasus:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{a} + (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

Et iga vektor **a** on iseendaga kollineaarne, siis $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$. Ringi, milles on täidetud Jacobi samasus ja samasus $a^2 = 0$ nimetatakse Lie' ringiks. Järelikult kolmemõõtmelise ruumi vektorid moodustavad Lie' ringi vektorite liitmise ja vektorkorrutamise operatsioonide suhtes.

Lie' ringide ja assotsiatiivsete ringide vahel on tihe side. Nimelt võib igast assotsiatiivsest ringist $R$ tuletada Lie' ringi $L$, kui asendada ringis korrutamise tehe operatsiooniga

$$a \circ b = ab - ba.$$

Viimast nimetatakse kommuteerimise operatsiooniks.

Tõepoolest, kommuteerimise operatsioon on liitmise suhtes distributiivne:

$$a \circ (b + c) = a(b + c) - (b + c)a = ab + ac - ba - ca =$$
$$= (ab - ba) + (ac - ca) = a \circ b + a \circ c,$$
$$(a + b) \circ c = (a + b)c - c(a + b) = ac + bc - ca - cb =$$
$$= (ac - ca) + (bc - cb) = a \circ c + b \circ c,$$

seega on meil tegemist ringiga $L$.

Ilmselt võrdub ringi $L$ iga elemendi ruut nulliga:

$$a \circ a = aa - aa = 0.$$

Jääb vaid veenduda Jacobi samasuse kehtivuses. Ka see on kontrollitav vahetu arvutamisega:

$$(a \circ b) \circ c + (b \circ c) \circ a + (c \circ a) \circ b = (ab - ba) \circ c +$$
$$+ (bc - cb) \circ a + (ca - ac) \circ b = (ab - ba)c - c(ab - ba) +$$
$$+ (bc - cb)a - a(bc - cb) + (ca - ac)b - b(ca - ac) = 0.$$

Seega on $L$ tõesti Lie' ring.

Kuigi igast assotsiatiivsest ringist on lihtne saada Lie' ringi, on vastupidine ülesanne — leida antud Lie' ringi $L$ jaoks assotsiatiivne ring, millest $L$ on saadav ülalkirjeldatud teel — väga keerukas ning ei tarvitse isegi olla alati lahenduv.

Huvitav on märkida, et Lie' ringid on (väheste eranditega) mittekommutatiivsed, sest igas sellises ringis on täidetud antikommutatiivsuse seadus. Tõepoolest, Lie' ringi iga elemendi ruut on võrdne nulliga, olgu see element $a$, $b$ või $a+b$:

$$a^2 = b^2 = (a+b)^2 = 0.$$

Kuna me ei tea, kas ringis on täidetud kommutatiivsuse seadus, siis ei või me $(a+b)^2$ arvutamisel kasutada valemit

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

millega oleme harjunud, vaid peame korrutama $(a+b)$ liikmeti $(a+b)$-ga, muutmata seejuures tegurite järjekorda. Saame

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = 0.$$

Seose $a^2 = b^2 = 0$ tõttu järeldub siit $ab + ba = 0$ ehk $ab = -ba$.

Kui assotsiatiivne ring on kommutatiivne, siis temast ülalkirjeldatud viisil saadav Lie' ring on nullkorrutamisega ring: $ab = ba$ korral $a \circ b = ab - ba = 0$. Üldiselt võib öelda, et elemendid, mis kommuteeruvad assotsiatiivses ringis, osutuvad vastavas Lie' ringis nulliteguriteks.

Kommutatiivset ringi, milles on rahuldatud järgmine assotsiatiivsuse seadust üldistav samasus:

$$[(a \cdot a) \cdot b] \cdot a = (a \cdot a) \cdot (b \cdot a),$$

nimetatakse *Jordani ringiks.* Ka kõik assotsiatiivsed ringid on ühtlasi Jordani ringid.

Ka Jordani ringe võib saada assotsiatiivsetest ringidest, kui tuua neis sisse uus korrutamine — nüüd juba valemi

$$a * b = ab + ba$$

järgi. See tehe on ilmselt kommutatiivne:

$$a * b = ab + ba = ba + ab = b * a$$

ning on liitmise suhtes distributiivne. Selles võib veenduda samuti, nagu me seda tegime Lie' ringide puhul, s. t. otsese arvutamisega. Kehtib ka samasus

$$[(a * a) * b] * a = (a * a) * (b * a).$$

Tõepoolest: $a * a = a \cdot a + a \cdot a = 2a^2$ ja $[(a * a) * b] * a =$

$$= (2a^2 * b) * a = (2a^2 \cdot b + b \cdot 2a^2) * a = (2a^2 \cdot b + b \cdot 2a^2) \cdot a +$$
$$+ a \cdot (2a^2 \cdot b + b \cdot 2a^2) = 2a^2ba + 2ba^3 + 2a^3b + 2aba^2 =$$
$$= 2a^2(ba + ab) + 2(ba + ab)a^2 = 2a^2 * (ba + ab) =$$
$$= (a * a) * (b * a).$$

Tavalise korrutamise asendamine $*$-korrutamisega võib anda mitteassotsiatiivse Jordani ringi vaid siis, kui lähtering ei ole kommutatiivne. Assotsiatiivse ja kommutatiivse ringi korral tekib jälle assotsiatiivne ring:

$$(a * b) * c = (ab + ba) * c = (ab + ba)c + c(ab + ba) =$$
$$= abc + bac + cab + cba = a(bc + cb) + (bc + cb) \cdot a =$$
$$= a(b * c) + (b * c)a = a * (b * c).$$

Veel ühe üldiselt mitteassotsiatiivsete, kuid assotsiatiivsetele ringidele küllalt lähedaste ringide klassi moodustavad nn. *alternatiivsed ringid*, mille iga kahe elemendi $a$ ja $b$ korral

$$(aa)b = a(ab) \text{ ja } (ba)a = b(aa),$$

s. t. assotsieeruvad selliste elementide järjestatud kolmikud, milles on kaks kõrvuti seisvat võrdset elementi. Kui sümboliga $[abc]$ tähistada elementide $a$, $b$ ja $c$ nn. assotsiaatorit $(ab)c - a(bc)$, siis võib alternatiivsuse tingimuse esitada kujul $[aab] = [baa] = 0$, samal ajal kui tavaline assotsiatiivsus on esitatav kujul $[abc] = 0$.

Huvitav on märkida, et alternatiivseteks osutuvad need ja ainult need ringid, milles iga kahe elemendi korral neid elemente sisaldav vähim alamring on assotsiatiivne. Võrdluseks märgime, et assotsiatiivsetes ringides on iga alamring assotsiatiivne. Peale selle vaadeldakse veel nn. *assotsiatiivsete astmetega* ringe, s. o. selliseid ringe, mis ei tarvitse olla alternatiivsed, kuid milles iga elemendi korral vähim seda elementi sisaldav alamring on assotsiatiivne.

Vaatleme nüüd näitena ringi, mille moodustavad järgmised maatriksid üle jäägiklassiringi mooduli 3 järgi tavalise maatriksite liitmise ja korrutamise suhtes (s. t. maatriksi elemendid on selle jäägiklassiringi elemendid), kusjuures maatriksite summa ja korrutise elementide arvutamisel arvestatakse selle jäägiklassi iseärasusi:

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad a = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$e = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad h = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Meenutame, et jäägiklassiringis mooduli 3 järgi $3 = 0$, $4 = 1 = -2$ ja $2 = -1$. Seetõttu $-a = b$, $-c = f$, $-d = h$ ja $-e = g$, nii et vaadeldava ringi korrutamistabel näeb välja nii, nagu märgitud tabelis 1.

Moodustame sellele ringile vastavad Lie' ja Jordani ringid. Nende korrutamistabelid on esitatud vastavalt tabelitel 2 ja 3.

Viimasest kahest korrutamistabelist on selgesti näha esimese ringi antikommutatiivsus ning teise ringi kommutatiivsus. Et mõlemad ringid on mitteassotsiatiivsed, seda näitavad järgmised arvutused:

$$(e \circ h) \circ a = a \circ a = 0, \qquad e \circ (h \circ a) = e \circ b = b,$$
$$(c * d) * g = g * g = g. \qquad c * (d * b) = c * c = f.$$

*Tabel 1*

| | 0 | a | b | c | d | e | f | g | h |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| a | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| b | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| c | 0 | a | b | c | d | e | f | g | h |
| d | 0 | a | b | c | d | e | f | g | h |
| e | 0 | a | b | c | d | e | f | g | h |
| f | 0 | b | a | f | h | g | c | e | d |
| g | 0 | b | a | f | h | g | c | e | d |
| h | 0 | b | a | f | h | g | c | e | d |

*Tabel 2*

| ∘ | 0 | a | b | c | d | e | f | g | h |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| a | 0 | 0 | 0 | b | b | b | a | a | a |
| b | 0 | 0 | 0 | a | a | a | b | b | b |
| c | 0 | a | b | 0 | a | b | 0 | a | b |
| d | 0 | a | b | b | 0 | a | a | b | 0 |
| e | 0 | a | b | a | b | 0 | b | 0 | a |
| f | 0 | b | a | 0 | b | a | 0 | b | a |
| g | 0 | b | a | b | a | 0 | a | 0 | b |
| h | 0 | b | a | a | 0 | b | b | a | 0 |

*Tabel 3*

| * | 0 | a | b | c | d | e | f | g | h |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| a | 0 | 0 | 0 | a | a | a | b | b | b |
| b | 0 | 0 | 0 | b | b | b | a | a | a |
| c | 0 | a | b | f | g | h | c | d | e |
| d | 0 | a | b | g | h | c | e | c | d |
| e | 0 | a | b | h | c | g | d | e | c |
| f | 0 | b | a | c | e | d | f | h | g |
| g | 0 | b | a | d | c | e | h | g | c |
| h | 0 | b | a | e | d | c | g | c | h |

Kumbki nendest ringidest pole isegi alternatiivne. Tõepoolest, elementide $a$ ja $c$ korduval liitmisel saame kõik ringi elemendid:

$$0 = a - a, \quad b = a + a, \quad d = a + c, \quad e = c + 2a, \quad f = 2c,$$
$$g = 2c + a, \quad h = 2a + 2c.$$

Järelikult langeb vähim alamring, mis neid sisaldab, kokku terve ringiga ning on seega mitteassotsiatiivne. Alternatiivse ringi korral peab aga iga kaht elementi sisaldav vähim alamring olema assotsiatiivne.

**Ülesandeid.**

42. Näidata, et kolme teineteisega ristuva ühikvektori korral kehtib Jacobi samasus.

43. Kui lugeda, et $1 + 1 = 0$ ja $-1 = 1$, siis maatriksid

$$a = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ja } 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

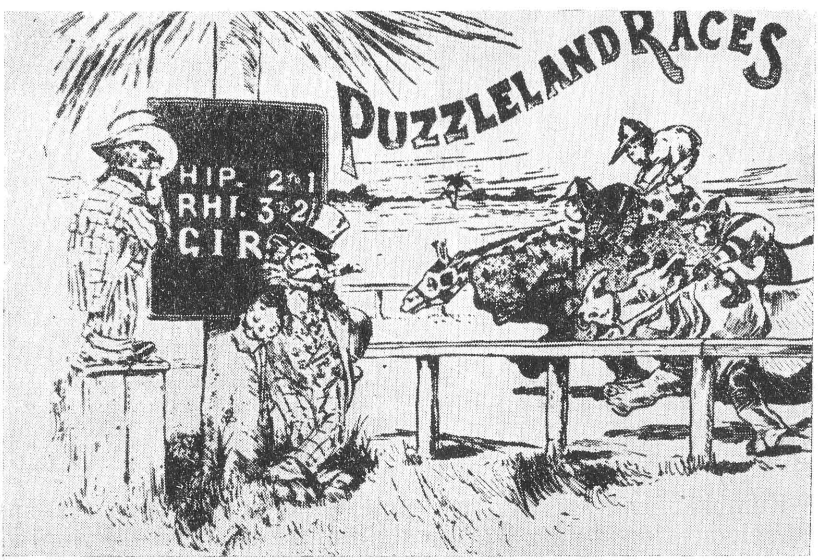
moodustvad assotsiatiivse ringi. Leida sellele ringile vastavad Lie' ja Jordani ringid. Kas nad on assotsiatiivsed?

44. Tuua näiteid kommutatiivsetest Lie' ringidest.

## VEEL SAM LOYDI ÜLESANDEID

### Millised on kaelkirjaku võiduvõimalused?

Selleks et näidata, kui vähe paljud võiduajamistesse narruseni armunud inimesed tõeliselt mõtlevad võiduvõimaluste üle, esitame järgmise lihtsa ülesande.




Kui jõehobu võidulootused on üks kahe vastu, ninasarvikul aga kaks kolme vastu, millised on siis kaelkirjaku šansid?

Ka teine ülesanne on seotud sama pildiga. Kui kaelkirjak suudab ninasarvikut kahe miili jooksus võita kaheksandikmiiliga, ninasarvik edestab jõehobu samal rajal veerandmiiliga, millise edumaaga võidab siis kaelkirjak kahe miili jooksus jõehobu?

# GENEREERIVAD FUNKTSIOONID JA SUMMADE ARVUTAMINE

Ü. Kaasik

Matemaatiliste probleemide lahendamine on üsna sageli seotud mitmesuguste (lõplike või lõpmatute) summade arvutamisega. Tõsi küll, vahetult keskkooli matemaatikakursuses kerkivad probleemid eriti keerulisi summasid tavaliselt ei sisalda. Nendega puutuvad aga kokku juba matemaatika vastu veidi enam huvi tundvad õpilased — tarvitseb vaid meenutada matemaatikaringide jaoks väljaantud raamatuid või olümpiaadidel esitatud ülesandeid. Seetõttu tuleb keskkooli matemaatikaõpetajal vähemalt klassivälises töös tegelda ka summade arvutamise meetodite tutvustamisega.

Teatavasti pole summade täpsete väärtuste leidmine kaugeltki mitte alati lihtne ülesanne. Kahtlemata on paljudel lugejaist tulnud kohtuda niisuguste «ebameeldivate» summadega, mille täpse väärtuse arvutamine on osutunud üle jõu käivaks. Selle summa väärtuse leidmisel mõnest tabelist on aga lahtiseks jäänud küsimus, kuidas see on saadud.

Niisuguseid raskusi põhjustab eeskätt just asjaolu, et summade arvutamiseks kasutatavad meetodid ei ole kahjuks universaalsed. Kõik nad seisnevad ju teatavate samasusteisenduste sooritamises antud summaga seni, kuni saadakse avaldis, milles esinevate summade täpsed väärtused on lahendajale tuntud (või mida õnnestub leida käepärast olevates tabelites). Sobivate teisendusvõtete väljavalimine nõuab lahendajalt sealjuures märgatavat leidlikkust ja mis peaasi — küllalt suurt võtete tagavara. Kahjuks aga ei õpetata niisuguseid võtteid peaaegu kuskil, või kui õpetatakse, siis vaid lihtsamaid [1]. Ainus üldisemalt tuntud universaalne võte lõplike summade arvutamiseks on matemaatilise induktsiooni meetod, kuid selle rakendamine vähegi keerulisemate summade korral on enamasti seotud väga suurte

---

[1] Mõningaid kõige lihtsamaid võtteid, mida summade arvutamisel laialdaselt kasutatakse, on lühidalt tutvustatud näiteks artiklis: Kaasik, Ü., Sümbolid $\Sigma$ ja $\Pi$ ning nende omadusi. — Matemaatika metoodiliste artiklite kogumik, II. Tln., 1964,, lk. 21—40.

raskustega — otsitava summa avaldise kuju oletamine paari kolme eriväärtuse järgi käib ka kõige «läbinägelikumale» mate maatikule sageli üle jõu.

Käesoleva artikli eesmärgiks on tutvustada üht suhtelisel vähe tuntud võtete kompleksi — nn. genereerivate funktsioonid kasutamist summade arvutamisel. Artikli piiratud mahtu arves tades saab siin muidugi puudutada vaid selle üsna universaals aparatuuri kõige lihtsamaid rakendusvõimalusi. Täiesti käsit lemata jäävad sama aparatuuri rohkearvulised rakendused teis tes valdkondades [2].

Vaatlusele tulevad summade arvutamise võtted ei ole alat kirjeldatavad ainult elementaarmatemaatika vahenditega. Nen dest arusaamiseks on tarvis (vähemalt põgusalt) tunda tuletis ja integraali mõisteid, samuti (ratsionaalsete) funktsioonide aren damist astmeridadeks. Seetõttu ongi järgnevad read mõeldu eeskätt üliõpilastele ja kõrgema haridusega lugejatele.

Jada $\{a_i\}$ genereerivaks funktsiooniks nimeta takse summat

$$A(x) = \sum_i a_i x^i, \tag{1}$$

kus summeerimine toimub üle kõikide nende $i$ väärtuste, mis an tud jadas indeksitena esinevad. Siinjuures tuleb muidugi arves tada, et jada elementide varustamine indeksitega on suhtelisel vaba. Nii näiteks võib jada esimese elemendi indeksiks valida kas 0 või 1 või hoopis mõne muu naturaalarvu. Vastavalt sellel muutub muidugi ka jada genereeriv funktsioon. Seega on jada genereeriv funktsioon üheselt määratud alles siis, kui jada ele mentidele on kinnistatud kindlad indeksid. Edaspidises käsitlu ses pole meil aga oluline, kas antud jadal on üks või mitu gene reerivat funktsiooni (kuigi me alati kasutame vaid ühte neist) Vastavalt sellele loeme jada $\{a_i\}$ genereerivateks funktsiooni deks peale (1) tarbe korral ka näiteks jadade $\{a_{i-1}\}$ ja $\{a_{i+1}\}$ ge nereerivaid funktsioone, s. t. summasid

$$\sum_i a_i x^{i+1} \quad \text{ja} \quad \sum_i a_i x^{i-1}.$$

Üldsust kitsendamata võib lugeda, et genereeriva funktsioon definitsioonis esinev summeerimine toimub lõpmatuseni: kui jada on lõplik, siis tuleb teda vaid nullidega täiendada. Näiteks bi noomkordajate jada

$$\left\{\binom{n}{i}\right\} = \left\{\binom{n}{0},\ \binom{n}{1},\ \binom{n}{2},\ \ldots\right\}$$

vaadeldakse tavaliselt koosnevana vaid $n+1$ elemendist. Ku

[2] Veidi lähemalt on sellistest rakendustest juttu näiteks raamatus Риордан, Дж., Введение в комбинаторный анализ. М., 1963.

aga defineerida täiendavalt[3], et $n < i$ korral $\binom{n}{i} = 0$, siis võib seda jada lugeda ka lõpmatuks. Seega võib sõltuvalt vajadusest binoomkordajate jada genereerivat funktsiooni kirjutada kahel väliselt erineval kujul:

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i \quad \text{ja} \quad \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{i} x^i.$$

Genereeriva funktsiooni definitsioonis pole midagi öeldud seal esineva astmerea koondumise nõude kohta. Me nimelt jätamegi fikseerimata, mis tähendus on üldse sümbolil $x$ (hiljem on meil vahel ainult tarvis, et ta saaks omandada väärtust 1). Koos sellega langeb aga ära ka küsimus genereeriva funktsiooni määramispiirkonnast, s. t. vastava astmerea koondumisest[4].

Nii saadava formaalse aparatuuri (nimetatakse Cauchy algebraks) üksikasjalikku teooriat me siin esitama ei hakka. Kõik operatsioonid genereerivate funktsioonidega toimuvad täpselt samuti nagu tavaliste koonduvate astmeridadega. Seega on näiteks jadade $\{b_i\}$ ja $\{c_i\}$ genereerivate funktsioonide

$$B(x) = \sum_i b_i x^i \quad \text{ja} \quad C(x) = \sum_i c_i x^i$$

korrutis $A(x) = B(x)\,C(x)$ jada $\{a_k\}$ genereeriv funktsioon, kus

$$a_k = \sum_{i=0}^{k} b_i c_{k-i}. \tag{2}$$

Analoogiliselt saame jada $\{a_i\}$ genereeriva funktsiooni $A(x)$ diferentseerimisel jada $\{(i+1)a_{i+1}\}$ genereeriva funktsiooni, s. t.

$$\frac{d}{dx} A(x) = \frac{d}{dx} \sum_i a_i x^i = \sum_i i a_i x^{i-1}.$$

Genereerivate funktsioonide kasutamisel summade leidmiseks eeldame tavaliselt, et teatavate astmeridade summade avaldised on juba varem teada. Mida suurem on selliste teadaolevate summade hulk, seda lihtsamaks osutub muidugi ka kirjeldusele tulevate meetodite rakendamine. Käesoleva artikli lugejalt näi-

---

[3] Sellist täiendavat definitsiooni on sobiv kasutada vaid $n > 0$ korral, sest mitmetes rakendustes üldistatakse binoomkordaja mõistet $n < 0$ puhul hoopis järgmiselt:

$$\binom{-n}{i} = \frac{(-n)(-n-1)\ldots(-n-i+1)}{i!}.$$

[4] Seetõttu ei ole genereerivad funktsioonid üldse funktsioonid tavalises mõttes, vaid täiesti formaalselt defineeritud sümbolid, mille omadused täiendavalt defineeritakse.

teks eeldatakse, et talle on tuttavad järgmised valemid [5]:

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i = (1+x)^n, \tag{3}$$

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}, \tag{4}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = e^x, \tag{5}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}, \tag{6}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \binom{n+i-1}{i} x^i = (1-x)^{-n}. \tag{7}$$

Siin vasakul on lihtsalt paremates pooltes olevate funktsioonide arendused astmeritta punktis $x=0$.

Genereerivate funktsioonide aparatuuri saab summade väärtuste leidmisel kasutada üsna mitmel viisil. Tutvustame nendest viisidest vaid mõningaid kõige üldkasutatavamaid.

Eriti lihtsalt saab genereerivaid funktsioone summade väärtuste leidmiseks kasutada sel teel, et summa $\sum_i a_i$ vahetu arvutamise asemel püütakse leida vastava genereeriva funktsiooni (1) väärtus kohal $x=1$ või piirväärtus $\lim_{x\to 1} A(x)$. Toomegi selle võtte illustreerimiseks kõigepealt mõned lihtsad näited. Olgu aga kohe märgitud, et nendes näidetes saaks summade väärtused (tegelikult täpselt samal viisil) leida ka ilma genereerivaid funktsioone kasutamata. Seetõttu tuleb esimest viit näidet vaadelda sissejuhatusena edasiste võimaluste tutvustamisele.

**Näide 1.** Leida summa

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}.$$

Vastava genereeriva funktsiooni avaldis on valemi (3) kohaselt

$$A(x) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i = (1+x)^n.$$

[5] Viimase kahe võrduse puhul võime koondumise küsimuste kõrvalejätmise kohta tehtud märkust arvestades isegi unustada, et need kehtivad vaid $|x|<1$ korral.

Seega saame vaadeldava summa väärtuseks

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = A(1) = 2^n.$$

Täiesti analoogiliselt leiame näiteks, et

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} = 0.$$

**Näide 2.** Leida summa

$$\sum_{i=1}^{n-m} (-1)^i \binom{n}{i} \binom{n-i}{m},$$

kus $0 \leqslant m < n$.

Vastava genereeriva funktsiooni

$$A(x) = \sum_{i=1}^{n-m} (-1)^i \binom{n}{i} \binom{n-i}{m} x^i$$

avaldise leidmiseks tuleb siin ette võtta mõned teisendused. Binoomkordajate definitsiooni arvestades saame

$$A(x) = \sum_{i=1}^{n-m} (-1)^i \frac{n!(n-i)!}{i!(n-i)!m!(n-m-i)!} x^i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-m} (-1)^i \frac{n!(n-m)!}{m!(n-m)!i!(n-m-i)!} x^i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-m} (-1)^i \binom{n}{m} \binom{n-m}{i} x^i = \binom{n}{m} \sum_{i=1}^{n-m} \binom{n-m}{i} (-x)^i =$$

$$= \binom{n}{m} \left[ \sum_{i=0}^{n-m} \binom{n-m}{i} (-x)^i - \binom{n-m}{0} (-x)^0 \right] = \binom{n}{m} [(1-x)^{n-m} - 1].$$

Seega

$$\sum_{i=1}^{n-m} (-1)^i \binom{n}{i} \binom{n-i}{m} = A(1) = -\binom{n}{m}.$$

**Näide 3.** Leida summa

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(i+2)a^i}{(i+1)!}.$$

Lihtsate teisendustega saame (valemit (5) arvestades):

$$A(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(i+2)a^i}{(i+1)!}x^i=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(i+1)+1}{(i+1)!}(ax)^i=$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(ax)^i}{i!}+\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(ax)^i}{(i+1)!}=e^{ax}+\frac{1}{ax}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(ax)^{i+1}}{(i+1)!}=$$

$$=e^{ax}+\frac{1}{ax}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(ax)^i}{i!}=e^{ax}+\frac{1}{ax}(e^{ax}-1)$$

ja järelikult

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(i+2)a^i}{(i+1)!}=A(1)=e^a+\frac{1}{a}(e^a-1)=\frac{(a+1)e^a-1}{a}.$$

**Näide 4.** Leida summa

$$\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\binom{n+i}{i}.$$

Eelmiste näidetega analoogiliselt toimides (ja valemit (7) kasutades) saame

$$A(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\binom{n+i}{i}(-x)^i=(1+x)^{-n-1}$$

ning seega

$$\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\binom{n+i}{i}=A(1)=2^{-n-1}=\frac{1}{2^{n+1}}.$$

Seda summat veidi põhjalikumalt vaadeldes on aga kerge märgata, et siin pole üldse tegemist koonduva arvreaga: rea üldliige ei lähene nullile[6]. Seega oleme me leidnud mitte rea summa (seda pole olemaski!) vaid teatavas mõttes üldistatud summa. Siinjuures on huvitav märkida, et täisarvuliste liikmetega rea üldistatud summaks võib osutuda murdarv.

Loomulikult pole üldistatud summa saamine siin mitte juhuslik tulemus, vaid see iseloomustab üldse genereerivate funktsioonide kasutamist. Kirjeldatud meetod nimelt polegi tegelikult midagi muud, kui arvrea üldistatud summa leidmine nn. A b e l i s u m m e e r i m i s m e n e t l u s e g a. Seega annab see meetod tulemuseks alati üldistatud summa, mis aga koonduva rea korral langeb ühte tavalise summaga.

---

[6] Arvridade koondumise ja summeerimise küsimustest on juttu näiteks artiklis: T i i t, E., Arvridadest. — Matemaatika ja kaasaeg, VII, lk. 58—68.

Mõnikord tuleb summa arvutamiseks vajaliku genereeriva funktsiooni leidmisel kasutada ka mitmesuguseid kunstlikke võtteid. Ühe niisuguse võttega võib tutvuda järgmise näite varal.

**Näide 5.** Leida summa

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2i)!}.$$

Genereeriva funktsiooni

$$A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{2i}}{(2i)!}$$

avaldise saamiseks võtame vaatlusele veel teise funktsiooni

$$B(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}.$$

Siis valemi (5) kohaselt

$$A(x) + B(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = e^x,$$

$$A(x) - B(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-x)^i}{i!} = e^{-x}.$$

Neid võrdusi liites (ja tulemust kahega jagades) leiame, et

$$A(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

ning järelikult

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2i)!} = A(1) = \frac{1}{2}\left(e + \frac{1}{e}\right) = \operatorname{ch} 1.$$

Ühtlasi saame siit aga veel kõrvaltulemuse

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2i+1)!} = B(1) = \frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right) = \operatorname{sh} 1.$$

Summa väärtust andva genereeriva funktsiooni avaldise leidmiseks tuleb peale niisuguste lihtsate võtete kasutada tihti veel genereerivate funktsioonide (kui astmeridade) diferentseerimist või integreerimist. See toimub kõige sagedamini sel teel, et genereeriva funktsiooni (1) kompaktse esituse saamiseks vaadeldakse siin esineva astmerea algfunktsiooni (integraali)

$$B(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{i+1} x^{i+1} + b_0,$$

mis ilmselt iga $b_0$ korral rahuldab seost

$$\frac{d}{dx} B(x) = A(x).$$

Kui (tarbe korral konstanti $b_0$ sobivalt valides) õnnestub leida $B(x)$ esitus lihtsama avaldisena, siis $A(x)$ saamiseks tuleb seda $B(x)$ avaldist lihtsalt diferentseerida. Illustreerime selle võtte kasutamist järgmise kahe näite abil.

**Näide 6.** Leida summa

$$\sum_{i=1}^{n} i\binom{n}{i}.$$

Vaadeldes genereerivat funktsiooni kujul

$$A(x) = \sum_{i=1}^{n} i\binom{n}{i} x^{i-1}$$

võib kergesti veenduda, et see on saadud näiteks funktsiooni

$$B(x) = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} x^{i} = (1+x)^{n}$$

diferentseerimise teel. Seega

$$A(x) = \frac{d}{dx} B(x) = n(1+x)^{n-1}$$

ja

$$\sum_{i=1}^{n} i\binom{n}{i} = A(1) = n2^{n-1}.$$

Täiesti analoogiliselt võib leida, et näiteks

$$\sum_{i=0}^{n} (i+1)\binom{n}{i} = (n+2)2^{n-1}.$$

**Näide 7.** Leida summa [7]

$$\sum_{i=1}^{n} i^2.$$

Valides genereeriva funktsiooni kujul

$$A(x) = \sum_{i=1}^{n} i^2 x^{i-1}$$

saame (integreerides ning valemit (4) arvestades):

---

[7] Selle summa (ja üldse naturaalarvude astmete summade $\Sigma i^k$) leidmisel saab kasutada ka mõnevõrra vähem töömahukaid, kuid spetsiaalseid võtteid; vt. T a m m e, E., Kõrgemat järku aritmeetilised progressioonid. — Matemaatika ja kaasaeg, I, lk. 39—45.

$$A(x)=\frac{d}{dx}\left(\sum_{i=1}^{n} ix^i\right)=\frac{d}{dx}\left(x\sum_{i=1}^{n} ix^{i-1}\right)=\frac{d}{dx}\left[x\frac{d}{dx}\left(\sum_{i=0}^{n} x^i\right)\right]=$$

$$=\frac{d}{dx}\left[x\frac{d}{dx}\left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)\right]=\frac{d}{dx}\left[\frac{x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2}\right]=$$

$$=\frac{1+x-(n+1)^2x^n+(2n^2+2n-1)x^{n+1}-n^2x^{n+2}}{(1-x)^3}.$$

L'Hospitali reeglit korduvalt kasutades leiame nüüd

$$A(1)=\lim_{x\to 1}\frac{1+x-(n+1)^2x^n+(2n^2+2n-1)x^{n+1}-n^2x^{n+2}}{(1-x)^3}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1-n(n+1)^2x^{n-1}+(n+1)(2n^2+2n-1)x^n-n^2(n+2)x^{n+1}}{-3(1-x)^2}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-n(n-1)(n+1)^2x^{n-2}+n(n+1)(2n^2+2n-1)x^{n-1}-n^2(n+1)(n+2)x^n}{6(1-x)}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{-n(n-1)(n-2)(n+1)^2x^{n-3}+n(n^2-1)(2n^2+2n-1)x^{n-2}-n^3(n+1)(n+2)x^{n-1}}{-6}=$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Seega

$$\sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Astmeridade diferentseerimist on genereeriva funktsiooni avaldise leidmiseks mõnikord sobiv kasutada ka teisiti. Nimelt võib osutuda, et genereeriva funktsiooni asemel on hoopis lihtsam leida tema tuletise (või mõne kõrgemat järku tuletise) avaldist. Genereeriva funktsiooni saame siis selle avaldise integreerimise teel. Illustreerime ka selle võtte kasutamist mõne näitega.

**Näide 8.** Leida summa

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{a^{i+1}}{i+1}\binom{n}{i}.$$

Vaadeldes genereerivat funktsiooni kujul

$$A(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{a^{i+1}}{i+1}\binom{n}{i}x^{i+1},$$

saame lihtsalt arvutada tema tuletise:

$$\frac{d}{dx}A(x)=\sum_{i=0}^{n}a^{i+1}\binom{n}{i}x^i=a\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(ax)^i=a(1+ax)^n.$$

Kui nüüd veel arvestada, et ilmselt $A(0)=0$, siis leiame summa otsitavaks väärtuseks

$$A(1)=\int_0^1\frac{d}{dx}A(x)\,dx=a\int_0^1(1+ax)^n dx=\left.\frac{(1+ax)^{n+1}}{n+1}\right|_0^1=\frac{(1+a)^{n+1}-1}{n+1}.$$

Seega oleme tõestanud võrduse

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{a^{i+1}}{i+1}\binom{n}{i}=\frac{(1+a)^{n+1}-1}{n+1},$$

mis kehtib iga $a$ korral.

**Näide 9.** Leida summa

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{i+1}}{i}.$$

Vastava jada genereeriva funktsiooni

$$A(x)=-\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-x)^i}{i}$$

tuletise saab lihtsalt arvutada:

$$\frac{d}{dx}A(x)=\sum_{i=1}^{\infty}(-x)^{i-1}=\sum_{i=0}^{\infty}(-x)^i=\frac{1}{1+x}.$$

Seega $A(0)=0$ tõttu

$$A(1)=\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\ln(1+x)\Big|_0^1=\ln 2,$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{i+1}}{i}=\ln 2.$$

**Näide 10.** Leida summa

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{2i+1}.$$

Vaadeldes genereerivat funktsiooni kujul

$$A(x)=1-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i x^{2i+1}}{2i+1}$$

saame, kasutades genereeriva funktsiooni diferentseerimist

$$\frac{d}{dx} A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i x^{2i} = \sum_{i=0}^{\infty} (-x^2)^i = \frac{1}{1+x^2},$$

$$A(1) = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4},$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2i+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Eriti efektiivseks osutub genereerivate funktsioonide korrutamise eeskirja kasutamine lõplike summade arvutamisel. See on võimalik näiteks siis, kui summa

$$s = \sum_{i=0}^{k} a_i$$

üldliiget $a_i$ õnnestub esitada korrutisena kujul

$$a_i = b_i c_{k-i},$$

kus jadade $\{b_i\}$ ja $\{c_i\}$ genereerivad funktsioonid $B(x)$ ja $C(x)$ on tuntud. Otsitav summa $s$ võrdub valemi (2) kohaselt sel juhul lihtsalt $x^k$ kordajaga astmereas $B(x)C(x)$.

Rohkesti rakendusi leiab see meetod just binoomkordajatevaheliste seoste leidmisel. Toomegi mõned vastavad näited.

**Näide 11.** Summa

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \binom{m}{k-i}$$

(kus $k \leqslant \min(m, n)$) arvutamiseks tähistame

$$b_i = \binom{n}{i} \quad \text{ja} \quad c_{k-i} = \binom{m}{k-i}.$$

Siis valemi (3) kohaselt

$$B(x) = (1+x)^n \quad \text{ja} \quad C(x) = (1+x)^m.$$

Seega

$$B(x)C(x) = (1+x)^{n+m} = \sum_{i=0}^{n+m} \binom{n+m}{i} x^i,$$

kust leiamegi otsitava summa väärtuse kui $x^k$ kordaja:

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k}.$$

**Näide 12.** Leida summa

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{n}{i},$$

kus $k < n$ (juhul $k = n$ tõime vastava tulemuse juba näites 1) Arvestades, et $(-1)^{2k} = 1$ ja iga $i$ puhul $(-1)^i = (-1)^{-i}$ võib selle summa üldliikme kirjutada korrutisena

$$(-1)^i \binom{n}{i} = (-1)^k \binom{n}{i} \cdot (-1)^{k-i} = b_i c_{k-i}.$$

Valemeid (3) ja (6) kasutades saame nüüd

$$B(x) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{i} x^i = (-1)^k (1+x)^n,$$

$$C(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i x^i = \frac{1}{1+x},$$

$$B(x) C(x) = (-1)^k (1+x)^{n-1}.$$

Seega on otsitava summa väärtuseks

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{n}{i} = (-1)^k \binom{n-1}{k}.$$

**Näide 13.** Leida summa[8]

$$\sum_{i=0}^{n-1} \binom{k+i}{k}.$$

Kirjutades selle summa üldliikme kujul

$$\binom{k+i}{k} = \binom{k+i}{k} \cdot 1 = b_i \cdot c_{n-1-i}$$

saame

$$B(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{k+i}{i} x^i = (1-x)^{-k-1},$$

$$C(x) = \sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x},$$

$$B(x) C(x) = (1-x)^{-k-2} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{k+1+i}{i} x^i.$$

[8] Teise meetodiga on see summa leitud näiteks artiklis: Kaasik, Ü Ühendid. — Matemaatika metoodiliste artiklite kogumik, I. Tln., 1963, lk 18—30.

Vaadeldava summa väärtuseks on $x^{n-1}$ kordaja viimasest avaldisest:

$$\sum_{i=0}^{n-1}\binom{k+i}{k}=\binom{k+n}{n-1}=\binom{k+n}{k+1}.$$

**Näide 14.** Leida summa

$$\sum_{i=0}^{2s}(-1)^i\binom{n+2s-i-1}{2s-i}\binom{n+i-1}{i}.$$

Valides näiteks

$$b_i=(-1)^i\binom{n+i-1}{i},\quad c_{2s-i}=\binom{n+2s-i-1}{2s-i}$$

saame valemit (7) kasutades

$$B(x)=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\binom{n+i-1}{i}x^i=(1+x)^{-n},$$

$$C(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\binom{n+i-1}{i}x^i=(1-x)^{-n},$$

$$B(x)C(x)=(1-x^2)^{-n}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}x^{2k}.$$

Et otsitav summa on selles avaldises $x^{2s}$ kordajaks, siis järelikult

$$\sum_{i=0}^{2s}(-1)^i\binom{n+2s-i-1}{2s-i}\binom{n+i-1}{i}=\binom{n+s-1}{s}.$$

Vaatleme lõpuks veel üht eriti efektiivset (kuigi tunduvalt töömahukamat) võtet genereerivate funktsioonide kasutamiseks summade arvutamisel. Selle võtte puhul püütakse rea $\sum_i a_i$ üldliige $a_i$ teisendada niisugusele kujule, et ta võrduks argumendi $x$ teatava $i$-st sõltumatu astme kordajaga mingi tuntud genereeriva funktsiooni $A_i(x)$ astmereas. Otsitava summa saamiseks tuleb siis leida argumendi sama astme kordaja funktsiooni

$$\sum_i A_i(x)$$

astmereas.

Paneme tähele, et sellise meetodi korral pole põhiliseks momendiks mitte enam astmereana antud genereeriva funktsiooni kompaktse avaldise leidmine, vaid antud funktsiooni reaksarendamine (täpsemalt, selle reaksarenduse ühe kordaja leidmine).

**Näide 15.** Leida summa

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{2n-i}{i} 2^{2n-2i}.$$

Kirjutades selle summa üldliikme kujul

$$\binom{2n-i}{2n-2i} 2^{2n-2i} \cdot (-1)^i$$

näeme, et tegemist on $x^{2n}$ kordajaga funktsiooni

$$(1+2x)^{2n-i} \cdot (-x^2)^i$$

reaksarenduses. Valemit (4) arvestades leiame, et

$$\sum_{i=0}^{n} (1+2x)^{2n-i} (-x^2)^i = (1+2x)^n \frac{(1+2x)^{n+1} - (-x^2)^{n+1}}{(1+x)^2} =$$

$$= \frac{(1+2x)^{2n+1}}{(1+x)^2} - \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2} (1+2x)^n}{(1+x)^2}.$$

Selle polünoomi kanoonilise kuju leidmine on seotud vägt suurte arvutustega. Sellepärast unustame, et tegemist on polü noomiga ja arendame ta reaks nagu murdratsionaalse funktsiooni Siinjuures näeme, et selle funktsiooni avaldise teise liikme aren damisel saadavas astmereas on $x^{2n}$ kordaja null (argumend madalaimaks astmeks osutub $x^{2n+2}$). Järelikult piisab vaid funkt siooni avaldise esimese liikme vaatlemisest, s. t. tuleb arenda da astmereaks jagatis

$$\frac{(1+2x)^{2n+1}}{(1+x)^2}.$$

Selle jagatise täisosaks on teatav $(2n-1)$-astme polünoom jäägiks aga esimese astme polünoom. Jäägi leidmiseks kasutam lihtsalt kontrollitavat üldist tulemust, mille kohaselt polünoom $P(x)$ jagamisel $(x-a)^2$-ga saadavaks jäägiks on[9]

$$(x-a)P'(a) + P(a).$$

Seega antud juhul saame jäägi

$$(1+x)(2n+1) \cdot 2 \cdot (-1)^{2n} + (-1)^{2n+1} =$$
$$= -1 + (4n+2)(1+x).$$

Küsimus taandub järelikult $x^{2n}$ kordaja leidmisele jagatise

$$\frac{-1+(4n+2)(1+x)}{(1+x)^2} = \frac{-1}{1+x)^2} + \frac{4n+2}{1+x}$$

[9] See tähendab, et iga polünoomi $P(x)$ ja arvu $a$ korral kehtib seos

$$\frac{P(x)}{(x-a)^2} = Q(x) + \frac{(x-a)P'(a) + P(a)}{(x-a)^2},$$

kus $Q(x)$ on kahe võrra madalama astme polünoom kui $P(x)$ (kui $P(x)$ oı ülimalt esimese astme polünoom, siis muidugi $Q(x) = 0$).

astmereas. Selle astmerea saame aga vahetult valemist (7):

$$\frac{-1}{(1+x)^2} = -\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{i+1}{i} x^i = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^{i+1} (i+1) x^i,$$

$$\left(\frac{4n+2}{1+x}\right) = (4n+2) \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{i}{i} x^i = (4n+2) \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i x^i.$$

Järelikult $x^{2n}$ kordajaks on

$$(-1)^{2n+1}(2n+1) + (4n+2)(-1)^{2n} =$$
$$= -2n - 1 + 4n + 2 = 2n + 1$$

ja seega

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{2n-i}{i} 2^{2n-2i} = 2n+1.$$

Genereerivaid funktsioone saab summade leidmiseks kasutada veel üsna mitmel viisil. Siin kirjeldatud lihtsamad võtted moodustavad aga selle «raudvara», mida peab tundma igaüks, kellel summade arvutamisega nii või teisiti tuleb kokku puutuda. Nende võtete tegelikuks omandamiseks tuleb neid muidugi korduvalt rakendada. Esialgseks harjutamiseks võib soovitada järgmisi ülesandeid, mis kõik on lahendatavad käesolevas artiklis kirjeldatud meetoditega.

### Harjutusülesandeid

Tõestada järgmised võrdused (kui summeerimisrajad on kirjutamata jäetud, siis toimub summeerimine nullist kuni lõpmatuseni või suurima niisuguse täisarvuni, mille korral vastavad binoomkordajad säilitavad oma tavalise tähenduse; $n$, $r$ ja $s$ on täisarvud):

1. $\sum\limits_{i=0}^{r} \binom{s}{i} \binom{r+s-i}{r-i} \binom{n}{r+s-i} = \binom{n}{s}\binom{n}{r}$, kus $r \leqslant s$ ja $r+s \leqslant n$.

2. $\sum\limits_{i} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$.

3. $\sum\limits_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

4. $\sum\limits_{i} i\binom{n}{i}^2 = n\binom{2n-1}{n-1}$.

5. $\sum\limits_{i} \binom{3n+2-i}{i} (-1)^i = 0$.

6. $\sum\limits_{i} \binom{n}{2i} = \sum\limits_{i} \binom{n}{2i+1} = 2^{n-1}$.

7. $\sum\limits_{i} (-1)^{n-i} 2^{2i} \binom{n+1+i}{2i+1} = n+1$.

8. $\sum\limits_{i} \binom{n-i}{i} 2^i = \frac{2^{n+1} - (-1)^{n+1}}{3}$.

9. $\sum\limits_{i} (-1)^i \binom{n-i}{i} \binom{n-2i}{p-i} = 1$.

## Küberneetika

# MASINAD JA MÕTLEMINE

R. Mullari

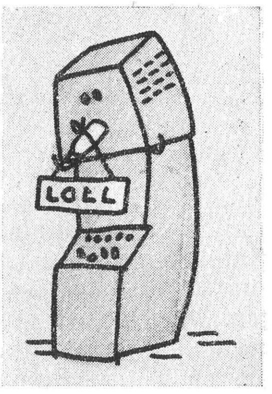
On tuntud tõsiasi, et kaasaegsed elektronarvutid, mis küll võrratult ületavad inimvõimeid arvukate loogilis-matemaatiliste ülesannete lahendamisel, on ometi seni väga paljude ülesannete lahendamisel osutunud inimajuga võrreldes veel äärmiselt abituiks.

«Ta töötab kui elektronarvuti» — arveametnik ja raamatupidaja loeksid seda enesele suurimaks kiituseks, arst-diagnoosija kehitaks õlgu, maletaja tunneks end solvatuna, kirjanik aga kutsuks meid sellise väljendi eest võib-olla isegi kahevõitlusele.

Me ütleme, et masinatele sobib lihtne, ühetooniline, mehhaaniline töö, et masinatel pole kõrget mõttelendu, loovat sädet, hinge. Materialistidena teame aga ometi väga hästi, et mõtlemine pole midagi muud kui välismaailmast vastuvõetud informatsiooni ümbertöötamine, et ükski loov säde ei teki iseenesest ega mittemillestki, et hing ei kujuta endast mingit asja iseeneses või omaette substantsi.

Esimesel pilgul näibki, et vaimse tegevuse mõne liigi mehhaniseerimiseks tuleb lihtsalt jälgida inimaju tegevust (kui mateeria teatavat liikumist), jaotada see elementaaroperatsioonideks (-liikumisteks) ja tõlkida need elektronarvuti keelde. Et elektronarvuti sooritab iga elementaaroperatsiooni võrratult kiiremini kui inimaju, siis võib ta seda teha ka väga paljude operatsioonidega. Ja kokkuvõttes võiks loota, et elektronarvuti — isegi oma praegusel kujul — on suuteline tegema mitte ainult ükskõik millist vaimset tööd, vaid tegema seda ka palju efektiivsemalt kui inimene.

Paljudel juhtudel on selline lähenemisviis tõepoolest andnud suurepäraseid tulemusi (näiteks võiks tuua mitmesugused arvutustööd jms.). Ja näibki, et pole midagi lihtsamat kui jälgida omaenese mõtet ning see täht-tähelt kirja panna (et seejärel programmeerida). Paraku selgub aga kummaline tõsiasi: tarvitseb meil ainult hakata tõsisemalt mõne mõtte jälgi ajama, püüdma selgitada, kust ta on tulnud, kuhu läinud, kui jäljed kaovad kui vits vette. See on ka arusaadav, sest on ju kindlaks tehtud, et inimaju töötab põhiliselt paralleelse toimega, s. t. aju töötleb informatsiooni korraga väga mitmes suhtes, mitmeid kanaleid mööda. Teadvuses saab aga korraga olla üldiselt ainult üks mõte. Siit jõuame tahes-tahtmata järeldusele, et kaugeltki mitte kogu meie mõttetegevus ei ole teadlik, vaid et suur osa sellest toimub alateadlikult, intuitiivselt.



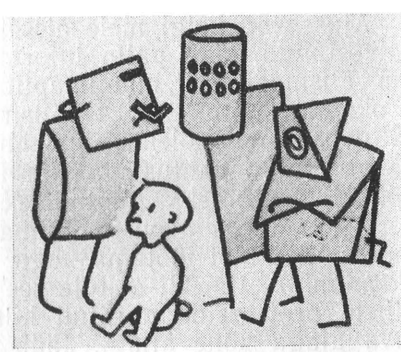

Loomulikult on alateadliku mõtlemise olemasolu märgatud juba ammu, kuid et ta on just alateadlik ja seetõttu meile seni veel peaaegu täiesti tundmatu, on ta aastasadade jooksul osutunud ebausklike ja šarlatanide silmis sobivaks varjupaigaks kõikvõimalikele kõrgematele vaimudele ning müstilistele jõududele. Kahjuks on see jätnud oma jälje alateadvuse mõiste kasutamisele üldse, mistõttu temast püütakse võimaluse korral mööda minna, teda maha vaikida (et hoiduda väärtõlgendustest). On aga selge, et tegeliku mõtteprotsessi analüüsile ei saa tema ühe komponendi mahavaikimine kasuks tulla.

Selle poolt aga, et aju töö just põhiliselt paralleelse toimega on, võiks muuhulgas tuua ka näiteks järgmisi üldisi kaalutlusi.

Ajusse on kõigi meie aistingute, tajude, elukogemuste kaudu salvestunud väga palju informatsiooni, on tekkinud teatav koopia välismaailmast, maailmapilt. Olgu meil tarvis lahendada mingi konkreetne probleem. Et välismaailma nähtused on omavahelises sõltuvuses, siis oleneb lahendus selle probleemi seostest kõigi välismaailma nähtustega. Järelikult peame ülesseatud probleemi võimalikult õigeks (mõtteliseks) lahendamiseks seda vaatlema kogu oma peas oleva maailmapildi suhtes ja seega kasvõi linnulennultki läbi töötama kogu meie peas oleva tohutu informatsioonihulga. Ilmselt ei tule see aga järjestikusel viisil (füsioloogiliste protsesside piiratud kiiruse tõttu) praktiliselt vastuvõetava ajaga kõne allagi. Jääb arvestada kaht võimalust: informatsioon töödeldakse kas paralleelselt või ainult osaliselt. Et osaline, paratamatult informatsiooni väga väikese osaga piirduv töötlemine annaks meile sageli probleemi üsna halva lahenduse, siis tuleks aju tunnistada väga ebaratsionaalseks organiks, kui ta ei suudaks rakendada esimest võimalust — informatsiooni paralleelset töötlemist. Organite ratsionaalsuse eest hoolitseb aga teatavasti looduslik valik. Siit on päris loomulik järeldada, et informatsiooni töötlemine peab tingimata toimuma just paralleel-


selt ja seega alateadlikult. Alles kõigis miljonites või ka miljardites üksiksuhetes, lõigetes, kanalites jms. saadud lahenduste resultant, teatav keskmine, annab meile midagi teadlikku — aprioorse isikliku arvamuse näol. Siinjuures võivad üksikud nn. mikrolahendused seda arvamust kinnitada, osaliselt kinnitada või isegi talle vastu rääkida (ei tarvitse ju meie peas olev maailmapilt sugugi kõigis üksikasjades klappida — ikkagi koopia! — ja nähtavasti ei ole ka paralleelne mõtlemine päris laitmatu). Et aga igasugune keskmine on üldiselt stabiilsem oma komponetidest (eriti, kui neid on väga palju), siis võib ütelda, et aprioorse arvamuse tõesus iseloomustab esmajoones just meie maailmapilti ja sõltub vähe alateadliku mõtlemise aparaadi kvaliteedist. Viimasele esitatavad nõuded ei ole selles osas järelikult kuigi suured.

Näib, et alateadliku mõtlemise käigus sõelutakse ühtlasi välja see osa informatsioonist, mis paistab olevat meie aprioorse arvamusega kas eriti hästi kooskõlas või siis rääkivat sellele risti vastu. See informatsioon, mida on suhteliselt vähene hulk, tõuseb teadvusesse ja töötatakse läbi juba kvaliteetsemalt, s. o. järjestikku, teadlikult. Tulemused lisanduvad meie maailmapildile. Kui osutub, et tulemused ei ole kooskõlas aprioorse arvamusega (ja me ei siirdu üle mõnele teisele tegevusele), algab kogu protsess uuesti. On aga saavutatud kooskõla, loeme probleemi lahendatuks.



*Tal on maailmapilt!*

Võib muidugi juhtuda, et intuitiivse arvamusega eriti kooskõlas oleva või talle eriti vasturääkiva informatsiooni sõelumisel jääb sõel tühjaks. Sellise juhul saame isikliku arvamuse, mida me aga ei oska eriti mõistlikult põhjendada ega ka ümber lükata. Tõenäoliselt võib igaüks siin iseenda praktikast tuua näiteid rohkem kui vaja!

Paralleelse mõtlemise seisukohalt oleks muide huvitav vaa delda nn. imearvutajate probleemi. Ajaloo vältel on tuntud ja tuntakse praegugi paljusid inimesi, kes on silma paistnud oma fantastiliselt kiire ning täpse peastarvutamise võime poolest. Kuigi imearvutajate seletuste järgi toimub arvutamine nende peas absoluutse selguse ja arusaadavusega, ometi ei suuda nad selle mehhanismi teistele inimestele mingil moel avada. Nähtavasti on siin tegemist eriti väljaarenenud, teadvuse tasemele tõusnud paralleelse mõtlemisega (paralleelsusega saavutataksegi tohutu kiirus). Teistele selgitamiseks peab imearvutaja aga kasutama järjestikuse toimega kanaleid (keel, kiri), ja seetõttu ta ei suudagi oma paralleelse toimega teadvust kirjeldada.

Kui meenutada nüüd artikli alguses esitatud arutlusi inimaju tegevuse jälgimisest, selle jaotamisest elementaaroperatsioonideks jms., siis paistavad alateadliku paralleelse mõtlemise vaatekohalt need probleemid hoopis erinevas valguses. Mingisugusest tegeliku inimmõtte ammendavast jälgimisest ja elementaaroperatsioonideks jaotamisest ei saa juttugi olla, vähemalt veel mitte tänapäeval. Ühelt poolt puuduvad meil vahendid alateadvuse jälgimiseks, teiselt poolt puudub meil aga ka vähegi täielikum ettekujutus alateadliku mõtlemise struktuuristki. Ei ole sugugi kindel, kas see üldse annab end elementaaroperatsioonideks jaotada. Ja kui annab, siis on nende elementaaroperatsioonide hulk kahtlemata väga suur.

A. N. Kolmogorov ütleb, et elunähtuste uurimisel on oluline mitte lõpmatu, vaid s u u r e dialektika, mis näitab, kuidas suure hulga elementide kombinatsioon moodustab uued kvaliteedid. Antud juhul aga töötab see suure dialektika meile nähtavasti vastu. Kui asetaksime väga suure hulga paralleelse mõtlemise elementaaroperatsioone (kui sellised üldse eksisteerivad!) ühte ritta, nagu vajab oma tööks kaasaegne elektronarvuti, võime saada uue kvaliteedi, mille nimeks oleks praktiliselt lõpmatu. See tähendab, et kuidas me ka ei kiirustaks oma elektronarvutit, ei suudaks ta ometi seda rida praktiliselt vastuvõetava ajaga läbi töötada. Praktiliselt lõpmatu ülesande näitena võiks tuua kõikvõimalike variantide läbivaatamisele rajaneva malemängu. Nimelt osutub, et masin, mis analüüsiks miljon käiku sekundis, kulutaks siin esimese käigu sooritamisele $10^{95}$ (!) aastat.

Kõigest sellest järeldub, et inimaju võib oma paralleelse tööga saavutada tulemusi, mis järjestikuse toimega elektronarvutile on nähtavasti põhimõtteliselt kättesaamatud. See tuleneb aju võimest kiiresti ja mitmes suhtes (kuigi kohati ebatäpselt) läbi töötada temas salvestatud tohutuid informatsioonihulki. Võib arvata, et siin peitubki inimaju kõrge mõttelennu ja loova sädeme saladus, see, mis õigupoolest teebki mõtlemise mõtlemiseks.

Kaasaegne elektronarvuti võib ületada inimest selliste ülesannete lahendamisel või nendes suhetes, kus määravaks ei osutu inimese poolt elu jooksul talletatud informatsiooni tohutute hulkade läbitöötamine, kus viimast saab kompenseerida väiksema hulga või üldse teist liiki informatsiooni parema töötlusega, s. t. kus elutarkust on võimalik kompenseerida kas teistsuguse tarkuse või asjatundmatuse, kuid täiuslikuma tehnikaga. Siinjuures on inimesele õige suureks eeliseks see, et eriti raske näib olevat kompenseerida elukogemusi halvasti korrastatult, müraga segatult ja paljudes eri liiki koodides laekuva informatsiooni vastuvõtmisel ja salvestamisel. Lihtsamalt öeldes — see, mida inimene võib tänu oma paljudele mitmesugustele kogemustele taibata vihjest, lausekatkendist, hääletoonist, paberile kriipseldatud sõnadest, peab olema masina jaoks esitatud rangelt formaliseeritud (kodeeritud, programmeeritud jms.) kujul. Viimane asjaolu on praegu tõsiseks miinuseks masina tegelikul töösserakendamisel ka lihtsate ülesannete korral.

Meenutades artikli algul näitena esitatud erinevate elualade esindajaid paneme tähele, et arveametniku ja raamatupidaja töö ei vaja just väga palju informatsiooni. Arst-diagnoosija töö puhul, kui arvestada edukalt rakendatud diagnoosimismasinate olemasolu, võib oletada, et selleks hädavajalik informatsioonihulk on tänapäeva elektronarvutil töödeldav, kuigi ulatub kriitilise piiri lähedale. Maletaja kasutab partiide analüüsimisel eelmiste partiide mängimisest ja jälgimisest saadud kogemusi ilmselt juba vägagi suurel hulgal. Kirjaniku töös aga ei ole järjestikuse toimega elektronarvutiga vist küll midagi peale hakata.

Arvuti tööprintsiip ja organisatsioon asetavad tema praktilistele võimetele küllaltki ranged piirid. Piltlikult võiks seda ette kujutada järgmise näite varal[1]: «...kui kasutada elektronarvuti organisatsioonivormi sõjaõhujõududes, siis saaksime sellise lennukite «kooskõlastatud» tegevuse, et ainult üks nendest võiks tõusta õhku, ülejäänud aga oleksid kokkupõrgete vältimiseks sunnitud asuma lennuväljal». On ilmne, et kuidas me ka ei suurendaks lennukite kiirust, ei saa sellised õhujõud olla eriti efektiivsed.

Ülalesitatu loomulikuks järelduseks on: kui tahetakse luua tõeliselt m õ t l e v a t masinat, mis suudaks inimvõimeid juba igakülgselt ületada, tuleb seda teha kaasaegsetest elektronarvutitest mingil täiesti erineval printsiibil, kusjuures üheks olulisemaks tingimuseks näib olevat informatsiooni paralleelne töötlemine. Viimane on veel peaaegu tundmatu ala, kus pealegi ei näi kehtivat meie tavalised arusaamad informatsiooni töötlemisest. Nähtavasti on just küberneetilise tehnika arendamiseks tarvis «meeletuid» ideid, millest kõneles N. Bohr (küll kaasaegset füüsikat silmas pidades).

[1] Р о с с  Э ш б и, У., Системы и информация. — Вопросы философии, 1964, 3, lk. 78—85.

Esialgu on siin muidugi kõige õigem püüda välja selgitada ja masinates rakendada inimaju töö põhimõtteid, sest uute ideede otsingul tuleb esmajoones ikka pöörduda tegelikkuses juba olemasoleva poole. Seda pidas silmas ka J. V. Neumann, öeldes [2]: «...pole välistatud võimalus, et ... loogika on sunnitud läbi tegema metamorfoosi ja muutuma neuroloogiaks palju suuremal määral, kui neuroloogia loogika haruks». Mis puutub aga inimaju üldisesse struktuuri ja töötamispõhimõtteisse, siis võiks vist olla päri O. H. Schmitti arvamusega [3]: «...kõige järgi otsustades on kesknärvisüsteem oma mälu ja arvutuslike funktsioonidega statistiline süsteem, milles iga konkreetse sündmuse mäletamisest võtab osa miljoneid rakke ja needsamad rakud säilitavad samaaegselt miljonite teiste sündmuste kujutisi». Nähtavasti just mälu selline hajutatus ning erinevate sündmuste kujutiste läbipõimumine ongi põhiline, mis tagab aju paralleelse töö. Kuidas neid omadusi aga küberneetilistes masinates tegelikult realiseerida?

Lubatagu siinkohal teha väike kõrvalepõige. Me kõnelesime vajadusest välja selgitada inimaju tööpõhimõtted, selleks et neid rakendada masinais, s. t. ajutegevuse modelleerimise vajadusest. Ei tule aga unustada, et modelleerimine ei ole siin eesmärgiks omaette, vaid ainult abivahendiks paremate ideede puudumisel. Eesmärgiks ei ole ju saada masinat, mis mõtleks just nagu inimene, vaid masinat, mis oleks suuteline tegema kõrgemat liiki vaimset tööd ja kui võimalik, siis tegema seda paremini kui inimene. Selleks tuleb aga alati olla valmis uute, paremate lahenduste leidmiseks, piirdumata ainult nendega, mis on inimajus valmis kujul olemas. Näitena võiks tõmmata paralleeli lennunduse arenguga. Kui peamiseks eesmärgiks oleks olnud lennata nagu l i n d, aga mitte h ä s t i lennata, lehvitaks vist suurem osa lennukeist praegu tiibu (lennukikonstruktorite nördimusest hoolimata).

* * *

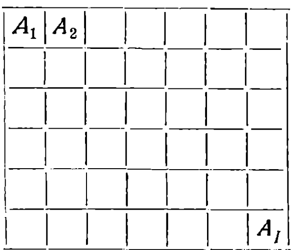
Kaasajal uuritakse informatsiooni paralleelse töötlemise põhimõttelisi ja praktilisi võimalusi mitmel pool, mitmel viisil ning mitmes suunas. Paraku ei ole artikli autor pädev nendest töödest mingit asjalikku ülevaadet andma. Seepärast piirdume vaid ühe, tõsi küll, kaunis primitiivse näitega selle kohta, kuidas võiks ehk toimuda informatsiooni paralleelne töötlemine [4].

---

[2] N e u m a n n, J. v., The General and Logical Theory of Automata. "The World of Mathematics", v. 4. lk. 209.

[3] S c h m i t t, O. H., The Design of Machines to simulate the Behavior of the Human Brain. «IRE National Convention» (Symposium) 1955, lk. 240—255.

Olgu vaadeldavaks masinaks ruutudeks jaotatud plaat, kus iga ruut $A_i (i = 1, \ldots, l)$ võib olla ühes kahest selgesti eraldatavast seisundist 1 või 0 (näit. elektriliselt laetud või laadimata). Masina töötsüklit nimetame katseks. Olgu antud veel tõenäosused $p_{ij}^n$, mille tähendus on järgmine: ruudu $A_i$ viibimine seisundis 1 $n$-nda katse ajamomendil $t$ põhjustab tõenäosusega $p_{ij}^n$ ruudu $A_j$ viibimise seisundis 1 $n$-da katse ajamomendil $t+1$. Iga katse alguseks (ajamomendiks 0) viiakse masin mingisse algseisu, s. t. kõik ruudud viiakse mingisse soovitud seisundisse. Katse viimasel ajamomendil $T$ kontrollitakse aga mingi kindla ruudu, näiteks $A_l$ seisundit.




Vaatleme näiteks kahte erinevat liiki algseise, millest esimese korral on ainult plaadi mingi ühe veeru, teise puhul mingi ühe rea ruudud seisundis 1. Kui katse lähtub esimest liiki algseisust ja ajamomendiks $T$ on ruut $A_l$ seisundis 1, loeme katse õnnestunuks, kui aga ruut $A_l$ on seisundis 0, siis — ebaõnnestunuks. Teist liiki algseisu korral loeme tulemusi vastupidiselt.

See, kas katsed õnnestuvad või mitte, s. t. kas masin suudab eristada esimest ja teist liiki algseise, sõltub põhiliselt tõenäosustest $p_{ij}^n$. Kui me tahame, et masin omandaks sellise eristamisvõime, peame järelikult suurustele $p_{ij}^n$ vastavad väärtused andma. Loomulik on seda teha teatava õpetamisprotsessi abil näiteks järgmisel viisil.

Sooritame suure hulga katseid, lähtudes läbisegi mitmesugustest algseisudest. Pärast iga katset $n$ muudame suurusi $p_{ij}^n$ järgmisel põhimõttel: kui katse õnnestus, muudame suurusi $p_{ij}^n$ üldiselt samas suunas, nagu me seda tegime pärast $(n-1)$-se katse lõpetamist, s. t. et üldiselt oleks

$$(p_{ij}^n - p_{ij}^{n-1})(p_{ij}^{n+1} - p_{ij}^n) \geqslant 0,$$

ebaõnnestunud katse korral aga vastassuunas. Muutmisel arvestame ka teatavaid juhuslikke suurusi $\sigma_{ij}^n$, andes nende abil kogu

---

[4] Asjast rohkem huvitatutele soovitame probleemistiku ning saadud tulemustega tutvumiseks näiteks järgmisi artikleid.

Смолян, Л. Г., Техника и мозг. — Вопр. философии, 1965, 5, lk. 83—94.

Сэмюэль, А. Л., Искусственный разум: прогресс и проблемы. Прилож. книги: М. Таубе, Вычислительные машины и здравый смысл. М., 1964 (vt. lk. 138).

Фельдбаум, А. А., Процессы обучения людей и автоматов. «Кибернетика, мышление, жизнь», М., 1964, lk. 421—458.

Маккаллок, У. С., Питтс, У., Логическое исчисление идей, относящихся к нервной активности. «Автоматы», М., 1956.

tõenäosuste $p_{ij}^n$ süsteemile paindlikkust ja varieeruvust. Näiteks võiksime avaldada

$$p_{ij}^{n+1} = f(p_{ij}^n, k^n(p_{ij}^n - p_{ij}^{n-1}), \sigma_{ij}^n),$$

kus

$$k^n = \begin{cases} 1, & \text{kui } n\text{-s katse õnnestus,} \\ -1, & \text{kui } n\text{-s katse ebaõnnestus,} \end{cases}$$

ja, muuhulgas,

$$f(x, 0, 0) = x,$$
$$0 \leqslant f(x, y, z) \leqslant 1,$$

kui vaid $0 \leqslant x \leqslant 1$ ning $|y| \leqslant 1$, ja

$$\frac{df}{dy} \geqslant 0.$$

Siin on muide analoogia õpetamisprotsessiga selle sõna tavalises tähenduses, kus õige vastuse korral öeldakse, et õpilane on õigel teel ja soovitatakse jätkata samas suunas. Juhuslike suuruste $\sigma_{ij}^n$ mõju on aga mõningal määral võrreldav unustamisega.

Siinkohal me ei analüüsi, kas ja millise konkreetse funktsiooni $f$, juhuslike suuruste $\sigma$ jaotusseaduse ja teiste tingimuste korral masin tõesti õpib juba märgatavalt suure tõenäosusega õigesti eristama esimest ja teist liiki algseise. Paneme ainult tähele, et kui ta seda teeb, siis on meil tõepoolest tegemist statistilise süsteemiga, kus informatsioon kõikide üksikute vaadeldud algseisude kohta säilitatakse kogu suuruste $p_{ij}^n$ süsteemis tervikuna, hajutatult, läbipõimunult. Informatsiooni töötlemine toimub või võib toimuda paljudes kanalites korraga, s. o. paralleelselt. Näib ka, et üksikute suuruste $p_{ij}^n$ muutmine või ka üksikute ruutude väljalangemine süsteemist ei halva eriti masina tööd, s. t. et vaadeldav süsteem on, samuti kui aju, suhteliselt töökindel.

Me muidugi ei nimeta kirjeldatud masinat veel mõtlevaks, võime aga ütelda, et temal või mõnel muul umbes samasugusel põhimõttel ehitatud masinal on mõningaid omadusi, mis arvatavasti peaksid olema iseloomulikud nii mõtlevale masinale kui ka ajule tema töös kuni aprioorse isikliku arvamuse kujunemiseni. Pakuks huvi juhtida tähelepanu järgmisele omadusele.

Ülalkirjeldatud masina puhul on meil tõepoolest raske näidata, m i k s ta mingit antud konkreetset algseisu peab kas esimesse või teise liiki kuuluvaks. Siin tuleks arvesse võtta kõik suurused $p_{ij}^n$ ja teostada terve hulk arvutusi. Kui ruutude arv ulatub aga miljarditesse, s. t. on suurusjärgult võrdne tõeliselt mõtleva masina — aju elementide arvuga, osutub vajalike arvutuste hulk juba praktiliselt peaaegu lõpmatuks. Sel korral peame aga ütlema, et me ei ole praktiliselt võimelised kirjeldama konkreetselt masina tööd ühe või teise ülesande lahendamisel, vaid saame seda kirjeldada ainult üldiselt, põhimõtteliselt — täpselt samuti, nagu me ei ole võimelised konkreetselt kirjeldama alateadlikku mõtlemist, intuitsiooni (kirjeldamine saab ju olla ikkagi ainult järjestikune!). Täpsemaid hinnanguid küllalt suure paralleelselt töötava masina töö kohta on seega võimalik anda nähtavasti ainult masina töö enda pikaajalise jälgimise tulemusena musta kasti põhimõttel.

On arusaadav, et paralleelselt töötavate masinate korral omandab vastupidiselt kaasaegsetele elektronarvutitele keskse koha mitte programmeerimine, vaid õpetamine. Siin on põhiline just masinasse salvestatava informatsiooni valik ja salvestamise tegelik käik, mitte aga selle põhjalik kirjeldamine, mida masin peab informatsiooniga peale hakkama. Teiste sõnadega, kui lähtuda analoogiast eespool toodud näitega, on oluline see, milliseid ülesandeid anda masinale lahendada, millises järjekorras ja millisel viisil muuta või lasta muutuda masina sisemist struktuuri nii õnnestunud kui ka ebaõnnestunud lahenduste korral. Ja seda kõike tuleb kaaluda, pidades silmas seda, mis otstarbeks, s. t. millise iseloomuga vaimseks tööks õpetatavaid masinaid tegelikult tahetakse kasutada.

* * *

Inimene korjab suure osa oma elutarkusest n.-ö. stiihiliselt igapäevastes toimingutes, ühiskondlikus suhtlemises. Elu ise annab talle pidevalt uusi ülesandeid. Kui inimene tegutseb vastavalt sellele, kuidas ta need ülesanded eelnevalt mõttes lahendas, signaliseeritakse talle ta tegevuse edukuse või ebaedukuse kaudu tema poolt leitud lahenduste ja arusaamade õigsusest või väärusest. Põhiliselt ainult koolitarkus ja sihikindel lugemine moodustab informatsioonist selle osa, mille inimene saab kõigiti ettekavatsetult. Küllaltki raske, ja näib et isegi peaaegu võimatu on siinjuures selgitada, kuivõrd vajalik on üks või teine osa inimese kogu stiihiliselt või ettekavatsetult kogutud tarkusest mingi loova vaimse töö tegemiseks. On ilmne, et Maksim Gorki kirjanikupalge omapära tulenes just sellest miljööst, milles ta kasvas (kogus elutarkust stiihiliselt), vaevalt suudab aga keegi hinnata, kuivõrd aitas teaduslikus töös F. Engelsit tema iiri keele või A. Einsteini viiulimängu oskus. Et siin aga mingi sõltuvus on, sellele viitab asjaolu, et peaaegu kõik, kes mingil vaimse töö alal on saavutanud suurtulemusi, suutnud luua midagi kvalitatiivselt uut, on olnud väga laialdase huvi- ja silmaringiga ning mitmekülgsete teadmistega inimesed.

Kõik see näitab kõrgemat liiki vaimset tööd tegevate masinate õpetamise probleemi äärmist keerukust. Võiks ju kõne alla tulla võimalus saata masin näiteks Vanapagana taoliselt maa peale inimeste sekka, antud juhul küll mitte õndsaks saama nagu Põrgupõhja Jürka, vaid stiihiliselt elutarkust koguma. (Milline peaks küll olema selle masina konstruktsioon, sisend- ja väljundseadmed jms.?!) Aga teatavasti ei saanud ka Jürka inimeste seas elades eriti targaks, mis siis veel masinast kõnelda! Inimeste hulgas viibiva masina keskkond erineb siiski oluliselt inimeste hulgas viibiva inimese keskkonnast. Selle tulemusena kujuneks meie masinast mingisugune vaimne veidrik selle sõna tavalises, inimlikus tähenduses. Sellega ei ole muidugi öeldud, et veidrikud mingisuguse vaimse tööga hakkama ei saa. Aga kas see masin oleks ka õigel viisil veidrik, s. t. kas ta meie poolt soovitatud töid siiski teha suudaks? Arvatavasti ei leiaks me lahendust, vaid põrkaksime selle probleemiga veelgi teravamalt kokku siis, kui teeksime ära tohutu töö, viies masinasse kogu elutarkuse sisse mitte stiihiliselt, vaid organiseeritult, ettekavatsetult.

Õigesti õpetamise erilist tähtsust võiks toonitada veel järgmise näitega. On teada rida juhtumeid, kus inimlapsed kasvasid üles metsas huntide juures. Hiljem, sattudes inimeste juurde, ei omandanud need lapsed enam intellekti.

* * *

Meid kõiki hämmastab peaaju kompaktsus (mis üldiselt küll mõnevõrra vähemal määral on omane peaaegu kogu orgaanilisele loodusele). Oma umbes liitrise ruumala juures on aju suuteline mahutama tohutul hulgal informatsiooni ja täitma äärmiselt keerulisi funktsioone. See eeldab ajult väga peent struktuuri. Orgaanilises maailmas saab sellise struktuuri aluseks olla orgaaniline aine ise oma tuhandetest aatomitest koosnevate molekulidega. Siin lülitub molekulide keeruline struktuur aktiivselt sisse organi enda struktuuri, viies selle n.-ö. molekulaarsele ehk mikrotasemele. Näiteks võib tuua kasvõi desoksüribonukleiinhappe (DNH) molekulid, mille struktuuris sisaldub kogu pärilikkuseinformatsioon. Midagi selletaolist ei saa aga olla anorgaanilises maailmas, kus molekulide struktuur on suhteliselt lihne ja jäik. Järelikult peab anorgaanilisest mateeriast masina struktuur olema peaaegu täielikult n.-ö. makrotasemel, mis on aga mikrotasemest võrratult jämedam. See aga tähendab, et anorgaanilisest mateeriast mõtlev (paralleelse toimega) masin, millel oleksid umbes inimaju võimed, peaks olema ajust võrratult suurem ja kohmakam. See viib mõttele kasutada masinates orgaanilist mateeriat [5], kõrgmolekulaarseid ühendeid. Nende keerulises struktuuris peituvate võimaluste ärakasutamine masina töös, aga ka lagunemisest hoidmine saab toimuda ainult keemiliste ainevahetusprotsesside abil. Lühidalt, meil peab olema e l a v kude, ja nähtavasti siis juba ajukude. Inimajuga võrreldes on siin positiivset efekti üldiselt samasuguse struktuuri korral loota esmajoones kasutatava ajukoe suuremast massist. Probleem taandub seega

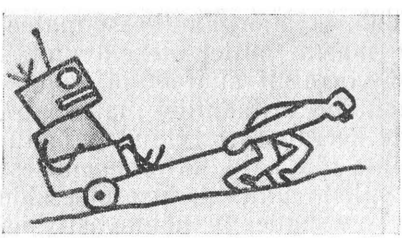
---

[5] Vt. T a m m e, E., Norbert Wiener. — Matemaatika ja kaasaeg, III, lk. 24—26.

ajukoe kunstlikule kasvatamisele ja rakendamisele masinais. Ideaalsel juhul osutub võimalikuks kasvatada ajukudet, mis analoogiliselt imearvutajatele on suuteline teostama informatsiooni paralleelset töötlemist äärmiselt kvaliteetselt. Vastasel korral tuleks aga ette näha ajukoe liitmine ühtsesse süsteemi järjestikuse toimega anorgaanilise masinaga, sest, nagu arvata võib, ei osutu ajukude informatsiooni paralleelsele töötlemisele järgneval järjestikusel töötlemisel just eriti efektiivseks (praegugi moodustavad ju inimajud ja elektronarvutid mitmete probleemide lahendamisel n.-ö. ühtse süsteemi).

Siinjuures kerkivad aga üles ka mitmesugused moraaliprobleemid. Me mõistame sügava pahameelega hukka inimeste kallal teostatud elajalikud katsed fašistlikes vangilaagrites, ei luba isegi arstidel teaduse huvides ohustada inimeste elu ja tervist. Siin aga kavatseme kasvatada suure tüki ajukudet, millelt eeldame mõtlemisvõimet (ja järelikult ka teadvust), ning tahame tegutseda sellega oma suva kohaselt. Sellised probleemid ei kerki üles mitte üksnes ajukoe kasvatamisel, vaid igasuguste mõtlevate masinate puhul üldse, kui vaid ollakse jõutud nii kaugele, et masina kohta võib mingis suhtes öelda, et ta mõtleb selle sõna tavalises inimlikus tähenduses. Praegu ei ole aga veel saabunud aeg nende probleemide tulipunkti seadmiseks. Teema ise on kirgede lõkkelepuhumiseks küpsemata, arutlus spekulatiivne. Ei ole ju veel selgemalt teada, kuidas ja kas üldse mõtlevate masinateni jõutakse. Kunagi tulevikus võib aga tõesti juhtuda, et puhkeb äge sule- ja sõnasõda moraalse käitumise kohta masinatega, et asutatakse masinakaitseseltse jms. Ja kui kaua võibki masinaid enam masinateks nimetada, millal peab hakkama nende kohta ütlema «kes» ja «Teie»?

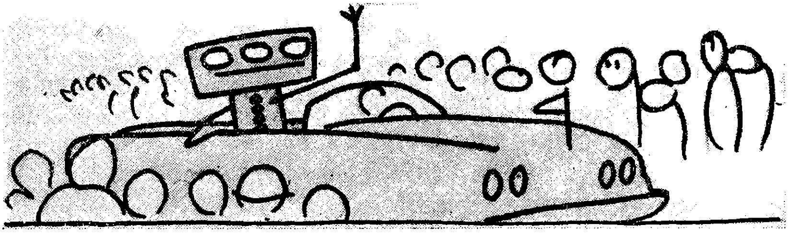
* * *



Lõpuks tahaks veel puudutada mõningat hirmu tekitavat probleemi masinate võimalikust ülemvõimust inimeste üle. Tõepoolest, kui masinad järjest arenevad ja ületavad lõpuks oma intellektilt inimese, kas nad siis viimaks ei orjasta inimest?

On aga teada, et intellekt üksi ei tee midagi, läheb tarvis ka füüsilist jõudu, mõtete täideviijat. Idee muutub materiaalseks jõuks teatavasti alles siis, kui ta vallutab rahvahulgad. Idee muuta inimene masina orjaks ei saa aga rahvahulkasid vallutada. Pole muidugi võimatu, et tulevikus võib olla ka mõtlevatest masinatest koosnevaid «rahvahulkasid». Päris kindlasti on need masinad-ajukolossid aga füüsilises tegevuses kohmakad ja inimesel ei ole raske neid võita nende võimuhaaramise katse korral. Mõtlevad masinad on ju ikkagi spetsialiseerunud vaimsele tööle. Ja just tänu sellele võibki loota, et nad on suutelised siin inimest ületama. Inimese bioloogilise arengu käigus ei saanud sellist spetsialiseerumist toimuda, sest võitlus loodusega nõudis talt üheaegselt nii vaimset kui ka füüsilist täiust. Võib arvata, et just see vaimsete ja füüsiliste võimete ühtsus jääb alatiselt inimese eeliseks kitsalt spetsialiseeritud masina ees.

Pealegi tekib küsimus, mida masin inimesest orjaga peale hakkaks? Orjapidamine õigustab end ju ainult tootlike jõudude küllaltki madala taseme korral. Kaasaja ja eriti tuleviku kõrgeltarenenud tootlikud jõud nõuavad töötajate nii vaimsete kui ka füüsiliste võimete täielikku väljaarendamist. Täies ulatuses saab see teoks ainult kommunistliku ühiskonna raames. Kui aga tuleviku kommunistliku ühiskonna juhtimisega hakkaksid tegelema ka supertargad masinad, siis juhtimisele see igatahes kahjuks ei tuleks. Ja iga mõistlik inimene oleks valmis sellele kahe käega alla kirjutama.



*MÕNINGAID MÕTTEID ÕPPIVATEST MASINATEST*[1]

*Universaalsete elektronarvutite loomise tagajärjel sattus inimene kummalisse olukorda, mida võib kirjeldada sõnadega «Me võime kõike, kuid ei tea kuidas».*

*Kui tahame modelleerida aju tööd eristamisel, peame õpetama masinat klassifitseerima objekte näidiste järgi, mida talle õpetamisel tutvustatakse, mitte aga formaalsete reeglite järgi. Tunnused peab ta ise üles leidma.*

*Katsetused õppivate eristamisprogrammidega vastavad jaatavalt küsimusele: kas masin võiks teada loodusseaduste kohta rohkem kui teda loonud inimesed? Loeme siin t e a d m i s e kriteeriumiks otstarbekat käitumist (näiteks — määrata õige diagnoos, suunata puurauk nii, et jõutakse naftani, mitte veeni). Imestada pole selle üle rohkem kui selle üle, et näiteks järgnev füüsikute põlvkond võib eelnevast rohkem teada. Selleks peavad nad mitte üksnes lugema raamatuid, vaid ka, esiteks, tegema uusi katseid ja teiseks — vanu katseid uuesti läbi mõtlema. Ning see kõik on täiesti jõukohane ka masinale.*

---

[1] Katkendid on tõlgitud M. Bongardi artiklist: Eristamisprotsessi modelleerimine. — «Наука и Жизнь», 1965, **6**, lk. 17—25.

# ELEKTRONARVUTITE MASSILISEST RAKENDAMISEST MAJANDUSLIKKUDE PROTSESSIDE JUHTIMISEL

**A. Jägel**

Majanduslike protsesside edukas juhtimine tähendab sisuliselt mõistlike otsuste väljatöötamist ja nende otsuste õigeaegset realiseerimist. Peamine on siinjuures just küsimus sellest, kuidas kiiresti saada õigeid otsuseid. Pikaajaline praktika on näidanud, et heade otsuste õigeaegseks tegemiseks peavad kõigepealt olema täidetud järgmised kaks eeltingimust. Meil peab olema vaadeldava protsessi kohta küllalt palju informatsiooni, millele toetudes saaks võimalike alternatiivide (üksteist välistavate otsuste) hulgast, mis igaüks on mingis mõttes hea, vaid ühe alternatiivi välja valida. Lisaks küllaldasele informatsioonile peab meie käsutuses aga olema veel võimalus seda informatsiooni vajalikuks tähtajaks ümber töötada.

Majanduslike protsesside juhtimiseks vajalikule informatsioonile ja selle töötlemisele on iseloomulikud niihästi väga suur maht ja kvalitatiivne mitmekesisus kui ka kõikvõimalikud töötlusastmed (alates niisugustest, kus informatsiooniühiku kohta tuleb vaid üks või mõni teisendus, kuni niisuguste töötlusastmeteni, kus teisendusi tuleb informatsiooniühiku kohta sadu ning isegi tuhandeid). Selle informatsiooni mahu ja mitmekesisuse lähemaks iseloomustamiseks toome mõningad konkreetsemad andmed.

1958. a. hinnati majandusliku põhiinformatsiooni mahtu NSV Liidu tööstuse osas 3,4 miljardile dokument-reale iga kuu kohta. Siia ei kuulu veel see informatsioon, mis ei võta osa igapäevasest ringlusest, kuid tuleb arvesse informatsiooni töötlemisel (nagu näiteks tehnilis-ökonoomilised näitajad jms.). 1960. a. tuli arvestus-planeerimistöös iga kuu kohta keskmiselt juba 12 miljardit dokument-rida, mille töötlemisega tegeles 2 miljonit inimest. Keskmiselt teeb see inimese kohta 35 dokument-rida tunnis, s. t. iga tunni vältel tuleks tehteid teha ligikaudu 200—300 kolme- kuni viiekohalise arvuga. Pealegi võtab veel lisaaega informatsiooni saamine ja väljastamine. Kõigest sellest järeldub, et käsitsi arvutamise korral peab informatsiooni töötlus olema üsna hõre — üks arv võtab teisendustest osa vaid mõned korrad ja tehted ise peavad olema lihtsad.

Informatsiooni nii hõre töötlemine sisaldab endas suurt ohtu: kui selles suunas midagi otsustavat ette ei võeta, siis seisame 10—15 aasta pärast olukorra ees, kus teadlikult juhitud laiendatud taastoomine muutub praktiliselt teostamatuks. Kõige minimaalsemalt vajaliku informatsiooni töötlemisvõimaluste loomisel on senine ühiskondlik praktika (rahvusvahelises ulatuses) tuginenud peaasjalikult vastavate kaadrite suurendamisele. Nii tuli 1870. aastal näiteks USA-s 12,5 miljoni töötaja kohta 300 tuhat kontoritöötajat, kuid 1960. aastal oli juba 9 miljonit kontoritöötajat, s. t. kontoritöötajate arv suurenes 30 korda, kusjuures kõigi töötajate üldarv suurenes samal perioodil vaid 5,2 korda.

Sellega seoses tuleb ka meenutada Ukraina Teaduste Akadeemia viitsepresidendi V. Gluškovi seisukohta («Pravda», 14. dets. 1962. a.), kes leiab, et kui võtta arvesse planeeritud tööstustoodangu kasvutempot, siis selleks, et planeerimine toimuks praegusega samal tasemel (see ei ole kaugeltki rahuldav), peame juba 1980. aastal sellele tööle rakendama kogu Nõukogude Liidu täiskasvanud elanikkonna.

Sellised väljavaated ja prognoosid on üsna mõtlemapanevad. Isegi siis, kui see ennustus realiseeruks vaid 50% ulatuses, tuleks järeldada: ainus reaalne väljapääs sellest olukorrast on võimsate elektronarvutite massiline rakendamine majandusliku informatsiooni töötlemiseks ja kiirete ning suure võimsusega informatsiooni-ülekandeseadmete kasutuselevõtmine. Kuigi elektronarvutite ja kiirete ning suuremahuliste informatsiooni ülekande-salvestusseadmete laialdase rakendamise hädavajalikkus on tänapäeval juba enam-vähem üldtunnustatud, siiski puudub esialgu ühtne seisukoht nende rakendamise konkreetsete teede ja probleemide vaatluselevõtmise sobivaima järjekorra küsimustes. Seniste kogemuste põhjal võib elektronarvutite ja informatsiooni ülekande-salvestusseadmete rakendamisega seotud uurimistöödes täheldada kolme enam-vähem väljakujunenud suunda. Neid suundi saab lühidalt iseloomustada järgmiselt.

1. Olemasolevate majanduslike informatsioonivoogude ning informatsiooni ringlusskeemide väljaselgitamine (koos nende loogilis-sümboolse kirjeldamisega) järgnevatel eesmärkidel:

— olemasolevate informatsiooni töötlemise algoritmide formaliseerimine ja nende realiseerimise järk-järguline üleandmine arvuteile;

— informatsiooni ülekande-salvestusseadmete spetsiifika ja vajalike omaduste selgitamine;

— tootmisprotsessis töövahendite juurest saadava informatsiooni kogumise süsteemi väljatöötamine (koos sobivate kodeerimisvõtetega).

2. Informatsiooni töötlemise täiustatud algoritmide koostamine koos optimaalsuse kriteeriumide sissetoomisega ja vastavate algoritmide realiseerimine elektronarvuteil.

3. Rahvamajanduse juhtimise struktuuri ja tegeliku juhtimise ümberorganiseerimisega seotud küsimuste lahendamine suurte arvutusvõimsuste kasutamise seisukohalt.

Edaspidises me räägimegi lühiduse mõttes nendest suundadest vastavalt kui esimesest, teisest ja kolmandast suunast. Kuigi need kolm suunda tegelevad majandussüsteemi matemaatilis-küberneetilise modelleerimisega erineval viisil, ei ole nad siiski omavahel isoleeritud ega täiesti sõltumatud.

Esimene suund vaatleb süsteemi üksikosade vahelisi suhteid põhiliselt informatsiooniliste seoste valguses ega esita küsimust, miks on üks või teine informatsioonivoog korraldatud just nii, aga mitte teisiti. Selle suuna põhieesmärgiks on luua kindel kord informatsiooni liikumises ja tagada vajalik informatsioon õigeaegselt. See suund ei tegele täieliku optimiseerimisega, kõik tehtavad parandused on siin korrigeerivat laadi.[1]

Mis puutub teise suunda, siis selle raames tegeldakse põhiliselt lokaalse optimiseerimisega (näiteks ühe ettevõtte ulatuses), mistõttu suuna põhiliseks majanduslikuks uurimisobjektiks on süsteemi üksikosade vahelised funktsionaalsed seosed. Peab muidugi märkima, et paljud teise suuna probleemid kerkivad just esimese suuna uurimuste käigus, saadavad tulemused lülituvad aga esimese suuna raames loodavatesse algoritmidesse.

Kolmanda suuna põhiülesandeks on tegelda kogu majandussüsteemi juhtimise täpsustamisega ja süsteemi kui terviku optimaalsuse kriteeriumide väljatöötamisega.

Mis puutub Nõukogude Liitu, sealhulgas ka Eesti NSV-sse, siis on käesolevaks momendiks meil kõige rohkem arenenud just teine suund. Seevastu esimese ja kolmanda suuna osas esialgu eriti nimetamisväärseid saavutusi veel ei ole. Sealjuures on kolmanda suuna alased tööd alles täiesti teoreetilise uurimise tasemel. Nähtavasti aga saabki kolmas suund oma konkreetse kallaku ja praktilise rakendussfääri alles pärast vajaliku taseme saavutamist esimeses ja teises suunas. Sellepärast me kolmandast suunast siin rohkem ei räägigi, sest pakilisemad vajadused ja probleemid on seotud nimelt esimese kahe suunaga.

Nagu juba öeldud, on meil põhiliselt arenenud just teine suund. Üheks põhjuseks on siin asjaolu, et praegustes tingimustes annab teine suund suhteliselt rohkem materiaalset efekti kui esimene suund, lisaks sellele on ta teaduslikuks uurimistööks tunduvalt mugavam ega nõua elektronarvutitelt nii suurt töökindlust kui esimene suund. Näiteks palgaarvestuses, mille auto-

---

[1] Siin kasutatud mõistetest on juttu näiteks artiklis: J ä g e l, A., Operatsioonianalüüs. — Matemaatika ja kaasaeg, IV, lk. 31—39.

matiseerimine kuulub esimese suuna alla, ei tohi eksida isegi ühe kopika võrra. Kui me aga matemaatilise planeerimisülesande lahendamisel (see kuulub teise suuna alla) mõne juhusliku vea tõttu ei saa küll kõige paremat lahendit, kuid leitud lahend on siiski praktikas realiseeritav ja annab paremaid tulemusi kui seda oleks saadud ilma matemaatilise planeerimiseta, siis ei esitata selle arvutusvea suhtes erilisi pretensioone (kui ta üldse avastataksegi) ning tulemus loetakse heaks.

Suurem osa teises suunas saavutatud konkreetsetest tulemustest on nii või teisiti seotud mitmesuguste matemaatiliste planeerimisülesannete sõnastamise ja lahendamisega. Eriti laialdaselt on NSV Liidus elektronarvutitega lahendatud näiteks nn. transpordiülesandeid, kusjuures selgus, et vedude optimaalse plaani rakendamine andis reeglina 10—15% kokkuhoidu. Veelgi suuremat efekti on saadud keerulisemate planeerimisülesannete lahendamisel.

Senised tulemused selles valdkonnas on aga siiski olnud vaid suhteliselt üksikuteks katseteks parandada rahvamajanduse juhtimise mõningaid lülisid. Kvalitatiivset muutust need katsed veel endaga kaasa ei too. Kvalitatiivseks muutuseks oleks siin üleminek matemaatilise planeerimise (ja üldse operatsioonianalüüsi) meetodite massilisele rakendamisele. Selleks on aga tarvis viia esimene suund praktikas sellisele tasemele, et vaadeldavate objektide kohta oleks tagatud küllaldane informatsioon ja see oleks kättesaadav õigeaegselt ning moonutusteta.

Lisaks objektiivse ja suuremahulise informatsiooni kättesaadavaks muutmisele, mis on vajalik matemaatiliste planeerimisülesannete majanduslikult korrektseks esitamiseks, tuleb oluliselt parandada ka operatiivset juhtimist. Halva operatiivse juhtimise korral toimub korrektuuride sisseviimine esialgselt arvutatud optimaalsetesse plaanidesse praktiliselt alati hilinemisega; seetõttu muutuvad need plaanid jäigaks ja ei vasta mõne aja pärast enam üldse reaalsusele. Mida operatiivsem on juhtimine, seda suuremat efekti annab matemaatilise planeerimise meetodite rakendamine. Operatiivse juhtimise parandamine on aga üks esimese suuna ülesannetest.

Elektronarvutite senine rakendamine majanduslike protsesside juhtimiseks on nii Eesti NSV-s kui ka kogu NSV Liidus kulgenud esimese ja teise suuna vahel ilmses disproportsioonis. Seda iseloomustab kasvõi asjaolu, et vastava-alastes refereerivates ajakirjades on rohkesti materjali ja ettepanekuid mitmesuguste planeerimiseeskirjade parandamiseks ning matemaatiliste planeerimisülesannete lahendamiseks, vähe aga töid planeerimis- või juhtimistegevuse lihtsamategi osade tegeliku üleviimise kohta elektronarvuteile.

Et matemaatilise planeerimise meetodite tegelikult massilist rakendamist on takistanud eeskätt just esimese suuna tööde märgatav mahajäämus, siis ongi viimane aeg hakata astuma samme selle suuna forsseeritud arendamiseks. Vabariigis on nende tööde mahajäämust põhjustanud ka elektronarvutite ning vastava kaadri nappus. See siiski ei õigusta tekkinud olukorda ega anna põhjust viivitada vastavasuunaliste ettevalmistus- ja uurimistöödega.

Vaatleme, mida meile praktiliselt annab esimese suuna eelistatud arendamine. Esiteks, saame konkreetse ülevaate vabariigi majandussüsteemis ringleva informatsiooni mahust ja informatsioonivoogude kvalitatiivsetest iseärasustest. Teiseks, saame konkreetselt teada, missugused informatsiooni töötlemise algoritmid on lihtsalt formaliseeritavad ja missugused mitte. Kolmandaks, saame tegeliku pildi sellest, mis osas on olemasolev informatsioon puudulik ja kus ringleb liigne informatsioon. Neljandaks, saame hinnata algoritme nende konkreetse töömahukuse seisukohalt. Viiendaks, saame hinnata tegelikku elektronarvutite ja informatsiooni ülekandeseadmete vajadust vabariigis, mis on vajalik informatsiooni ja operatiivse juhtimise korrastamiseks. Kuuendaks, saame konkreetse suunitluse teaduslike planeerimismeetodite rakendamiseks ja arendamiseks, saame majandusküberneetika kui terviku jaoks konkreetsed ülesanded ja probleemid.

Esimese suuna eelistatud arendamisega loome eeldused selleks, et täiendavate elektronarvutite saabumisel saame need kiiresti rakendada majandusliku informatsiooni töötlemiseks. Sel juhul ei ähvarda meid oht, et informatsiooni töötlemine muutub sisuliselt järjest hõredamaks, mis lõpuks võib viia selleni, et majandussüsteem muutub üha rohkem ja rohkem stiihiliselt isereguleeruvaks (on ju päris ilmne, et 1980. aastal kogu NSV Liidu täiskasvanud elanikkonda ei saa panna rahvamajanduse planeerimisega tegelema).

Veel üks asjaolu, mis räägib esimese suuna eelistamise kasuks lähemas tulevikus, on see, et selle suuna arendamisel tekib võimalus tõmmata töödesse kaasa osa ettevõtete ja asutuste juhtivast kaadrist, kes sel teel omandaks edaspidiseks tööks vajaliku kvalifikatsiooni. Uurimistöö aspektist vaadelduna nõuab teine suund nimelt kaadri osas märgatavalt kõrgemat kvalifikatsiooni kui esimene, seetõttu ei lähe ka kaadri ettevalmistamise probleemid nii teravaks. Peamine on selles, et me lähemas tulevikus kõiki oma arvutusvõimsusi ei rakendaks ainult teise suuna teenistusse nagu seni, vaid rõhuvama osa neist jätaksime just esimese suuna tarvis.

Mis puutub välisriikidesse, siis on seal oluliselt arenenud just esimene suund ja enamus majanduses kasutatavatest elektronarvuteist ongi rakendatud nimelt suuremahuliste informatsioonimassiivide töötlemiseks. Selle tulemusena on vastavais ettevõtteis saavutatud kohapealse juhtimise operatiivsuse märgatav paranemine, kusjuures vabanevat kaadrit (eeskätt mitmesuguste arveametnike näol) tuleb ühe arvuti kohta keskmiselt 125—150 inimest. Arvutite niisuguse rakendamise majandusliku efekti kohta USA-s tehtud analüüs (1959. a.) näitas, et 300 vaadeldud ettevõtte puhul 82% juhtudest õigustavad elektronarvutid end täielikult, 18% juhtudest aga suurenesid ettevõtete kulutused (peamiselt arvutite mittetäieliku koormamise ja juurutamise ettevalmistamatuse tõttu). Analoogilistele järeldustele on jõutud ka mitmes teises riigis.

Kõik need järeldused kinnitavad veelkord seda, et elektronarvutite ning informatsiooni ülekande-salvestusseadmete massiline rakendamine peab lähemas tulevikus toimuma just esimeses suunas. See on põhiline abinõu, mis võimaldab piirata administratiivse personali suurenemist, garanteerides sealjuures tootmise kasvamisega kaasnevate suuremate informatsioonihulkade töötlemise vähemalt praegusel tasemel. Mis aga puutub kaugemasse perspektiivi, siis on vaieldamatult selge, et edaspidi langeb probleemide raskuspunkt nimelt teisele ja kolmandale suunale. Selleks aga, et rahvamajanduse juhtimine kõigis üksikosades n.-ö. «informatsiooni nälga» ei kärbuks, tuleb esmalt korrastada just majandusliku informatsiooni kiire ja suuremahuline töötlemine elektronarvuteil.

*ASTENDAMINE ON LIHTNE!*

$(8+1)^2 = 81$

$(5+1+2)^3 = 512$

$(4+9+1+3)^3 = 4913$

$(5+8+3+2)^3 = 5832$

$(1+7+5+7+6)^3 = 17\,576$

$(1+9+6+8+3)^3 = 19\,683$

$(2+4+0+1)^4 = 2401$

$(2+3+4+2+5+6)^4 = 234\,256$

$(3+9+0+6+2+5)^4 = 390\,625$

$(6+1+4+6+5+6)^4 = 614\,656$

$(1+6+7+9+6+1+6)^4 = 1\,679\,616$

$(5+2+5+2+1+8+7+5)^5 = 52\,521\,875$

$(6+0+4+6+6+1+7+6)^5 = 60\,466\,176$

$(1+7+2+1+0+3+6+8)^5 = 17\,210\,368$

$(3+4+0+1+2+2+2+4)^6 = 34\,012\,224$

$(6+1+2+2+2+0+0+3+2)^7 = 612\,220\,032$

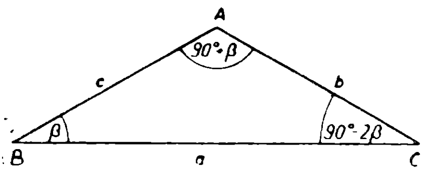
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

## ERINURKSED KOLMNURGAD

Jakob Gabovitš ja S. Zetel

Olgu antud nürinurkne kolmnurk $ABC$ nürinurgaga $\alpha$ ning teravnurkadega $\beta$ ja $\gamma$. Huvitavate omaduste tõttu pälvivad erilist tähelepanu need nürinurksed kolmnurgad, kus nürinurk $\alpha$ on parajasti täisnurga võrra suurem ühest teravnurgast, näiteks nurgast $\beta$. Sellist kolmnurka nimetatakse e r i n u r k s e k s, kusjuures nurk $\beta$ kannab p õ h i n u r g a nime. Nurgad $\alpha$ ja $\gamma$ avalduvad põhinurga kaudu järgmiselt (vt. joonis 1):

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= 90^\circ + \beta, \\ \gamma &= 90^\circ - 2\beta. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$




*Joonis 1.*

Siit muide nähtub, et *erinurkse kolmnurga põhinurk peab rahuldama tingimust*

$$0^\circ < \beta < 45^\circ.$$

Alustame erinurkse kolmnurga omaduste uurimist sellega, et avaldame ta küljed $a$, $b$ ja $c$ ning pindala $S$ põhinurga $\beta$ ja ümberringjoone raadiuse $R$ kaudu. Selleks tugineme siinuslausele, millele võime võrduste (1) põhjal anda kuju

$$\frac{a}{\cos\beta} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\cos 2\beta} = 2R.$$

Siit järeldub, et

$$a = 2R\cos\beta, \quad b = 2R\sin\beta, \quad c = 2R\cos 2\beta. \qquad (2)$$

Pindala arvutamiseks lähtume tuntud valemist

$$S = 0{,}5\, ab \sin\gamma = 0{,}5\, ab \cos 2\beta.$$

Võrduste (2) põhjal on

$$ab = 4R^2 \cos\beta \sin\beta = 2R^2 \sin 2\beta$$

ja seega saame lõpptulemuseks

$$S = 0{,}5 R^2 \sin 4\beta.$$

Esitame nüüd küsimuse, milline seos kehtib erinurkse kolmnurga külgede vahel. Vastuse annab järgmine teoreem. *Selleks, et kolmnurk oleks erinurkne, on tarvilik ja piisav, et*

$$(a^2 + b^2)c^2 = (a^2 - b^2)^2. \tag{3}$$

Tõestame kõigepealt tarvilikkuse. Olgu vaadeldav kolmnurk erinurkne. Siis kehtivad seosed (2) ja järelikult

$$a^2 + b^2 = 4R^2. \tag{4}$$

Edasi leiame seoste (2) põhjal, et

$$a^2 - b^2 = 4R^2(\cos^2\beta - \sin^2\beta) = 4R^2\cos 2\beta = 2Rc,$$

s. o.

$$a^2 - b^2 = 2Rc. \tag{5}$$

Kui selle võrduse mõlemad pooled ruutu tõsta ja arvestada võrdust (4), siis jõuamegi seose (3) juurde.

Tõestame nüüd piisavuse. Kehtigu kolmnurga külgede $a$, $b$ ja $c$ vahel seos (3), kusjuures $a$ olgu selle kolmnurga suurim külg. Kolmnurga erinurksuse näitamiseks lähtume tuntud valemitest

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos\beta = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2ac}. \tag{6}$$

Valem (3) võimaldab avaldada külje $c$ külgede $a$ ja $b$ kaudu:

$$c = \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \tag{7}$$

Asendades selle $c$ väärtuse võrdustesse (6) saame pärast lihtsustamisi

$$\cos\alpha = -\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos\beta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \tag{8}$$

Näeme, et $\alpha$ on nürinurk, sest ta koosinus on negatiivne. Võrdustest (8) järeldub veel, et

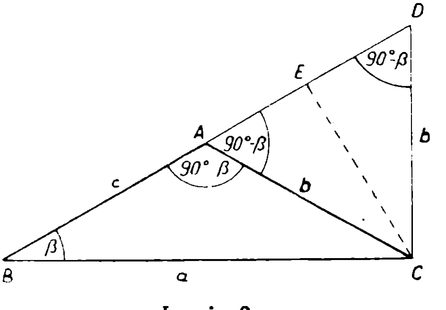
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1,$$

millest

$$\cos^2\alpha = \sin^2\beta.$$

Et $\alpha$ on nürinurk ja $\beta$ on teravnurk, siis saame viimasest seosest

$$\cos\alpha = -\sin\beta = \cos(90^\circ + \beta),$$



*Joonis 2.*

ja seega $\alpha = 90^\circ + \beta$, mida oligi tarvis tõestada.

Olgu antud erinurkne kolmnurk $ABC$ (joonis 2). Tõmbame tipust $C$ küljele $a = BC$ ristsirge, mis lõikub külje $c = BA$ pikendusega punktis $D$. Tekkinud täisnurkset kolmnurka $BCD$ nimetame erinurkse kolmnurga $ABC$ genereerivaks kolmnurgaks. Viimase suurem kaatet $a$ langeb ühte erinurkse kolmnurga suurima küljega. On kerge näha, et *genereeriva kolmnurga* *väiksem kaatet CD võrdub erinurkse kolmnurga põhinurga vastasküljega b,* sest

$$\angle CAD = \angle CDA = 90^\circ - \beta.$$

Siin me lähtusime antud erinurksest kolmnurgast ja konstrueerisime selle põhjal ebavõrdsete kaatetitega täisnurkse kolmnurga. Vastupidi, lähtudes mistahes ebavõrdsete kaatetitega täisnurksest kolmnurgast, võime konstrueerida ühe erinurkse kolmnurga. Selleks tuleb täisnurga tipust $C$ tõmmata hüpotenuusile kõrgus $CE$ ja leida viimase suhtes kaatetiga $CD$ sümmeetriline lõik $CA$ (joonis 2). Lihtne on veenduda, et niiviisi saadud kolmnurk $ABC$ ongi erinurkne.

Seega on kindlaks määratud üksühene vastavus erinurksete kolmnurkade hulga ja ebavõrdsete kaatetitega täisnurksete kolmnurkade hulga vahel. Teiste sõnadega, mõlemad need hulgad osutusid ekvivalentseteks.

Olgu $d = BD$ genereeriva kolmnurga hüpotenuus. Pythagorase teoreemi põhjal siis

$$a^2 + b^2 = d^2.$$

Siit ja valemist (4) järeldub, et

$$d = 2R. \tag{9}$$

Seega on tõestatud, et *erinurkse kolmnurga ümberringjoone diameeter võrdub genereeriva kolmnurga hüpotenuusiga.* Teiselt poolt on aga teada, et täisnurkse kolmnurga ümberringjoone diameeter võrdub tema hüpotenuusiga. Seda arvestades võime öelda, et *erinurkse ja genereeriva kolmnurga ümberringjoontel on võrdsed raadiused.*

Erilist huvi pakub ratsionaalsete külgedega erinurksete kolmnurkade vaatlemine. Kui $a$, $b$ ja $c$ on ratsionaalsed, siis on seda ka ümberringi raadius $R$, sest võrdusest (5) nähtub, et

$$R = \frac{a^2 - b^2}{2c}. \tag{10}$$

Kuid siis osutub ka erinurkse kolmnurga pindala $S$ ratsionaalseks, sest teatavasti on iga kolmnurga puhul

$$S = \frac{abc}{4R}.$$

Seega kuuluvad kõik ratsionaalsete külgedega erinurksed kolmnurgad ratsionaalsete kolmnurkade[1] hulka. Täpsemini, näitame, et *ratsionaalsed erinurksed kolmnurgad moodustavad Heroni kolmnurkade hulga teatud alamhulga.* Kõigepealt on selge, et ratsionaalne erinurkne kolmnurk ei saa olla Pythagorase kolmnurgaks, sest ta on ju nürinurkne. Edasi vaatleme võrdhaarse erinurkse kolmnurga juhtu. Tingimusest

$$\beta = \gamma = 90^\circ - 2\beta$$

[1] Vt. Gabovitš, J., Veidi kolmnurga aritmeetikat. — Matemaatika ja kaasaeg, V, lk. 57—67.

järeldub, et $\beta = \gamma = 30°$ ja seega $\alpha = 120°$. Nüüd võime kergesti veenduda, et külgede $a$ ja $b$ suhe võrdub irratsionaalarvuga $\sqrt{3}$ ning seega ei saa olla tegemist ratsionaalse kolmnurgaga. Seega näeme, et iga ratsionaalne erinurkne kolmnurk kuulub kaldnurksete iseküIgsete ratsionaalsete kolmnurkade hulka, s. t. ta on Heroni kolmnurk.

Võrdused (9) ja (10) näitavad, et ratsionaalse erinurkse kolmnurga genereeriv kolmnurk on Pythagorase kolmnurk. Näitame ka vastupidist: kui genereeriv kolmnurk on Pythagorase kolmnurk, siis temast tuletatud erinurkne kolmnurk on ratsionaalne. Eelnevast me juba teame, et erinurkse kolmnurga kaks külge võrduvad genereeriva kolmnurga kaatetitega $a$ ja $b$, kolmanda külje $c$ saame arvutada valemist

$$c = \frac{a^2 - b^2}{d}, \tag{11}$$

nagu järeldub seostest (5) ja (9). Järelikult, kui genereeriva kolmnurga küljed $a$, $b$ ja $d$ on ratsionaalsed, siis on seda ka vastava erinurkse kolmnurga küljed

$$a, \ b \text{ ja } \frac{a^2 - b^2}{d}. \tag{12}$$

Sellega oleme tõestanud, et *ratsionaalsete erinurksete kolmnurkade ja Pythagorase kolmnurkade hulgad on ekvivalentsed.*

Sel tulemusel on suur praktiline väärtus, sest ta võimaldab meil, lähtudes Pythagorase kolmnurkadest (millede tabuleerimine on lihtne; vt. lk. 60 tsiteeritud artiklit), järk-järgult leida kõik ratsionaalsed erinurksed kolmnurgad.

Siinjuures peame märkima järgmist asjaolu. Lähtudes primitiivsest[2] Pythagorase kolmnurgast saame murdarvulise küljega $c$ erinurkse kolmnurga (vt. (11)). Et tuletatav erinurkne kolmnurk oleks samuti primitiivne, korrutame kolmnurga (12) külgi teguriga $d$. Sel teel saame primitiivse erinurkse kolmnurga külgedega

$$a' = ad, \qquad b' = bd, \qquad c' = a^2 - b^2,$$

mis on sarnane kolmnurgaga (12).

Ka ilma genereeriva kolmnurga abita saab tuletada valemid, mis võimaldavad leida kõik primitiivsed erinurksed kolmnurgad. Jättes nende valemite tuletamise lugeja hooleks, piirdume siinkohal ainult lõpptulemuse esitamisega.

*Olgu $m$ ja $n$ ühisjagajata naturaalarvud, kusjuures $m > n$ ja üks neist on paarisarv. Siis kolmnurk külgedega*

$$\begin{aligned} a' &= \max\,[m^4 - n^4,\ 2mn(m^2 + n^2)], \\ b' &= \min\,[m^4 - n^4,\ 2mn(m^2 + n^2)], \\ c' &= |m^4 - 6m^2n^2 + n^4| \end{aligned}$$

*on primitiivne erinurkne kolmnurk.*

---

[2] S. t. täisarvuliste ühisjagajata külgedega.

Alljärgnevas tabelis on antud kõik primitiivsed erinurksed kolmnurgad ($a'$, $b'$, $c'$), mille puhul genereeriva kolmnurga ($a$, $b$, $d$) külgede pikkused ei ületa arvu 100.

**Primitiivsete erinurksete kolmnurkade ($a'$, $b'$, $c'$) tabel**

| $a$ | $b$ | $d$ | $a'$ | $b'$ | $c'$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 3 | 5 | 20 | 15 | 7 |
| 12 | 5 | 13 | 156 | 65 | 119 |
| 15 | 8 | 17 | 255 | 136 | 161 |
| 24 | 7 | 25 | 600 | 175 | 527 |
| 21 | 20 | 29 | 609 | 580 | 41 |
| 35 | 12 | 37 | 1295 | 444 | 1081 |
| 40 | 9 | 41 | 1640 | 369 | 1519 |
| 45 | 28 | 53 | 2385 | 1484 | 1241 |
| 60 | 11 | 61 | 3660 | 671 | 3479 |
| 56 | 33 | 65 | 3640 | 2145 | 2047 |
| 63 | 16 | 65 | 4095 | 1040 | 3713 |
| 55 | 48 | 73 | 4015 | 3504 | 721 |
| 77 | 36 | 85 | 6545 | 3060 | 4633 |
| 84 | 13 | 85 | 7140 | 1105 | 6887 |
| 80 | 39 | 89 | 7120 | 3471 | 4879 |
| 72 | 65 | 97 | 6984 | 6305 | 959 |

Näiteks, $m = 3$, $n = 2$ puhul saame $a' = 156$, $b' = 65$, $c' = 119$, s. t. meie tabelis teisena antud kolmnurga.

Esitame nüüd küsimuse, milline on primitiivsest erinurksest kolmnurgast lähtudes konstruktsiooni teel saadav genereeriv kolmnurk. Et primitiivne erinurkne kolmnurk saadi kolmnurgast (12) tema külgede korrutamisel teguriga $d$, siis on selge, et tema genereerivaks kolmnurgaks on mitteprimitiivne Pythagorase kolmnurk kaatetitega $ad$ ja $bd$ ning hüpotenuusiga $d^2$. Siit järeldub, et *primitiivse erinurkse kolmnurga ümberringjoone diameeter avaldub naturaalarvu ruuduna.*

Lõpuks tuletame valemi primitiivse erinurkse kolmnurga pindala $S'$ arvutamiseks. Selleks arvutame eelkõige küljele $c' = a^2 - b^2$ tõmmatud kõrguse $h$. On selge, et $h$ langeb ühte (mitteprimitiivse) genereeriva kolmnurga hüpotenuusile tõmmatud kõrgusega. Me teame, et täisnurkse kolmnurga hüpotenuusile tõmmatud kõrgus võrdub kaatetite korrutise ja hüpotenuusi jagatisega. Järelikult

$$h = \frac{ad \cdot bd}{d^2} = ab.$$

Seega on tõestatud, et *kõrgus $h$ võrdub primitiivse genereeriva kolmnurga kaatetite korrutisega.*

Nüüd saame leida otsitava valemi pindala jaoks:

$$S' = 0{,}5\, ab\,(a^2 - b^2).$$

# ÜHEST TÜÜPILISEST ALGEBRALISEST VEAST JA SELLE ALLIKATEST[1]

J. Gaiduk

Järgnevad read pole kirjutatud mitte selleks, et täiendada kesk- (ja isegi kõrgemate[2]) koolide õpilastele iseloomulike «tüüpiliste matemaatiliste eksimuste» nimekirja. Autori peamiseks eesmärgiks on pöörata tähelepanu mõningatele üldistele järeldustele, mis selliste eksimuste analüüsimisest tulenevad.

Esitame meid huvitava situatsiooni eksamil toimuva kahekõnena *pedagoogi* **P** ja *õpilase* **Õ** vahel.

**Õ**: (jätkates oma ülesande lahenduskäigu esitamist): ... seega saime võrduse

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}=0, \qquad (1)$$

millest järeldub, et

$$\frac{b}{a}+\frac{d}{c}+\frac{f}{e}=0 \ldots \qquad (2)$$

**P**: (katkestades): Kuidas teil küll õnnestus võrdusest (1) saada võrdust (2)?

**Õ**: (imestunult): Kas see pole siis õige? Me tegime ju varem ka niimoodi...

**P**: Ei ole teinud! Siin on jäme algebraline viga.

**Õ**: Kuid lubage... Alles eile te tõestasite, et võrdusest

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=0 \qquad (3)$$

järeldub võrdus

$$\frac{b}{a}+\frac{d}{c}=0. \qquad (4)$$

Analoogiliselt peab siis võrdusest (1) järelduma ka võrdus (2); mõlemal juhul saadakse uus võrdus ju lihtsalt eelmise liikmete «ümberpööramise» teel...

[1] Artikli on toimetusele saadetud venekeelsest käsikirjast tõlkinud Ü. Kaasik.

[2] Autoril on tulnud siinkirjeldatud eksimusi täheldada näiteks üliõpilaste juures, kes vastavat tüüpi diferentsiaalvõrrandite lahendamisel sellisel viisil «eraldavad muutujaid».

**P**: (ironiseerides): te nähtavasti tahate arutleda matemaatilise induktsiooni meetodil. Kuid siis tuleks alustada juhuga, mil võrduse vasakul poolel on vaid üksainus murd!

**Õ**: Proovime... Tähendab, tuleb tõestada, et kui

$$\frac{a}{b}=0, \tag{5}$$

siis ka

$$\frac{b}{a}=0. \tag{6}$$

Hmm... (pärast minutipikkust mõtlemist rõõmsalt). Kuid selleks tuleb lihtsalt korrutada võrduse (5) mõlemad pooled teguriga $\frac{b^2}{a^2}$ ja taandada!

**P**: (enesevalitsemist kaotades): teil pole ju algebrast aimugi! Mida te küll õppinud olete? Täna pole meil teiega enam millestki rääkida.

**Õ**: (lahkub hämmeldunult).

Tema lahkumist kasutades püüame koos **P**-ga teha juhtunust «metoodilisi järeldusi». Me muidugi saame aru nii **P** irooniast sellise pimeda usu puhul mittetäielikku induktsiooni kui ka tema nördimusest nulliga jagamise ränga patu korral. Ometi ei ole aga **Õ** (ja tema paljude kaaslaste) algebraliste vigade juur mitte selles, vaid tunduvalt sügavamal!

Ajalooliselt on kujunenud nii, et algebra koolikursuses leiab üsna laialdaselt aset väga kahjulik terminoloogiline dualism. Nii nimetatakse näiteks võrduselt $a+b=c$ võrdusele $a=c-b$ üleminekut kahel erineval viisil: mõnikord öeldakse, et «võrduse mõlematest pooltest lahutati üks ja seesama suurus $b$», teinekord aga, et «arv $b$ viidi võrduse vasakult poolelt vastasmärgiga üle paremale poolele». Sellise dualismi tagajärjel tuleb õpilastel üheaegselt tegemist teha nii matemaatilise tehtega (lahutamine) kui ka «mehhaanilise» tehtega (üleviimine), kusjuures nende kahe tehte sisuline samaväärsus jääb kergesti hoopis tähele panemata. «Üleviimise reegli» hüpnoos on mõnikord niivõrd tugev, et õpilased lahendavad võrrandit $a=x$ umbes selliselt: kõigepealt $-x=-a$, ning «märkide muutmise reeglit» kasutades[3] saadakse alles $x=a$.

Meie keskkoolialgebra niisugune dualism takistab õpilastel aru saada algebraliste teisenduste olemusest ning algebra ja aritmeetika ühtsusest. Õpilaste silmis muudab see algebra mingiks vähe arusaadavaks «sümbolitega žongleerimiseks», provotseerides neid kasutama algebralisi valemeid kas liiga vabalt või siis hoopis puhtmehhaaniliselt. Niisuguse õhkkonna tõttu selles

[3] Selle mehhaanilise reegli matemaatiliseks sisuks on võrduse mõlemate poolte korrutamine arvuga $-1$.

õppeaines ongi nähtavasti paratamatud need õpilaste rängad eksimused, millede üle me sageli kaebame ja vahel ka lõbusalt naerame. Nende eksimuste üle tasuks aga üsna tõsiselt mõtelda...

Pöördudes tagasi Õ' konkreetse vea juurde, mis oli meie märkuste lähtepunktiks, rõhutame, et selle vea aluseks pole mitte niivõrd analoogia võrduste (3) ja (4) vahel eksisteeriva seosega, kuivõrd «halb harjumus» mehhaaniliselt opereerida algebraliste valemitega. Selle harjumuse tagajärjel hakkavadki õpilased nimetatud seost omandama kui mingi «murdude ümberpööramise» teel saadavat tulemust.

Õpilaste niisugused eksimused meenutavad järjest tungivamalt, et oleks juba ammu aeg muuta meie koolialgebra terminoloogia kaasaegsemaks. Siinjuures tuleb ühtlasi rõhutada, et terminoloogia selline revideerimine on mitmes riigis juba teostatud.

## *ARVUDE SÜMFOONIA*

$$\begin{array}{r}
1\times 8+1=9\\
12\times 8+2=98\\
123\times 8+3=987\\
1234\times 8+4=9876\\
12345\times 8+5=98765\\
123456\times 8+6=987654\\
1234567\times 8+7=9876543\\
12345678\times 8+8=98765432\\
123456789\times 8+9=987654321
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
9\times 987654321-1=8888888888\\
9\times 98765432+0=888888888\\
9\times 9876543+1=88888888\\
9\times 987654+2=8888888\\
9\times 98765+3=888888\\
9\times 9876+4=88888\\
9\times 987+5=8888\\
9\times 98+6=888\\
9\times 9+7=88
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
123456789\times 9+10=1111111111\\
12345678\times 9+9=111111111\\
1234567\times 9+8=11111111\\
123456\times 9+7=1111111\\
12345\times 9+6=111111\\
1234\times 9+5=11111\\
123\times 9+4=1111\\
12\times 9+3=111\\
1\times 9+2=11
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
1=1^2\\
1+2+1=2^2\\
1+2+3+2+1=3^2\\
1+2+3+4+3+2+1=4^2\\
1+2+3+4+5+4+3+2+1=5^2\\
1+2+3+4+5+6+5+4+3+2+1=6^2\\
1+2+3+4+5+6+7+6+5+4+3+2+1=7^2\\
1+2+3+4+5+6+7+8+7+6+5+4+3+2+1=8^2\\
1+2+3+4+5+6+7+8+9+8+7+6+5+4+3+2+1=9^2
\end{array}$$

# MATEMAATIKA ÕPETAMISE REFORMIMISEST SAKSA DEMOKRAATLIKU VABARIIGI KOOLIDES

O. Prinits

Sõjajärgsetel aastatel kannatas Saksa Demokraatlik Vabariik rahvamajanduse ja kultuurielu mitmetel aladel spetsialistide puuduse all. Ei jätkunud ka matemaatika õpetajaid. Koolimatemaatikasse tõi see kaasa teatava revisjonismi perioodi, kusjuures tuli programmilisi nõudmisi vähendada. Niisugune periood kestis kuni 1957. aastani. Selleks ajaks jõuti juba ette valmistada küllaldaselt eriharidusega pedagooge ja ka ettevalmistuseta inimesed olid suutnud end vajalikul määral täiendada. Sellest ajast alates kehtib nõue, et õpetust tuleb anda tänapäeva teaduse tasemel ja tootmispraktika alusel. Niisuguse eesmärgi saavutamiseks rõhutati järgmisi vajadusi:

1° muuta efektiivsemaks algõpetus;
2° käsitleda juba VII klassis arvutuslükatit;
3° luua kooskõla matemaatika ja füüsika õpetamise vahel;
4° süstemaatiliselt rakendada kasutuselevõetud mõisteid (näit. astme mõistet tutvustati V klassis, kuid selle juurde tuldi IX klassis jälle kui uue mõiste juurde);
5° anda kujutavale geomeetriale tagasi tema koht koolimatemaatikas (vahepeal oli selle koolimatemaatikast välja surunud tehniline joonestamine).

Et järgnevat paremini mõista, olgu siinkohal nimetatud, et 1. sept. 1956. a. loodi Saksa Demokraatlikus Vabariigis 10-aastase õppeajaga keskkoolid (Oberschule). Kõrvuti nende koolidega jätkus töö ka varem kehtinud 12-aastase õppeajaga gümnaasiumis (Erweiterte Oberschule), kusjuures ainult viimaste lõpetajatel on õigus jätkata õpinguid kõrgemates õppeasutustes.

## 1. 1959/60. õppeaastal kehtestatud programmist

Alates 1959/60. õppeaastast võeti SDV-s kasutusele uus õppeplaan ja uued programmid. Matemaatika programmi lisati uusi ja jäeti ära juba vananenud teemasid. Järgnevalt ongi lühidalt iseloomustatud selle programmi nõudeid 10-klassilises koolis.

Programmis nõutakse I klassis liitmise ja lahutamise õpetamist 100 piires, kui seal ei toimu üleminekut ühest kümnest teise. II klassis viiakse arvutusoskus kahekohaliste ja ühekohalise arvude korrutamise ja jagamiseni 100 piires. III klassis laiendatakse arvuvalda tuhandeni ja IV klassis miljonini. Küllalt ulatuslikult on algklasside kavas ette nähtud geomeetriliste kujunditega tutvumine. Nii on juba I klassi kavas kuup, risttahukas, silinder, kera, kolmnurk, nelinurk, (ruut, ristkülik) ja ring. Samuti tutvutakse pikkuse, raskuse, raha- ja ajaühikutega.

V klassis on kavas kümnendsüsteemi arvude tundmaõppimine ja seoses sellega mitmesuguste mõõtühikute tundmise süvendamine (25 tundi), neli põhitehet naturaalarvudega (70 tundi), sissejuhatus murdudega arvutamisse (harilike ja kümnendmurdude liitmine ja lahutamine — 30 tundi), geomeetria põhimõisted ja konstruktsioonid (30 tundi), kus vaadeldakse sirglõiku, kiirt, sirget, ringi jagamist (nurgad 0° kuni 360°), joonestamist mõõtkava järgi, diagramme ning kuubi ja risttahuka pinnalaotuse valmistamist. Nurka defineeritakse kui kiire pööramise mõõtu. V klassis toimub veel kuubi ja risttahuka pindala ja ruumala arvutamine (20 tundi) ning alustatakse kujutavat geomeetriat põhivaate mõistega (5 tundi).

VI klassis jätkub arvutamine harilike ja kümnendmurdudega (100 tundi), geomeetria osas on kavas nurgad lõikuvate sirgete juures, telg, sümmeetria, kolmnurk ja nelinurk (kokku 50 tundi), rööpküliku, kolmnurga, trapetsi, nelinurga ja hulknurga pindala (20 tundi) ning kujutava geomeetria osas põhivaade ja esivaade (10 tundi).

VII klassis tutvustatakse negatiivseid arve (20 tundi), käsitletakse võrrandeid (propedeutiline kursus — 20 tundi). Siin tutvustatakse ka võrratust. Suhte ja võrde käsitlemiseks on ette nähtud 35 tundi, protsenarvutuseks (ka intressi arvutamine) 40 tundi, arvutuslükatiga tutvumiseks 5 tundi, ringi ja ellipsi tundmaõppimiseks 25 tundi ja ringi pindala ning prisma ja silindri pindala ning ruumala käsitlemiseks 20 tundi. Kujutava geomeetria osas (15 tundi) esitatakse kolmvaateid ja kehi kaldprojektsioonis.

VIII klassis tuuakse sisse täht arvu tähisena (ka tehted üks- ja hulkliikmetega, kokku 25 tundi), tutvustatakse lineaarset funktsiooni ja lahendatakse lineaarseid võrrandeid (25 tundi); sarnasust käsitletakse siin seostatult võrde mõistega (40 tundi) ning Pythagorase lauset seoses ruutude ja ruutjuurtega (25 tundi). Kehadest on kavas püramiid, koonus ja kera (25 tundi) ning kujutavast geomeetriast lõigu õige pikkuse ning tasandilise kujundi õige kuju ja suuruse esitamine ning kera kolmvaade (koos koordinaatide võrguga).

IX klassis on kavas tehted hulkliikmetega (10 tundi), algebraline murd (15 tundi), lineaarne võrrand ja võrrandisüsteem (15 tundi), ruutfunktsioon (10 tundi), ruutvõrrand (20 tundi), astmefunktsioon naturaalarvulise astendajaga (5 tundi), tehted astmetega (10 tundi), astendaja null ja negatiivne astendaja (5 tundi), murrulise astendajaga aste (10 tundi), eksponentfunktsioon (2 tundi), logaritmfunktsioon (8 tundi), arvutamine logaritmide abil ja arvutuslükati (25 tundi). Kujutavast geomeetriast on kavas rist- ja kaldprojektsioon (5 tundi) ning aksonomeetriline kujutamine (10 tundi).

X klassis on rõhuv enamik tunde reserveeritud trigonomeetria küsimustele. Nii on teravnurga trigonomeetrilistele funktsioonidele ette nähtud 15 tundi, täisnurkse ja võrdhaarse kolmnurga lahendamisele 25 tundi, trigonomeetriliste funktsioonide üldisele definitsioonile 5 tundi ja kaldnurksete kolmnurkade lahendamisele 50 tundi. Seega ei käsitleta trigonomeetria kursuses nurkade summa ja vahe, kahekordse ja poolnurga valemeid ega ole ette nähtud trigonomeetriliste funktsioonide summa ja vahe teisendamist korrutiseks. Geomeetriliste kehade käsitlemiseks on ette nähtud 40 tundi ja kahendsüsteemi arvudega tutvumiseks 5 tundi.

Selle programmiga jäeti koolimatemaatikast välja rida juba vananenud teemasid, nagu kolmlaused, ruutjuure algoritm, algebraliste avaldiste konstrueerimine sirkli ja joonlaua abil, kolmnurkade ja nelinurkade konstrueerimine külgede pikkuste summa ja vahe järgi jne. Ka vähendati niisuguste teemade osatähtsust, millega varem oli üle pakutud. See puudutas eelkõige sarnasusõpetust ja stereomeetria süstemaatilist kursust. Loobuti niisuguste teemade käsitlemisest, millel 10-klassilises koolis puuduvad rakendused, nagu arvutamine kompleksarvudega, trigonomeetrilised võrrandid, tangenslause jne.

Nende muudatustega taotleti eelkõige õpilaste ülekoormamise vältimist ja elementaarse arvutamisoskuse osatähtsuse suurendamist. Viimast loeti aga polütehnilise õpetuse ja kasvatuse üheks põhialuseks. Polütehnilise õpetuse eesmärke peeti silmas ka geomeetriliste kehade käsitlemise jaotamisel kõigi klasside vahel (välja arvatud IX klass). Programmi seletuskirja kohaselt peab 75% õpetamise ajast kulutatama harjutustele.

Alates 1. septembrist 1960. a. kehtestati uued programmid ka gümnaasiumidele (Erweiterte Oberschule) eesmärgiga anda õpilastele täpseid, teaduslikult põhjendatud teadmisi ja oskusi.

Gümnaasiumi lõpuklasside matemaatika programm sisaldab peamiselt analüütilise geomeetria ning diferentsiaal- ja integraalarvutuse küsimusi.

Püsivamate teadmiste saavutamiseks suurendati tundide arvu. Paremaid tulemusi pidi garanteerima ka kordamisteemade näitamine programmis (näiteks lineaarvõrrandite juures on märgitud võrde ja kiirte lause kordamise vajadust). Nõutakse matemaatiliste mõistete täpsemat defineerimist. Selleks on loobutud näiteks hulkliikme mõiste kui algebralise summa tähendusest ja samastatud see polünoomi mõistega, s. o. avaldisega $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ (erandiks on aga $(a+b)^n$, mida nimetatakse binoomi astmeks).

Ruutfunktsiooni käsitlemisel pööratakse suurt tähelepanu parabooli šablooni kasutamisele ning ruutfunktsioonide graafikute ehitamist nähaksegi ette šablooni lükke ja peegelduse abil.

Irratsionaalarvu mõiste juurde jõutakse võrrandi $x^2-2=0$ lahendamise kaudu.

Peetakse täiesti ülearuseks astme mõiste üldistamisel mitmesuguste kombineeritud ülesannete lahendamist, nagu näiteks

$$\frac{a^{-3}\cdot b^2c^{-2}\cdot a^5b^{-1}c^0}{a^4b^{-5}c^3\cdot a^{-2}b^3c^{-6}} : \frac{a^{-5}b^{-4}c^{-3}\cdot a^7b^0c^{-1}}{a^6b^{-3}c^{-2}\cdot a^2b^1c^{-3}}.$$

Oluline on, et omandatakse mõisted, mis võimaldavad hiljem kiiresti lahendada tuletise leidmise ja integreerimise ülesandeid. Sellisteks näideteks on $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^3}\right)$ või $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$.

Ka gümnaasiumi programmis on kujutav geomeetria küllalt suure osatähtsusega.

## 2. Seadus matemaatika õpetamise parandamiseks ja edasiarendamiseks

1960. ja 1961. a. olid SDV-s aktuaalselt päevakorras matemaatika õpetamise metoodilised küsimused, kuid üha sagedamini esitati ka radikaalsemaid ettepanekuid koolimatemaatika sisu uuendamiseks. Polütehnilise õpetuse konverentsil 1961. a. jaanuaris rõhutati, et õpetuse kvaliteedi taseme tõstmine saab tulla kõne alla ainult põhjalike loodusteaduste-alaste teadmiste ja oskuste kaudu ning et polütehnilise hariduse andmine peab algama loodusteaduslike ainete põhjaliku, eksaktse käsitluse taseme tõstmisega.

Õpetuse paremustamiseks peeti vajalikuks kasutada intensiivsemalt õppetundi, suurendada iseseisva töö osatähtsust, seostada õpetamist praktilise tööga jne.

Koolimatemaatika puuduseks loeti, et see arendab liialt vähe laste vaimseid võimeid. Kohe algul, I klassis, tehakse siin suur samm, omandatakse arvu mõiste ja õpitakse arvudega tehteid sooritama, siis laskutakse aga mitmeks aastaks kogemuste tasemele. Seetõttu nõutaksegi teooria osatähtsuse suurendamist: näiteks mõisted, nagu hulk, vastavus, ühesus tuleksid tutvustamisele juba algklassides; lineaarvõrrandisüsteemide käsitlemisel rakendataks maatrikseid jne. Ollakse veendunud, et kui funktsioon on defineeritud hulkadevahelise vastavusena, siis ei tulda enam õpetajalt küsima, kas $y = 3$ on funktsioon.

Loogilise mõtlemise ja abstraktsioonivõime suurendamises nähakse vahendit ka praktiliste ülesannete iseseisva lahendamise võime parandamiseks.

Nähakse ette kaks teed koolimatemaatika taseme edasiseks tõstmiseks: 1) koostada uus programm, tuues sisse uued ainelõigud, nagu küberneetika alused, tõenäosusteooria, matemaatiline statistika, arvutusmasinad, programmeerimine ja 2) säilitada põhiliselt senine programm ja püüda kursust moodsamalt üles ehitada. Esimest võimalust peetakse kaugemaks eesmärgiks, teist ligemaks.

Otsustava pöörde SDV koolimatemaatikasse tõi 17. XII 1962. a. vastu võetud Saksamaa Sotsialistliku Ühtsuspartei Keskkomitee Poliitbüroo ja SDV Ministrite Nõukogu otsus «Matemaatika õpetamise parandamise ja edasiarendamise kohta SDV üldhariduslikes polütehnilistes keskkoolides». Selles otsuses juhitakse tähelepanu koolimatemaatika taseme mitterahuldavusele, tema sisu mittevastavusele tänapäeva vajadustele. Täheldatakse püsivate põhiteadmiste puudumist arvutamises naturaalarvudega, murdudega, positiivsete ja negatiivsete arvudega ja üldiste arvutähistega. Suuruste kujutamise, ruumikujutluse ja funktsionaalse mõtlemise taset peetakse ebarahuldavaks. Suureks puuduseks loetakse ka asjaolu, et õpilastele valmistab raskusi matemaatiliste probleemide sõnastamine ja neile lahenduste leidmine.

Mitteküllaldast matemaatilise mõtlemise oskust loetaksegi peapuuduseks. Seda on põhjustanud suurel määral 1953—1955. a. koolimatemaatikas läbiviidud revisjonism.

Matemaatika õpetajate ettevalmistamisel nõutakse edaspidiseks tugevamat ainealast ettevalmistust, et nad kogu koolis õpetatavat ainet õpiksid tundma täpses teaduslikus käsitluses. Metoodilise ettevalmistuse taseme tõstmiseks otsustatakse paremad õpetajad lülitada õpetajate ettevalmitustöösse. Rõhutatakse õpetajatele antavate lisaerialade vajalikkust ja vajadust neid nii valida, et see garanteeriks õpetajate parema jaotuse koolidesse. Peetakse vajalikuks luua koolimatemaatika instituut.

Otsuse põhjal ei lubata enam matemaatikat õpetada neil õpetajail, kellel puudub selleks eriharidus. Nähakse ette abinõud õpetajate teadmiste täiendamiseks.

Otsustatakse teostada õppeplaanis täpsustusi ja need kehtestada 1. sept. 1963. a. Õppetöö parandamise huvides ja õpetajate metoodilise ettevalmistuse täiustamiseks aga tõlkida 1963. a. jooksul kõik Nõukogude kooliõpikud I—IX klassini saksa keelde. Nähakse ette ajakirja «Mathematik in der Schule» asutamine, kus peavad kajastuma uuenduslikud ideed kogu koolimatemaatika ulatuses. Senisest suurema rõhu asetamist nõutakse matemaatikaalasele klassivälisele tööle. Eriti andekate õpilaste jaoks otsustatakse asutada ringid ülikoolide juures ning korraldada andekaile õpilastele suvelaagrid.

Otsusekohaselt alustatakse matemaatika-alase õpilaskirjanduse väljaandmist. Kõigisse noorte- ja lasteajakirjadesse luuakse selleks matemaatika rubriik. Suuremates tööstuskeskustes nähakse ette spetsiaalsete matemaatikaklasside asutamine.

Ka teadlaste ette seab otsus oma ülesandeid. Nii nõutakse järgmiste küsimuste uurimist:

a) milliseid teadmisi ja oskusi peavad tulevikus saama õpilased üldhariduslikust polütehnilisest keskkoolist;
b) kui suures ulatuses on võimalik koolis käsitleda matemaatilise analüüsi, hulgateooria, tõenäosusteooria, matemaatilise statistika jt. põhimõisteid ja elemente;
c) kui kaugele võib vanemais klassides minna algebra küsimuste käsitlemisel ja kui ulatuslikult on algebralised meetodid algklassides rakendatavad;
d) kui suurel määral tuleb õpilasi tutvustada arvutusmasinate ja -automaatidega;
e) missuguste põhiprintsiipide järgi tuleb tänapäeval matemaatika kooliõpetus üles ehitada.

Samuti esitati rida metoodilist laadi probleeme, nagu õpetamise intensiivsusest ja efektiivsusest, matemaatilise mõtlemise arendamisest jne.

Otsuse järgi tuleb uutele põhimõtetele ülesehitatud matemaatika programmi rakendamisele asuda 1965. a. alates.

## 3. Matemaatika täpsustatud programm

1. sept. 1963. a. kehtestati koolidele täpsustatud matemaatika programmid. See ei toonud endaga kaasa olulisi muudatusi aine paigutuses, küll aga käsitlemise meetodites. 10-klassilise kooli matemaatika programmis tehtud muudatustest nimetagem siin järgmisi:

I klassi kavva toodi tagasi korrutamine ja jagamine 20 piires. Tunduvalt on muutunud käsitlusvõtted. Liitmise ja lahutamise käsitlemisel tutvustatakse mõisteid, nagu hulk, selle suurendamine ja vähendamine; suurem kui, väiksem kui; võrdne, summa, vahe, tundmatu. I klassis hakatakse eristama mõisteid number ja arv, tutvutakse liitmise kommutatiivsuse ja assotsiatiivsuse seadusega ning naturaalarvude jadaga kuni 100-ni.

II klassi kavas on pearõhk asetatud korrutamisele ja jagamisele, kusjuures tutvutakse korrutamise kommutatiivsuse seadusega ja selgitatakse, kuidas muutub korrutis, kui üht tegurit mingi arv korda suurendada. Võetakse kasutusele tabelid, millega kaasnevad vastavuse, sõltuvuse ja arvupaari mõisted.

III klassis käsitletakse liitmist, lahutamist, korrutamist ja jagamist nii suuliselt kui ka kirjalikult 10 000 piires.

Kui esimeses kolmes klassis olid muudatused ulatuslikumad, siis IV klassis on need juba tagasihoidlikumad, sest kõigis klassides tugineb ju õpetus eelmise programmi järgi tehtud tööle.

IV klassis on rõhutatud mõistete õiget kasutamist, näiteks jagatav, jagaja, jagatis jne.; murrud lülitatud geomeetria küsimuste hulka, kus neid õpitakse tundma ringi tükeldamisel.

V klassis võetakse kasutusele täht arvu tähisena aritmeetiliste lausete formuleerimisel. Ära on jäetud V klassist lühike kujutava geomeetria osa. See temaatika on nüüd ühendatud VI klassis ettenähtud vastava peatükiga.

Järgmistes klassides pole erilisi muudatusi ette nähtud, välja arvatud eksponentfunktsiooni väljajätmine IX klassi programmist. Seega ei käsitleta nüüd seal ka logaritmfunktsiooni eksponentfunktsiooni pöördfunktsioonina.

## 4. Uue programmi ettevalmistamisest

Uue, 1965. a. rakendatava programmi väljatöötamise käigus on selle kohta arvamusi avaldanud mitmed Saksa DV juhtivad matemaatikud ja metoodikud, nagu prof. Karl Schröter, prof. Lilly Görke, prof. Klaus Härting jt. Võrreldakse uut suunda Felix Kleini ideedega ja märgitakse, et praegune reform on märksa ulatuslikum, sest ta hõlmab kogu koolikursuse ja sellest on huvitatud nii kapitalistlikud kui ka sotsialistlikud riigid. Kleini ideed puudutasid keskkooli vanemaid klasse ja teenindasid kapitalistliku suurtööstuse huve, kuhu vajati moodsama matemaatilise ettevalmistusega ametnikke.

Loetakse õigeks esimeste klasside programmides teostatud muudatused ning rõhutatakse vajadust, et matemaatikat õpetaks juba I klassist alates matemaatikaõpetaja. III klassis peetakse vajalikuks alustada eeltööd naturaalarvude süstemaatiliseks käsitlemiseks õpilaste vanusele vastaval tasemel. See tähendaks siin järgmiste tõsiasjade omandamist:

1. 0 on naturaalarv.
2. Igal naturaalarvul on kindel temale järgnev naturaalarv.
3. Igal naturaalarvul, välja arvatud 0, on kindel temale eelnev naturaalarv.
4. Naturaalarvude jada 0, 1, 2, 3, ... on kordumatu.
5. Kui alates arvust 0 ühekaupa edasi lugeda, saame kätte kõik naturaalarvud.

Esimestes klassides peetakse vajalikuks arvutamise põhiseaduste käsitlemist. IV klassis nähakse ette jaguvusteooria ning V ja VI klassis murdude käsitlemine, s. t. arvutamine ratsionaalarvude korpuses. Peetakse vajalikuks tutvustada õpilastele ka korpuse mõistet, samuti Archimedese aksioomi.

Geomeetria osas nõutakse, et V klassis jõutaks kongruentsuslauseteni. Sarnasuslausete käsitlemist tuleb sealjuures seostada ratsionaalarvude järjestatud korpuse mõistega. Kaalutakse, kuidas tutvustada õpilastele paralleelide aksioomi nii tema eukleidilises kui ka hüperboolses ja elliptilises kujus. VII ja VIII klassis soovitatakse käsitleda astmeid, kombinatoorikat ja matemaatilise induktsiooni meetodit. Reaalarvude korpuse käsitlemisel soovitatakse kasutada Dedekindi lõiget. Peetakse vajalikuks, et selles astmes lõpetataks elementaargeomeetria käsitlus.

Peetakse soovitavaks kera geomeetria käsitlemisel puudutada erinevust eukleidilise, hüperboolse ja elliptilise geomeetria vahel. VIII klassis soovitatakse käsitleda ka ratsionaalseid funktsioone ja alustada võrrandite lahendamist. Pindala ja ruumala käsitlemine VIII klassis peaks aga toimuma piirväärtuse mõiste abil.

Soovitused IX ja X klasside programmi kohta hõlmavad eelkõige transtsendentsete funktsioonide käsitlemist. Astmeridu oleks sobiv käsitleda juba seoses täisratsionaalsete funktsioonidega. Kavva soovitatakse võtta ka arv *e*. X klassis tuleks aga käsitleda kompleksarve arvupaaride konstrueerimise teel. Geomeetrias peetakse vajalikuks võtta programmi sfääriline trigonomeetria (kuni taevakehade asukoha määramiseni) ja koonuslõiked. XI ja XII klassides soovitatakse käsitleda diferentsiaal- ja integraalarvutust, sealjuures ka pidevuse, diferentseeruvuse ja integreeruvuse küsimusi. Analüütilise geomeetria ja lineaaralgebra käsitlemine peaks aga toimuma vektorite abil.

Uued reformi-ideed koolimatemaatikas leiavad, nagu võib oodata, ka vastuseisjaid. Vastuväited kuuluvad kõigepealt pessimistidele, kes arvavad, et ka 1965. aastal ei piisa veel õpetajate kaadrist selle programmi realiseerimiseks, käsitletavat ainet aga ei peeta õpilastele eakohaseks. Teine vastuväide on pedagoogikateadlastelt, kes ei ole nõus õpetajate ettevalmistamisel eriaine nii suure rõhutamisega, mis nüüd osutuks paratamatuks. Nad väidavad, et õpetaja on kõigepealt õpetaja ja alles siis aineõpetaja. Ka haridusalane administratsioon ei taha nõustuda suuremate ümberkorraldustega, sest see sunnib paratamatult ka neid oma teadmisi täiendama.

30. märtsil 1965. a. võttis SDV Rahvaharidusministeeriumi Kolleegium vastu kontseptsiooni matemaatika õpetamise kohta üldhariduslikus polütehnilises keskkoolis vastavalt ühtse sotsialistliku haridussüsteemi seadusele. Selles dokumendis on kavandatud kogu koolimatemaatika ülesehitamine ühtsete printsiipide alusel, kaotades vahe algklasside «rehkendamise ja ruumiõpetuse» ning vanemate klasside «matemaatika» vahel. Rõhutatakse vajadust kasutada kogu koolimatemaatika kursuses ühtset terminoloogiat. Matemaatika õpetamise reformimises ei nähta ette mitte niivõrd suuri muudatusi aines, kui just käsitlusmeetodites, mis võimaldavad õppeprotsessi ratsionaliseerida. Et hulgateoreetiline tööviis on põhiline kogu matemaatikas, siis peavad hulgateooria ja matemaatilise loogika elemendid läbima kogu matemaatikakursust. Selles kontseptsioonis programmi kohta tehtud ettepanekud ühtivad põhiliselt nendega, mida on juba eespool kirjeldatud.

* *
*

Seega näeme, et Saksa Demokraatlikus Vabariigis on hakatud riiklikult lahendama küsimusi, mis on paljudes maades aktuaalselt päevakorral. Tuleb märkida, et koolimatemaatika uuendamiseks SDV-s ettenähtud sammud püsivad rangelt reaalsuse piirides, s. t. ei ole seatud eesmärke, mille realiseerimine on kaheldav. Et kõrvuti uute kooliõpikute koostamisega on ette nähtud ka käsiraamatute koostamine ning et pedagoogilises ja metoodilises ajakirjanduses pühendatakse laialdaselt ruumi uute teemade käsitlemisega seotud küsimuste valgustamisele ja vastavate katsetuste tutvustamisele, siis võib oodata, et ettenähtud uuendused Saksa Demokraatliku Vabariigi koolides juurduvad.

## Matemaatika ajaloost

# MIS ON TÕENÄOSUS?

E. Tiit

«Tõenäoliselt on homme ilus ilm»

«Tõenäosus sportlase $A$ võiduks tenniseturniiril on 95%»

«Tõenäosus selleks, et ma ainukese piletiga loosimisel võidaksin sõiduauto «Volga», on 0,000001.»

Niisugused ja teised sellised väited on meile kõigile igapäevasest elust tuttavad, me kõik oleme neid ise kasutanud. Püüdkem nüüd vastata küsimusele — mida sellised laused täpselt väljendavad, s. t. mis on *tõenäosus* selle sõna matemaatilises tähenduses.

Tõenäosus on matemaatika ühe haru — tõenäosusteooria põhimõisteks. Ometi on tõenäosusteooria enam kui 3-sajandilise ajaloo vältel palju piike murtud selle mõiste defineerimisel ning veel käesoleva sajandi algulgi, kui tõenäosusteooriat ning tema «nooremat venda» matemaatilist statistikat rakendati juba paljudes loodusteadustes ning majanduslikus tegevuses, ei olnud teoreetikutele selge, mida üldse mõista tõenäosuse all.

## I. Tõenäosuse klassikaline mõiste

**1. Tõenäosusteooria sünd ja lapsepõlv.** Tõenäosusteooria varane areng on matemaatilise distsipliini kohta kaunis omapärane: pika aja vältel lahendas see teooria peamiselt hasartmängudega seotud probleeme.

Üks esimesi tõenäosusteooria valdkonda kuuluvaid ülesandeid, mis paelus matemaatikute tähelepanu, oli järgmine. Täringumängu võitjaks loetakse mängijatest $A$ ja $B$ seda, kes esimesena võidab $s$ partiid. Kuidas tuleks aga panus jaotada poolelijäänud mängu korral, kui mängija $A$ on võitnud $a$, mängija $B$ aga $b$ partiid (kusjuures nii $a$ kui ka $b$ on väiksemad kui $s$)?

XV sajandi lõpul püüdis seda ülesannet lahendada üks tolle sajandi tuntumaid matemaatikuid itaallane Luca Pacioli (1445—1514), kes soovitas panuse jaotada suhtes $a : b$.

XVI sajandil proovisid niihästi selle kui ka mõningate teiste sarnaste ülesannete kallal jõudu kuupvõrrandi lahendi valemi autorid itaalia matemaatikud Nicolo Tartaglia (1500—

1557) ja Geronimo Cardano (1501—1576). Oluliselt paremat lahendust kui L. Pacioli nad sellele ülesandele siiski pakkuda ei suutnud. Küll aga lahendas Tartaglia ühe teise täringutega seotud probleemi. Ta arvutas nimelt $r$ täringu viskel saadavate silmade erinevate kombinatsioonide arvu terve rea $r$ väärtuste jaoks ning esitas need arvud tabelina (see ülesanne pakkus erilist huvi tollal levinud täringutega ennustamise tõttu). Nii on ühe täringu viskamisel võimalik saada 6 erinevat tulemust:

$$1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;$$

kahe täringu viskamisel on erinevate tulemuste arv 21, nimelt:

$$1+1;\ 1+2;\ 1+3;\ 1+4;\ 1+5;\ 1+6;\ 2+2;\ 2+3;\ 2+4;\ 2+5;\ 2+6;$$
$$3+3;\ 3+4;\ 3+5;\ 3+6;\ 4+4;\ 4+5;\ 4+6;\ 5+5;\ 5+6;\ 6+6;$$

kolme täringu viskamisel on erinevate kombinatsioonide arv 56, jne. Huvitav on aga Cardano tähelepanek, kes märkis, mitmel viisil silmade üks või teine kombinatsioon on saavutatav. Seega kohtame siin ühte kõige varasemat katset hinnata teatavate sündmuste *tõenäosusi*. Tõepoolest, kujutleme, et viskame kaht erivärvilist (sinist ja punast) täringut. Silmade arv $1+1$ on saavutatav ainult siis, kui mõlemal täringul on peal 1 silm. Silmade arvu $1+2$ võime saada aga kahel viisil: kas on punasel täringul peal 1 silm ja sinisel 2 silma, või vastupidi — sinisel 1 ja punasel 2 silma. Eriti märkimisväärne on Cardano järeldus siit: täringuvisetel esineb kombinatsioon $1+2$ *sagedamini* kui kombinatsioon $1+1$. Seega väljendas ta intuitiivselt mõtte, mis rangel kujul sõnastati alles XVIII sajandi algul suurte arvude seadusena.

Tõenäosuse mõiste teadlikumat kasutamist kohtame alles XVII sajandi keskel Prantsusmaal. 1654. aastal esitas kirglik hasartmängija Chevalier de Méré «arvutusmasina isale» Blaise Pascalile (1623—1662) sama ülesande, mida oli püüdnud lahendada Luca Pacioli. Selle ülesande, aga ühtlasi ka mitmete sellega seoses tekkinud probleemide lahendamiseks pöördus Pascal kirjalikult Pierre de Fermat' (1601—1665) poole.[1] Teadlaste vahel tekkis intensiivne kirjavahetus, mille käigus lahendati de Méré esitatud ülesanne, kuid sõnastati ka rida uusi probleeme ning leiti neile lahendused. Selleks võeti esmakordselt kasutusele mõiste «tõenäosus» (kuigi rangelt defineerimata) ning mitmed teised tõenäosusteoorias olulised mõisted, mistõttu paljud autorid loevadki tõenäosusteooria sünniajaks aastat 1654.

Pascal märkis kohe, et L. Pacioli antud lahenduses ei ole arvesse võetud edaspidi mängimisele tulevate partiide arvu. Konkreetse näite puhul, kus $s=3$, $a=1$ ja $b=0$, lahendas

---

[1] Vt. Tamme, E. Matemaatika ja kaasaeg, V, lk. 74—87.

Fermat ülesande järgnevalt: maksimaalne arv partiisid, mis tuleksid veel mängida, on $s - a + s - b - 1 = 4$. Mängu edasise kulgemise võimalusi 4 partii vältel on 16, nagu on näha järgnevast tabelist:

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *A* | *A* | *A* | *A* | *A* | *A* | *A* | *A* | *B* | *B* | *B* | *B* | *B* | *B* | *B* | *B* |
| *A* | *A* | *A* | *A* | *B* | *B* | *B* | *B* | *A* | *A* | *A* | *A* | *B* | *B* | *B* | *B* |
| *A* | *A* | *B* | *B* | *A* | *A* | *B* | *B* | *A* | *A* | *B* | *B* | *A* | *A* | *B* | *B* |
| *A* | *B* | *A* | *B* | *A* | *B* | *A* | *B* | *A* | *B* | *A* | *B* | *A* | *B* | *A* | *B* |

Mängija A võiduga lõppeksid neist juhud 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11 ja 13, kuid *B* võidaks siis, kui partii kulgeks nii, nagu on tabelis märgitud juhtudel 8, 12, 14, 15 ja 16 (Siinjuures tuleb muidugi tähele panna, et juhtudel 1, 2, 3 ja 4 mängitakse tegelikult vaid 2 partiid, juhtudel 5, 6, 9, 10, 15 ja 16 — 3 partiid ning ainult juhtudel 7, 8, 11, 12, 13 ja 14 tuleks mängimisele neli partiid). Toodud mõttekäigu põhjal leidsid Pascal ja Fermat, et panus tuleks jaotada mängijate *A* ja *B* vahel suhtes 11 : 5, kuna esimene võidaks mängu 11 juhul, teine 5 juhul edasimängu kõigist võimalustest. Teisiti väljendades — *mängija A võidu tõenäosus on* $\frac{11}{16}$, *mängija B võidu tõenäosus* $\frac{5}{16}$. Seega näeme, et Pascal ja Fermat lugesid *mingi sündmuse tõenäosuseks selle sündmuse toimumiseks soodsate juhtude arvu suhet kõikvõimalike juhtude arvusse.*

Pascali ja Fermat kirjavahetuse käigus pandi alus ka klassikalise tõenäosusteooria põhilisele meetodile — kombinatoorikale ning rakendati seda meetodit mitmete ülesannete lahendamiseks. Muuhulgas leidis Fermat, et Tartaglia poolt otsitud erinevate täringukombinatsioonide arv viskamisel *r* täringuga avaldub järgmiselt:

$$\frac{(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)(r+5)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5},$$

Pascali ja Fermat' töid nende eluajal ei trükitud. Ometi ilmus esimene tõenäosusteoreetiline uurimus «*De Ratiociniis in Ludo Aleae*» (Arvutustest hasartmängudes) juba 1657 aastal. Selle autoriks oli hollandlane Christian Huygens (1629—1695), kes, tutvunud probleemistikuga, mille kallal töötasid prantslased (kuigi mitte nende tulemustega), andis samadele ülesannetele veidi üldisemad lahendused.

Huygens tugines oma arvutlustes printsiibile: kui $p + q$ juhu hulgast $p$ juhtu annavad võidu suurusega $a$, $q$ juhtu — võidu suurusega $b$ ($a$, $b \geqq 0$), siis sobib oodatava võidu hinnanguks arv

$$\frac{pa+qb}{p+q}.$$

Seega võttis ta kasutusele veel ühe tõenäosusteoorias väga olulise mõiste — *matemaatilise ootuse* (e. *keskväärtuse*). Võttes vaadeldavas näites $a=1$ (kogu panus), $b=0$ (kui $B$ saab kogu panuse, siis $A$ ei saa üldse midagi), leiame $A$ oodatava võidu suuruse:

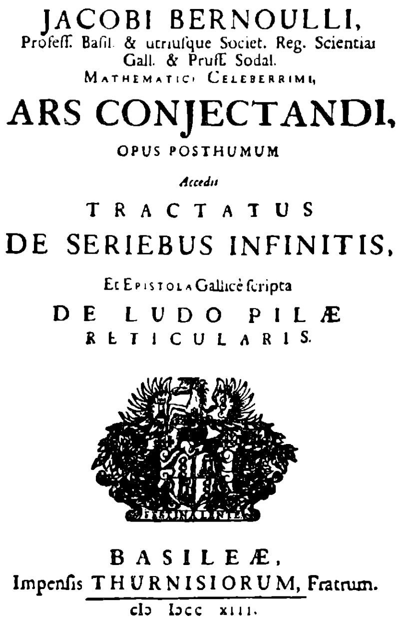
$$\frac{11\cdot 1+5\cdot 0}{11+5}=\frac{11}{16}.$$

See tulemus langeb ühte Pascali ja Fermat' omaga.

Huygensi artiklist väärib esiletõstmist autori märkus: *Ometi ma ei kahtle, et kui keegi selle, mida ma esitan, põhjalikumalt läbi uurida on võtnud, siis ta ka kohe leiab, et ei tegelda mitte ajaviitega, nagu näib, vaid et selgitatakse kauni ja ülipeene mõttekäigu aluseid.*

Huygensi printsiip osutus väga sobivaks rakendustes. Juba 14 aastat pärast Huygensi töö ilmumist rakendas seda printsiipi Jan de Witt (1625—1672) eluaegse rendi arvutamiseks.

Kuigi ka edaspidi lahendas tõenäosusteooria mitmeid hasartmängudest tulenevaid probleeme, oli rajatud alus ka selle teooria rakendamisele praktikasse — esmajoones kindlustusasjanduses ja demograafias. Peagi hakkavad rakenduslikud probleemid ka stimuleerima tõenäosusteooria edasist arengut.


JACOBI BERNOULLI,
Profess. Basil. & utriusque Societ. Reg. Scientiar. Gall. & Pruss. Sodal.
MATHEMATICI CELEBERRIMI,
ARS CONJECTANDI,
OPUS POSTHUMUM.
Accedit
TRACTATUS
DE SERIEBUS INFINITIS,
Et EPISTOLA Gallicè scripta
DE LUDO PILÆ RETICULARIS.
BASILEÆ,
Impensis THURNISIORUM, Fratrum.
cIↃ IↃCC XIII.

**2. Tõenäosuse mõiste Jacob Bernoulli teoses «Ars Conjectandi».** Esimeseks suureks tõenäosusteoreetikuks, kelle poolt saadud tulemused veel tänapäevalgi on tähtsal kohal kõigis tõenäosusteooria õpikutes, sai šveitsi matemaatik Jacob Bernoulli (1654—1705), keda tuntakse ka tema tööde järgi matemaatilise analüüsi valdkonnas. Bernoulli tõenäosusteooria alased uurimused on koondatud postuumselt ilmunud raamatusse «*Ars Conjectandi*» (Ennustamise kunst)» (ilmunud aastal 1713). Nimetatud töö summeerib kõik tolleaegsed teadmised tõenäosusteooria ja kombinatoorika alal. Töö esimese osa moodustab Huygensi artikkel, (*Ratiociniis*...), varustatuna rohkete kommentaaridega. Oluliselt arendab Bernoulli edasi ka kombinatoorikat, võttes esmakordselt kasutusele variatsiooni mõiste.

Tõenäosuse defineeris Bernoulli *usaldatavuse mõõduna*, arvutas aga samuti kui ta eelkäijadki soodsate võimaluste ning kõigi võimaluste suhtena.

Selleks, et tutvuda kõigi uute ning oluliste tulemustega, milleni jõudis Bernoulli, tuleb meil lähemalt analüüsida tõenäosusteooria selleks ajaks väljakujunenud mõisteid ning tulemusi; teeme seda, kasutades seejuures tänapäeva käsitlust, mis Bernoulli-aegsest erineb eeskätt vormi poolest. Üheks põhimõisteks tõenäosusteoorias on *sündmus*. Sündmuse juures huvitab tõenäosusteoreetikut üksnes see, kas sündmus *toimub* või *ei toimu*. Sündmused on näiteks:

1) viie silma saavutamine täringuviskel;
2) valge kuulikese võtmine urnist, milles on 3 valget ja 5 musta kuuli;
3) vee keemahakkamine normaalse õhurõhu juures temperatuuril 100° C;
4) vee keemahakkamine normaalse õhurõhu juures temperatuuril 50° C.

Otsekohe paistab silma, et need sündmused erinevad üksteisest toimumise võimalikkuse poolest. Näiteks viimane sündmus ei saa üldse toimuda — on seega võimatu. *Sündmust, mis vaadeldava tingimuste kompleksi korral ei saa kunagi toimuda, nimetatakse võimatuks sündmuseks.* On päris loomulik, et võimatu sündmuse tõenäosus loetakse nulliks: tõepoolest, võimatu sündmuse jaoks ei ole ükski juht soodus.

Eelviimane sündmus toimub päris kindlasti. *Sündmust, mis vaadeldava tingimuste kompleksi korral alati toimub, nimetatakse kindlaks sündmuseks.* Kuna kindla sündmuse jaoks on kõik juhud soodsad, siis on kindla sündmuse tõenäosus 1.

Esimene ja teine ülalkirjeldatud sündmustest võivad toimuda või ka mitte toimuda. *Sündmust, mis vaadeldava tingimuste kompleksi korral võib kas toimuda või mitte toimuda, nimetatakse juhuslikuks sündmuseks.* Iga juhusliku sündmuse $A$ tõenäosus $P(A)$ rahuldab võrratust

$$0 < P(A) < 1.$$

Tõenäosuse saame arvutada niisuguste sündmuste jaoks, mille kohta teame kõigi võimalike juhtude arvu ning sündmuse jaoks soodsate juhtude arvu nende hulgast. Nii on esimese sündmuse tõenäosus $\frac{1}{6}$ (kõigi võimalike tulemuste arv on 6, neist on meie jaoks soodus aga ainult üks). Teise sündmuse tõenäosus on aga $\frac{3}{8}$: kõigi võimalike kuulide hulgas, mille arv on kokku 8, leidub meid huvitavaid, s. o. valgeid 3.

Mõnikord on võimalik esialgselt määratud (*aprioorset*) tõenäosust katsetulemuste põhjal ümber hinnata; selliselt saadud tõenäosust nimetatakse *aposterioorseks*. Selgitame neid mõisteid näite varal.

Oletame, et meil on kolm ühesugust urni, neist esimene sisaldab kaks valget, teine — ühe musta ja ühe valge, ning kolmas — kaks musta kuulikest. Ühest juhuslikult valitud urnist võetakse kuulike. *Á priori* võime öelda, et tõenäosus selleks, et see kuulike tuli esimesest urnist, on $\frac{1}{3}$; kui me aga veendume, et kuulike on valge, siis saame arvutada *á posteriori* tõenäosuse selleks, et kuulike pärineb esimesest urnist — see tõenäosus on nüüd juba $\frac{2}{3}$ (3-st valgest kuulikestest asus 2 esimeses urnis). Aposterioorse tõenäosuse mõiste võttis esmakordselt kasutusele Bernoulli.

*Kahte sündmust nimetatakse sõltumatuks, kui neist ühe toimumise tõenäosus ei sõltu teise sündmuse toimumisest.* Näite sündmuste sõltuvuse kohta toome jälle urni abil, mis sisaldab 3 valget ja 5 musta kuulikest.

a) Olgu sündmuseks $A$ valge kuulikese saamine esimesel võttel, sündmuseks $B$ — valge kuulikese saamine teisel võttel, kusjuures esimesel võttel saadud kuulikest ei panda tagasi urni. Näeme nüüd, et juhul, kui sündmus $A$ esines, on $P(B)=\frac{2}{7}$, kui aga sündmus $A$ ei esinenud, siis on $P(B)=\frac{3}{7}$. Järelikult on sündmused $A$ ja $B$ sõltuvad. b) Sõltumatud oleksid aga sündmused $A$ ja $B$ siis, kui esimesel võttel saadud kuulike asetatakse urni tagasi ning segatakse sealolevatega; tõepoolest, siis on $P(B)=\frac{3}{8}$ sõltumatult sündmuse $A$ esinemisest.

Sõltumatute sündmuste näiteiks on c) piltkaardi ja potikaardi esinemine ühe kaardi võtmisel kaardipakist; d) kahega ning kolmega jaguneva silmade arvu saavutamine täringuviskel; sõltuvad on aga e) ühe kaardi tõmbamisel potikaardi ja potiässa esiletulek; f) paarisarvu ning arvu «3» saamine täringuviskel.

Kahe sündmuse abil on võimalik määratleda ka uusi sündmusi. Üks selliseid on sündmuste korrutis. *Kahe sündmuse korrutiseks nimetatakse sündmust, mis toimub parajasti siis, kui toimuvad mõlemad korrutatavad sündmused.*

Nii on sündmuste $A$ (potikaardi väljatulek kaardipakist) ja $B$ (piltkaardi väljatulek kaardipakist) korrutiseks $AB$ potimastist piltkaardi väljatõmbamine kaardipakist.

Sõltumatute sündmuste korrutise tõenäosust on lihtne arvutada tõenäosuste korrutamise reegli abil: sõltumatute sündmuste korrutise tõenäosus võrdub nende sündmuste tõenäosuste korrutisega. Kontrollime seda reeglit oma näidete varal: näites c) on

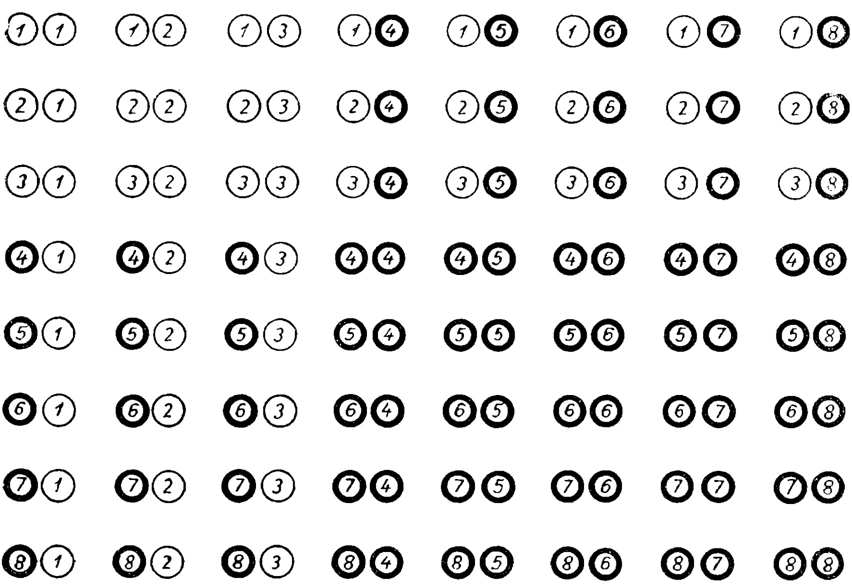
potikaardi esinemise tõenäosus $P(A)=\frac{13}{52}=\frac{1}{4}$,

piltkaardi esinemise tõenäosus $P(B)=\frac{12}{52}=\frac{3}{13}$,

potimastist piltkaardi esinemise tõenäosus $P(AB)=\frac{3}{52}$,

ning tõepoolest $\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{13}=\frac{3}{52}$.

Näites b) on tõenäosuste korrutamise reegli vahetu kontroll mõnevõrra tülikam, kuid ühtlasi saab meile siit selgeks ka reegli üldkehtivus, sest samasugust mõttekäiku saame arendada alati.



*Joonis 1.*

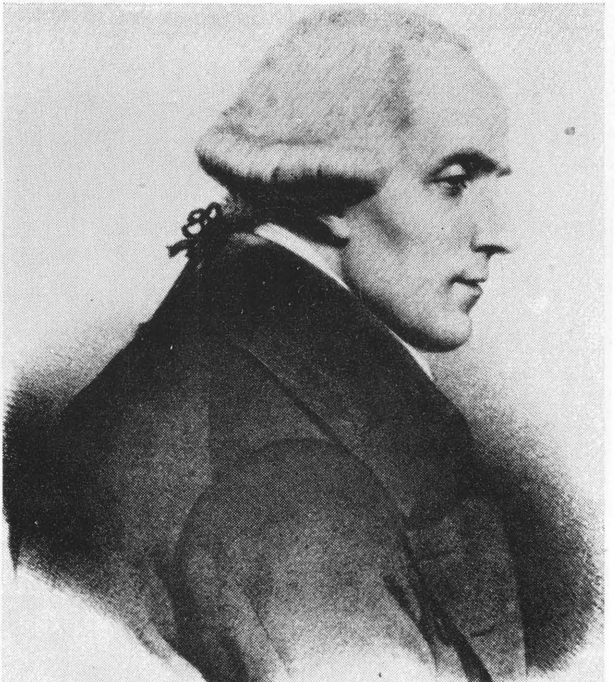
Vaatleme nimelt kõikvõimalikke kuulipaare, mis võivad esineda (selleks nummerdame kuulid nii, et 1—3 on valged, 4—8 — mustad).

Näeme joonisel 1, et kõigi võimalike erinevate kuulipaaride arv on 64, kusjuures esimene kuul joonisel tähistab alati esimesena urnist võetud kuuli. Mõlemad valged kuulid on urnist võetud vaid üheksal juhul, seega on tõepoolest


*Jacob Bernoulli*

*Blaise Pascal*

*Christian Huygens*



*Pierre Simon Laplace*

$$P(AB)=\frac{9}{64}=\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{8}=P(A)\cdot P(B).$$

Et sõltuvate sündmuste korrutamisel ei kehti alati tõenäosuste korrutamise reegel, selles on lihtne veenduda meie näidete varal; nii on näites e)

sündmuse $A$ — potikaardi tõmbamise tõenäosus $P(A)=\frac{1}{4}$,

sündmuse $B$ — potiässa tõmbamise tõenäosus $P(B)=\frac{1}{52}$,

sündmus $AB$ — potikaardi ja potiässa üheaegne esinemine — langeb ühte sündmusega $B$, seega

$$P(AB)=P(B)=\frac{1}{52}\neq P(A)\cdot P(B).$$

Samuti näite f) korral:

sündmuse $A$ — paarisarvulise tulemuse esinemise tõenäosus täringuviskel on $P(A)=\frac{1}{2}$,

sündmuse $B$ — arvu «kolm» esinemise tõenäosus täringuviskel on $P(B)=\frac{1}{6}$,

sündmus $AB$ — täringuviske tulemus on ühekorraga arv «kolm» ja paarisarv — on võimatu, seega

$$P(AB)=0\neq P(A)\cdot P(B).$$

Erilist huvi pakuvadki tõenäosusteooria seisukohalt sellised sündmused, mis ei saa üheaegselt esineda. Niisuguseid sündmusi nimetatakse üksteist välistavateks (ka mitteühtjateks); rangelt defineerides: *sündmusi $A$ ja $B$ nimetatakse üksteist välistavateks, kui nende korrutis on võimatu sündmus. Võib kõnelda ka mingist lõplikust hulgast üksteist välistavatest sündmustest. Lõplikku sündmuste süsteemi $\{A_1, A_2 \ldots, A_n\}$ nimetatakse üksteist välistavaks, kui mistahes kaks sündmust sellest süsteemist on üksteist välistavad.*

Üksteist välistavad sündmused on näiteks rahaviskel vapi pealetulek ja kirja pealetulek; urnist kahe valge kuuli võtmine ning ühe valge ja ühe musta kuuli võtmine; seevastu vähemalt ühe valge kuuli võtmine ja kahe valge kuuli võtmine ei ole üksteist välistavad sündmused. Üksteist välistava sündmuste süsteemi näiteks on veel täringuvisete tulemuste 1, 2, 3, 4, 5 ja 6 süsteem.

Kahe sündmuse järgi võime defineerida veel nende sündmuste summa. Kahe sündmuse $A$ ja $B$ summaks $A+B$ nimetame sündmust, mis esineb parajasti siis, kui toimub vähemalt üks liidetavatest sündmustest.

Nii on sündmuse $A$ (kaardipakist tõmmatakse välja potikaart) ning $B$ (kaardipakist tõmmatakse välja piltkaart) summaks sündmus, et kaardipakist väljatõmmatav kaart kas kuulub potimasti või on piltkaart.

Kui sündmuseks $A$ on paarisarvulise tulemuse saavutamine täringuviskel, sündmus $B$ aga toimub siis, kui täringule jääb peale arv «kolm», siis on sündmus $A+B$ kas paarisarvu või kolme silma esinemine täringuviskel.

Millega võrdub sündmuste summa tõenäosus?

Lihtne on tulemust leida üksteist välistavate sündmuste korral: *üksteist välistavate sündmuste summa tõenäosus võrdub liidetavate sündmuste tõenäosuste* summaga.

Tõepoolest, näites d) on sündmuse $A+B$ jaoks soodsaid juhte kuue võimaliku hulgast neli, seega

$$P(A+B)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$$

Teiselt poolt aga $P(A)+P(B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$.

Üldjuhul kehtib aga seos:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

Seda väidet illustreerime eelmise näite c) abil. Siin $P(A)=\frac{13}{52}=\frac{1}{4}$; $P(B)=\frac{12}{52}$; $P(AB)=\frac{3}{52}$; sündmuse $A+B$ jaoks on soodsate juhtude arv $13+9$ (kõik 13 potikaarti ja 9 piltkaardi teistest mastidest), seega tõepoolest $P(A+B)=\frac{22}{52}=\frac{1}{4}+\frac{1}{13}-\frac{3}{52}=\frac{13+12-3}{52}$.

Järgnevas rakendame esitatud tulemusi binomiaalse jaotusseaduse kirjeldamiseks. Selle seaduse põhjal tõestas Bernoulli suurte arvude seaduse, mida võib lugeda vaadeldava perioodi suurimaks saavutuseks tõenäosusteooria alal.

**3. Suurte arvude seadus.** Vaatleme korduvalt teostatud sõltumatuid katseid, millel on ainult kaks võimalikku tulemust — $A$ (esineb tõenäosusega $P(A)=p$) ja $B$ (esineb tõenäosusega $P(B)=1-p=q$).

Selline katse on näiteks mündivise, kus sündmuseks $A$ võime lugeda kirjapoole pealetulekut $\left(P(A)=\frac{1}{2}\right)$; kuulikese võtmine ülalkirjeldatud urnist, kus sündmuseks $A$ on valge kuulikese esinemine $\left(P(A)=\frac{3}{8}\right)$ jne. Katset korratakse $n$ korda täpselt samades tingimustes (eelmisel võttel saadud kuulike asetatakse urni tagasi ning kõik kuulikesed segatakse hoolikalt läbi), see garanteerib katsete sõltumatuse.

Meid huvitab, kui suur on tõenäosus, et $n$ katsel $k$ korda esineks katsetulemus $A$ (siin võib $k$ olla suvaline naturaalarv nulli ja $n$ vahel). Tähistame selle sündmuse sümboliga $W_n^k$.

Sündmus $W_n^k$ esineb näiteks siis, kui kõigepealt $k$ korda järjest juhtub sündmus $A$, seejärel aga $n-k$ korda järjest sündmus $B$; samuti siis, kui $A$ esineb kõigepealt $k-1$ korda, siis tuleb sündmus $B$ $n-k$ korda ja viimaks toimub veelkord sündmus $A$ (vt. tabelit, milles on esitatud kõikvõimalikud sündmuste $A$ ja $B$ kombinatsioonid juhul $n=7$, $k=2$).

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *A* | *A* | *A* | *A* | *A* | *A* | *A* | *A* | *A* | *A* | *A* | *A* | *A* | *A* | *A* | *B* | *B* | *B* | *B* | *B* | *B* |
| *A* | *A* | *A* | *A* | *A* | *A* | *A* | *A* | *A* | *A* | *B* | *B* | *B* | *B* | *B* | *A* | *A* | *A* | *A* | *A* | *B* |
| *A* | *A* | *A* | *A* | *A* | *A* | *B* | *B* | *B* | *B* | *A* | *A* | *A* | *A* | *B* | *A* | *A* | *A* | *A* | *B* | *A* |
| *A* | *A* | *A* | *B* | *B* | *B* | *A* | *A* | *A* | *B* | *A* | *A* | *A* | *B* | *A* | *A* | *A* | *A* | *B* | *A* | *A* |
| *A* | *B* | *B* | *A* | *A* | *B* | *A* | *A* | *B* | *A* | *A* | *A* | *B* | *A* | *A* | *A* | *A* | *B* | *A* | *A* | *A* |
| *B* | *A* | *B* | *A* | *B* | *A* | *A* | *B* | *A* | *A* | *A* | *B* | *A* | *A* | *A* | *A* | *B* | *A* | *A* | *A* | *A* |
| *B* | *B* | *A* | *B* | *A* | *A* | *B* | *A* | *A* | *A* | *B* | *A* | *A* | *A* | *A* | *B* | *A* | *A* | *A* | *A* | *A* |

Lõpuks esineb sündmus $W_n^k$ ka siis, kui kõigepealt $n-k$ korda toimub sündmus $B$ ja seejärel $k$ korda sündmus $A$. Iga selline üksiksündmus on omakorda $n$ sõltumatu sündmuse (vastavalt $A$ või $B$) korrutis, millede tõenäosuseks on kas $p$ või $q$. Kasutame nüüd tõenäosuste korrutamise reeglit, pidades silmas, et iga kord peab sündmus $A$ esinema täpselt $k$ korda, sündmuse $A$ $k$-kordse esinemise tõenäosuseks on aga $p^k$, sündmus $B$ aga $n-k$ korda, selle tõenäosus on aga $q^{n-k}$. Seega saame iga üksiksündmuse tõenäosuseks $p^k q^{n-k}$. Paneme tähele ka seda, et kõik kirjeldatud üksiksündmused välistavad üksteist (igaüks neist erineb igast teisest vähemalt kahe katsetulemuse poolest), seega saame otsitava tõenäosuse leida üksiksündmuste tõenäosuste summana. Pole raske näha, et üksiksündmuste arv on $C_n^k$ (tõepoolest, $k$ sündmust $A$ saab esineda $n$ katse korral nii mitmel viisil, kui suur on kombinatsioonide arv $n$ elemendist $k$ kaupa; kõik ülejäänud katsed lõpevad sündmuse $B$ toimumisega. Seega saame binomiaaljaotuse valemi:

$$P(W_n^k) = C_n^k p^k q^{n-k} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Joonisel 2 on esitatud binomiaaljaotuse graafikud $n=10$ ja $p=\frac{1}{2}$ ning $p=\frac{3}{4}$ korral. Siin on abstsissteljele märgitud sündmuse $A$ esinemiste arv $k$, mis muutub nullist kuni katsete koguarvuni $n$, ning ordinaatteljele on kantud vastavalt sündmuse $W_n^k$ tõenäosused. Olgu märgitud, et binomiaaljaotus on diskreetne, ning graafikul on määratud tegelikult ainult täisarvulistele abstsissidele vastavad punktid. Punktiirjoonega on nad ühendatud ainult ülevaatlikkuse mõttes.

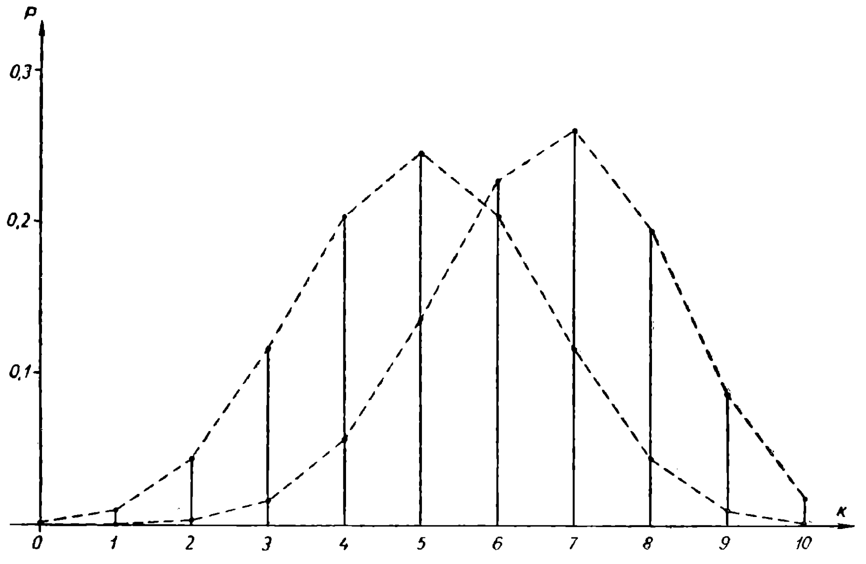
Binomiaalset jaotusseadust on võimalik rakendada mitmesuguste ülesannete lahendamisel.

**Näide.** Perekonnas on 10 last. Lugedes poisi sündimise tõenäosuseks 0,5 (tegelikult on see arv demograafilise materjali põhjal võrdne 0,516-ga), arvutada tõenäosus selleks, et perekonnas on 10 poega? 7 poega? 5 poega?

Ülesande lahendamiseks leiame:

$$P(W_{10}^{10}) = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024} = 0{,}1\%; \quad P(W_{10}^{7}) = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{1024} = 11{,}7\%;$$

$$P(W_{10}^{5}) = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{12 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \frac{1}{1024} = 24{,}6\%.$$




*Joonis 2.*

Kasutades binomiaaljaotust, tõestas Jacob Bernoulli järgmise teoreemi, mida nimetataksegi suurte arvude seaduseks.

*Olgu sündmuse A esinemise tõenäosus p, ning olgu ε suvaline valitud (kuitahes väike) positiivne reaalarv. Tõenäosus selleks, et sündmus A esineks n sõltumatu katse puhul m korda, kus m rahuldab võrratust*

$$\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon$$

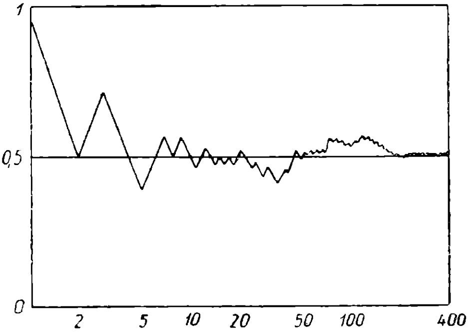
*saab kuitahes lähedaseks arvule* 1, *kui vaid arv n valida (sõltuvalt ε-st) küllalt suur.*

Piirdume siinkohal vaid selle teoreemi katselise kontrolli kirjeldamisega, sest Bernoulli tõestus on kaunis pikk, samale teoreemile hiljem antud tõestused aga eeldavad mõningate vajalike mõistete täiendavat esitamist.

Nimetame sündmuse $A_1$ esinemiste arvu ning katsete arvu suhet *sündmuse A relatiivseks sageduseks.* Suurte arvude seadus väidab seega, et suure katsete arvu korral läheneb sündmuse $A$ relatiivne sagedus selle sündmuse tõenäosusele. Seda on lihtne kontrollida näiteks mündi viskamisel. Nii teostas G. L. Buffon, kelle töödest tuleb juttu ka edaspidi seoses geomeetrilise tõenäosuse mõistega, 4040 mündiviset, kusjuures vapi pool esines 2048-l korral; seega oli sündmuse $A$ sageduseks $\frac{2048}{4040} = 0{,}5069$; tuntud statistik K. Pearson viskas münti 24000 korda ning sai sündmuse $A$ relatiivseks sageduseks 0,5005.

Relatiivse sageduse muutumist katseseeria vältel kirjeldab joonis 3, kus abstsissteljele on kantud (logaritmilises skaalas) katsete arv ning ordinaalteljele relatiivne sagedus.

Tuleb aga tähele panna, et lähenemise iseloom on tõenäosuslike ülesannete korral veidi erinev tavalises matemaatilises analüüsis tuntud piirprotsessist. Nimelt ei saa me siin väita absoluutse kindlusega, et relatiivne sagedus alati läheneb tõenäosusele: on ju teoreetiliselt olemas võimalus (kuigi äärmiselt vähe tõenäoline), et mündiviskel tuleks kogu aeg peale vapi pool. Seetõttu väidabki suurte arvude teoreem, et *tõenäosus* selleks, et sündmuse relatiivne sagedus läheneb sama sündmuse tõenäosusele, *läheneb arvule 1.*




*Joonis 3.*

Märgime nüüd, et tõenäosusteooria arengus suurt osa etendanud Bernoulli töö ei olnud siiski esimene, milles oli trükitud binominaaljaotuse seadus. Nimelt ilmus 1711. aastal ajakirjas *Philosophical Transactions*, Abraham de Moivre'i (1667—1754) töö *«De mensura sortis»* (Juhuslikkuse mõõdust). Töö erineb varemilmunuist hea metoodilise esituse ning süsteemikuse poolest. Muuhulgas avatakse nimetatud töös ka ülesanne: kaks mängijat $A$ ja $B$ mängivad täringutega, kusjuures mängija $A$ võidab siis, kui ta 8 viskega saavutab vähemalt 2 korda 1 silma. Mängija $A$ võidu tõenäosuse arvutamiseks kasutab Moivre binomiaaljaotust parameetritega $p = \frac{5}{6}$, $q = \frac{1}{6}$, ning leiab:

$$P(A) = 1 - P(B) = 1 - [W_8^0) + P(W_8^1)] =$$
$$= 1 - 0{,}604 = 0{,}396 \approx 0{,}4 = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^8 - 8 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^7 \cdot \frac{1}{6}.$$

Lahendanud sama meetodiga veel mõned analoogilised ülesanded, seab Moivre probleemi: milline peab olema katsete arv $x$ selleks, et sündmuse $A$ vähemalt ühekordse esinemise ning mitte ainsagi esinemise tõenäosused oleksid võrdsed, kui sündmuse $A$ esinemise tõenäosus ühel katsel on $p$, selle mitteesinemise tõenäosus (ühel katsel) aga $q$ $(q = 1 - p)$. Moivre leiab muuhulgas, et

$$\lim_{\frac{q}{p} \to \infty} \frac{xp}{q} = \ln 2.$$

Suure katsete arvu korral on aga binomiaalvalemi rakendamine väga tülikas. Moivre leiab ka asümptootilise valemi sündmuste $W_n^k$ tõenäosuste leidmiseks juhul, kui $p = q = \frac{1}{2}$:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\binom{n}{k} p^k q^{n-k}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}}} = 1$$

Nimetatud valem on erijuht teoreemist, mida tuntakse praegu Moivre — Laplace'i teoreemi (ka Laplace'i teoreemi) nime all, ning mis väidab, et katsete arvu piiramatul suurenemisel läheneb binomiaaljaotus jaotusele, mida me tunneme praegu normaaljaotuse nime all.[2]

See teoreem oli esimeseks esindajaks nn. piirteoreemide hulgas.

Suurte arvude seadus ja samuti piirteoreemid rajasid aluse tõenäosusteooria rakendamisele statistikas. XVIII sajandil hakkasidki mitmed loodusteadused (eriti astronoomia ja geodeesia), samuti ka majanduslikud ülesanded esitama oma probleeme statistikale ning ühtlasi ka tõenäosusteooriale. Vaatleme nüüd, kuidas mõjus see tõenäosusteooria, eriti tõenäosuse mõiste arengule.

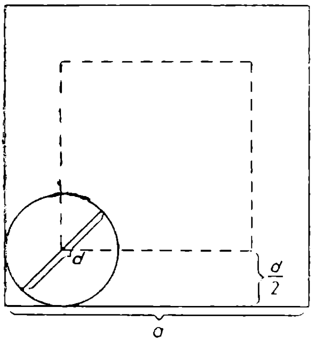
**4. Tõenäosuse geomeetriline tõlgendus.** On huvitav märkida, et juba XVIII sajandisse kuulub esmakordne katse määratleda niisuguste sündmuste tõenäosust, mille korral ei ole põhimõtteliseltki võimalik loetleda soodsaid ning mittesoodsaid juhte.

1733. aastal andis George Louis Leclerc de Buffon (1707—1788) järgneva ülesande: ruudukujulisele märklauale

---

[2] Vt. näiteks Borkvell, A «Tõenäosusteooria põhimõisted», Tln., 1958.

küljepikkusega $a$ visatakse rõngas diameetriga $d$. Milline peaks olema $a$ ja $d$ suhe selleks, et rõnga keskpaiga sattumisel märklauale satuks tõenäosusega $\frac{1}{2}$ märklauale ka rõnga iga punkt (vt. joonis 4). Selleks märkis Buffon märklaua keskel ruudu servapikkusega $a - d$, millesse peaks meid huvitavatel juhtudel langema rõnga keskpunkt, ning määras $a$ ja $d$ suhte seosest



Joonis 4.

$$(a-d)^2 = \frac{1}{2} a^2.$$

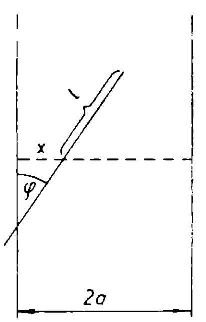
Seega rakendas Buffon geomeetrilise tõenäosuse mõistet, mis on defineeritud järgnevalt:

*Tabatagu juhuslikul viskel kindlasti pinnaosa pindalaga S. Tõenäosus selleks, et tabatakse sellel pinnaosal paiknevat pinnaosa pindalaga s, võrdub nende pindalade suhtega s/S.*

Sarnaselt võib geomeetrilise tõenäosuse defineerida ka teatavate kõveraosade või ruumiosade tabamise tõenäosusena.

Kasutades tõenäosuse ülaltoodud mõistet sõnastas ja lahendas Buffon huvitava ülesande, mida kohtame praegugi peaaegu igas tõenäosusteooria õpikus. Formuleerime selle nn. *Buffoni nõelaülesande.*

Katku tasandit paralleelsirged, mis asuvad üksteisest kaugusel $2a$. Tasandile visatakse juhuslikult nõel pikkusega $2l (l < a)$ (vt. joonis 5). Leida tõenäosus selleks, et nõel lõikub mõne tasandil paikneva paralleeliga.



Joonis 5.

Otsitava tõenäosuse avaldiseks on $\frac{2l}{a\pi}$.

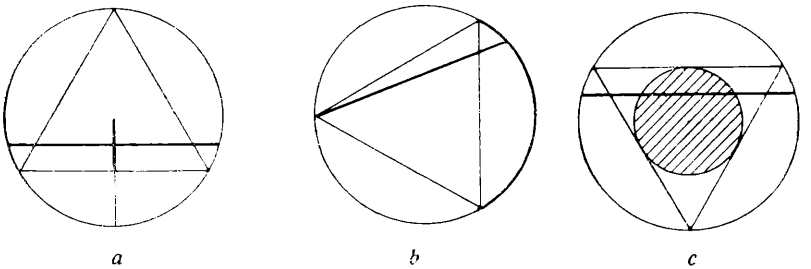
See seos võimaldas suurte arvude seaduse rakendamisel määrata katseliselt $\pi$ arvulist väärtust.[3]

Kuid tõenäosuse geomeetrilise mõiste viis ka mitmete paradoksaalsete ülesannete avastamiseni, mis tõi endaga kaasa paljude teadlaste skeptilist suhtumist tõenäosuse mõiste üldistamise katsetesse. Esitame siin ühe levinuima — nn. *Bertrandi paradoksi.*

[3] Kuigi arvu $\pi$ määramiseks ei ole sellel meetodil praktilist väärtust, sobib selline meetod — nn. juhuslike katsete e. *Monte-Carlo meetod* — mitmete ülesannete lahendamiseks ja leiab tänapäeval laialdast rakendamist.

Ringile joonestatakse juhuslikult kõõl. Kui suur on tõenäosus, et see kõõl on pikem kui ringi joonestatud võrdkülgse kolmnurga külg?

1. l a h e n d u s. Sümmeetria tõttu võime vaadelda ainult ühesuunalisi kõõle, mis on määratud oma keskpunktiga diameetril (vt. joon. 6*a*). Meie tingimust rahuldavad ainult need kõõlud, mille keskpunkt asub ringi keskpunktist kaugusel $x \leqslant \frac{r}{2}$, seega on otsitav tõenäosus $\frac{1}{2}$.




*Joonis 6.*

2. l a h e n d u s. Sümmeetria tõttu võime vaadelda ainult kõõle, mille üks otspunkt on fikseeritud; need on määratud oma teise otspunktiga. Ülesande tingimust rahuldavad ainult need kõõlud, mille otspunkt satub jämedama joonega märgitud osale ringjoonest joonisel 6*b*; kuna see on $\frac{1}{3}$ kogu ringjoone pikkusest, siis on otsitav tõenäosus $\frac{1}{3}$.

3. l a h e n d u s. Kõõl on määratud oma keskpunktiga. Meie tingimust rahuldavad üksnes kõõlud, mille keskpunkt asub ringi keskpunktist kaugusel $x \leqslant \frac{r}{2}$, s. t., mille keskpunkt asub ringis, mille pindala on $\frac{\pi r^2}{4}$ (joon. 6*c*). Otsitav tõenäosus on seega $\frac{1}{4}$.

Milles on viga? Kuidas saab ühe ja sama sündmuse tõenäosus tulla erinev, sõltuvalt erinevast arvutusviisist?

Põhjuseks on siin asjaolu, et tõenäosuse mõiste defineerimisel ei ole seni tähelepanu pööratud juhtude võrdtõenäosuse nõudele. Ka siin toodud ülesandes on erinevate lahenduskäikude puhul erinevaid juhte loetud võrdtõenäolisteks (eriti ilmne on see asjaolu 1. ja 3. lahenduse võrdlemisel).

Sellele asjaolule pööras tähelepanu P i e r r e S i m o n L a p l a c e (1749—1827), kes nägi vajadust täpsustada klassikalist tõenäosuse mõistet.

**5. Tõenäosuse klassikalise mõiste täpsustamine.** Esmakordselt on tõenäosuse range definitsioon esitatud P. S. Laplace'i põhjapanevas töös *«Theorie des probabilités analytiques»*, mis ilmus 1812. aastal. Laplace'i poolt esitatud tõenäosuse definitsioon on järgmine.

*Sündmuse A tõenäosuseks nimetame sündmuse A toimumiseks soodsate juhtude arvu suhet kõikvõimalike juhtude arvusse, kusjuures kõik juhud peavad olema võrdvõimalikud (võrdtõenäosed).*

Sündmuste *võrdtõenäosuse* nõuet ei olnud fikseeritud seni veel üheski töös, kuigi seda oli mõnede ülesannete lahendamisel varemgi arvestatud. Meenutame näiteks Cardano arutlusi Tartaglia täringukombinatsioonide skeemi kohta, samuti Fermat' antud lahendust de Méré ülesandele. Nimelt pikendas ta partiisid kunstlikult, et saada võrdtõenäoseid sündmusi. Tegelikult oleksid partiid kulgenud järgnevalt:

| 1—4 | 5,6 | 7 | 8 | 9, 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15,16 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *A* | *A* | *A* | *A* | *B* | *B* | *B* | *B* | *B* | *B* |
| *A* | *B* | *B* | *B* | *A* | *A* | *A* | *B* | *B* | *B* |
| | *A* | *B* | *B* | *A* | *B* | *B* | *A* | *A* | *B* |
| | | *A* | *B* | | *A* | *B* | *A* | *B* | |

Need juhud ei oleks aga võrdtõenäosed.

Siinjuures tuleb märkida, et võrdtõenäosuse mõiste on defineerimatu põhimõiste. Mõningate praktiliste ülesannete korral (enamus mänguprobleeme) on sündmuste võrdtõenäosus väga hästi intuitiivselt määratav; mõningate juures tekib aga võrdtõenäoste sündmuste määramisega raskusi (vt. eelmises punktis käsitletud paradoksid). Matemaatilises mõttes on oluline vaid see, et kui mingis ülesandes on võrdtõenäosed sündmused mingil viisil määratletud, siis käsitletakse nimelt neid ja ainult neid sündmusi võrdtõenäostena kõigi selle ülesandega seotud arutluste vältel.

Näiteks selle kohta võiks olla võltsitud täring, millel on raskuskese nihutatud nii, et 6 silma esineks 2 korda sagedamini kui silmade teised arvud. Võrdtõenäoste sündmuste süsteem tuleks siin määrata teisiti, kui tavalise täringu korral, kuid samuti kui tavalise täringu puhulgi saame me määrata silmade igasuguste kombinatsioonide tõenäosused, mis aga kindlasti ei lange ühte silmade samade kombinatsioonide tõenäosustega tavalise täringu korral. Vastuolu või arusaamatus tekib aga otsekohe, kui me unustame, et täring on võltsitud ning rakendame siin tavalise täringu jaoks õigeid mõttekäike.

Kuid ka Laplace'i esitatud tõenäosuse definitsioon ei ole veel piisavalt range. Nimelt loetakse siin enesestmõistetavaks eelduseks, et vaadeldavad juhud — niihästi soodsad kui ka mittesoodsad on üksteist välistavad sündmused. Tõepoolest, hasartmängudega seotud probleemides oligi olukord peaaegu alati selline, mistõttu ei peetud vajalikuks seda nõuet definitsioonis eriti rõhutada. Tõenäosuse mõiste üldisemal kasutamisel aga võib esineda olukordi, kus juhud ei välista üksteist. Näiteks, kui perekonnas oodatakse last, võib oodatava sündmuse defineerida järgnevalt: kas sünnib poiss või sünnib tütarlaps. On aga veel võimalus — sünnivad kaksikud, nii poiss kui ka tütarlaps, seega ei olnud ülalkirjeldatud juhud üksteist välistavad. Üksteist välistavad (kuid kaugeltki mitte võrdtõenäosed!) oleksid sündmused: sünnib ainult poiss; sünnib ainult tütarlaps; sünnivad mitmikud.

Tõenäosuse klassikaline definitsioon tänapäevasel kujul näeb ette järgmist. *Fikseeritakse lõplik üksteist välistavate võrdtõenäoste sündmuste täielik süsteem* (*elementaarsündmuste süsteem*). Seejuures *sündmuste* $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ *süsteemi nimetatakse täielikuks, kui nende sündmuste summaks on kindel sündmus* (s. t. alati esineb üks sündmustest $A_i$).

*Sündmuse A tõenäosuseks nimetame siis sündmuse A esinemiseks soodsate elementaarsündmuste arvu ja kõigi elementaarsündmuste arvu suhet.*

Nagu näeme, on definitsioon oma vormilt jäänud päris sarnaseks esialgse definitsiooniga. Oluline on siinjuures vaid see, et sündmuste süsteemi jaoks, mis moodustab kõikvõimalike juhtude hulga, on rangelt fikseeritud vajalikud eeldused, mis lihtsate hasartmänguülesannete korral olid täidetud automaatselt.

Tõenäosuse mõiste edasist arenemist XIX ja XX sajandil — tõenäosuse statistilist ning aksiomaatilist käsitlust — vaatleme käesoleva artikli järgnevates osades.

## TÕENÄOSUSTEOORIA «TÜÜPÜLESANNE»

*N* tükki väikseid kuulikesi
on suure urni põhja peal.
Ja tuleb võtta kahekesi
neid välja kahel kõlupeal.

*T* minutit nad vaeva näevad —
on huvipakkuv töö see vist.
Kõik kuulid urni põhja läevad
taas pärast läbiuurimist.

Tõenäosus selleks leida tuleks,
et üks on teisest kohtlasem
ja veel, et urnist kuule oleks
ta võtnud kokku täpselt *m*.

(Ajakirjast «Математическое просвещение»)

# 100 AASTAT JACQUES HADAMARD'I SÜNNIST

E. Tamme

Jacques Hadamard on pika aja vältel olnud üheks Prantsuse matemaatilise elu juhiks. Oma tööde ja tegevusega on ta oluliselt mõjutanud kaasaja matemaatika paljude harude kujunemist ja arengut.

Jacques Hadamard sündis 8. detsembril 1865. a. Pariisi eeslinnas Versailles's. Keskhariduse omandas ta Pariisis Louis Suure Lütseumis, kus ta isa oli õpetajaks. Edasi õppis Hadamard Pariisi Kõrgemas Normaalkoolis ja mõnda aega ka Polütehnilises Koolis.

Pedagoogilist tegevust alustas Hadamard 1890. a. professorina Buffoni Lütseumis. Pärast doktorikraadi kaitsmist (1892. a.) sai ta 1893. a. professoriks Bordeaux ülikoolis. 1897. a. siirdus Hadamard uuesti Pariisi, kus töötas kolmes kuulsas kõrgemas õppeasutuses: Sorbonne'i ülikoolis (1897—1912), Prantsuse Kolledžis (*Collège de France*; 1897—1937) ja Polütehnilises Koolis (*École Polytechnique*; 1912—1937).

Suure kuulsuse võitis Hadamard'i juhendamisel töötanud seminar Prantsuse Kolledžis (1897—1937), mis oli esimene omalaadne Prantsusmaal. Hadamard'i seminari tööst võtsid osa paljud prantsuse ning ka teiste maade matemaatikud (selles täiendas end muuseas ka N. N. Luzin[1] aastatel 1913—1914). Seminari probleemide ring oli erakordselt lai, see haaras peaaegu kõiki aktuaalseid probleeme nii matemaatika teooriast, rakendusmatemaatikast kui ka matemaatika filosoofiast. Hadamard'i seminaris sündisid paljud uued ideed, mis rikastasid kaasaegset matemaatikat.

---

[1] Vt. Matemaatika ja kaasaeg, V, lk. 94—96.

1912. a. valiti Hadamard Pariisi Teaduste Akadeemia liikmeks. Ta oli paljude teaduste akadeemiate (Londoni Kuningliku Ühingu, NSVL Teaduste Akadeemia jt.) välismaiseks liikmeks ning arvukate ülikoolide audoktoriks. Rahvusvahelisel matemaatikakongressil 1950. a. Cambridge'is (Massachusetts, USA) valiti ta auesimeheks.

Hadamard armastas reisida, kunagi ei öelnud ta ära küllakutsetest. Ta esines ettekannetega ja luges kursusi Nõukogude Liidus (1930, 1934, 1945), Hiinas, Brasiilias, Ameerika Ühendriikides ning paljudes teistes maades. Teadlane ei jäänud kõrvale ka ühiskondlikust elust. Ta on välja astunud fašismi ja igasuguse rassilise diskrimineerimise vastu, võtnud aktiivselt osa võitlusest rahu eest. 1940. a. oli ta sunnitud lahkuma oma kodumaalt ning elama kuni 1944. a. Ameerika Ühendriikides.

1937. a. siirdus Hadamard pensionile. Kuid ka elu viimasel perioodil säilitas ta püsiva huvi kõige ümbritseva vastu ning töötas viljakalt nii teaduslike kui ka pedagoogiliste probleemide kallal. Veel 91-aastasena avaldas ta uurimusi Harnacki teoreemi kohta. Jacques Hadamard suri Pariisis 17. oktoobril 1963. a., olles 97-aastane.

Hadamard'i matemaatilises loomingus võib eraldada kolme põhilist huvideringi: 1) analüütilised funktsioonid, 2) variatsioonarvutus ja funktsionaalanalüüs ning 3) osatuletistega diferentsiaalvõrrandid.

Hadamard'i varasemad silmapaistvad tööd (sealhulgas ka 1892. a. avaldatud doktoritöö «Essee Taylori arendise abil antud funktsioonide uurimisest») on pühendatud analüütiliste funktsioonide teooriale. Neis uuritakse sügavalt seoseid Taylori rea omaduste ning esitatavate funktsioonide iseärasuste vahel. Uurimuste käigus leidis Hadamard ka lihtsa tõestuse algarvude asümptootilise jaotuse seadusele.[2]

Hadamard'i uurimused on etendanud tähtsat osa funktsionaalanalüüsi kujunemisel. Juba I rahvusvahelisel matemaatikakongressil Zürichis 1897. a. esines ta ettekandega, milles propageeris hulgateooriat ja ennustas sellele suurt tulevikku matemaatilises analüüsis. See oli aeg, millal hulgateooria looja G. Cantor luges selle teooria tähtsaimaks probleemiks kontiinuumi hüpoteesi tõestamist, millal hulgateooria leidis hoopis rohkem vastaseid kui pooldajaid.[3]

Hadamard mõistis peatselt, mida «oli vajaka üldises hulgateoorias, et asuda väärikale kohale analüüsis: oli vaja üldist piirprotsessi kontseptsiooni. Ja selline mõiste sündiski just Hadamard'i seminaris. Selleks oli kauguse mõiste, mille 1906. a.

---

[2] Vt. Matemaatika ja kaasaeg, IV, lk. 59.

[3] Vt. Jürimäe, E., Hulgateoreetilistest paradoksidest. — Matemaatika ja kaasaeg, I, lk. 5—12.

võttis kasutusele Hadamard'i lähim õpilane Maurice Fréchet. Koos kaugusega ilmusid meetrilise ruumi, täielikkuse, separaabluse ja kompaktsuse mõisted — kujunes ja hakkas kiiresti arenema kogu meetriline topoloogia. Suurepäraseks rakendusalaks uutele meetoditele oli variatsioonarvutus.»[4] Seoses variatsioonarvutuse probleemidega andsid J. Hadamard ja tema õpilased M. Fréchet, P Lévy ja R. Gâteaux rea üldisi diferentsiaali definitsioone. Uurimuste käigus võttis Hadamard kasutusele meile nii tavalised terminid «funktsionaal», «lineaarne funktsionaal», «funktsionaalanalüüs». Juba 1903. a. ilmunud töös uuris Hadamard ka pideva lineaarse funktsionaali üldkuju lõigul pidevate funktsioonide ruumis. Kuus aastat hiljem andis ungari matemaatik F. Riesz sellele üldkujule lihtsa vormi Stieltjesi integraali abil.

Hadamard nägi, et peale diferentseerimise vajatakse üldistes funktsioonide ruumides ka integreerimist. Selle raske probleemi lahendasid erinevates variantides tema õpilased Gâteaux ja Lévy. Tulemuste üksikasjalise esitusega kohtume esmakordselt P. Lévy raamatus «Loengud funktsionaalanalüüsist» (1922).

Hadamard'i hilisematest töödest kuuluvad kõige silmapaistvamad osatuletistega diferentsiaalvõrrandite valdkonda. Hadamard'i tööd on suurel määral kaasa aidanud osatuletistega diferentsiaalvõrrandite teooria kui tervikliku matemaatilise teooria kujunemisele. Üheks keskseks mõisteks selles teoorias on rajaülesande korrektsuse mõiste, mille tõi matemaatikasse Hadamard 1923. a.

«Lahendades hüperboolseid võrrandeid, võttis Hadamard sisuliselt kasutusele nii ühe kui ka mitme muutuja üldistatud funktsioonide kaasaegse teooria aparaadi. Kuid see avastus ei leidnud tol ajal hindamist — Hadamard ennetas siin paljude aastate võrra kaasaegsete matemaatilist mõtlemist. Alles viimase 10—15 aasta jooksul on üldistatud funktsioonid levinud kõikjale ja asunud neile vastavale kohale analüüsis.»[4]

Kõrvuti nende kolme põhisuunaga Hadamard'i loomingus kuulub temale tähtsaid tulemusi ka mitmetel teistel aladel, nagu mehhaanikas, hüdrodünaamikas, geomeetrias jm. Hadamard'i sulest pärinevad samuti arvukad tööd matemaatika aluste, matemaatika ajaloo ning õpetamise ja uurimise metodoloogia alalt.

Suure tunnustuse on leidnud 1945. a. Ameerika Ühendriikides ilmunud Hadamard'i raamat «Matemaatika-alaste avastuste psühholoogia». Selles analüüsib ta matemaatilise loomingu protsessi. Eriti rõhutab ta intuitsiooni tähtsust nii matemaatika õpetamisel kui ka uute tulemuste saamisel. Intuitsiooni peab ta ainsaks loojaks. Rangus on vajalik vaid avastatu kindlustamiseks.

---

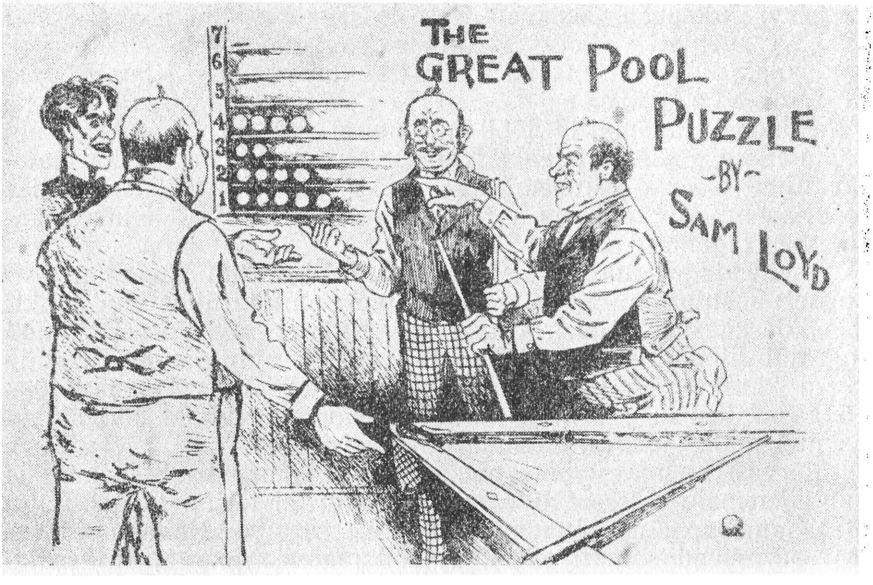
[4] Ш и л о в, Г. Е., Успехи математических наук, 1964, т. 19, вып. 3, lk. 183—186.

Paul Lévy kirjutab nekroloogis Jacques Hadamard'ile: «Hadamard valdas samaaegselt Cauchyle ja Weierstrassile omast ranguse taju ning Riemannile omast intuitsioonigeeniust. Need omadused koos väsimatu uudishimu ja tohutu töövõimega võimaldasid tal jätta pärandi, mis paneb hämmastama nii vaadeldavate probleemide mitmekesisuse kui ka mõningate lahendatud probleemide sügavuse ja raskusega. Ta jääb, nagu hiljuti kirjutas P. Montel, üheks suurimaks kujuks maailma teaduses.» [5]

## VEEL SAM LOYDI ÜLESANDEID

### Kes maksab mängu eest?

Kolm meest otsustasid mängida 15-pallilist piljardit ning leppisid kokku (nagu selles klubis kombeks oli), et mängu eest maksab kaotaja. Mängija nr. 1, kes oli teistest osavam, lubas sealjuures lüüa vähemalt sama palju palle kui mängijad nr. 2 ja 3 kokku.




Just siis, kui nad kavatsesid alustada, tuli sisse neljas mees ja ühines mänguga. Et tegemist oli võõraga, siis mingeid lisapakkumisi talle ei esitatud ja ta mängis kõikide vastu võrdsetel tingimustel.

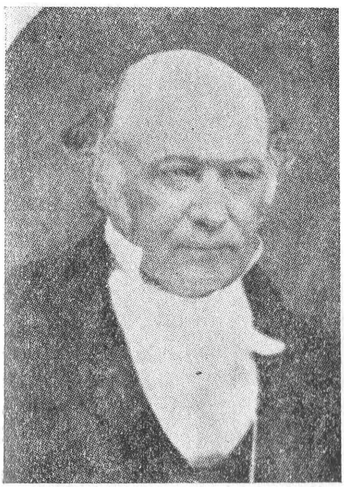
Riiulitel on näidatud iga mängija tulemus mängu lõpul. Mängijad aga vaidlevad selle üle, kes on kaotaja ning peab vastavalt kokkuleppele mängu eest maksma.

Sellele küsimusele polegi nii lihtne vastata, nagu esialgu võib-olla paistab. Seda näitab kasvõi asjaolu, et kui sama küsimus esitati hiljuti ühes piljardivõistlusest osavõtjatele, siis ei leidunud kaht mängijat, kes oleksid andnud ühesuguse vastuse.

[5] Успехи математических наук, 1964, т. 19, вып. 3, lk. 169.

# WILLIAM ROWAN HAMILTON

L. Roots



2. septembril 1965. a. möödus 100 aastat XIX sajandi ühe suurima matemaatiku sir William Rowan Hamiltoni surmast.

W. R. Hamilton sündis 3. augustil 1805. a. Iirimaal Dublini linnas, kus ta isa töötas advokaadina. Tema edasise elukäigu kujunemisele avaldas suurt mõju onu, James Hamilton, kes võttis enda peale Williami kasvatamise alates kolmandast eluaastast. Onult sai tulevane matemaatik alg- ja keskhariduse, samuti algteadmised mitmetes idamaa keeltes. W. R. Hamilton oli imelaps: kolmeaastasena oskas ta lugeda inglise keelt ja tundis aritmeetikat; neljaaastasena olid tal juba ulatuslikud teadmised geograafiast; viieaastasena mõistis ta lugeda ja tõlkida ladina, kreeka ja heebrea keelt ning talle meeldis, näiteks, deklameerida Homerost; kaheksandaks eluaastaks oli ta omandanud prantsuse ja itaalia keele ning kümneaastasena õppis juba araabia ja sanskriti keelt. Kaheteistkümne aasta vanusena hakkas ta huvi tundma matemaatika, esialgu aritmeetika vastu ning armastas edaspidigi teha peast keerulisi aritmeetilisi arvutusi. Kolmeteistaastasena omandas ta algteadmised algebrast, töötades läbi prantsuse matemaatiku A. C. Clairaut' «Algebra», ning kirjutas seejärel ise lühikese traktaadi algebrast.

Kõrgema matemaatikaga tutvus W. R. Hamilton kuueteistkümneaastasena. Omandanud diferentsiaalarvutuse meetodi, alustas ta P. S. Laplace'i «Taevamehhaanika» läbitöötamist. Kohe alguses leidis ta seal Laplace'i arutlustes vea, millega tõmbas enesele Dublini ülikooli astronoomiaprofessori Brinckley tähelepanu. Samal ajal alustas Hamilton ka iseseisvat teaduslikku tööd matemaatika alal, uurides võrrandeid, mis esitavad sirgete süsteeme tasapinnal.

1823. a. astus W. R. Hamilton Dublini ülikooli. Ülikoolis õppides paistis ta silma erakordse andekusega nii antiikkeelte kui ka matemaatika alal. Õppimise ajal jätkas ta oma iseseisvaid uurimusi, mille tulemusi kokku võttes esitas 1827. a. Iiri Kuninglikule Akadeemiale töö «Kiirtesüsteemide teooria».

Peaaegu samal ajal lahkus Dublini ülikoolist professor Brinckley; vakantsele astronoomiaprofessori kohale kinnitati Hamilton, kes oli sel ajal alles üliõpilane ning polnud veel kahekümne kahe aastanegi. Siinjuures väärib tähelepanu, et paljude teiste hulgas kandideeris sellele kohale ka pärastine inglise kuninglik astronoom G. B. Airy.

W. R. Hamiltoni teaduslik uurimistöö oli järgnevatel aastatel rikas väljapaistvate saavutuste poolest mitmesugustes teadusharudes. Tööd optikas, mehhaanikas ja matemaatikas tegid peatselt ta nime kuulsaks kogu maailmas.

1832. a. saatis Hamilton Iiri Akadeemiale töö, milles ta ennustas ja põhjendas koonilise refraktsiooni nähtuse olemasolu; peatselt kinnitas seda ka katseliselt üks tema kolleegidest, prof. Lloyd.

1834.—1835. aastail saavutas Hamilton rea põhjapaneva tähtsusega tulemusi analüütilises mehhaanikas. Tema poolt neil aastail esitatud variatsiooniprintsiip kannab tänapäeval Hamiltoni printsiibi nime. Peale selle läks tal korda karakteristliku funktsiooni (Hamiltoni funktsiooni) kasutuselevõtmisega tuletada masspunktide süsteemi liikumise diferentsiaalvõrrandid kanoonilisel kujul (Hamiltoni kanoonilised võrrandid). Need tulemused annavad põhjust pidada W. R. Hamiltoni üheks kõige suurematest teadlastest, kes on töötanud teoreetilise mehhaanika alal.

W. R. Hamiltoni suurimaks teaduslikuks saavutuseks tuleb aga pidada kvaternioonide mõiste loomist aastal 1843. Kvaternioonide teooria väljatöötamisele ja süstemaatilisele esitamisele kulutas ta edasise osa oma elust, kuni surmani 2. septembril 1865. a.

W. R. Hamiltoni töö leidis kõrget tunnustust juba tema eluajal. Teaduslike saavutuste eest tõsteti ta 1835. a. aadliseisusesse. Kaks aastat hiljem, 1837. a., sai ta Iiri Kuningliku Akadeemia presidendiks ning oli sellel kohal kuni 1845. aastani, mil ta soovi tõttu rohkem aega pühendada kvaternioonide teooria väljatöötamisele astus ise sellelt kohalt tagasi. 1843. a. määrati talle teaduslike saavutuste eest valitsuse eluaegne pension.

W. R. Hamilton andis ise enese kohta järgmise hinnangu: «Ma olen väga kaua imetlenud Ptolemaiose antud iseloomustust oma suure astronoomiaõpetaja Hipparchose kohta: *ἀνήϱ φιλόπονοζ και φιλαλήθηζ* (tööd ja tõde armastav mees). Olgu selline mu hauakiri.»

## Matemaatiline päevakaja

# UUS EESTIKEELNE MATEMAATILISE ANALÜÜSI ÕPIK

S. Baron

Uue õppeaasta alguseks ilmus trükist prof. G. Kangro õpiku «Matemaatiline analüüs» I osa. Õpiku aluseks on autori loengud TRÜ matemaatika-mehhaanika- ja füüsikaosakondade I kursuse üliõpilastele.

Siiani puuduski eestikeelne matemaatilise analüüsi õpik, mis täielikult vastaks nii ülikooli kui ka pedagoogilise instituudi matemaatikaosakonna programmile ning mille käsitlusviis oleks seega kaasaja loogilise ranguse tasemel. Prof. A. Borkvelli kaheköiteline raamat «Matemaatilise analüüsi kursus», mis oli esimeseks eestikeelseks kõrgemate koolide õpikuks matemaatilise analüüsi alal, on kirjutatud eeskätt Tallinna Pedagoogilise Instituudi üliõpilastele ja vastab ülikooli füüsika-matemaatikateaduskonna nõuetele seega vaid osaliselt. Et teha oma õpikut arusaadavamaks laiemale lugejaskonnale, on prof. A. Borkvell pealegi kohati loobunud definitsioonide ja tõestuste rangusest.

Prof. G. Kangro õpikus ei esine lünki tõestustes ega sõnastuse ebaselgust, mida vahel võib kohata isegi heades õpikutes (näiteks tehete puhul piirväärtustega). Vaadeldava õpiku materjali esitus on täielik ja range, kusjuures selle all pole sugugi kannatanud esituse selgus. Vastupidi, kogu raamat paistab silma oma sõnastuste kerguse ja lihtsuse poolest. Prof. G. Kangro õpikus on tähelepanu pööratud kõige olulisemale, s. o. kursuse teoreetilise osa rangele ja selgele esitusele ning printsipiaalsete momentide rõhutamisele. Teoreetiline materjal on illustreeritud rohkete näidete varal. Raamatu sissejuhatuses märgib autor, et õpikult ei tule nõuda ülesannete kogumiku osa täitmist. Sellepärast ei ole õpikus pandud rõhku ülesannete lahendamiseks otstarbekaimate meetodite leidmisele. Käesolevale õpikule vastava ülesannete kogumiku koostamise kallal töötab praegu TRÜ matemaatilise analüüsi kateedri kollektiiv.

Vene keeles on terve rida väga häid matemaatilise analüüsi õpikuid (nende autoriteks on näiteks G. M. Fichtenholz, A. J. Hintšin, G. P. Tolstov, I. J. Žak jt.). Ometi erineb prof. G. Kangro õpik kõigist nendest tunduvalt, kusjuures rida raskeid metoodilisi probleeme on siin lahendatud paremini.

Matemaatilises analüüsis on lähtekohaks ratsionaalarvu mõiste ja aksioomideks võetakse ratsionaalarvude omadused. Reaalarv defineeritakse ratsionaalarvude kaudu, reaalarvude omadused aga tõestatakse, tuginedes ratsionaalarvude omadustele. Sellepärast algabki matemaatilise analüüsi kursus reaalarvude teooriaga. Erinevalt teistest NSV Liidus kasutamisel olevatest matemaatilise analüüsi õpikutest on käesolevas õpikus reaalarvude teooria esitatud lõpmatute kümnendmurdude abil. Selline reaalarvu definitsioon on üliõpilastele tuttav juba keskkooli matemaatikakursusest ja seepärast on nii üles ehitatud reaalarvude teooria kergemini omandatav.

Piirväärtuste teooriat käsitleb prof. G. Kangro samuti erinevalt teiste õpikute käsitlusest. Tavaliselt on viisiks piirväärtuse omadused tõestada enne jada piirväärtuse korral ja siis kanda need üle funktsiooni piirväärtuse mõnele juhule, märkides, et piirväärtuste teiste tüüpide korral on tõestus analoogiline. Vaadeldavas õpikus aga esitatakse kogu piirväärtuse teooria ühtsest seisukohast, defineerides järjestatud suuruse piirväärtuse. Selle mõiste alla kuuluvad peale-jada piirväärtuse ka funktsiooni piirväärtuse kõik tüübid (kaasa arvatud ühepoolsed piirväärtused), samuti määratud integraali defineeriva integraalsumma piirväärtus. Selline üldine käsitlus on lühike, täielik ja loogiliselt range. Siinjuures ei ole piirväärtuse olemasolulausete või piirväärtuse omaduste tõestused oluliselt raskemad kui jada piirväärtuse korral.

Matemaatilises analüüsis ja tema rakendustes etendavad tähtsat osa elementaarfunktsioonid. Osaliselt õpitakse neid tundma ka keskkoolis, kuid palju olulist jääb seal ütlemata. Seepärast on elementaarfunktsioonide põhjalik vaatlemine prof. G. Kangro õpikus väga vajalik, seda enam, et elementaarfunktsioonide käsitlus on siin lihtsam ja täielikum kui teistes matemaatilise analüüsi õpikutes. Näiteks astmefunktsiooni $y = x^{\alpha}$ pidevuse tõestus juhul $x \leqslant 0$ on siin (lk. 150) väga lihtne, kuna venekeelsetes õpikutes see kas on keerukam või puudub hoopis. Märgime, et raamatus on esitatud ka astme $a^{\alpha}$ definitsioon (iga reaalse astendaja $\alpha$ korral) ja tõestatud selle olemasolu ja ühesus.

Ka diferentsiaal- ja integraalarvutuse osas on rida häid metoodilisi uuendusi (Taylori valemi tuletamine, funktsiooni kumerus ja käänupunktid, Cauchy keskväärtusteoreemi geomeetriline tõlgendus, integreeruvate funktsioonide korrutise integreeruvus, katkevate funktsioonide integreeruvus jt.). Põhielementaarfunktsioonide diferentseerimisvalemid on tuletatud mitmel meetodil. Õpikus on toodud näide funktsiooni kohta, millel on mitterange ekstreemum (lk. 256) ja samuti mitteintegreeruva funktsiooni näide (lk. 357). Sellised näited õpikutes tavaliselt puuduvad, kuigi nad on üliõpilastele huvitavad ja aitavad kaasa vastava mõiste omandamisele.

Õpikus on vaadeldud ka mõningaid küsimusi, mis oluliselt täiendavad ja süvendavad programmis olevat materjali: reaalarvude hulga pidevuse mitmesugused väljendused ja nende samaväärsus (lk. 113—114), põhielementaarfunktsioonide esitus funktsionaalvõrrandite abil (lk. 154—156), hulk mõõduga null (lk. 362), päratute integraalide koonduvustunnused, Stieltjesi integraal jne.

Õpikus on mitmeid kohti, mis äratavad lugejas huvi kaasaegse matemaatika vastu (näit. lk. 363). Sellele aitavad kaasa ka rohked viited probleemide ajaloole.

Oma õpikus on autor leidnud ruumi ka matemaatilise induktsiooni meetodi esitamiseks (lk. 48) ja rakendanud seda mitmel juhul (lk. 179, 199—202 jt.).

Prof. G. Kangro õpik «Matemaatiline analüüs» I osa on väärtuslik panus eestikeelsesse kõrgema matemaatika alasesse õppekirjandusse ning väärib iga matemaatiku tähelepanu.

## DIFERENTSIAALGEOMEETRIA KONVERENTS TARTUS

**Ü. Lumiste**

Sõjajärgsetel aastatel on Balti liiduvabariikides kujunenud noortest matemaatikutest koosnevad rühmad, kelle uurimisvaldkonnaks on diferentsiaalgeomeetria. Sidemete tugevdamiseks omavahel ja Nõukogude Liidu juhtivate koolkondade esindajatega on seni juba kahel korral kokku kutsutud Baltikumis geomeetria konverentsid diferentsiaalgeomeetria küsimustes. Esimene neist peeti 1963. aasta juunis Vilniuse lähedal Trakais, teine 1.—5. juulil 1965. a. Tartus. Viimase konverentsi korraldajaks oli Tartu Riiklik Ülikool, üritus oli pühendatud Eesti NSV, Läti NSV ja Leedu NSV 25. aastapäevale. Mõlemad konverentsid kujunesid sisuliselt üleliidulisteks. Tartusse sõitis teadlasi 17 NSVL linnast. Kõige arvukamalt olid esindatud Moskva (21), Harkov (15), Tartu (11), Saraatov (11), Vilnius (10), Tomsk (5) ja Kaasan (4). Külalisi oli ka Riiast, Tallinnast, Erevanist, Kiievist, Minskist jm. Üldse võttis konverentsi tööst

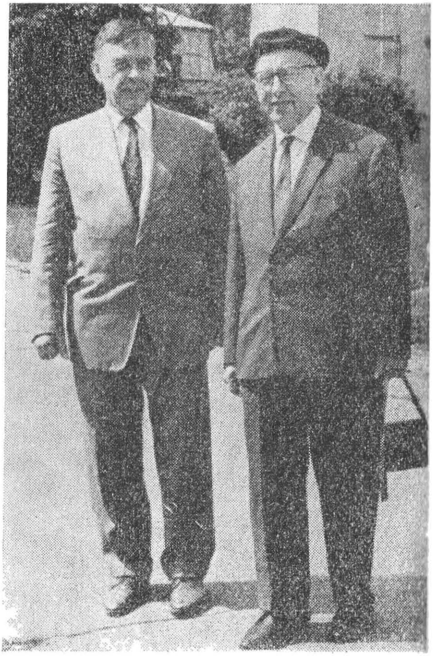
Rühm II Baltimaade geomeetria konverentsist osavõtjaid TRÜ peahoone ees. Esireas paremalt A. Liber (Saraatov), J. Blank (Harkov), M. Nikolajenko (Harkov), I. Jegorov (Pensa), B. Rosenfeld (Moskva), V. Vagner (Saraatov), A. Norden (Kaasan), B. Laptev (Kaasan) jt.

osa 95 matemaatikut. Nende seas oli füüsika-matemaatikadoktoreid 14 ja -kandidaate 32.

Konverentsi esimese istungi avas 1. juulil TRÜ aulas ülikooli rektor prof. F. Klement, kes peatus lühidalt Tartu ülikooli ajaloolistel traditsioonidel diferentsiaalgeomeetrias. Möödunud sajandil ülikoolis töötanud matemaatikud (M. Bartels, K. E. Senff, F. Minding, K. Peterson) on rikastanud silmapaistvate saavutustega nii kõvera- kui pinnateooriat. Tartut võib lugeda vene diferentsiaalgeomeetria hälliks, siin võrsus hilisem Moskva koolkonna rajaja läti rahvusest K. Peterson. Nii prof. F. Klement kui ka järgnevalt sõna võtnud prof. G. Laptev Moskvast, prof. A. Norden Kaasanist, prof. V. Vagner Saraatovist ja prof. J. Blank Harkovist tervitasid konverentsi kui eri rahvusest nõukogude teadlaste viljaka koostöö vormi. Rõhutamist leidis vajadus korraldada suurte üleliiduliste ülevaatekonverentside kõrval ka edaspidi enam spetsialiseeritud teadlaste kokkutulekuid, millel on võimalik kuulata ja läbi arutada ka noorte teadlaste ja aspirantide töö tulemusi.

Diferentsiaalgeomeetria arengut Nõukogude Baltimaades 25 aasta jooksul käsitlesid oma ühises ettekandes L. Berezina (Riia), V. Bliznikas (Vilnius) ja Ü. Lumiste (Tartu). Uurimistöö sel alal jätkus siin uuesti pärast pikaajalist seisakut, kui sõjajärgsel aastakümnel said Moskva Riiklikus Ülikoolis oma erialase ettevalmistuse noored Baltimaade diferentsiaalgeomeetria spetsialistid. Nende ümber koondusid uurimisrühmad ja praegu on balti liiduvabariikes kujunenud väikesed diferentsiaalgeomeetria alase uurimistöö keskused, eeskätt Vilniuses ja Tartus. On loodud viljakad teaduslikud sidemed Moskva, Kaasani, Saraatovi jt. koolkondadega, samuti üksikute välismaa uurijatega.

Konverents töötas nelja päeva jooksul, mil kuulati kokku 83 ettekannet. Igal päeval toimus plenaaristung ja kolm sektsiooniistungit. Esimestel peeti ulatuslikumaid ülevaate-ettekandeid, esinejate seas oli selliseid Nõukogudemaa juhtivaid eriteadlasi nagu professorid G. Laptev, N. Jefimov, A. Norden, V. Vagner, B. Laptev jt. Sektsioonides kuulati ja arutati läbi kitsama teemaga lühiesinemisi, millede arv ulatus 70-ni. Tartu matemaatikutest esitasid konverentsil oma tulemusi Ü. Lumiste, R. Mullari, M. Rahula ja L. Tuulmets.



Diferentsiaalgeomeetria suvekooli esimesed loengud Tartus pidasid prof. G. V. Jefimov (vasakul) ja prof. N. F. Laptev.

Konverentsi tööst vabal päeval, 4. juulil korraldati külalistele ekskursioon Tallinna, kus tutvuti vanalinna vaatamisväärsustega, külastati Kadriorgu, Lauluväljakut ja Piritat. Päikeseloojang võeti vastu paesel Vääna pangal. Ka Tartus sisustati vaba aega ekskursioonidega linna huvitavamatesse paikadesse, sealhulgas TRÜ Teaduslikku Raamatukokku ja Tähetorni. Konverentsi ajal olid eksponeeritud materjalid, mis tutvustasid diferentsiaalgeomeetria arengut Tartus möödunud sajandil ja Nõukogude Baltimaades sõjajärgseil aastail.

Vahetult konverentsile järgnes diferentsiaalgeomeetria-alane suvekool, mis alustas tööd 6. juulil Tartus ja jätkus 10. juulist TRÜ spordibaasis Kääriku. Suvekool oli mõeldud eeskätt noorte balti teadlaste erialase ettevalmistuse süvendamiseks, lektoriteks olid kutsutud tuntud spetsialistid Moskvast, Kaasanist ja Saraatovist (N. Jefimov, B. Laptev, G. Laptev, A. Ništšik, A. Vassiljev, V. Vagner). Üldse kuulati Tartus ja Käärikul kuus loengutsüklit diferentsiaalgeomeetria aktuaalsetest probleemidest. Loengud vaheldusid matkade ja sportimisega. Suuremateks ekskursioonideks olid laevasõit Tartust Värskasse ja reis autobussidel mööda Lõuna-Eesti kaunemaid paiku. Suvekooli lõpetuseks peeti 17. juulil meeleolukas lõkkeõhtu Kääriku slaalominõlvakul.

Konverents ja suvekool tihendasid veelgi sõprust ja koostööd balti noorte diferentsiaalgeomeetrikute vahel ning arendasid teaduslikke sidemeid teiste NSVL keskuste esindajatega. Järgmiseks konverentsiks otsustati kokku tulla 1968. aastal Palangasse Leedu NSV-s.

## ÜLELIIDULINE SUMMEERUVUSTEOORIA-ALANE SUVEKOOL KÄÄRIKUL

E. Reimers

Ajavahemikus 3.—12. augustini 1965. a. toimus Tartu Riikliku Ülikooli spordibaasis Käärikul esimene üleliiduline arv- ja funktsionaalridade summeeruvusteooria-alane teaduslik suvekool, mille korraldajaks oli TRÜ matemaatilise analüüsi kateeder.

Külalisi saabus Moskvast, Leningradist, Kiievist, Tbilisist, Sverdlovskist, Krasnojarskist, Dušanbest jm., kokku 16 linnast. Üldse võttis kooli tööst osa 53 matemaatikut, kelle hulgas oli 12 professorit ja teaduste doktorit ning 21 dotsenti ja teaduste kandidaati. Külaliste seas oli rida tuntud matemaatikuid, nagu prof. S. Nikolski, prof. S. Stetškin, prof. B. Korenblum, prof. F. Haršiladze jt. Kõige rohkem osavõtjaid saabus Sverdlovskist, arvult 11. Tartu matemaatikutest võttis kooli tööst osa 16 inimest, Tallinnast oli 2 osavõtjat.

Kooli eesmärgiks oli tutvuda summeeruvusteooria ja sellega piirnevate matemaatiliste distsipliinide uusimate saavutuste, suundade ja rakendustega. Kuulati ära 20 ettekannet (kestusega 1—6 tundi). Enamik ettekandeid tutvustas ülevaatlikult laiemat probleemide ringi, kuid mõnedes ettekannetes anti ka lühiinformatsiooni mitte originaalsete tulemuste kohta.

Külalismatemaatikutest esinesid pikemate ettekannetega prof. S. Nikolski («Integreeruvate mitme muutuja funktsioonide integraalne esitus» ja «Diferentseeruvate mitme muutuja funktsioonide klassikaliste polünoomidega aproksimeerimise probleem»), prof. S. Stetškin («Fourier' ridade summeerimismenetluste regulaarsusest.») ja prof. B. Korenblum («Üldised M. Keldõši tüüpi Tauberi teoreemid ja üldistatud harmooniline analüüs.»)

Tartu matemaatikud esitasid suvekoolis kolm ettekannet: «Tauberi ja Merceri teoreemidest» (dots. T. Sõrmus), «Summeeruvusteguritest ja nende rakendustest» (dots. S. Baron) ja «Polümaatriks-summeerimismenetlused» (dots. E. Reimers).

Viimasel ajal on avastatud summeeruvusteooria mitmesuguseid uusi rakendusvõimalusi teistes matemaatilistes distsipliinides. Näiteks prof. S. Nikolski vaatles oma esimeses ettekandes muuhulgas Fourier' ridade summeeruvusteooria rakendamist funktsioonide integraalse esituse saamisel. Prof. B. Korenblum näitas Keldõši tüüpi Tauberi teoreemide seost funktsioonide aproksimeerimise probleemidega.

Ka Tartu matemaatikute ettekannetes oli oluline koht pühendatud saadud teoreetiliste tulemuste rakenduste näitamisele. Nii käsitles T. Sõrmus oma ettekandes Merceri tüüpi teoreemide rakendamist integraalvõrrandite teoorias, S. Baron kõneles summeeruvustegurite rakendamisest Fourier' ridade teoorias absoluutse summeeruvuse lokaalsuse omaduste uurimisel ning funktsiooni klassi määramisel tema Fourier' kordajate järgi ja E. Reimers uute üldiste summeerimismenetluste rakendamisest funktsiooni- ja integraaliteoorias. Tartu matemaatikute viimastele summeeruvusteooria-alastele töödele anti hea hinnang.

Juba paar aastat tagasi väljendasid mitmed matemaatikud mõtet korraldada summeeruvusteooria-alane nõupidamine Tartus, kus rea aastate vältel on prof. G. Kangro juhtimisel teostatud uurimusi üldise summeeruvusteooria alalt. Arv- ja funktsionaalridade summeeruvuse küsimusi on küll sageli käsitletud mitmesugustel funktsioonide lähendamise teooria, reaal- ja kompleksmuutuja funktsioonide teooria ning funktsionaalanalüüsi konverentsidel, kuid senini polnud organiseeritud ühtki nõupidamist, mis oleks spetsiaalselt pühendatud summeeruvusteooria ja tema rakenduste probleemidele, kuigi sellealased koolkonnad ja uurimisgrupid olid juba ammu välja kujunenud mitmes meie maa keskuses (Moskvas,

Istuvad professorid: A. N. Turetski (Minsk), F. I. Haršiladze (Tbilisi), B. A. Rõmarenko (Leningrad), S. M. Nikolski (Moskva), G. Kangro (Tartu), S. B. Stetškin (Sverdlovsk), dots. M. F. Timan (Dnepropetrovsk), professorid N. A. Davõdov ja B. I. Korenblum (mõlemad Kiiev).

Teises reas seisavad: N. Veske (Tartu), E. Reimers (Tartu), J. S. Bugrov (Blagoveštšensk), B. L. Kaufman (Orenburg), L. V. Grepatševskaja (Orsk), V. G. Ponomarenko (Dnepropetrovsk), I. A. Vinogradova (Moskva), A. V. Mesis (Sverdlovsk), L. Sikk (Tartu), B. A. Menkova (Sverdlovsk), V. I. Pliškina (Sverdlovsk), T. Sõrmus (Tartu), L. Karu (Tartu).

Kolmandas reas: H. Türnpu (Tartu), H. Merilo (Tartu), V. M. Badkov (Sverdlovsk), M. Abel (Tartu), G. Vainikko (Tartu), G. I. Natanson (Leningrad), F. Vichmann (Tallinn), A. A. Melentsov (Sverdlovsk), M. Tõnnov (Tartu), V. P. Tretjakov (Arzamas), D. A. Kogan (Sverdlovsk).

Neljandas reas: A. Jõgi (Tallinn), S. Baron (Tartu), V. V. Žuk (Leningrad), S. A. Teljakovski (Moskva), V. P. Stepin (Sverdlovsk), H. Espenberg (Tartu), E. Jürimäe (Tartu), S. A. Tedejev (Tshinvali).

Tbilisis, Sverdlovskis, Leningradis, Kiievis, Tartus jm.). Sidet peeti ja koostööd arendati peamiselt publikatsioonide vahetuse ja isikliku kirjavahetuse kaudu. Seoses uurimistöö tunduva avardumisega viimasel ajal osutus aga spetsiaalne üleliiduline nõupidmine ka teadusliku töö koordineerimise seisukohalt vajalikuks. Seepärast kujunes Kääriku summeeruvusteooria-alane suvekool sisult väga lähedaseks teaduslikule konverentsile, erinedes viimasest vaid seetõttu, et sellel nõupidamisel oli palju ülevaate-, vähe aga lühiettekandeid. Ülevaateettekannete tekstid otsustati suunata avaldamiseks ajakirjale «Успехи математических наук».

Suvekooli tööpäevad kulgesid järgnevalt: reeglina toimus iga päev kaks istungit, hommikune (4 loengutundi) ja õhtune (2 loengutundi), kusjuures üks päev oli puhkepäevaks. Ühel viimastest istungitest arutati mitmesuguseid küsimusi, mis puudutasid selletaoliste koolide organiseerimist, nende programme ja osavõtjaid. Kooli tööst vabal ajal korraldati jalgsimatku Kääriku kaunisse ümbrusesse ja sõideti mootorpaadiga Pühajärvel. Korraldati ka lõkkeõhtu, kus külalistele tutvustati eesti rahvuslikke mänge, tantse ja laule. Peale selle toimus külastajate soovil veel ekskursioon Tallinna.

Matemaatikute suvekoolid Käärikul on omandanud traditsioonilise iseloomu. Käesolev oli juba kolmas: seni on toimunud üks suvekool algebra ja teine diferentsiaalgeomeetria alal. Suvekoolidest saadud kogemused näitavad, et ühel kitsamal erialal töötavate teadlaste vahel sidemete loomisel õigustab suvekooli vorm end täiesti. Tunnistades suvekooli kasulikkust, väljendasid käesolevast suvekoolist osavõtjad mõtet — korraldada niisuguseid koole regulaarselt. Teine üleliiduline summeeruvusteooria-alane kool otsustati korraldada 1967. aastal Sverdlovskis, kus summeeruvusteooria alal töötab või spetsialiseerub sellele alale suur grupp matemaatikuid.

## AMEERIKAST TARTU MATEMAATIKU PILGUGA

Möödunud õppeaastal viibis Ameerika Ühendriikides pikaajalisel komandeeringul TRÜ arvutusmatemaatika kateedri dotsent, TRÜ biofüüsika laboratooriumi juhataja Leo Võhandu. Oma Ameerikasõidu muljetest pajatab sm. **Võhandu** järgnevalt.

*Juhtus just nii, et äralennupäev sattus kokku mu sünnipäevaga. Kuna lend kulges Moskvast lääne poole, siis sai sellest sünnipäevast mu elu pikim. Möödus ligi 30 tundi, enne kui New Yorgis panin pea voodipadjale.*

*Pärast lühikest tutvumist New Yorgi ja Washingtoni vaatamisväärsustega saabusin 1. oktoobriks Chicagosse. Lennuväljal oli mul vastas Chicago ülikooli matemaatilise bioloogia komitee kaks esindajat prof. H. Landahl ja prof. R. Rosen. Tunniajaline kihutamine läbi Chicago, et jõuda õigeks ajaks komitee seminarile, kus üks hindu rääkis ainevahetuse matemaatilistest mudelitest ning algaski üheksakuuline teaduslik komandeering USA-s.*

*Chicago ülikool on väga tugeva õppejõudude koosseisuga eraülikool, kus üliõpilaste arv kõigub 7000 ümber. Aastane õppemaks on umbes 2000 dollarit.*

*Matemaatilise bioloogia komitee pärineb aastast 1935, olles seega maailma esimene niisugune uurimisasutus. Komitee esimees prof. N. Rashevsky käis 1964. aasta mais Nõukogude Liidus loenguid pidamas. Lähemal ajal ilmub vene keeles ka üks tema raamatuid «Mõningaid meditsiini matemaatilisi aspekte». Raamat on kirjutatud huvitavalt, üsna elementaarset matemaatilist aparatuuri kasutades ja peaks andma igale soovijale ülevaate vähemalt mõnest võimalikust matemaatilisest lähenemisviisist meditsiini ja füsioloogia probleemidele.*

*Kui prof. Rashevsky kasutab peaasjalikult diferentsiaalvõrrandite kvalitatiivset teooriat, siis komitee noo-*

remad liikmed kasutavad juba õige tänapäevaseid meetodeid. Kuna tugevamates USA ülikoolides kulgeb matemaatika õpetamine üliabstraktses Bourbaki stiilis, siis pole midagi imestada, kui ameeriklased sageli «varblaste laskmiseks kahureid pruugivad», s. t. probleemide lahendamisel võetakse appi ülearu tugev matemaatiline aparaat.

Matemaatilises bioloogias on olukord mõnevõrra teine. Nähud, mida uuritakse, on oma loomult keerulised ja üldisem meetod võimaldab neid uurida mitmepalgelisemalt. Näiteks prof. Rosen on saanud huvitavaid tulemusi nn. relatsioonilises bioloogias. Algebraliste ja topoloogiliste meetodite rakendamine võimaldab ühelt poolt vabaneda meetrika kasutamisega seotud raskustest, teiselt poolt võib saadud tulemusi sageli laiendada algmudelist üldisematele mudelitele. Oma teooria loomisel tuli Rosenil vaja nii graafide teooriat, kategooriate algebrat, pidevate ja diskreetsete dünaamiliste süsteemide algebralis-topoloogilisi meetodeid kui ka Turingi masinate ja abstraktsete automaatide üldist teooriat.

Huvitav on märkida, et teine komitee liige P. Greene kasutas üsna keerulist fiiberruumide teooriat meelespidamise ja unustamise mehhanismi uurimiseks, jõudes välja huvitavate füsioloogiliste seaduspärasusteni.

Millega ma siis tegelesin Chicagos? Kõigepealt kuulasin loengukursust FORTRAN-programmeerimisest ja lahendasin mõned ülesanded võimsal elektronarvutil IBM-7094. Sügissemestril uurisin informatsioonilisi statistikaid, eesmärgiga läheneda kausaalsete süsteemide teooriale. Sain tulemusi, mis peaksid huvi pakkuma taksonoomias (paljutunnuseliste süsteemide klassifitseerimisteoorias). Kevadsemestril kuulasin prof. Roseni loenguid relatsioonilisest bioloogiast ja prof. Greene'i loenguid kodeerimisest ning interpreteerimisest närvisüsteemis. Kaks korda nädalas toimusid seminarid, kus komitee töötajad ja paljud väliskülalised kõnelesid oma uuematest tulemustest. Eriti meeldejäävateks kujunesid komitee professori I. Opatowsky seminarid veresoonkonna elastsusteooriast, milles esitati ka rida matemaatilisele elastsusteooriale uudseid seisukohti. Külalisettekannetest oli kahtlemata huvitavaim prof. Starki oma, milles oli juttu õppivast diagnoosimisseadmest, millega saavutati häid tulemusi südamehaiguste diagnoosimisel. Ka mul endal tuli seminaris teha kaks ettekannet. Rääkisin mõnedest meetoditest paljutunnuseliste süsteemide uurimiseks, millel näib olevat seos prof. Roseni kasutatud metoodikaga. Peab märkima, et õhkkond loengutel ja seminaridel on meie mõistes kaunis familiaarne. Seminarile eelneb väike kohvijoomine (muidugi püstijalu, nagu peaaegu kõik vastuvõtud USA-s). Enamus osavõtjaid, sealhulgas ka ettekandja, on tavaliselt särgiväel (lips peab siiski kombekalt ees olema).

Õhtuti töötasin tavaliselt raamatukogudes. Peab märkima, et USA raamatukogud on peaaegu erandituit avariiulite süsteemile üle läinud. Raamatute registreerimine toimub vahetult väljapääsu juures. Tähtpäevaks raamatu tagastamata jätmine tähendab kaunis soliidset trahvi. Näiteks Chicago ülikooli raamatukogudele laekub trahvidena aastas ca 40 000 dollarit.

Rahvusvahelises majas, kus ma peavarju leidsin, kohtusin paljude erinevate maade esindajatega — Basil USA-st, Robert Inglismaalt, Lloyd Jamaikalt, Mustafa Liibüast, Eeva Soomest, Eeva Ungarist, Eeva Rootsist jt. Majas elas ka eesti emigrantide lastest tudengeid, kelle hulgast mõnegagi sain suhelda ainult inglise keeles. Muide, Londoni mehe Robertiga seoses üks väike lugu. Möödunud aasta novembris sattusime kord maja puhkeruumis juttu ajama — üks ameeriklanna, Robert ja mina. Järsku küsis daam Roberti käest: «Kui kaua Te olete juba Chicagos?» Roberti vastusele: «Umbes 2 kuud», kostis daam: «Oo, ja Te räägite juba nii hästi inglise keelt». Roberti lõualuud tõmbusid pingule, kuid ehtsa džentelmenina suutis ta siiski rahu säilitada. Asi on nimelt selles, et Ameerika Ühendriikides räägitav inglise keel erineb häälduselt tublisti Inglismaal räägitavast.

*Huvi minu kui Nõukogude Liidu kodaniku vastu oli üsna suur. Sain rohkesti küllakutseid ameeriklastelt ja ka eesti emigrantidelt. Puhusime juttu, vaidlesime ja filosofeerisime. Muide, ülikoolide õppejõud märkisid sageli, et nende palk on kasvanud viimase 5 aasta jooksul peaaegu kahekordseks tänu majanduslikule konkurentsile Nõukogude Liiduga. Ülikoolides on palgad siiski madalamad kui tööstuses.*

*Juunis tegin veel lühikese sõidu San Franciscosse ja Los Angelesi ning juba tõigi lennuk mind tagasi üle ookeani. Lühipeatused Pariisis, Londonis ja Stokholmis. Teel külastasin mitmeid ülikoole ja raamatukogusid. Käisin Briti Muuseumis Egiptuse muistseid varasid vaatamas ja veendusin, et sõna «Tartu» all on kataloogides ainult üks raamat. Kirjandust tuleb ikka veel Tartu endise nime — Dorpati alt otsida. Meie uuemat kirjandust oli seal siiski küllalt palju.*

## „Matemaatika ja kaasaja" keelenurk

### MÕNEDE PARALLEELTERMINITE VAJALIKKUSEST

O. Rünk

Lugedes käesoleva ajakirja VI numbrist J. Gabovitši artiklit «Matemaatilise terminoloogia probleeme» tekkis tunne, et seal esitatud terminite paaride puhul pole eelistust kõigil juhtumeil küllaldaselt kaalutud. Kahtlusi äratasid nimelt järgmised paarid: *rööpkülik* ja *parallelogramm*, *võrdeline* ja *proportsionaalne*, *tasand* ja *tasapind*, *keskpunkt* ja *tsenter* ning *joontrapets* ja *kõverjooneline trapets*. Rahutuks tegi ka artiklis eraldi mainitud termin *pindsilinder* (*цилиндрический брус*), mis on loodud *joontrapetsi* eeskujul. Minu seisukohad neis küsimustes on kokkuvõtlikult järgmised.

1. *Rööpkülik* ja *parallelogramm* peaksid olema paralleelselt kasutusel, ilma kumbagi eelistamata — vähemalt seni, kuni omadussõnana eelistatakse meil tarvitada *paralleelne* pro *rööbik* e. *rööpne*.

2. Ka *võrdeline* ja *proportsionaalne* peaksid jääma mõlemad käibele, ilma esimest eelistamata, hoolimata sellest, et teine on küllalt pikk ja kohmakas. Rahvusvahelisel terminil *proportsioon* on tegelikult kaks erinevat sisu: esiteks — (suuruste) *suhe* ja teiseks — *võrre* e. *suhete võrdus*. Esimest tähendust kasutatakse rohkem igapäevases keelepruugis; näiteks: «see hoone on õnnestunud proportsioonidega» (ehk teisiti — ... hästi proportsioneeritud). Teist tähendust kasutatakse peamiselt matemaatikas. Kuigi nii *suhe* kui ka *võrre* on väga head sõnad eesti keeles, ometi ei piisa neist, sest kumbki üksikult ega ka nad mõlemad koos ei ammenda veel rahvusvahelise *proportsiooni* kogu sisu. Tõesti — eespool näitena esitatud mõtet hoone kohta ei saa ladusalt väljendada a i n u l t nimetatud eestikeelseid vasteid tarvitades (proovitagu seda teha!).

Kuigi meie omadussõna *võrdeline* (e. suhteliselt vastav) on adekvaatne tõlge rahvusvahelisest terminist *proportsionaalne*, poleks halb, kui meil õpilased õpiksid kohe tundma ka viimast, sest enamik kultuurkeeli kasutab ainult seda.

3. Võistlevaist termineist *tasand* ja *tasapind* pean paremaks viimast, kuigi see on pikem; selle eest on aga ta esimesest selgem — s e l g u s aga olgu teadusliku terminoloogia juures primaarseks nõudeks! Kahjuks ka «moodne» omadussõna *tasandiline* ei kõla hoopiski nii asjalikult kui endine *tasapinnaline*. Mõnevõrra paremini kõlaks uue omadussõna vorm *ta-*

*sandlik* või samuti võimalik *tasandne*, kuid nendeni pole tasandipooldajad veel jõudnud.

Kui ainult lühemus seada omaette eesmärgiks, siis näib, et tartlased on oma *tasandiga* jäänud toppama poolele teele, sest ka *tasand* laseks ennast mõnusasti edasi lühendada — kuni jõuaksime toredale sõnale *tand* (gen. tanna), mis kõlab suurepäraselt, ning osutub heaks paariliseks terminile *pind* (gen. pinna). Adjektiiv *tasapinnaline* (e. *tasandiline*) asenduks siis hästi kõlava sõnaga *tandne*! Kui nüüd lõpuks otsiksime ka *kõverpinnale* mingi analoogilise lühivormi (kas või näiteks *küürd*, gen. küüra), siis olekski see terminite kompleks jällegi süsteemne (nagu ta oli seda seni — pindade jagunemisega tasapindadeks ja kõverpindadeks). Tartlaste poolt soovitatud ainus muudatus (*tasand* pro *tasapind*) aga rikub selle vana hea süsteemi ning sellega vähendab selgust, lühemus aga ei suuda neid puudusi korvata.

Kurvastusega tuleb märkida, et kui *tasand* ilmus rahva sekka trükitult, siis nii mõnedki tegelased pidasid seda uueks mõisteks ning hakkasid seda omal viisil seletama. Näitena olgu siin esitatud üks mõttetu ja endastmõistetavalt täiesti tarbetu diferentseerimiskatse: *tasapind* on konkreetne, tegelikult eksisteeriv, *tasand* aga seevastu abstraktne, kujuteldav. Vaat, milleni võib terminoloogilise eksperimendiga välja jõuda!

4. Arvan, et *keskpunkti* kõrval on ka *tsenter* (kui rahvusvaheline ja pealegi lühem) kindlasti tarvilik. Ärgem unustagem, et *tsenter* on kindlustanud enesele eesti keeles juba jääva eluõiguse terminites *tsentraalsümmeetria* ja *tsentraalprojektsioon*. Ka on hea, kui ühe ja sama objekti juures esineva mitme keskpunkti korral on rohkem sõnu käepärast. Näiteks ringikaare juures on vaja silmas pidada kolme erinevat keskpunkti: ringi *tsentrit*, kaare *poolituspunkti* ja kaare *raskuskeset*. *Keskpunkt* sobib minu arvates kõigi nende (ja muudegi võimalike) keskkohtade üldnimetuseks.

5. Termin *joontrapets* on ilmselt ebaõnnestunud, kui selle all tahetakse mõista niisugust üldistatud trapetsit, millel üks haar on (või võib olla) kõver. Mõnevõrra parem oleks siin termin *kõverjooneline trapets* (mille prof. G. Kangro oma «Matemaatilises analüüsis» on komprimeerinud *kõvertrapetsiks*); kõige selgem aga vahest oleks siin *kõverhaarne* trapets. Analoogiliselt oleks tuletatav ka termin *kõverkaaneline silinder* (*цилиндрический брус*), mis asendaks ilmselt ebasobivat *pindsilindrit*.

6. Lõpuks avaldaksin oma arvamuse ka sm. Gabovitši poolt ülestõstetud küsimuses diferentsiaalarvutuse põhiliste terminite osas. Kui *integreerimise* tulemuseks on *integraal*, *diferentseerimise* tulemuseks aga mitte *diferentsiaal* vaid *tuletis*, siis on siin ilmselt midagi korrast ära: puudub süsteem! Tuletise leidmist *deriveerimiseks* nimetada muidugi sobiks ja võiks, aga ilmselt tooks see kaasa väga sügavaid muudatusi kogu diferentsiaalarvutuse terminoloogias (kas näiteks *diferentsiaalvõrrandid* ei tuleks siis ümber ristida *derivaatvõrrandeiks*?).

*Tuletisel* kui matemaatilisel terminil puudub kahjuks terminile vajalik spetsiifika — sõna on liiga harilik ja laialt tarvitatav. Verb *tuletama* (millest *tuletis* ongi saadud), on isegi niivõrd ilma spetsiifikata, et seda ei saagi matemaatikas oma otseses tähenduses (*diferentseerima* e. tuletist leidma) tarvitada. Seepärast tuleks vist küll asjale kasuks, kui siin terminoloogiat muudame: süsteemsusega kasvaks ka selgus! Vastuväiteid võiks oodata ainult keeletraditsioonide ja harjumuste baasil. *Tuletise* kui omakeelse matemaatilise termini vastu räägib veel see asjaolu, et tal puudub täiesti keelesisuline selgus (rahvusvaheliselt terminilt me keelesisulist selgust aga nii väga ei nõuagi!).

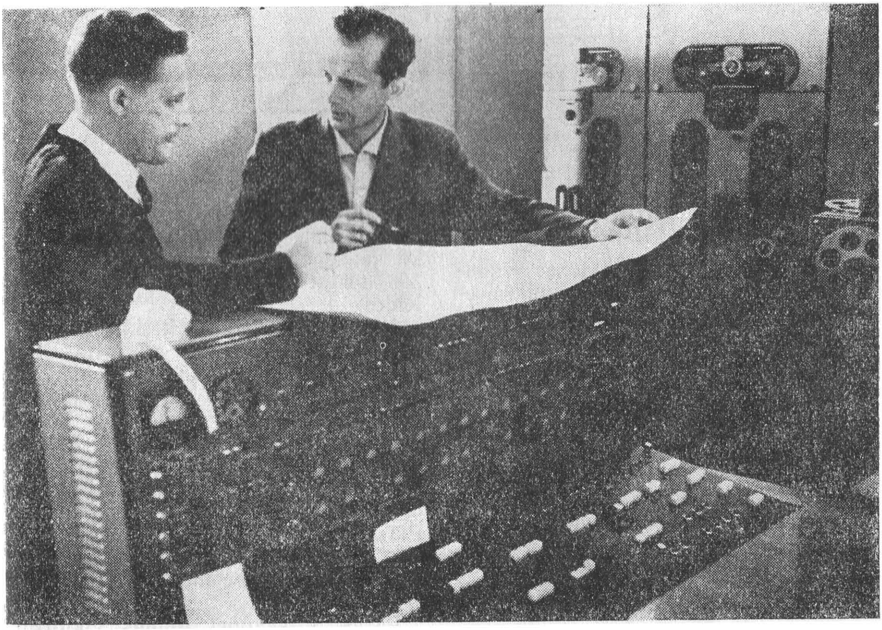
## NÕUKOGUDE EESTI PREEMIA

Eestimaa KP Keskkomitee ja Eesti NSV Ministrite Nõukogu määrasid vastavalt Nõukogude Eesti preemiate komisjonide ettepanekutele Eesti NSV XXV aastapäeva puhul Nõukogude Eesti preemiad väljapaistvamate tööde eest:

Teaduse, tehnika ja tootmise alal:
**Boris Tammele ja**
**Juhan Pruudenile**

automaatprogrammeerilise süsteemi loomise, teadusliku põhjendamise ja juurutamise eest alginformatsiooni ettevalmistamiseks numbrilise programmjuhtimisega metallilõikepinkidele universaalsete numbriliste elektronarvutite abil.

Värsked Nõukogude Eesti preemia laureaadid lubasid kirjutada «Matemaatika ja kaasaja» järgmisesse numbrisse pikema artikli oma tööst.



## UUS MATEMAATIKAKATEEDER TRÜ-S

Matemaatikaõpetajate ettevalmistamise parandamiseks loodi 1965. aasta sügisel Tartu Riikliku Ülikooli juurde matemaatika õpetamise metoodika kateeder koosseisus: dots. O. Prinits (kateedri juhataja), prof. G. Rägo, vanemõpetajad J. Reimand ja K. Ariva, assistent E. Mitt ning vanemlaborant T. Müürsepp.

Uue kateedri ülesandeks jääb matemaatika pedagoogilise haru üliõpilaste töö juhtimine.

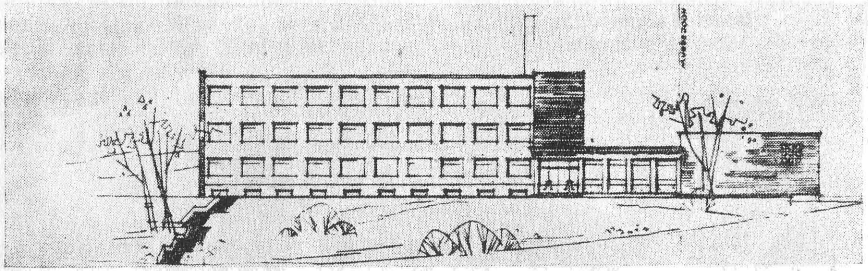
Nüüd on Tartu Riikliku Ülikooli matemaatikaosakonnas juba viis kateedrit: matemaatilise analüüsi kateeder (juhataja prof. G. Kangro), algebra ja geomeetria kateeder (juhataja dots. Ü. Lumiste), arvutusmatemaatika kateeder (juhataja dots. Ü. Kaasik), teoreetilise mehhaanika ja astronoomia kateeder (juhataja prof. Ü. Lepik) ning matemaatika õpetamise metoodika kateeder.

## TRÜ MATEMAATIKAOSAKONNALE UUS HOONE

21. juulil 1965. a. toimus Tartu Riikliku Ülikooli matemaatikaosakonna uue hoone nurgakivi panek. Hoone ehitatakse Juhan Liivi ja Vallikraavi tänavate vahelisele Toomemäe osale ja on osalt ühe-, osalt kolmekorruseline. Ehitamine on ette nähtud kahes järgus: aastail 1965—1966 elektronarvutite saal ja aastail 1966—1967 peakorpus.

Ehitusel töötasid suvepraktikal ka matemaatikaosakonna üliõpilased eesotsas brigadiri Mati Räbovõitraga (III kursus).

Ehitatava hoone peakorpuses paiknevad auditooriumid, kateedrid, matemaatikaosakonna raamatukogu ja arvutuskeskus. Hoone (fassaad on kujutatud juuresoleval joonisel) projekt valmis TEPI «Eesti Tööstusprojektis» — projekti peainsener on A. Rebane.



## UUS ELEKTRONARVUTI VABARIIGIS

1965. aasta sügisel täienes vabariigi elektronarvutite pere uue «beebiga» — ETKVL-i rajoonidevahelisele Tallinna kaubabaasile saabus elektronarvuti «Minsk-22».

Uus arvuti sarnaneb oma ehituselt TA Küberneetika Instituudis töötava «Minsk-2»-ga, on aga enam kohandatud majanduslikeks arvutusteks.

«Minsk-22» rakendatakse tööle laoarveldustööde mehhaniseerimisel kaubalaos, mis kujuneb suurimaks Baltimaadel.

## MATEMAATIKAÕHTU TARTU I KESKKOOLIS

25. septembril 1965. a. korraldas A. H. Tammsaare nimelise Tartu I Keskkooli matemaatikaring huvitava matemaatikaõhtu. Pikema ettekandega «Mitmesugustest geomeetriatest» esines TRÜ matemaatika õpetamise metoodika kateedri õppejõud K. Ariva.

Kõigepealt andis ettekandja vastava tabeli kujul ülevaate õpilaste teadmistest keskkooli lõpetamisel. Sellest tabelist selgus, et kõige madalamale tasemele jäävad meie teadmised geomeetrias. Me ei ole selleks ajaks midagi omandanud nendest teadmistest, mis on avastatud ja kirja pandud pärast meie ajaarvamise algust. Kõike seda, mis me õpime, teadis juba 300 aastat veelgi varem elanud Eukleides.

Midagi ei räägita keskkoolis näiteks sellest, et 1826. a. esitas Lobatševski hoopis uue geomeetria. Ettekandja tõigi mõned huviäratavad näited Lobatševski geomeetria kohta. Nendest näidetest selgus, et Eukleidese geomeetria ei tarvitsegi alati õige olla. Kuulajaskonnas tekitas see hämmastust, ahastust ja vaimustust. Päris kahju hakkas, kui lõpuks selgus, et Eukleidese geomeetria on siiski Lobatševski geomeetria (lihtsam!) erijuht.

Pärast ettekannet toimus viktoriin. Raskusi tekitas näiteks järgmine ülesanne. «Lennuk lendas 200 km lõunasse, siis 200 km läände ja lõpuks 200 km põhja poole, maandudes lähtepunktis. Kus asub lähtepunkt?» Arvati, et selleks punktiks on põhjanaba, kuid hiljem selgus, et niisuguseid punkte on veel lõpmata palju (need paiknevad 200 km põhja pool sellest paralleelist, mis ümbritseb lõunanaba ja mille pikkus on 200 km).

Õhtu lõppes mitmesuguste mängudega, mis nii või teisiti olid seotud matemaatikaga.

**J. Kaasik**

# Bibliograafia

## Eesti NSV-s ilmunud matemaatika-alase kirjanduse nimestik

### Juuli — august 1965

(Koostanud E. Annus)

### RAAMATUD

Kivistik, L. **Variatsioonarvutus.** Trt., 1965. 148 lk. (Tartu Riiklik Ülikool.) — Trükitud rotaprindil 300 eks.

Kull, J. **Arvutid ja programmeerimine.** I. Trt., 1965. 255 lk. (Tartu Riiklik Ülikool.) — Trükitud rotaprindil 300 eks.

Lõhmus, A. **Arvutuspraktikumi juhend.** L. Z. Rumšiski järgi kohandanud A. Lõhmus. Tln., 1965. 59 lk. (Tallinna Polütehniline Instituut.)

Vihman, A. **Arvutuslükatil arvutamise õpetus algajaile.** 2. väljaanne. Tln., «Valgus», 1965. 68 lk.

**Материалы Второй Прибалтийской геометрической конференции по вопросам дифференциальной геометрии.** (1—5 июля 1965.) 196 с. (Тартуский гос. ун-т.) — Trükitud rotaprindil.

Роометс, С. **Перфокарты и их применение.** Таллин, 1965. 164 с. (Бюро техн. информации СНХ ЭССР.)

**Сборник задач по физике, химии и математике.** Тарту, 1965. 80 с. (Тартуский гос. ун-т.) — Trükitud rotaprindil.

**Сборник руководящих материалов по вычислительной технике и ее применению.** Таллин, Центр. бюро техн. информации, 1965. 52 с. (Таллинский технологический ин-т.) — Trükitud rotaprindil.

### PERIOODIKAS ILMUNUD ARTIKLID

**Eesti NSV Teaduste Akadeemia toimetised.** Füüsika-matemaatika- ja tehnikateaduste seeria. Tln., 1965.

**Nr. 2.** Matemaatika-alased artiklid (vene k., resümeed eesti ja inglise keeles):

R. Jürgenson. Mõnede diferentsmeetodite veahinnangust hariliku lineaarsete diferentsiaalvõrrandite lahendamisel. — L. Heinla. Integraalvõrrandite omaväärtuste ja omafunktsioonide leidmise täpsusest kvadratuurvalemite abil. T. Tobias. Mõningatest Wieneri mõõdu mõttes parimatest ligikaudsetest valemitest. — T. Tobias. Wieneri integraali ligikaudsest arvutamisest. — A. Jägel. Lubatavate parameetrite piirkonna karakteristika ühe klassi parameetriliste lineaarsete programmeerimisülesannete puhul.

**Eesti Põllumajanduse Akadeemia teaduslike tööde kogumik.** Trt., 1965.

**Nr. 42.** Matematika-alased artiklid (vene k., resümeed eesti ja saksa k.).

A. Ruubel. Ringaksonomeetria põhialused. A. Ruubel. Ringaksonomeetria põhiülesanne. — H. Espenberg. Esimest liiki astmekujulised koonduvustegurid Euler-Knoppi menetluse puhul. — J. Gabovitš. Mõningatest diofantilistest võrranditest arkuskootangensitega. — J. Gabovitš. Arkustangensite arvutamisest. — J. Gabovitš. Mõningate integraalide hinnangud.

Kull, H. Katsetusi trigonomeetria programmeeritud õpetamisel. — «Nõukogude Kool», 1965, nr. 6, lk. 477—479; nr. 7, lk. 517—523.

Lints, A. Arvutamismängud algklassides. — «Nõukogude Kool», 1965, nr. 8, lk. 621—628 (järgneb).

Oissar, E. Jaan Depman 80-aastane. — «Keel ja Kirjandus», 1965, nr. 7, lk. 434—435.

Rünk, O. Nupukuse proovipähkleid. — «Tehnika ja Tootmine», 1965, nr. 7, lk. 334.

Ulm, S. Optimiseerimisest ja optimaalsest juhtimisest. — «Tehnika ja Tootmine», 1965, nr. 7, lk. 323—324.

# Ülesandeid

## Ülesandeid elementaarmatemaatikast

I

1. Leida summa

$$S=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{97\cdot 99}.$$

2. Tõestada, et ükskõik millist seitsmest kopikast suuremat summat saab tasuda ainult 3- ja 5-kopikaliste müntidega.

3. Kolmekohalises arvus on üks number null. Selle nulli ärajätmisel saame kahekohalise arvu, mis on antud kolmekohalisest arvust 9 korda väiksem. Leida sellise omadusega arvud.

4. On antud võrdkülgne kolmnurk külje pikkusega $a$. Leida kolmnurga sees võetud punkti kauguste summa kolmnurga külgedest.

II

5. Turult ostetakse 80 rubla eest kokku 12 parti, hane ja kalkunit. Pardi, hane ja kalkuni hind on vastavalt 5, 7 ja 8 rubla. Kui palju osteti parte, hanesid ja kalkuneid?

6. On antud geomeetriline progressioon $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$. Leida $S_1 = a_1 a_2 \ldots a_n$, teades, et

$$a_1+a_2+\ldots+a_n=S_2,$$

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}=S_3.$$

7. Lahendada võrrand

$$|z|-z=2+3i.$$

8. On antud mitteristuvad sirged $u$ ja $v$ lõikepunktiga $C$ ja nurgapoolitajaga $f$. Punktist $C$ tõmmatakse sirge $s \perp u$ ning võetakse sellel vabalt punkt $B$. Punktist $B$ tõmmatakse sirge $t \perp v$ ja sirge $d \parallel f$. Sirge $t$ lõikab sirgeid $u$ ja $f$ vastavalt punktides $A$ ja $F$ ning sirge $d$ sirget $v$ punktis $D$. Tõestada, et sirge $DF$ poolitab lõigu $AC$.

Ülesande koostas **O. Rünk** Tallinnast.

III

Järgnevate ülesannete lahendamiseks piisab artikli «Mis on tõenäosus?» materjalidest ning keskkooli matemaatikast.

1. Kuup, mille kõik küljed on värvitud, saetakse tuhandeks ühesuuruseks kuubiks, mis hoolikalt segatakse. Seejärel võetakse saadud hulgast üks juhuslik kuup. Leida järgnevate sündmuste tõenäosused (sündmuse $A$ vastandsündmus $\bar{A}$ toimub parajasti siis, kui sündmus $A$ ei toimu):
   $A_0$ — saadud kuup on värvimata külgedega,
   $A_1$ — saadud kuubil on üks külg värvitud,

$A_2$ — saadud kuubil on kaks külge värvitud,
$A_3$ — saadud kuubil on kolm külge värvitud,
$A_4$ — saadud kuubil on neli külge värvitud,

$$A_1 + A_2, \quad \bar{A}_0 + \bar{A}_1, \quad \bar{A}_4, \quad \bar{A}_1 + \bar{A}_2 + A_3, \quad A_1 . A_2, \quad A_1\bar{A}_2.$$

2. Laps mängib liikuva aabitsaga, mis sisaldab eesti tähestiku 23 tähte. Ta asetab juhuslikult valitud 5 tähte ritta vasakult paremale. Kui suur on tõenäosus selleks, et ta kogemata kirjutab oma nime MAIRE?

3. Sama laps mängib tähtedega AAAAEIKMMTT, neid juhuslikul viisil reastades. Kui suur on tõenäosus selleks, et ta kirjutab sõna MATEMAATIKA?

4. Seltskonnas on 5 noormeest ja 5 neidu, kes istuvad juhuslikus järjekorras ümber ümmarguse laua. Kui suur on tõenäosus selleks, et tekiks «kirju rida»?
   Igal noormehel on neidude hulgas oma sümpaatia. Kui suure tõenäosusega satuvad kõik noormehed oma neidude lauanaabriteks?

5. Olgu kaalutavate kehade raskus täisarvuline, ja muutugu 1-st 10 grammini, kusjuures kõigi raskuste esinemise tõenäosused on võrdsed. Millise kaaluvihtide valiku juures järgnevatest

   1, 2, 2, 5, 10;
   1, 2, 3, 4, 10;
   1, 1, 2, 5, 10;

   saame keskmiselt läbi väikseima arvu vihtide asetamisele kaalukausile, kui
   a) vihte on lubatud asetada ainult ühele kaalukausile;
   b) vihte on lubatud asetada mõlemale kaalukausile.

6. Mis on tõenäolisem, kas võita võrdse vastasega mängides
   a) 3 partiid 4-st või 5 partiid 8-st?
   b) vähemalt 3 partiid 4-st või vähemalt 5 partiid 8-st?
   c) ülimalt $n$ partiid $2n$ partiist või üle $n-1$ partii $2n$ partiist?
   d) ülimalt $n$ partiid $2n+1$ partiist või üle $n-1$ partii $(2n+1)$-st partiist?

## KOGUMIKU KUUENDA VIHIKU ÜLESANNETE LAHENDUSED

**Ülesande nr. 1 lahendus.** Kolmest suuremate algarvude jagamisel 24-ga saame jäägiks kas $\pm 1$, $\pm 5$, $\pm 7$ või $\pm 11$. Jäägiks ei saa olla $\pm 2$, $\pm 3$, $\pm 4$, $\pm 6$, $\pm 8$, $\pm 9$, $\pm 10$ või $\pm 12$, sest siis oleks jagatav kordarv. Seega saab kolmest suuremat algarvu esitada kujul $24n \pm 1$, $24n \pm 5$, $24n \pm 7$ või $24n \pm 11$. Ruutu tõstmisel saame $576n^2 \pm 48n + 1$, $576n^2 \pm 240n + 25$, $576n^2 \pm 336n + 49$, $576n^2 \pm 528n + 121$, mis jagamisel 24-ga annavad tõepoolest jäägi 1.

**Ülesande nr. 2 lahendus.** Lähtume sellest, et $11^{10} - 1 = 11^{10} - 1^{10} = (11-1)(11^9 + 11^8 + \ldots + 11 + 1)$, kus nii esimene kui ka teine tegur jaguvad 10-ga (teises teguris on 10 ühega lõppevat liidetavat). Seega $11^{10} - 1$ jagub $10^2$-ga.

Näitame nüüd, et $11^{10^2} - 1$ jagub $10^3$-ga. Tõepoolest, $11^{10^2} - 1 = (11^{10})^{10} - 1^{10} = (11^{10} - 1)[(11^{10})^9 + (11^{10})^8 + \ldots + 11^{10} + 1]$, kus esimene tegur jagub ülaltõestatu põhjal 100-ga ning teine tegur 10-ga.

Tuginedes võrdusele $11^{10^3} - 1 = (11^{10^2})^{10} - 1^{10}$ näitame, et $11^{10^3}$ jagub $10^4$-ga. Analoogiliselt edasi toimides jõuamegi lõpuks tulemuseni[1]:

$$11^{10^{1963}} - 1 \text{ jagub } 10^{1964}\text{-ga}.$$

---

[1] Otstarbekam on tõestuseks kasutada matemaatilist induktsiooni (vt. Matemaatika metoodiliste artiklite kogumik, I. Tln., 1963, lk. 11—17).

**Ülesande nr. 3 lahendus.** Kerge on näha, et inimene ei saanud sündida 19. sajandil. Siis oleks tema vanus üle 60 aasta, ent sünniaasta numbrite summa on vähem kui 60 (maksimaalselt 27, kui sünniaastaks oleks 1899).

Olgu inimese sünniaasta $\overline{19ab}$. Siis tema vanus 1962. aastal on

$$1962 - \overline{19ab} = 62 - 10a - b.$$

Ülesande tingimuse kohaselt

$$62 - 10a - b = 1 + 9 + a + b,$$
$$52 - 2b = 11a.$$

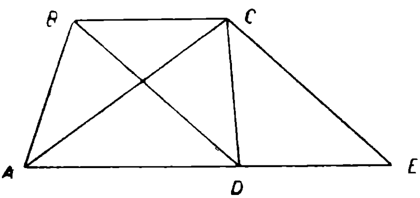
Kuna $52 - 2b$ peab jaguma 11-ga, siis $b = 4$ ning $a = 4$. Inimese sünniaasta on 1944.

**Ülesande nr. 4 lahendus.** Korrutades süsteemi teist ja kolmandat võrrandit vastavalt avaldistega $y + z$ ja $z + x$ ning lahutades seejärel teisest võrrandist kolmanda, saame $x = y$. Seega omandavad süsteemi kaks esimest võrrandit kuju

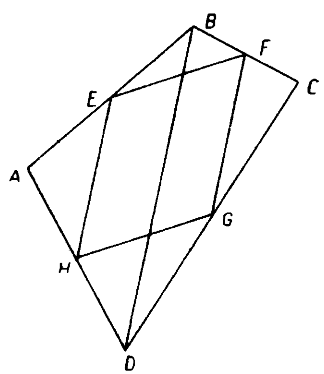
$$\begin{cases} \frac{x}{2} = 1 - z, \\ \frac{xz}{x + z} = 2 - x. \end{cases}$$

Selle süsteemi lahendamisel saame $x = 2$, $z = 0$. Seega on lähtesüsteemi lahend $x = 2$, $y = 2$, $z = 0$.

**Ülesande nr. 5 lahendus.** On antud trapetsi alus $a$, diagonaalid $e$ ja $f$ ning diagonaalidevaheline nurk $\alpha$. Joonestame nurga $ACE$ nii, et $\angle ACE = \alpha$, $AC = e$, $EC = f$. Lõigule $AE$ kanname lõigu $AD = a$. Joonestame lõigu $DB$ nii, et $DB \parallel EC$ ja $DB = EC$. Nelinurk $ABCD$ ongi nõutav trapets.




**Ülesande nr. 6 lahendus.** Olgu nelinurga $ABCD$ külgede keskpunktid $E$, $F$, $G$, $H$. Kuna $EH$ on $\triangle ABD$ kesklõik ja $FG$ on $\triangle BCD$ kesklõik, siis $EH \parallel BD$ ja $FG \parallel BD$, s. o. $EH \parallel FG$. Samal teel näitame, et $EF \parallel HG$. Et nelinurga $EFGH$ vastasküljed on paralleelsed, siis on ta rööpkülik.




**Ülesande nr. 7 lahendus.** Ülesande esimese tingimuse põhjal

$$a^3 + b^3 = (a + b)c^2,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - ab.$$

Järelikult koosinusteoreemi põhjal

$$2\cos\gamma = 1,$$
$$\gamma = 60°,$$
$$\alpha + \beta = 120°.$$

Ülesande teise tingimuse põhjal saame $\alpha$ leidmiseks võrrandi

$$\sin\alpha\cdot\sin(120^\circ-\alpha)=\frac{3}{4},$$

$$\sin\alpha\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha+\frac{1}{2}\sin\alpha\right)=\frac{3}{4}(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha).$$

Jagades võrrandi mõlemaid pooli $\cos^2\alpha$-ga, saame

$$\tan^2\alpha-2\sqrt{3}\tan\alpha+3=0,$$

$$\tan\alpha=\sqrt{3},$$

$$\alpha=60^\circ.$$

Seega ka $\beta=60^\circ$ ning kolmnurk $ABC$ on võrdkülgne.

**Ülesande nr. 8 lahendus.** Rakendame võrde omadust:

$$\text{kui } \frac{a}{b}=\frac{c}{d}, \text{ siis } \frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}.$$

Selle põhjal

$$\frac{2\sqrt[3]{(a+x)^2}}{2\sqrt[3]{(a-x)^2}}=\frac{c+1}{c-1},$$

millest

$$x=a\frac{\sqrt{(c+1)^3}-\sqrt{(c-1)^3}}{\sqrt{(c+1)^3}+\sqrt{(c-1)^3}}.$$

**Ülesande nr. 9. lahendus.** Olgu kolmnurga külgede pikkused $a$, $b$ ja $c$, kusjuures $a>b>c$. Siis

$$2a>b+c>a>b-c>0,$$

millest järeldub, et $b+c$ ning $b-c$ ei jagu $a$-ga.

Koosinusteoreemi põhjal

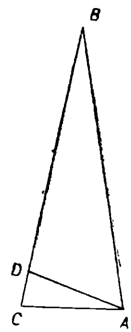
$$b^2=a^2+c^2-ac,$$

$$(b+c)(b-c)=a(a-c);$$

seega $b+c$ ja $b-c$ korrutis jagub $a$-ga. Järelikult arv $a$ on kordarv.

**Ülesande nr. 10 lahendus.** Joonestame lõigu $AD$ nii, et $\angle DAC=20^\circ$. Kolmnurkade $ABC$ ja $CAD$ sarnasuse põhjal

$$\frac{DC}{a}=\frac{a}{b},\qquad DC=\frac{a^2}{b}.$$




Seega $BD=b-\frac{a^2}{b}$. Nüüd saame koosinusteoreemi põhjal

$$BD^2=AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cos 60^\circ,$$

$$\left(b-\frac{a^2}{b}\right)^2=b^2+a^2-ab,$$

$$b^2-2a^2+\frac{a^4}{b^2}=b^2+a^2-ab,$$

$$a^3+b^3=3ab^2.$$

**Ülesande nr. 11 lahendus.** Kuna

$$r=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}},\qquad R=\frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}},$$

siis

$$rR = \frac{abc}{4p}, \quad 4prR = abc.$$

Arvestades, et

$$a + c = 2b,$$

$$p = \frac{3}{4}(a + c),$$

saame

$$4 \cdot \frac{3}{4}(a + c) rR = ac \cdot \frac{a + c}{2},$$

$$6rR = ac.$$

**Ülesande nr. 12 lahendus.** Kui iga pioneer sai $y$ pähklit, siis

$$\left(\frac{3x + 7}{2}\right)^2 = xy + 18,$$

$$9x^2 + 42x + 49 = 4xy + 72,$$

$$x(9x - 4y + 42) = 23.$$

Kuna ülesande tingimuse kohaselt $x > 18$, siis

$$\begin{cases} x = 23 \\ 9x - 4y + 42 = 1. \end{cases}$$

Siit leiame, et $y = 62$.

Õiged lahendused saatsid V. Sillaste Räpinast (ülesanded nr. 1, 3, 6, 7, 12), R. Hussar Türilt (ülesanded 1, 3, 5, 6) ja T. Kollo Orissaarest (ülesanded nr. 1, 4, 5, 6, 12).

Kogumiku kuuendas numbris lk. 51 avaldatud ülesannetele saatis lahendused R. Hussar, kuid teise ülesande lahenduses on leitud neljast ülesannet rahuldavast 22-kohalisest arvust ainult kolm. Ülesande vastuseks on arvud

2 173 913 043 478 260 869 565,
4 347 826 086 956 521 739 130,
6 521 739 130 434 782 608 695,
8 695 652 173 913 043 478 260.

(ülesandel on lõpmata palju lahendeid, milledest vähimateks on ülaltoodud neli arvu.)

## SISUKORD

Тартуский государственный университет
г. Тарту, ул. Юликооли, 18

МАТЕМАТИКА И СОВРЕМЕННОСТЬ. IX

Вспомогательные материалы для преподающих
и изучающих математику

Toimetaja E. Tiit
Korrektor E. Võhandu

Ladumisele antud 1. X 1965. Trükkimisele antud 20. I 1966. Paber 60 × 90, 1/16. Trükipoognaid 7,25 + 1 kleebis. Arvestuspoognaid 8,3. Trükiarv 3500. MB-00249. Tellimise nr. 7471. Hans Heidemanni nim. trükikoda. Tartu, Ülikooli 17/19. II.

Hind 35 kop.

2—2