Matemaatika ja kaasaeg

TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

MATEMAATIKA JA KAASAEG

VIII

ABIMATERJALE MATEMAATIKA ÕPETAJATELE JA ÕPPIJATELE

TARTU 1965

На эстонском языке
Тартуский государственный университет
г. Тарту, ул. Юликооли, 18
МАТЕМАТИКА И СОВРЕМЕННОСТЬ. VIII.
Вспомогательные материалы для преподающих и изучающих математику
Toimetaja H. Türnpu
Korrektor E. Võhandu

Ladumisele antud 13. VII 1965. Trükkimisele antud 11. XII 1965. Paber 60 × 90, 1/16. Trükipoognaid 7 + 1 kleebis. Arvestuspoognaid 8,1. Trükiarv 2500. MB-11711. Tellimise nr. 5742.

Hans Heidemanni nim. trükikoda, Tartu, Ülikooli 17/19. II

Hind 35 kop.

MATEMAATIKA JA TEGELIKKUS

R. Mullari

Selleks, et midagi väita, peab arheoloog teostama väljakaevamisi, uurima vanu ürikuid, koguma ja läbi töötama suurel hulgal faktilist materjali. Samuti keemik, füüsik, filoloog, meedik, botaanik — kõik nad peavad oma väidetele kinnitust otsima tegelikkusest kogutud faktilisest materjalist: kes siis laboratooriumis teostatud katsetest, kes rahva kõnepruugist, kes haiguslugudest jne. jne. Ja siiski ei või nad kunagi absoluutse kindlusega öelda, et see või teine asi on täpselt nii ja ei mitte mingil juhul teisiti. Nii ei ole ükski arst suuteline kõigis üksikasjades täpselt ära määrama mõne ravimi toimet, samuti nagu ühelgi ajaloolasel ei ole võimalik täpselt kirjeldada mineviku sündmuste kulgu. Kõik nende väited on seotud teatava ligikaudsusega, tõenäosusega.

Samal ajal on aga matemaatikul põhimõtteliselt võimalik teostada oma uurimusi ainult pliiatsi ja paberi abil, igasugust konkreetset faktilist materjali kasutamata. Ja sellest hoolimata on tema väited absoluutselt ümberlükkamatud, ranged. Nii on elementaarmatemaatikas kaks ja kaks neli ning kolmnurga sisenurkade summa 180° ja ei kübetki vähem ega rohkem.

Matemaatika sellised iseärasused on juba ammu köitnud inimeste tähelepanu. Küll on siis matemaatikat peetud kõigi teaduste aluseks, küll ainsaks tõe tunnetamise vahendiks. Tõe ja tunnetusteooria küsimuste uurimisel on matemaatikal eraldi peatunud silmapaistvamad filosoofid antiikajast alates. Pythagoras pidas kõige aluseks maailmas arvu ja Platon ei lasknud oma kooli kedagi, kes ei mõistnud geomeetriat. K. Marxi tuntud ütluse kohaselt saavutab teadus alles siis täiuslikkuse, kui tal avaneb võimalus matemaatika kasutamiseks.

Ei ole midagi imestada, et just matemaatika isärasustest lähtudes võidakse teha sügavalt idealistlikke järeldusi, nagu oleks võimalik tõde tunnetada ainult mõtlemise abil, eitada praktika määravat osa tunnetusprotsessis.

Kaasajal, mil toimub matemaatika laialdane rakendamine üha rohkematel inimtegevuse aladel, muutuvad matemaatika erijoontega seotud küsimused järjest aktuaalsemaks. Üha suuremal hulgal teadlastel on oluline teada matemaatika kohta teiste teaduste seas, tunnetusprotsessis üldse, matemaatika suhet tegelikkusega. Vastasel korral võib matemaatikale rakendusvõimalusi otsides näha ebaõigete arusaamade tõttu palju tarbetut vaeva põhimõtteliselt lahendamatute probleemide «lahendamisel», alustada mitmete vaimse tegevuse alade «matematiseerimist» hoopis ebaõigest küljest, aga ka jätta paljud soodsad võimalused kasutamata. Seetõttu on matemaatika enda sisu õppimise kõrval vajalik püüda selgusele jõuda ka tema «välistes» probleemides. Käesolevas artiklis püütaksegi sel teemal jõudu mööda mõtteid arendada. Et käsitletavad probleemid on veel küllalt diskussioonilist laadi, siis võib ainult päri olla sellega, kui edaspidi ka juba lugeja haarab sule.

Alustame järgmisest võib-olla veidi liiga stiliseeritud näitest. Olgu meil kaks isikut A ja B, kellest A peab ajavahemiku ΔT jooksul kirjeldama isikule B nähtust Ω, mille omadusteks on o_1, o_2, o_3, ... (dialektika õpetab, et igal reaalsel nähtusel on lõpmata palju omadusi). Kui A kirjeldab ΔT jooksul n omadust o_1, o_2, ... , o_n, siis kasutab ta ühele omadusele keskmiselt ajavahemiku $\Delta t = \frac{\Delta T}{n}$. Mida suurem on n, seda terviklikuma pildi nähtusest Ω saab B, ja mida väiksem on n, seda ühekülgsema. Mida suurem on Δt, seda üksikasjalikumalt, täpsemalt saab A kirjeldada Ω üksikuid omadusi, ja mida väiksem on Δt, seda pealiskaudsemalt, ebatäpsemalt. Et suurused n ja Δt on pöördvõrdelised, siis on siin ühelt poolt tegemist terviklikkuse ja vähese täpsusega, teiselt poolt aga ühekülgsuse ja suure täpsusega. Kumba eelistada? Kus on «kuldne kesktee»?

Konkreetsuse mõttes võime nähtuseks Ω võtta mingi eseme; olgu selleks näiteks õhupall. Siis A võib ütelda, et Ω on keskmise suurusega, ümmargune, kerge, sinine, läikiv, elastne. Aga samuti võib ta ütelda, et Ω on ellipsoid telgedega 28, 25 ja 22 cm, 2,3 g raske. Esimesel juhul saab B õhupallist küllaltki ebamäärase, teisel juhul aga ühekülgse pildi. Seevastu on esimesel juhul pilt küllaltki terviklik, teisel juhul — täpne.

Selline vastandlikkus terviklikkuse ja täpsuse vahel ei iseloomusta kaugeltki mitte ainult esitatud näidet, vaid ta mõjusfäär on tunduvalt laiem, läbides punase joonena peaaegu et kogu inimtunnetuse. Ikka on nii, et mõne konkreetse, tegelikkusest võetud probleemi tundmaõppimiseks on meie võimalused piiratud, ja peame neid jaotama terviklikkuse ning täpsuse vahel, kusjuures ühte on võimalik saavutada teise, teist aga esimese arvel.

On loomulik, et nähtuste ebatäpsel (kuid see-eest terviklikul) kirjeldamisel tuleb kasutada ebatäpseid, paindlikke (s. o. rangelt fikseerimata tähendusega), samuti aga ka mitmetähenduslikke ja ülekantud tähenduses kasutatavaid mõisteid. Tarvitseks vaid ette kujutada vastupidist olukorda, kus igal sammul tuleks rangelt silmas pidada näiteks seda, et «palju» tähendab «vähemalt 1003», et «metsaga kaetud» tähendab «vähemalt 0,022 m^3 kasvavat puitu keskmiselt ühe m^2 kohta», et «ilus» tähendab... ! On ilmne, et nii peaksime suure osa oma energiast ja ajast kulutama kasutatavate mõistete definitsiooni täidetuse kontrollile, paljudel juhtudel jääksime aga vastavate rangelt defineeritud mõistete puudumise tõttu tõsistesse raskustesse. Teisest küljest on aga selge, et nähtuste omaduste täpsel kirjeldamisel tuleb kasutada ka vastavaid täpselt, rangelt fikseeritud tähendusega mõisteid.

Kui *A* ütles õhupalli kohta, et see on keskmise suurusega, ümmargune, kerge jms., siis tähenärijalikult võttes ei öelnud ta ju peaaegu mitte midagi. Suurem osa esemeid võib vist olla mõnes mõttes «keskmise suurusega», «kerged» vms. Et isikul *B* sellest hoolimata tekiks õhupallist mingisugune konkreetne ja veidigi õige ettekujutus, peame eeldama, et ta ei ole «päris rumal». Isik *B* peab oma kõigi varasemate kogemuste ja teadmiste baasil ise taipama, millises proportsioonis ta loetletud omadused tervikuks sünteesib, aimama, mis tähenduses *A* võis kasutada mõisteid «keskmise suurusega» jt.

Üldiselt võiks ehk öelda, et tunnetamine paindlike, ebamääraste mõistete abil eeldab teatavat «elutarkust». Sellist lisaeeldust ei ole aga tarvis teha tunnetamise kohta täpsete, rangelt fikseeritud tähendusega mõistete abil (kui mitte lugeda «elutarkuseks» kasutatavate mõistete definitsiooni tundmist). Kui *A* ütleb, et Ω on ellipsoid telgedega 28, 25 ja 22 cm, saab isik *B* seda ainult üheselt tõlgendada, ilma et tal oleks oma kõigi varasemate kogemuste ja teadmiste abil tarvis nuputada, mida just *A* selle all mõtles. Piisab tunda numbreid, teada sümboli «cm» ning sõnade «ellipsoid» ja selle «telg» tähendust.

Näitena ebamääraste mõistete rakendamise tugevatest külgedest võiks tuua vist kõik vanasõnad, kõnekäänud ja aforismid. Kui hakata neis kasutatavaid mõisteid rangelt piiritlema ja defineerima, asenduksid nad lõputute (kuigi põhjalike ja asjalike) aruteludega, nende tabavuse ilust ei jääks aga kivi kivi pealegi. Siin on eriti selgesti näha, kuidas just mõtete ebamäärane formuleering võimaldab varasemate kogemuste baasil talletada neisse määratu sisurikkuse. Sellega saavutatakse aga otse erakordne väljenduse ratsionaalsus, lakoonilisus.

Teisest küljest on aga selge, et paindlikele, ebamäärastele mõistetele ei saa tugineda vasturääkivustevabad mõttekonstruktsioonid. Kui me hakkame puhtmõtteliselt edasi arendama ebamääraselt formuleeritud tõdesid, põimides neid omavahel ja andes neile üha uusi vorme, satume peagi ületamatutesse vastuoludesse, loogilistesse vasturääkivustesse ja kaugeneme järelikult tõest. On ju loogilistest vasturääkivustest hoidumiseks tarvilik jälgida formaalse loogika reegleid. Ebamääraste mõistete rakendamise korral ei ole neist täidetud aga kõige elementaarsemgi, s. o. samasuse seadus $S = S$. Kui me täpselt ei tea, mis sisu me mõistele S anname, kuidas võime siis garanteerida, et mõiste S sisu arutluse käigus ei muutu!

Teistsugune on olukord rangelt fikseeritud tähendusega mõistete korral. Siin on formaalse loogika reeglid rakendatavad oma täies jõus ja seetõttu on põhimõtteliselt võimalik ehitada loogilistest vastuoludest vabu kuitahes komplitseeritud mõttekonstruktsioone. Paraku ei tähenda aga loogiline õigsus veel mõtte tõesust, s. o. tema vastavust tegelikkusele. Kui me ka kuitahes suure täpsusega suudaksime fikseerida mõnede nähtuste üksikud omadused ja hakkasime nende abil mõtteliselt uurima nähtustevahelisi seoseid, siis, sõltumatult arutluste loogilisest õigsusest, kaugeneksime ajapikku ikkagi tõest. Sel korral oleks põhjuseks asjaolu, et nähtustevahelised seosed sõltuvad mitte ainult nähtuste üksikutest, vaid kõigist omadustest, mida on lõpmatult palju. Võimalikult rohkemate omaduste arvestamine tingib aga mitte päris rangete mõistete kasutamist ning viib seetõttu pikapeale tõest kaugenemisele kasvõi näiteks loogika vastu patustamise tõttu.

Kokkuvõttes tähendab see aga tuntud tõde, et tunnetusprotsess peab tingimata olema kolme-etapiline: elav kaemus — abstraktne mõtlemine — kontroll praktikas. Praktikast võetud andmed töötatakse läbi abstraktse mõtlemisega, tulemuste tõesust tuleb aga jällegi praktikas kontrollida ja täpsustada. Me ei ole suutelised saavutama seda, et mõtteprotsessi tulemused vastaksid tegelikkusele täielikult, s. o. oleksid absoluutselt tõesed. Küsimus on aga selles, kuidas teostada puhta mõtlemisega võimalikult pikka «õhulendu», et selle tulemused veel enam-vähem tõesteks jääksid, oleksid praktika andmetel korrigeeritavad, ehk lihtsamalt öeldes, et neist veel midagi kasu oleks. Ja siin on väga oluline õige kursi valimine kahe äärmusliku pooluse vahel, millest üks kujutab tõest eemaldumist ebaloogilisuse, teine aga — nähtuste ühekülgse kujutamise tõttu. Et need poolused on otseselt seotud kasutatavate mõistete täpsuse küsimusega, võib öelda, et mingi konkreetse ülesande lahendamisel kasutatavate mõistete määratluse rangus peab sõltuma esmajoones sellest, kuivõrd mõjutab antud juhul tulemuste tõesust ühelt poolt arutluste ebaloogilisus või teiselt poolt lähenemisviisi ühekülgsus.

Kui peame mõtteliselt lahendama näiteks küsimuse, kas meile juba tuttav õhupall on võimeline õhku tõusma või mitte, aitab meid vähe teadmine, et ta on keskmise suurusega, ümmargune, kerge, sinine, läikiv ja elastne. Siin on esmajoones tarvis teada, et see õhupall on ellipsoid telgedega 28, 25 ja 22 cm ning seejuures 2,3 g raske. Vastupidine on olukord, kui otsustame, kas õhupall sobib lastele mänguasjaks.

Ja nüüd siis matemaatika juurde. Mida võib ülalesitatu põhjal öelda? Matemaatikas kasutatavad mõisted on rangelt määratletud, täpsed. Siin ei esine mitmetähenduslikkust ega ülekantud tähenduses kasutamist, vaid iga mõiste korral peab täpselt teada olema, mis tähenduses seda kasutatakse. Kui ütleme «ellips», siis on ka «ellips», s. o. «tasandi nende punktide geomeetriline koht, mille kauguste summa tasandi kahest kindlast punktist on konstantne». Kui ütleme, et «$a > b$», siis mitte mingil juhul ei kehti seosed «$a = b$» või «$a < b$». Isegi mõistet «peaaegu kõikjal» kasutatakse matemaatikas rangelt fikseeritud tähenduses. Sellest tulenevalt asub matemaatika abstraktse tunnetuse ühel äärmisel poolusel — täpsel ja ühekülgsel. Üldse on lugu nii, et kui meil on rida rangelt fikseeritud tähendusega mõisteid ja seoseid ning opereerime nendega ranges vastavuses formaalse loogika seadustega, tunnistades «tõesteks» nii ja ainult nii saadud järeldused, siis ei näi olevat mingit põhjust, mis ei lubaks seda kõike matemaatikaks nimetada. Asja sellisel mõistmisel ühtib matemaatika parajasti sellega, mis on abstraktse tunnetuse ühel äärmisel, s. o. täpsuse ja ühekülgsuse poolusel.

Niisuguselt seisukohalt oleme suutelised seletama artikli alguses kirjeldatud näilise paradoksi: ühelt poolt matemaatika eemaldumine tegelikkusest, teiselt poolt tema väidete ümberlükkamatus — paradoksi, mis on olnud aluseks paljudele idealistlikele järeldustele tunnetusteoorias.

Eespool me märkisime, et loogiline vasturääkimatus ei tähenda veel tõesust, s. o. vastavust tegelikkusele. Matemaatikas aga, vastupidiselt tunnetusteooriale, kasutatakse mõistet «tõde» just esimeses tähenduses. Kui vaadata meie poolt artikli alguses toodud näidet «$2+2=4$», peab selle tunnetusteoreetilise tõesuse selgitamiseks vaatama ka, mis talle tegelikkuses vastab. Seadnud mõlemale arvule «2» vastavusse mingi kaheelemendilise hulga, peame andma reaalse sisu ka operatsioonile «$+$». Vastasel korral liidaksime hulka ainult oma peas, s. o. mõtteliselt, ja sellele ei vasta tegelikkuses midagi. Kui aga operatsioon «$+$» all mõista mingit konkreetset reaalset protsessi, mille kestel mingid kaks kaheelemendilist hulka ühinevad, siis ei tarvitse tulemuseks sugugi olla alati neljaelemendiline hulk. Sellistel juhtudel saame aga, et $2+2 \neq 4$. Võib ju näiteks perekonna teketki sageli kujutada protsessina $1+1=3$.

Siit aga näeme, et matemaatiliste tõdede absoluutse ümberlükkamatuse oreool võib kehtida ikkagi ainult matemaatika enda piires, tegelikkusele rakendatuna osutuvad nad tavalisteks ligikaudseteks, relatiivseteks tõdedeks. Selle põhjuseks on asjaolu, et matemaatilised arutelud, kuigi loogiliselt õiged, ei arvesta kunagi kogu tegelikkuses esinevat mitmekesisust. Sellest abstraheerutakse juba ülesande matemaatilise formuleerimise ajal.

Oleme niisiis jõudnud arvamusele, et matemaatika kujutab endast abstraktse tunnetuse üht äärmist poolust. Samuti oleme selgitanud matemaatiliste tõdede tõesuse küsimust. Nüüd oleks aeg selgitada ka matemaatika kui teaduse ainet. Seda tuleks teha kasvõi traditsiooni pärastki, sest iga teaduse määrab esmajoones (või ainult!) ikkagi tema aine, see, mille uurimisega vastav teadus tegeleb. Praegu oleme küll natuke isesuguses olukorras, sest oleme, vähemalt endi arvates, juba üldjoontes selgitanud, mis matemaatika on. Järelikult tuleb matemaatika aine määrata nii, et matemaatika jääks selleks, mis on juba öeldud, ent vastavalt aine määramisele muutuks samaaegselt teaduseks.

Niisiis, mida on võimalik uurida ainult rangelt fikseeritud tähendusega mõistete abil, kusjuures loogilist vasturääkimatust võib lugeda samaväärseks tõe kriteeriumiga? Eespool nägime, et reaalseid nähtusi saab rangelt fikseeritud tähendusega mõistete abil uurida ainult siis, kui võtta vaatluse alla vaid suhteliselt väike arv nende omadusi. Sel juhul on aga paratamatu uurimistulemuste teatav ebatõesus, mistõttu nad vajavad kontrolli ja parandamist praktikas. Järelikult ei saa reaalsed nähtused olla matemaatika kui teaduse aineks, kuidas see meile ka võib-olla ei meeldiks. Matemaatika kui teaduse aineks saavad olla ainult rangelt fikseeritud omadustega abstraktsed objektid, ehk — mis näib olevat samaväärne — kõik, mille uurimist on võimalik teostada ainult formaalse loogika abil.

Sageli peetakse väidet, et matemaatika ei uuri tegelikkust, idealistlikuks. Pigem võiks aga idealistlikuks pidada vastupidist väidet, sest materialismi järgi ei ole tegelikkust võimalik tundma õppida ainult mõtlemise abil, tunnetusprotsessi kolmanda etapita, s. o. mõtlemistulemuste praktilise kontrollita. Viimast aga matemaatika mitte ainult ei eelda, vaid isegi välistab. Ei nimetata ju mingil juhul matemaatikaks seda, kui näiteks kolmnurga pindala valem võetakse «kontrollimisele» ja «parandamisele» papist väljalõigatud kolmnurkade pindalade mõõtmise teel!

See, et matemaatika ise tegelikkust ei uuri, ei tähenda aga kaugeltki seda, et teda ei saa tegelikkuse uurimisel kasutada. Matemaatika rakendatavus kõige mitmesugusematel teadusaladel tulenebki just sellest, et ta ei ole seotud mingite kindlate tegelikkuses esinevate objektide või seaduspärasustega, vaid hõlmab terve pooluse abstraktsest tunnetusest.

Matemaatik näiteks ei uuri maakera kuju. Seda teeb geodeet, kasutades sealjuures tulemusi, mida matemaatik on saanud maakera kujuga teataval määral sarnaste abstraktsete objektide uurimisel. Analoogiline vahekord valitseb ka matemaatiku ja füüsiku, matemaatiku ja astronoomi jt. vahel. Siinkohal tuleb aga silmas pidada, et kui matemaatik midagi absoluutse kindlusega väidab, siis niimoodi see kehtib ikkagi ainult tema poolt uuritavate abstraktsete objektide kohta. Tegelikkuse kohta on väide ainult ligikaudne.

Nii võib matemaatik absoluutse täpsusega lahendada mingi võrrandi, mis kirjeldab elektronide olekuid. Füüsik kontrollib tulemusi praktikas ja selgitab välja lahkuminekud tegelikkusest. Nendest lähtudes koostab füüsik võrrandi, mis juba paremini kirjeldab elektronide olekuid. Selle võrrandi võib matemaatik jälle absoluutse täpsusega lahendada jne.

Kui vaadelda näiteks Newtoni mehhaanikat, siis matemaatilisest küljest on see täiesti täpne ja õige, füüsikalisest küljest aga teatavasti — ligikaudne.

Näiteks võiks tuua ka reaalse maailma nähtuste vaheliste ruumiliste suhete uurimise. Nende suhete küllaltki heaks matemaatiliseks mudeliks osutub kolmemõõtmeline eukleidiline geomeetria. See mudel on niivõrd hea, et kaua aega samastatigi nähtustevaheliste ruumiliste suhete uurimist kolmemõõtmelise eukleidilise geomeetria arendamisega. Kuid ruumilised suhted ei saa olla orgaaniliselt sõltumatud kõikidest muudest suhetest nähtuste vahel ja järelikult ka kuitahes suure täpsusega iseseisvalt uuritavad. Selle tõsiasja mitteteadmine viis möödunud sajandi lõpus füüsika paradoksaalsete tulemusteni. Nendest näitas väljapääsu Albert Einstein, kes oma erirelatiivsusteooriaga selgitas reaalsete nähtuste ruumiliste ja ajaliste suhete vahelise seose. Sobiva matemaatilise mudeli nende suhete kompleksseks uurimiseks — neljamõõtmelise pseudoeukleidilise geomeetria andis seejärel Hermann Minkowski. Edasi selgitas Einstein oma üldrelatiivsusteooriaga juba ka ruumi, aja ja gravitatsiooni omavahelise seose ja andis nende kompleksseks uurimiseks vastava matemaatilise mudeli — teatavat liiki neljamõõtmelise kõvera ruumi geomeetria. On selge, et füüsikalises mõttes ei saa aga ka üldrelatiivsusteooria olla absoluutselt täpne, sest reaalsete nähtuste vahel on lõpmatult palju üksteisest sõltuvaid erinevat liiki suhteid.

Eespool jõudsime arvamusele, et vead, mida tehakse matemaatika tulemuste vahetul ülekandmisel tegelikkusesse, tulenevad esmajoones matemaatilise lähenemisviisi ühe- (õigemini vähe-) külgsusest. Seetõttu on matemaatikat sobiv rakendada selliste probleemide lahendamisel, kus on välja eraldatavad mõned olulised küljed, ülejäänud lõpmatu hulga ebaoluliste külgede koosmõju on aga tühine. Kuna dialektika aga õpetabki, et igas vastuolus on põhivastuolu, igas probleemis aga keskne probleem, siis saab arusaadavaks matemaatika rakendatavus kõige mitmesugusemates vaimse tegevuse aladel. Ainult et see rakendamine ei saa olla absoluutne, mistõttu ükski tegelikkust uuriv teadus ei ole täielikult «matematiseeritav». Matemaatika on nendes teadustes rakendatav ainult piiratud ulatuses kui abstraktse tunnetuse üks äärmisi pooluseid.

Mis puutub elektronarvutite kasutuselevõtmisse, siis see kahtlematult kvalitatiivne hüpe matemaatiliste meetodite kasutamises ei muuda sugugi olukorda põhimõttelisest küljest. Iga arv, ka kuitahes suur, on ikkagi lõplik. Sellest tulenevalt ei saa ka elektronarvutite suurt võimsust täielikku vastavusse seada tegelikkuse lõpmatu mitmekesisusega. Kui vaadata eespool toodud näidet nähtuse Ω kirjeldamisest, siis elektronarvutite kasutamine võimaldab üksikute omaduste o_i kirjeldamisel nõutava «täpsusklassi» saavutamiseks tunduvalt vähendada vajalikku keskmist ajavahemikku Δt ning järelikult suurendada kirjeldatavate külgede arvu n. Täpne kirjeldamine muutub terviklikumaks, vähem ühekülgseks, kuid ikkagi ainult lõplik arv korda.

Lõpuks tuleks mõnede võimalike vastuväidete ennetamiseks öelda veel järgmist. Sageli viidatakse väite, et matemaatika uurib tegelikkust, kaitsmisel matemaatiliste abstraktsioonide päritolule reaalsusest. Mõiste «sirge» on ilmselt tuletatud valguskiire ja pinguletõmmatud nööri, «tasand» aga veepinna jälgimisest. Muidugi on see nii, kuid küsimuse võib seada järgmiselt: kas matemaatika ise nõuab, et see nii oleks? Mitte midagi taolist! Matemaatika ei esita ühtegi küsimust oma mõistete päritolu kohta. Kui nad aga reaalsusest pärit on, siis selle selgitamiseks võiks esile tuua järgmisi matemaatikaväliseid põhjusi.

Meie fantaasia toitub ikkagi tegelikkusest. Nähtavasti ei ole me lihtsalt suutelised ette kujutama omadusi, mille taolisi me varem kuskil ei ole kohanud, näiteks mõnda täiesti uut liiki värvi, heli või lõhna. Aga see on juba psühholoogia küsimus ega puuduta matemaatikat. Liiatigi on inimfantaasia suuteline tegelikkuses esinevaid omadusi sellisteks kujutlusteks sünteesima, millele tegelikkuses enam vasteid ei leidu, näiteks kentaurideks, ingliteks, kuraditeks jts. (Sellepärast ta ju ongi fantaasia!). Loomulikult suudame me siis koostada ja uurida ka selliseid rangelt fikseeritud omadustega (kuigi reaalsusest tuletatutega) abstraktseid objekte, millele tegelikkuses sarnaseid ei leidu (või ei ole veel leitud).

Tuleb arvestada ka, et inimene on ikkagi elav ja ühiskondlik olend, kellele elu igal sammul üha uusi ja uusi ülesandeid seab. Ja on täiesti loomulik, et inimene ise püüab oma teaduslikke uuringuid suunata elu antud ülesannete lahendamisele või et ta on otse sunnitud seda tegema. Matemaatikas avaldub see püüdes koostada uuritavaid abstraktseid objekte nii, et nad kajastaksid meid huvitavaid reaalseid objekte. Kuid see ei ole jällegi matemaatika, vaid elu nõue.

Sageli võivad matemaatikas uuritavad abstraktsed objektid osutuda sarnasteks teatavatele reaalsetele objektidele ka täiesti ettekavatsematult, s. o. juhuslikult. On ju tegelikkus lõpmatult mitmekesine ja seesmiselt ühtne. Võib tuua näiteid, kus nii mõnigi matemaatiline teooria, mille arendamine tundus esialgu tema näilise «eluvõõrsuse» tõttu olevat ligikaudu võrreldav abstraktse kunsti harrastamisega, osutus hiljem hädavajalikuks vahendiks uute tegelikkusest väljakasvanud ülesannete lahendamisel. Selline matemaatilise ja reaalse objekti, võiks öelda, juhuslik sarnasus ei ole aga jällegi ilmselt matemaatikast tulenev nõue.

Ja kui me ka nõustuksime väitega, et kõigil matemaatikas uuritavatel objektidel on prototüübid tegelikkuses ja et matemaatika ise nõuab seda, tähendaks see ikkagi ainult matemaatika tegelikkuses rakendatavuse rõhutamist. Teadus uurib ju ikkagi seda, mille kohta ta midagi väidab. Matemaatika absoluutsed väited ei saa aga kehtida tegelikkuse kohta, nagu ülalpool juba korduvalt näitasime. Iseasi, kui matemaatika rangeid tõdesid kasutada mitteranges tähenduses. Kuid siis ei ole see enam matemaatika!

MÕNINGAID V. V. GOLUBEVI MÕTTEID.

Vladimir Vassiljevitš Golubev (1884—1954) — tuntud nõukogude matemaatik ja mehhaanik — oli professoriks Moskva Ülikoolis ja H. J. Žukovski nimelises Sõja-Õhujõudude Akadeemias. Aastal 1934 valiti ta NSVL TA korrespodentliikmeks ning alates 1943. aastast oli ta Vene NFSV teeneline teadlane. V. V. Golubevi põhilised teaduslikud tööd kuuluvad aeromehhaanika ja kompleksmuutuja funktsioonide teooria valdkonda.

Alljärgnevad mõttekillud on võetud tema õpilase prof. A. A. Kosmodemjanski raamatust «Очерки по истории механики», M., 1964, lk. 385—408.

«Ärge võtke endale iseseisvaks loominguliseks tööks kohe liiga rasket ülesannet. Isegi siis, kui te olete väga andekas, tuleb teil õppida oma talenti rakendama uue loomiseks. Tuleb, nagu öeldakse, «teritada hambaid» kergema materjali varal.»

*

Vestlus aspirandiga 1932. aastal.

«Noh, kuidas läheb?» — «Halvasti.»

«Miks?» — «Mitte midagi ei tule välja, Vladimir Vassiljevitš.»

«No kas te siis mõtlete, et dissertatsiooni kirjutada on sama lihtne kui lõunatada. Istusite laua taha ja valmis. Ei! Loominguline töö ei ole niisugune. Tuleb mõelda visalt iga päev. Analüüsige oma teema põhiküsimusi nii raamatukogus kui trammis. Tuleb jõuda selleni, et teie töö oleks nagu haige hammas, millele te ei tahaks küll mõelda, kuid mis ikkagi meenutab end. Vaat siis tuleb teil välja!»

*

«Armastage teadust ja rühkige alati edasi. Kas või vähehaavalgi, kuid ikka edasi. Kui teaduslik töö on teile nagu kittel, mille te panete selga kaheksaks tunniks päevas ja mille te seejärel meeleldi ära võtate — mõelge siis järele ja otsige enesele teine elukutse.»

*

«Te küsite, miks professor N peab halvasti loenguid? Ta ju jutustab teile kõik, mida ta teab. Kuid seda ei tohi teha. Loenguks tuleb kriitiliselt välja valida kõige olulisem, kõige parem. Piirake materjali hulka. Ega te ju ajakirjadeski ei trüki kõike, mida mõtlete. Kas pole õige?»

*

V. V. Golubevi arvates peaksid tulevased kõrgemate koolide õppejõud algul õpetama keskkoolis, et seal õppida õpetamise metoodikat. «Kõrgem kool ei anna ega saagi anda oma töötajatele õpetamise metoodikat. Kogu loengu pidamise metoodika ülikoolis võib võtta kokku lausesse «tunne oma ainet ja esita seda selgesti». Kuid esitamise selgus — see on suur ja keeruline kunst, mida ei omandata kaugeltki kohe. Kõige paremini sunnib seda kunsti omandama keskkool.»

ELEMENTAARFUNKTSIOONIDEST

S. Baron

Matemaatilises analüüsis ja selle rakendustes on eriline osa täita elementaarfunktsioonidel. Nad moodustavad lihtsaimate funktsioonide klassi, mille tähtsaimate esindajatega — lineaarse funktsiooniga ja ruutfunktsiooniga, pöördvõrdelise sõltuvusega, trigonomeetriliste funktsioonidega, eksponent- ja logaritmfunktsiooniga tehakse tutvust juba keskkoolis. Ka ajalooliselt olid elementaarfunktsioonid esimesteks põhjalikult uuritud funktsioonideks.

Elementaarfunktsiooni mõiste ongi õieti tänapäevani jäänud ajalooliselt kujunenud kategooriaks, mis on lahutamatult seotud algse kujutlusega funktsioonist kui analüütilisest avaldisest. Kui lähtuda kaasaegsest üldisest käsitlusest: *funktsioon on ühe arvuhulga kujutus teise arvuhulka*, siis ei saa näidata ühtki sisemist tunnust, mis eristaks elementaarfunktsioone teiste pidevate ja tükati diferentseeruvate funktsioonide seas. Vahe tuleb ilmsiks alles funktsiooni analüütilisel esitamisel.

Definitsioon on nimelt järgmine: *elementaarfunktsiooniks nimetatakse iga funktsiooni, mida on võimalik moodustada konstantidest, astme-, eksponent-, logaritm-, siinus- ja arkussiinusfunktsioonist, rakendades lõplik arv korda nelja aritmeetilist tehet (liitmine, lahutamine, korrutamine, jagamine) ja liitfunktsiooni koostamise eeskirja.*

Enamik selles definitsioonis esinevatest mõistetest ei vaja arvatavasti selgitust. Küll tuleks vahest peatuda lähemalt astmefunktsiooni ja liitfunktsiooni mõistete juures.

A s t m e f u n k t s i o o n $y = x^a$ reaalarvulise astendaja a korral defineeritakse järgmiselt. Kui a on positiivne ratsionaalarv r ja on esitatav taandatud murruna $r = \frac{m}{n}$ (s. t. m ja n on ühistegurita naturaalarvud) siis, nagu juba keskkoolist teada,

$$x^r = \sqrt[n]{x^m}.$$

Siinjuures tuleb rõhutada, et paarisarvulise n korral, mil teatavasti $(-z)^n = z^n$ ja seega võrrandi $z^n = A$ lahendiks on koos arvuga z ka arv $-z$, loetakse juure $\sqrt[n]{A}$ väärtusteks mitte selle võrrandi mõlemad lahendid, vaid ainult positiivne lahend. Selline juure definitsioon[1] on osutunud väga otstarbekaks. Ta on kujunenud üldtunnustatuks ning seda tuleb võimalike segaduste ärahoidmiseks alati arvestada. Sellest õieti tulenebki, et näiteks võrrandi $z^2 = A$ lahendamisel saame tulemuseks $z = \pm\sqrt{A}$, ning et ruutvõrrandi lahendusvalemis tuleb juuremärgi ette asetada alati $\pm$.

Kui $x \neq 0$, siis negatiivse ratsionaalarvulise astendaja $r = -|r| \neq 0$ korral defineeritakse

$$x^r = x^{-|r|} = \frac{1}{x^{|r|}};$$

lisaks sellele loetakse, et $x^0 = 1$.

Reaalarvulise irratsionaalse astendaja a korral defineeritakse

$$x^a = \lim x^{r_n},$$

kus r_n ($n = 1, 2, \ldots$) on mistahes ratsionaalarvude jada etteantud piirväärtusega $\lim r_n = a$. (Matemaatilises analüüsis tõestatakse, et $\lim x^{r_n}$ sõltub tõepoolest ainult sellise jada piirväärtusest a, mitte aga jada enda valikust!).

Funktsioonidest $y = f(u)$ ja $u = \varphi(x)$ moodustatud funktsiooni $y = f(\varphi(x))$ nimetatakse teatavasti l i i t funktsiooniks.

Pärast neid selgitusi esitame elementaarfunktsioonide mõningaid näiteid. Elementaarfunktsioonideks on kõigepealt kõik polünoomid (näiteks $y = 5x^6 - 2x^3 + x^2 - \pi$), kõik ratsionaalsed funktsioonid $\left(\text{näiteks } y = \frac{2x^7 - x^5}{3x^2 + 1}\right)$ ja juurfunktsioonid (näiteks $y = \sqrt[4]{5x^3 + \sqrt{x^2 - 1}}$). Trigonomeetriast tuntud samasuste põhjal on elementaarfunktsioonid ka kõik trigonomeetrilised funktsioonid ja arkusfunktsioonid, näiteks

$$y = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

$$y = \arctan x = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1 + x^2}},$$

$$y = \operatorname{arc\,cot} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tan} x.$$

---

[1] Ruutjuurele omistatakse kaks väärtust kompleksmuutuja funktsioonide teoorias, kus iga kompleksarvu z korral defineeritakse $\sqrt{z} = z^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}\mathrm{Ln}z}$. Siin on see loomulik, sest logaritmfunktsioon $\mathrm{Ln}z$ defineeritakse valemiga $\mathrm{Ln}z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi)$ ($k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$) ning tal on seega lõpmata palju väärtusi.

Mõnevõrra uudseks on vahest järgmine elementaarfunktsioon, millel on meie hilisemas käsitluses täita eriline osa:

$$y = |x| = \begin{cases} x, & \text{kui } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{kui } x < 0. \end{cases}$$

See funktsioon on tõesti elementaarne, sest ta on saadav astmefunktsioonidest $y = u^{\frac{1}{2}} = \sqrt{u}$ (millel on ülalselgitatu põhjal **ainult** mittenegatiivsed väärtused) ja $u = x^2$ liitfunktsiooni $y = \sqrt{x^2}$ moodustamise teel.

Pikka aega, kui matemaatikas ja selle rakendustes tunti ainult elementaarfunktsioone, ei osatud teist laadi funktsioone õieti kujutledagi. Isegi veel L e o n h a r d E u l e r kirjutas oma «Sissejuhatuses analüüsi» (1748): «Muutuva suuruse funktsioon on analüütiline avaldis, mis on koostatud teataval viisil sellest suurusest ja arvudest või konstantsetest suurustest».

Sellise definitsiooni puudulikkus hakkas aga selguma juba mõni aasta pärast Euleri monograafia ilmumist. Uurides kahe punkti vahele pinguli tõmmatud keele võnkumist matemaatika abil, jõudis D a n i e l B e r n o u l l i 1753. aastal veendumusele, et keele iga asendit kirjeldav funktsioon on esitatav lõpmatu trigonomeetrilise rea abil. See D. Bernoulli poolt füüsikalistel kaalutlustel esitatud hüpotees osutus hiljem põhijoontes õigeks, kuid tollal langes ta Euleri terava kriitika alla. Euler tugines sellele, et keele asendiks võib olla kahe erineva funktsiooni graafikust koosnev joon, mida tema arvates pole põhimõtteliselt võimalik esitada ka sellise ühtse analüütilise avaldise nagu trigonomeetrilise rea abil. Euleri selle eksiarvamuse kummutas 1822. aastal I. B. J. F o u r i e r, kes oma klassikalises töös «Soojuse analüütiline teooria» andis muu hulgas esimesed näited funktsioonidest, mis on oma määramispiirkonna eri osades antud erinevalt, kuid sellele vaatamata on arendatavad ühtsesse trigonomeetrilisse ritta.

Trigonomeetriline rida on aga küllalt komplitseeritud avaldis ja selle abil ei saa anda vastust isegi järgmistele lihtsatele küsimustele. Kas funktsioon, mis on koostatud oma määramispiirkonna eri osades isesugustest elementaarfunktsioonidest, võib olla elementaarfunktsioon? Kui võib, millised on siis selleks piisavad tingimused?

Teisi meetodeid kasutades osutub ka nende küsimuste lahendamine siiski võimalikuks. Näiteks esimesele küsimusele vastamiseks vaatleme funktsiooni

$$y = \begin{cases} 1 - 2x, & \text{kui } \quad x \leqslant -2, \\ 5, & \text{kui } -2 < x \leqslant 3, \\ 2x - 1, & \text{kui } \quad x > 3. \end{cases}$$

Esimesel pilgul paistab, et tegemist on mitteelementaarse funktsiooniga, sest funktsiooni määramispiirkonna kolmes osas on y analüütiliselt esitatud kolme erineva valemiga. Ometi on aga y elementaarfunktsioon, sest teda saab esitada kujul

$$y = |x+2| + |x-3|.$$

Veenva vastuse teisele küsimusele andis hiljuti ühes lühimärkuses[2] nõukogude matemaatik B. P. Pugatšov. Tutvustame alljärgnevalt tema mõttekäiku mõnevõrra laiendatud ja üksikutes detailides lihtsustatud kujul.

Nimelt vaatleme funktsiooni

$$f(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{kui } x < a, \\ A, & \text{kui } x = a, \\ \psi(x), & \text{kui } x > a; \end{cases} \tag{1}$$

kus $\varphi(x)$ ja $\psi(x)$ on elementaarfunktsioonid, mille määramispiirkonnad sisaldavad punkti $x = a$. Matemaatilisest analüüsis on teada, et iga elementaarfunktsioon on oma määramispiirkonnas kõikjal pidev. Siit järeldame, et $f(x)$ elementaarsuseks on tarvilik võrduste $\varphi(a) = \psi(a) = A$ kehtivus, s. t. kui $\varphi(a) \neq A$ või $\psi(a) \neq A$, siis $f(x)$ on mitteelementaarne funktsioon. Osutub, et see tingimus on ka piisav, s. t. kui $\varphi(a) = \psi(a)$, siis $f(x)$ on elementaarfunktsioon. Seda näitab järgmine

Teoreem. *Pidev funktsioon $f(x)$, mis on elementaarne oma määramispiirkonna X, igas osas (kusjuures selliseid osi on lõplik arv), on elementaarne ka kogu määramispiirkonnas.*

Tõestus. Vaatleme valemitega (1) esitatud funktsiooni $f(x)$. Selle funktsiooni määramispiirkond X on punktiga $x = a$ jaotatud kahte ossa. Kui $\varphi(a) = \psi(a) = A$, siis funktsioon $f(x)$ on tõepoolest elementaarne, sest ta on esitatav elementaarfunktsioonide abil valemiga:

$$f(x) = \varphi\left(a + \frac{1}{2}(x - a - |x-a|)\right) + \\ + \psi\left(a + \frac{1}{2}(x - a + |x-a|)\right) - A. \tag{2}$$

Kontrollides näeme, et kui $x < a$, siis

$$f(x) = \varphi\left(a + \frac{1}{2}(x - a + x - a)\right) + \\ + \psi\left(a + \frac{1}{2}(x - a - x + a)\right) - A = \varphi(x) + \psi(a) - A = \varphi(x),$$

kui $x = a$, siis $f(a) = \varphi(a) + \psi(a) - A = A$,

ning lõpuks, kui $x > a$, siis

$$f(x) = \varphi\left(a + \frac{1}{2}(x - a - x + a)\right) + \\ + \psi\left(a + \frac{1}{2}(x - a + x - a)\right) - A = \varphi(a) + \psi(x) - A = \psi(x).$$

[2] Vt. Пугачев Б. П., Об одной неточности в руководствах по математическому анализу. — Успехи матем. наук, 1964, XIX, № 3 (119), lk. 234.

Nüüd on kerge veenduda, et kui $\varphi(x)$, $\psi(x)$ ja $g(x)$ on elementaarsed, $\varphi(a)=\psi(a)$ ja lisaks viimasele eeldusele veel $\psi(b)=g(b)=B$, siis on elementaarfunktsioon ka

$$f_1(x)=\begin{cases}\varphi(x), & \text{kui} \quad x\leqslant a,\\ \psi(x), & \text{kui} \quad a<x\leqslant b,\\ g(x), & \text{kui} \quad x>b,\end{cases}$$

mille määramispiirkond X on punktidega $x=a$ ja $x=b$ jaotatud kolme ossa. Tõepoolest, $f_1(x)$ võime valemiga (1) analoogiliselt esitada kujul

$$f_1(x)=\begin{cases}f(x), & \text{kui } x<b,\\ B, & \text{kui } x=b,\\ g(x), & \text{kui } x>b,\end{cases}$$

kus $f(x)$ on funktsioon (2).

Kui funktsiooni määramispiirkond X koosneb n osast, kus n on lõplik naturaalarv, siis teoreemi tõestuse saab öeldu põhjal lõpule viia matemaatilise induktsiooni meetodiga.

Lõpuks peatume paari sõnaga elementaarfunktsioonide omadustel ja nende tähtsusel.

Kui elementaarfunktsioon on oma määramispiirkonnas kõikjal diferentseeruv, siis tuletis on ka elementaarfunktsioon. Kuid elementaarfunktsiooni integraal ei tarvitse enam olla elementaarne. Ka koonduva funktsionaalrea summa võib olla mitteelementaarne funktsioon, ehkki rea liikmed on elementaarfunktsioonid. Teoorias ja praktikas esinevad mitteelementaarsed funktsioonid väga tihti (näiteks diferentsiaalvõrrandite lahendamisel). Mitteelementaarfunktsioonide uurimiseks avaldatakse neid elementaarfunktsioonide integraalide, ridade, lõpmatute korrutiste jne. kaudu.

Viimase kohta esitame näitena tähtsaima mitteelementaarse funktsiooni — Euleri gammafunktsiooni $\Gamma(x)$ — integraali, lõpmatu korrutise ja piirväärtuse kaudu $(x>0)$:

$$\Gamma(x)=\int_0^1(-\ln t)^{x-1}dt=\frac{1}{x}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^x\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)!\,n^x}{x(x+1)\dots(x+n-1)} \tag{3}$$

ning $\ln\Gamma(x)$ — elementaarfunktsioonide rea kaudu:

$$\ln\Gamma(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[(x-1)\ln\frac{n+2}{n+1}-\ln\frac{n+x}{n+1}\right].$$

Ka keskkooli kursusest on kõigil teada üks mitteelementaarne funktsioon, nimelt faktoriaal $y = x! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot x$. Mitteelementaarsus tuleneb siin sellest, et korrutamistehete arv ei ole ette antud, vaid sõltub argumendi väärtusest ja võib kasvada kuitahes suureks. Gammafunktsioon $\Gamma(x)$ on funktsiooni $y = x!$ üldistus mistahes reaalsele argumendile $x > 0$. Seda näeme näiteks valemi (3) abil tõestatavatest seostest

$$\Gamma(1) = 1 \text{ ja } x\Gamma(x) = \Gamma(x+1).$$

Kui $x = n$ on naturaalarv, siis saamegi $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-2) = \ldots = n!\Gamma(1) = n!$. Gammafunktsioon $\Gamma(x)$ pole enam katkev, vaid pidev ning isegi mistahes arv korda diferentseeruv funktsioon, kui $x > 0$.

TULETIS ON ALATI PIDEV!

Tõeleid Roosinupp

Matemaatilise analüüsi ja kõrgema matemaatika õpikutes väidetakse tavaliselt, et funktsiooni tuletis ei tarvitse olla pidev. Nagu aga selgus allakirjutanu põhjalike uurimuste tulemusena, on see väide täiesti ekslik. Saab nimelt tõestada, et *iga diferentseeruva funktsiooni tuletis on igas punktis pidev.* Järgnevalt esitamegi vastava tõestuse, piirdudes lühiduse huvides vaid tuletise pidevuse näitamisega nullpunktis (tõestuse üldistamine mistahes punkti juhule ei tohiks tähelepanelikule lugejale mingit raskust valmistada).

Olgu $f(x)$ diferentseeruv funktsioon. Fikseerides argumendi x võib iga $\Delta x \neq 0$ korral defineerida suuruse

$$\varepsilon = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} - f'(x).$$

Selle võrduse kirjutame kujul

$$f(x+\Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \varepsilon\Delta x \tag{1}$$

ja paneme tähele, et $\Delta x \to 0$ puhul ka $\varepsilon \to 0$.

Võtame nüüd võrduses (1) algul $x = 0$, $\Delta x = 2h$, siis $x = 0$, $\Delta x = h$ ning lõpuks $x = h$, $\Delta x = h$. Nii saame võrdused

$$f(2h) = f(0) + 2hf'(0) + 2h\varepsilon_1, \tag{2}$$
$$f(h) = f(0) + hf'(0) + h\varepsilon_2, \tag{3}$$
$$f(2h) = f(h) + hf'(h) + h\varepsilon_3, \tag{4}$$

kus indeksitega suuruste ε juures on rõhutatud seda, et need suurused pole muidugi võrdsed (kuid $h \to 0$ korral ikka $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \to 0$).

Võrrandit (4) $f'(h)$ suhtes lahendades leiame

$$f'(h) = \frac{f(2h) - f(h)}{h} - \varepsilon_3.$$

Kui siin $f(2h)$ ja $f(h)$ asendada nende väärtustega võrdustest (2) ja (3), us saame $f'(h)$ jaoks avaldise

$$f'(h) = f'(0) + 2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3.$$

Sellest avaldisest võib aga vahetult näha, et $h \to 0$ korral $f'(h) \to f'(0)$, t. diferentseeruva funktsiooni tuletis on nullpunktis tõepoolest pidev.

ALGEBRA PÕHIMÕISTEID III

Jevgeni Gabovitš

8. Maatriksite rühmad

Kui artikli eelmises punktis vaadeldud sümmeetrilised rühmad etendasid erilist osa rühmateoorias selle tekkimise perioodil, siis tänapäeval on üheks tähtsamaks rühmade klassiks maatriksite rühmad.

Maatriksiks (*n-järku maatriksiks*) nimetatakse ruudukujulist tabelit

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

milles a_{ij} — maatriksi *elemendid* — on suvalised reaalarvud. Selliste tabelite jaoks võib defineerida nende võrduse ning liitmise ja korrutamise operatsiooni [1].

Maatrikseid loetakse võrdseteks, kui nende kõik samadel kohtadel olevad elemendid on võrdsed: $A = [a_{ij}]$ ja $B = [b_{ij}]$ on võrdsed (ehk $A = B$), kui $a_{ij} = b_{ij}$ iga i ja j korral. Maatriksite $A = [a_{ij}]$ ja $B = [b_{ij}]$ summaks nimetatakse maatriksit $A + B$, mille elemendid on saadud lähtemaatriksite vastavate elementide liitmise teel: $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$. Märksa keerukamalt defineeritakse maatriksite korrutamise operatsioon: selleks et leida korrutismaatriksi $A \cdot B$ i-nda rea ja j-nda veeru element, tuleb A i-nda rea esimene element korrutada B j-nda veeru esimese elemendiga, siis A i-nda rea teine element B j-nda veeru teise elemendiga jne. ning lõpuks kõik need korrutised omavahel liita. Seega

$$A \cdot B = [a_{ij}] \cdot [b_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ . & . & . & . \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} =$$

[1] Vt Kangro, G., Kõrgem algebra, Tln., 1962, § 9, art. 1.

$$
=\begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+\dots+a_{1n}b_{n1} & \dots & a_{11}b_{1n}+\dots+a_{1n}b_{nn} \\ a_{21}b_{11}+\dots+a_{2n}b_{n1} & \dots & a_{21}b_{1n}+\dots+a_{2n}b_{nn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}b_{11}+\dots+a_{nn}b_{n1} & \dots & a_{n1}b_{1n}+\dots+a_{nn}b_{nn} \end{bmatrix}.
$$

Näiteks

$$
\begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix},
$$

$$
\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 1+3\cdot 2 & 2\cdot(-2)+3\cdot 3 \\ 0\cdot 1-5\cdot 2 & 0\cdot(-2)-5\cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -10 & -15 \end{bmatrix},
$$

$$
\begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} =
$$

$$
\begin{bmatrix} -2+5+0 & 1-10+0 & -2+5+4 \\ 0+1+0 & 0-2+0 & 0+1+0 \\ 6-4+0 & -3+8+0 & 6-4+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -9 & 7 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \end{bmatrix}.
$$

Maatriksite liitmine on kommutatiivne ja assotsiatiivne tehe, sest ta taandub arvude liitmisele, mis on nii kommutatiivne kui ka assotsiatiivne.

Maatriksite korrutamine ei ole üldiselt kommutatiivne. Selle näitamiseks korrutame teises järjekorras ülal esinenud kolmandat järku maatriksid:

$$
\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix} =
$$

$$
= \begin{bmatrix} -2+6 & 10-1-8 & 4+2 \\ -1+3 & 5-2-4 & 2+1 \\ 6 & -8 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \\ 6 & -8 & 2 \end{bmatrix}.
$$

Tulemus erineb varem saadud maatriksist, see aga tõestabki, et maatriksite korrutis sõltub tegurite järjekorrast ning korrutamine pole seega kommutatiivne.

Maatriksite korrutamise assotsiatiivsuse tõestamiseks esitame nende korrutamise reegli kompaktsemal kujul, kasutades summa märki [2] $\sum$:

$$
[a_{ij}]\cdot[b_{ij}] = [\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}]\,.
$$

---

[2] Sümbol $\sum_{i=1}^{n} x_i$ tähendab summat $x_1+x_2+\dots+x_n$.

Nüüd võime kirjutada (tänu arvude liitmise assotsiatiivsusele)

$$([a_{ij}]\cdot[b_{ij}])\cdot[c_{ij}]=[\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}]\cdot[c_{ij}]=[\sum_{l=1}^{n}(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kl})c_{lj}]=$$

$$=[\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kl}c_{lj}]=[\sum_{k=1}^{n}a_{ik}(\sum_{l=1}^{n}b_{kl}c_{lj})]=[a_{ij}]\cdot[\sum_{l=1}^{n}b_{kl}c_{lj}]=$$

$$=[a_{ij}]\cdot([b_{ij}]\cdot[c_{ij}]),$$

ja maatriksite korrutamise assotsiatiivsus ongi tõestatud.

Kõik n-järku maatriksid moodustavad liitmise suhtes kommutatiivse rühma, milles nullelemendiks on maatriks $0=[0]$ (kõik $a_{ij}=0$) ja maatriksi $A=[a_{ij}]$ vastandmaatriksiks on maatriks $-A=[-a_{ij}]$ (kontrollida!). Liitmise suhtes moodustavad rühma ka nn. *kolmnurksed maatriksid*, mille peadiagonaali a_{ii} (s. o vasakust ülemisest nurgast lähtuva diagonaali) all asuvad elemendid on nullid: $a_{ij}=0$ kui $i>j$. Näiteks maatriks

$$\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

on kolmnurkne.

Üldse moodustavad liitmise suhtes rühma kõik sellised maatriksid, milles teatud fikseeritud kohtadel asuvad ainult nullid (miks?).

Huvitavaid rühmade näiteid võib konstrueerida nn. *maagilistest ruutudest*, s. o. ratsionaalarvuliste elementidega maatriksitest, mille iga rea, iga veeru ja iga diagonaali elementide summad on omavahel võrdsed. Maagilisteks ruutudeks on näiteks järgmised maatriksid:

$$\begin{bmatrix}-4&-4\\-4&-4\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}4&9&2\\3&5&7\\8&1&6\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}11&4&9\\6&8&10\\7&12&5\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}8&-5&-6&5\\-3&2&3&0\\1&-2&-1&4\\-4&7&6&-7\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0&14&3&13\\11&5&8&6\\12&2&15&1\\7&9&4&10\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}-1&12&-5&8&-9\\5&-7&1&9&-3\\11&-6&7&-10&5\\-8&0&13&-4&4\\-2&6&-11&2&10\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}5&5&5&5&5&5\\5&17&4&3&14&5\\5&6&11&12&9&5\\5&10&7&8&13&5\\5&5&16&15&2&5\\5&5&5&5&5&5\end{bmatrix}.$$

Ilmselt moodustavad kõik antud järku täisarvuliste elementidega maagilised ruudud ja samuti kõik antud järku maagilised ruudud rühma maatriksite liitmise suhtes (tõestada!).

Rühmateooria seisukohalt on eriti tähtsad maatriksite multiplikatiivsed rühmad. Esimese näitena sellisest rühmast toome nn. *P-maatriksite* rühma. Nõnda nimetatakse niisuguseid maatrikseid, mille igas reas ja igas veerus on üks ja ainult üks nullist erinev element — arv üks. Näiteks maatriksid

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

on P-maatriksid.

Kolmandat järku üksteisest erinevaid P-maatrikseid on kuus:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad S(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad S(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$S(3) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nad moodustavad korrutamise suhtes rühma, mis on isomorfne rühmaga S_3 (vt. käesoleva artikli p. 7).

Üldiselt moodustavad kõik n-järku P-maatriksid rühmaga S_n isomorfse rühma. Seega on substitutsioonide rühmade ja ühtlasi ka kõigi lõplike rühmade teooria teatud erijuht maatriksirühmade teooriast.

Lihtne on veenduda selles, et ühikelemendiks maatriksite multiplikatiivsetes rühmades on nn. ühikmaatriks E, mille peadiagonaalil asuvad ühed, mujal aga nullid (kontrollida!).

Ühikmaatriksi E olemasolu võimaldab tõsta üles pöördmaatriksi leidmise küsimuse, mis aga osutub kaugeltki mitte lihtsaks ülesandeks. Pealegi pole ta alati lahendatav, nagu näiteks maatriksi

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

korral. Tõepoolest, korrutades seda maatriksit ükskõik millise maatriksiga $[a_{ij}]$, saame

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix}.$$

Viimane maatriks aga ei võrdu kunagi ühikmaatriksiga, sest selleks peaksid olema a_{31} ja a_{32} ühelt poolt võrdsed ühega (kui peadiagonaali elemendid), aga teiselt poolt võrdsed nulliga, mis on ilmselt võimatu. Küll aga leidub pöördmaatriks peaaegu alati nn. *diagonaalmaatriksil*, s. o. maatriksil, mille kõik väljaspool peadiagonaali asuvad elemendid $a_{ij}=0$ $(i \neq j)$. Kui diagonaalmaatriksi kõik peadiagonaali elemendid a_{ii} erinevad nullist, siis leidub temal pöördmaatriks $[a'_{ij}]$, mis osutub samuti diagonaalmaatriksiks, kusjuures $a'_{ij}=0$ ja $a'_{ii}=1:a_{ii}$ (kontrollida!). Näiteks

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{7} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Et kahe diagonaalmaatriksi korrutis on alati diagonaalmaatriks (tõestada!), siis moodustavad kõik antud järku diagonaalmaatriksid, mis rahuldavad tingimust: iga i korral $a_{ii} \neq 0$, multiplikatiivse rühma. Ratsionaalarvuliste elementidega diagonaalmaatriksid moodustavad selles alamrühma.

Ka kolmnurksel maatriksil on pöördmaatriks olemas parajasti siis, kui $a_{ii} \neq 0$. Selle asjaolu tõestamine ning kolmnurkse maatriksi pöördmaatriksi leidmine on aga märksa raskem, kui eelmisel juhul. Märgime vaid esialgu, et teist ja kolmandat järku kolmnurksete maatriksite pöördmaatriksid avalduvad järgnevalt (kontrollida!):

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & -\frac{a_{12}}{a_{11} \cdot a_{22}} \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} \end{bmatrix}$$

ja

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & -\frac{a_{12}}{a_{11} \cdot a_{22}} & \frac{a_{12} \cdot a_{23} - a_{13} \cdot a_{22}}{a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}} \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & -\frac{a_{23}}{a_{22} \cdot a_{33}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_{33}} \end{bmatrix}.$$

Et kahe kolmnurkse maatriksi korrutis on kolmnurkne maatriks (tõestada!), siis kõik tingimust $a_{ii} \neq 0$ rahuldavad antud järku kolmnurksed maatriksid moodustavad korrutamise suhtes rühma (teist ja kolmandat järku maatriksite korral me seda juba tõestasime). Ka siin moodustavad ratsionaalarvuliste elementidega maatriksid alamrühma (miks?).

Maatriksi pöördmaatriksi olemasolu võib kindlaks teha maatriksiga seotud erilise arvu — maatriksi nn. determinandi abil.

Maatriksi $A=[a_{ij}]$ *determinandiks* nimetatakse $n!$ korrutise $a_{1i_1}\, a_{2i_2} \dots a_{ni_n}$ algebralist summat, kus $i_1, i_2, \dots, i_n$ on arvude $1, 2, \dots, n$ mistahes ümberjärjestus. Seejuures võetakse liidetav märgiga $+$, kui

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$$

on paarissubstitutsioon ning märgiga —, kui viimane substitutsioon on paaritu.

Maatriksi $A=[a_{ij}]$ determinanti tähistatakse sümboliga

$$|A| = |a_{ij}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Kehtib järgmine lause [3]: maatriksil A on pöördmaatriks olemas parajasti siis, kui tema determinant $|A|$ erineb nullist.

Näiteks

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot 2 - 3\cdot 1 = 1 \neq 0$$

ja

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot 1 + 2\cdot 2\cdot 2 + 3\cdot 3\cdot 3 - 3\cdot 1\cdot 2 - 2\cdot 3\cdot 1 - 1\cdot 2\cdot 3 = 18 \neq 0$$

ning vastavatel maatriksitel leiduvad pöördmaatriksid:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

ja

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{18} & \frac{7}{18} & \frac{1}{18} \\ \frac{1}{18} & -\frac{5}{18} & \frac{7}{18} \\ \frac{7}{18} & \frac{1}{18} & -\frac{5}{18} \end{bmatrix}.$$

Eespool oli meil näide maatriksist, millel pole pöördmaatriksit. Selle maatriksi determinant on tõepoolest võrdne nulliga:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0\cdot 0\cdot 0 + 1\cdot 0\cdot 0 + 0\cdot 1\cdot 1 - 1\cdot 0\cdot 1 - 0\cdot 0\cdot 0 - 0\cdot 1\cdot 0 = 0.$$

Maatriksi determinandi definitsioonist järeldub, et kolmnurkse maatriksi determinant võrdub peadiagonaali elementide korru-

[3] Vt. Kangro, G., Kõrgem algebra. Tln., 1962, § 9, art. 2.

tisega, s. o. arvuga $a_{11}a_{22} \ldots a_{nn}$ (miks?). Seepärast on kolmnurksel maatriksil tõepoolest pöördmaatriks olemas siis ja ainult siis, kui kõik $a_{ii} \neq 0$.

Võib tõestada, et kahe maatriksi korrutise determinant võrdub korrutatavate maatriksite determinantide korrutisega:

$$|AB| = |A| \cdot |B|.$$

Sellest järeldub, et kõik nullist erineva determinandiga n-järku maatriksid (neid nimetatakse *regulaarseteks*) moodustavad korrutamise suhtes rühma. Tõepoolest, kahe regulaarse maatriksi A ja B korrutis ei saa olla mitteregulaarne (ehk *singulaarne*), ning et üksikmaatriksi E determinant on 1 (miks?), siis regulaarse maatriksi pöördmaatriks on samuti regulaarne, s. o. $|A| \neq 0$ korral ei saa olla $|A^{-1}| = 0$ (muidu seosest $A \cdot A^{-1} = E$ järelduks, et $0 = |A| \cdot |A| = |AA^{-1}| = |E| = 1$).

Kõigi regulaarsete maatriksite rühma nimetatakse *täielikuks lineaarseks rühmaks* ning märgitakse sümboliga L_n, kus n on maatriksite järk. Kolmnurksete ja diagonaalmaatriksite rühmad ning P-maatriksite rühmad on rühma L_n alamrühmadeks. L_n alamrühma moodustavad veel näiteks maatriksid, mille determinant on 1, ning sellised maatriksid, mille determinant on kas 1 või —1 (miks?).

Ülesandeid:

25. Kas kõik antud järku maagilised ruudud, mille esimese rea elementide summa on paarisarv, moodustavad rühma liitmise suhtes?

26. Tõestada, et P-maatriksite korrutis on P-maatriks.

27. Tõestada, et P-maatriksi pöördmaatriks on P-maatriks. Kuidas näeb välja see pöördmaatriks?

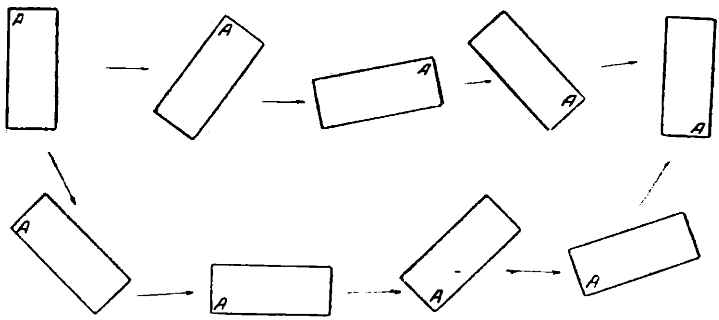
28. Tõestada, et n-järku P-maatriksid moodustavad korrutamise suhtes rühma, mis on isomorfne rühmaga S_n.

9. Sümmeetriarühmad

Korrapärase n-nurga pöörded nurkade $\frac{360°}{n}$ võrra, mis teisendavad selle n-nurga iseendaks, moodustavad monogeense rühma, mille järk on n (vt. ülesanne 18). Üldiselt, kui liikumiste korrutamise all mõista liikumiste järjest rakendamist, siis kõik liikumised, mis teisendavad antud geomeetrilise kujundi iseendaks, moodustavad rühma. Siinjuures loeme kahte liikumist võrdseks, kui langevad kokku nende rakendamise tulemused, vaatamata sellele, et nende puhul kujundite liikumise trajektoorid võivad olla erinevad.

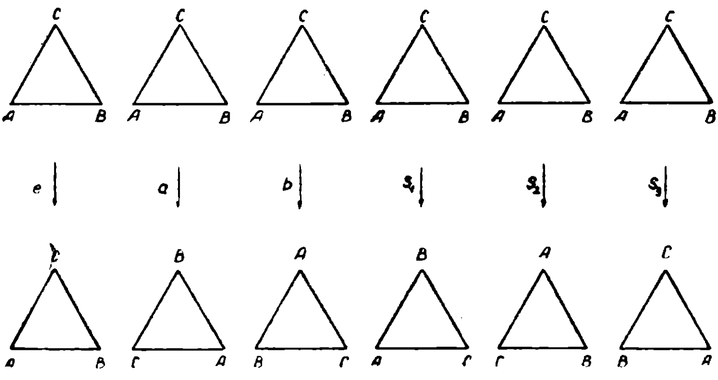
Erinevalt korrapärase n-nurga pöörete rühmast, ei tarvitse iga selline rühm olla kommutatiivne. Näiteks korrapärast kolmnurka ruumis issendaks teisendavate liikumiste rühm on isomorfne rühmaga S_3 ning seega mittekommutatiivne.

Üldiselt kõik korrapärast n-nurka iseendaks teisendavad liikumised moodustavad ruumis rühma, mis koosneb $2n$ elemendist — n pöördest selle n-nurga tasandis ning n pöördest ruumis n sümmeetriatelje ümber (paarisarvulise n puhul läbivad need teljed vastastikku asetsevaid tippe või külje keskpunkte, paaritu n kor-



Joonis 1. Liikumine ei olene keha trajektoorist.

ral aga tippe ja nende vastaskülgede keskpunkte). See rühm on isomorfne rühma S_n teatud alamrühmaga — nimelt sellisega, mille elementideks on vaadeldavatele liikumistele vastavad n-nurga tippude substitutsioonid (vt. näit. joon. 2). Kõik need rüh-



$$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$$

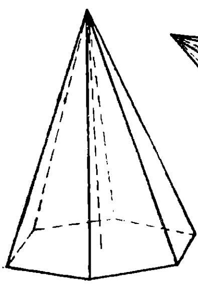
Joonis 2. Korrapärase kolmnurga liikumiste rühm.

mad on mittekommutatiivsed, sest pöördele tasandil nurga $360° : n$ võrra ja pöördele ruumis tippu läbiva sümmeetriatelje suhtes vastavad substitutsioonid

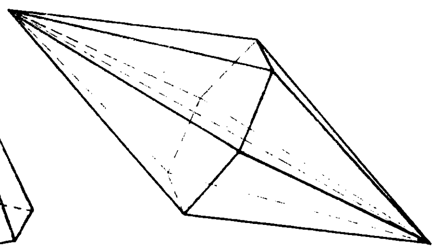
$$\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n-1 & n\\ 2 & 3 & \dots & n & 1\end{pmatrix} \text{ ja } \begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n\\ 1 & n & \dots & 2\end{pmatrix}$$

ning nende liikumiste korrutised erinevas järjekorras viivad esimese tipu kord teiseks, kord n-daks ja on seega erinevad liikumised.

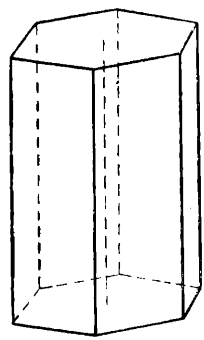
Korrapärase n-nurkse püramiidi (joon. 3) liikumiste rühm on isomorfne korrapärase n-nurga tasandiliste pöörete rühmaga. Ta on alamrühmaks kahest korrapärasest n-nurksest püramiidist koosneva *n-nurkse dieedri* (joon. 4) ruumiliste liikumiste rühmas, viimane on aga isomorfne eespool vaadeldud korrapärase n-nurga kõigi ruumiliste liikumiste rühmaga. Seepärast nimetatakse viimati mainitud rühma dieedri rühmaks. Ka korrapärase rööptahuka (joon. 5) pöörete rühm on isomorfne dieedri rühmaga.



Joonis 3.
Korrapärane püramiid.



Joonis 4.
Korrapärane dieeder.



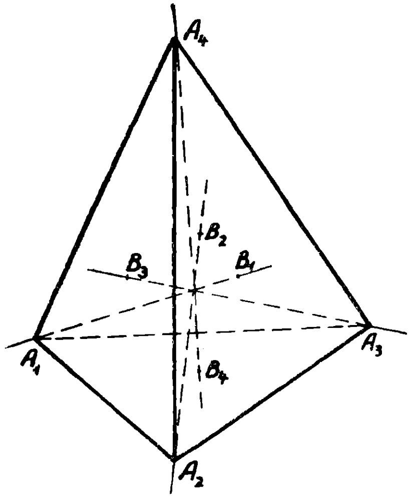
Joonis 5.
Korrapärane rööptahukas.

Võtame nüüd vaatlusele korrapäraste hulktahukate tippe tippudeks teisendavate liikumiste rühmad. Korrapäraseid hulktahukaid on viit tüüpi: korrapärane tetraeeder (joon. 6), kuup (joon. 7), korrapärane oktaeeder (joon. 8), korrapärane ikosaeeder (joon. 9) ja korrapärane dodekaeeder (joon. 10).

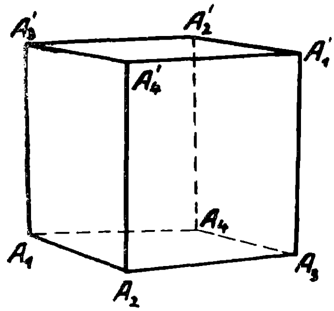
Korrapäraste hulktahukate tippude, servade ja tahkude arvud on toodud järgmises tabelis

	Tetraeeder	Kuup	Oktaeeder	Ikosaeeder	Dodekaeeder
Tippude arv	4	8	6	12	20
Servade arv	6	12	12	30	30
Tahkude arv	4	6	8	20	12

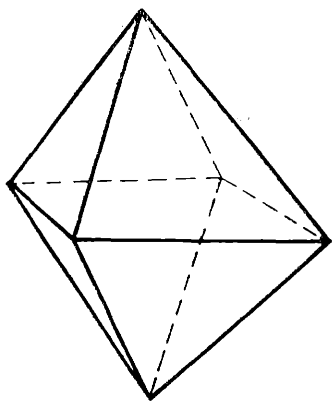
Järgnevalt vaatlemegi ainult korrapäraseid hulktahukaid, seetõttu jätame me edaspidi ära sõna «korrapärane».



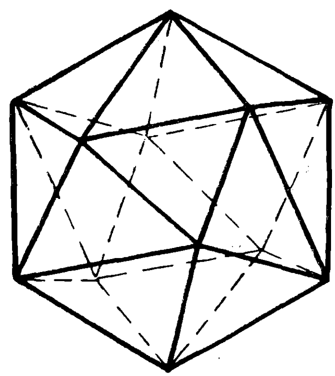
Joonis 6.



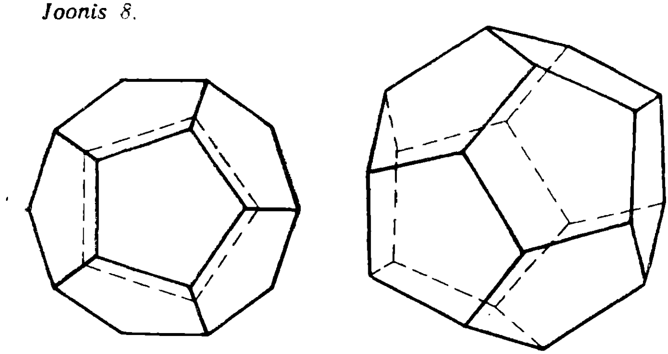
Joonis 7.



Joonis 8.

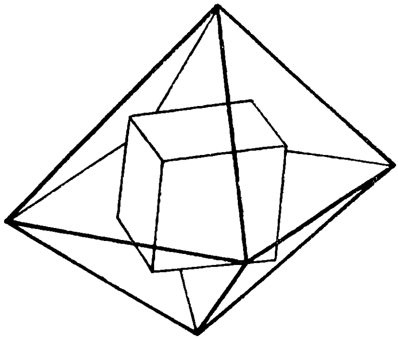


Joonis 9.
Ikosaeeder.

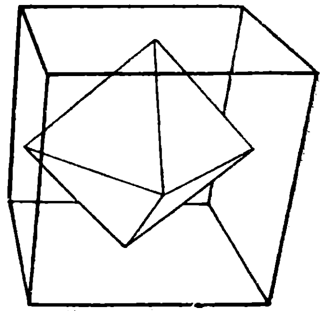


Joonis 10. Dodekaeeder kahes projektsioonis.

Piisav on leida tetraeedri, kuubi ja ikosaeedri liikumiste rühmad, sest oktaeedri ja dodekaeedri liikumiste rühmad osutuvad isomorfseteks vastavalt kuubi ja ikosaeedri liikumiste rühmadele. Et selles veenduda, joonistame ühelt poolt kas kuubi oktaeedrisse (joon. 11) või oktaeedri kuubisse (joon. 12) ja

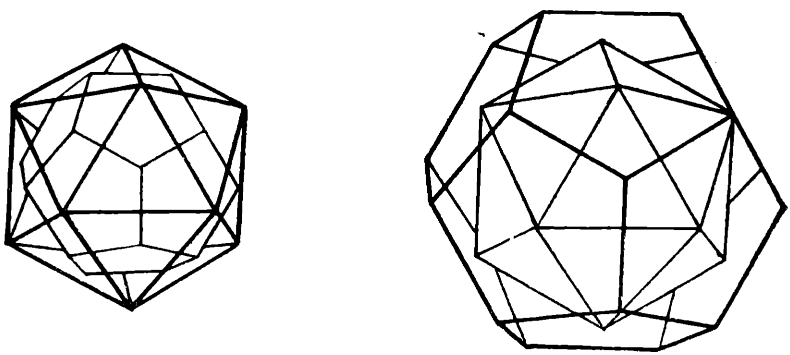


Joonis 11.
Kuup oktaeedri sees.



Joonis 12.
Oktaeeder kuubi sees.

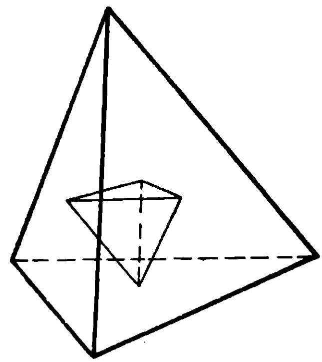
teiselt poolt kas ikosaeedri dodekaeedrisse või vastupidi — dodekaeedri ikosaeedrisse (joon. 13). Nüüd on selge, et iga kuubi liikumine indutseerib oktaeedri liikumise ja vastupidi: iga oktaeedri liikumine indutseerib kuubi liikumise. Analoogiliselt järeldame, et ikosaeedri ja dodekaeedri liikumiste rühmad on isomorfsed.



Joonis 13.
Ikosaeeder ja dodekaeeder teineteise sees.

Joonised 11—13 selgitavad, miks on kuubi ja ikosaeedri tippude arvud võrdsed vastavalt oktaeedri ja dodekaeedri tahkude arvudega ja vastupidi.. Nimelt on esimestena mainitud kujundite tahkude keskpunktid viimatimainitute tippudeks ja ümberpöördult. Samas on hästi näha, et kuubi ja oktaeedri ning ikosaeedri ı dodekaeedri servade vahel on korraldatud üksühene vastavus, mistõttu on neil servade arvud võrdsed. Selline duaalsus esineb ı tetraeedri puhul, kuid see on duaalsus iseendaga (joon. 14). Seetõttu on tetraeedril tippude ja tahkude arvud võrdsed.

Tetraeedri liikumiste rühm koosneb kaheteistkümnest elemendist: ühikelemendist, kaheksast liikumisest, mis jätavad paigale ühe tippudest ja teostavad pöörde seda tippu ning tema vastastahu keskpunkti läbiva sümmeetriatelje ümber (vt. joon. 6) ning kolmest pöördest vastasservade keskpunkte ühendava kolme sümmeetriatelje ümber (vt. joon. 6). Lihtne on veenduda, et kõikidele nendele liikumistele vastavad tippude paarissubstitutsioonid. Seega on tetraeedri liikumiste rühm isomorfne vahelduva rühmaga A_4. Üldse koosnevad korrapäraste hulktahukate liikumiste rühmad ainult pööretest, mistõttu neid nimetatakse pöörete rühmadeks.



Joonis 14.
Tetraeeder tetraeedri sees.

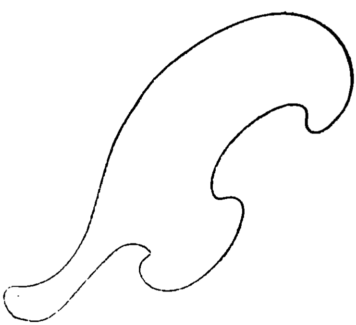
Kuubi pöörete rühm koosneb 24-st elemendist ning on isomorfne rühmaga S_4. Tema elementideks on pöörded diagonaalide ümber (kaks pööret nurkade 120° ja 240° võrra iga nelja diagonaali ümber) ning sümmeetriatelgede ümber, mis ühendavad vastastahkude keskpunkte (kolm pööret nurkade 90°, 180° ja 270° võrra iga kolme telje ümber) või vastasservade keskpunkte (üks pööre 180° võrra iga kuue sellise telje ümber). Kokku saame $2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 6 = 23$ pööret, mis koos ühikelemendiga annavadki 24 elementi. Et leida igale teisendusele vastav substitutsioon, tuleb joonisel 7 vaadata, millisteks tippudeks A_j või A'_j teisenevad tipud A_i ($i, j = 1, 2, 3, 4$). Siinjuures alati, kui $A_i \to A_j$ või $A_i \to A'_j$, siis $A'_i \to A'_j$ või $A'_i \to A_j$ (kontrollida!)

Ikosaeedri ja dodekaeedri pöörete rühmad koosnevad kumbki 60-st elemendist. Näiteks ikosaeedril on 31 sümmeetriatelge, mis jagunevad kolme liiki: kuus telge ühendavad vastastippe, kümme vastastahkude keskpunkte, viisteist aga vastasservade keskpunkte. Igale esimest liiki teljele vastab neli mittetriviaalset pööret nurkade 72°, 144°, 216° ja 288° võrra, teist liiki teljele kaks pööret nurkade 120° ja 240° võrra ning kolmandat liiki teljele üks pööre 180° võrra. Koos samasusteisendusega saamegi $1 + 4 \cdot 6 + 2 \cdot 10 + 15 = 60$ elementi. Mainime veel, et ikosaeedri pöörete rühm on isomorfne rühma S_5 alamrühmaga A_5.

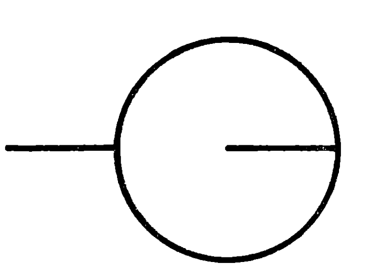
Teades korrapäraste hulktahukate pöörete rühmi on lihtne lahendada järgmist ülesannet korrapäraste hulktahukate värvimisest. On antud n erinevat värvi, kus n on korrapärase hulktahuka tahkude arv. Mitmel geomeetriliselt erineval viisil on võimalik värvida selle hulktahuka tahud nii, et erinevad tahud oleksid värvitud erinevate värvidega, kui geomeetriliselt samaväärseteks värvimisteks lugeda sellised värvimised, mis on teineteisest saadavad hulktahuka pööramise teel mõne sümmeetriatelje ümber?

Lahendame selle ülesande näiteks oktaeedri jaoks. Nummerdame ära tema tahud. Ilmselt on esimese tahu värvimiseks olemas kaheksa erinevat võimalust. Kui esimene tahk on juba mingi värviga värvitud, võime teise tahu värvida ükskõik millisega ülejäänud seitsmest värvist. Seega on kahe tahu värvimiseks kokku $8 \cdot 7 = 56$ võimalust. Analoogiliselt leiame, et kolme tahu värvimiseks on $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ võimalust jne., ja lõpuks kõigi kaheksa tahu värvimiseks $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = 8!$ võimalust. Et aga oktaeedri pöörete rühm koosneb 24-st elemendist, siis geomeetriliselt erinevaid värvimisi on 24 korda vähem, s. o. $\frac{8!}{24} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{24} = 1680$ erinevat värvimist. Tetraeedri jaoks on see arv võrdne ainult kahega: $\frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{12} = 2$.

Korrapäraste hulktahukate korral võib lisaks tavalistele tippe tippudeks teisendavatele liikumistele vaadelda veel peegeldusi hulktahuka mingi sümmeetriatasandi suhtes ning peegelduste kombinatsioone pööretega. Sellisel juhul saame iga korrapärase hulktahukaga siduda veel ühe rühma — nn. *sümmeetriarühma*, mille elementideks on kõik pöörded, peegeldused ning nende kombinatsioonid ehk korrutised, mis teisendavad kõik tipud jällegi tippudeks. Ülalvaadeldud pöörete rühmad on sümmeetriarühmade alamrühmadeks. Mainime, et tetraeedri sümmeetriarühm



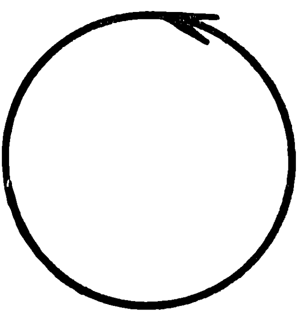
Joonis 15.
Täielikult ebasümmeetriline kujund.



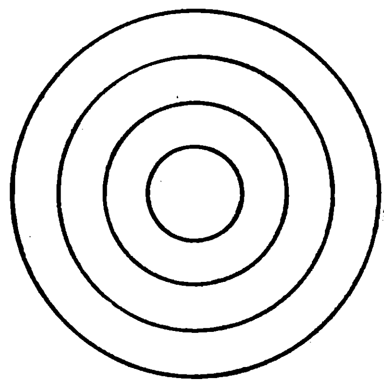
Joonis 16.
Kujund, mille sümmeetriarühm koosneb kahest elemendist.

sneb 24-st elemendist ning on isomorfne rühmaga S_4, aga saeedri ja dodekaeedri sümmeetriarühmad sisaldavad kumbki 20 elementi ning on isomorfsed rühmaga S_5. Kuubi ja oktaeedri ümmeetriarühmad sisaldavad mõlemad 48 elementi.

Sümmeetriarühmi võib vaadelda ka tasandiliste kujundite ral. Peale ühikrühma, mis on täiesti mittesümmeetrilise kundi (joon. 15) sümmeetriarühmaks, ühikelemendist ja ühest geldusest koosneva rühma, mis on näiteks joonisel 16 toodud ujundi sümmeetriarühmaks, ning korrapärase n-nurga pöörete ja sümmeeriarühmade, mis koosnevad vastavalt n pöördest või pöördest ja n peegeldusest, on veel kaks lõpmatut sümmeetrühma. Üks neist on suunaga varustatud ringjoone (joon. 17)



Joonis 17.



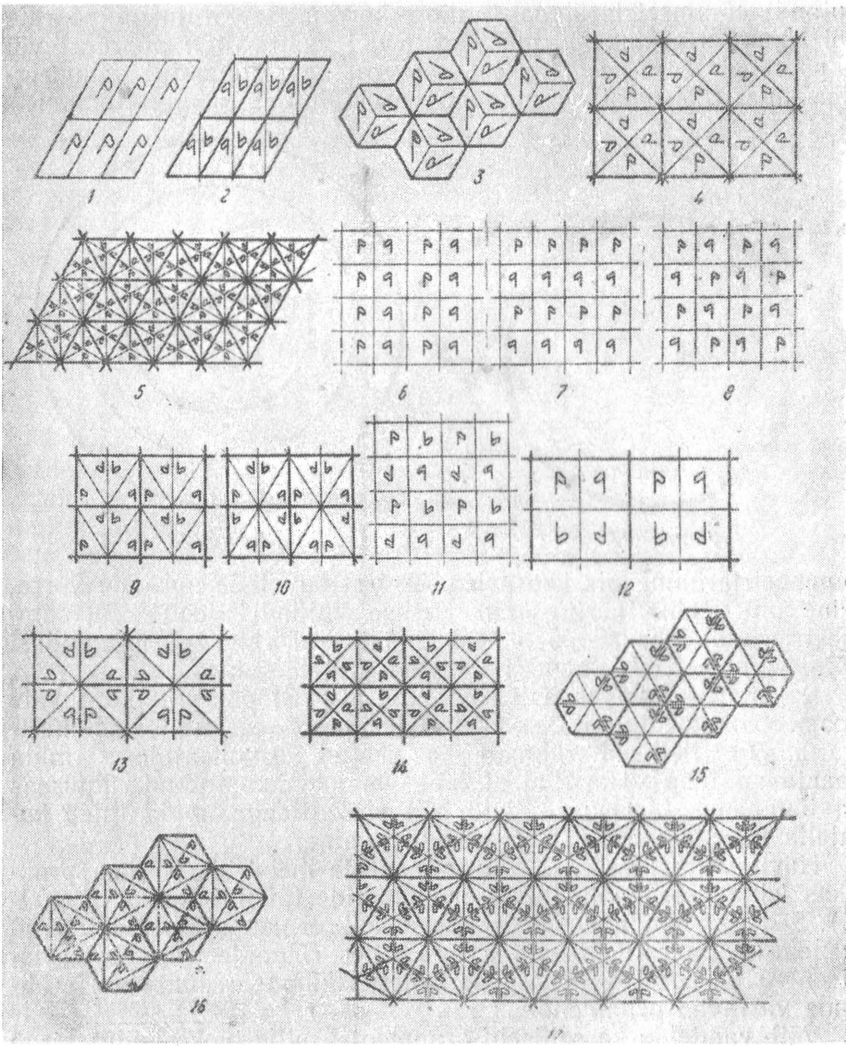
Joonis 18.

ümmeetriarühm, mis koosneb pööretest suvaliste nurkade võrra, ne on täielikult ringsümmeetrilise kujundi (joon. 18) sümtriarühm, mis sisaldab peale kõikide pöörete veel peegeldusi sümmeetriakeskpunkti läbivate sirgete suhtes.

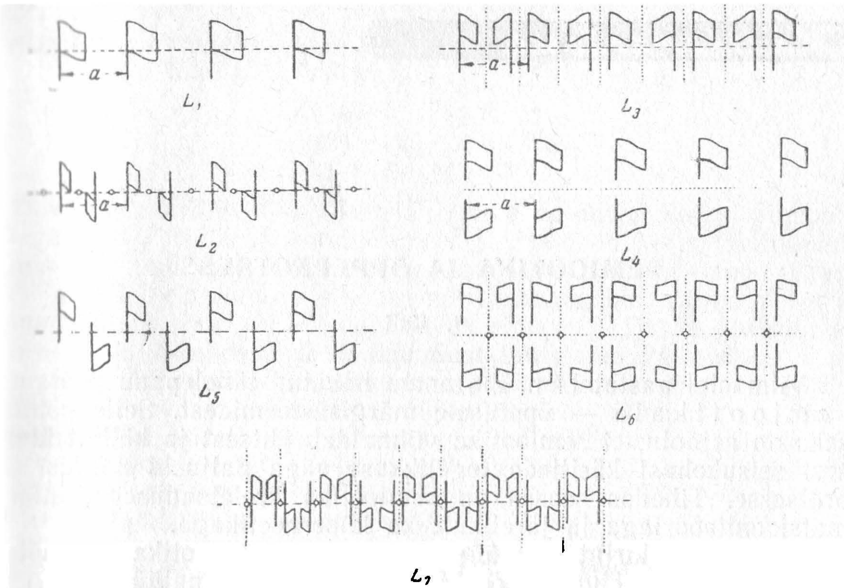
Rakenduste seisukohalt on huvitavad lõpmatult korduvate meetriliste kujunditega kaetud vööde või tasandite sümmeetühmad. Sellised rühmad on seotud ornamentidega, mida stavad juba vanast ajast kõigi maade kunstnikud, muuseas tänapäeva tarbekunstnikud, või parkettidega, mida tuleb kulla igas suunas lõpmatusse kulgevaina.

Huvitav on märkida, et ornamentide meistrid on oma prakleidnud kõikvõimalikud ornamentide tüübid (kokku 17 tüüseda, et nendega on tõepoolest kõik ornamentide tüübid amlatud, õnnestus tõestada aga alles rühmateooria abil. Joo19 on toodud kõigile seitsmeteistkümnele sümmeetriarühvastavad ornamendid.

Võib vaadelda ka selliseid ornamente, mille jaoks leidub sirge namendi telg), mis teiseneb iseendaks iga selle ornamendi ümmeetriateisenduse puhul. Niisuguseid ornamente nimetatakse *bordüürideks* ehk *ääristeks*. Selgub, et on olemas vaid seitse erinevat ääriste tüüpi, mis on kõik toodud joonisel 20. Neile vastavad sümmeetriarühmad on järgmised. Rühm L_1 koosneb nihetest teatud lõigu a ja tema kordsete võrra. L_1 on isomorfne täisarvude aditiivse rühmaga. Rühmad L_2, L_3, L_4 ja L_5 on saadavad rühmast L_1 vastavalt järgmiste teisenduste lisamisel: pööre 180° võrra äärise teljel asetseva punkti ümber, peegeldus äärise tel-



Joonis 19. Tasandiliste ornamentide tüübid.



Joonis 20.

ega risti asetseva sirge suhtes, peegeldus äärise telje suhtes ning lõpuks kahe teisenduse — nihke $\left(\text{lõigu } \frac{a}{2} \text{ võrra}\right)$ ja peegelduse (äärise telje suhtes) korrutis. Rühmad L_9 ja L_7 saadakse vastavalt rühmadest L_4 ja L_5, lisades neile peegelduse äärise teljega ristuva sirge suhtes.

Võib vaadelda ka tsentraalsümmeetrilisi ornamente, kuid nende sümmeetriarühmad ei erine millegi poolest lõplike tsentraalsümmeetriliste geomeetriliste kujundite sümmeetriarühmadest, mis on allpool juba kirjeldatud.

Esimeseks teadusalaks, milles rühmateooriat rakendati sügavate probleemide lahendamiseks, osutus omal ajal kristallograafia. Nimelt klassifitseeris tuntud vene matemaatik J. S. Fjodorov 1890. a. kõik korrapärased ruumivõred, kasutades seejuures selliste võrede sümmeetriarühmi. Selgus, et niisuguseid rühmi — neid nimetatakse *kristallograafilisteks rühmadeks* ehk *Fjodorovi rühmadeks* — on 230, kusjuures 65 rühma ei sisalda peegeldusi ja 165 sisaldavad neid. Mõistagi, et kristallograafid ei suutnud enne rühmateooria kasutamiselevõtmist ise anda sellist ammendavat klassifikatsiooni ning pidid piirduma palju jämedama liigitusega.

Ülesandeid:

29. Kas korrapärase hulknurga sümmeetriarühm on isomorfne dieedri rühmaga?

30. Tõestada, et kolmnurga liikumised, mis teisendavad teda iseendaks omaks, moodustavad S_3-ga isomorfse rühma (vt. joon. 2).

31. Mitmel geomeetriliselt erineval viisil võib värvida kuubi tahud kuue värviga?

32. Millised on tetraeedri tahkude kaks erinevat värvimise viisi?

SEMIOOTIKA JA ÕPPEPROTSESS

I. Kull

Viimastel aastatel on üha enam hakatud tähelepanu pöörama *semiootikale* — õpetusele märgisüsteemidest. Selle põhjuseks on asjaolu, et semiootika võimaldab ühtsest ja küllalt üldisest seisukohast käsitleda tegelikkuse väga paljusid nähtusi ja protsesse. Tihedas seoses on semiootika keeleteadusega, informatsiooniteooriaga ja järelikult ka küberneetikaga.

Käesolevas kirjutises püüame selgitada semiootika põhimõisteid ja rakendusvõimalusi eeskätt õppeprotsessi analüüsimisel.

On hästi teada, et mistahes aine õpetamisel on määrava tähtsusega selle aine õpetamise eesmärk. Nii võib näiteks mingi matemaatilise aine õpetamisel eesmärgiks olla kas teatava ülevaate andmine vastavast ainest või meetodite andmine selles aines esinevate konkreetsete ülesannete lahendamiseks. Arusaadavalt on aine õpetamise käik neil kahel juhul küllaltki erineva iseloomuga.

Õpetatav aine koos õpetamise eesmärgiga määrab kindlaks need objektid, mille konstrueerimist on vaja õpetada. Selgitame seda näidete varal. Vaatleme näiteks mingi võõrkeele õpetamist, kus õpetamise eesmärgiks on praktilise keeleoskuse tagamine. Antud eesmärgi korral on vaja õpetada konstrueerima selle keele lauseid ja väljendeid. Väljendid ja laused pole aga keele jagamatuteks üksusteks. Jagamatuteks üksusteks keeles on häälikud, millest moodustatakse esiteks sõnad ja nendest omakorda kindlate konstruktsioonireeglite abil väljendid ja laused. Keele valdamisel tuleb kõiki neid konstruktsioonireegleid osata praktiliselt rakendada.

Teise näitena vaatleme veidi üksikasjalikumalt täisarvude aritmeetikat, kus eesmärgiks on aritmeetiliste avaldiste arvulise väärtuse arvutamise õpetamine.

Jagamatuteks üksusteks on siin järgmised objektid:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ +,\ -,\ \times,\ (,),\ =$$

(koma «,» muidugi välja arvatud). *Seda sümbolite loetelu nimetame täisarvude aritmeetika tähestikuks, tähestiku sümboleid aga selle tähestiku tähtedeks. Tähestiku tähtede lõplikke jadasid* *nimetame sõnadeks selles tähestikus.* Nii on sõnadeks täisarvude aritmeetika tähestikus näiteks:

5907
(24 — 15) × 6 — 38
3) + (— × = ·

Täisarvude aritmeetika sõnu tähistame vajaduse korral sümbolitega P, Q, R jne. Kasutades neid tähiseid on kerge defineerida uusi mõisteid, nagu «kahe sõna ühendus». Nii nimetame sõnade P ja Q ühenduseks sõna, mille saame, kui sõnale P kirjutame järele sõna Q. Nii on näiteks sõnade 34 ja 08 ühenduseks sõna 3408. Sõnade P ja Q ühendust tähistame PQ abil.

Mitte kõik sõnad täisarvude aritmeetika tähestikus pole olulised täisarvude aritmeetika ülesehitamisel. Olulised on ainult teatud liiki sõnad, nagu täisarvud, aritmeetilised avaldised ja aritmeetilise avaldise väärtuse arvutamised. Need sõnaliigid võib kõik täpselt defineerida. Esitame näiteks täisarvu definitsiooni (induktiivse definitsioonina):

1. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 *ja* 9 *on märgita täisarvud;*
2. *kui P ja Q on märgita täisarvud, siis on nende ühendus PQ märgita täisarv;*
3. *kui P on märgita täisarv, siis on $+P$ ja $—P$ märgiga täisarvud;*
4. *kõik märgita ja märgiga täisarvud on täisarvud.*

Nii on selle definitsiooni kohaselt näiteks sõnad 79, —134, 092 ja +00048 täisarvud.

Aritmeetilise avaldise defineerime samuti induktiivselt:

1. *kui P on täisarv, siis on P aritmeetiline avaldis;*
2. *kui Q ja R on aritmeetilised avaldised, siis on $(Q)+(R)$, $(Q)-(R)$ ja $(Q)\times(R)$ aritmeetilised avaldised;*
3. *kui Q on aritmeetiline avaldis, siis on $+(Q)$ ja $—(Q)$ aritmeetilised avaldised.*

Toodud definitsiooni põhjal võime öelda, et näiteks sõna

$$(((24) - (15)) \times (6)) - (38) \tag{1}$$

on aritmeetiline avaldis.

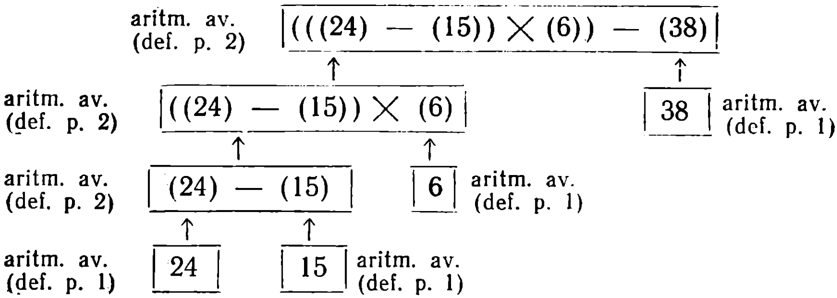
Viimast väidet võib kontrollida nii: et 24 ja 15 on aritmeetilised avaldised (vt. aritmeetilise avaldise definitsiooni p. 1), siis on (24)—(15) aritmeetiline avaldis (def. p. 2); et 6 on aritmeetiline avaldis (def. p. 1), siis on ((24)—(15))×(6) aritmeetiline avaldis (def. p. 2); et 38 on aritmeetiline avaldis (def. p. 1), siis on

$$(((24)-(15))\times(6))-(38)$$

aritmeetiline avaldis (def. p. 2).

Toodud mõttekäiku (ühtlasi ka aritmeetilise avaldise (1) konstrueerimist) võib esitada skemaatiliselt nii:

3*



Joonis 1.

Joonisel 1 ristkülikutes kirjutatud aritmeetilisi avaldisi nimetatakse antud aritmeetilise avaldise (1) *osaavaldisteks*. Nagu nähtub juba avaldisest (1), esineb selles suur hulk sulge. Need on vajalikud aritmeetilise avaldise konstrueerimise järjekorra (ehk osaavaldiste) kindlaksmääramiseks. Teatavate lisakokkulepete abil on aga võimalik sulgude arvu vähendada, ilma avaldise konstrueerimise (ehk osaavaldiste) kohta käiva informatsiooni kaotamiseta.

Ülalöeldut silmas pidades lepime kokku, et 1) märgita täisarvu pole vaja sulgudesse paigutada; 2) märk «$\times$» seob avaldisi tihedamini kui märgid «$+$» ja «$-$», s. t. et näiteks avaldisi $(P)\times(Q)+(R)$ ja $(P)\times(Q)-(R)$ (P, Q ja R on aritmeetilised avaldised) tuleb mõista vastavalt avaldistena $((P)\times(Q))+(R)$ ja $((P)\times(Q))-(R)$; 3) aritmeetilised avaldised $+(+(R))$, $+(-(R))$, $-(+(R))$ ja $-(-(R))$, kus R on aritmeetiline avaldis, võib asendada vastavalt avaldistega $+(R)$, $-(R)$, $-(R)$ ja $+(R)$.

Seega saame avaldise (1) kirjutada kujul

$$(24-15)\times 6-38. \qquad (2)$$

Aritmeetilise avaldise väärtuse arvutamise juurde asudes tuleb kõigepealt defineerida aritmeetilised tehted: liitmine, lahutamine ja korrutamine täisarvude puhul, ehk teisiti öeldes, nn. elementaarsete aritmeetiliste avaldiste

$$(P)+(Q),$$
$$(P)-(Q),$$
$$(P)\times(Q)$$

väärtused, kus P ja Q on täisarvud. Lihtsuse pärast oletame, et need tehted on defineeritud vastavate algoritmide abil.

Aritmeetilise avaldise R väärtuse arvutamiseks nimetame sõna kujul

$$R=R_1=R_2=\ \dots\ =R_n,$$

kus $R_1, R_2, \ldots, R_n$ on aritmeetilised avaldised, avaldis R_i $(i \geqslant 1)$ on saadud eelmisest avaldisest R_{i-1} $(R_0 \equiv R)$ mingi elementaarse aritmeetilise avaldise (nimelt osaavaldise) asendamise teel selle avaldise väärtusega, ja R_n on täisarv. Arvu R_n nimetamegi aritmeetilise avaldise R väärtuseks.

Aritmeetilise avaldise (2) väärtuse arvutamine on näiteks järgmise kujuga sõna:

$$(24 - 15) \times 6 - 38 = 9 \times 6 - 38 = 54 - 38 = 16. \qquad (3)$$

Arvutuse (3) põhjal võime veenduda, et see kujutab endast tõepoolest teatava sõna konstrueerimist täisarvude aritmeetika tähestikus.

Analoogiliselt täisarvude aritmeetikaga võib eraldada vastavad tähestikud ka mistahes teise aine või oskuse õpetamisel. Nii võib näiteks mingisuguse masina käsitlemise õpetamisel kõik vajalikud tööoperatsioonid (juhtimisoperatsioonid) taandada nn. elementaarseteks operatsioonideks, mis moodustavadki vastava tähestiku. Kompleksne tööoperatsioon on seega vaadeldav teatava sõnana elementaarsete tööoperatsioonide tähestikus.

Nagu näeme, saab mistahes aine või oskuse õpetamist vaadelda kui teatud liiki sõnade konstrueerimise õpetamist. Õpetatavasse ainesse kuuluvad sõnad moodustavad süsteemi, mida nimetatakse objektkeeleks. Toodud näidetes oli objektkeeleks vastavalt võõrkeel, täisarvude aritmeetika ja masina käsitlemine.

Objektkeele ülesehitamine ja õpetamine pole aga võimalik ainuüksi sellesama objektkeele abil. Selleks on vaja kasutada veel mingit informatsiooni edasiandmise süsteemi, mida nimetatakse metakeeleks vaadeldava objektkeele jaoks.

Nii on näiteks inglise keele õpetamisel eesti õppekeelega koolis objektkeeleks inglise keel, metakeeleks aga tavaliselt eesti keel. Eesti keele õpetamisel eesti õppekeelega koolides objektkeel ja metakeel nagu ühtiksid. Tegelikult on aga ka sel juhul objektkeelt ja metakeelt võimalik täiesti selgesti eraldada. Nii näiteks kuuluvad eesti keele grammatika käsitlemisel kõik seletused, põhjendused ja reeglid metakeelde, konkreetsed harjutused ja näited aga objektkeelde.

Toodud näites täisarvude aritmeetika kohta oli metakeeleks eesti keel, millele lisandusid teatud sümbolid nagu P, Q, R, $R_1, R_2, \ldots, R_n$ jms. Märgime, et täisarvude aritmeetika mõistete (täisarv, aritmeetiline avaldis jne.) defineerimine pole võimalik ilma metakeele kasutamiseta.

Toome veel mõned näited objektkeele ja metakeele vahe selgitamiseks.

1. Oletame, et mingi ettevõtte juhataja dikteerib sekretärile järgmise «kirja»:

Gagarini esimehele.

Vastuseks Teie kirjale *sellest ja sellest kuupäevast* teatame, et täidame Teie tellimuse (*loetlege* 5 *esimest nimetust ja vastavad kogused, mis on nende kirjas toodud*) k. a. II kvartalis, ülejäänud seadmed aga III kvartalis. *Kuupäev, allkiri.*

Esitatud «kirjas» esinevad üheaegselt nii objektkeele kui ka metakeele väljendid (viimased on antud kursiivis). Vastavatest metakeele väljenditest lähtudes tulevad alles leida need objektkeele väljendid, mis peavad esinema kirjas selle lõplikul kujul. Järgmised näited käivad metakeele ja objektkeele mitteeristamise kohta.

2. Algoritmilise keele ALGOL-60 esituses tuuakse mõnikord selgitusi vastavate konstruktsioonide kohta niisugusel kujul: liitoperaator moodustatakse skeemi

$$\text{begin } \mathfrak{A}_1;\ \mathfrak{A}_2;\ \ldots\ ;\ \mathfrak{A}_n \text{ end},$$

kus ($\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, ... , $\mathfrak{A}_n$ on operaatorid) põhjal. Sellised üldised skeemid kuuluvad põhimõtteliselt metakeelde, kuid võivad sisaldada ka objektkeele sümboleid (nagu ülaltoodud kiri). Niisuguste skeemide puhul tuleb skeemis esinevad metasümbolid asendada vastavate objektkeele konstruktsioonidega, objektkeele sümbolid aga jätta asendamata. Asi on siin nimelt selles, et sõna «...» tuleb mõista kui metakeele väljendit «ja nii edasi», kuid samaaegselt on «.» ka objektkeele täheks. Arusaamatuste vältimiseks tuleks kasutada spetsiaalseid sümboleid $<$,$>$ metakeele väljendite tähistamiseks ja kirjutada kas

$$\text{begin } \mathfrak{A}_1;\ \mathfrak{A}_2;\ <\ldots>;\ \mathfrak{A}_n \text{ end}$$

või

$$\text{begin } \mathfrak{A}_1;\ \mathfrak{A}_2;\ <\text{ ja nii edasi }>;\ \mathfrak{A}_n \text{ end.}$$

3. Koreas kehtib komme, et peigmees peab pulmaööl demonstreerima külanoortele oma teravmeelsust (vt. [1] lk. 402).

Kord pandi kahekümneaastane neiu mehele kolmeteistkümneaastasele poisile. Peigmees kartis väga eelseisvat proovi, mõrsja lubas teda aga aidata. Kui küla noorsugu kogunes nende fansa akna alla, oodates peigmehe sõnu, läks peigmees akna juurde, mõrsja aga peitis end aknast pisut kaugemale.

«Kas kuuled?» küsis naine.

«Kas kuuled?» kordas mees valjusti.

«Kuuleme, kuuleme», vastati talle õuest lõbusalt.

«Seda ma küsisin sinu käest,» sosistas naine.

«Seda ma küsisin sinu käest,» ütles mees valjult.

«Metsas kasvab noor mänd,» sosistas naine.

Mees kordas, kuid sedavõrd kiiresti, et naine sosistas talle:

«Tasem, tasem...»

Ja mees kordas:

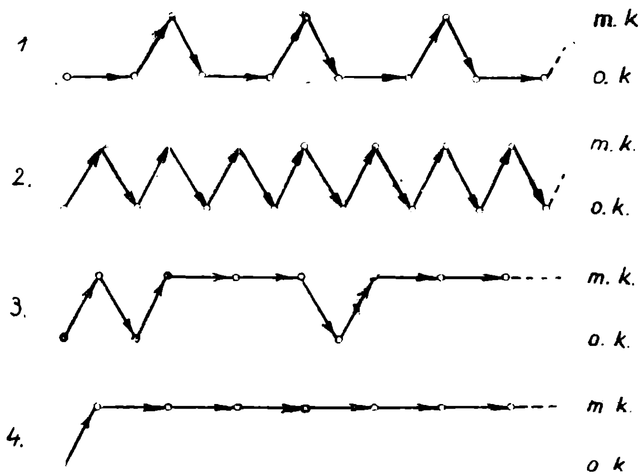
«Tasem, tasem.»

— — — — — —

Objekt- ja metakeele väljendite mitteeristamise tõttu said külanoored varsti aru, et peigmees lihtsalt kordab oma mõrsja sõnu.

Nagu nägime, on metakeele kasutamine mistahes aine õpetamisel möödapääsmatu. Probleem seisneb aga õige (optimaalse) vahekorra leidmises objekt- ja metakeele vahel. Võimalikke vahekordi on muidugi palju. Joonisel 2 on nendest esitatud mõned tüüpilised juhud.

Juhtumil 1 tuuakse kõigepealt objektkeele tähestik, seejärel mingit mõistet ettevalmistavad näited (objektkeeles). Pärast seda defineeritakse see mõiste (metakeeles), millele järgneb materjali kinnistamine (harjutusülesanded) objektkeeles. Analoogilisel viisil jätkub õpetamise käik ka edaspidi.



Joonis 2. (m. k. — metakeele tase, o. k. — objektkeele tase).

Juhtum 2 erineb eelmisest juhtumist selle poolest, et siin puuduvad mingit mõistet või konstruktsiooni ettevalmistavate näidete etapid. Mõistete või konstruktsioonide definitsioonidelt (metakeeles) minnakse edasi harjutusmaterjalile objektkeeles, sellelt omakorda uuele definitsioonile metakeeles jne. Tähendame, et eespool toodud näide täisarvude aritmeetika ülesehituse kohta ühtib üldjoontes käsitlusega juhtumil 2.

Juhtum 3 erineb eelmisest selle poolest, et näiteid ja harjutusmaterjali objektkeeles ei esitata uute mõistete ja konstruktsioonide puhul mitte alati, vaid ainult teatavatel keerulisematel juhtudel.

Neljandal juhtumil toimub pärast objektkeele tähestiku esitamist kogu käsitlus metakeeles.

Uue materjali esitamise kiirus on esimesel juhtumil kahtlemata kõige väiksem ja neljandal juhtumil kõige suurem. Sellest hoolimata ei saa aga neljandat juhtumit lugeda parimaks, sest õpilastel võib tekkida tõsiseid raskusi metakeele konstruktsioonide realiseerimisel objektkeeles. See aga pole kooskõlas õpetamise eesmärgiga. Otstarbekohaseimaks õpetamisviisiks tuleb lugeda mingisugust kombinatsiooni esimesest kolmest juhtumist, arvestades õpilaste arengu taset ja materjali keerukust. Kuidas seda optimaalset kombinatsiooni leida, on muidugi omaette probleem, mille uurimisele on alles asutud.

Mingi aine ülesehitamisel analoogiliselt täisarvude aritmeetika ülesehitusega eespool toodud näites anname tegelikult selle aine süntaktilise ülesehituse. Süntaktilise ülesehituse korral esitatakse selle aine n. ö. sisemine struktuur: defineeritakse võimalikult täpselt eri liiki sõnad, operereerimisreeglid sõnadega jms. Kuid objektkeele sõnad ei kujuta alati tegelikkuse tunnetamise vahetut astet ja nõuavad seega nende seostamist objektiivse reaalsusega. Objektkeele sõnade sellist seostamist nimetatakse nende sõnade *semantiliseks* interpreteerimiseks. Selline interpreteerimine on tingimata vajalik objektkeele rakendamisel, samuti aga ainete õpetamisel.

Tegelikult kujutab semantiline interpreteerimine endast üldise metakeele teatud spetsiaalset taset, mida võib nimetada ka antud objektkeele semantika metakeeleks. Metakeelt, mida kasutame objektkeele süntaktiliseks ülesehituseks, võib nimetada antud objektkeele süntaksi metakeeleks.

Emakeele õpetamisel pööratakse peatähelepanu tavaliselt selle keele süntaktilisele ülesehitusele [1], sest selle keele semantiline külg on õpilastele praktiliselt küllaltki hästi teada. Vajaduse korral kasutatakse üksikute sõnade ja väljendite semantilisel interpreteerimisel sellesama keele sõnu ja väljendeid.

Võõrkeele õpetamisel antakse sõnade ja väljendite semantiline interpretatsioon paralleelselt selle keele süntaktilise ülesehitusega. Semantilise interpretatsiooni andmisel kasutatakse mitmesuguseid vahendeid: emakeelt, õpetatava keele semantiliselt juba omandatud osi, esemete ja piltide demonstreerimist jne.

Matemaatiliste ainete õpetamisel võib eristada vähemalt kaht erinevat semantilise interpreteerimise võimalust. Üks nendest on suuruste, matemaatiliste mõistete, vahekordade konstruktsioonide jms. geomeetriline interpreteerimine. Selle küllaltki universaalse ja üldarusaadava interpretatsiooni kasutamine suurendab kahtlemata õppeprotsessi efektiivsust. Kuid sellel interpretatsioonil on ka omad piirid: teda ei tohi kasutada selles mõttes, et sealt välja lugeda uusi, senitõestamata fakte.

Matemaatiliste mõistete, vahekordade jms. semantilise interpreteerimise teine võimalus seisneb nende interpreteerimises mehhaanika, füüsika, majandusteaduse ja teiste mittematemaatiliste mõistete abil. Tuleb märkida, et sellistele interpreteerimise või-

[1] Süntaksi mõiste semiootikas hõlmab ka morfoloogia mõiste traditsioonilises grammatikas.

malustele ei pöörata matemaatika õpetamisel alati küllaldast tähelepanu. Niisugune olukord ei soodusta aga matemaatika rakendusvõimaluste nägemist ja võib õppijates vähendada huvi matemaatika vastu.

Viimastel aastatel on matemaatikud loonud väga palju abstraktseid kunstlikke keeli (FORTRAN, IT, ALGOL-60, COBOL jt.) nii automaatse programmeerimise kui ka teistel eesmärkidel. Nendes keeltes on hästi eraldatavad niisugused küljed nagu objektkeel, süntaks ja semantika. Esineb teoseid, kus vastavate abstraktsete keelte käsitlemisel ei pöörata semantikale küllaldast tähelepanu (näiteks ALGOL-60 ametlik väljaanne). Sellised tööd ei sobi muidugi esimeseks tutvumiseks nende keeltega, sest nad on raskesti arusaadavad ja võivad tekitada lugejas lootusetuse tunde (vt. [2], lk. 3).

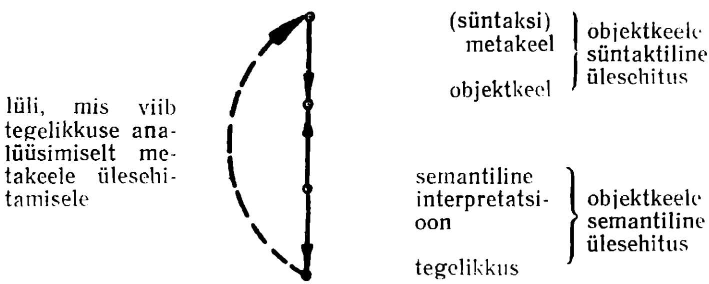
Mõnel pool on väidetud, et raskused matemaatika õpetamisel on tingitud eeskätt matemaatika abstraktsusest. Kui mõista abstraktsust semantilise interpreteerimise keerukuse mõttes, siis vastab see seisukoht ainult osaliselt tegelikkusele. Raskused matemaatika õpetamisel võivad tekkida ja tekivad aga ka seetõttu, et aine esitamises liialdatakse süntaksi metakeelega objektkeele arvel. Samuti tekivad raskused siis, kui objektkeel on väga keerulise struktuuriga (objektkeeles on väga suur hulk eri liiki sõnu, millega opereeritakse erineval viisil). Kuid viimased asjaolud pole üldse seotud abstraktsusega, sest semantilise interpreteerimise probleem jääb seal täiesti kõrvale.

Tuleb märkida, et süntaksi ja semantika vahekorra probleem on üldise sisu ja vormi vahekorra probleemi eriaspekt. Nendel probleemidel on aga ka erinevusi. Näiteks tuleb tunnistada täiesti ekslikuks mõnede matemaatikute-formalistide esitatud seisukoht, et matemaatika on õpetus vormidest, millel puudub üldse igasugune sisu. Seevastu tuleb tunnistada, et objektkeele süntaksit (eriti matemaatiliste ainete puhul) on võimalik esitada ilma semantilise interpretatsiooni abita. Asi seisneb nimelt selles, et matemaatilist teooriat ei saa samastada selle teooria objektkeele süntaksiga, mis, nagu me eespool esitatust teame, on ainul üks osa sellest teooriast.

Joonis 3.

Kui vaadelda praktiliste oskuste õpetamist (masinate käsitlemine, võimlemine jms.), siis nende puhul ei vaja objektkeele sõnad (vastavad füüsilised liigutused) spetsiaalset semantilist interpreteerimist. Ka mängude puhul puudub semantilise interpretatsiooni tase. Teisiti on aga lugu kunsti valdkonnas, kus semantiline interpreteerimine on oluline. Joonisel 3 on kujutatud stseen Peer Gynti (Ü. Rannaste) ja Solveigi (T. Saealle) tantsust, mille semantika andis balleti lavastaja Ida Urbel sõnadega «See on nende armastuse lugu». Märgime veel, et kuigi ballett on väliselt sarnane kunstilise võimlemisega, on balletis väga oluline semantiline interpreteerimine, mis kunstilise võimlemise puhul aga üldse puudub.

Kokkuvõtlikult võib ülalkäsitletud semiootilisi tasemeid esitada järgmise skeemi abil:



Õpetamise eesmärk saavutatakse õpetatava aine objektkeele süntaksi ja semantika omandamisega (kui viimane antud aine puhul üldse esineb). Kuid peale selle on otstarbekohane anda õpilastele ülevaade ka metakeele ülesehitamise lähtekohtadest.

Skeemi on võimalik täiendada veel kahe komponendiga: õpilane ja õpetaja (või teda asendav seade), mis on omavahel ühendatud otse- ja tagasisidekanalitega. Selle täienduse korral avaneb võimalus uue semiootilise aspekti — p r a g m a a t i k a — käsitlemiseks, mis uurib märgisüsteemide vahekordi nende kasutajaga. Käesolevas kirjutises pole aga võimalik sellest üksikasjalikumalt kõnelda.

Tähendame, et õppeprotsessi semiootiline analüüs aitab paremini aru saada selle protsessi loogilisest struktuurist ja võib abiks olla õppeprotsessi efektiivsuse suurendamise võimaluste otsingul. Semiootiline lähenemisviis on ilmselt otstarbekohane sel juhul, kui soovime kasutada matemaatilisi meetodeid, samuti programmeeritud õpetamise printsiipide rakendamise korral.

Kirjandus

1. N. G a r i n, Ümbermaailmareisi päevikutest, Tln., 1957.
2. Н. И. А г е е в, Основы алгоритмического языка АЛГОЛ-60, М., 1964.

INIMENE VESTLEB MASINAGA

Intervjuu Claude Shannoniga

Käesoleva aasta kevadel viibis Nõukogude Liidus külaskäigul tuntud ameerika õpetlane Claude Shannon, üks küberneetika loojaid.

Claude Shannon sündis 1916. a. Gaylordi linnas (Michigani osariik, USA-s). 1936. a. lõpetas ta Michigani Ülikooli elektrotehnika ja matemaatika erialal ja asus tööle Massachusettsi Tehnoloogia Instituuti, kus uuris releeja lülitusskeeme. Tänu eelkõige tema töödele muutus kõige abstraktsem matemaatikaharu — matemaatiline loogika — hädavajalikuks instrumendiks sidetehnika probleemide lahendamisel. 1940. a. omistati Shannonile elektrotehnika magistri ja matemaatikadoktori kraad. Ajavahemikul 1940.—1956. a. töötas ta Belli Telefonikompaniis. Koos N. Wieneriga rajas ta sellel perioodil informatsiooniteooria alused. Praegu töötab Shannon Massachusettsi Tehnoloogia Instituudis professorina.

Claude Shannoni töödes on õnnelikult ühendatud sügavad matemaatilised ideed tehnika probleemide laiahaardelise analüüsiga. Tema tööd informatsiooniteooria, automaatide teooria, tõenäoste skeemide teooria ja juhitavate süsteemide teooria alalt moodustavad N. Wieneri tööde kõrval selle aluse, millele rajati küberneetika kui teadus.

Claude Shannon on USA Rahvusliku Akadeemia ja Ameerika Kunstide ja Teaduste Akadeemia liige.

Allpool esitame Shannoni vastused ajalehe «Литературная газета» korrespondendile[1].

— Mida võite öelda küberneetika arengu perspektiividest?

— *Eelkõige on vaja kokku leppida, mida mõista küberneetika all. Kuigi küberneetika tekke momendist on möödunud peaaegu kakskümmend aastat, ei ole teaduslikes ringkondades vaibunud vaidlused selle üle, milline sisu anda sõnale «küberneetika». Mõned teadlased on jõudnud äärmuslike seisukohtadeni: nad kas kuulutavad küberneetikaks peaaegu kõik teadusliku mõtte suunad või siis üldse eitavad küberneetika kui teaduse olemasolu.*

Kuigi iga definitsioon on siin üpris tinglik, näib mulle, et küberneetika all tuleb mõista kõigi teaduste hulka, mis on seotud arvutusmasinate arendamise ja kasutamisega, peaaju töö tundmaõppimisega ja selle uurimisega, kuidas peaaju juhib organismi kõiki funktsioone. Kui nõustuda sellise üsna avara definitsiooniga, siis tuleb kohe märkida, et küberneetika asub oma arengu kõige madalamal etapil. Ma ei kahtle, et edaspidine areng toimub tormiliselt. Kasutades meie matemaatilisi termineid võib

[1] «Литературная газета», 22. mai 1965. a. Tõlkinud ja sissejuhatusega varustanud G. Vainikko.

öelda, et küberneetika areng hakkab kulgema eksponentsiaalselt. Selle arvamuse õigsuse pandiks on üha laienev arvutusmasinate kasutamine.

— Mister Shannon, millist küberneetika ees seisvatest ülesannetest peate tähtsaimaks?

— *Ma ei julge eraldada kogu küberneetika kõige tähtsamat probleemi. Lubage mul parem jutustada probleemist, mis mind ennast kõige enam erutab. See on inimese suhtlemine masinaga. Asi on selles, et meie mõistuse sünnitised mõtlevad nähtavasti hoopis teisiti kui meie — rangelt loogiliselt, ilma igasuguste metafooride ja assotsiatsioonideta. Seetõttu ei ole neile ükski inimkeel arusaadav, see on neile liiga piltlik, ebatäpne. Peaaegu iga lauset meie keelepruugis võib mõista mitmeti, aga masinal pole seni intuitsiooni, mis võimaldaks lause mitmest tähendusest valida ainsa vajaliku. Seetõttu on välja töötatud spetsiaalsed vahenduskeeled, mis on arusaadavad nii masinale kui ka inimesele. Viimasel kümnel aastal on selles asjas saavutatud suurt edu. Ainuüksi Ameerika Ühendriikides on välja mõeldud üle poolteise tuhande sellise keele. Kuid vähehaaval hakkas olukord meenutama paabeli segadust — erinevate firmade masinad ei saanud üheskoos töötada, sest nad «rääkisid» erinevates keeltes. 1958. a. alustati ühtse rahvusvahelise vahenduskeele — ALGOL'i — loomist. Järgmisel kahel aastal seda pisut täiustati ning nüüd räägivad teadlased masinatega kõikjal keeles ALGOL-60.*

Kuid rahvusvahelise masinkeele loomine ei lahendanud sugugi kõiki probleeme. See keel ei ole küllalt mahukas, et väljendada kõiki ülesandeid.. Keel, mis seda võimaldaks teha, peaks olema ülimalt mahukas ja painduv. Kuid see tähendab, et ka tema õppimine oleks raske. Vastuolu ühelt poolt keele vabaduse, paindlikkuse ja piltlikkuse ning teiselt poolt keele loogilisuse, ühetähenduslikkuse ja täpsuse vahel ei ole senini lahendatud.

— Arvatavasti Te teate, et kaks aastat tagasi avaldas noor nõukogude teadlane Andrei Jeršov mõtte selle kohta, kuidas seda probleemi tema arvates tuleks lahendada. Ta tegi ettepaneku luua inimese ja masina vahel nn. «dünaamiline seos». Inimene esitab masinale ülesande oma tavalises keeles. Kui masin ei saa millestki aru, siis ta esitab küsimuse, nõudes teksti ühe või teise osa lõigu ümberfraseerimist või täiendavat informatsiooni nendest mõistetest või grammatilistest konstruktsioonidest, mis ei ole talle tuttavad. Mõne aja möödudes saab kogu ülesanne masinale selgeks.

Kas inimese ja masina «dünaamilise seose» meetod näib Teile perspektiivsena?

— *Ma pean seda meetodit üsna perspektiivseks. Me läheme Ameerikas umbes sama teed. Tõsi küll, tuleb öelda, et meie* *kogemused selles suunas on alles mängu staadiumis. Kuid väga paljud küberneetika edusammud on välja kasvanud just sellistest teaduslikest meelelahutustest. On olemas üks mäng — sellest peetakse lugu nii meil kui ka arvatavasti teie maal. Mõistatakse mingit isikut või sündmust ja on vaja, esitades küsimuse küsimuse järel, teada saada, keda või mida nimelt mõeldakse. See mäng ei ole sugugi nii lihtne — ta nõuab kujutlusvõimet, loogikat ja teatud teadmiste hulka. Muidugi ei ole ühelegi kaasaegsele masinale selline meelelahutus jõukohane. Kuid hiljuti katsetati programmi aukartustäratava nimega «Sir», mille abil õnnestus masinalt saada vastus küsimusele: «Mitu sõrme on Johnil?» Viieaastane laps naeraks kuuldes, kui palju aega ja jõupingutusi nõudis, et rebida masinalt vastus sellele küsimusele. Kuid täiskasvanud inimesele on selge, kui palju informatsiooni tuli masinale anda õige vastuse saamiseks.*

Sellega on visandatud uus, värske ja üpris viljakas lähenemisviis küsimusele inimese ja masina suhtlemisest. Kuid kaugeltki mitte kõik raskused ei taandu lingvistilistele, loogilistele või matemaatilistele ülesannetele. Et kontakt oleks täielik, tuleb masin varustada mingi organiga, mis oleks ekvivalentne inimese silma ja kõrvaga. Teiste sõnadega, ta peab õppima omandama nähtavat ja kuuldavat informatsiooni vahetult, kodeerimata kujul. Kuid see on tuleviku probleem.

— Mister Shannon, laialt on tuntud teie varajasemad tööd elavate olendite lihtsaimate käitumisaktide modelleerimisest — ma pean silmas kuulsat kunstlikku hiirt labürindis. Kuidas edenevad need uurimused nüüd?

— Juhtus nii, et selle probleemi uurimise sisemine loogika tõi meid ka siit ülesande juurde, mis on väga lähedane äsja käsitletuga, — kujundite äratundmise ülesande juurde. Sest selleks, et masin saaks «nägijaks», tuleb luua talle mitte ainult nägemisorganid, vaid õpetada teda ka vastandama välismaailmast saadud informatsiooni sellega, mis on masinas juba olemas. Teiste sõnadega, «nähes» mingit objekti, peab masin selle «ära tundma».

Mõne aasta eest ehitas mu õpilane Heinrich Ernst, siis veel Massachusettsi Tehnoloogia Instituudi aspirant, manipulaatorkäe küllaltki keerulise mehhaanilise, elektronarvuti poolt juhitava mudeli. Manipulaator pidi korjama kokku klotse, mis olid puistatud laiali, ja paigutama need laual asuvasse karpi. See lihtne ülesanne osutus masina jaoks väga keeruliseks. Kõigepealt leiab automaat karbi ja jätab meelde selle asukoha. Seejärel asub ta klotside otsimisele, ja leidnud esimese, teeb kindlaks selle asukoha ja mõõtmed, et mugavamalt temast «kinni haarata». Võtnud klotsi sõrmede vahele, asetab käsi selle karpi ja siirdub teise klotsi järele.

Pisut erinev on teine meie otsingute suund esemete äratundmise alalt — püüe õpetada masinat «lõpuni joonistama» esemete neid osi, mis mingil põhjusel on tema eest varjatud. Näitame masinale näiteks portfelli, mille käepide on kaetud tuhatoosiga. Eelneva kogemuse põhjal, — aga masinale on eelnevalt näidatud mitmesuguseid esemeid ja ta teab, milliseid portfelle on üldse olemas, — masin, esiteks, identifitseerib eseme, s. t. väidab, et see on portfell ja mitte miski muu ning teiseks, «joonistab lõpuni» selle täieliku kuju.

Minu arvamine on, et seda tüüpi töödel on suur tulevik.

— Millised muljed on Teil Moskvast?

— *Kõige meeldivamad. Ma kohtusin oma kolleegidega — nõukogude õpetlaste A. Kolmogorovi, V. Kotelnikovi, V. Siforoviga, viibisin Teaduste Akadeemias, Moskva Ülikoolis, Automaatika ja Telemehhaanika Instituudis. Teadusliku informatsiooni vaba vahetus on olnud tähtis kõigil aegadel, aga nüüd, kus teaduse progress on nii tormiline, on see eriti tähtis.*

Veel üks moment, mida ei tohi unustada: õpetlaste aktiivne suhtlemine on tähtis rahvusvahelise pinevuse lõdvendamise vahend.

JÄRJESTIKUSED NULLID ARVUS 2^n

On kerge veenduda, et vähimaks n väärtuseks, mille puhul arvu 2^n kirjutis kümnendsüsteemis sisaldab numbrit null, on $n = 10$. Tõepoolest, $2^{10} = 1024$. Hoopis rohkem arvutamist nõuab niisuguse vähima n leidmine, mille puhul arvus 2^n sisaldub k a k s j ä r j e s t i k u s t n u l l i. Vastuseks saame $n = 53$, sest

$$2^{53} = 9007199254740992.$$

Kuidas on aga olukord edasi? Kas võib arv 2^n sisaldada kolm, neli jne. j ä r j e s t i k u s t n u l l i? Ameerika matemaatikud E. K a r s t ja U. K a r s t leidsid elektronarvutit IBM-1620 kasutades, et vähimad n väärtused, mille puhul arv 2^n sisaldab neli, viis, kuus, seitse ja kaheksa järjestikust nulli, on vastavalt järgmised:

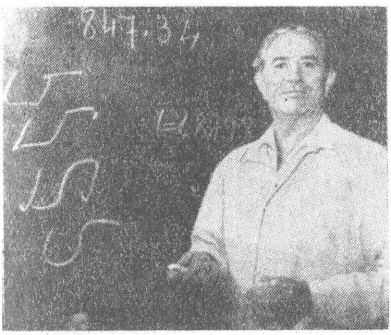
$$n = 377, \ 1491, \ 1492, \ 6801 \ \text{ja} \ 14007.$$

Jätkates arvutusi kuni väärtuseni $n = 60\,000$, ei leidnud nad ühtegi arvu 2^n, milles oleks üheksa järjestikust nulli.

Lugeja pani muidugi tähele, et siin toodud ülevaates on lünk sees. Seega avaneb tal võimalus iseseisvaks nuputamiseks: millise vähima n puhul sisaldub arvus 2^n k o l m j ä r j e s t i k u s t n u l l i?

IGAÜKS VÕIB KIIREMINI ARVUTADA[1]

Laszlo Molnár

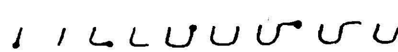


«Kiire arvutamine», «Kiiremini, kui arvutusmasinal», «Stenograafia matemaatikas» ... sellised pealkirjad ilmusid hiljuti Ungari ajalehtedes ja ajakirjades. Artiklites kirjutati uuest arvutusmeetodist, mille leiutas doktor Laszlo Molnár. «Ta vabanes oma matemaatikas kõigist neljast aritmeetilisest tehtest ja numbritest, asendades neid sümboolsete märkidega».

Et lugeja saaks otsustada nende hinnangute paikapidavuse üle, annamegi sõna autorile, kes lühidalt kirjeldab oma uut arvutusmeetodit.

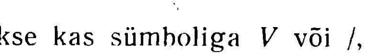
Tutvustan teid arvutusmeetodiga, mille ma nimetasin stenomeetriliseks. Peab kohe ütlema, et käesolevas artiklis te ei leia meetodi täielikku kirjeldust. Ma jutustan vaid sellest, kuidas stenomeetria abil saab teostada kaht aritmeetilist tehet — liitmist ja lahutamist. Meetodi täielik kirjeldus on antud stenomeetria õpikus, mis varsti ilmub Ungaris.

Nüüd aga tutvume meetodiga. Esiteks anname numbritele stenomeetrilised sümbolid, nimelt kujutame neid järgmiste joonekeste abil:



1 2 3 4 5 6 7 8 9

Arve 5, 6 ja 9 võib kujutada ka järgmiselt:

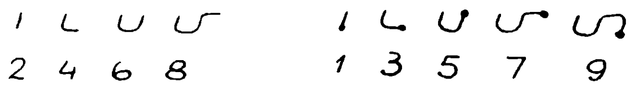


Nulli tähistatakse kas sümboliga *V* või /, tihti aga ei kirjutata üldse.

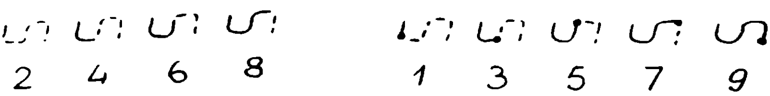
---

[1] Ajakirjast «Наука и жизнь», 1965, nr. 3. Tõlkinud M. Rahula.

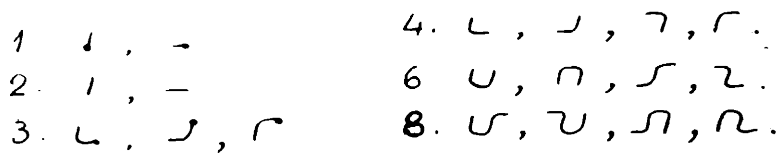
Nagu näete, erinevad paaritute arvude sümbolid paarisarvude sümbolitest selle poolest, et nende joon lõpeb punktiga:



Stenomeetrilisi sümboleid on kerge meelde jätta, sest iga järgmist võib eelmisest saada ettekujutatava lainelise joone jatkamise teel:



Stenomeetrilisi sümboleid kirjutatakse kumerate nurkadega ja väikese kallakuga nagu stenograafilisigi. Sealjuures võib stenomeetrilisi märke kirjutada igas asendis, näiteks:

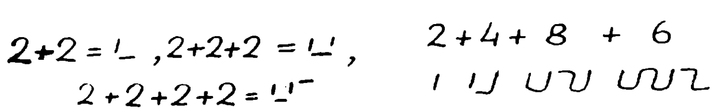


Neid variante pole vaja meeles pidada. Kui põhisümbolid on meeles, siis arvutuse käigus vajalik sümbol tuleb iseenesest välja.

Liitmine ilma arvutamiseta

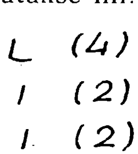
Laine reegel

Liitmise puhul kirjutatakse arvude stenomeetrilisi märke üksteise järel mööda ettekujutatavat lainelist joont, näiteks:

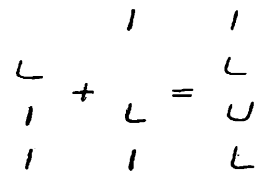


Kui olete juba harjunud, siis summat andva lainelise joone joonistamine ei valmista mingeid raskusi.

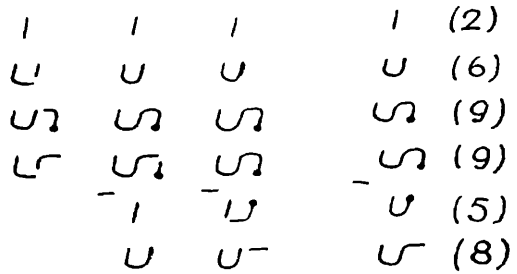
Mitmekohaliste arvude puhul kirjutatakse sümbolid üksteise alla. Näiteks arv 422 kirjutatakse nii:



Liidame kokku kaks mitmekohalist arvu, näit. 422 ja 2042. Toimime järgmiselt. Arvu 422 kõrvale, mille sümbolid on kirjutatud ülalt alla, kirjutame arvu 2042. Seejuures tuhandete järku kuuluva numbri 2 kirjutame ühe koha võrra kõrgemale:



Saime 2464. Liidame nüüd tulemusele juurde arvud 234, 1,26 ja 0,32 (koma asendab väike horisontaalne kriipsuke):

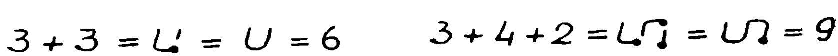


Liites need arvud kokku hariliku võttega, saame 2699,58. Seda näitab ka meie viimane tulemus, mille saime ilma mingi arvutamiseta.

Punkti reegel

Väga tähtis on meelde jätta, et kui viimane sümbol lainelises joones lõpeb punktiga, siis järgmine arv tuleb võtta ühe võrra väiksem. Näiteks arvude liitmisel 5 ja 3 tuleb punktiga lõppeva viie järele kirjutada mitte kolm, vaid kaks:

Tulemuse saamisel joone keskel asuvat punkti arvesse ei võeta, arvestatakse vaid lõpus seisvat punkti. Toome veel näiteid:

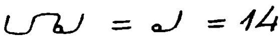


Ja lõpuks, kui punktiga lõppevale arvule on vaja liita arv üks, siis punkti kohale tõmmatakse väike kriipsuke, mis «kustutab» punkti. Näiteks:

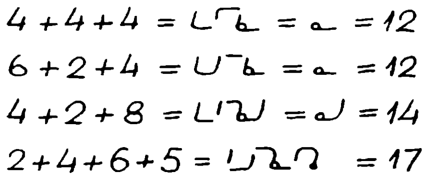
Järgmisse järku ülemineku reegel

Sümbolite kirjutamisel üksteise järele jääb varem või hiljem seljataha ka kõige pikem sümbol 9. Kuid ka sel juhul pole vaja arvutada. Lihtsalt sinna, kus lõpeb üks laine lisatakse väike ümmargune rõngas või aas, mida võib teha pliiatsit paberilt tõstmata:

Selles näites tehakse aas arvu 6 kirjutamisel. Aas tähendab arvu 10 ja tema järel seisab arv 4. Niisiis on tulemuseks

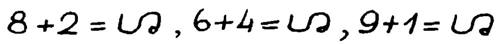


Jälgime veel mõningaid näiteid:

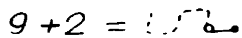


Aas on vaja moodustada kindlasti siis, kui tehte lõppedes lõpeb laine. Näiteks:

aga



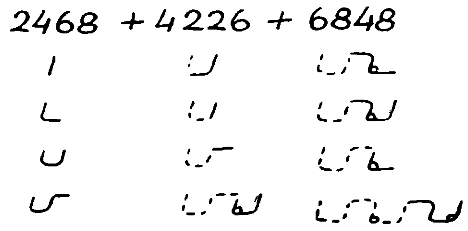
Viimases näites on aasa võetud kriipsuke ja punkt, mille ta ära kustutab. Üleminekul järgmisse järku pole aasa vaja eraldi joonestada. Näites



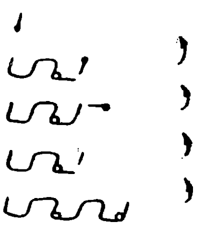
on aas ja temale järgnev üks (vt. punkti reegel) tehtud korraga. Jooned

ja neid eraldavad aasad vahelduvad seega pikal lainelisel joonel järgmiselt:

Illustreerime ülalöeldut järgmise näitega:



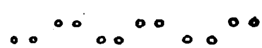
Tulemuse saamiseks vaadatakse joonis läbi alt üles ja seal, kus esinevad aasad, lisatakse eelmisele (ülemisele) numbrile juurde aasade arv. Pärast sellist «korrektuuri» näeb joonis välja nii.



Aasade järel paiknevad nüüd tulemuse numbrid:

Vastuseks on 13542.

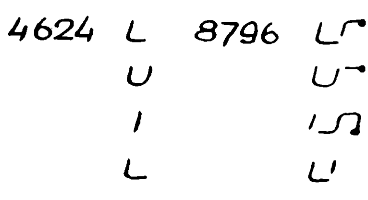
Pikal lainelisel joonel võib esineda väga palju aasu. Neid on kerge loendada nii: kaks aasa all, kaks ülal jne.:



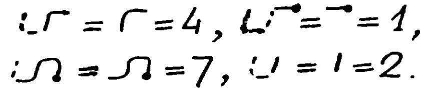
Väga pika joone puhul loetakse ainult ülemiste aasade paare. Kaks ülemist paari on samaväärsed kaheksa aasaga — seega «korrektuuri» tegemisel tuleb ülemisele numbrile lisada kaheksa.

Lahutamine

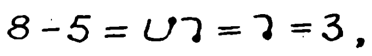
Stenomeetrilisel lahutamisel pole samuti vaja arvutada. Tehe toimub vastupidiselt liitmisele. Toome näite: 8796—4624 = 4172. Esiteks kirjutatakse stenomeetriliselt välja lahutatava numbrid, seejärel täiendatakse neid kuni vähendatava numbriteni:



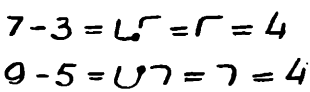
Lahutamise tulemust näitavad need elemendid, mis on lahutatavale juurde lisatud:



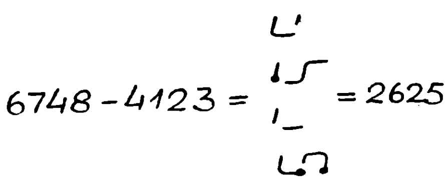
Punkti reegel lahutamisel on vastupidine punkti reeglile liitmise korral. Kui lahutatava sümbol lõpeb punktiga (paaritu arv), siis vähendatava sümbol lisatakse ühe võrra suuremana. Näiteks vahe 8—5 leidmisel täiendatakse punktiga lõppevat viie sümbolit mitte kaheksani, vaid üheksani:



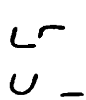
Samasugune on olukord ka näidetes:



Vaatleme veel näidet mitmekohaliste arvude lahutamise kohta:

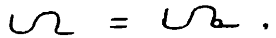


Kuidas aga toimida siis, kui vähendatava mõni number on väiksem lahutatava vastavast numbrist? Näiteks vahe 82—46 arvutamisel tuleb viimase koha leidmiseks numbrist 2 lahutada temast suurem number 6. Sellisel juhul toimime järgmiselt. Esiteks täiendame nelja tavalisel viisil kaheksani. Seejärel kirjutame kuue sümboli ja tema kõrvale horisontaalsesse asendisse kahe sümboli

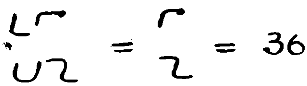


Järgnevalt ühendame kahe sümboli kuue sümboliga. Ühikute lahutamise tulemus on käes:

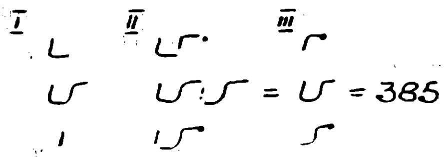
Kuna siin esineb üleminek järgmisse järku,



siis neljast, mis seisab kümnete järgus, on vaja lahutada üks, s. t. on vaja lisada vaid punkt:



Teine näide: 867—482:



Jutustades lahutamisest puudutasin ma vaid olulisemaid põhimõisteid.

AJARAISKAJAID

Asendage tähed numbritega (samad tähed samade numbritega), nii et kehtiks

```
      T H I S
        I S A
+   G R E A T
      T I M E
  -----------
  W A S T E R
```

(**Tõlkes:** see on üks suur ajaraiskaja). Järgnevad mõned väiksemad ajaraiskajad

```
  S P E N D     E L E V E N     S E V E N
-   L E S S   -   T H R E E   +   N I N E
  ---------   -------------   -----------
  M O N E Y     E I G H T       E I G H T
```

```
    F O R T Y         O N E
+       T E N   +     T W O
        T E N       F O U R
  -----------     ---------
    S I X T Y     S E V E N
```

KOOLIMATEMAATIKA SISU MODERNISEERIMISEST NÕUKOGUDE KOOLIS

O. Prinits

Ajakirja «Математика в школе» veergudel on avaldatud materjale, mis viitavad koolimatemaatika sisu eelseisvale ulatuslikule moderniseerimisele Nõukogude koolis. Suurt tööd on selle ettevalmistamisel teinud NSV Liidu Teaduste Akadeemia juures töötava vastava komisjoni liikmed, tuntud nõukogude matemaatikud I. M. Gelfand, A. N. Kolmogorov, A. I. Markuševitš, A. D. Mõškis, D. K. Fadejev ja I. M. Jaglom.

Vene NFSV Pedagoogikateaduste Akadeemia koostas selle komisjoni ettepanekute alusel uue matemaatikaprogrammi projekti koos juurdekuuluva seletuskirjaga. Et praegu kehtivate programmide printsipiaalsed alused pärinevad XIX sajandist, geomeetria osas aga Eukleidese ajast, et koolides on kasutusel möödunud sajandil kirjutatud õpikud ning et tänapäev oma kõrgeltarenenud tehnilise tasemega nõuab keskkoolilõpetajailt hoopis ulatuslikumalt matemaatika-alaseid teadmisi, siis ongi seatud eesmärgiks tõsta õpilaste üldist matemaatika-alast kultuuri ja kindlustada neile tänapäevale vajalikul hulgal teadmisi.

Aluse suuremate muudatuste tegemiseks keskkooli matemaatikaprogrammis annavad rohked katsetused nii Nõukogude koolides kui ka välismaal. Koolimatemaatika sisu moderniseerimise küsimus on ju päevakorras paljudes riikides.

Uut programmi iseloomustab tendents õpetada õpilastele peaaegu kogu praegune keskkooli matemaatika kaheksa aastaga ja lülitada vanemate klasside programmi juba täiesti uued teemad. Selle sammu õigustuseks tuuakse ette praegust liiga madalat tempot matemaatiliste teemade käsitlemisel algklassides.

1. Algklasside matemaatikast

Matemaatika õpetamist alustatakse konkreetsetest hulkadest, millede kaudu jõutakse naturaalarvudeni. Kõrvuti võrdusmärgiga võetakse I klassis kasutusele ka võrratuse märk. Aritmeetilisi tehteid teostatakse III klassis kuitahes suurte naturaalarvudega. Tutvutakse kommutatiivsuse ja assotsiatiivsuse seadusega.

Senisest märksa enam on algklasside programmi lülitatud geomeetrilist materjali, kusjuures lähtutakse punkti, sirge, kiire ja lõigu mõistetest.

Ulatuslikult on algklassides ette nähtud kasutada ka tähte arvu tähisena. Näiteks nõutakse uue programmi projektis, et õpilane oskaks leida tähe võimalikud arvulised väärtused järgnevat laadi seostes:

$$1378+x=x+1378;\quad 1278-x=924;\quad 24<x<30;$$
$$14+x<18;\quad x\cdot 78=78\cdot x;\quad 18x=1080;\quad x:45=720;$$
$$8a=0;\quad a:8=a;\quad 7\cdot a=7.$$

2. Keskklasside matemaatikast

8-klassilise kooli matemaatikaprogrammi on traditsioonilisele kursusele juurde toodud teemad, nagu aritmeetiline ja geomeetriline progressioon, eksponent- ja logaritmfunktsioon, võrratuste lahendamine ning trigonomeetria käsitlemine sellises ulatuses, et oleks võimalik lahendada kaldnurkseid kolmnurki.

On otsustatud aritmeetikasse ja algebrasse kuuluvaid teemasid käsitada alates V klassist fusionistlikult ühe õppeainena. Omaette aine moodustavad geomeetrilised teemad.

Ka sellel kooliastmel osutatakse erilist tähelepanu hulga mõistele. Nii vaadeldakse juba IV klassis kujundit punktide hulgana ja leitakse võrratuste nagu $x<b$, $a<x<b$ ja hiljem ka $|x|<a$ lahendite hulk.

Juba IV klassis tutvustatakse negatiivseid arve, lahendatakse võrrandeid ja tutvutakse kahendsüsteemi arvudega.

Murdude käsitlemist alustatakse hariliku murru mõistega, millele järgneb protsendi mõiste ja kümnendmurru mõiste. Tehteid sooritatakse gi siin ainult kümnendmurdudega.

V klassis võetakse kasutusele koordinaatteljestik ja tutvutakse kahe tundmatuga võrrandiga. Ühtlasi võetakse lahendamisele lineaarsed võrrandisüsteemid. Geomeetrilistest küsimustest on pearõhk asetatud teljelisele sümmeetriale, mida rakendatakse ka kolmnurga kongruentsuslausete käsitlemisel.

VI klassis on kavandatud funktsiooni mõistega ja tema esitusviisidega tutvumine, samasusteisenduste teostamine, algebraliste täisavaldiste käsitlemine, aritmeetiline progressioon ja ruutvõrrandid. Siin on kavas ka tsentraalne sümmeetria ja vektori mõiste. Peale vektorite liitmise ja lahutamise on ette nähtud rööpküliku käsitlemine.

VII klassis laiendatakse algebraliste avaldiste valdkonda murdratsionaalsete avaldistega ning funktsioonidest tutvutakse pöördvõrdelise sõltuvuse $y=k:x$ graafiku ja omadustega. Edasi on kavas võrrandisüsteemide lahendamine, kusjuures nähakse ette isegi kolme tundmatuga lineaarvõrrandisüsteemide ja erivõtetega lahenduvate ruutvõrrandisüsteemide lahendamine. Astme mõiste laiendamine negatiivsele astendajale ja astendajale null toimub samuti VII klassis. Ka kuuluvad siin käsitlemisele ligikaudse arvutamise küsimused, kaasa arvatud relatiivne viga, samuti mitmesuguste pindalade ja ruumalade arvutamine etteantud valemite järgi. Geomeetriast on aga ette nähtud ringjoone käsitlus ning pöörde mõiste tutvustamine. Viimast seostatakse ka teljelise sümmeetriaga. Pindala mõõtmisest on juttu seoses hulknurkadega. Enne Pythagorase teoreemi nähakse aga ette ringjoone pikkuse ja ringi pindala käsitlus. Analüütilise geomeetria valdkonnast on VII klassi kavva võetud kahe punkti vahelise kauguse avaldamine koordinaatides ja ringjoone võrrandi tuletamine.

VIII klassis laiendatakse astme mõistet ka murrulisele astendajale, käsitletakse geomeetrilist progressiooni ning seejärel ka eksponent- ja logaritmfunktsiooni. Edasi tutvutakse arvutuslükati ehitusega ja õpitakse sellel arvutama. VIII klassi kavas on veel homoteetsus ja sarnasus ning meetrilised seosed kolmnurgas ja ringis. See peatükk hõlmab nii terav- kui ka nürinurga trigonomeetrilised funktsioonid ning siinuslause, koosinuslause ja kolmnurga pindala valemid.

3. Vanemate klasside matemaatikast

Keskkooli vanematesse klassidesse on ette nähtud tuua põhiliselt uus materjal, mida pole seni koolis käsitletud.

Nii alustatakse IX klassis funktsiooni üldtähisega ning mitmesuguste funktsiooni uurimisega seotud küsimustega, nagu kasvamine, kahanemine, monotoonsus jne. Käsitletakse arvjadasid, sealjuures ei nõuta piirväärtuse olemasolu ja omaduste kohta käivate teoreemide tõestusi. Tutvutakse ka funktsiooni piirväärtuse ja pidevusega. Edasi on aga kavas tuletise ja integraali mõisted. Tuletist kasutatakse ka funktsioonide uurimisel. Integreerimisoskuse nõue piirdub esialgu astmefunktsiooni ja hulkliikme integreerimisega. Seejärel defineeritakse arv *e*, leitakse tuletis ja integraal eksponentfunktsioonist ning logaritmfunktsiooni tuletis. Jõutakse orgaanilise kasvamise seaduseni ja lahendatakse diferentsiaalvõrrand $y' = xy$. IX klassis üldistatakse ka nurga mõiste, defineeritakse trigonomeetrilised funktsioonid mistahes nurga jaoks ning leitakse trigonomeetriliste funktsioonide tuletised, mida kasutatakse trigonomeetriliste funktsioonide uurimisel. Geomeetria osa sisaldab IX klassis vektoralgebra küsimusi kuni vektorkorrutiseni (incl.); analüütilisse geomeetriasse kuuluvaist teemadest on kavas sirge normaalvõrrand, üldvõrrand ning tõusu ja algordinaadiga määratud võrrand, aga samuti tasapinna ja sirge võrrandid ruumis. Kavas on muidugi ka sirgete ja tasapindade sünteetiline käsitlus.

Kui juba IX klassi programmis leidub mitmeid füüsikast pärinevaid teemasid, nagu nurga all üles visatud keha liikumine, töö, baromeetriline kõrgusvalem, aatomi lagunemine, vahelduvvoolu jõu ja võimsuse efektiivsete väärtuste arvutamine, siis X klassis on ette nähtud terve peatükk harmoonilistele võnkumistele, kus jõutakse diferentsiaalvõrrandi $y''+xy=0$ lahendamiseni. Kompleksarvude käsitlemisel nõutakse ka nende trigonomeetrilise kujuga tutvumist ja n-järku juurte leidmist. Traditsiooniliselt kavas olnud kombinatoorika küsimustele lisanduvad mõned teemad tõenäosusteooriast, nagu tinglik tõenäosus, tõenäosuste liitmise ja korrutamise valemid. Kaasaegse algebra mõisted nagu rühm, ring ja korpus, samuti isomorfismi mõiste on kavas peatüki «Aksiomaatiline meetod matemaatikas» käsitlemisel. Geomeetriliste kehade käsitlus on samuti X klassi kavas, kusjuures pöördkehade pindalade valemid leitakse ruumala valemitest, võttes tuletise lineaarse argumendi järgi.

On kaheldamatult selge, et kirjeldatud uus programm nõuab tõsist kaalumist, eriti selle realiseerimise võimalikkust silmas pidades. Vastuargumentidest kerkivad esimestena arvamused õpilaste ülekoormamise kohta neile üle jõu käiva materjaliga, sest uute teemade käsitlus samastatakse kõrgemas koolis õpitud vastavate kursustega. Programmi autorid ei võtnud aga eesmärgiks kõrgema kooli kursusi keskkoolis käsitlema hakata. Programmide üldmaht on suur, kuid uue programmi projektist ei tule aru saada mitte nii, et ta säilitab kõik senised nõudmised ja lisandab neile veel palju uusi, vaid et senises koolipraktikas peab muutuma suhtumine geomeetria tõestustesse ja rohketesse keerukatesse ülesannetesse. Tõestused, mis omandatakse ainult mälu harjutamiseks, peavad koolikursusest välja jääma, samuti palju aega nõudvad ülesanded, nagu näiteks raskemad trigonomeetrilised, eksponent- ja logaritm- ning juurvõrrandid, mis on olnud kavas peamiselt ainult sel põhjusel, et kõrgemate koolide vastuvõtueksameil neid nõutakse. Aastakümnete eest jõuti kokkuleppele, et ahelmurdude käsitlemisel koolis polnud muud ülesannet, kui et see oli materjal, mille abil «saab õpilasi kergesti läbi kukutada», ning see osa kustutati kooli kavast. Nüüd on järg jõudnud koolimatemaatika seisukohalt mitte sugugi rohkem põhjendatud teemade kustutamiseni.

Tartu Riikliku Ülikooli matemaatikaosakonna õppejõudude koosolekul käesoleva aasta septembris oli uue matemaatikaprogrammi projekt arutusel. Ulatusliku ettekande selle kohta tegi professor G. R ä g o. TRÜ matemaatikud esitasid programmi projekti kohta rea ettepanekuid. Leiti, et uue matemaatikaprogrammi projekt on sobiv aluseks võtta IV—VIII klassis matemaatika õpetamisel. Programmi edasise osa põhiliseks puuduseks loeti aga niisuguste punktide puudumist, mis aitaksid kaasa õpilaste ruumilise kujutlusvõime arendamisele. Harmoonilistele võnkumistele pühendatud peatükk soovitati üle kanda füüsikasse.

TÄIUSLIKUD ARVUD

Jevgeni Gabovitš

Naturaalarvu iga positiivset jagajat, mis on temast endast väiksem, nimetatakse selle arvu pärisjagajaks. Tavaliselt on naturaalarvu n pärisjagajate summa kas väiksem n-st (siis nimetatakse naturaalarvu alatäiuslikuks) või suurem n-st (siis nimetatakse n-i ületäiuslikuks). Näiteks on arvud 4, 8, 10 ja 15 alatäiuslikud, sest nende pärisjagajate summad $1+2=3$, $1+2+4=7$, $1+2+5=8$ ja $1+3+5=9$ on nendest väiksemad. Arvud 12, 18 ja 24 on aga ületäiuslikud, kuna nende jagajate summad on vastavalt $1+2+3+4+6=16>12$, $1+2+3+4+6+9=25>18$ ja $1+2+3+4+6+8+12=36>24$.

Leidub, kuigi väga harva, ka selliseid naturaalarve, millede pärisjagajate summa võrdub arvu endaga. Lihtne on veenduda, et esimene selline arv on 6 ja järgmine 28. Tõepoolest on $1+2+3=6$ ja $1+2+4+7+14=28$. Niisuguseid arve nimetatakse täiuslikeks. 6 ja 28 on seega täiuslikud arvud. Suuruselt järgmise täiusliku arvu leidmine pole sugugi lihtne ülesanne. Selleks arvuks osutub 496. Tema pärisjagajateks on arvud 1, 2, 4, 8, 16, 31, 62, 124 ja 248, mis kokkuliidetuna annavadki 496.

Neljandat täiuslikku arvu, milleks osutub arv 8128, on otseste arvutuste teel väga tülikas leida. Selles aga, et 8128 on tõepoolest täiuslik arv, veendub lugeja küllalt lihtsalt ise.

Neid nelja täiuslikku arvu tundsid juba vanad kreeklased. Täiuslikud arvud figureerivad Eukleidese ja Platoni raamatutes. Tänu nende definitsioonis toodud huvitavale omadusele ning väga harva esinemisele peeti neid arve universumi harmoonia väljendajateks ning teatud määral müstilisteks.

Juba esimesel sajandil enne meie ajaarvamist kirjutas vanakreeka matemaatik Nikomachos: «Täiuslikud arvud on kaunid. Kuid ilusad asjad on teatavasti haruldased ja neid on vähe, inetuid on aga külluses. Üle- ja alatäiuslikud on peaaegu kõik arvud, täiuslikke arve on väga vähe.»

Mainime veel, et roomlaste pidustustel oli kõige auväärsemaks kuues koht. Sellest, et uuspütaagorlaste akadeemias oli 28 liiget, pärines traditsioon, mille kohaselt paljudes teaduslikes ühingutes ja eriti teaduste akadeemiates (näiteks Prantsuse Teaduste Akadeemias) oli paljude sajandite jooksul 28 liiget (akadeemikut).

Huvitav on märkida, et suur vene kirjanik L. Tolstoi armastas «kiidelda», et tema sündimise päev on seotud kahe täiusliku arvuga. Nimelt sündis ta 28. augustil 1828 (vana kalendri järgi), kusjuures 28 on ise täiuslik arv, 1828 aga muutub täiuslikuks, kui temas ära vahetada kahe esimese numbri kohad.

Milline on täiuslike arvude hulk? Kui palju neid on? Kas neid on lõplik arv või on neid lõpmata palju? Sellised täiuslike arvudega seotud küsimused on ammust ajast huvitanud matemaatikuid.

Ükski algarv p ega ükski algarvu aste p^n ei kujuta endast täiuslikku arvu. Tõepoolest, p^n pärisjagajateks on arvud 1, p, p^2, ..., p^{n-1}, nende summa $1+p+p^2+\ldots+p^{n-1}=$ $=\frac{(1+p+p^2+\ldots+p^{n-1})(p-1)}{p-1}=\frac{p^n-1}{p-1}<p^n$. Seega p^n on alatäiuslik.

Nelja esimese täiusliku arvu juures on märgata huvitavat seaduspärasust. Nimelt, kui lahutada nad tegureiks, siis ilmneb, et kõik need täiuslikud arvud on üleskirjutatavad kujul $2^k(2^{k+1}-1)$:

$$\begin{aligned} 6 &= 2\cdot 3 = 2^1(2^2-1), \\ 28 &= 4\cdot 7 = 2^2(2^3-1), \\ 496 &= 16\cdot 31 = 2^4(2^5-1), \\ 8128 &= 64\cdot 127 = 2^6(2^7-1), \end{aligned}$$

kusjuures sulgudes asetsev arv $2^{k+1}-1$ on algarv. Tekib küsimus: kas on see juhuslikult nii, või on kõik sellise struktuuriga arvud täiuslikud?

Positiivse vastuse viimasele küsimusele leiame juba Eukleidese «Elementides»:

iga arv

$$K=2^k(2^{k+1}-1),$$

kus $p=2^{k+1}-1$ *on algarv, on täiuslik.*

Eukleidese teoreemi tõestuseks märgime, et arv K jagub arvudega 1, 2, 2^2, ..., 2^k, kusjuures nende arvude summa on

$$1+2+2^2+\ldots+2^k=2^{k+1}-1=p$$

ja arvudega p, $2p$, 2^2p, ..., $2^{k-1}p$, millede summa on

$$p+2p+2^2p+\ldots+2^{k-1}p=(1+2+2^2+\ldots+2^{k-1})p=$$
$$=(2^k-1)p.$$

Ilmselt pole arvul K muid pärisjagajaid. Seega kõigi tema pärisjagajate summa on

$$p+(2^k-1)p=(1+2^k-1)p=2^kp=2^k\cdot(2^{k+1}-1)=K.$$

Äsja tõestatud Eukleidese teoreem lihtsustab küll täiuslike arvude leidmist, kuid ei anna vastust ühelegi eespool seatud küsimusele.

Toetudes Eukleidese teoreemile leiame veel ühe täiusliku arvu. Selleks arvutame arvud 2^l-1 ($l=k+1$), andes l-le järjestikused väärtused alates kaheksast (sest neljanda täiusliku arvu 8128 puhul $l=7$), kuni leiame, et 2^l-1 on algarv. Lihtne on veenduda, et $l=8$, 9, 10 ja 12 puhul pole tegemist algarvudega. Tõepoolest $2^8-1=255$, $2^{10}-1=1023$ ja $2^{12}-1=4095$ jaguvad kolmega, $2^9-1=511$ aga seitsmega. Selles, et ka $2^{11}-1=2047$ pole algarv, on juba raskem veenduda, kuid see on ikkagi nii, sest $2047=23\cdot 89$. Arv $2^{13}-1=8191$ osutub juba algarvuks ja seega me oleme leidnud veel ühe täiusliku arvu

$$2^{12}(2^{13}-1)=4096\cdot 8191=33\,550\,336.$$

See (arvult viies) täiuslik arv esineb esmakordselt ühes aastal 1456 koostatud anonüümses käsikirjas, s. o. 17 sajandit pärast Eukleidest.

Seda teed mööda minnes leidis 1603. a. itaalia matemaatik A. Cataldi veel kaks täiuslikku arvu, mis vastasid l väärtustele 17 ja 19. Need arvud on

$$2^{16}(2^{17}-1)=8\,589\,869\,056 \text{ ja } 2^{18}(2^{19}-1)=137\,438\,691\,328$$

Aastal 1772 leidis kuulus matemaatik Leonhard Euler kaheksanda täiusliku arvu, mis vastab l väärtusele 31:

$$2^{30}(2^{31}-1)=2\,305\,843\,008\,139\,952\,128.$$

Algarve, mis on esitatavad kujul 2^l-1, kus astmenäitaja l on ise ka algarv, nimetatakse Mersenne'i algarvudeks (prantsuse matemaatiku F. M. Mersenne'i nime järgi). Sellisteks on algarvud $3=2^2-1$, $7=2^3-1$, $31=2^5-1$, $127=2^7-1$, $8191=2^{13}-1$ jt. Ilmselt on Mersenne'i algarvud tihedalt seotud küsimusega täiuslikest arvudest. On ju iga Mersenne'i algarvu 2^l-1 korral arv $2^{l-1}(2^l-1)$ täiuslik.

On lihtne näidata, et ka vastupidi, iga täiusliku arvu $2^k(2^{k+1}-1)$ puhul peab algarv $2^{k+1}-1$ olema Mersenne'i algarv. Tõepoolest, kui $k+1$ poleks algarv, leiduksid naturaalarvud $m\neq 1$ ja $n\neq 1$, nii et $k+1=m\cdot n$. Siis aga ei saa arv $2^{k+1}-1$ olla algarv, sest tal leidub teguriteks lahutus:

$$2^{k+1}-1=(2^m-1)(1+2^m+2^{2m}+\ldots+2^{(n-2)m}+2^{(n-1)m}).$$

Näiteks

$$4095=2^{12}-1=(2^4-1)(1+2^4+2^8)=$$
$$=(16-1)(1+16+256)=15\cdot 273.$$

Paljud XVII sajandi silmapaistvad matemaatikud olid arvamisel, et 2^l-1 on algarv iga l puhul. Teatavasti aga pole see sugugi nii, sest $2^{11}-1=2047=23\cdot 89$ on kordarv.

Mersenne väitis juba 1644. a., et nii $l=31$, kui ka $l=67$, $l=127$ ja $l=257$ korral on 2^l-1 algarv ja seega saame Mersenne'i algarvudega ja vastavad täiuslikud arvud. Ühtlasi väitis ta, et ühegi teise algarvu l puhul, mis on väiksem kui 257, ei või see nii olla. Kuid 1872. a. näitas prantslane E. Lucas, et Mersenne eksis. Nimelt osutus $2^{67}-1$ kordarvuks (hiljem selgus, et ka $2^{257}-1$ on kordarv). Aasta hiljem näitas Lucas, et $2^{127}-1$ on tõesti algarv ja seega oli leitud veel üks täiuslik arv. Lahtiseks jäi aga küsimus, kas Euleri ja Lucas' leitud täiuslikkude arvude vahel leidub veel mõni täiuslik arv. Aastal 1883 tõestas tuntud vene arvutaja — õigeusu maakiriku preester Pervušin Permi kubermangust —, et $2^{61}-1$ on algarv. Seega oli leitud suuruse poolest üheksas täiuslik arv. Kümnenda täiusliku arvu $2^{88}(2^{89}-1)$ leidsid 1911. a. teineteisest sõltumatult R. E. Powers ja E. Fauquembergue. Huvitav on asjaolu, et samad matemaatikud (jälle teineteisest sõltumatult!) leidsid kolm aastat hiljem ka üheteistkümnenda täiusliku arvu $2^{106}(2^{107}-1)$. Seega osutus varem Lucas' leitud arv suuruse poolest kaheteistkümnendaks täiuslikuks arvuks.

Möödus veel 38 aastat enne, kui 1952. aastal ameerika matemaatik R. M. Robinson avastas viis järgmist täiuslikku arvu, mis vastasid l väärtustele 521, 607, 1279, 2203 ja 2281. Aastal 1957 näitas rootsi matemaatik H. Riesel, et ka $l=3217$ puhul saame täiusliku arvu. 1962. aastal leidis ameerika matemaatik A. Hurwitz veel kaks täiuslikku arvu, mis vastavad l väärtustele 4253 ja 4423. Aastal 1964 kontrollis ameerika matemaatik D. B. Gillies läbi kõik algarvud kuni 2^{12000}-ni ning leidis veel kolm arvu, mis annavad Mersenne'i algarve ja seega ka täiuslikke arve. Need on 9689, 9941 ja 11213. Niisiis on tänapäeval teada kakskümmend kolm täiuslikku arvu. Neist viimane on

$$2^{11212}(2^{11213}-1).$$

Ühtlasi on siin sulgudes olev arv suurim tänapäeval teadaolev algarv.

Nii Robinson kui ka Riesel, Hurwitz ja Gillies kasutasid uute täiuslike arvude otsimisel elektronarvuteid. Et ilma nendeta poleks selliseid arvutusi võimalik läbi viia, näitab kasvõi asjaolu, et juba Rieseli leitud täiuslik arv koosneb umbes 2000 numbrist.

Kuigi võib loota, et arvutusmasinate abil leitakse veelgi täiuslikke arve, ei anna selline otsimise protseduur vastust ühelegi meie poolt ülesseatud küsimusele. Võib juhtuda, et arvutusmasinad hakkavad avastama täiuslikke arve peaaegu iga päev, kuid sellest veel ei järeldu, et neid arve on lõpmata palju. Vastupidi, võib juhtuda, et maailma kõik arvutusmasinad tegelevad aastaid ainult uute täiuslike arvude otsimisega, kuid ei leia neid. Sellele vaatamata ei või me väita, et neid arve on lõplik hulk ja et me kunagi enam ei leia ühtegi täiuslikku arvu. Vastuse nendele küsimustele võib leida vaid matemaatiliste arutelude teel.

Kahjuks tuleb märkida, et praegu ei tea ükski matemaatik, kas täiuslike arvude hulk on lõplik või lõpmatu. On vaid teada, et *paarisarvude seas pole muid täiuslikke arve peale nende, mis avalduvad kujul* $2^k(2^{k+1}-1)$, *kus* $2^{k+1}-1$ *on algarv*. Selle teoreemi tõestas juba Euler. Esitame siin tema tõestuse.

Olgu $N>0$ suvaline paarisarv. Siis leiduvad niisugune naturaalarv n ja selline paaritu arv $m>0$, et $N=2^n\cdot m$. Olgu arvu m kõik jagajad $m_0=1, m_1, \ldots, m_{k-1}, m_k=m$ ning võrdugu nende summa arvuga M. Arvu N iga jagaja on esitatav kujul $2^i\cdot m_j$, kus $i\leqslant n$ ja $j=0, 1, 2, \ldots, k$. Fikseeritud i korral on nende jagajate summa 2^iM, kõikide N jagajate summa (N ise kaasa arvatud) aga

$$M+2\cdot M+2^2\cdot M+\ldots+2^n\cdot M=(2^{n+1}-1)M.$$

Kui nüüd N on täiuslik arv, siis võrdub viimane summa arvuga $2N$ (pärisjagajate summa on N, kõigi jagajate summa aga seega $2N$):

$$(2^{n+1}-1)M=2N=2(2^n\cdot m)=2^{n+1}\cdot m,$$

siit saame

$$\frac{M}{m}=\frac{2^{n+1}}{2^{n+1}-1}.$$

Et selle võrduse paremaks pooleks on taandumatu murd, siis võivad vasakpoolse murru lugeja ja nimetaja selle taandumatu murru lugejast ja nimetajast erineda vaid mingi ühe ja sama naturaalarvulise teguri t poolest:

$$M=2^{n+1}\cdot t,\quad m=(2^{n+1}-1)t.$$

Teisest võrdusest järeldub, et m jagub kahe erineva arvuga: arvudega t ja $(2^{n+1}-1)t>t$. Et nende arvude summa $t+(2^{n+1}-1)t=2^{n+1}t=M$, mis teatavasti võrdus m kõikide jagajate summaga, siis pole arvul m muid jagajaid peale nende kahe. Kuid ainult kaks jagajat on arvul vaid siis, kui ta ise on algarv. Seega $t=1$ ja $2^{n+1}-1=m$, kusjuures viimane on algarv, nagu väidetigi Euleri teoreemis.

Kuigi paarisarvuliste täiuslike arvude kohta on meie teadmised küllaltki ebatäiuslikud, siis teame me paarituarvuliste täiuslike arvude kohta veelgi vähem. Nimelt pole teada ühtegi sellist arvu, pole isegi teada, kas neid üldse on olemas.

Igatahes iga paaritu arv N, mis on esitatav kahe erineva algarvu astmete korrutisena $N=p^mq^n$, kus $p\geqslant 3$ ja $q\geqslant 5$, on alatäiuslik. Tõepoolest, järgnevast tabelist näeme, et N jagajate summa on

$$\frac{p^{m+1}-1}{p-1}\cdot\frac{q^{n+1}-1}{q-1}:$$

N jagajad						N jagajate summa ridade järgi
1	p	p^2	...	p^{m-1}	p^m	$p^{m+1}-1/p-1$
q	pq	p^2q	...	$p^{m-1}q$	p^mq	$(p^{m+1}-1/p-1)q$
q^2	pq^2	p^2q^2	...	$p^{m-1}q2$	p^mq2	$(p^{m+1}-1/p-1)q^2$
...	...	...	...	...	...	....
q^{n-1}	pq^{n-1}	p^2q^{n-1}	...	$p^{m-1}q^{n-1}$	p^mq^{n-1}	$(p^{m+1}-1)/p-1)q^{n-1}$
q^n	pq^n	p^2q^n	...	$p^{m-1}q^n$	p^mq^n	$(p^{m+1}-1/p-1)q^n$
Kõigi N jagajate summa						$\frac{q^{n+1}-1}{p-1}\cdot\frac{p^{m+1}-1}{q-1}$

Et see arv on väiksem arvust

$$\frac{p^{m+1}}{p-1}\cdot\frac{q^{n+1}}{q-1},$$

siis suhe $\frac{N \text{ kõigi jagajate summa}}{N}$ on väiksem arvust

$$\frac{\frac{p^{m+1}}{p-1}\cdot\frac{q^{n+1}}{q-1}}{p^mq^n}=\frac{pq}{(p-1)(q-1)}\leqslant\frac{3\cdot 5}{2\cdot 4}=\frac{15}{8}<2,$$

mis tähendabki, et on tegemist alatäiusliku arvuga.

Üldse, kui paarisarvude seas on enam-vähem samapalju ala- ja ületäiuslikke arve, siis enamus paarituid arve on alatäiuslikud. Esimeseks paarituks ületäiuslikuks arvuks osutub arv $945=3^3\cdot 5\cdot 7$, mille jagajate summa on 975.

Kui paarituid täiuslikke arve üldse on olemas, siis on nad väga suured. Nõukogude matemaatik J. Gradštein näitas 1923. a., et ei kolme, nelja ega ka viie erineva algarvu astmete korrutisena avalduvad paaritud arvud ei saa olla täiuslikud.[1] Üldse tundub väga tõenäolisena, et paarituid täiuslikke arve pole üldse olemas, kuid tõestada ei oska seda veel keegi.

Lõpuks märgime ilma tõestuseta, et kõigil teadaolevatel paarisarvulistel täiuslikel arvudel, välja arvatud vähim täiuslik arv 6, on kaks järgmist huvitavat omadust.

[1] Tänapäeval on teada, et paaritu täiuslik arv (kui niisugune eksisteerib) ei või sisaldada vähem kui 2800 erinevat algarvulist tegurit ja peab olema suurem arvust e^{52729}, kus $e=2{,}71828\ldots$.

Esiteks, kui liita kokku algul täiusliku arvu enda numbrid, siis saadud summa numbrid jne., siis saame lõpuks arvu üks. Näiteks

$$\begin{array}{rr}
28: & 2+8=10 \\
496: & 4+9+6=19 \\
8\,128: & 8+1+2+8=19 \\
33\,550\,336: & 3+3+5+5+3+3+6=28 \\
8\,589\,869\,056: & 8+5+8+9+8+6+9+5+6=64
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
1+0=1 & \\
1+9=10, & 1+0=1 \\
1+9=10, & 1+0=1 \\
2+8=10, & 1+0=1 \\
6+4=10, & 1+0=1 \text{ jne.}
\end{array}$$

Teiseks, iga täiuslik arv $2^k(2^{k+1}-1)$, kus $k>1$, avaldub $2^{\frac{k}{2}}$ järjestikuse paaritu arvu kuupide summana:

$$\begin{aligned}
28 &= 1^3+3^3 \\
496 &= 1^3+3^3+5^3+7^3 \\
8\,128 &= 1^3+3^3+5^3+\ldots+13^3+15^3 \\
33\,550\,336 &= 1^3+3^3+5^3+\ldots+125^3+127^3 \text{ jne.}
\end{aligned}$$

NUPUTAMISEKS

Ühes majakeses elab kolm kolmeliikmelist perekonda, iga perekond koosneb mehest, naisest ja pojast. Meeste nimedeks on Madis, Mats ja Mihkel, naiste nimedeks on Nelli, Niina ja Nora ning poegade nimedeks on Paul, Peep ja Peeter.

Mihkel ei ole Nora mees ega Peebu isa.
Nelli ei ole Matsi naine ega Pauli ema.
Kui Pauli isa on Mats või Mihkel, siis Nora on Peetri ema.
Kui Nora on Matsi naine, siis Niina ei ole Pauli ema.

Kes on kelle naine ja kes on nende poeg?

*

* *

Te tahate klaverit koridori külgseinas paikneva ukse kaudu tuppa viia. Klaveri põhiplaaniks on ristkülik laiusega a ja pikkusega b. Ukseava laius on c ja koridori laius on d. Milliseid tingimusi peavad suurused a, b, c ja d rahuldama, et klaver koridorist tuppa mahuks, s. t. ükski suurustest a, b, c ja d klaveri transportimisel oma esialgset väärtust ei muudaks?

Matemaatika ajaloost

150 AASTAT K. WEIERSTRASSI SÜNNIST

T. Sõrmus

XVIII sajand on matemaatika ajaloos tuntud matemaatilise analüüsi tormilise arengu sajandina. See XVII sajandi teisel poolel loodud matemaatika osa leidis üha uusi rakendusi mitmesugustes loodusteaduste harudes, kuid tema alustes oli palju ebaselget, vaieldavat. Juba põhimõiste — lõpmata väike suurus, mille abil toodi sisse diferentsiaal ja integraal — oli teataval määral müstiline suurus. Alles XIX sajandi esimesel poolel suutsid B. Bolzano ja A. L. Cauchy piirväärtuse mõiste abil küllaldase rangusega põhjendada matemaatilise analüüsi põhitulemused. Nende töö lõpuleviijaks oli aga suur saksa matemaatik Karl Weierstrass, kelle sünnist käesoleva aasta 31. oktoobril möödus 150 aastat.

Eluloost

Karl Theodor Wilhelm Weierstrass sündis 31. oktoobril 1815. a. Ostenfeldes Loode-Saksamaal Münsterlandi maakonnas. Tema isa Wilhelm Weierstrass (1790—1869) oli sel ajal Prantsusmaa teenistuses riigikassa laekahoidjana. Karl Weierstrassi ema suri 1826. a. Perekonnas oli neli last: Karl (1815—1897), Peter (1822—1904), Klara (1823—1896), Elisa (1826—1898). Isa abiellus uuesti 1827. aastal. Weierstrasside perekonnas valitses katoliiklik õhkkond, sest perekonnapea oli katoliiklane. Wilhelm Weierstrass oli mitmekülgsete teadmiste ja avara silmaringiga mees, kes oskas suurepäraselt prantsuse keelt ja oli võrdselt huvitatud nii füüsikast kui keemiast. Muuhulgas oli ta töötanud ka kooliõpetajana.

Karl Weierstrassi kooliaastad algasid Münsteris ja alates 1829. aastast möödusid Paderborni katoliiklikus gümnaasiumis, kus tavaline koolikursus kestis kuus ja pool aastat. Juba gümnaasiumis paistis noormees silma oma erakordsete võimetega. Igal aastal tunnistati ta I auhinna vääriliseks ühes või enamas niisugustest õppeainetest, nagu keeled (saksa, kreeka ja ladina keel) ja matemaatika. Kuid teda on peetud auhinna vääriliseks veel teisteski õppeainetes. Andeka õpilasena lõpetas ta 1834. a. gümnaasiumi, seega ettenähtust aasta võrra varem. Olles innustatud poja edust, rajas Wilhelm Weierstrass suuri lootusi tema tuleviku suhtes — ta lootis näha Karli Preisi ametnikkonna kõrgemates kihtides. Selleks saadeti Karl 1834. aastal Bonni ülikooli õppima õigus- ja majandusteadusi.

Üliõpilasaastad 1834—1838 möödusid Weierstrassil tormiliselt. Ta oli *Corps Saxonia* aktiivne liige ning ülikooli võitmatu ja uljas vehkleja. Räägitakse, et ta oli ka Bonni trahterites üks lõbusamatest igapäevastest külastajatest. Kui arvestada, et Weierstrassist sai XIX sajandi üks suurimaid matemaatikuid, tundub seikleja ja muretu üliõpilase reputatsioon talle ebakohasena. Ent K. Lampe (üks Weierstrassi hilisemaid õpilasi) arvates oskas Weierstrass ka siit teha õiged ja vajalikud järeldused tuleviku jaoks: ta muutus ja jäi elu lõpuni täiesti iseseisvaks ja kindlameelseks inimeseks, kes suurepäraselt orienteerus elulistes probleemides. On teada, et Weierstrass kuulas Bonnis vaid üksikuid loenguid. Ta õppis ja uuris teda huvitavaid küsimusi ja mõningaid kohustuslikke kursusi iseseisvalt. Peatselt selgus, et isa poolt määratud tee ei suutnud köita noort Weierstrassi. Äkki, ühel 1838. a. hilissügisesel päeval ilmus ta koju Paderborni teatega, et on õppused ülikoolis katkestanud. Sellega paistsid Karlile rajatud lootused purunevat. Perekonna «ainuke tulevikulootus» näis olevat viletsa tervise juures ja rusutud meeleolus ning, nagu Weierstrass ise hiljem meenutas, «kannatas ta sel ajal nii vaimselt kui ka füüsiliselt.» Tema «kannatuste» tõeline põhjus on tänini selgumata.

Kodus veetis Karl kuus kuud, mille kestel jõuti otsusele, et ta peab sooritama riigieksamid õpetaja diplomi saamiseks. Nii astuski Weierstrass 22. mail 1839. a. Münsteri akadeemiasse ja juba 29. veebruaril 1840. a. taotles ta eksamikomisjoni presidendilt luba eksamite sooritamiseks õpetaja kutsele. 2. mail 1840. a. sai Weierstrass eksamikomisjonilt kirja, millega talle esitatakse kirjalike eksamite teemad. Vastused kirjalike eksamite küsimustele olid ära saadetud kuue kuu jooksul. Peale kirjalike eksamite toimusid 1841. a. aprillis veel suulised eksamid ja katseloengud.

Matemaatika kirjalik eksam seisnes Ch. Gudermanni [1] poolt valitud kolme probleemi lahendamises. Esimesena neist tuli uurida elliptiliste funktsioonide (modulaarfunktsioonide [2]) sn u, cn u ja dn u esitatavust niisuguste murdudena, mille lugejas ja nimetajas seisaksid argumendi u astmeread. Viimaste kordajateks on täisratsionaalsed funktsioonid suurusest k^2, kus k on integraaliga

$$u = \int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

määratud moodul. Teised probleemid kuulusid elementaargeomeetria ja mehhaanika valdkonda.

[1] Üks eksamikomisjoni liikmeist ja Weierstrassi õpetaja Münsteris.

[2] Gudermanni termin elliptiliste funktsioonide jaoks.

Esitatud probleemistikule oli lisatud märkus, et esimene probleemidest ületab kandidaadile[3] esitatavad nõuded, kuid komisjon kinnitas selle probleemi kandidaadi enda palvel.

Eksamid, mis olid ulatuslikud ja peensustesse tungivad, sooritas Weierstrass edukalt. Talle omistati diplom koos kirjaliku tunnistusega, milles rõhutati, et kandidaat ilmutas eksamil häid teadmisi ja erakordset talenti kõrgema analüüsi probleemide lahendamisel. Samas märgiti, et laitmatult ja matemaatiliselt leidlikult on lahendatud ka teised matemaatikaalased küsimused. Räägitakse, et Gudermanni hinnang Weierstrassi esimesele vastusele oli järgmine: «Selle tööga astub kandidaat kuulsusega kroonitud auväärsete avastajate pere täieõiguslikuks liikmeks.» Üks Weierstrassi õpilasi G. Mittag-Leffler kinnitab öeldu õigsust sõnadega: «Ükski matemaatik, kes on uurinud Weierstrassi esimest vastust, ei lükka ümber Gudermanni entusiastlikku arvamust.»

Seega ei saanud Bonnis veedetud 4 aastat mööduda tulutult, nagu arvas Wilhelm Weierstrass. On ilmne, et neil aastail süvenes juba koolipõlves tärganud huvi matemaatika vastu ning just Bonnis rajas Weierstrass aluse nendele teadmistele, mis võimaldasid tal ligikaudu poolteise aastaga jõuda elliptiliste funktsioonide teoorias hinnatavate tulemusteni. Nii pidi matemaatika köitma andeka nooruki huvi juba aastaid. Oletus leiab kinnitust järgmistes faktides.

On teada, et Weierstrass teenis juba 15-aastaselt endale taskuraha, pidades toidukaupluste rikaste perenaiste arveraamatuid. Koolis oli ta matemaatikas sedavõrd arenenud, et gümnaasiumi II klassis uuris iseseisvalt püsiva huvi ja järjekindlusega integraalarvutust. Samuti on andmeid selle kohta, et gümnaasiumipäevil Paderbornis luges Weierstrass Crelle'i ajakirja. Selles ta jälgis ja uuris pidevalt J. Steineri artikleid, mis käsitlesid geomeetria sünteetilise ülesehituse probleeme. Erilist mõju avaldas talle sel perioodil C. G. Jacobi «Elliptiliste funktsioonide teooria uued alused» (*Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum*). Selle raamatu töötas ta põhjalikult läbi ja tegi samas otsuse selles käsitletavat elliptiliste funktsioonide teooriat veelgi arendada. Otsus oli muidugi erakordselt julge, ent see täideti! Jätkuvast huvist matemaatika vastu räägib seegi, et nende vähese loengute hulka, mida Weierstrass Bonnis kuulas, kuulub ka matemaatika. Astronoomia, füüsika ja matemaatika professoriks Bonnis oli kuni 1836. aastani Karl Dietrich von Münchow, kes oli vana kooli esindaja. Weierstrass ei kuulanud tema loenguid, kuigi Dietrich juhendas sageli Weierstrassi iseseisvaid matemaatikaõpinguid. Alates 1836. aastast kuulus matemaatika ja füüsika õppetool Bonnis J. Plückerile, kelle loenguid külastas

[3] Nii nimetati õpetaja diplomi taotlejat.

Weierstrass regulaarselt ühe semestri jooksul. Samal ajal arendas Gudermann Münsteris üksikasjaliselt elliptiliste funktsioonide teooriat. Nii võib arvata, et Weierstrass siirdus meelsasti Münsteri akadeemiasse, kus ainsateks loenguteks, mida ta 1839/40. a. kuulas, olid just Gudermanni loengud. Eespoolöeldu põhjal on arusaadav, kuidas osutus võimalikuks see, et Weierstrassi vastus riigieksami ühele küsimusele osutus suure teadusliku väärtusega tööks. Koos viimasega kerkis Weierstrassi ette kindel eesmärk: arendada rangelt ja süstemaatiliselt astmeridade rakendamise metoodikat eeskätt selleks, et lahendada kuitahes kõrget järku hüperelliptiliste integraalide pöördfunktsioonide leidmise probleem.

Münsteri akadeemia lõpetamisele järgnevail aastail 1841—1855 töötas Weierstrass väikestes Preisimaa linnades õpetajana. Aastatel 1842—1848 oli ta Deutsch Crone progümnaasiumis matemaatika, saksa keele, geograafia, ilukirja ja võimlemistundide õpetajaks. Siit siirdus ta 1848. aastal Ida-Preisimaale Braunsbergi gümnaasiumi, kuhu jäi kuni 1855. aastani.

Nii möödusid tulevase õpetlase esimesed 40 eluaastat tähtsusetute linnade katoliiklikus õhkkonnas, sest nii tema perekond kui ka koolid, kus ta õppis ja õpetas, olid katoliiklikud. Meenutades oma esimesi tööaastaid räägib Weierstrass kirjas P. du Bois-Reymond'ile 1875. a. järgmist: «See oli halb aeg, mille lõputu tüütavus ja mõttetus oleks ilma pideva tööta võinud muutuda väljakannatamatuks, mis oli võimeline muutma senini muretult lõbusat elu elanud meest erakuks, kelleks ma tegelikult ka sain ja jäin... Noil päevil, mis tavaliselt kannavad elu kaunimate päevade nimetust, kaotasin ma isegi tuju kirjavahetuse pidamiseks... Selleks oli veel teinegi põhjus... — tol ajal oli regulaarne kirjavahetus luksuseks, mis kooliõpetajale 29-taalrise kuupalga ja 30-nädalatunnise töökoormuse juures käis üle jõu.» Sama ajavahemiku kohta märgib F. Klein, et kohad, kus Weierstrass töötas kooliõpetajana, seisid eemal igasugustest teaduslikest sündmustest ja olid ligipääsmatud peaaegu igasugusele matemaatilisele stiimulile. Sarkastiliselt ütleb Mittag-Leffler, et need olid kohad, kus «mees, keda Gudermann «kuulsusega kroonitud auväärseks avastajaks» nimetas, veedab üksluiseid päevi, õpetades väikestele poistele matemaatika elemente». Ometi töötas Weierstrass ka siin visalt ja ründas julgelt ning sihikindlalt enda ette seatud eesmärki. Järgmine looke näitab ilmekalt, kui sügava unustuseni suutsid Weierstrassi köita küsimused, mida ta Braunsbergi päevil uuris: «Ühel varajasel talvehommikul märkas gümnaasiumi direktor Schultz, et esimese klassi õpetaja pole õppetööle ilmunud. Kuna Weierstrass pidi kohe alustama tundi ja elas siinsamas kõrvalhoones, läks direktor isiklikult tema juurde, et selgitada puudumise põhjust. Ta leidis Weierstrassi pingsalt töötavana — ta jätkas eelmisel õhtul alustatud tööd ega teadnud, et tegelikult oli öö möödunud ja käes järgmise päeva hommik. Direktor juhtis tema tähelepanu sellele, et aeg on tundi minna, ent Weierstrass ei märganud isegi vabandada hilinemise pärast, kuna ta oma mõtetega oli ikka veel huvitavate uurimuste maailmas ja pealegi polnud tal kunagi ülevaadet tunniplaanist.»[4]

Täpsed andmed Weierstrassi uurimustest kirjeldataval perioodil praeguseni puuduvad, sest tema enda initsiatiivil avaldati sellel ajavahemikul ainult kolm tööd. Märksa hiljem paigutati suurmeistri kogutud teostesse vaid vähesed (kokku 10) sellest perioodist säilinud tööd. Nii ilmus Deutsch Crone progümnaasiumi 1843. a. aruandes artikkel «Märkusi analüütilistest faktoriaalidest» (*Bemerkung über die analytischen Fakultäten*), milles leidus juba algmeid Weierstrassi tulevasest funktsiooniteooriast. Braunsbergi gümnaasiumi 1849. a. aruandes on ära trükitud kokkuvõte tema uurimuste tulemustest teemal «Uurimus Abeli integraalide teooriast» (*Beitrag zur Theorie der Abelschen Integrale*), milles üldistatakse I ja II järku hüperelliptiliste integraalide kohta kehtivad perioodide omadused mistahes järku hüperelliptilistele integraalidele. Samas tuletatakse perioodidevaheline lineaarne seos. Kõne all oleva ajavahemiku viimase tööna ilmus 1854. a. Crelle'i ajakirja 47. köites artikkel «Abeli funktsioonide teooriast» (*Zur Theorie der Abel'schen Functionen*), millega oli Münsteri akadeemia lõpetamise päevil seatud eesmärk vallutatud. Nagu Weierstrass ise märkis, on selles töös antud meetod, «mis pole mitte ainult täielikult erinev sellest, mida eespool mainitud matemaatikud[5] on rakendanud, vaid annab võimaluse analoogiliste tulemuste saavutamiseks veel kõrgemategi transtsendentsuste korral.»

Märksa hiljem, Weierstrassi avaldamata tööde revideerimisel, selgus, et aastateks 1841 ja 1842 oli ta välja jõudnud funktsioonide analüütilise jätkamise mõisteni ja analüütilise funktsiooni mõisteni tema kõige üldisemal kujul ning funktsiooniteooria ühe tähtsaima, käesoleval ajal Laurent'i teoreemi nime all tuntud tulemuseni.

Seega töötas Weierstrass aastail 1841—1854 raskeimate matemaatiliste probleemide kallal. Seejuures suutis ta piirduda vaid enesekontrolliga ega avaldanud ühtegi märkimisväärset uurimistulemust enne, kui jõudis terve probleemi täieliku lahenduseni. Seetõttu üllataski ta 1854. aastal Crelle'i ajakirjas ilmunud ülalnimetatud artikliga kogu maailma matemaatikuid, võites teenitult kõigi austuse ja lugupidamise. Siit peale toimus Weierstrassi elus järsk muudatus — muutus miljöö, töö iseloom, töö tempo,

[4] *«Natur und Offenbarung»*, k. 43. Rektor W. Killingi kõne.

[5] Siin on mõeldud C. G. Jacobi, G. A. Göpeli ja J. G. Rosenhaini uurimusi ühe ja kahe muutuja hüperelliptiliste funktsioonide kohta.

töökoht, vahetusid sõbrad, tuttavad, saabus kuulsus ning üksildast, 40-ndate aastate piirile jõudnud meest ümbritses äkki hubane perekonnaelugi. Ja nimelt, peatselt pärast Crelle'i ajakirja 47. köite ilmumist saabus Braunsbergi Königsbergi ülikoolist delegatsioon eesotsas F. J. Richelot'ga, kes andis Weierstrassile pidulikult üle Königsbergi ülikooli audoktori *honoris causa* diplomi. See toimus sõnadega: «Me oleme kõik leidnud endale õpetaja hr. Weierstrassis». Niisugune ootamatu tunnustus ja lugupidamine oli Weierstrassile unustamatuks elamuseks. G. Mittag-Leffler ütleb selle kohta järgmist: «Isegi oma 80-ndal sünnipäeval, kui Weierstrassile oli omistatud kõik aunimetused, mida õpetatud maailm oma juhile sai anda, rääkis ta suure elamusega Richelot' külastusest ja Königsbergi audoktori kraadi pidulikust üleandmisest kui oma elu kõige kaunimast mälestusest. Ent samas lisas ta valuliselt: «Kõik siin elus saabub paraku liiga hilja.»»

Aastateks 1855—1856 jäi Weierstrass veel Braunsbergi, kuid teadusliku töö intensiivsemaks jätkamiseks läks aastasele puhkusele. Selle tulemusena valmis kiiresti uus ulatuslik uurimus «Abeli funktsioonide teooria» (*Theorie der Abelschen Funktionen*), mis ilmus 1856. a. Crelle'i ajakirjas. Tehtud tööd kroonis samal aastal professori koht Berliini Kuninglikus Polütehnilises Instituudis ja mõne kuu pärast edutati ta veel Berliini ülikooli ekstraordinaarseks professoriks ning Berliini Teaduste Akadeemia korraliseks liikmeks. Sellest ajast peale oli Weierstrassi edasine elukäik alaliselt seotud Berliiniga ja selle ülikooliga. Siin ümbritses teda ühtäkki uusimatest matemaatilistest mõtetest tulvil õhkkond, mille lõid tema uued kolleegid — L. Kronecker (1828—1891), E. Kummer (1810—1893) ja W. Borchard (1817—1880), kellest hiljem sai Crelle'i ajakirja toimetaja. Weierstrassile määrati Berliinis suur 12-tunnine nädalakoormus, mis koos intensiivselt jätkuva teadusliku uurimistööga rakendas ta tööle maksimaalse pingega. Mitmeaastase ülipingsa töö tulemuseks oli teadlase tervise sedavõrd järsk halvenemine, et 1861/62. õppeaastaks vabastati ta loengulisest tööst. Paranedes luges Weierstrass loenguid ainult ülikoolis, kus 1864. aastast alates oli ta juba ülikooli ordinaarseks professoriks. Austuse ja kuulsusega käsikäes käis tema pidev ülekoormatus töös. Sellest räägib näiteks S. V. Kovalevskaja kiri G. Mittag-Lefflerile: «Tema loengud, mida ta loeb suurele auditooriumile, ettevalmistused Jacobi ja Steineri kogutud teoste väljaandmiseks, igasugused akadeemia-senati-teaduskonna istungid jm. selletaoline täidavad ta päeva sedavõrd, et tal pole võimalik lõpetada oma uurimusi, eriti tema küllalt kõrge ea ja halva tervisliku seisundi tõttu.» Samale viitavad ka Weierstrassi enda sõnad ühes kirjas S. V. Kovalevskajale, kus ta lõbusalt räägib sellest, et on selgeks õppinud mõningate istungite ratsionaalse ärakasutamise, tegeldes seal kirjade kirjutamisega peamiselt matemaatilistel teemadel. On teada, et kogu tema ja Borchardi vaheline kirjalik diskussioon aritmeetilis-geomeetrilisest keskmisest kulgeski istungitel.

Weierstrassi hiilgavad loengud Berliinis köitsid aasta-aastalt ikka suuremat arvu kuulajaskonda. Tema pedagoogilise töö viljaks on möödunud sajandi lõpu ja käesoleva sajandi alguse nimekate teadlaste ja pedagoogide plejaad, kelle seast nimetagem G. Mittag-Lefflerit, H. A. Schwarzi, L. Koenigsbergerit, G. Cantorit, K. Knoblauchi, S. Kovalevskajat, A. Hurwitzit, M. Plancki, O. Hölderit, A. Pringsheimi, J. Schuri, H. Mangoldti, A. Burkhardti, A. Kneserit jt. Loengulist tööd jätkas Weierstrass tegelikult kuni 1890. aastani, kusjuures viimastel aastatel assisteerisid talle loengutel tema lemmikõpilased.

Esitades fragmente Weierstrassi isiklikust elust, mainime, et kuigi ta polnud abielus, ümbritses teda Berliinis perekonnaelu soojus ja sõbralikkus. Tema algatusel taasühendati perekond Berliinis, kuhu ta kutsus oma mõlemad õed ja poja edust õnneliku isa. On teada, et Weierstrass leidis aega ka kasulapse Fräntzcheni kasvatamiseks. Weierstrasside korteri kahes elutoas valitses pedantsusesse ulatuv kord ja puhtus, ent «mulje sellest haihtus korteri kolmandas toas — suure matemaatiku töökabinetis. Siin rippusid rändkunstniku poolt Krügeri stiilis halvasti maalitud isa ja ema portreed, dagerrotüüp vennast, mitmeid siluette, Descartes'i, Laplace'i ja Kanti kipskujud ning Aristotelese büst. Piipude arsenal viitas teadlase nõrkusele suitsetamise vastu.»[6] Weierstrassist kui väsimatust töömehest räägib see, et isegi puhkehetked ja puhkused pühendas ta teadusele või teadlaste kasvatamisele. Nii, viibides 1888. a. suvel puhkusel Harzis, ümbritses ta end rühma noorte matemaatikutega — G. Mittag-Leffleri, V. Volterra, G. Cantori, H. A. Schwarzi, S. V. Kovalevskajaga jt. — arutledes aktuaalseid probleeme ja korraldades dispuute. Weierstrassi parimateks sõpradeks loeb H. Gyldén G. Mittag-Lefflerit, Ch. Hermite'i, H. Poincare'd ja S. V. Kovalevskajat. Kõiki neid nimetab ta naljatades «vastastikuse imetluse liiga» liikmeteks. Erilise tähelepanu osaliseks sai suurmeistri vanas eas tema ainuke naisõpilane S. V. Kovalevskaja, keda Weierstrass ise nimetab kirjades «ustavaks õpilaseks, truuks sõbraks ja oma nõrkuseks», ning kellega ta oli alalises kirjavahetuses kuni Kovalevskaja surmani 10. aprillil 1891. a.

Teeneka teadlase ja lugupeetud pedagoogi 70-ndat ja 80-ndat juubelit tähistati suure pidulikkusega. Tähtpäevadel ümbritsesid teda tema enda ja tema õpilaste õpilased, kes saabusid oma õpetajat austama mitmete maade teaduslikest ühingutest ja ülikoolidest.

---

[6] П. Я. Полубаринова-Кочина «К биографии С. В. Ковалевской».

Elu viimased aastad veetis Weierstrass kodus, tegeldes peamiselt oma tööde ja loengute toimetamisega. Weierstrassi kui teadlase omapäraks oli see, et ta avaldas suhteliselt väikese arvu oma töödest. Loengute kirjastamisega nõustus ta aga alles elu lõpul. Nii levisid tema suurepärased loengud järelkirjutuste näol käest kätte ja olid aastaid haruldusteks. Peamine põhjus, mis sundis Weierstrassi loobuma otsusest loenguid mitte kirjastada, avaldub 1. jaanuaril 1875. a. S. V. Kovalevskajale kirjutatud kirjas: «Käesoleval ajal, alates momendist, mil noored matemaatikud jõudsid selgusele selles, et parimaks vahendiks masside austuse võitmiseks ja hea koha saavutamiseks on paksude raamatute kirjutamine just analüüsis, mille põhjalikule uurimisele ma pühendasin oma elu parimad aastad, tehakse seda ilma vähimagi vastutustundeta ja on ammu saabunud aeg selle takistamiseks.»

Raske haiguse tagajärjel suri Weierstrass 17. veebruaril 1897. a. oma 82. eluaastal.

Pedagoogilisest tegevusest

Andmeid Weierstrassi pedagoogilisest tegevusest gümnaasiumis peaaegu pole, seepärast vaatleme vaid tema tööd Berliinis.

Olles polütehnilise õppeasutuse ja ülikooli professoriks, teostas ta teadlaste noore kaadri kasvatamist eelkõige loengute kaudu, mis alati olid metoodiliselt mitmekülgsed ja peensusteni läbimõeldud. Loengute sihiks oli tervikliku ja võimalikult täiusliku kursuse esitamine, milles ilmneksid mõistete ja järelduste vahelised seosed. Seejuures algas kursuse ülesehitus alati baasi loomisest, kuhu sageli kuulusid küllaltki elementaarsed mõisted ja üldtuntud tõed. Seetõttu polnud tema loengutes vajadust viideteks teistele kursustele ja õpikutele, nendes oli esitatud kõik vajalik. On teada, et Weierstrass ei armastanud oma loengutes tsiteerida teisi autoreid.

Suure õpetlase ühe lemmikõpilase W. Killingi sõnade järgi olnud Weierstrassi enda sooviks, et kogu auditoorium omandaks tema loengutega püsivaid ja väärtuslikke teadmisi. Loengute ülesehitus olnud niisugune, et kõik, kes soovisid neid täielikult mõista, pidid tingimata loenguid regulaarselt külastama ja neid pidevalt läbi töötama. Need, kes selleks osutusid võimelisteks, omandasid Weierstrassi loengutel niivõrd palju uut, õpetlikku ja teaduslikult väärtuslikku, mida nad poleks saanud üheltki teiselt loengult ega ühestki raamatust. Weierstrassi enda teaduslike avastuste kiiruse ja mahukuse tõttu täienesid loengute tsüklid aastast aastasse uute seisukohtadega ja polnud haruldus, et üks ja sama auditoorium kuulas ühte tema loengute tsüklit mitu aastat.

Nii kujunes aastatega tema absoluutne ja kõigutamatu pedagoogiautoriteet. On teada, et isegi teiste ülikoolide professorid

Karl Theodor Wilhelm Weierstrass
(1815—1897)

Prof. Juan Depman

saabusid mitmeteks semestriteks Berliini, et õppida suurelt meistrilt. Tema seisukohad ei kuulunud kritiseerimisele, kuigi juhtus sedagi, et vahel ei suudetud tema loengute kaugele- ja sügavaleulatuvust täielikult mõista.

Weierstrass luges Berliinis 1856.—1890. aastatel 87 loengukursust, mille peateemadeks olid analüütilised ja elliptilised funktsioonid, elliptiliste funktsioonide rakendused, hüperelliptilised ja Abeli funktsioonid. Kuid ta luges kursusi ka sünteetilisest geomeetriast, variatsioonarvutusest jm. Tema mitmete loengute järelkirjad olid aastaid ainsateks allikateks teadlastele, kes arendasid näit. kompleksmuutuja ja analüütiliste funktsioonide teooria küsimusi. Loengute järelkirjad said tegelikult aluseks ka paljudele hiljem ilmunud õpikutele nimetatud ainetes. (Nüüd võib neid loenguid leida auväärt teadlase kogutud teoste esimestes köidetes.) Nagu eespool öeldud, andis Weierstrass oma loengute kirjastamiseks loa alles elu lõpul. Loengute toimetamise usaldas ta sageli oma parimatele õpilastele. Näiteks loengutsükli Abeli funktsioonidest valmistasid trükiks ette G. Hettner ja J. Knoblauch, loengutsükli elliptiliste funktsioonide teooriast — J. Knoblauch ja loengutsükli elliptiliste funktsioonide rakendustest — R. Roth.

On säilinud mõningaid lõbusaid kilde, mis puudutavad Weierstrassi loengute tehnilist külge.

L. Koenigsberger kirjutab, et esimene tema kuulatud Weierstrassi loeng jättis talle võimsa ja unustamatu mulje. Samas meenutab ta järgmist:

«Karmidel aprillikuu päevadel astus, juba oma välimusega meis aukartust äratav, väga lugupeetud meister alati rasketes kalossides ja kaela ümber mähitud paksu salliga ning sealjuures peaaegu alati arglikult ja kohmetult kateedrile, laotas sellele terve paki täiskirjutatud lehti, mis juba õige pea olid viidud niisugusesse kaosesse, et sageli läks nende korrastamiseks kaduma tervelt pool tundi loenguteks ettenähtud ajast.»

Teatavasti oli Weierstrass Berliinis tööga pidevalt sedavõrd koormatud, et ületväsimuse tõttu kannatas ta sageli tugeva peapöörituse all. Haige käsi takistas pahatihti tahvlile kirjutamist. Sellistel juhtudel assisteerisid talle parimad õpilastest. Ühest niisugusest loengust aastal 1877/78, kus assistent Wernicke julges Weierstrassi korrigeerida, meenutab Runge järgmist.

Seistes tahvli ees, palus Weierstrass kirjutada tahvlile valemi, mis varsti kustutati. Selle teistkordsel üleskirjutamisel tahtis Weierstrass seda muuta, ent Wernicke kirjutas ta üles endisel kujul (ilmselt arvas ta, et professor eksis). Weierstrass palus selle taas kustutada ja dikteeris veel kord uuel kujul, kuid Wernicke taastas valemi ikka endisel kujul. Kulus hulk aega, kuni mõlemale selgus segaduse põhjus.

Weierstrass kuulus nende pedagoogide hulka, kelle töö noortega ei lõppenud auditooriumis. Tema kodu uksed olid avatud kõigile, kes vajasid nõuannet ja abi, töö noortega ja kolleegidega jätkus kõikjal, kus see vähegi kõne alla tuli — istungitel, suvitüskohtades, isegi haigevoodis. Ta oli oma rohkearvulistele õpilastele ammendamatuks inspiratsiooniallikaks. Ta pea oli alati tulvil uutest probleemidest ja ta loovutas need meelsasti vestluskaaslastele, kui märkas, et nad on sellest huvitatud.

Teadlase mõju oma õpilastesse oli erakordselt tugev. Vähe oli neid, kes, olles kokku puutunud oma õpetaja uurimustega, oleksid neile selja pööranud. Köitev oli tema usalduslik, tõsine ja abivalmis suhtumine õpilastesse. Ta usaldas neile oma käsikirju, laskis neid uurida ja korraldas hiljem diskussioone vastavatel teemadel. Weierstrass võis vajaduse korral raisata oma õpilaste peale tunde selleks, et aidata neid nende uurimistöös, et neid julgustada, innustada ja sundida neid lõpule viima oma uurimusi. Paljud tema õpilaste hilisemad tulemused olidki inspireeritud niisugustes vestlustes ja nii mõnedki neist oleksid võinud kuuluda ka Weierstrassile. On üldtuntud järgmine teda iseloomustav ütlus: «Weierstrass rõõmustas iga temalt näpatud mõtte puhul ainult siis, kui see leitakse taas koos näppajaga.» Samal puhul meenutab L. Koenigsberger «... Tookord olin ma eelkõige õnnelik selle huvi üle, mida minu suhtes ilmutas Weierstrass, keda ma sageli vabadel pealelõunatundidel külastada võisin, et talle jutustada oma õpingutest ja kuulata sügavas hardumuses, kui ta jagas minuga mõtteid oma uurimustest Abeli funktsioonide teoorias.»

Weierstrassi kohta võib julgelt öelda, et ta oli XIX saj. suurim pedagoog, kelle käe all sirgusid sajandi lõpu nimekaimad teadlased ja pedagoogid, ning tänu temale hakati tõsiselt arvestama saksa matemaatikute koolkonda.

Teaduslikust loomingust

Laiem matemaatikute ring tutvus suurema osaga Weierstrassi töödest alles pärast õpetlase surma, kui eeskätt R. Roth jt. tema õpilased hakkasid avaldama oma õpetaja kogutud teoseid.

Tema peamised uurimused olid pühendatud matemaatilisele analüüsile, analüütiliste funktsioonide teooriale, variatsioonarvutusele, diferentsiaalgeomeetriale ja lineaaralgebrale.

Kaasaegse analüüsi seisukohalt on eriline väärtus Weierstrassi poolt väljatöötatud matemaatilise analüüsi loogilisel süsteemil. Viimane tugineb tema (peaaegu samaaegselt G. Cantori ja R. Dedekindiga) rangelt põhjendatud reaalarvu teoorial aastast 1872. Käesoleva aja matemaatilise analüüsi ranguse normid ja traditsiooniliseks kujunenud struktuur olid välja töötatud tema analüüsiloengutes. Teenitult nimetatakse teda sellepärast «matemaatilise ranguse isaks.» Ranguse saavutamiseks kasutab Weierstrass süstemaatiliselt arvuhulkade ülemise ja alumise raja ning kuhjumispunkti mõisteid. Näiteks annab ta range tõestuse teoreemile, mis väidab, et iga lõigul pidev funktsioon saavutab sellel lõigul oma ülemise ja alumise raja, konstrueerib 1875. a. näite pidevast ei kusagil diferentseeruvast funktsioonist. Niisuguseks funktsiooniks on

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cos(b^k \pi x),$$

kus $0 < a < 1$, b on paaritu arv, $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$. Sama väidet kinnitav näide oli olemas B. Bolzanol juba 1830. a., kuid trükis avaldati see märksa hiljem. Funktsioonide aproksimatsiooniteoorias on väga oluline Weierstrassi teoreem, mis väidab, et iga lõigul pidev funktsioon $f(x)$ on arendatav ühtlaselt koonduvaks polünoomide reaks, s. o.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x),$$

kus $p_n(x)$ on n-astme polünoom.

Matemaatilise analüüsi range põhjendamise ja ühtse printsiibi väljatöötamisel jõudis Weierstrass 1880. aastaks analüüsi põhimõistete tänapäeval kasutatavate definitsioonideni ja tõestusmeetoditeni, mis tuginevad teatavasti meile nüüd hästi tuntud deduktiivsele arutlusele $\varepsilon - \delta$ keeles («Olgu antud $\varepsilon > 0$, siis leidub niisugune $\delta > 0$, et ...»). Temalt pärinevad ka seejuures kasutatavad sümbolid.

D. Hilbert iseloomustab Weierstrassi teeneid analüüsis sõnadega: «Põhiliselt on see Weierstrassi teadusliku tegevuse teene, et analüüsis valitseb nüüd täielik üksmeel ja kindlus niisugustes tõestusmeetodites, mis tuginevad irratsionaalarvu mõistele ja piirväärtusele üldse, ja temale võlgneme me tänu selle eest, et on jõutud ühtsele kokkuleppele kõikide nende tulemuste suhtes, mis puudutavad diferentsiaal- ja integraalvõrrandite teooriat,...».

A n a l ü ü t i l i s t e f u n k t s i o o n i d e t e o o r i a kujunes välja kompleksmuutuja funktsioonide teooria Weierstrassi arendatud suunast. Uue aine ülesehituse teostas ta sama rangelt ja süstemaatiliselt kui matemaatilises analüüsiski. Kogu analüütiliste funktsioonide teooria baasiks on astmeread, mis on siin nii analüütiliste funktsioonide avaldamise kui ka nende omaduste uurimise vahendiks. Käsitluse ranguse saavutas Weierstrass sellega, et ta «aritmetiseeris» tehted ridadega, hakates nendega, «ettevaatlikumalt» ümber käima. Sealjuures toetus ta oluliselt tema enda antud ühtlase koonduvuse mõistele. Oluliseks tulemuseks on teoreem rõngakujulises piirkonnas analüütilise funktsiooni arendatavusest astmeritta argumendi positiivsete ja negatiivsete astmete järgi. Kuigi Weierstrass jõudis sellele tulemusele juba 1841. a., avaldas P. A. Laurent sama tulemuse enne

Weierstrassi 1843. a. ja see tulemus on tuntud Laurent'i teoreemina. Ka funktsiooni analüütilise jätkamise mõisteni jõudis Weierstrass juba 1842. a.

Kuid üldiselt huvitavad Weierstrassi 1840.—1850. aastatel kõige enam siiski konkreetsete analüütiliste funktsioonide (elliptiliste, hüperelliptiliste ja Abeli funktsioonide) klassid. Kuigi üldise analüütiliste funktsioonide teooria käsitluse esitas ta juba 1861. a. loengutes, fikseerib ta oma funktsiooniteooria-alased uurimused alles teostes «Üheste analüütiliste funktsioonide teooria» (1876) ja «Funktsiooniteooriast» (1880). Ka siit ilmneb Weierstrassi iseloomujoon: ta ei avaldanud oma uurimusi enne, kui oli jõudnud need arendada lõplikuks stiiliühtseks tervikuks. Funktsiooniteooria valdkonnas pälvisid Weierstrassi tähelepanu ka küsimused täisfunktsioonide esitatavusest lõpmatute korrutistena, mitme muutuja kompleksfunktsioonide teooria alused jm.

Variatsioonarvutusse kuuluvate uurimuste tulemused esitas Weierstrass loengute tsüklites 1865—1889. a. Siin loob ta tugeva ekstreemumi teooria, revideerib ekstreemumi tarvilikke tingimusi ja tuletab esimesena tarvilikud ja piisavad tugeva ning nõrga ekstreemumi tingimused. Selleks kasutab ta edukalt Jacobi antud ekstremaalide välja mõistet. Suureks teeneks variatsioonarvutuses on tema arendatud variatsioonarvutus parameetriliselt antud funktsioonide jaoks. Samuti uurib ta variatsioonarvutuse ülesannete katkevaid lahendeid jm. küsimusi.

Diferentsiaalgeomeetria valdkonda kuuluvad tema uurimused geodeetilistest joontest ja minimaalpindadest, mille puhul kasutab Weierstrass oma tulemusi variatsioonarvutusest.

On kujunenud tavaks kanda Weierstrass puhta matemaatika esindajate hulka. Kuigi suurem osa tema loomingust kuulub tõepoolest puhta matemaatika valdkonda, oli rakenduslik külg talle alati südamelähedane. Sellest räägivad tema loengud, mis osaliselt olidki rakendusliku kallakuga ning mis alati olid vajalikul määral illustreeritud sobivate näidetega. Peale selle suunas ta sageli oma õpilasi uurima rakendusalaseid küsimusi. Väite kinnituseks esitame ühe lõigu tema Berliini akadeemiasse astumisel peetud kõnest: «Mulle näib siiski, et matemaatika ja loodusteaduste vahel tuleks luua palju kaugeleulatuvam side kui näiteks niisugune, mis ilmneks, kui füüsika näeks matemaatikas ainult abivahendit, kas või väga vajalikkugi, matemaatikud aga vaatleksid füüsikute tööd vaid kui rikkalikku näidete kogumit oma meetodite illustreerimiseks.»

EULERI PROBLEEM

Jakob Gabovitš

Üheks kõige enam tuntud diofantiliseks võrrandiks on nn. Pythagorase võrrand

$$x^2 + y^2 = z^2, \tag{1}$$

millel teatavasti leidub lõpmata palju naturaalarvulisi lahendeid:

$$x = m^2 - n^2, \quad y = 2mn, \quad z = m^2 + n^2 \tag{2}$$

(m ja n on suvalised naturaalarvud, kusjuures $m > n$).

Seitsmeteistkümnenda sajandi üks suurimaid matemaatikuid Pierre Fermat (1601—1665) püstitas küsimuse diofantilise võrrandi

$$x^n + y^n = z^n \tag{3}$$

(mille erijuhuks $n = 2$ korral on võrrand (1)) lahenduvuse kohta mistahes naturaalarvulise n puhul. Fermat väitis, et *võrrandil* (3) *pole* $n > 2$ *korral naturaalarvulisi lahendeid.* See väide, mis on tänapäevani üldjuhul tõestamata (kuigi ta on tõestatud paljudel erijuhtudel ja muuhulgas kõikide arvust 4000 väiksemate n väärtuste puhul), on tuntud Fermat' suure teoreemi nime all [1]. Selle teoreemiga tegeles palju järgmise, kaheksateistkümnenda sajandi üks suurimaid matemaatikuid Leonhard Euler (1707—1783).

Kuid Euler lähenes probleemile hoopis laiemalt vaatekohalt. Ta esitas järgmise ülesande: *milline on vähim liidetavate arv* $k \geqslant 2$, *mille puhul diofantilisel võrrandil*

$$x_1^n + x_2^n + \ldots + x_k^n = y^n \quad (n \geqslant 2) \tag{4}$$

leidub naturaalarvulisi lahendeid?

Fermat' võrrand (3) on Euleri võrrandi (4) erijuhuks ($k = 2$) ja kui Fermat' väide peaks olema õige, siis Euleri võrrandil võib $n > 2$ korral lahendeid olla vaid juhul $k > 2$.

Euleri ülesande uurimiseks defineerime kaks funktsiooni. Vähimat liidetavate arvu k, mille puhul võrrandil (4) on vähemalt üks lahend ühistegurita naturaalarvudes, tähistame süm-

[1] Vt. näit.: Tamme, E., Pierre Fermat ja XVII sajandi matemaatika. — Matemaatika ja kaasaeg, V, lk. 83—84.

boliga $h(n)$; vähimat liidetavate arvu, mille puhul sellel võrrandil on lõpmata palju erinevaid lahendeid ühistegurita naturaalarvudes, tähistame vastavalt sümboliga $H(n)$. Ilmselt need funktsioonid rahuldavad tingimust $h(n) \leqslant H(n)$. Samuti on ilmne, et $n=2$ korral

$$h(2)=H(2)=2, \tag{5}$$

sest võrrandil (1) on lõpmata palju lahendeid, mis on antud valemitega (2).

Vaatleme nüüd juhtu $n=3$. Sellest, et võrrandil

$$x^3+y^3=z^3$$

pole naturaalarvulisi lahendeid, järeldub, et $h(3)>2$ ja $H(3)>$ >2. Teiselt poolt aga võrdus

$$3^3+4^3+5^3=6^3 \tag{6}$$

näitab, et diofantilisel võrrandil

$$x^3+y^3+z^3=u^3 \tag{7}$$

on vähemalt üks lahend ühistegurita naturaalarvudes ja seega $h(3)=3$. Kuid juba 16. sajandi lõpul leidis prantsuse matemaatik François Viète (1540—1603) samasuse

$$(a^4-2ab^3)^3+(2a^3b-b^4)^3+(a^3b+b^4)^3=(a^4+ab^3)^3, \tag{8}$$

millest järeldub, et võrrandil (7) on lõpmata palju lahendeid kujul

$$\left.\begin{array}{ll} x=a(a^3-2b^3), & y=b(2a^3-b^3), \\ z=b(a^3+b^3), & u=a(a^3+b^3). \end{array}\right\} \tag{9}$$

Seega ka $H(3)=3$ ja kokkuvõttes saime tulemuse

$$h(3)=H(3)=3. \tag{10}$$

Valemites (9) on a ja b suvalised naturaalarvud, mis vaid rahuldavad tingimust $a^3>2b^3$ (vastasel korral saame küll võrrandi (7) lahendeid, kuid mitte naturaalarvudes). Näiteks $a=2$ ja $b=1$ puhul saame (pärast taandamist kolmega) ülaltoodud lahendi (6), võttes aga $a=3$ ja $b=2$ saame uue lahendi

$$33^3+46^3+70^3=105^3.$$

Võrrandi (7) lahendamisega tegelesid paljud matemaatikud, kes ka leidsid suure hulga erikujulisi samasusi selle võrrandi lahendite arvutamiseks. Eriti lihtsa samasuse tuletas (käesoleva sajandi algul) kuulus india teadlane S. Ramanujan:

$$(3a^2+5ab-5b^2)^3+(4a^2-4ab+6b^2)^3+$$
$$+(5a^2-5ab-3b^2)^3=(6a^2-4ab+4b^2)^3. \tag{11}$$

Võrdused (8) ja (11) ei anna veel võrrandi (7) kõiki lahendeid. Valemid selle võrrandi üldlahendi leidmiseks andis Euler 1756. aastal, kuid nende keerulisuse tõttu jätame nad siin välja kirjutamata. Piirdume vaid võrrandi (7) mõningate väiksemate erilahendite esitamisega tabelis 1.

Tabel 1

x	y	z	u
3	4	5	6
1	6	8	9
3	10	18	19
7	14	17	20
4	17	22	25
18	19	21	28
11	15	27	29

Pöördume nüüd tagasi funktsioonide $h(n)$ ja $H(n)$ juurde. Võrdustele (5) ja (10) toetudes oletas Euler, et mistahes n korral kehtib võrdus

$$h(n) = H(n) = n. \tag{12}$$

Seda Euleri väidet, mida pole tänapäevani ei tõestatud ega ümber lükatud, nimetatakse Euleri hüpoteesiks. Tingimus (12) on samaväärne väitega, et $k = n$ *korral on võrrand* (4) *lahenduv* (*ja et tal on isegi lõpmata palju lahendeid ühistegurita naturaalarvudes*), *kuid ta ei ole lahenduv ühegi* $k < n$ *korral.*

Raskused Euleri hüpoteesi tõestamisel on seotud asjaoluga, et ta koosneb õieti kahest väitest: negatiivsest (kui $k < n$, siis võrrandil (4) pole lahendeid) ja positiivsest ($k = n$ puhul võrrandil (4) on lahendeid). Nii näiteks võrduse $h(4) = 4$ tõestamiseks, mis on väite (12) «kergem» osa, peaksime kõigepealt tõestama, et diofantilisel võrrandil

$$x^4 + y^4 + z^4 = u^4 \tag{13}$$

pole ühtegi naturaalarvulist lahendit. Kuid võrrandi (13) mittelahenduvust pole tänapäevani õnnestunud tõestada. Ainus tulemus, mis selle võrrandi kohta osutus võimalikuks saada (ja mis praktiliselt vaatekohalt küllalt suurt huvi pakub) on järgmine: *kui võrrandil* (13) *leidub mõni lahend, siis peab olema* $u >$ $> 10\,000$. Selle teoreemi tõestas 1945. aastal ameeriklane U. Ward. Wardi tulemuse võib sõnastada ka nii: ükski biruut alusega kuni kümne tuhandeni pole esitatav kolme biruudu summana.

Püüdes tõestada Euleri hüpoteesi, olid paljude matemaatikute jõupingutused suunatud võrrandi

$$x^4 + y^4 + z^4 + u^4 = v^4 \tag{14}$$

lahendamisele. Ent kaua aega jäid kõik otsingud viljatuiks. Seetõttu kerkis päevakorda väärtusele $k = 5$ vastava Euleri võrrandi

$$x^4 + y^4 + z^4 + u^4 + v^4 = w^4 \tag{15}$$

lahendamine. Aastal 1871 leidiski D. S. Hart selle võrrandi ühe lahendi:

$$4^4+6^4+8^4+9^4+14^4=15^4$$

ja $h(4)$ jaoks oli seega leitud tingimus

$$3 \leqslant h(4) \leqslant 5. \tag{16}$$

Alles 25 aastat hiljem tuletas C. Haldeman samasuse

$$(3a^2+9b^2)^4+(4a^2+12b^2)^4+(4a^2-12b^2)^4+$$
$$+(2a^2+12ab-6b^2)^4+(2a^2-12ab-6b^2)^4=(5a^2+15b^2)^4,$$

mis näitab, et võrrandil (15) on lõpmata palju lahendeid. Seega oli suurusele $H(4)$ leitud samad hinnangud, mis suurusele $h(4)$:

$$3 \leqslant H(4) \leqslant 5. \tag{17}$$

Esimese positiivse tulemuse Euleri hüpoteesi kinnitamiseks juhul $n=4$ sai šoti matemaatik R. Norrie. Aastal 1911 avastas ta võrduse

$$30^4+120^4+272^4+315^4=353^4, \tag{18}$$

millest selgus, et võrrandil (14) on olemas vähemalt üks lahend naturaalarvudes. Võrdus (18) võimaldab parandada üht hinnanguist (16):

$$3 \leqslant h(4) \leqslant 4.$$

Et analoogiliselt parandada ka hinnangut (17), peaks näitama, et võrrandil (14) on lõpmata palju lahendeid. Kuid senini pole seda õnnestunud tõestada. Kaua aega ei olnud isegi teada, kas võrrandil (14) on peale lahendi (18) üldse teisi lahendeid. Alles 1958. aastal leidis inglise matemaatik J. Leech (rakendades elektronarvutit EDSAC-2) võrrandile (14) seitse uut lahendit, tõestades ühtlasi, et $v \leqslant 4303$ korral sellel võrrandil teisi lahendeid ei ole. Veel ühe lahendi leidis 1963. aastal ameeriklane S. Brudno. Seega on praegu võrrandil (14) teada vaid üheksa lahendit ühistegurita naturaalarvudes (vt. tabel 2).

Tabel 2

x	y	z	u	v
30	120	272	315	353
240	340	430	599	651
435	710	1384	2420	2487
1130	1190	1432	2365	2501
850	1010	1546	2745	2829
2270	2345	2460	3152	3723
350	1652	3230	3395	3973
205	1060	2650	4094	4267
955	1770	2634	5400	5491

Vaatleme nüüd järgmist n väärtust: $n=5$. Me teame, et võrrandil $x^5+y^5=z^5$ pole naturaalarvulisi lahendeid (Fermat' teoreemi erijuht), kuid Euleri hüpoteesi kohaselt peaksid olema mittelahenduvad ka diofantilised võrrandid

$$x^5+y^5+z^5=u^5 \text{ ja } x^5+y^5+z^5+u^5=v^5.$$

Kahjuks on ka see küsimus tänapäevani lahendamata. Aastal 1887 näitas A. Martin, et $4^5+5^5+6^5+7^5+9^5+11^5=12^5$, ja seega olid suuruse $h(5)$ jaoks saadud rajad $3 \leqslant h(5) \leqslant 6$. Alles 1933 aastal tõestasid india matemaatikud S. Chowla ja S. Sastry, et diofantilisel võrrandil

$$x^5+y^5+z^5+u^5+v^5=w^5 \tag{19}$$

on lõpmata palju naturaalarvulisi lahendeid. Seega olid korraga leitud hinnangud $3 \leqslant h(5) \leqslant 5$, $3 \leqslant H(5) \leqslant 5$.

Chowla—Sastry samasusel on järgmine kuju:

$$(50ab^4)^5+(10a^3b^2)^5+(a^5+25b^5)^5+(a^5-25b^5)^5+$$
$$+(75b^5-a^5)^5=(a^5+75b^5)^5.$$

Seejuures peab olema

$$25b^5<a^5<75b^5 \quad (a,\ b>0).$$

Nii näiteks $a=2$ ja $b=1$ korral saame järgmise lahendi:

$$7^5+43^5+57^5+80^5+100^5=107^5.$$

Viiest suuremate n väärtuste puhul on meie teadmised võrrandi (4) lahenduvuse kohta väga puudulikud. Euleri hüpoteesi järgi peaks leiduma kuuendaid astmeid, mis on esitatavad kuue samasuguse astme summana. Kuid $n=6$ korral pole teada ühtki võrrandi (4) lahendit mitte ainult juhul $k=6$, vaid isegi mitte ühegi $k \leqslant 14$ korral. Juhul $k=15$ on teada vaid üks lahend:

$$3 \cdot 1^6+7 \cdot 2^6+5 \cdot 3^6=4^6.$$

Seega võime ainult väita, et

$$3 \leqslant h(6) \leqslant 15. \tag{20}$$

Veel suuremate n väärtuste puhul pole olukord sugugi parem. On teada vaid järgmised hinnangud (Subba Rao, 1934):

$$h(7) \leqslant 25,\ H(7) \leqslant 42, \quad h(8) \leqslant 17,\ H(8) \leqslant 17, \quad h(9) \leqslant 32.$$

Mistahes n väärtuste puhul võib küll kergesti leida hinnangu

$$H(n) \leqslant 2^n, \tag{21}$$

kuid see on muidugi väga kaugel oletatavast täpsest väärtusest $H(n)=n$. Nii näiteks $n=6$ korral saaksime $H(6) \leqslant 64$, mis on palju halvem mitte ainult Euleri miinimumist $H(6)=6$, vaid isegi $h(6)$ jaoks saadud hinnangust (20). Märgime lõpuks, et hinnang (21) järeldub samasusest

$$(a^n+b^n)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(a^{n-k}b^k)^n.$$

ÜHEST MATEMAATIKA AJALOO POPULARISEERIMISE KATSEST EESTIS

J. Depman

Küsimused matemaatika ajaloost pakuvad kahtlemata üsna laialdast huvi, eriti õppiva noorsoo hulgas. Kuid Eesti territooriumil, jättes välja viimased aastakümned, on vähe teateid katsetest tutvustada laiemat lugejaskonda matemaatika ajalooga. Üht katset võib siiski nimetada.

1868. a. ilmus Tallinnas 34-leheküljeline brošüür *«Die Entwickelung der Mathematik und ihre Beziehung zur Naturwissenschaft, von Carl Lais, Oberlehrer der Mathematik und Physik am Gymnasium zu Reval»* (Matemaatika areng ja tema seos loodusteadustega, Carl Laisilt, Tallinna Gümnaasiumi matemaatika ja füüsika ülemõpetajalt).

Autorist teatab *Album Academicum*, et C a r l L a i s on sündinud 1825. a., õppinud Tartus 1847—1850, omandanud kandidaadi astme, töötanud 1859—1861 tähetorni direktori abina ja füüsika kabineti inspektorina ning 1861—1887 Tallinna Gümnaasiumi ülemõpetajana, seejärel elanud pensionärina Tallinnas.

Raamatu eessõnas ütleb autor, et tema eesmärk on anda gümnaasiumi lõpetajale enne ülikooli minekut ülevaade matemaatika arenemisloost, näidata, kuidas see teadus on olnud muistsest ajast peale loodusteaduste aluseks. Autor tahab noorsugu veenda, et ainult tõsine mõttetöö ja loominguline visadus viivad tõeliste edusammudeni inimkonna arengus.

Paaril leheküljel kujutab autor, kuidas inimene loodusnähtusi vaadeldes neid esialgu muinasjuttude abil seletada püüdis ja hiljem — Egiptuses ja Babüloonias — looduse objektide vormi ja arvu vaadeldes esimesi teaduslikke järeldusi tegi.

Kreeklased arendasid edasi eeskätt just nähtuste vormi uurimist, kuna India teadlased avaldasid huvi peamiselt arvu vastu. Mõlemale suunale annab autor võimaliku põhjenduse. Põhjalikumalt peatub ta kreeka matemaatika saavutustel ja iseloomul, kujutades seejuures üldiselt õigesti tähtsamate kreeka teadlaste teeneid. Eukleidese tutvustamisel nimetatakse tema ideede jätkajatena Steinerit ja Poncelet'd. Käsitlust leiavad india matemaatikute saavutused aritmeetikas ja algebras (kuni Pelli võrrandini). On mainitud ka võimalikke kreeka ja india õpetlaste ideede vastastikuseid mõjustusi Aleksandrias (Diophantos).

Matemaatika arengu jälgimisel Euroopas annab autor ülevaate Kepleri, Viète'i, Stiefeli, Napieri, Stevini ja Descartes'i loomingust. Seoses võrrandite teooria edusammudega nimetatakse Cardanot, Tartagliat, Ferrarit, Harriot'd, Girardi.

Peatükis kõrgemast matemaatikast on enam juttu Leibnitzist kui Newtonist. Bernoullide ja Euleri saavutused leiavad hindamist, Gaussi omad napilt. Raamatu viimased leheküljed sisaldavad vaimustava pildi matemaatika tähtsusest loodusteadustele (Leverrier, Adams, Fresnel, Hamilton).

Viimane lehekülg algab sõnadega: «Närtsimata loorberid, mis ehivad kõrgemat matemaatikat loodusteadustes, ei tee elementaarmatemaatikat ülearuseks, sest loodus ei häbene luua mõningaid oma nähtusi õige elementaarsete seaduste põhjal ja konstrueerida puht-eukleidilisel viisil sirkli ja joonlaua abil, nagu seda õpetavad imepäraselt seaduspärased lumehelbed ja tuhanded teised kristallid...» Autor lõpetab Fourier' vaimustavate sõnadega: «Matemaatika on inimmõistuse võime, mis aitab katta selle piiratust ja elu lühidust».

Raamatukeses kõlavad praegusele lugejale mõned read ehk aegunutena. Omal ajal vääris ta tähelepanu ja on veel praegugi loetav. Kahjuks pole temas juttu vene teadlaste saavutustest.

Loodame, et ka tänapäeval kerkib esile keskkooliõpetajaid, kes Carl Laisi eeskujul seavad endale eesmärgiks tutvustada meie koolinoori ja üldse laiemat lugejaskonda matemaatika arenguga ja tema osaga teaduste süsteemis.

SAM LOYDI ÜLESANDED

Samuel Loyd, ameerika suurim nuputusülesannete koostaja, sündis 30. jaanuaril 1841. a. Philadelphias. Kolm aastat hiljem asus nende perekond elama New Yorki, kus noor Sam õppis kuni 17-aastaseni. Ta oli pikk, kõhn, vaikne ja tal olid ebaharilikud harrastused: järeleahvimine, trikkide tegemine, kõhurääkimine, mustast paberist siluettide väljalõikamine, malemäng. Malet õppis ta mängima 10-aastaselt ja ta kiindus niivõrd sellesse mängu, et luhtusid isegi plaanid saada inseneriks. Kõrvuti malemänguga hakkas ta koostama maleülesandeid. Ta oli 14-aastane, kui avaldati esimene tema maleülesanne ja tema kuulsus maleülesannete koostajana kasvas kiiresti. Loyd on sel alal jäänud tänapäevani ületamatuks meistriks.

Pärast 1870. aastat rauges Loydi huvi maleülesannete vastu ja ta hakkas koostama matemaatilisi nuputusülesandeid. Ka siin saavutas ta kiiresti kuulsuse, tema ülesannete eest maksti miljoneid.

Loydi ülesanded olid laiali pillatud paljudes ajakirjades ja ajalehtedes. Pärast tema surma (10. apr. 1911) kogus tema poeg Samuel Loyd jun. isa ülesanded kokku ja avaldas need kogumikuna *Cyclopedia of Puzzles*. Selles teoses oli aga küllalt palju vigu. Tuntud teaduslike ja nuputusülesannete raamatute autor Martin Gardner tegi ülesannetest valiku, süstematiseeris ja korrigeeris neid ning avaldas kaheköitelise teose *Mathematical Puzzles of Sam Loyd* (1959), millest järgnevalt ongi toodud mõned näited.[1]

[1] Ülesanded tõlkinud ja sissejuhatuse kirjutanud R. Samel.

KUI PALJU KAALUB LAPS?

Mrs. O'Toole, pidades silmas majanduslikku kasu, kavatseb kaaluda korraga ennast, oma last ja koera. Kui ta kaalub sada naela rohkem kui koer ja laps ning koer kaalub 60% vähem lapsest, kas te võite siis öelda, kui palju kaalub laps?

ERALDADA POISID JA TÜDRUKUD

Kaheksa põngerjat ülal pildil seisavad reas, nii et poisid ja tüdrukud on vaheldumisi. Ülesandeks on nad selliselt ümber paigutada, et neli sõdurit oleksid ühel poolel ja neli Punase Risti tüdrukut teisel poolel, kusjuures kõik kaheksa seisaksid üksteise kõrval. Seda tuleb teha nelja ümberpaigutusega, kusjuures iga ümberpaigutus seisneb kahe kõrvutioleva lapse viimises teise kohta.

Parim tee lahendada ülesannet on asetada penniline iga poisi kohale ja 10-sendiline iga tüdruku kohale, seejärel nihutades kaht raha korraga püüda tuua kõik pennid ühele poole ja 10-sendilised teisele poole nelja ümberpaigutusega. Pidage meeles, et nihutatavad rahad peavad olema kõrvuti asetsev paar ja te ei või neid omavahel ümber vahetada. Näiteks te võite paigutada *D* ja *E* (tähed on mütsidel) rea vasakusse serva. Kui te teete nii, siis te ei või neid ümber asetada, nii et *E* oleks *D*-st vasakul.

KUIDAS ESIMENE MÄNGIJA VÕIB ALATI VÕITA?

Hiljuti sattusin 15. sajandi mänguhulluse kirjeldusele, kus teiste osavus- ja õnnemängude seas, mille peale rüütlid nii hoolimatult kihla vedasid, oli mainitud munade linale ladumise sporti. Siit võib-olla pärineb Kolumbuse ja muna lugu, kuid hoolimata oma targast sisust tundub ta liiga tuimana sellise metsiku perioodi jaoks. Mulle meeldis selle mängu põhimõte, mis kutsub esile leidlikke ja originaalseid mõttekäike.

Seda mängu mängivad kaks vastast, kes asetavad võrdse suurusega mune vaheldumisi ruudukujulisele salvrätikule. Kui muna on asetatud, siis ei või kumbki mängija seda liigutada või puudutada. Mäng jätkub seni kuni salvrätik on nii täis, et sellele pole võimalik juurde panna enam ühtki muna. Mängija, kes asetas muna viimati, on võitja. Salvrätiku või munade suurus, samuti munadevahelised kaugused ei ole tähtsad ja seetõttu paistab, et viimase muna asetamine on õnne või juhuse asi. Siiski, kasutades kavalat strateegiat võib esimene mängija alati võita, mis, nagu suur meresõitja mainis, «on kõige lihtsam asi maailmas, kui teile on näidatud, kuidas!»

Matemaatiline päevakaja

20 AASTAT STEFAN BANACHI SURMAST

I. Tammeraid

31. augustil 1965. a. möödus 20 aastat väljapaistva poola matemaatiku, lineaarsete ruumide kaasaegse teooria rajaja Stefan Banachi surmast.

Stefan Banach sündis 30. märtsil 1892. a. Krakovis, kus omandas ka keskhariduse. A. 1910—1914 õppis ta Lvovi polütehnilises instituudis. Huvi matemaatika vastu äratas noores Banachis tema sõber, poola hulgateoreetilise koolkonna esindaja H. Steinhaus. Oma esimese iseseisva töö avaldas Banach alles 26-aastasena (1918). Tema varasemas loomingus oli eriline koht 1922. a. ilmunud tööl, milles lahendati üldine mõõdu probleem sirgel ja tasandil.

1922. a. alustas Stefan Banach lineaarsete ruumide ja lineaarsete operaatorite uurimist, tööde tsüklit, milles rajati kaasaegse funktsionaalanalüüsi alused. Need tõid talle ka tunnustuse. 1924. a. valiti ta Poola Teaduste Akadeemia korrespondentliikmeks ja Lvovi ülikooli professoriks. Lvovis koondus Banachi ümber terve funktsionaalanalüüsi koolkond (J. Schauder, S. Mazur jt.). Alates 1929. a. andis Banach koos Steinhausiga välja rahvusvahelist ajakirja *Studia Mathematica*. Selle ajakirja esimeses numbris ilmus Banachi sulest artikkel, milles oli esmakordselt ära toodud üks lineaarsete ruumide teooria põhiteoreeme — teoreem lineaarsete funktsionaalide jätkamisest. 1932. a. ilmus Banachi monograafia «Lineaarsete operatsioonide teooria» (*Théorie des opérations linéaires*). See monograafia oli õpikuks tervele matemaatikute plejaadile. Neil aastail asus Stefan Banach töötama juba mittelineaarse funktsionaalanalüüsi aluste kallale, alale, mille uurimisega on hiljem tegelnud paljud nimekad matemaatikud.

Kõige selle kõrval õnnestus tal saada uusi tulemusi ortogonaalridade teoorias ja lahendada probleeme ka teistes kaasaegse matemaatika harudes. Banachi kui pedagoogi huvide ring oli väga lai, ulatudes isegi mehhaanikasse. (Ta avaldas originaalse kaheköitelise mehhaanika õpiku.) Sõjaeelsetel aastatel oli Banach Poola Matemaatikaseltsi president. 1939. a. kevadel anti talle Poola kõrgeim teaduslik preemia.

1939. a. ühendati Lvov Ukrainaga. Stefan Banach asus kogu energiaga organiseerima tööd Lvovi ülikoolis. Ta valiti füüsika-matemaatikateaduskonna dekaaniks.

1941. a. ei õnnestunud Banachil evakueerida perekonda ja ta jäi Lvovi, kus tema olukord kujunes väljakannatamatult raskeks. Nagu paljud teisedki Lvovi teadlased, töötas Banach «täitoitjana» instituudis, mis valmistas tüüfusevastast vaktsiini. Pärast nõukogude võimu taaskehtestamist asub ta uuesti tööle Lvovi ülikooli. Seoses üleelatud katsumuste ja areneva kopsuvähiga halvenes Banachi tervislik seisund 1945. a. algul järsult, tõmmates kriipsu peale tema tulevikuplaanidele. Stefan Banach suri 31. augustil 1945. a.

Esitame järgnevalt mõningaid kilde **H. Steinhausi** kõnest, mille ta pidas 4. septembril 1960. a. Poola Teaduste Akadeemia Matemaatika Instituudi konverentsil. Konverents oli pühendatud S. Banachi 15. surma-aastapäevale [1].

Banachi arvates oli otsustav tähtsus matemaatiliste teooriate väärtusel, sealjuures nende omapärasel, mitte utilitaarsel väärtusel. Tema välismaised konkurendid lineaarsete operaatorite teooria alal võtsid vaatlusele liialt üldised ruumid ja seetõttu said vaid banaalseid tulemusi, või siis tegid nende ruumide kohta liiga palju eeldusi, mis kitsendas rakenduste sfääri mõnede kunstlike näidetega; Banachi geenius ilmnes kuldse kesktee leidmises.

* *
*

Banach ei lootnud kunagi õnnelikule juhusele ja sellele, et täitub antud momendil soovitav oletus. Ta armastas rääkida, et «lootus on lollide ema»; selline skeptitsism optimismi suhtes oli talle omane mitte ainult matemaatikas, vaid ka poliitilistes prognoosides. Ta sarnanes Hilbertiga selles mõttes, et ründas iga probleemi otserünnakuga, ja heitnud näidete abil kõrvale kõik külgteed, koondas kogu oma jõu järelejäänud sihileviivale teele; ta uskus, et ülesande loogiline analüüs, mis on läbi viidud nii, nagu maletaja analüüsib keerulist seisu, peab viima teoreemi tõestuseni või selle eitamiseni.

* *
*

Banach ei olnud professor selle sõna otseses mõttes. Oma loenguid pidas ta hiilgavalt; kunagi ei eksinud üksikasjades ega kirjutanud tahvlit täis keerulisi valemeid ja arvukaid sümboleid. Ta ei omistanud tähtsust oma esinemiste vormi täiuslikkusele; talle oli võõras igasugune humanitaarne lihv ja kogu oma eluajal säilitas ta Krakovi võrukaela mõned jooned nii käitumises kui ka kõneviisis. Tal oli raske formuleerida mõtteid kirjalikult; oma käsikirja kirjutas ta eraldi lehtedele, mis olid välja rebitud vihikutest; kui oli vaja muuta osa kirjutatud tekstist, lõikas ta kõrvaldatavad read ära ja kleepis nende kohale puhta paberi, millele kirjutas uue teksti. Sõprade ja assistentide abita ei oleks Banachi esimesed tööd kunagi trükis ilmunud. Kirju ta peaaegu üldse ei kirjutanud ja kirjalikele järelpärimistele ei vastanud.

* *
*

Banach oskas töötada alati ja kõikjal. Ta ei olnud harjunud mugavustega ja ei vajanud neid; seetõttu oleks nagu pidanud jätkuma professori palgast. Kuid kohvikus viibimise kirg, täielik argielu ökonoomika mittetundmine ja igapäevased segadused oma asjades olid põhjuseks, et ta sattus võlgadesse ja jäi lõpuks väga raskesse majanduslikku olukorda.

* *
*

Banach, Mazur ja Ulam — see oli peamine laudkond «Šoti kohvikus» Lvovis. Ükskord toimus koguni «istung», mis vältas 17 tundi; tulemuseks oli ühe Banachi ruumide kohta käiva tähtsa teoreemi tõestus, kuid keegi ei kirjutanud tõestust üles ja nüüd ei suuda keegi seda taastada... Tõenäoliselt pesi koristaja pärast «istungit» harjumuse kohaselt keemilise pliiatsiga täiskirjutatud lauakese puhtaks. Niisugune oli paljude Banachi ja tema õpilaste tõestatud teoreemide saatus. Seetõttu on väga suur tema naise Lucia Banachi teene, kes ostis paksu kõvade kaantega kaustiku ja andis selle «Šoti kohviku» ülemkelnerile; kaustiku lehtedele tuli kanda probleemid nii, et pöördele oleks kunagi võimalik kirjutada vastavad lahendused ja vas-

[1] Vene keelest tõlkinud G. Vainikko. Kõne täieliku teksti võib leida ajakirjast «Журнал Польской Академии Наук», 1960, V, № 3—4, lk. 78—87.

tused. Seda originaalset «Šoti raamatut» võis kasutada igaüks, oli vaja vaid tellida kelnerilt. Mõned probleemid olid sinna kirja pandud vaevatasu lubadusega lahenduse eest; preemia kõikus tassist mustast kohvist kuni elusa haneni.

* *
*

Ekslik oleks pidada Banachi unistajaks, apostliks või askeediks. Ta oli realist, kes isegi oma välimusega ei sarnanenud pühaku kandidaatidega... Ta oli terve ja tugev, oli realist isegi künismini, kuid andis Poola teadusele, eriti Poola matemaatikale rohkem kui keegi teine. Kellelgi ei õnnestunud eredamalt kui temal hajutada kahjulikku arvamust, et teaduslikus võistluses on geeniuse puudumine (või vähemalt talendi puudumine) asendatav teiste eelistega, millel kõigil on muide see ühine joon, et neid on raske kindlaks teha. Banach teadis, milline on tema tähtsus teaduse jaoks ja milliseid väärtusi ta loob. Ta rõhutas oma mägilaspäritolu ja suhtus küllaltki põlglikult portfellita intelligendi tüüpi, kellel oli vaid üldine haridus.

KONVERENTS «TÄPPISTEADUSTE ARENGU JA METOODIKA PÕHIKÜSIMUSI EESTI NSV-S»

A. Oja

Seekordne, arvult kolmas täppisteaduste alane teaduslik-pedagoogiline konverents toimus 7.—9. maini Tartus. Konverents oli pühendatud Eesti NSV 25. aastapäevale.

Osavõtt konverentsist oli arvukas ja aktiivne: osavõtjaid registreeriti üle 300. Tänu ENSV Haridusministeeriumi aktiivsele kaasabile konverentsi ettevalmistamisel, olid esindatud peaaegu kõigi rajoonide haridusosakonnad. Üle poole osavõtjatest olid väljastpoolt Tartut ja Tallinna. Kui arvestada ka ekskursioone TRÜ arvutuskeskusse, füüsika laboratooriumidesse, Tõravere observatooriumi ja «küberneetilise» näidendi «Rops» ühiskülastust, siis kujunesid konverentsi «tööpäevad» üsna pikkadeks ja tihedateks, kestes lühikeste vaheaegadega hommikust hilisõhtuni.

Avaplenaaristungil käsitles K.-S. R e b a n e füüsikute ettevalmistamist TRÜ-s perioodil 1961.—1970. a. Huvipakkuvad ettekanded olid J. E i n a s t o l t ja L. V a l d i l t. Esimene neist rääkis teadusliku töö produktiivsusest, tuues esile rea praktikas esinevaid organisatoorset laadi mõjureid, mis pidurdavad teaduslikku tööd ja mille kõrvaldamine parandaks tunduvalt teadusliku töö kvaliteeti ja kvantiteeti. L. Valt põhiendas oma ettekandes «Teaduse metodoloogia aktuaalseid probleeme» vajadust uurida erinevate tunnetusmeetodite vahekorda. Ettekandja kirjeldas teadusliku tunnetuse struktuuri loogilist mudelit ja rõhutas, et on vaja analüüsida laiemas plaanis teadusliku uurimise protsessi ennast, — see ongi teaduse metodoloogia ülesanne.

Rida Tallinna, Tartu ja Tõravere teadlasi tutvustas kuulajaid oma teadusliku uurimistöö saavutustega.

Suurt tähelepanu pöörati konverentsil metoodika küsimustele. Nii matemaatika kui ka füüsika sektsioonis oli ühe istungi tulipunktis vastava aine metoodika. Metoodikaalased ettekanded olid küll mitmekesised, kuid ühise murena jäi nii füüsika kui ka matemaatika pedagoogidel kõlama see, et keskkooli õppeprogrammid ei vasta tegeliku elu nõudmistele. Kaasaegne tehniline ja teaduslik progress nõuab noortelt elluastujatelt selliseid teadmisi, mille kohta õppeprogrammides pole sõnagi. Otseselt käsitlesid neid küsimusi J. R e i m a n d («Majanduslikud küsimused keskkooli matemaatikakursuses») ja K. V e l s k e r («Tõenäosusteooria ja matemaatilise statistika elementide käsitlemise vajalikkusest keskkoolis», «Matemaatika metoodika rahvusvahelisi probleeme»). Viimane neist käsitles üldhariduslikku polütehnilise keskkooli reformimise probleemi ka laiemalt, näidates ära selle rahvusvahelist iseloomu. Kui seni püüti reformimist teostada olemasolevate programmide kohandamise ja parandamise teel, siis viimasel ajal peetakse vajalikuks koostada algusest lõpuni täiesti uued õppeprogrammid.

Konverentsi kesksemaks teemaks kujunes programmeeritud õpetamine. Sellest valdkonnast oli ettekandeid kõige arvukamalt. See on ka täiesti mõistetav, sest programmeeritud õpetamine on viimastel aastatel olnud paljude pedagoogide tähelepanu objektiks. Kuulajate aktiivse ja asjatundliku osavõtu põhjal võib nende küsimuste arutamisest järeldada, et paljud meie füüsika ja matemaatika õpetajad ei ole programmeeritud õpetamise küsimustega mitte ainult hästi kursis, vaid kasutavad programmeeritud õpetamise meetodeid ka igapäevases koolipraktikas. Kokkuvõtteid oma kogemustest ja võrdlevatest uurimustest programmeeritud ja tavalise õpetamisviisi kohta esitasid H. K u l l (Tartu 2. Keskkool), A. H a a m e r (Elva Keskkool), T. P a l m (Tallinna 21. Keskkool) ja L. L u b i (Pärnu 1. Keskkool). Arvukalt esinesid programmeeritud õpetamise alaste ettekannetega ka kõrgemate koolide pedagoogid (U. A g u r, K. T o i m, I. K u l l jt.).

Vaatamata üsna ulatuslikule programmeeritud õpetamise rakendamisele kogu vabariigis, jäi siiski mulje (seda rõhutasid ka mitmed ettekandjad), et praktikas pole tegelikult kaugemale jõutud õpilaste teadmiste mehhaniseeritud kontrollist. Nähtavasti on sellise olukorra põhjuseks, kui võõrastav see ka ei tunduks, õppeprotsessi sügavamate seaduspärasuste vähene tundmine.

Konverentsil võeti vastu järgmine resolutsioon:

RESOLUTSIOON

Tartu Riikliku Ülikooli, ENSV TA Loodusuurijate Seltsi ja ENSV Haridusministeeriumi poolt korraldatud III teaduslik-pedagoogilise konverentsi «Täppisteaduste arengu ja metoodika põhiküsimusi Eesti NSV-s» tööst võttis osa üle 300 matemaatika ja füüsika õpetaja ja täppisteadlase vabariigi kesk- ning kõrgematest koolidest ja uurimisinstituutidest.

Konverents konstateerib, et meie vabariigi kõrgemates koolides ja instituutides uuritakse edukalt matemaatika, füüsika, teoreetilise mehhaanika ja astronoomia paljusid aktuaalseid teoreetilisi ja praktilisi probleeme. Seda tunnistab ka asjaolu, et viimastel aastatel teostatud täppisteaduste alastest uurimustest on esitatud mitmeid ulatuslikke töid Nõukogude Eesti preemiate saamiseks.

Tõsiselt tegeldakse samuti täppisteaduste õpetamise probleemidega nii kesk- kui ka kõrgemates koolides. Nii on meie vabariigi matemaatikud ja füüsikud kirjutanud suure hulga õpikuid ja rotaprindil paljundatud õppevahendeid. On välja antud metoodilist kirjandust. Täppisteaduste taseme tõstmiseks ja huvi äratamiseks täppisteaduste vastu meie vabariigi õpilaste ja töötajate hulgas on kaasa aidanud niisugused populaarteaduslikud väljaanded, nagu «M a t e m a a t i k a j a k a a s a e g», kogumikud «L o o d u s j a m a t e m a a t i k a», «M a t e m a a t i k a. M e t o o d i l i s t e a r t i k l i t e k o g u m i k» ja mitmed meie vabariigi teadlaste kirjutatud populaarteaduslikud teosed. Juba pikemat aega korraldatakse täppisteaduste alaseid vabariiklikke olümpiaade keskkooli õpilastele. 1965. aasta aprillikuus toimunud ülevenemaalisest täppisteaduste olümpiaadist võtsid osa ka meie vabariigi koolinoored, kes saavutasid seal mitmeid auhinnalisi kohti.

Kõigi nende positiivsete saavutuste kõrval esineb aga ka mitmeid olulisi kitsaskohti täppisteaduste edasiarendamisel meie vabariigis, samuti vastavate spetsialistide ettevalmistamisel ja koolinoorte matemaatika- ja füüsikaalasel väljaõppel.

Nende kitsaskohtade kõrvaldamiseks teeb konverents järgmised ettepanekud:

1. Teadusliku uurimistöö efektiivsuse ja produktiivsuse suurendamiseks soovitab konverents vabariigi kõrgematel koolidel, uurimisinstituutidel ja vastavatel vabariiklikel organitel (ENSV MN Riiklik Kõrgema ja Keskeriharidusе Komitee, ENSV MN Riiklik Teaduslike Uurimistööde Koordineerimise Komitee) pöörata suuremat tähelepanu teaduslikus töös

esinevate kitsaskohtade analüüsile ja uurimustele teadusliku töö metoodika ning teaduste metodoloogia alal.

2. Konverents soovitab ENSV Teaduste Akadeemial, ENSV MN Riiklikul Kõrgema ja Kesk-erihariduse Komiteel, kõrgematel koolidel, uurimisinstituutidel ja ENSV Haridusministeeriumil pöörata suuremat tähelepanu teadusliku informatsiooni hankimisele ja vahetamisele täppisteaduste aktuaalsete suundade kohta, samuti täppisteaduste metoodika valdkonnas. Sel eesmärgil tuleks suurendada võimalusi komandeeringuteks, sealhulgas ka välismaisteks.

3. Konverents soovitab ENSV MN Riiklikul Kirjastuskomiteel, kirjastusel «Eesti Raamat», ajakirjade toimetustel, ENSV Haridusministeeriumil ja täppisteadlastel pöörata suuremat tähelepanu vastava ala õpikute, õppevahendite (ülesannete kogud, töövihikud ja muu didaktiline materjal), populaarteaduslike teoste ja kirjutiste laialdasemale koostamisele, tõlkimisele ja avaldamisele.

Kirjastustel ja vabariiklikul raamatukaubastul tuleks tähelepanu pöörata samuti piisavate tiraažide määramisele täppisteaduste alastele väljaannetele.

4. Konverents loeb hädavajalikuks oluliselt parandada koolidele vajalike didaktiliste materjalide väljaandmist.

5. Taotleda kogumikule «Matemaatika ja kaasaeg» ajakirja õiguste andmist.

Konverents konstateerib, et vajadus analoogilise ajakirja järele on ka füüsika ja keemia alal.

6. Paluda vabariigi pedagoogilise ajakirjanduse toimetust avada «Nõukogude Õpetajas» või «Nõukogude Koolis» rubriik «Uusi õppevahendeid», milles avaldada artikleid uute õppevahendite tutvustamiseks ja kasutamiseks õppetöös.

7. Pidada otstarbekohaseks Eesti NSV matemaatikute seltsi loomist, mis organiseeriks ja koordineeriks matemaatikaalast tegevust meie vabariigis.

Vastava seltsi organiseeriva komitee moodustamine teha ülesandeks TRÜ matemaatikaosakonnale.

8. Konverents leiab, et meie vabariigis on vajalik säilitada 11-klassiline keskharidus. Seoses sellega peab konverents otstarbekohaseks vältida üldse 10-aastase õppeajaga keskkooli lõpetajate lende.

9. Konverents peab vajalikuks jätkata tööd keskkooli matemaatika- ja füüsikakursuse sisu määramiseks ja metoodilise käsitluse parandamiseks.

10. Konverents soovitab keskkoolide matemaatika ja füüsika õpetajatel pöörata erilist tähelepanu õpilaste huvi äratamisele täppisteaduste vastu. Sel eesmärgil võiks peale koolisiseste ürituste (erialaringide töö, temaatilised seinalehed jms.) korraldada kohtumisõhtuid vabariigi täppisteadlastega, stimuleerida õpilaste osavõttu täppisteaduse-alastest olümpiaadidest jne.

Konverents soovitab keskkoolide matemaatika ja füüsika õpetajatel pöörata ühtlasi tähelepanu vastavate eeldustega noorte innustamisele asuda edasi õppima täppisteaduste aladel.

11. Konverents kiidab heaks täppisteaduse-alaste eriklasside loomise meie vabariigi mõningate keskkoolide juures.

Konverents peab otstarbekohaseks (vastava õpetajatekaadri ja materiaalse baasi olemasolu korral) niisuguste eriklasside arvu suurendamist.

12. Konverents soovitab programmeeritud õpetuse põhimõtete edasiarendamisel ja rakendamisel pöörata senisest suuremat tähelepanu programmeeritud õpetuse teoreetilistele probleemidele.

13. Konverents soovitab ENSV MN Riikliku Kõrgema ja Kesk-erihariduse Komiteel taotleda programmeeritud õpetamise alase vabariikliku probleemlaboratooriumi loomist.

14. Ed. Vilde nim. Tallinna Pedagoogilises Instituudis ja Tartu Riikliku Ülikooli pedagoogilistes harudes soovitada käsitleda programmeeritud õpetamise küsimusi.

15. Konverents soovitab ENSV Haridusministeeriumil organiseerida täppisteaduse-alaste diafilmide valmistamist ja tootmist, pidades silmas eriti programmeeritud õpetamise vajadusi.

Kümnest Lenini preemiast, mis 1965. a. anti välja eriti silmapaistvate teaduslike tööde eest, omistati kolm preemiat matemaatikutele. Kõrge austuse osalisteks saanud matemaatikuteks on:

1. Arnold, Vladimir Igorjevitš (sünd. 1937. a.), füüsika-matemaatikateaduste doktor, Moskva Riikliku Ülikooli professor, Kolmogorov, Andrei Nikolajevitš (sünd. 1903. a.), akadeemik, kateedri juhataja samas ülikoolis, — tööde tsükli eest Hamiltoni süsteemide stabiilsuse alalt;

2. Mitropolski, Juri Aleksejevitš (sünd. 1917. a.), Ukraina NSV Teaduste Akadeemia akadeemik, Ukraina NSV Matemaatika Instituudi direktor, — tööde tsükli eest mittelineaarsete diferentsiaalvõrrandite teooria ja mittelineaarsete võnkumiste alalt;

3. Kantorovitš, Leonid Vitaljevitš (sünd. 1912. a.), akadeemik, NSVL Teaduste Akadeemia Siberi Osakonna Matemaatika Instituudi direktori asetäitja, Nemtšinov, Vassili Sergejevitš (1894—1964), akadeemik, Novožilov, Viktor Valentinovitš, majandusteaduste doktor, Leningradi Insenermajandusliku Instituudi professor, — lineaarse planeerimise ja majanduslike mudelite teadusliku teooria väljatöötamise eest.

Akadeemikute Kolmogorovi ja Kantorovitši kohta leiab lugeja materjale «Matemaatika ja kaasaja» eelmistest numbritest (nr. 2 lk. 77—78 ja nr. 6 lk. 88).

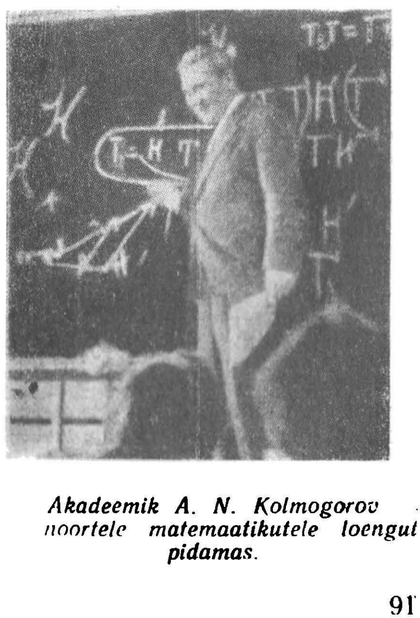
Allpool avaldame lühiülevaated, mis tutvustavad käesoleval aastal Lenini preemia saanud tööde sisu ja tähtsust.

AUTORID: ÕPETAJA JA ÕPILANE[1]

I. Gelfand

Vähe leidub käesoleval ajal õpetlasi, kelle nimi kutsuks esile nii üksmeelse teenete ja autoriteedi tunnustuse kui A. N. Kolmogorovi oma. Tuntud on Andrei Nikolajevitši tööd peagu igast matemaatika valdkonnast. Väärib erilist märkimist, et silmapaistev nõukogude matemaatik ja pedagoog, akadeemik A. N. Kolmogorov on tunnistatud Lenini preemia vääriliseks koos oma andeka õpilase V. I. Arnoldiga tööde tsükli eest, milles käsitletakse Hamiltoni süsteemide stabiilsuse probleemi.

Neil matemaatika ja mehhaanika piirialastel töödel on erakordne tähtsus. Juba ammu — mitte vähem kui seitsekümmend aastat tagasi — pärast A. Poincaré uurimusi, muutus mõistetavaks, et ainult väikest arvu mehhaanikaalaseid ülesandeid on või-



Akadeemik A. N. Kolmogorov noortele matemaatikutele loengut pidamas.

[1] Ajalehest «Известия», 22. apr. 1965. a., tõlkinud K. Ariva.

malik lahendada täpselt. Üksiku planeedi liikumist ümber Päikese on võimalik täpselt kirjeldada. Kuid juba kolme keha samaaegse liikumise probleemil ei ole täpset ehk — nagu matemaatikud ütlevad — analüütilist lahendit. Mõnel juhul võetakse abiks ligikaudsed meetodid ja kaasaegsed arvutusmasinad. Kuid juba märgitud kolme keha probleemiga ei tule toime isegi kõige kiirem elektronarvuti. Põhjuseks on arvutamise täpsuse kiire kahanemine juhul, kui on tarvis vaadelda süsteemi liikumist pika ajavahemiku vältel. Näiteks Maa on oma olemasolu kestel sooritanud umbes viis miljardit tiiru ümber Päikese, sellepärast on võimatu kirjeldada tema liikumist ligikaudsete meetoditega.

Niisiis real juhtudel ei saa meid aidata ei täpsed (analüütilised) ega ligikaudsed (numbrilised) meetodid. On vajalikud mingid üldised kvalitatiivse uurimise meetodid.

V. I. Arnoldi ja A. N. Kolmogorovi uurimustes ongi välja töötatud täiesti uus matemaatiline meetod. Selle rakendamine võimaldas autoreil lahendada rea probleeme, mida senini, paljude silmapaistvate matemaatikute, mehhaanikute ja astronoomide pingutustest hoolimata ei suudetud «vallutada». Näitena võib tuua jälle kolme keha probleemi. V. I. Arnold tõestas oma õpetaja A. N. Kolmogorovi väljatöötatud meetodi abil selle ülesande stabiilsete lahendite küllalt suure «massiivi» olemasolu. See uurimus on vahetult seotud näiteks Päikesesüsteemi stabiilsuse probleemiga.

Uued meetodid osutusid sedavõrd viljakaiks, et neid õnnestus rakendada mitte ainult klassikaliste probleemide uurimisel, vaid ka terve rea ülesannete puhul, mille tähtsust mõistetakse alles praegusel ajal, — näiteks küsimus laetud osakeste liikumisest «magnetlõksudes».

V. I. Arnoldi ja A. N. Kolmogorovi tööde ilmumine on erakordselt tähtis sündmus. Kogu maailmas mõistetakse, et tegemist on nõukogude matemaatika suurepärase saavutusega.

LENINI PREEMIA MITTELINEAARSETE SÜSTEEMIDE UURIMISE EEST[1]

N. A. Tšaikovski ja E. M. Parasjuk

Paljud füüsikalised protsessid on kirjeldatavad diferentsiaalvõrrandite abil, mis sealjuures võivad olla kas lineaarsed — kui esinevad vaid tuletiste esimesed astmed —, või siis mittelineaarsed — kõigil teistel juhtudel.

Ajalooliselt kõige varem uuriti lineaarsete diferentsiaalvõrrandite rajaülesandeid (tänu nende lahendite suhteliselt lihtsale struktuurile) ning tänapäeval on need tulemused muutunud matemaatika klassikaliseks saavutuseks. Mittelineaarsete diferentsiaalvõrrandite teooria erineb aga lineaarsete võrrandite omast üsna oluliselt ja lineaarsete võrrandite puhul tuntud meetodite lihtne ülekandmine mittelineaarsele juhule ei osutunud võimalikuks. Seetõttu kerkis kogu maailma matemaatikute ette vajadus luua printsipiaalselt uued meetodid, mis oleksid küllalt efektiivsed mittelineaarsete ülesannete lahendamiseks. Seoses eeskätt raadiotehnika laiaulatusliku arenguga muutus eriti pakiliseks vajadus uurida nn. mittelineaarseid võnkumisi, s. t. diferentsiaalvõrrandeid, mis sisaldavad ajaliselt muutuvaid parameetreid. Selle vajaduse tõttu tekkiski käesoleva sajandi 30-ndatel aastatel nõukogude ja välismaa teaduses uus matemaatikaharu — mittelineaarne mehhaanika. Klassikalistele tulemustele, mis on seotud A. M. Ljapunovi ja H. Poincarè nimedega, lisandus nüüd niisuguste efektiivsete ligikaudsete meetodite areng, mis on rakendatavad võn-

[1] Käesolva artikli saatsid «Matemaatika ja kaasaja» toimetusele Lvovi matemaatikud. Vene keelest tõlkis E. Jürimäe.

kumisi kirjeldavatele mittelineaarsetele diferentsiaalvõrranditele. Nende meetoditega seotud äärmiselt tähtsate küsimuste lahendamine ongi Kiievi matemaatikute koolkonna üheks tähelepanuväärseimaks saavutuseks.

Esimene matemaatikute koolkond Ukrainas tekkis Kiievis akad. D. A. Grave (1863—1939) juhtimisel. Sellest koolkonnast pärinevad väljapaistvad algebraistid ja arvuteoreetikud A. Ostrovski, B. N. Delone, M. F. Kravtšuk, O. J. Šmidt, N. G. Tšebotarjov jt.

J. A. Mitropolski

Kiievi matemaatikute teist koolkonda juhtis akad. N. M. Krõlov (1879—1945), kes andeka noore matemaatiku N. N. Bogoljubovi (sünd. 1909) isikus leidis endale väärilise õpilase, kaastöötaja ning oma töö jätkaja. Alates 30-ndatest aastatest tegelesid N. M. Krõlov ja N. N. Bogoljubov probleemidega, mis hiljem liitusidki mittelineaarseks mehhaanikaks. Seetõttu peetaksegi neid õigustatult selle uue teadusharu loojaiks. Nad teostasid suure tsükli uurimusi seoses raadiotehnika, sünkroonsete masinate staatilise ja dünaamilise stabiilsuse ning teiste rakendusmehhaanika ja tehnika ülesannetega. Nende tööd arenesid põhiliselt dünaamiliste süsteemide asümptootilise integreerimise ja niisuguste süsteemide üldise teooria suunas. Ülesandeks seadsid nad luua mittekonservatiivsete süsteemide jaoks väikese parameetri järgi arendamise efektiivsed meetodid, mis võimaldaksid vastavaid võrrandeid vaadelda kui lineaarseid konstantsete kordajatega võrrandeid.

N. M. Krõlov ja N. N. Bogoljubov arendasid ning põhjendasid mittelineaarse mehhaanika ligikaudseid ja asümptootilisi meetodeid, luues sellega mittelineaarsete võnkumisprotsesside uurimiseks sobiva teooria. Nende tööde jätkajaks on N. N. Bogoljubovi õpilane, 1965. a. Lenini preemia laureaat J. A. Mitropolski.

J u r i A l e k s e j e v i t š M i t r o p o l s k i sündis 3. jaanuaril 1917. a. Šišaki külas Gogolevski rajoonis Poltaava oblastis. 1942. a. lõpetas ta Kasahhi (Alma-Ata) ülikooli. Aastatel 1946—1950 töötas ta Ukraina NSV Teaduste Akadeemia Ehitusmehhaanika Instituudis, aastast 1950 aga Matemaatika Instituudis, olles seal 1953. a. alates osakonna juhataja. Aastast 1958 on J. A. Mitropolski Matemaatika Instituudi direktoriks. Samal aastal valiti ta ka Teaduste Akadeemia korrespondentliikmeks ning 1961. a. tegevliikmeks. Ta on Ukraina NSV Teaduste Akadeemia füüsika-matemaatikaosakonna büroo esimees.

Oma tööde põhilised tulemused on J. A. Mitropolski avaldanud kahes monograafias — «Mittestatsionaarsed protsessid mittelineaarsetes võnkumissüsteemides» (Kiiev, 1955) ja «Asümptootilised meetodid mittelineaarsete võnkumiste teoorias» (Moskva, 1958; kaasautor N. N. Bogoljubov) — ning terves reas artiklites.

J. A. Mitropolski peamiste resultaatide sisuliseks iseloomustamiseks anname nüüd sõna laureaadile enesele [2].

— *Mida annavad Teie lahendatud matemaatilised probleemid teistele teadusharudele, tehnilistele distsipliinidele?* Sellise küsimuse esitas korrespondent J. A. Mitropolskile. Värske Lenini preemia laureaat vastas järgmiselt.

[2] Järgnev intervjuu on võetud nädalalehest «Україна» № 15, 1965. Ukraina keelest tõlkinud G. Vainikko.

— Matemaatika on üks abstraktsemaid distsipliine. Erinevalt teistest teadustest kasutab matemaatika peaaegu eranditult üldistatud mõisteid. Kuid kogu abstraktsusest hoolimata on matemaatikute antud järeldused seotud tegelikkusega ja leiavad laialdast rakendamist teistes teadustes.

Kaasaegse teaduse ja tehnika paljudes harudes tuleb kokku puutuda võnkumistega, mille sagedus ja amplituud on muutuvad. Selliseid võnkumisi nimetatakse mittelineaarseteks võnkumisteks. Lineaarseid võnkumisi on suhteliselt lihtne uurida, nad on kirjeldatavad üldiselt lihtsate matemaatiliste valemite abil. Aga niipea kui on tegemist mittelineaarsete võnkumistega, kerkivad matemaatikute ette erakordselt rasked probleemid. Suurimad raskused seisnevad niisuguse matemaatilise avaldise leidmises, mis arvestaks võnkumise parameetrite ja kordajate muutumist. Selle probleemiga on seotudväntvõllide, turbiini rootorite, transmissioonide, propellerite, tsentrifuugide arvutus. Samasuguste võnkumistega puutuvad kokku teadlased, kes arvutavad kosmiliste rakettide ja maa tehiskaaslaste orbiite, aga samuti teadlased, kes projekteerivad sünkrofasotrone, mille abil füüsikud õpivad tundma looduse sügavaimaid saladusi — aatomi tuuma ehitust. Kiirendatavate osakeste voog hakkab juba päris algul mittestatsionaarselt võnkuma, mille tagajärjel osakesed võivad «kleepuda» sünkrofasotroni seinte külge ja vajaliku kiiruse saavutamine muutub siis endastmõistetavalt võimatuks.

Mul õnnestus välja töötada niisuguste ülesannete lahendusmeetodid, leida vastavad algoritmid. Öeldes «mina», ei pea ma silmas isiklikult ennast ja isegi mitte instituuti, mida juhin. Tänapäeval ei tehta avastusi üksikult. Mittelineaarsete süsteemide võnkumiste uurimismeetodid said võimalikuks tänu nõukogude matemaatikute kooli õitsengule, tänu ülemaailmselt kuulsatele teadlastele N. N. Bogoljubovile, N. M. Krõlovile, A. N. Kolmogorovile ja paljudele teistele kodumaa teaduse korüfeedele.

MATEMAATILISE MAJANDUSTEADUSE LOOJAD[1]

Viimastele aastatele on iseloomulik majandusmatemaatiliste meetodite tormiline areng ning nende praktiline rakendamine väga mitmesugustes planeerimise ja juhtimise ülesannetes. Märkides nõukogude teaduse selle uue ja erakordselt perspektiivse suuna edusamme, omistatigi 1965. a. Lenini preemia kolmele silmapaistvale nõukogude õpetlasele — L. V. Kantorovitšile, V. L. Nemtšinovile ja V. V. Novožilovile. Nende töödes on sügavalt analüüsitud täpsete matemaatiliste meetodite kasutamise võimalusi majanduses, esitatud põhimõtteliselt uus lähenemine keeruliste majanduslike nähtuste kvalitatiivsele analüüsile ning välja töötatud numbrilised meetodid tähtsate tehnilis-majanduslike ülesannete lahendamiseks.

Tootmise optimaalse organiseerimisega seotud praktiliste ülesannete analüüsimise käigus formuleeris Leonid Vitaljevitš Kantorovitš juba aastatel 1938—1939 laia klassi ekstreemumülesandeid lisatingimustega võrratuste kujul ja töötas välja lineaarsete ekstreemumülesannete lahendamise meetodid. Oma töös «Tootmise organiseerimise ja planeerimise matemaatilised meetodid» («Математические методы организации и планирования производства»), mis ilmus 1939. a., demonstreeris ta uue lähenemisviisi eduka kasutamise võimalusi rea praktiliste ülesannete lahendamiseks. Selles töös olid esmakordselt esitatud uue rakendusmatemaatika haru, mida hiljem hakati nimetama lineaarseks planeerimiseks, alused.

Tuleb märkida, et lineaarse planeerimise meetodid avastati uuesti USA-s alles 40-ndate aastate lõpul (10 aastat hiljem!), sest majandusmatemaa-

---

[1] Kirjutis on lühendatud tõlge ajakirjast «Экономика и математические методы», 1965, т. 1, вып. 3, lk. 463—465. Tõlkinud E. Tamme.

tiliste meetodite alased L. V. Kantorovitši tööd jäid kuni 50-ndate aastate alguseni vähetuntuteks.

Lineaarse planeerimise matemaatiliste ideede edasiarendamisele ja süvendamisele ning selle distsipliini meetodite abil lahendatavate ülesannete klassi avardamisele on pühendatud L. V. Kantorovitši 1959. a. avaldatud raamat «Ressursside parima kasutamise matemaatiline arvestus» («Экономический расчет наилучшего использования ресурсов»). Selles on esmakordselt esitatud rahvamajanduse optimaalse plaani probleem ranges matemaatilises vormis.

Nõukogude majandusmatemaatilise kooli üheks rajajaks oli nüüd meie hulgast lahkunud Vassili Sergejevitš Nemtšinov. Kõigile on teada tema hiiglaslik panus majandusmatemaatilise uurimissuuna kujundamisse ja arendamisse meie maal.

V. S. Nemtšinovi töödes on antud terve rida konkreetseid majandusmatemaatilisi mudeleid vastavalt majanduse erinevatele tasemetele. Tema poolt üksikasjalikult väljatöötatud majandusrajooni mudelit on rakendatud reas NSV Liidu rajoonides.

Erilist huvi pakuvad V. S. Nemtšinovi tööd sotsialistliku majanduse arengu kvantitatiivsete seaduspärasuste, tema tasemete, proportsioonide ja tempode määramise ning selle alusel optimaalsete plaanide leidmise metodoloogia väljatöötamise alal. Kõik see peab olema uue, Nemtšinovi poolt planomeetriaks nimetatud majandusliku distsipliini sisuks.

V. S. Nemtšinov püstitas esimesena NSV Liidus majandusküberneetika probleemi. Ta vaatles majandust kui suurt automaatreguleerimise süsteemi ja kavandas rahvamajanduse juhtimise põhijooned. Nemtšinov kaitses visalt mõtet süsteemi isereguleerumist tagavate paindlike tagasisidemete vajalikkusest. Sellest vaatepunktist lähenes ta majanduslike stiimulite ja hindade kujundamise küsimustele.

V. S. Nemtšinovi teaduslike tööde kokkuvõtteks on tema raamat «Majandusmatemaatilised meetodid ja mudelid» («Экономико-математические методы и модели», 1962), mis kujunes käsiraamatuks igale majandusmatemaatiliste meetodite alal spetsialiseeruvale teaduslikule töötajale, samuti ka paljudele ökonomistidele-praktikutele.

V. S. Nemtšinov on olnud ka väljapaistvaks õpetlaseks-organisaatoriks. Tal on suuri teeneid NSVL TA majandusmatemaatika alase laboratooriumi ja teadusliku nõukogu organiseerimisel (neist esimese baasil moodustati 1963. a. NSVL TA Majandusmatemaatika Keskinstituut), Moskva Ülikooli vastava kateedri loomisel jm.

Kolmas Lenini preemia laureaat — Viktor Valentinovitš Novožilov on paljud oma uurimused pühendanud kulutuste ja tulemuste vahekorra, samuti töö ning kapitaalmahutuste efektiivsuse mõõtmise küsimustele sotsialistlikus majanduses. Tema teoreetilised konstruktsioonid haaravad nõukogudemaa majanduse organiseerimise ja majanduspoliitika kõige teravamaid küsimusi.

Kulutuste ja tulemuste vahekorra mõõtmise probleemi tähtsust on raske üle hinnata. Selle lahendamisest sõltub teravate ebakõlade likvideerimine meie hindadesüsteemis, rahvamajandusliku efektiivsuse ja üksiku ettevõtte isemajandamise vahelise vastuolu ületamine ning paljude teiste negatiivsete nähtuste kõrvaldamine meie majanduses.

V. V. Novožilovi töö «Kulutuste ja nende tulemuste mõõtmine sotsialistlikus majanduses» («Измерение затрат и их результатов в социалистическом хозяйстве», 1959), mis on kokkuvõtteks tema palju aastaid väldanud uurimuste tulemustest, kujutab endast olulist panust optimaalse planeerimise teooriasse. Selle fundamentaalse töö põhiline teoreetiline ja praktiline tähtsus seisneb asjaolus, et kapitaalmahutuste efektiivsuse, jt. küsimusi käsitletakse ühtsest vaatepunktist — optimaalse planeerimise printsiipide alusel.

L. V. Kantorovitši. V. S. Nemtšinovi ja V. V. Novožilovi tööd, mis üksteist vastastikku täiendavad, sisaldavad erakordse teadusliku ja rakendusliku väärtusega järeldusi. Neis on õigupoolest rajatud uue teadusharu — matemaatilise majandusteaduse alusmüür.

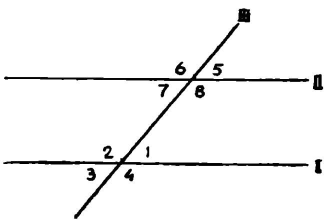
„Matemaatika ja kaasaja" keelenurk

NURGAPAARIDEST, MIS TEKIVAD KAHE SIRGE LÕIKAMISEL KOLMANDAGA

O. Rünk

Kooli planimeetriakursuses (aga üsna sageli ka mitmesugustes geomeetrilistes konstruktsioonides ja tõestustes) esinevad oluliste mõistetena nurgapaarid, mis saadakse kahe sirge (eriti kahe paralleelse sirge) lõikamisel kolmanda sirgega. Paarid moodustatakse nii, et üks nurk võetakse ühe ja teine teise lõikepunkti juurest. Tähtsad on ainult järgmistel viisidel moodustatud paarid (sulgudes on toodud lähtepaariga analoogilised paarid; vt. joonis):

a) 1 ja 5 (2 ja 6; 3 ja 7; 4 ja 8);
b) 1 ja 7 (2 ja 8; 3 ja 5; 4 ja 6);
c) 1 ja 8 (2 ja 7; 3 ja 6; 4 ja 5).



Paare (a) nimetati meil pikemat aega *vastavateks nurkadeks* (vene k. *соответственные углы*; saksa k. *gleichliegende Winkel*, ka *Gegenwinkel* ja *Stufenwinkel*). Juba mõnda aega on meie koolikirjanduses selle asemel juurutatud uut terminit *kaasnurgad*, mis oma kõlavusest ja lühemusest hoolimata tundub endisest sisu poolest vähem selgemana. Uue termini loojad ja pooldajad väidavad, et vanal olevat see puudus, et ta võib osutuda segavaks tasandi punktteisenduste käsitlemisel, kus on vaja kõnelda nurgast ja tema teisendist kui teineteisele vastavate nurkade paarist. Nii võib näiteks kindlale nurgale ühe lõikepunkti juurest vastavaks teha *iga* nurga teise lõikepunkti juurest. Kuigi see tõepoolest nii on, peab ometi ütlema, et siin nähakse tonti, mida pole olemas. Tasandi punktteisenduste käsitamisel tuleb vaevalt vaja kõne all olevaid nurgapaare, mis on ju moodustatud eriotstarbeiks; teisalt aga oleme matemaatikas harjunud silmas pidama mitmeid vastavusi korraga. Ka ei tohiks mööda minna tõsiasjast, et vana termin *vastavad nurgad* on täielikus kooskõlas venekeelse terminiga *соответственные углы*.

Sellegipoolest võidakse ikkagi kahelda «vastavuse» mõiste kasutamise õigsuses selles kohas. Kahtlust süvendab tõsiasi, et muud keeled pole siin «vastavust» kasutanud, vaid on otsinud ja leidnud mitmesuguseid muid võimalusi; seega püüdlusi «vastavuse» arendamiseks mõne muu sõnaga tuleks ka eesti keeles lugeda põhjendatuks. Tekib küsimus, kas esimene sellekohane tõsisem katse meie keeles on hästi õnnestunud. Selleks püüame välja selgitada, kas uuel terminil on ka puudusi tema ilmsete paremuste (kõlavuse ja lühemuse) kõrval.

Allakirjutanu arvates on uue termini kõige olulisemaks puuduseks see, et eesliite *kaas-* kasutamine pole siin hästi kooskõlas selle eesliite kasutamise traditsiooniga matemaatikas. Nimelt kasutatakse seda eesliidet ainult juhtudel, kui paariliste vahel on tugev loogiline side, kui üks tingib ja määrab kohe ka teise — *loomulikult* ja *seaduspäraselt* (näit. kaassihid, kaasdiameetrid, kaaskompleksarvud jm.), *mitte aga deklaratiivselt*. Seevastu keelendeid «vastav — vastavad — vastavus» kasutatakse hoopis laiema diapasooniga, eriti ka deklaratiivsete paaritamiste ehk vastavusse seadmiste korral (näit. «seame lõpliku hulga A iga elemendi vastavusse mingi elemendiga samast hulgast»).

Püüame lõpuks küsimusele läheneda ka ümberpöördult, s. t. ärgem lähtugem nurgapaaridest (a), otsides neile sobivat nime, vaid lähtugem keelendist «kaasnurgad» ning otsigem sellele kui «matemaatilisele terminile» sobivat sisu. Ilmselt peaks selleks sisuks olema nurgad, mis teineteist tingivad ja määravad. Soovides antud nurgast saada tema «kaasnurka» minimaalsete vahenditega, jõuaksime kergesti sihile näiteks järgmise lihtsa määranguga: «kaasnurkadel olgu ühised haarad (mistõttu nad oma graafilises pildis summeeruvad täispöördeks, arvuliselt aga oleks tegemist suurustega α ja $360° - \alpha$). Oleks hästi mõeldav analoogiliselt defineerida ka ringi ja kera «kaassektoreid» jm., kui see mingiks otstarbeks vajalikuks osutuks. See arutelu näitab, et nurgapaare (a) ja keelendit «kaasnurgad» ei tohi kohelda kui teineteisele üksüheselt vastavaid fenomene.

Heaks väljendiks nurgapaaride (a) jaoks on saksakeelne termin *gleichliegende Winkel*, kuigi liialt pikk. Kanjuks ei lase see ennast ladusalt ja lühidalt (s. t. terminiks sobivalt) adekvaatselt tõlkida eesti keelde. Paljudest sellekohastest katsetest peab allakirjutanu parimaks sõna — kohasnurgad. Prof. A. Humal tegi sellele lisaks tähelepanuväärse ettepaneku — pärinurgad —, mis näib aga üsna hästi sobivat ka paaridele (c), kus seni on meil kasutatud termineid rindnurgad (varemalt) ja lähisnurgad (praegu), milledel ka on mõningaid puudusi.

Kõiki puudusi selles terminoloogilises kompleksis korraga likvideerida püüdes saaksime vahest järgmise tabeli (kus paare on nimetatud samapoolseteks ja eripoolseteks vastavalt sellele, kas paarilised on lõikavast sirgest ühel pool või teine teisel pool).

Samapoolsed paarid	Isepoolsed paarid
(a) 1 ja 5; 2 ja 6; 3 ja 7; 4 ja 8 on kohasnurgad	(c) 1 ja 7; 2 ja 8; 3 ja 5; 4 ja 6 on põiknurgad
(b) 1 ja 8; 2 ja 7; 3 ja 6; 4 ja 5 on pärinurgad (sisemised ja välimised)	(d) 1 ja 6; 2 ja 5; 3 ja 8; 4 ja 7 võiksid olla näiteks «köördnurgad», aga praktikas pole neid vaja.

Kroonika

PROFESSOR JAAN DEPMAN 80-AASTANE

Professor Jaan Depmani juubeli puhul läkitati talle järgmine auaadress, millele kirjutas alla rühm kõrgemate koolide õppejõude ja 110 matemaatikaõpetajat vabariigi koolidest:

Eesti matemaatikud ja Värskasse suvekursustele kogunenud matemaatikaõpetajad tervitavad ja õnnitlevad Teid auväärse juubeli —

80. SÜNNIPÄEVA PUHUL.

Olles teadlikud Teie suurest huvist koolimatemaatika vastu ja tuttavad Teie kirjutatud sellealaste raamatutega, samuti Teie tähelepanuväärsete töödega matemaatika, eriti aritmeetika ajaloo alalt,

soovime Teile raugematut jõudu ja tublit tervist oma rikkalike kogemuste ja teadmiste jagamiseks nii meile kui ka teistele Teie noorematele kolleegidele.

17. juulil 1965. a. pühitses oma 80. sünnipäeva üks meie teenekamaid vanema põlve matemaatikapedagooge, Leningradi A. I. Herzeni nim. Pedagoogilise Instituudi professor Jaan Depman.[1]

Sündinud Viljandimaal Tarvastus põllutöölise perekonnas ja lõpetanud kohaliku valla- ja kihelkonnakooli, siirdus J. Depman 15-aastase noorukina Tartusse, kus astus vene õppekeelega Tartu Õpetajate Seminari. Selle lõpetamisele 1904. aastal järgnes kaheaastane õpetajatöö Virumaal Toilas ja Iisakus, koduõpetaja eksamite sooritamine Narva gümnaasiumis ning siirdumine A. Jansoni reaal- ja kaubanduskooli õpetaja kohale Peterburi. Seal õiendas J. Depman 1907. aastal Peterburi II gümnaasiumi juures küpsuseksamid ja astus Peterburi ülikooli matemaatikat õppima. Pärast ülikooli lõpetamist 1912. a. kirjutas ja kaitses J. Depman oma kandidaaditöö ning 1914. a. algas jällegi pedagoogitegevus, seekord Jamburgi (praegu Kingissepp) kommertskoolis. Edasisteks töökohtadeks olid Smolenski õpetajate instituut (1917/18. õ.-a.), Petrogradi õpetajate instituut (1918/19. õ.-a.) ja Vjatka (praegu Kirov) pedagoogiline instituut (1919 aastast). Viimases omistati J. Depmanile 1922. a. professorikutse.

Püsivaks elukohaks saab prof. J. Depmanile 1924. aastal Leningrad ja töökohaks 1925. aastal A. I. Herzeni nim. Pedagoogiline Instituut. Ta on aga õpetanud ka mitmetes teistes Leningradi kõrgemates õppeasutustes (näit. aastatel 1946—1956 Leningradi ülikoolis), samuti Leningradi eesti õppekeelega koolides.

J. Depmani ühiskondlik ja kirjanduslik tegevus algas juba üliõpilaspõlves. Ta oli innukas kaasalööja Peterburi Eesti Üliõpilaste Seltsi üritustes, kuuludes selle uude pahempoolsesse juhtkonda koos V. Kingissepa ja J. Anveldiga. Viimasega sidus teda tihe sõprus, mis algas juba seminaris ja süvenes järgnevatel sagedastel kokkupuudetel (vt. kogumik «Jaan Anvelt», Tln., 1965). Seltsi väljaandel avaldas J. Depman ligi paarkümmend eestikeelset loodusteadusi populariseerivat kirjutist. Kaastöö eest bolševistlikule ajalehele «Kiir» sattus ta tsaaripolitsei järelvalve alla, arestist pääses ta kord ainult selle tõttu, et politsei ei suutnud õnneks kindlaks teha V. G. Korolenko «Igapäevase nähtuse» eestindajat ja terava eessõna autorit «J. D.» Koos J. Anveldi ja H. Pöögelmanniga toimetas J. Depman hiljem ka ÜK(b)P Eesti osakonna häälekandjat «Edasi».

Kui pärast Suurt Oktoobrirevolutsiooni avanesid uurijaile tsaarivalitsuse arhiivid, sai prof. J. Depmanist peagi eesti kultuurilugu puudutavate Leningradi materjalide silmapaistev uurija ja publitseerija. Koos J. Anveldi ja J. Lilienbachiga leidis ta väärtuslikke andmeid eesti töölisajakirjanduse minevikust ja avaldas need Leningradis «Külvaja» kirjastusel. Hiljem on Nõukogude Eesti perioodikas ilmunud J. Depmanilt materjale seoses C. R. Jakobsoni, E. Vilde, M. Veske jt. tegevusega. Rohkesti väärtuslikke andmeid, eriti Tartu ülikooli ajaloo kohta, on jäänud tänaseni käsikirjadesse.

Prof. Jaan Depmani teadusliku uurimistöö põhisuunaks on matemaatika ajalugu, millega ta hakkas järjekindlamalt tegelema 1930-ndail aastail. Sellel alal on ta kujunenud silmapaistvaks spetsialistiks, keda tuntakse mitte ainult Nõukogude Liidus, vaid ka väljaspool. Prof. J. Depman asus esimesena uurima matemaatika ajalugu Eestis, eriti Tartu ülikoolis. Koos prof. J. Sarvega tõlkis ja avaldas ta ülikooli kasvandiku K. Petersoni silmapaistva pinnateooria-alase väitekirja, mis kuulub praegu diferentsiaalgeomeetria klassika hulka. Tõlkele on lisatud põhjalik uurimus autorist ja ajajärgust. Prof. J. Depman on käsitlenud ka Kaasanist Tartusse siirdunud matemaatiku N. I. Lobatševski õpetaja M. Bartelsi tegevust, tuntud saksa matemaatiku C. Fr. Gaussi sidemeid Tartu ülikooliga jms. Üheks viimaseks ja ulatuslikumaks uurimuseks prof. J. Depmanilt on töö Peterburi Matemaatikaseltsi ajaloost. Laialt tuntud on tema raamat «Aritmeetika ajalugu», mis on ilmunud juba kahes väljaandes, ja arvukalt teisi töid matemaatika ajaloo alalt.

[1] Vt. pilt kleebisel lk. 73 vastas.

Rohkesti artikleid ja brošüüre on prof. J. Depman adresseerinud otseselt õpetajatele. Mainigem neist mõningaid: «Mõõdud ja meetriline süsteem» (1954), «Esimene tutvus matemaatilise loogikaga» (1963) jt. Eesti lugeja tunneb tema «Jutustusi matemaatikast» (Tln., 1956). Kogu Nõukogudemaa laste peres on populaarsed J. Depmani «Arvude maailm» (1963) ja «Jutustusi ülesannete lahendamisest» (1964). Üldse sisaldab prof. J. Depmani avaldatud tööde nimestik kuni 150 artiklit, raamatut, brošüüri. Mitmed neist on tõlgitud väliskeeltesse.

Professor Jaan Depmani viljakas töö on leidnud väärilist tunnustamist. Teda on valitud Vene NFSV Haridusministeeriumi õpetatud nõukogusse, NSVL kõrgema atestatsioonikomisjoni retsensendiks jm. 1961. aastal anti talle Lenini orden. Loodusuurijate Selts ENSV TA juures valis prof. J. Depmani 1960. aastal oma auliikmeks.

Eesti matemaatikud soovivad, et prof. J. Depmanil jätkuks ka edaspidigi jõudu tegutsemiseks armastatud erialal, ning loodavad, et sidemed sünnimaaga tugevnevad veelgi

Ü. Lumiste

AKADEEMIK N. ALUMÄE 50-AASTANE

Käesoleva aasta 12. septembril sai ENSV teeneline teadlane ENSV Teaduste Akadeemia asepresident akadeemik Nikolai Alumäe 50-aastaseks.

Juubilar sündis Tallinnas. Pärast Tallinna Tehnikaülikooli lõpetamist 1941. a. pühendus N. Alumäe teaduslikule tegevusele. Suure Isamaasõja ajal töötas ta Eesti NSV Rahvakomissaride Nõukogu stipendiaadina Tšeljabinski Põllumajanduse Instituudis ja Ukraina Teaduste Akadeemia Mäemehhaanika Instituudis. Pärast kandidaadiväitekirja kaitsmist 1945. a. siirdus N. Alumäe tööle õppejõuna Tallinna Polütehnilisse Instituuti. Intensiivset teaduslikku tööd jätkas N. Alumäe alates 1948. a. Moskvas, olles NSV Liidu Teaduste Akadeemia Mehhaanika Instituudi juures doktorantuuris. 1951. a. kaitses N. Alumäe doktoriväitekirja «Õhukeseseinaliste elastsete koorikute uurimine pärastkriitilises staadiumis», ning talle omistati tehnikadoktori teaduslik kraad.

Järgnevail aastail jätkas Nikolai Alumäe elastsete koorikute teooria arendamist Eesti NSV Teaduste Akadeemias töötades. 1956. aastast saadik oli N. Alumäe Energeetika Instituudi mehhaanika ja rakendusmatemaatika sektori juhataja ja alates 1960. aastast on ta Küberneetika Instituudi direktor.

1954. a. valiti N. Alumäe Eesti NSV Teaduste Akadeemia korrespondentliikmeks ja 1961. a. akadeemia tegevliikmeks mehhaanika alal.

Juubilari peamiseks teadusliku uurimise objektiks on olnud õhukeste koorikute tasakaalu, stabiilsuse ja dünaamika küsimused. Sellel alal on temalt ilmunud üle kahekümne fundamentaalse teadusliku töö. Sealjuures on N. Alumäe olnud mehhaanikaalaste uurimuste initsiaator ja selle ala noorte teadlaste ettevalmistamise suunaja meie vabariigis.

Rööbiti viljaka uurimistööga on juubilar aktiivselt osa võtnud teadusliku töö organiseerimisest. Tema initsiatiivil asuti küberneetika mitmete põhiprobleemide uurimisele meie vabariigis ja rajati Eesti NSV Teaduste Akadeemia Küberneetika Instituut.

N. Alumäe on mitmete teaduslike nõukogude ja teaduslike ajakirjade redaktsioonikolleegiumi liige. Ta kuulub Nõukogude Liidu Rahvusliku Mehhaanika Komitee koosseisu.

Väljapaistvate teenete eest teaduse arendamisel anti neil päevil Nikolai Alumäele Eesti NSV teenelise teadlase aunimetus.

L. Ainola

MATEMAATILISE OPTIMAALSE PLANEERIMISE ALANE KONVERENTS NOVOSIBIRSKIS

Käesoleval aastal 31. maist kuni 4. juunini toimus Novosibirskis teaduslikus keskuses konverents, mis oli pühendatud optimaalse planeerimise matemaatilistele meetoditele. Sellel ulatuslikul nõupidamisel oli umbes 150 osavõtjat Novosibirskist ja umbes 550 osavõtjat Nõukogude Liidu teistest keskustest ning Poolast, Ungarist, Tšehhoslovakkiast ja Saksa Demokraatlikust Vabariigist. Eesti NSV matemaatikutest võtsid konverentsi tööst osa Ü. Kaasik, E. Tamme, A. Laumets ja V. Tinn TRÜ-st, M. Tamm ja J. Kajari Küberneetika Instituudist ning M. Reisner Majanduse Instituudist.

Ava- ja lõppsõnaga esines konverentsil NSVL TA akadeemik L. V. Kantorovitš. Majandusteadlane NSVL TA korr.-liige A. G. Aganbegjan kõneles lineaarse planeerimise meetodite senistest olulisematest majanduslikest rakendustest. Ta rõhutas vajadust otsustavate sammude astumiseks matemaatiliste meetodite kasutamise laiendamiseks meie majanduselu juhtimisel. Järgnevatel plenaaristungitel rääkis B. T. Poljak paljude muutujate nõgusa funktsiooni ekstreemumi leidmise uuematest meetoditest, S. I. Zuhhovitski vaatles sama probleemi lahendamist teatavate kitsendustega määratud kumeras piirkonnas. N. V. Moissejev peatus numbrilistel meetoditel dünaamilise planeerimise ülesannete lahendamiseks, D. B. Judin käsitles matemaatilise planeerimise mitte-majanduslikke rakendusi, I. A. Poletajev tutvustas perspektiivseid võimalusi nende meetodite kasutamiseks bioloogias, A. N. Tihhonov kõneles lineaaralgebra ja lineaarse planeerimise ülesannete korrektsusest ning G. Š. Rubinštein näitas võimalust duaalse ülesande mõiste sissetoomiseks väga üldisel juhul ja selle mõiste kasutamist.

Arvukates lühemates ettekannetes tutvustati tulemusi, mida on saadud matemaatilise planeerimise meetodite väljatöötamisel, uurimisel ja rakendamisel meie maa arvutuskeskustes jt. asutustes.

Enamik konverentsi istungeid toimus Novosibirski ülikooli (asut. 1959. a.) 1962. a. valminud hoone avarates ja valgusküllastes auditooriumides. Istungite vaheaegadel tutvusid konverentsist osavõtjad teaduslike uurimistöödega NSVL TA Siberi Osakonna Matemaatika Instituudis ja arvutuskeskuses.

E. Tamme

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI XX TEADUSLIK KONVERENTS

18.—22. mail 1965. a. toimus TPI XX teaduslik konverents. Füüsika ja matemaatika sektsioonis kuulati ära 9 ettekannet. Dots. A. Särevi ettekandes «Konstruktiivse funktsiooniteooria mõningatest küsimustest» uuriti funktsioonide lähendamist positiivsete lineaarsete operaatoritega ja kompositsiooni aproksimeerimist trigonomeetriliste polünoomide ja täisfunktsioonidega. Füüs.-mat. kandidaadi M. Levini ettekandes konstrueeriti kaalufunktsiooniga kvadratuurvalem, mille sõlmedeks on lõigu otspunktid ja mis on parim funktsioonide klassi $\{f(x)\}$ korral, kus $f^{(n)}(x) \in L_2$. Asp. V. Arro vaatles ettekandes «Lié ridade mõningatest rakendustest» harilike diferentsiaalvõrrandite Cauchy ja rajaväärtuse ülesannete lahendamist. Ass. A. Jõgi uuris iteratsioonimeetodite koonduvust Rieszi ja Cesàro teisendustega. Saadud tulemustes paranes hariliku iteratsiooni ja Newtoni meetodi aposterioorne veahinnang või suurenes vastavate meetodite koonduvuspiirkond. Asp. E. R u u s t a l i ettekandes «Integraaloperaatori ligikaudsest pööramisest» vaadeldi Laplace'i operaatori pööramist, kui kujutiseks on murdlineaarne funktsioon. Originaali leidmine taandatakse Volterra II liiki integraalvõrrandile, mis lahendatakse iteratsioonimeetodiga.

Teoreetilise mehhaanika kateedrist esitati ettekandeid: A. T ü m a n o k «Silindrilise kooriku ülemineku võnkumine liikuva koormise mõjul» ja dots. G. G o l s t «Korduva löökkoormuse mõju».

F. Vichmann

STATISTIKASEMINAR TÕRAVERES

10.—12. juunini käesoleval aastal kogunes Tõravere W. Struve nimelisesse Astrofüüsika Observatooriumi üle kahekümne noore matemaatiku Tallinnast ja Tartust. Füüsika ja Astronoomia Instituudi (FAI) matemaatikute. eeskätt A. Nilsoni initsiatiivil sai siin teoks esimene asutusevaheline matemaatilise statistika alane seminar. millest võtsid ettekannetega osa Teaduste Akadeemia Küberneetika Instituudi, FAI ja Tartu Riikliku Ülikooli töötajad.

Seminari avas füüsika-matemaatikakandidaat I. P e t e r s e n, kes märkis matemaatilise statistika üha suurenevat tähtsust kaasajal ning avaldas lootust, et kuigi matemaatiline statistika ei kuulu vabariigis n.-ö. traditsiooniliste uurimissuundade hulka, intensiivistub lähemal ajal teaduslik töö ka selles rakenduslikult olulises matemaatika valdkonnas.

Järgnevaist ettekannetest sisaldas osa uusi teoreetilisi tulemusi, nagu I. P e t e r s e n i «Mõned küsimused seoses regressioonanalüüsiga», A. N i l s o n i «Tõenäosuste ruutude summade statistilistest rakendustest», R. T a m m e s t e «Informatsioonilistest meetoditest statistikas»; mõningad ettekanded olid pühendatud statistiliste meetodite programmeerimisega seotud probleemidele — nimetasime neist U. O p e r i «Regressioonanalüüsi» ning J. K i h o samateemalist ettekannet ja H. P a l l u m i «Dispersioonanalüüsi». Huvi pakkusid ka ettekanded, mis käsitlesid tootmises tekkinud probleemide lahendamist sobivate statistiliste meetodite abil, näit. E. L e l u m e h e «Kvaasistatsionaarsete ajajadade spektraalanalüüs».

Seminari lõpul toimunud läbirääkimistel leiti vajalik olevat parandada statistikute ettevalmistamist vabariigis. Osutus nimelt, et kõik statistika alal töötavad matemaatikud (põhiliselt mõningate viimaste aastate jooksul ülikooli lõpetanud noored) on erandlitult «iseõppijad», s. t. seni ei ole meie vabariigis veel ühtegi matemaatilise statistika või tõenäosusteooria alal ülikooli ega ka aspirantuuri lõpetanud matemaatikut. Olukorra parandamiseks otsustati taotleda TRÜ matemaatikaosakonnas matemaatilise statistika kallakuga spetsialistide ettevalmistamist lähematel aastatel. Teine väga tõsine probleem, mida seminaril korduvalt esile tõsteti, on matemaatiliste ja statistikaalaste teadmiste parandamine teiste erialade teadlaste (n.-ö. matemaatilise statistika meetodite «tarbijate») hulgas. Seminar otsustas teha ettepaneku komplekteerida mitmete TRÜ teaduskondade (bioloogide, meedikute, geograafide jt.) III kursuste üliõpilaste hulgast tugevdatud matemaatilise ettevalmistusega rühm, mille lõpetanud võiksid abistada vastava eriala teadlasi matemaatika, eriti matemaatilise statistika rakendamisega seotud lihtsamate probleemide lahendamisel; siinjuures soovitati kasutada TPI eeskuju, kus analoogiline rühm juba edukalt töötab.

Järgmine analoogiline seminar kavatsetakse läbi viia aasta pärast.

E. Tiit

ÜLEVENEMAALINE TÄPPISTEADUSTE OLÜMPIAAD

Käesoleva aasta 18—22 aprillini toimus Moskvas esimene üleveneemaaline täppisteaduste olümpiaad mis jagunes tegelikult kaheks: füüsika-matemaatikaolümpiaadiks ja keemiaolümpiaadiks. Neil, kes võtsid osa füüsika-matemaatikaolümpiaadist, tuli lahendada nii matemaatika- kui ka füüsikaülesandeid.

Olümpiaadi nimetati ülevenemaaliseks, sest põhilise osa võistlejaist moodustasid Vene NFSV linnade ja oblastite võistkonnad. Sisuliselt oli see aga üleliiduline, kuna Vene NFSV võistkondade kõrval võtsid olümpiaadist osa ka kõigi teiste liiduvabariikide võistkonnad, igast üks.

Võistkonnad olid 9-liikmelised ja nende koosseisu võisid kuuluda 8. kuni 11. klasside õpilased. Kuuel õpilasel võistkonnast tuli osa võtta füüsika-matemaatikaolümpiaadist, kolmel keemiaolümpiaadist.

Meie vabariiki esindasid Moskvas füüsika ja matemaatika alal Vladimir Nõmm ja Mihhail Popov Tallinna 6. Keskkoolist, Piret Keres ja Rein Kipper Tartu 1. Keskkoolist, Natalia Kolossova Tallinna 31. Keskkoolist ning Boris Freidin Tallinna 19. Keskkoolist; keemia alal Mihkel Aul ja Rein Mäll Tartu 5. Keskkoolist ning Rein Hiob Pärnu 2. Keskkoolist.

Osavõtjate üldarv oli üle 900, neist füüsika-matemaatikaolümpiaadist osavõtjaid umbes 550.

Võistkondlikku arvestust käesoleval aastal ei peetud.

Meie vabariigi võistkonnast jõudis matemaatikas ainsana auhinnalisele kohale Vladimir Nõmm (õpetaja N. Popova). Talle anti üks neljandatest kohtadest (I järgu kiituskiri) 11. klasside osas.

Tulemustest füüsikas ja keemias on lähemalt kirjutatud käesoleva aasta 5. juuni «Nõukogude Õpetajas». Olümpiaadi matemaatikaülesanded on toodud lk. 110—111. Aega ülesannete lahendamiseks oli ette nähtud 4—5 tundi sõltuvalt klassist.

K. Velsker

MEIE KÜLALISI

Hiljuti külastas Tartut üks väljapaistvaid Nõukogude tõenäosusteoreetikuid Ukraina NSV TA akadeemik **Boriss Vladimirovitš Gnedenko.** Ta tutvus kohapeal meie matemaatikute uurimissuundade ja saadud tulemustega ning real juhtudel andis ka omapoolseid nõuandeid edasise töö suhtes. Arvuka kuulajaskonna elavat tähelepanu äratas B. V. Gnedenko ettekanne «M a t e m a a t i k a s t j a p r a k t i k a s t», milles ta esitas oma seisukohti matemaatika osast teiste teaduste hulgas ja inimeste praktilises elus.

Peatume käesolevas lühidalt akadeemik Gnedenko teaduslikul tegevusel. Väljapaistvate matemaatikute ja füüsikute erakordsed võimed ja andekus avalduvad reeglina juba varases nooruses. Küberneetika looja Norbert Wiener lõpetas ülikooli 14-aastaselt, neli aastat hiljem kaitses aga doktorikraadi, meie sajandi suurimal füüsikul Albert Einšteinil valmis doktoridissertatsioon tema 26 eluaastal, kaasaegse tõenäosusteooria aluste rajaja Andrei Nikolajevitš Kolmogorov saavutas ülemaailmse tunnustuse enne kolmekümnendat eluaastat. Seda näidete loetelu võiks jätkata ka Gnedenko nimega. 18-aastaselt lõpetas ta Saraatovi ülikooli, 25-aastaselt aspirantuuri Moskva Riikliku Ülikooli juures ja 30-aastaselt, olles 20 teadusliku kirjutise autor, kaitses doktorikraadi. Samal aastal (1942) omistati talle ka professorikutse. 33-aastasena valiti ta Ukraina NSV Teaduste Akadeemia korrespondentliikmeks ja 3 aastat hiljem akadeemikuks.

B. V. Gnedenko kuulub matemaatikute keskmisse põlvkonda, kelle haridustee kulges tervikuna nõukogude korra ajal ja kes võitis rahvusvahelise tunnustuse pärast Teist maailmasõda. Tema teaduslikku produktsiooni iseloomustab üsna lai diapasoon temaatikas. Esialgu uuris ta Aleksander Jakovlevitš H i n t š i n i juhendamisel sõltumatute juhuslike suuruste summeerimist ja nende lahutamist ortogonaalsete funktsioonide järgi, siis üldistas Bernšteini teoreemi sõltumatute juhuslike suuruste normaalsuse kohta. Oma elu Kiievi perioodil (1950.—1960. a.) jõudis ta A. N. K o l m o g o r o v i ja N. V. S m i r n o v i ideede jätkajana väärtuslikele tulemustele teoreetilise ja empiiriliste jaotusfunktsioonide vahe absoluutväärtuse maksimumi omaduste uurimisel ja esitas nende praktiliseks kasutamiseks rea assümptootilisi valemeid.

Erilist huvi äratab aga ta tööde tsükkel samast perioodist koostöös arstide ja bioloogidega südamehaiguste diagnoosist. Nagu teada, on ka parimate kardioloogide tehtud südamehaiguste diagnoosid õiged keskmiselt ühel juhul kolmest. Akadeemik Gnedenko soovitatud ja kasutusele võetud matemaatilise statistika meetodid haiguste sümptoomide uurimisel ja vastavate arvutuste teostamine elektronarvutil tõstsid diagnoosi usalduspiirid 90 protsendini.

Alates 1960. aastast töötab B. V. Gnedenko Moskva Riikliku Ülikooli tõenäosusteooria kateedris, uurides massilise teenindamise e.' järjekorrateooria, usaldatavuse teooria ja mõningaid matemaatika ajaloo küsimusi.

Akadeemik Gnedenko on tuntud suurepärase pedagoogina ja teaduse populariseerijana. Ta on teinud ära suure töö Ukraina tõenäosusteoreetikute koolkonna rajamisel, tema aktiivsel osavõtul loodi Ukraina NSV TA võimas arvutuskeskus ja küberneetika instituut. Arvukatel välismaareisidel on ta propageerinud nõukogude teaduse saavutusi. Viibides paari aasta eest teaduslikul komandeeringul Bulgaarias, rajas ta poole aastaga matemaatika koolkonna, mis nüüd rakendab ulatuslikult statistilisi meetodeid bioloogias ja meditsiinis. Tema sulest pärinevad monograafia matemaatika ajaloost, õpikud tõenäosusteooriast, järjekorrateooriast, programmeerimisest ja usaldatavuse teooriast.

Pöördudes eesti matemaatikute poole, soovitas B. V. Gnedenko pöörata senisest suuremat tähelepanu matemaatika kaasaegsetele rakendussuundadele. Ta märkis, et matemaatika õpetamise programmid ja metoodika vajavad põhjalikku reformi nii keskkoolis kui kõrgemates õppeasutustes.

Boriss Vladimirovitši energia ja töövõime tunduvad olevat ammendamatud. Raske on isegi uskuda, et kolme aasta eest tähistasid kolleegid tema 50. sünnipäeva.

Kui külalisele tema ettekande lõpul anti kingitusena üle meie ajakirja «Matemaatika ja kaasaeg» ilmunud numbrid, sõnas ta naeratades; *«Ma ei saa teile küll lubada, et õpiksin ära eesti keele, ometi püüan ma endale selgeks teha, millest on siin juttu. Loodan sellega toime tulla, sest teatavasti kirjutatakse matemaatilised valemid kõigis keeltes ühtviisi.»*

R. Tammeste

TEENELINE TEADLANE

Eesti NSV Ülemnõukogu Presiidiumi seadlusega 15. oktoobrist 1965. a. anti TRÜ matemaatilise analüüsi kateedri juhatajale prof. G u n n a r K a n g r o l e Eesti NSV teenelise teadlase aunimetus väljapaistvate teenete eest teaduse arendamisel ja teadusliku kaadri ettevalmistamisel.

Prof. Kangro väljapaistvaid teeneid iseloomustavad näiteks järgmised arvud. Ainuüksi viimase 5 aasta jooksul on ta õpetanud seitset eriainet (matemaatiline analüüs, funktsionaalanalüüs, funktsioonide lähendamine jne.); tal on valminud 8 teaduslikku tööd, üle 30 retsensiooni, u. 250 referaati, 2 õpikut; tema juhendamisel töötab praegu 4 aspiranti, 16 on aga aspirantuuri lõpetanud.

Prof. Kangrole — kõikide matemaatikute tugev käepigistus!

XX ÜLIÕPILASTE TEADUSLIK KONVERENTS JA AUHINNATÖÖD

1.—4. aprillini 1965. a. toimus Tartu Riiklikus Ülikoolis XX üliõpilaste teaduslik konverents.

Matemaatika sektsioonis peeti järgmised ettekanded:

1. M. Abel (mat. IV k.). Summeeruvustegurid kompleksset järku Cesàro menetluse jaoks. Mati Abeli vastavasisuline uurimus «Множители суммируемости для методов Чезаро комплексного порядка» oli esitatud 1964./65. õppeaastal ka võistlustööna ja tunnistati **esimese auhinna** vääriliseks. (Juhendaja dots. S. Baron.)

2. K. Riives (mat. V k.). Dubnovi ülesanne neljamõõtmelise ruumi pindade teoorias. (Juhendaja dots. Ü. Lumiste.)

3. E. Sakkov (mat. VI k.). Ristkülikukujuliste elastilisplastiliste plaatide pärastkriitilise staadiumi analüüs. (Juhendaja prof. Ü. Lepik.)

4. H. Türnpu (mat. VI k.). Fourier' ridade absoluutsest summeeruvusest. (Juhendaja prof. G. Kangro.)

5. I. Vainikko (mat. VI k.). Ümmarguste elastilis-plastiliste plaatide termopingetest. (Juhendaja prof. Ü. Lepik.)

Pedagoogika sektsioonis oli enamus ettekandeid matemaatika pedagoogilise osakonna üliõpilastelt:

1. R. Ruut (mat. ped. III k.). Ülevaade ENSV füüsika ja matemaatika õpetajate kaadrist. (Juhendaja van.-õp. J. Reimand.)

2. V. Rõuk ja N. Allikas (mat. ped. III k.). Erinevused suhtlemisrahuldatuses normaalsetel ja «rasketel» lastel. (Juhendaja dots. H. Liimets.)

3. M. Übius ja S. Peets (mat. ped. III k.). Õppeedukuse dünaamika matemaatikas. (Juhendaja dots. kt. I. Unt.)

4. E. Ilves, P. Raud ja J. Siim (mat. ped. III k.). Füüsika-matemaatikaklasside õpilaste koosseis. (Juhendaja dots. kt. I. Unt).

5. K. Ridali, T. Mändveer (mat. ped. IV k.). ja U. Ese (mat. III k.). Matemaatika-, füüsika- ja keemiaalastest teadmistest 1964. a. vastuvõtueksamite alusel. (Juhendaja van.-õp. J. Reimand.)

Psühholoogia sektsioonis peetud ettekannetest märgime ära järgmise:

J. Huik (mat. ped. IV k.). Õppimise matemaatilisest mudelist. (Juhendaja van.-õp. U. Siimann.)

UUSI ÜLIKOOLI LÕPETANUD MATEMAATIKUID

23.—25. juunini 1965. a. lõpetas Tartu Riikliku Ülikooli järjekordne lend matemaatikuid. Matemaatika pedagoogilises osakonnas kaitsti järgmised diplomitööd:

1. Piiroja, Ülle. Boole'i algebra elemendid keskkooli kursuses. (Juhendaja prof. G. Rägo.)

2. Puudersell, Aare. Arvutuslükati 8-klassilises koolis. (Juhendaja dots. O. Prinits.)

3. Ruul, Lea. Tartu raskestikasvatatavate õpilaste arengu iseärasustest. (Juhendaja dots. H. Liimets.)

Riigieksamitega lõpetasid matemaatika pedagoogilise osakonna:

4. Kammiste, Mati,
5. Kukrus, Linda,
6. Lippur, Linda,
7. Paju, Maimu,
8. Pomerants, Ene,
9. Rätsepso, Vilma,
10. Soonvald, Leili,
11. Vassil, Aita.

Nimetatud diplomandidele omistati matemaatiku ja matemaatikaõpetaja kutse.

Kaugõppe Pedagoogilise Instituudi lõpetasid matemaatika erialal ja said keskkooli matemaatikaõpetaja kutse:

1. Liimask, Kalju,
2. Leis, Virve,
3. Krimm, Evi,
4. Leisner, Silvia,
5. Maidlas, Laine,
6. Mark, Endla,
7. Raja, Laine,
8. Saarepere, Herta,
9. Uska, Aino,
10. Tiro, Salme.

Bibliograafia

Eesti NSV-s ilmunud matemaatika-alase kirjanduse nimestik
Märts—juuni 1965

(Koostanud E. Annus)

RAAMATUD

Harjutuste kogumik füüsika, keemia ja matemaatika alalt. (Ülikooli sisseastujatele.) Trt., 1965. 71 lk. (Tartu Riiklik Ülikool.) — Paljundatud rotaprindil.

K a n g r o, G. **Matemaatiline analüüs.** I osa. Tln., «Eesti Raamat», 1965. 468 lk.

T e l g m a a, A. **Järkjärgulise lähenemise meetodist koolimatemaatikas.** Tln., 1965. 100 lk. (ENSV Pedagoogika Teadusliku Uurimise Instituut. Nr. 17.)

Õ i g l a n e, H. **Integraalarvutuse lühikursus.** Trt., 1965, 44 lk. (Eesti Põllumajanduse Akadeemia.) — Trükitud rotaprindil 1500 eks.

Материалы всесоюзного совещания по применению карт с перфорированными краями. Таллин, 1965. 174 с. (Центр. бюро техн. информ. СНХ ЭССР.)

Т р у н о в, Е. К. **Расчет систем перекрестных балок на электронных цифровых вычислительных машинах.** Автореферат. Таллин, 1965. 19 с. (Таллинский политехн. ин-т.)

Х а н к о, П. **О синтезе логических схем.** Автореферат. Таллин, 1965. 9 с. (Акад. наук Эстонской ССР.)

KOGUMIKKUDES JA AJAKIRJADES ILMUNUD ARTIKLID

Eesti NSV Teaduste Akadeemia toimetised. Füüsika-matemaatika- ja tehnikateaduste seeria. Tln., 1965.

Nr. 1. Matemaatika-alased artiklid (vene k., resümeed eesti ja inglise k.):

L. A i n o l a ja U. N i g u l. Pingelained elastsetes plaatides ja koorikutes. — T. T o b i a s. Mõningatest Wieneri mõõdu mõttes parimatest ligikaudsetest valemitest. I. — A. N i l s o n. Tõenäosuste ruutude summade mõnedest omadustest ja nende matemaatilis-statistilisest rakendusest.

Matemaatika ja kaasaeg. Abimaterjale matemaatika õpetajatele ja õppijatele. VI. Trt., 1965. 107 lk. (Tartu Riiklik Ülikool.)

Sisu: J. G a b o v i t š. Algebra põhimõisteid. I. — Ü. K a a s i k ja A. K o r j u s. Automaatne programmeerimine. (Järgneb.) — Programmeerijate ettevalmistamisest. — T. A k k e l. Lineaarse planeerimise rakendamine loomakasvatuses. — Matemaatiliste meetodite rakendamisest Tšehhoslovakkia Sotsialistliku Vabariigi rahvamajanduses. — K. A r i v a. Konstruktsioonid sirkli ja joonlauaga. — M. R a h u l a. Nurga trisektsioon hüperbooli abil. — S. I. Z e t e l. Automediaansed kolmnurgad. — H. R ä t s e p. Arvsõnade päritolust eesti keeles. — Ü. L u m i s t e. A. C. Clairaut — matemaatik, geodeet, astronoom. — A. J ä g e l. «Matemaatika ajaloo lühiülevaade» (D. J. Struik, A concise History of Mathematics). — E. J ü r i m ä e. Kompleksmuutuja funktsioonide teooria eestikeelne õpik (H. Keres, Matemaatilise füüsika meetodid I). — G. V a i n i k k o. Moskva matemaatikaselts 100-aastane. — Uued akadeemikud nõukogude matemaatikute perest. — J. G a b o v i t š. Matemaatilise terminoloogia probleeme. — O. R ü n k. Vastuseks ühele muhedale, kuid vahedele reageeringule (Ü. Kaasik. Mõtteid ühe artikli lugemisel — «Matemaatika ja kaasaeg», III). — Kroonika. — Bibliograafia. — Ülesandeid.

D o r o f e j e v, G. Mittestandardsete võrrandite lahendamine. — «Tehnika ja Tootmine», 1965, nr. 3, lk. 138—139.

K u l l, H. Katsetusi trigonomeetria programmeeritud õpetamisel. — «Eesti Loodus», 1965, nr. 6, lk. 477—479.

M ä n d, H. Arvutuskeskus tööstusettevõttes. — «Tehnika ja Tootmine», 1965, nr. 3, lk. 100—102.

N o o r, E. Matemaatika ja maailmavaate kasvatamine. — «Nõukogude Kool», 1965, nr. 3, lk. 171—176; nr. 4, lk. 252—256.

P u k k, K. Elektronarvuti «Uraal-4». — «Tehnika ja Tootmine», 1965, nr. 5, lk. 198—200.

R ü n k, O. Nupukuse proovipähklid (matemaatikas). — «Tehnika ja Tootmine», 1965, nr. 3, lk. 136—137.

Ülesandeid

A. Ülesandeid elementaarmatemaatikast

I

1. Tööpäev lühenes 8 tunnilt 7 tunnile. Samaaegselt suurenes tööviljakus 20%. Mitme protsendi võrra suurenes toodangu väljalase?

2. Lahendada võrrand

$$\frac{6}{x-3}-\frac{9}{x-2}=\frac{1}{x-4}-\frac{4}{x-1}.$$

3. Täisnurkses kolmnurgas ABC on joonestatud nurga B poolitaja BO ning külje AC keskristsirge DO, mis lõikuvad punktis O. Tõmbame $OE \perp AB$ ning $OF \perp BC$. Kuna $OE = OF$ (nurgapoolitaja punktid asuvad võrdsel kaugusel nurga haaradest) ja $OA = OC$ (lõigu keskristsirge punktid asuvad võrdsel kaugusel lõigu otspunktidest), siis täisnurksed kolmnurgad AOE ja COF on võrdsed. Järelikult $AE = CF$. Kuna $EB = FB$ (kolmnurkade BOE ja BOF võrdsuse tõttu), siis ka

$$AE + EB = CF + FB, \quad AB = CB,$$

s. o. täisnurkses kolmnurgas võrdub hüpotenuus kaatetiga. Kus peitub viga?

4. Jaotada nurk 54° kolmeks võrdseks osaks sirkli ja joonlaua abil.

II

5. Kui reisija istuks linnas A rongile, siis ta jõuaks linna B 20 tunniga. Kui ta aga ootaks lennuki väljumist (oodata tuleks üle viie tunni), siis jõuaks ta linna B 10 tunniga (kaasa on arvatud ootamisaeg).

Mitu korda sõidab lennuk kiiremini rongist, kui on teada, et lennuk jõuab rongile järele 8/9 tunniga? (Eeldame, et lennuk lendab piki raudteeliini ja läbib õhus sama vahemaa, mis rongki.)

6. Leida a ja b täisarvulised väärtused nii, et võrrandi

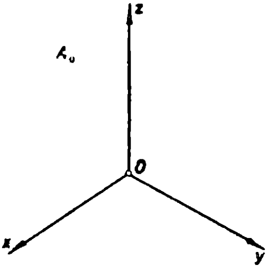
$$3x^3 + ax^2 + bx + 12 = 0$$

üheks lahendiks oleks $x = 1 + \sqrt{3}$.

7. On antud ringjoon raadiusega $R = 1$ ja keskpunktiga O. Punktis E on ringjoonele tõmmatud puutuja. Ringjoonel on võetud punkt M, kusjuures $\angle EOM = \varphi$ $(0° < \varphi < 90°)$. Leida niisuguse ringjoone raadius r, mis puutub antud ringjoont punktis M ja antud puutujat.

8. Lahendada võrrand $3^{\log_9(x^2)} - 1 = 3^{1+\log_9 x} - 3^{-1+\log_9 x}$.

B. Ülesandeid kõrgemast matemaatikast.



1. Konstrueerida antud pöördkoonuse niisugune elliptiline lõige, mille ristprojektsioon tasandil, mis on paralleelne lõikeellipsi väikese teljega ning ka koonuse pöörlemisteljega, osutub ringiks. Kas ülesanne on alati lahenduv?

2. On antud ortogonaalse teljestiku $Oxyz$ ja xz-tasandil asuva punkti A ristprojektsioon (vt. joonis). Leida tasandi $\alpha(A, y)$ kaldenurk φ projektsioonitasandi suhtes.

Ülesanded koostas **O. Rünk** Tallinnast.

Kogumiku VI vihiku ülesannete lahendused avaldame IX vihikus.

RAHVUSVAHELISTE MATEMAATIKAOLÜMPIAADIDE ÜLESANNETE LAHENDUSI

IV olümpiaad

Ülesanne nr. 1. Leida vähim naturaalarv n, millel on järgmised omadused:

a) kümnendsüsteemis on selle arvu viimaseks numbriks 6;

b) kui viimane number 6 paigutada ümber esimeseks, siis saadud arv on $4n$.

Lahendus. Olgu otsitav arv $m = \overline{a_1a_2 \ldots a_{y-1}6}$; selle võib esitada ka kujul $m = 10x + 6$. Kui otsitaval arvul on y kümnendkohta, siis

$$4(10x + 6) = 6 \cdot 10^{y-1} + x$$

ja siit

$$39x = 6(10^{y-1} - 4), \text{ ehk } 13x = 2(10^{y-1} - 4).$$

Seega $10^{y-1} - 4$ jagub 13-ga. Andes y-le väärtusi 2, 3, 4, 5,... saame avaldise $10^{y-1} - 4$ väärtuseks 6, 96, 996, 9996, ... Viimaste hulgast otsime vähima, mis jaguks 13-ga. See arv on $99\,996 = 13 \cdot 7692$. Võrrandist leiame, et $x = 15\,384$ ja otsitav arv on seega 153846. Tõepoolest, $4 \cdot 153\,846 = 615\,384$.

Ülesanne nr. 2. Lahendada reaalarvude vallas võrratus

$$\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > \frac{1}{2}.$$

Lahendus. Võrratuses esinevatest juurtest saame tingimused: $x \leqslant 3$ ja $x \geqslant -1$. Et juurte vahe peab kindlasti olema positiivne, siis lisandub veel tingimus: $x < 1$. Eeldamegi nüüd, et $-1 \leqslant x < 1$. Tõstes võrratuse mõlemad pooled ruutu, jääb võrratus samapidiseks, s. t.

$$3 - x - 2\sqrt{(3-x)(x+1)} + x + 1 > \frac{1}{4},$$

millest $\sqrt{(3-x)(x+1)} < \frac{15}{8}$ ehk $64x^2 - 128x + 33 > 0$.

Viimase võrratuse lahendiks on $x > 1 + \frac{\sqrt{31}}{8}$, $x < 1 - \frac{\sqrt{31}}{8}$.

Antud ülesande lahendiks on seega $-1 \leqslant x < 1 - \frac{\sqrt{31}}{8}$.

Ülesanne nr. 3. On antud kuup $ABCDA'B'C'D'$, millel $ABCD$ ja $A'B'C'D'$ on vastastahud ja $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$. Punkt X liigub konstantse kiirusega ruudu $ABCD$ külgi mööda (antud tippude järjekorras) ja punkt Y liigub sama kiirusega ruudu $B'C'CB$ külgi mööda (antud tippude järjekorras). Punktid X ja Y alustavad liikumist vastavalt punktidest A ja B' samaaegselt. Leida lõigu XY keskpunkti Z geomeetriline koht.

Lahendus. Tähistame tahu $ABB'A'$ keskpunkti tähega O_1, tahu $BB'C'C$ keskpunkti tähega O_2 ja tahu $ABCD$ keskpunkti tähega O_3.

Olgu A koordinaatide alguspunktiks ning AB, AD ja AA' vastavalt x,- y- ja z-teljeks. Kuubi serva pikkuse võtame ühikuks. Jaotame aja, mille jooksul punkt X läbib tee $ABCDA$, neljaks võrdseks osaks ja võtame selle osa ajaühikuks. Koostame punktide X, Y, Z koordinaatide tabeli, kus koordinaadid on avaldatud sõltuvaina ajast t.

		$0 \leqslant t < 1$	$1 \leqslant t < 2$	$2 \leqslant t < 3$	$3 \leqslant t < 4$
	x	t	1	$3-t$	0
X	y	0	$t-1$	1	$4-t$
	z	0	0	0	0
	x	1	1	1	1
Y	y	t	1	$3-t$	0
	z	1	$2-t$	0	$t-3$
	x	$\frac{1+t}{2}$	1	$\frac{4-t}{2}$	$\frac{1}{2}$
Z	y	$\frac{t}{2}$	$\frac{t}{2}$	$\frac{4-t}{2}$	$\frac{4-t}{2}$
	z	$\frac{1}{2}$	$\frac{2-t}{2}$	0	$\frac{t-3}{2}$

Kui $t = 0, 1, 2, 3, 4$, siis punkt Z asub vastavalt punktides O_1, O_2, C, O_3, O_1. Nende punktide vahelistel lõikudel Z muutuvad koordinaadid lineaarselt, s. t. punkt Z joonestab ruumis lõigud O_1O_2, O_2C, CO_3, O_3O_1. Seega Z liigub mööda rombi $O_1O_2CO_3$ külgi.

Ülesanne nr. 4. Lahendada võrrand

$$\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1.$$

Lahendus. Kasutades valemeid $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$, $2\cos^2 2x = 1 + \cos 4x$ teisendame võrrandi kujule

$$\cos 2x + \cos 4x + 2\cos^2 3x = 0$$

ja siit $2\cos 3x \cdot \cos x + 2\cos^2 3x = 0$, $4\cos 3x \cdot \cos 2x \cdot \cos x = 0$.

Seega saame kolm võrrandit

$$\cos 3x = 0; \quad \cos 2x = 0 \quad \text{ja} \quad \cos x = 0,$$

millede lahendeiks on vastavalt

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} k; \quad x_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k \quad \text{ja} \quad x_3 = \frac{\pi}{2} + \pi k,$$

kus k on mistahes täisarv.

Et lahendid x_3 on lahendite x_1 hulgas, siis on vastusteks x_1 ja x_2.

Ülesanne nr. 5. Ringjoonel on antud kolm punkti A, B ja C. Samal ringjoonel konstrueerida sirkli ja joonlaua abil neljas punkt D nii, et nelinurk $ABCD$ oleks puutujanelinurgaks ühele ringjoonele.

Lahendus. Et nelinurk $ABCD$ oleks puutujanelinurgaks, siis peab $AD + BC = AB + CD$. Olgu $AB \geqslant BC$, siis $AB - BC = AD - CD \geqslant 0$.

Ülesanne taandub kolmnurga ACD esitamisele, millest on teada alus AC, tipunurk $ADC = \pi - \angle ABC$ ja külgede vahe $AD - CD = AB - BC$.

Oletame, et ülesanne on lahendatud ja leiame lõigul DA punkti E nii, et $DE = CD$. Seega on $\triangle CDE$ võrdhaarne, järelikult $\angle CED = \frac{\pi - \angle ADC}{2} = \frac{\angle ABC}{2}$ ja $\angle AEC = \pi - \frac{\angle ABC}{2}$. Punkti D leidmiseks konstrueerimegi eelnevalt punkti E. Selleks ehitame lõigule AC kui kõõlule niisuguse ringjoone kaare (punkti B suhtes vastaspoolele), mis mahutab nurga $\angle AEC = \pi - \frac{\angle ABC}{2}$. Punkti A ümber joonestame ringjoone raadiusega $AB - BC = AD - CD = AD - DE = AE$. Selle ringjoone lõikepunkt varem joonestatud ringjoone kaarega määrabki punkti E asukoha. Punkti D saamiseks tuleb lõiku AE pikendada kuni lõikumiseni punktidega A, B ja C määratud ringjoonega.

Kui $AB = BC$, siis saadakse punkt D kui nurga ABC poolitaja lõikepunkt punktidega A, B ja C määratud ringjoonega.

Ülesanne nr. 6. On antud võrdhaarne kolmnurk ABC. Selle kolmnurga ümberringjoone raadius on r ja siseringjoone raadius on ϱ. Tõestada, et nende ringjoonte keskpunktide vaheline kaugus $d = \sqrt{r(r - 2\varrho)}$.

Lahendus. Olgu kolmnurgas ABC $AB = BC$. Tähistame selle kolmnurga ümberringjoone keskpunkti tähega M ja siseringjoone keskpunkti tähega S. Ühendame punktid C ja S. Pikendades seda lõiku kuni ümberringjooneni saame punkti D. Veendume kõigepealt, et kolmnurk ADS on võrdhaarne. Et $\angle DAB = \angle DCB$, $\angle DCB = \angle DCA$, $\angle DCA = \angle SAC$, siis on $\angle DAB = \angle SAC$ ja $\angle DAS = \angle BAC$. Et $\angle ASD = 2 \angle SAC = \angle BAC$, siis $\angle ASD = \angle SAD$ ning $\triangle ADS$ on võrdhaarne.

Nüüd vaatleme kolmnurki CST ja EDA, kus T on võrdhaarse kolmnurga ABC kõrguse aluspunkt ja E on punkt ümberringjoonel, mis saadakse lõigu DM pikendamisel. Siin $\angle CTB = \angle EAD = 90°$ ja $\angle SCA = \angle DEA$, järelikult $\triangle CST \sim \triangle EDA$ ja seega $CS : ST = DE : AD$. Et $ST = \varrho$, $ED = 2r$ ja $AD = DS$, siis $CS \cdot DS = 2r\varrho$. Otsitavaks on lõigu SM pikkus d, mis on osa diameetrist BF. Et $SC \cdot DS = BS \cdot SF = (r + d)(r - d)$, siis

$$2r\varrho = (r + d)(r - d), \quad d = \sqrt{r(r - 2\varrho)}.$$

Ülesanne nr. 7. Leidub 5 kera, mis puutuvad tetraeedri $SABC$ kõiki servi või nende pikendusi. Tõestada,

a) et tetraeeder $SABC$ on korrapärane,

b) et vastupidi, iga korrapärase tetraeedri jaoks leidub 5 niisugust kera.

Lahendus. Puutugu kera Ω kõiki sirgeid, milledel asetsevad tetraeedri $SABC$ servad. Siis kera Ω lõikab tetraeedri iga tahu tasandit kas kolmnurga (tetraeedri tahk) siseringjoont või välisringjoont mööda (kolmnurga välisringjooneks nimetatakse ringjoont, mis puutub kolmnurga üht külge ja kahe teise külje pikendust). Sealjuures on naabertahkude tasandeil asetsevatel ringjoontel nende tasapindade lõikesirgel (sellel asetseb ka tetraeedri serv) ühine punkt, milles see lõikesirge puutub sfääri. On võimalikud 2 juhtu.

1°. Kera puutepunktid asetsevad kõik külgservadel. Sel juhul on kõik kera ja tetraeedri külgtahkude lõikejooned siseringjooned. Kera puutepunktid tahu ABC servadega olgu: serval BC punkt P, serval CA punkt Q, serval AB punkt R ning serval SA punkt K. Läbi nelja mitte ühel tasandil asetseva punkti K, P, Q ja R saab kujutada ühe ja ainult ühe kera. Seega kui eksisteerib esimest tüüpi kera, siis ainult üks.

2°. Asetsegu vähemalt üks kera puutepunkt mõne serva pikendusel. Oletame konkreetselt, et punkt K asetseb nii, et A on K ja S vahel. Siis on ringjoon O_1, mis puutub sirgeid SA, SB ja AB, välisringjoon. Tema puutepunktid nende sirgetega olgu vastavalt K, L (B on L ja S vahel) ja R. Kera ja tahu SCA tasandi lõikejooneks olgu ringjoon O_3, mis sirget SA puutub punktis K, külgserva CA punktis Q ja sirget SC punktis M (C asub S ja M vahel). Lõpuks ringjoon O_2, mis on kera ja tahu SBC tasandi lõikejooneks, puutub sirgeid SB ja SC vastavalt punktides L ja M ning külgserva BC punktis P. Seega teist tüüpi kera puutub tetraeedri kolme serva ja ülejäänud kolme serva pikendust. Kui eksisteerib teist tüüpi kera, siis võib kujutada 4 teist tüüpi kera, sest tetraeedril on 4 tahku. Nende ühesuse saab näidata jälle nelja mitte ühel tasandil asetseva punkti abil.

Eksisteerigu kõik 5 kera. Tähistame tetraeedri $SABC$ servade pikkusi järgmiselt: $SA = a$, $SB = b$, $SC = c$, $BC = a'$, $AC = b'$ ja $AB = c'$.

Olgu K, L, M, P, Q, R — esimest tüüpi kera puutepunktid. Siis $SK = SL = SM$, $AK = AQ = AR$, $BL = BP = BR$, $CM = CP = CQ$ ja et $AK + KS = SA$, $BP + PC = BC$ jne., siis $a + a' = b + b' = c + c'$.

Vaatleme teist tüüpi kera, mis vastab tahule ABC. Siis on $SK - AK = SA$, $BP + PC = BC$, $SL - BL = SB$, $AQ + QC = AC$, $SM - CM = SC$, $AR + RB = AB$, millest $a - a' = b - b' = c - c'$. Võrreldes seda esimest tüüpi kera korral saadud tulemusega järeldame, et $a = b = c$, $a' = b' = c'$. Kui vaatleme teist tüüpi kera, mis vastab tahule SAB, saame tulemusena, et $c' = a = b$. Seega on tetraeeder korrapärane.

Tähistame korrapärase tetraeedri keskpunkti tähega O. Kera Ω, mille keskpunktiks on O ja mis läbib ühe serva keskpunkti, läbib ka ülejäänud viie serva keskpunkti ja puutub seega kõiki tetraeedri servi. Sarnasusteisendusega, mille tsentriks on S ja kordajaks 3, teiseneb see kera keraks Ω_1, mis puutub samuti kõiki tearaeedri servi ja on teist tüüpi keraks. Nii saab konstrueerida teist tüüpi kera iga tipu jaoks.

Seega leidub korrapärase tetraeedri jaoks parajasti 5 kera, mis puutuvad samuti kõiki tetraeedri servi ja on teist tüüpi keraks. Nii saab konstateerida teist tüüpi kera iga tipu jaoks. Seega leidub korrapärase tetraeedri jaoks parajasti 5 kera, mis puutuvad kõiki tema servi või nende pikendusi.

V ja VI olümpiaadi ülesannete lahendused võib leida ajakirjas «Математика в школе» № 6, 1963 ja № 6, 1964.

FÜÜSIKA-MATEMAATIKAOLÜMPIAADI LÕPPVOORU ÜLESANDED MATEMAATIKAS[1]

8. klass

1. Arvud $x_1, x_2, \ldots, x_n$ võivad omandada üksteisest sõltumatult väärtusi 1, 0 ja —1. Milline on vähim väärtus, mille võib omandada nende arvude kõikvõimalike paarikaupa võetud korrutiste summa?

2. On antud laud suurusega 3×3 ruutu ja 9 kaarti suurusega 1 ruut. Kaartidele on kirjutatud mingid arvud. Kaks mängijat asetavad kordamisi kaarte laua ruutudele. Pärast seda, kui kõik kaardid on ära paigutatud, loeb esimene mängija (mängu alustaja) kokku esimeses ja kolmandas reas olevate arvude summa, teine mängija aga esimeses ja kolmandas veerus olevate arvude summa. Võidab see, kelle arv on suurem. Tõestada, et kui esimene mängija mängib õigesti, siis teine mängija ei saa võita sõltumata kaardikestele kirjutatud arvudest.

3. Kolmnurga ABC ümber on joonestatud ringjoon. Kõõlud, mis ühendavad kaare AC keskpunkti kaarte AB ja BC keskpunktidega, lõikavad külgi AB ja BC punktides K ja H. Näidata, et lõik KH on paralleelne küljega AC ja läbib kolmnurga ABC siseringjoone keskpunkti.

4. Autobussipileti järjekorranumber on kuuekohaline arv. *Õnnepiletiks* nimetatakse piletit, milles kolme esimese numbri summa on võrdne kolme viimase numbri summaga. Tõestada, et kõigi *õnnepiletite* järjekorranumbrite summa jagub arvuga 13.

5. Väikesel saarel on prožektor, mille kiir valgustab merepinna lõiku (prožektori juurest arvestatuna) pikkusega a. Prožektor pöörleb ühtlaselt ümber vertikaaltelje selliselt, et tema kiire lõpp-punkt liigub kiirusega v. Tõestada, et kaater, mille maksimaalne kiirus on $v : 8$, ei saa saarele märkamatult läheneda.

[1] Tõlkinud G. Vainikko. Vt. artikkel lk. 101—102.

9. klass

1. Rahvamalevas on 100 inimest ja igal õhtul on valvekorras 3 rahvamalevlast. Tõestada, et ei ole võimalik koostada sellist valvekorragraafikut, mille korral 2 rahvamalevlast oleksid koos valves parajasti ühel korral.

2. Kolmnurga siseringjoonele on tõmmatud puutuja paralleelselt kolmnurga alusega. Milline on kolmnurga haarade vahel asuva puutujalõigu suurim võimalik pikkus, kui kolmnurga perimeeter on $2p$?

3. Arvud x_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ rahuldavad n^3 võrrandit:

$$x_{ij} + x_{jk} + x_{ki} = 0 \quad (i, j, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Tõestada selliste arvude a_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ olemasolu, et iga i ja j korral $x_{ij} = a_i - a_j$.

4. Kas ruutu küljepikkusega 1 on võimalik paigutada 1965 punkti selliselt, et igas ruudu külgedega paralleelsete külgedega ristkülikus pindalaga $1:200$, mis sisaldub ruudus, oleks vähemalt üks nendest punktidest?

5. Arvu *ümardamiseks* nimetatakse tema asendamist ühega lähimatest täisarvudest. On antud n arvu. Tõestada, et neid on võimalik *ümardada* selliselt, et mistahes k *ümardatud* arvu summa erineb nende arvude endi summast mitte rohkem kui $(n+1):4$ võrra $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

10. klass

1. Milline on arvude $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kõigi paarikaupa võetud korrutiste summa vähim väärtus, kui ühegi arvu absoluutväärtus ei ületa 1?

2. On antud kaks ühisteguriteta arvu p ja q. Täisarvu nimetatakse *heaks*, kui ta on esitatav kujul $px + qy$, kus x ja y on mittenegatiivsed täisarvud, ja *halvaks* vastasel korral. Tõestada sellise täisarvu C olemasolu, et täisarvudest n ja $C - n$ on alati üks *hea* ja teine *halb*.

3. Rongiga Moskvasse sõitnud turist hulkus kogu päeva jalgsi linnas. Õhtustanud ühel väljakul asuvas kohvikus, otsustas ta minna tagasi vaksalisse ainult neid tänavaid mööda, mille ta oli läbinud paaritu arv kordi. Tõestada, et see on alati võimalik.

4. Üks komisjon tuli 40 korda kokku. Iga kord oli istungitel 10 inimest, kusjuures mitte mingid 2 inimest ei olnud istungitel koos üle ühe korra. Tõestada, et komisjoni liikmete arv on suurem kui 60.

5. Luurelennuk lendab mööda ringjoont keskpunktiga A. Ringi raadius on 10 km, lennuki kiirus on 1000 km/t. Teatud momendil lastakse punktist A välja rakett, millel on sama kiirus mis lennukilgi ja mida juhitakse nii, et ta asub kogu aeg lennukit ja punkti A ühendaval sirgel. Kui palju kulub raketil aega lennukile järelejõudmiseks?

11. klass

1. *Sama mis 9. klassi ülesanne nr. 2.*

2. Arvud p ja q on ühisteguriteta. Kui palju eksisteerib naturaalarve, mis ei ole esitatavad kujul $px + qy$, kus x ja y on mittenegatiivsed täisarvud?

3. Tõestada, et 25 inimesest ei ole võimalik moodustada 5-liikmelisi komisjone rohkem kui 30 selliselt, et mistahes kahes komisjonis ei oleks üle ühe ühise liikme.

4. Tõestada, et hulktahuka kõigi servade pikkuste summa on suurem kui $3d$, kus d on suurim kaugus hulktahuka tippude vahel.

5. Kerakujulisele planeedile läheneb kosmoselaev, mis võib lennata kiirusega v. Planeedi ainus elanik võib liikuda planeedi pinnal kiirusega u. Tõestada, et $v:u > 12$ korral on kosmoselaev võimeline avastama planeedi elanikku, kuidas too ka ei püüaks end peita. Märkus: seda väidet on võimalik tõestada isegi $v:u > 6$ korral.

SISUKORD