Matemaatika ja kaasaeg

TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

MATEMAATIKA JA KAASAEG

VII

ABIMATERJALE MATEMAATIKA ÕPETAJATELE JA ÕPPIJATELE

TARTU 1965

Тартуский государственный университет
г. Тарту, ул. Юликооли, 18
МАТЕМАТИКА И СОВРЕМЕННОСТЬ. VII.
Вспомогательные материалы для преподающих и изучающих математику
На эстонском языке
Toimetaja E. Tamme
Korrektor E. Võhandu

Ladumisele antud 1. IV 1965. Trükkimisele antud 1. IX 1965. Paber 60 × 90, 1/16. Trükipoognaid 7,5 + 1 kleebis. Arvestuspoognaid 8,6. Trükiarv 2500. MB-07645. Tellimise nr. 2868.

Hans Heidemanni nim. trükikoda, Tartu, Ülikooli 17/19. II

Hind 35 kop.

HULGATEOREETILISED PARADOKSID JA MATEMAATIKA ALUSTE UURIMINE

E. Jürimäe

Käesoleva artikli ülesandeks on tutvustada lugejat kolme põhilise suunaga matemaatika aluste uurimisel. Nendeks on logistlik, intuitsionistlik ning formalistlik suund. Tuleb märkida, et siin me kasutame mõistet «matemaatika alused» mõnevõrra laiemas tähenduses, kui seda harilikult tehakse. Kui kõneldakse matemaatika alustest kitsamas mõttes, siis mõeldakse selle all enamasti uuringuid matemaatika põhimõistete alal, peetakse silmas just üksikute teooriate aksiomaatilist ülesehitust ning ka vastava loogilise aparatuuri analüüsi. Kui aga pidada silmas ka matemaatika põhimõistete seost reaalse maailmaga, siis saame matemaatika aluste laiema aspekti. Sellises laiemas plaanis seostub matemaatika aluste uurimine nii või teisiti ühe või teise filosoofilise süsteemiga. On oluline märkida, et kui konkreetsete matemaatiliste teooriate loomisel ei ole üldfilosoofiliste printsiipide osa eriti oluline, siis matemaatika aluste uurimisel on see küllaltki määrav.

Vaadeldava kolme suuna põhiline areng toimus käesoleva sajandi esimese kolmekümne aasta jooksul. Kolmekümnendate aastate alguseks selgus põhiliselt, mida üks või teine suund suutis anda matemaatika aluste uurimise seisukohalt. Järgnevatel aastakümnetel on uuringud ühes või teises suunas küll jätkunud, kuid igas suunas on juba arvesse võetud tulemusi, mis on saadud teistes suundades. Seetõttu hakkavad kaduma teravad piirjooned nende suundade vahel. Mõnevõrra on vaibunud ka üksikute suundade vaheline võitlus, kuigi seda ikkagi ühel või teisel juhul esineb.

Seda kõike arvestades ei ole ehk päris õige kasutada edaspidi üksikute suundade iseloomustamisel oleviku vormi. Teeme seda aga siiski, sest ka praegu pole veel kõik päris selge üksikute suundade võimaluste osas ning kaugeltki kõik võitlused pole lõpuni peetud. Veel tänapäevalgi esineb niisugust ühekülgsust, mis oli omane ühele või teisele vaadeldavast kolmest suunast. Ka praegu kiputakse vahel üle hindama ühe või teise suuna võimalusi.

Käesolevas artiklis ei sea autor endale ülesandeks vaadeldavate suundade üldfilosoofiliste printsiipide analüüsimist (mõnede suundade puhul on tegemist isegi mitme filosoofilise vooluga), vaid püüab näidata nende suundade ajaloolisi lähtepunkte, põhiseisukohti, omavahelisi seoseid ning osa matemaatika arengu üldises protsessis. Siinjuures tuleb aga märkida, et hinnangute andmisel ühele või teisele suunale, samuti ka üksikutes üldfilosoofilist laadi märkustes, võib esineda subjektiivsuse momenti. See on vahest tingitud sellest, et autor esindab matemaatilist analüüsi, mis matemaatilistest distsipliinidest on võib-olla kõige enam seotud nn. aktuaalse lõpmatuse mõistega.

Üldisi märkusi. Hulgateooria elementide ja hulgateoreetiliste paradoksidega on lugejal olnud võimalik tutvuda «Matemaatika ja kaasaja» varasemate numbrite kaudu [1]. Järgnevad read on pühendatud hulgateoreetiliste paradokside ja matemaatika aluste uurimise vahelise seose näitamisele. Kuigi matemaatika aluseid oleks kahtlemata uuritud ka sõltumata sellest, kas ilmusid hulgateoreetilised paradoksid või mitte, andsid viimased matemaatika aluste uurimiseks siiski küllalt olulise tõuke. Pealegi suunasid nad uurijate tähelepanu küllaltki konkreetsete, sealjuures aga ka väga üldiste küsimuste ringile.

Matemaatika ühe või teise haru (geomeetria, aritmeetika, analüüsi) aluseid oli küll uuritud juba varem, kuid alles hulgateoreetiliste paradokside ilmumine lõi vajaduse uurida matemaatika aluseid üldse. See on ka loomulik, sest oma loomisest alates muutus hulgateooria vahendiks, mida ühel või teisel määral kasutati matemaatika igas harus. Nii tekkiski vajadus luua teooria, mida käesoleval ajal tuntakse matemaatika aluste nime all. Tõsi küll, sageli veel ei kõnelda niisugusest teooriast, kuid ülemaailmses ulatuses ilmub sellel alal juba üsnagi palju kirjandust nii monograafiate kui ka üksikartiklite näol. Nähtavasti ei ole aga kaugel aeg, kus matemaatika alused kujunevad omaette distsipliiniks, millel on oma kindel koht kvalifitseeritud matemaatikute ettevalmistuses.

Nagu juba märgitud, ei hakatud matemaatika aluseid uurima tühjalt kohalt — baasi selleks andsid üksikute matemaatiliste distsipliinide aluste alal toimunud uuringud. Saadud tähelepanekud, kogemused ning meetodid kujunesidki kogu matemaatika aluste uurimise lähtepunktiks. Et igasugused probleemid matemaatika aluste alalt olid nii või teisiti seotud hulgateooria küsimustega, siis oli eriti oluline uurida hulgateooria aluseid. Siin aga tekkisid juba algusest peale tõsised raskused. Nimelt

[1] Gabovitš, J., Opereerimine hulkadega. — Matemaatika ja kaasaeg, III, lk. 3—12.
Jürimäe, E., Hulgateoreetilistest paradoksidest. — Matemaatika ja kaasaeg, I, lk. 5—12.

olid varem kasutatud meetodid ja seisukohad omased vaid ühele matemaatikaharule (näit. aritmeetikale või geomeetriale), mis peegeldab ainult teatud konkreetset külge reaalse maailma nähtuste uurimise protsessis.

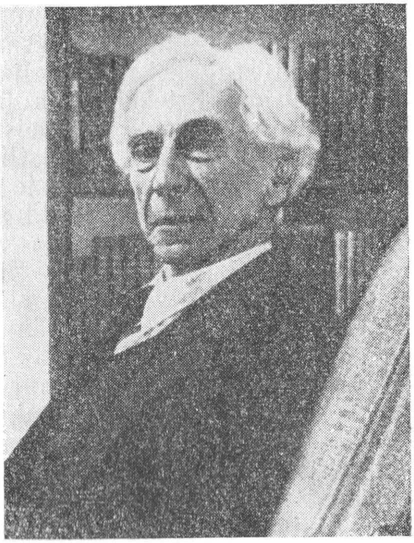
Juba üsnagi põgus tutvumine hulgateooria elementidega näitab, et siin on meil tegemist hoopis üldisema teooriaga, kui seda on näiteks keskkoolis käsitletav geomeetria või aritmeetika. Seetõttu pole ka midagi imestada, kui aritmeetika või geomeetria aluste uurimisel häid tulemusi andnud meetodid osutuvad hulgateooria aluste uurimisel puudulikeks.

Seda mõtet siinkohal pikemalt arendamata märgime, et nähtavasti on see üheks ajalooliseks põhjuseks, miks hulgateooria aluste uurimisel tekkis rida üksteisest erinevaid suundi. Käesolevas artiklis vaatleme neist kolme põhilisemat: logistlikku, intuitsionistlikku ja formalistlikku. Igaüks neist suundadest on kilbile tõstnud kogu nähtuste kompleksi ühe teatud külje ning uurinud matemaatika aluseid sellest küljest lähtudes. Niisuguse ühekülgsuse tõttu ei saa ka vastused olla kõikehõlmavad ning nähtust täielikult seletavad. Teiselt poolt, tänu oma ühekülgsusele, on saadud tulemused sageli vägagi sügavad. See näitab veel kord, et konkreetse teadusala uurimisel võib olulisi tulemusi saada ka siis, kui lähtekohaks on väärad filosoofilised printsiibid.

Nende kolme suuna puhul tuleb märkida veel seda, et nad ei ole mitte üksnes erinevad, vaid ka üksteisele vastuseisvad. Teisiti öeldes, igaüks neist kolmest on esitlenud end kui ainuvõimalikku matemaatika aluste uurimisel. Selline «konkurentsiõhkkond» on kahtlemata kiirendanud ühe või teise suuna arengut. Ajalugu on aga näidanud, et ükski neist kolmest ei saanudki pretendeerida ainuvalitsemisele. Kõik nad aitasid vaid ühel või teisel määral kokku kanda neid kive, millest kord ehitatakse matemaatika aluste hoone.

Arvatavasti jõuab matemaatika areng kord ka nii kaugele, kus osatakse neid ühekülgseid uuringuid kasutada ühtse teooria loomiseks. Sel juhul muutuvad need praegusel ajal nii-öelda «vaenujalal» seisvad teooriad üksteist abistavateks ja täiendavateks. Millal sellise üldise ja hulgateooria aluseid igakülgselt selgitava teooriani jõutakse, on praegu raske öelda. Nähtavasti matemaatika arengu praegune tase seda veel ei võimalda. Võibolla nõuab sellise teooria loomine ka erakordse geeniuse ilmumist, kasvõi midagi taolist, nagu olid omal ajal diferentsiaal- ja integraalarvutuse loojad Newton ja Leibniz. Kui selline aeg kord kätte jõuab, siis on see kahtlemata suureks revolutsiooniks matemaatikas. Seni aga peab toimuma rahuliku evolutsiooni periood, kus kogutakse fakte, mis võiksid saada nende suurte muutuste aluseks. Et midagi otsustavat selles suunas peab toimuma, selles ei ole vististi kahtlust, kui tutvuda hulgateooria aluste uurimisel valitseva olukorraga.

Logistlik suund. Logistika[2] seab endale eesmärgiks taandada matemaatika loogikale. Selle suuna tähtsaim esindaja B. Russell[3] ütleb, et loogika on «matemaatika noorus» ning matemaatika — «loogika küpsus». Selline idee ei ole pärit mitte Russellilt, vaid kuulub juba Leibnizile. Mis puutub Russellisse, siis tema uuringute aluseks on saksa matemaatiku ja loogiku Gottlob Frege (1848—1925) tööd aritmeetika aluste alalt. Russell koos Whiteheadiga[4] arendas edasi Frege tööd ning jõudis aritmeetika aluste uurimisel tähelepanu väärivate tulemusteni, mis on avaldatud töös *«Principia Mathematica»* (1910—1913). Selles töös on esitatud ka nn. Russelli «tüüpide teooria», mis on vahest selle suuna kõige tähtsamaks tulemuseks matemaatika aluste uurimisel.



Bertrand Russell

Milles siis seisneb Russelli tüüpide teooria? Tüüpide teooria seisukohalt jagatakse kõik vaadeldavad objektid nende tüüpide järgi klassidesse. Tekib nn. tüüpide hierarhia. Esimesse tüüpi sellest hierarhiast kuuluvad kõik indiviidid (asjad, mõisted jne.), millest ühel või teisel juhul kõneldakse. Teise tüüpi asetatakse indiviididevahelised seosed, kolmandasse — esimesse ja teise tüüpi kuuluvate objektide vahelised seosed jne. Tüüpide teooria kohaselt on mistahes tüübi objektid iseloomustatavad vaid järgmisse tüüpi kuuluvate suhetega.[5]

Russelli teooria järgi ei või ükski element, mis on määratud teatava hulga elementide kogu kaudu, kuuluda sellesse hulka. Kui nüüd seda teed minna, siis ei tohi me kasutada nn. «eneseleviitavaid» definitsioone. Selliselt nimetame neid definitsioone,

---

[2] Välismaa kirjanduses kasutatakse seda terminit ka matemaatilise loogika tähenduses.

[3] Bertrand Russell (sünd. 1872) — tuntud inglise filosoof, loogik ja rahu eest võitleja. Filosoofilistelt vaadetelt on Russell objektiivne idealist.

[4] Alfred North Whitehead (1861—1947) — inglise matemaatik ja filosoof-idealist.

[5] Olgu märgitud, et «tüüpide teooria» esialgse idee formuleeris juba enne Russellit saksa matemaatik E. Schröder. Käesolevas on esitatud Russelli tüüpide teooria lihtsustatud variant. Täpsem esitus nõuaks spetsiaalse aparatuuri sissetoomist, mis käesolevas ülevaates pole võimalik.

kus mõiste defineeritakse teda ennast kasutades. Näiteks, kui kasutame mõistet «korvpallivõistkonna pikim mängija», siis sellise mängija määramiseks kasutame me teda ennast, sest teisiti meil ei õnnestu selgitada, kas ta on võistkonnas kõige pikem. Siin on meil tegemist järgmise olukorraga: on hulk *M* ja objekt *m*, kusjuures *m* kuulub hulka *M* ning objekti *m* definitsioon sõltub hulgast *M*. Sellist defineerimist nimetame eneseleviitavaks (loogikute keeles «mittepredikaatseks»). Need probleemid, mis viisid hulgateoorias paradoksaalsetele järeldustele, ei ole Russelli teooria kohaselt üldsegi püstitatavad. Eneseleviitavate definitsioonide kasutamise analüüsi üksikute paradokside puhul võib leida näiteks S. K. Kleene'i[6] raamatust «Sissejuhatus metamatemaatikasse.»

Vaadeldes neid nn. «eneseleviitavaid» definitsioone, mille kasutamist ei luba Russelli loodud teooria ning mille mittelubamine võimaldab hulgateooriast kõrvaldada paradoksid, näeme, et neid ei saa siiski välja jätta inimese kogu teaduslikust tegevusest (sealhulgas ka matemaatikast). On nimelt terve rida üldiselt kasutatavaid mõisteid, mis rajanevad eneseleviitamisele, nagu näiteks «kõige vanem mees külas». Ka matemaatiline analüüs kasutab analoogiliselt defineeritud mõisteid, nagu maksimaalne ja minimaalne element, milleta pole võimalik läbi saada ning millede kasutamine ei vii ka mingitele vastuoludele. Seda arvestades on tehtud ettepanekuid lubada teatavaid eneseleviitavaid mõistete kujundamisi. Ühe sellistest ettepanekutest esitas 1931. a. H. Behmann ja on tuntud «Behmanni lahenduse» nime all. «Behmanni lahendus» seisneb teatava kitsenduse tegemises eneseleviitavate definitsioonide kasutamisel. Osutub aga, et selle lisanõude täidetuse kontroll on küllaltki tülikas ning tuleb igal konkreetsel juhul uuesti läbi viia, mistõttu on põhjust arvata, et «Behmanni lahendus» ei leia üldist tunnustust ka edaspidi.

Matemaatika aluste uurimise logistlikust suunast (sealhulgas ka Russelli «tüüpide teooriast») kokkuvõtteid tehes võib öelda, et Russelli uurimuste aluseks on kaks ideed: «esiteks, et loogilis-matemaatilistel paradoksidel on keeleline («semantiline») iseloom, ja teiseks, et matemaatika filosoofiliste aluste uurimise eesmärgiks peab olema matemaatika taandamine loogikale, mida tuleb mõista kui mitteempiirilist süsteemi.»[7]

Mis puutub teise ideesse, siis ei ole see vahetult seotud hulgateoreetiliste paradoksidega ning seepärast ei ole põhjust sellel käesolevas pikemalt peatuda. Lähemal analüüsimisel osutub ta aga ebaõigeks. Seda näidati matemaatilise loogika enese abil.

---

[6] Клини, С. К., Введение в метаматематику. М., 1957.

[7] Нарский, И. С., Философия Бертрана Рассела. Изд. Московского ун-та, 1962, lk. 15.

Nimelt, 1931. a. ilmunud K. G ö d e l i[8] tööst järeldub, et isegi selline suhteliselt lihtne teooria, nagu seda on aritmeetika, ei taandu loogikale.

Hulgateoreetiliste paradoksidega on lähemalt seotud Russelli esimene idee. See viiski Russellit «eneseleviitavate» definitsioonide uurimisele. Nagu juba ülaltoodud näidetest selgub, tooks Russelli seisukoha üldtunnustamine kaasa osa matemaatiliste mõistete kõrvalejätmise. Selles mõttes osutub Russelli arendatud suund ühekülgseks ning seetõttu ei saa temast lähtudes anda lõplikku ning üldiselt vastuvõetavat lahendust probleemidele, mis tekivad hulgateoreetiliste paradokside pinnal.

Mida aga on andnud logistlik suund matemaatikale? Nähtavasti on põhiliseks see, et temaga kaasnes matemaatilise loogika sügavam läbitöötamine. Viimasel aga on suur teoreetiline ning praktiline tähtsus. Matemaatilise loogikaga näidati, et teaduse loogikalised vahendid sõltuvad uuritava materjali sisust. Matemaatilise loogikata poleks saanud olla kaasaegseid arvutusmasinaid, automaatide teooriat jne.

Intuitsionistlik suund. Matemaatika aluste uurimise selle suuna eelkäijaks tuleb pidada L. K r o n e c k e r i t[9], kes võitles K. W e i e r s t r a s s i[10] funktsionaalteoreetilise ja G. C a n t o r i[11] hulgateoreetilise suuna vastu matemaatikas. Kroneckeri arvates tuli kogu matemaatika taandada täisarvude aritmeetikale. Tema arvates on ainult viimasele omane tõeline reaalsus. Hilisem teaduse areng on näidanud selle seisukoha ühekülgsust ja ekslikkust.

Seoses tekkinud raskustega hulgateoorias, lähtusid intuitsionistid nendest Kroneckeri seisukohtadest ning loobusid nn. aktuaalse lõpmatuse[12] mõistest. Nemad tunnustavad vaid nn. potentsiaalset ehk tekkivat lõpmatust, mille kohaselt lõpmatut hulka (või siis lõpmata suurt suurust) ei vaadelda kui tervikuna etteantut, vaid kui teatud protsessis tekkivat objekti. Näiteks, naturaalarvude puhul saadakse kuitahes suur arv eelmisele arvule ühe lisamise teel. Potentsiaalse lõpmatuse mõistet kasutatakse ka näiteks ringi pindala määramisel, kus ring asendatakse järjest suurema külgede arvuga korrapärase hulknurgaga. Siin piirile minek tähendab tegelikult potentsiaalse lõpmatuse kasutamist (hulknurga tippude arvu puhul). Analoogilisel viisil

---

[8] K u r t G ö d e l (sünd. 1906) — austria matemaatik ja loogik.

[9] L e o p o l d K r o n e c k e r (1823—1891) — saksa matemaatik, tuntud oma töödega algebra ja arvuteooria alal.

[10] K a r l W e i e r s t r a s s (1815—1897) — saksa matemaatik, tuntud oma põhjapanevate töödega funktsiooniteoorias.

[11] G e o r g C a n t o r (1845—1918) — saksa matemaatik, tuntud kui üldise hulgateooria looja.

[12] Aktuaalseks lõpmatuseks nimetatakse kaasaegses matemaatikas sellist lõpmatust, kus lõpmatut hulka vaadeldakse kui tervikuna etteantut.

kasutatakse potentsiaalse lõpmatuse mõistet matemaatilises analüüsis, näiteks joone pikkuse, kujundi pindala ning ruumala, määratud integraali jt. mõistete defineerimisel. Seega ka klassikaline analüüs vaatles vaid tekkivat lõpmatust, mis võis ületada iga lõpliku arvu. Ei nõutud aga, et ta ületaks üheaegselt kõik lõplikud arvud. Kui Cantor vaatles näiteks täisarvude hulka kui tervikut, siis ületas see oma elementide arvukuselt kõiki lõplikke hulki. Teiseks põhiliseks (eelnevaga tihedalt seotud) seisukohaks on intuitsionistidel järgmine: klassikalise loogika seadused on abstraheeritud vahekordadest lõplike hulkade vahel ning seetõttu viivad nad lõpmatute hulkade puhul paradoksaalsetele tulemustele.[13] Eeskätt kehtib see nn. välistatud kolmanda seaduse kohta.[14]

Nendest seisukohtadest lähtudes ei tunnusta intuitsionistid niisuguseid olemasoluteoreemide tõestusi, kus ei konstrueerita vastavat objekti. Nii kirjutas H. Weyl[15]: «Otsused eksisteerimise kohta pole üldse otsused (näiteks «eksisteerib paarisarv»), need on loogikute väljamõeldised. Tõeliseks otsuseks on näiteks «2 on paarisarv». Otsus eksisteerimise kohta on tõelise otsuse abstraktsioon. Kui kujutada endale otsust kui kalliskivi, siis otsuse abstraktsioon on lihtsalt paberileht, mis näitab kalliskivi olemasolu, kuid ei anna meile mingeid teateid selle kohta, kus see kalliskivi asub. Selle paberitüki ainuke tähtsus seisab vaid selles, et ta eksitab meid kalliskivi otsimisel. Paberil pole seni mingit väärtust, kuni me ei realiseeri tema poolt varjatud tõelist otsust, nagu näiteks «2 on paarisarv.»

Sellist kontseptsiooni silmas pidades, jätab intuitsionistlik suund matemaatikast välja terve rea olulisi tulemusi, näiteks ka need, mis on seotud arvuhulkade ülemiste ja alumiste rajadega. Seoses sellega kirjutab N. Bourbaki[16]: «Ei ole midagi imelikku selles, et nendest seisukohtadest lähtudes jõuavad matemaatikud-intuitsionistid resultaatideni, mis erinevad oluliselt klassikalistest teoreemidest. Viimastest paljud kaovad, näiteks enamik matemaatilise analüüsi olemasoluteoreeme (nagu näiteks Bolzano ja Weierstrassi teoreemid reaalmuutuja funktsioonide kohta).»[17] Selline asjaolu oli aga vastuvõtmatu enamikule matemaatikuile,

---

[13] Üsna põhjaliku ülevaate intuitsionismist võib saada raamatust: Гейтинг, А., Интуиционизм. М., 1965.

[14] Loogikas tuntud välistatud kolmanda seadus nõuab, et iga asja kohta võiks väita, kas ta eksisteerib või mitte.

[15] Hermann Weyl (1885—1955) — saksa matemaatik, intuitsionistide üks tähtsaim esindaja hollandi matemaatiku Luitzen Brouweri (sünd. 1891) kõrval. Tsitaat on võetud raamatust: Вейль, Г., О философии математики. — Сборник статей по философии математики. М., 1936.

[16] Nicolas Bourbaki — rühma käesoleva sajandi prantsuse matemaatikute pseudonüüm.

[17] Бурбаки, Н., Очерки по истории математики. М., 1963, lk. 52.

kes nõudsid matemaatikalt nn. permanentsuse omaduse täidetust. Viimane seisneb selles, et iga uus matemaatiline teooria peab sisaldama eelnevat samalaadset teooriat kui erijuhtu. Intuitsionistlik matemaatika aga tahab matemaatikast välja lülitada terve rea küsimusi, mida eelneval perioodil vaadeldi. Teiselt poolt, intuitsionistliku matemaatika paljud mõisted osutuvad oluliselt erinevateks ning keerulisemateks klassikalise matemaatika vastavatest mõistetest. Seda asjaolu silmas pidades ütleb N. Bourbaki, et intuitsionistlik matemaatika langetab kaasaegse matemaatilise analüüsi paljudele tulemustele kohtuotsuse ilma edasikaebamise õiguseta.[18]

On selge, et tunnustades intuitsionistlikku suunda kui ainuvõimalikku, siis vaesustaks see oluliselt matemaatika tunnetuslikku tähtsust. Põhjus on selles, et intuitsionism tahab sisu poolest äärmiselt rikka lõpmatuse mõiste asendada kitsa potentsiaalse lõpmatuse mõistega.

Intuitsionistliku suuna filosoofiliseks aluseks oli subjektiivne idealism, mistõttu oma filosoofilises aspektis eitavad intuitsionistid matemaatika tunnetuslikku tähtsust. Nende arvates on matemaatika vaid omapärane «tegevus», kus aluseks on isiku vaba voli. Sellised filosoofilised alused ei ole õiged ning seetõttu ei leidnud nad ka laialdast tähelepanu.

Ühe või teise matemaatilise teooria loomine ei ole tingitud mitte sellest, et üks või teine isik seda tahtis, vaid selle loomise põhjuseks on inimühiskonna tunnetuslikud eesmärgid. Iga matemaatiline teooria luuakse kas ümbritseva maailma täpsema tunnetamise eesmärgil või siis matemaatika enese arengus esilekerkinud probleemide lahendamiseks. Just viimast silmas pidades võime öelda, et ka intuitsionistid on andnud oma panuse matemaatika arengusse. See printsipiaalne kriitika, mis intuitsionistide poolt sai osaks mõistetele «tõestus» ja «definitsioon», mängis tähtsat osa nn. konstruktiivse loogika ja konstruktiivse matemaatika loomisel.

Et illustreerida seda, kuivõrd hindavad intuitsionistlikku suunda matemaatikud ja filosoofid, toome veel paar seisukohta. Nii kirjutab N. Bourbaki: «Intuitsionistlik koolkond, mida matemaatikas meenutatakse kui omapärast ajaloolist kurioosumit, osutas matemaatikale teene vähemalt sellega, et sundis oma vastaseid, s. t. rõhuvat enamikku matemaatikuid, täpsustama oma positsioone ja täpsemalt tajuma neid põhjusi (ühed loogilises, teised psühholoogilises aspektis), miks nad usuvad matemaatikasse.»[18]

Nõukogude filosoof E. Kolman kirjutab intuitsionistidest järgmist: «...oleks siiski vale alahinnata seda kriitilist tööd, mida nad on teinud. Kuigi seda kriitikat on tehtud vääradelt

---

[18] Бурбаки, Н., lk. 53.

tunnetusteoreetilistelt seisukohtadelt lähtudes, näitab see selgesti formalismi metafüüsilist iseloomu, mis avaldub siis, kui formalism tahab matemaatikast kõrvaldada tekkimise (saamise) mõiste. Samuti näitab ta välistatud kolmanda seaduse piiratud iseloomu. Kui suured ka ei oleks hulgateooria saavutused, mis on üles ehitatud aktuaalsele lõpmatusele, läheb ta siiski liiga kaugele oma ühekülgsuses, tahtes taandada ammendamatut kontiinumi naturaalarvude jadale. Mõned tema teoreemid on sedavõrd abstraktsed, et kutsuvad esile tõsist hämmastust. Nii näiteks tõestas E. Zermelo[19] (1904), et punktide hulka, mis moodustab kera raadiusega R on võimalik jagada kaheks punktide hulgaks, millest kumbki moodustab kera sama raadiusega R. Ei ole aga selge, milline on selle teoreemi geomeetriline sisu ning kuidas sellist jaotust teha.»[20]

Formalistlik suund. Selliselt nimetatakse aksiomaatilist suunda matemaatika aluste uurimisel. Selle suuna tähtsamaks esindajaks ning nii-öelda ideeliseks juhiks on elementaargeomeetria aksiomaatika looja D. Hilbert[21]. Siinkohal olgu aga märgitud, et hulgateooria aksiomaatika loodi ammu enne seda, kui vastavate küsimustega tegeles Hilbert. Esimese hulgateooria aksioomide süsteemi andis 1908. a. E. Zermelo. Hilbert hakkas tegelema hulgateooriaga alles käesoleva sajandi 20-ndatest aastatest alates. Nähtavasti tahtis ta oma autoriteedi kogu suurust rakendada võitlusse intuitsionistliku suuna vastu. Siinjuures olid tema lähemateks kaastöötajateks W. Ackermann, P. Bernays ja J. Neumann. Formalismi ideeks on uurida matemaatika aluseid aksiomaatilise meetodi abil, tõestades vastava aksioomide süsteemi mittevasturääkivust.

David Hilbert

Formalistliku koolkonna põhiline filosoofiline viga seisneb lõpmatuse kui objektiivse reaalsuse mittetunnustamises. Nende

[19] Ernst Zermelo (1871—1953) — saksa matemaatik.

[20] Кольман, Э., К критике современного «математического» идеализма. — Диалектический материализм и современное естествознание. М., 1957, lk. 231—232.

[21] David Hilbert (1862—1943) — saksa matemaatik.

väite kohaselt on reaalne mõte vaid lõplikel hulkadel, aktuaalne lõpmatus on vaid ideaalne objekt («sümbol»), millele reaalsuses midagi ei vasta. Formalistide arvates iga tõestus, milles esineb lõpmatus, avaldub lõpliku hulga märkide abil (näiteks paberile kirjutamise puhul). Kui nüüd selline kirjutamisviis unifitseerida ja anda seadused ühtede lausete järeldamiseks teistest — «formaliseerida» matemaatika, siis vasturääkimatuse tõestuseks on vaja vaid näidata, et nende seaduste põhjal me kunagi ei jõua seoseni $0 = 1$.

Osutub aga, et lõpmatuse mõiste on erakordselt rikas. Seda ei saa defineerida, veel vähem ammendada paberil. Teiselt poolt, tõe kriteeriumiks pole mitte vasturääkimatus, vaid inimkonna kogu praktiline tegevus.

Et formalistide üritused ei saanudki seatud eesmärgile jõuda, seda näitavad järgmised Gödeli teoreemid [22].

I. Iga aksiomatiseeritud lõpmatu süsteemi S puhul võib selle süsteemi vahenditega püstitada loogilise väite t, mille õigsust või ebaõigsust ei saa kontrollida süsteemi S vahenditega.

II. Selliseks lahendamatuks probleemiks osutub selle süsteemi S kui terviku vasturääkimatus.

Mida siis tegid formalistid seoses hulgateoreetiliste paradoksidega? Idee oli neil suhteliselt lihtne. Et hulgateoreetilised paradoksid tekivad kaugeleminevate abstraktsioonide pinnal, siis nähtavasti on vaja selliselt kitsendada hulga mõistet, et vaadeldav teooria ei sisaldaks niisuguseid äärmuslikke hulki. Teiste sõnadega: liiga suured hulgad välja! Selline seisukoht oli aluseks juba Zermelo antud esimesele hulgateooria aksioomide süsteemile. Et Zermelo süsteem hõlmas liiga vähe hulki, siis hilisemad aksioomide süsteemid püüdsid seda viga ühel või teisel määral parandada. Seda kõike silmas pidades, võime öelda, et sisuliselt võttes ei ole formalistid püüdnudki vastata paradoksidega esilekerkinud küsimustele, nad on vaid püüdnud vältida paradokse.[23]

Tuleb märkida, et selline aksiomaatiline ülesehitus muudab hulgateooria suhteliselt keeruliseks. Nähtavasti sel kujul ei leia ta kunagi nii laialdast praktilist kasutamist, kui seda leidis Cantori loodud hulgateooria ehk nn. «naiivne» hulgateooria.

Milles seisnevad siis formalistide teened matemaatika arengus? Nad on andnud suure panuse matemaatiliste tõestuskäikude selgitamiseks, lihtsustamiseks ning edasiarendamiseks. Tänu formalistidele, on hakatud matemaatilistes tõestuskäikudes selgelt

---

[22] Käesolevas on Gödeli teoreemid esitatud võimalikult populaarsel kujul. On jäetud täpsemalt fikseerimata, milliseid tingimusi peab täitma süsteem S ning mida tähendavad sõnad «kontrollida süsteemi S vahenditega». Mõnevõrra täpsema ülevaate saamiseks soovitame lugejal tutvuda nende küsimuste analüüsiga I. Kulli raamatus «Matemaatiline loogika» (Tln., 1964, lk. 198—201).

[23] Бурбаки, lk. 47.

piiritlema üksikuid momente ja meetodeid. Paljud klassikalised tõestused on vabanenud liigsest ning tõestuskäikudes on hakanud selgemini paistma tõestatava sisu.

Kokkuvõtteks. Mis on siis selgunud kõigi nende kolme suuna raames teostatud uuringute põhjal? Nähtavasti on põhiliseks see, et hulgateoreetiliste paradoksidega esilekerkinud raskused ei ole selgitatavad üksnes matemaatika eneste vahenditega, vaid selguse loomine selles küsimuses kuulub filosoofia valdkonda.[24] Hulgateoreetilised paradoksid on tingitud sellest, et vaadeldakse niisuguseid abstraktsioone, millel pole mingit reaalset vastet. Nimetatud asjaolu viitab sellele, et opereerimine abstraktsioonidega ei saa olla absoluutselt vaba, ilma igasuguste kitsendusteta.

On teada, et inimese tunnetuslikul tegevusel pole piire — ta võib üha täpsemalt ja täielikumalt tunnetada ümbritsevat maailma. Samal ajal aga ei saa inimene oma abstraktsioonides absoluutse täpsusega peegeldada ümbritsevat lõpmatut maailma. Ei ole siis ka ime, et ei saa midagi mõistlikku öelda kõikide hulkade hulga kohta, sest see oleks ju matemaatiline vaste lõpmatu maailma kõikidele omadustele ja eripärasustele.

Nendest küsimustest kõneldes ütleb N. N. Harin: «Hulgateooria osutub tähtsaks etapiks matemaatika arengus üha suuremate ja suuremate üldistuste suunas. Tema mõisted on väga üldised, samal ajal aga on neil mitmekesine konkreetne sisu, nendes ilmneb üldise ja üksiku, abstraktse ja konkreetse ühtsus. Hulgateooria laiendab matemaatika praktilise kasutamise sfääri loodusteaduse ja tehnika küsimustele, lubab sügavamalt ja täielikumalt tunnetada üksikute konkreetsete objektide omadusi. Kuid koos sellega on hulgateoorial omad puudused, kuna ta vaatleb lõpmatut jada elemente staatilises seisundis, ilma muutumiseta, samal ajal, kui konkreetsed reaalsed objektid on pidevas muutumises. Sellest on tingitud tema paradoksid.»[25]

Toodud sõnades väljendub hulgateooria suur tunnetuslik tähtsus, kuid ka tema piiratus kogu reaalse maailma tunnetuse seisukohalt. Kas just märgitu on hulgateoreetiliste paradokside peamiseks põhjuseks, seda on raske öelda. Et seda teha, oleks vaja enam uurida hulgateooria aluseid dialektilise materialismi positsioonidelt lähtudes. Paraku on seda senini tehtud äärmiselt vähe.

---

[24] Huvitavaid tulemusi selles mõttes on andnud nn. metamatemaatiline suund, mis aga väärib juba omaette artiklit.

[25] Харин, Н. Н., Математическая логика и теория множеств. Росвузиздат, 1963, lk. 64.

ALGEBRA PÕHIMÕISTEID II

Jevgeni Gabovitš

Selle artikli esimeses osas [1] tutvusime kaasaegse algebra kahe üldise põhimõistega — grupoidi ja poolrühmaga. Nende käsitlus jätkub ka käesoleva osa algul (punktis 5). Punktides 6 ja 7 asume vaatlema algebra ühte kõige tähtsamat mõistet — rühma. Rühmadele kavatseb autor pühendada ka artikli kolmanda osa, milles tuleb juttu maatriksite rühmadest ning mõningatest geomeetrias ja kristallograafias kasutatavatest rühmadest. Järgnevates osades tutvustatakse lugejaid veel struktuuri, ringi, korpuse, universaalse algebra ning automorfismi, endomorfismi, homomorfismi ja kaasaegse algebra teiste mõistetega.

5. Monogeensed poolrühmad

Võib juhtuda, et mingi poolrühma A elementide teatav osa, s. t. A mingi alamhulk B, moodustab ise poolrühma sama tehte suhtes, mis on poolrühma A tehteks. Sel korral nimetatakse poolrühma B poolrühma A *alampoolrühmaks*.

Naturaalarvude aditiivses poolrühmas on alampoolrühmadeks näiteks alamhulgad $\{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$, $\{4, 5, 6, 7, 8, \ldots\}$ ja $\{5, 6, 10, 11, 12, 13, 14, \ldots\}$, kuid alamhulk $\{1, 5, 6, 7, 8, 9, \ldots\}$ ei kujuta endast alampoolrühma, sest ta ei moodusta liitmise suhtes poolrühma: ta ei sisalda näiteks arvu $1 + 1 = 2$. Küll aga moodustab viimane alamhulk poolrühma korrutamise suhtes, olles seega naturaalarvude multiplikatiivse poolrühma alampoolrühmaks.

Poolrühmas L korrutamisreegliga $a \cdot b = a$ (vt. punkt 3 artikli esimeses osas) osutub iga alamhulk alampoolrühmaks (miks?), nn. *nullkorrutamisega* poolrühmas F korrutamisreegliga $a \cdot b = f$, kus f on mingi fikseeritud element (vt. punkt 3), moodustab alampoolrühma iga alamhulk, mis sisaldab elementi f (miks?).

Kui poolrühmas on olemas null- või ühikelement, siis moodustab kumbki neist omaette alampoolrühma. Et iga hulk on ise enda alamhulgaks, siis ka kogu poolrühm ise on enda alampoolrühmaks.

---

[1] Vt. Matemaatika ja kaasaeg, VI, lk. 3—13.

Analoogiliselt alampoolrühmaga võib sisse tuua ka *alamgrupoidi* mõiste. Näiteks tabeliga

$*$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	a	b	e
b	b	b	b	e
c	c	e	e	e

määratud grupoidis on alamhulgad $\{e\}$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a, b\}$, $\{e, a\}$, $\{e, b\}$, $\{e, c\}$, $\{e, a, b\}$, $\{e, a, c\}$ ja $\{e, b, c\}$ alamgrupoidideks (kontrollida!), alamhulk $\{a, c\}$ aga mitte, sest $a * c = e$.

Kuna poolrühma iga alamgrupoid on tema alampoolrühmaks (miks?), siis selleks, et kontrollida, kas antud poolrühma mingi alamhulk moodustab alampoolrühma, tarvitseb vaid veenduda, et vaadeldava alamhulga jaoks on poolrühma operatsioon tehteks, s. t. et alamhulk on selle operatsiooni suhtes kinnine.

Milline on poolrühmas A kõige väiksem alampoolrühm, mis sisaldab A mingit elementi a? Ilmselt peab see alampoolrühm sisaldama peale elemendi a enda veel korrutisi (kui poolrühma tehet nimetada korrutamiseks) $a \cdot a = a^2$, $a \cdot a \cdot a = a^3, \ldots,$ $\ldots, \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{k \text{ korda}} = a^k$ jne., s. t. a kõiki astmeid. Kuid a astmed moodustavadki juba alampoolrühma, sest

$$a^k \cdot a^l = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{k \text{ korda}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{l \text{ korda}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{k+l \text{ korda}} = a^{k+l},$$

s. t. elemendi a kahe astme korrutis on jällegi a aste. See alampoolrühm vastabki ülalnimetatud tingimusele: ta on poolrühma A vähim alampoolrühm, mis sisaldab elementi a. Seda alampoolrühma nimetatakse *elemendi a poolt moodustatud* alampoolrühmaks ehk *monogeenseks* alampoolrühmaks (kreeka k. *μόνος* — üksainus, *γένος* — päritolu).

Kui poolrühm ühtib tema mingi elemendi poolt moodustatud monogeense alampoolrühmaga, siis nimetatakse seda poolrühma ennast monogeenseks. Nii on näiteks naturaalarvude aditiivne poolrühm monogeenne moodustava elemendiga 1:

$$k = \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{k \text{ korda}}.$$

Monogeenne poolrühm on alati kommutatiivne (miks?).

Ülalmainitud poolrühmas L korrutamisreegliga $a \cdot b = a$ on monogeensed alampoolrühmad üheelemendilised: iga a korral $a^2 = a^3 = \ldots = a^k = \ldots = a$; nullkorrutamisega poolrühmas F koosnevad monogeensed alampoolrühmad kas ühest elemendist f või kahest elemendist a ja f, sest $f^2 = f^3 = \ldots = f^k = \ldots = f$, aga ka $a \neq f$ korral $a^2 = a^3 = \ldots = a^k = \ldots = f$.

Poolrühmas $H = \{a, b, c, d, f, g, h, 0\}$, mis on antud Cayley tabeliga

	a	b	c	d	f	g	h	0
a	b	c	d	f	c	g	h	0
b	c	d	f	c	d	g	h	0
c	d	f	c	d	f	g	h	0
d	f	c	d	f	c	g	h	0
f	c	d	f	c	d	g	h	0
g	g	g	g	g	g	h	0	0
h	h	h	h	h	h	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0

koosneb elemendi g poolt moodustatud monogeenne alampoolrühm elementidest g, h ja 0, aga elemendi a poolt moodustatud monogeenne alampoolrühm elementidest a, b, c, d ja f (kontrollida!).

Üldiselt võib monogeenne poolrühm olla kas lõplik või lõpmatu. Nagu me selles kohe veendume, on ta lõpmatu vaid siis, kui moodustava elemendi a astmete seas pole võrdseid, s. t. kui kahe erineva naturaalarvu k ja l korral ei saa olla $a^k = a^l$.

Iga lõpmatu monogeenne poolrühm koosneb kõikidest astmetest a, a^2, a^3, ..., a^n, ..., mis korrutatakse tavalise astmete korrutamise reegli järgi ning seega kõik lõpmatud monogeensed poolrühmad on omavahel isomorfsed.

Lõpliku monogeense poolrühma juhuga on tegemist siis, kui moodustava elemendi astmete seas on vähemalt kaks võrdset. Tõepoolest, olgu a^k esimene a astmete seas, mis on võrdne mingi teise astmega ning a^{k+l} — esimene a^k-ga võrdne aste: $a^k = a^{k+l}$. Siis ka kõik teised a astmed a^n, kus $n > k + l$, võrduvad ühega astmetest a^k, a^{k+1}, a^{k+2}, ..., a^{k+l-1}. Nimelt $a^{k+l+1} = a^{k+1}$, $a^{k+l+2} = a^{k+2}$, ..., $a^{k+2l-1} = a^{k+l-1}$, $a^{k+2l} = a^k$, jne. Üldse võib suvalise naturaalarvu $n > k + l$ esitada kujul $n = k + jl + i$, kus j on mingi naturaalarv ja i on l-st väiksem naturaalarv. Seepärast võrdub iga aste a^n mingi ülalmainitud astmega a^{k+i} ($i = 0, 1, \ldots, l-1$).

Vaadeldaval juhul leidub seega vaid $k + l - 1$ erinevat astet ja poolrühm on tõepoolest lõplik. Korrutamisreegel näeb välja järgmisena:

$$a^m \cdot a^n = \begin{cases} a^{m+n}, & \text{kui } m + n < k + l \\ a^{k+i}, & \text{kui } m + n \geqslant k + l \text{ ja } m + n = k + jl + i. \end{cases}$$

Nagu veendusime, on lõplik monogeenne poolrühm määratud kahe arvuga k ja l. Seda arvudepaari (k, l) nimetatakse moodustava elemendi ning monogeense poolrühma *järguks*. Ilmselt on kõik antud järku monogeensed poolrühmad omavahel isomorfsed.

Vaatleme näiteks monogeenset poolrühma, mille järk on $(3, 4)$:

Ta koosneb kuuest elemendist a, a^2, a^3, a^4, a^5 ja a^6 ning tema Cayley tabel näeb välja nii:

	a	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6
a	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^3
a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^3	a^4
a^3	a^4	a^5	a^6	a^3	a^4	a^5
a^4	a^5	a^6	a^3	a^4	a^5	a^6
a^5	a^6	a^3	a^4	a^5	a^6	a^3
a^6	a^3	a^4	a^5	a^6	a^3	a^4

Järgmisel diagrammil on nooltega näidatud, millise elemendi me saame, kui korrutame a mingi astme veel kord a-ga:

$$\begin{tikzcd} & & & a^4 \arrow[dr] & \\ a \arrow[r] & a^2 \arrow[r] & a^3 \arrow[ur] & & a^5 \arrow[dl] \\ & & & a^6 \arrow[ul] & \end{tikzcd}$$

Diagrammi abil korrutise $a^m \cdot a^n$ leidmiseks tuleb lähtuda elemendist a^m ning käia nooltega näidatud suunas n sammu.

Sellist diagrammi on võimalik joonistada iga lõpliku monogeense poolrühma jaoks. Näiteks üheelemendilise poolrühma korral näeb see välja nii:

$$\begin{tikzcd} a \arrow[loop right] \end{tikzcd}$$

kaheelementiliste monogeensete poolrühmade jaoks on võimalikud diagrammid:

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r] & a^2 \arrow[loop right] \end{tikzcd} \quad \text{ja} \quad \begin{tikzcd} a \arrow[r, bend left] & a^2 \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}$$

Teatud analoogia selliste diagrammide ja komeetide kujude vahel viib mõttele kasutada nimetust «*saba*» nende elementide hulga jaoks, mis ei ühti ühegi teise astmega, nimelt elementide $a, a^2, \ldots, a^{k-1}$ jaoks, ning nimetust «*tuum*» ülejäänud elementide hulga jaoks. Muidugi võib juhtuda, et monogeense poolrühma «tuum» või «saba» või isegi mõlemad on kõdunud, nagu see nähtub kolmest viimasest diagrammist.

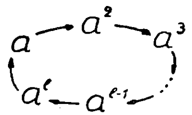
Diagrammide kasutamine lihtsustab tunduvalt lõplike monogeensete poolrühmade uurimist, muutes selle näitlikumaks. Selgitame näiteks, millal on monogeensel poolrühmal olemas nullelement, millal ühikelement ja millal need mõlemad.

Ilmselt peab nullelement kuuluma monogeense poolrühma «tuuma», sest võrdusest $0 = a^n$ järeldub, et $0 = 0 \cdot a = a^n \cdot a = a^{n+1}$, s. t. 0 on a selline aste, mis võrdub a mingi teise astmega. Võrdusest $a^n = a^{n+1}$ järeldub otsekohe, et kõik «tuuma» elemendid on omavahel võrdsed (tuum on kõdunud). Nullelemendiga monogeense poolrühma järguks on seega $(k, 1)$ ning poolrühma diagramm on järgmine:

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r] & a^2 \arrow[r] & a^3 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & a^{k-1} \arrow[r] & a^k \arrow[loop right] \end{tikzcd}$$

Teiselt poolt on a^k nullelemendiks igas $(k, 1)$-järku monogeenses poolrühmas: $a^m \cdot a^k = a^k$.

Ühikelemendiga monogeenses poolrühmas on samuti tegemist kõdumisega. Seekord on kõdunud «saba». Tõepoolest, peab ju ühikelement e rahuldama poolrühma iga elemendi x korral seost $x \cdot e = x$. Kuna aga siin e ja x on a astmed, siis «saba» elemendi a^m jaoks peaks kehtima võrdus $a^m \cdot a^n = a^m$, mis on võimatu (miks?). Seega ühikelemendiga monogeense poolrühma järguks on $(1, l)$ ja tema diagramm näeb välja nii:



Teiselt poolt on ilmne, et igas sellises poolrühmas on element a^l ühikelemendiks: $a^m \cdot a^l = a^{m+l} = a^m$.

Ühendades kaks viimati saadud tulemust võime öelda, et monogeenne poolrühm sisaldab nii ühik- kui ka nullelementi vaid siis, kui ta koosneb ühestainsast elemendist.

Ülesandeid:

15. Kas leheküljel 15 korrutamistabeliga esitatud grupoidi kõik alamgrupoidid on tekstis loetletud?

16. Leida leheküljel 16 defineeritud poolrühma H iga elemendi poolt moodustatud monogeensed poolrühmad, määrata nende järgud ning joonistada diagrammid.

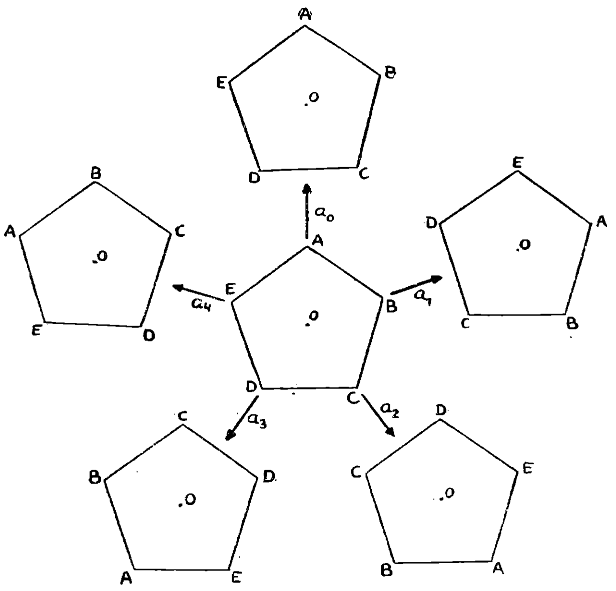
17. Millised on lõpliku monogeense poolrühma alampoolrühmad?

6. Rühmad

Kõikide täisarvude, kõikide ratsionaalarvude ja kõikide reaalarvude aditiivsetel poolrühmadel, kõikide positiivsete ratsionaalarvude ja kõikide reaalarvude multiplikatiivsetel poolrühmadel, korrapärase viisnurga pöörete poolrühmal (vt. joon. 1) ning väga paljudel teistel poolrühmadel on rida ühiseid huvitavaid omadusi, mille kehtimist ei nõutud poolrühma mõiste definitsioonis ning mis lubavad eraldada kõikide poolrühmade seast rakenduste seisukohalt väga tähtsate poolrühmade — nn. *rühmade* klassi. Et rühmateooria on tekkinud palju varem kui poolrühmateooria, kinnitavad ka terminid ise: sõna poolrühm on tuletatud sõnast rühm. Tänu sellele ning mõiste enda rikkamale sisule on rühmateooria arendatud palju kaugemale kui poolrühmateooria.

Andmata esialgu täpset definitsiooni mainime, et rühma mõistet ning rühmateooria tulemusi kasutatakse tänapäeval väga laialdaselt teoreetilises füüsikas ja kristallograafias. Ka matemaatikas endas vajavad rühmateooriat geomeetria ja topoloogia, funktsionaalanalüüs ja arvuteooria. Samuti ei saa kaasaegse algebra paljud harud läbi ilma rühmateooriata — kaasaegse algebra vanima ja kõige sügavamale arendatud haruta. Näitena toome tuntud prantsuse matemaatiku, kaasaegse algebra rajaja Évariste Galois' loodud teooria, millega kõrgemat järku võrrandite lahenduvuse uurimine taandatakse mõningatele rühmateooria küsimustele. Muide, termin «rühm» pärinebki Galois'lt.

Pöördume nüüd rühma mõiste juurde. Käesoleva punkti algul rühmade näidetena mainitud poolrühmad olid kõik ühikelemendiga, milleks kolmes esimeses näites oli arv null, kahes järgmises arv üks ning viimases näites pööre 0° võrra (tuletame meelde, et e on ühikelement, kui iga elemendi a korral antud poolrühmast $a \cdot e = e \cdot a = a$).



Joonis 1.

Kuid näidetena toodud poolrühmadel on veel teine ühine omadus. Kõigis neis on lahenduv võrrand $a \cdot x = b$ (või võrrand $a + x = b$, kui kasutada aditiivset kirjutusviisi). Tõepoolest, selle võrrandi lahendiks on viie esimese poolrühma korral kas vahe $b - a$ või jagatis $\frac{b}{a}$. Viimases poolrühmas (vt. p. 4) on võrrandi $a \boxplus x = b$ lahendiks pööre, mis täiendab pööret a pöördeni b (või pöördeni $b + 360^\circ$, mis meie poolrühma seisukohalt samuti kujutab endast elementi b). Näiteks a_1 ja a_4 jaoks, mis tähistasid vastavalt pöördeid 72° ja 288° võrra on võrrandi $a_4 \boxplus x = a_1$ lahendiks $x = a_2$, s. o. pööre 144° võrra.

Lõpuks on kõigil vaadeldud poolrühmadel veel üks eriline omadus; iga elemendi a jaoks leidub nn. *pöördelement* a^{-1}, selline, et[2] $a \cdot a^{-1} = e$ (aditiivse kirjutusviisi korral räägitakse *vastandelemendist* ning kasutatakse tähistust —a). Näiteks korrapärase viisnurga pöörete poolrühmas, kus elemendi a vastandelementi märgitakse $\boxminus\, a$, on $\boxminus\, a_0 = a_0$, $\boxminus\, a_1 = a_4$, $\boxminus\, a_2 = a_3$, $\boxminus\, a_3 = a_2$, $\boxminus\, a_4 = a_1$ (kontrollida!).

Anname nüüd rühma mõiste range definitsiooni. *Poolrühma G nimetatakse rühmaks, kui selle poolrühma iga kahe elemendi a ja b korral leiduvad sellised poolrühma elemendid x ja y* (mis võivad mõnikord olla ka võrdsed), *et $a \cdot x = b$ ja $y \cdot a = b$, s. t. et need võrrandid on lahenduvad.*

Lugejal võib tekkida küsimus: milleks nõuda kahe elemendi x ja y olemasolu, kas x ei kõlba ka teise võrrandi lahendiks? Kuid lugedes veel kord tähelepanelikult läbi rühma definitsiooni märkame, et selles pole kusagil nõutud poolrühma kommutatiivsust. Seepärast võib juhtuda, et korrutis $x \cdot a$ kujutab endast hoopis mingit teist elementi, mitte aga elementi $b = a \cdot x$. Mittekommutatiivses rühmas eksisteeribki üldiselt elementide a ja b jaoks kaks erinevat elemendi a jagatist b-ga: $a \cdot b^{-1}$ ja $b^{-1} \cdot a$ —$b + a$). Selles, et mittekommutatiivseid rühmi tõepoolest on olemas, veendume hiljem, siis, kui tutvume rühmade uute näidetega. Käesoleva punkti algul näidetena toodud arvude ja pöörete rühmad olid kõik kommutatiivsed.

Kuna iga rühm on tingimata ka poolrühm, siis rühmade korral on tähendus ka sellistel poolrühmadega seotud mõistetel nagu isomorfism ning alampoolrühm. Viimase loomulikuks üldistuseks on *alamrühma* mõiste: rühma alamhulk moodustab alamrühma, kui ta on ise rühm sama tehte suhtes. Näiteks täisarvude aditiivses rühmas moodustab alamrühma kõigi paarisarvude hulk, kuid seevastu arvudest 1 ja —1 koosnev hulk pole temas alamrühmaks, kuigi moodustab ise rühma korrutamise suhtes.

Rühma mõiste võib defineerida ka järgmiselt. *Poolrühma G nimetatakse rühmaks, kui ta sisaldab ühikelemendi e ning kui selle poolrühma iga elemendi a jaoks leidub pöördelement a^{-1}.*

Viimaste definitsiooni abil on sageli mõnevõrra mugavam kontrollida, kas antud poolrühm on rühm või mitte.

---

[2] Nii defineeritud pöördelementi a^{-1} tuleks täpsemalt nimetada elemendi *a parempoolseks* pöördelemendiks. Osutub aga, et kui poolrühma igal elemendil on olemas parempoolne pöördelement, siis on see samaaegselt ka vasakpoolseks pöördelemendiks, s. t. rahuldab tingimust $a^{-1} \cdot a = e$ (see asjaolu õieti õigustabki tema nimetamist lihtsalt pöördelemendiks). Tõepoolest, olgu a^{-1} elemendi a parempoolne pöördelement, s. t. $a \cdot a^{-1} = e$. Korrutades viimast võrdust vasakult elemendiga a^{-1} ja paremalt tema parempoolse pöördelemendiga saamegi $a^{-1} \cdot a = e$.

Mõlemad toodud definitsioonid on samaväärsed, s. t. esimesest definitsioonist järeldub teine ja teisest esimene. Et see tõepoolest nii on, selles veendub lugeja ehk ise.

Rühma definitsioonis esitatud nõuded on küllaltki ranged, mis nähtub juba tõsiasjast, et enamus käesolevas artiklis näidetena toodud poolrühmadest neid ei rahulda. Poolrühmad L ja F (vt. punkt 5) ei kujuta endast rühmi, sest neil pole ühikelementi. Samal põhjusel ei moodusta rühma ka paarisarvude multiplikatiivne poolrühm.

Poolrühmades, mis koosnevad antud hulga A kõikidest alamhulkadest ning mille tehteks on kas ühisosa või ühendi võtmise operatsioon, on ühikelemendiks vastavalt kas kogu hulk A või tühi hulk $\varnothing$. Kui B on selline alamhulk, et $B \neq A$ ja $B \neq \varnothing$, siis iga teise alamhulga C korral $B \cap C \neq A$, $B \cup C \neq \varnothing$, s. t. element B ei ole pööratav kummagi tehte suhtes. Seega kumbki nendest poolrühmadest pole rühm.

Majade poolrühmale (vt. punkt 3 käesoleva artikli esimeses osas) võib lisada n.-ö. *kõdunud maja*, mille laius on kaduv-väike. See maja etendabki majade poolrühmas ühikelemendi osa, kuid vastandelementi ühelgi majal ei ole: liites majale a veel mingi maja b saame alati mõlemast liidetavast pikema maja, mis muidugi ei ole kõdunud ja seega ei võrdu ühikelemendiga.

Lõpliku hulga kõigi teisenduste poolrühmas (vt. punkt 3) on ühikelement olemas, kuid kaugeltki mitte igal teisendusel ei ole pöördelementi. Näiteks seostest

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

järeldub, et teisendusel, mis viib kogu hulga $\{1, 2, 3\}$ üle arvuks 1, pole olemas pöördelementi.

Toome veel mõningad näited rühmade kohta, jättes rühma aksioomide kehtivuse kontrollimise enamasti lugeja hooleks.

Huvitava näite võib konstrueerida, kui vaadelda korrutamistehet hulgal, mis koosneb nullist erinevatest irratsionaalarvudest kujul $a + b\sqrt{2}$, kus a ja b on ratsionaalarvud. Et $1 = 1 + 0 \cdot \sqrt{2}$, siis arv 1 kuulub vaadeldavate arvude hulka. Elemendi $a + b\sqrt{2}$ pöördelemendiks osutub $\frac{a - b\sqrt{2}}{a^2 - 2b^2}$, mis on kirjutatav nõutaval kujul:

$$\frac{a}{a^2 - 2b^2} + \frac{-b}{a^2 - 2b^2}\sqrt{2},$$

kus $a^2 - 2b^2 \neq 0$ (miks?).

Rühmadest, millede elementideks on arvud, operatsiooniks aga arvude tavaline liitmine või korrutamine, nimetame veel kõikide kompleksarvude ja nn. Gaussi täis- ja ratsionaalarvude aditiivseid rühmi (*Gaussi täis-* ja *ratsionaalarvud* on sellised kompleksarvud $a+bi$, kus a ja b on vastavalt täis- või ratsionaalarvud), kõikide nullist erinevate ratsionaal-, reaal- ja kompleksarvude multiplikatiivseid rühmi ning arvudest 1 ja —1 koosnevat multiplikatiivset rühma.

Mittekommutatiivse rühma näitena toome järgmise Cayley tabeliga defineeritud grupoidi:

$\cdot$	e	s_1	s_2	s_3	a	b
e	e	s_1	s_2	s_3	a	b
s_1	s_1	e	a	b	s_2	s_3
s_2	s_2	b	e	a	s_3	s_1
s_3	s_3	a	b	e	s_1	s_2
a	a	s_3	s_1	s_2	b	e
b	b	s_2	s_3	s_1	e	a

Selle grupoidi assotsiatiivsuses veendumiseks tuleks viia läbi küllalt komplitseeritud analüüs. Niisuguse analüüsi vältimiseks näitame hiljem, et see grupoid on isomorfne teatud teisenduste rühmaga, millest järeldubki tema assotsiatiivsus. Lähtudes oletusest, et vaadeldav grupoid kujutab endast poolrühma, on väga lihtne näidata, et tegemist on isegi rühmaga. Tõepoolest, ühikelement on selles poolrühmas olemas ning pöördelemendid näevad välja järgmiselt: $a^{-1}=b$, $b^{-1}=a$, $s_i^{-1}=s_i$ $(i=1, 2, 3)$ ning $e^{-1}=e$ (nagu see on alati ühikelemendi korral: $e\cdot e=e$).

Toodud rühm on mittekommutatiivne, nagu see nähtub Cayley tabeli ebasümmeetrilisusest. Ta on isegi teatud mõttes maksimaalselt mittekommutatiivne: peale korrutiste kujuga $x\cdot x=$ $=x\cdot x$, $x\cdot e=e\cdot x$ ja $x^{-1}\cdot x=x\cdot x^{-1}$, mis kunagi ei olene tegurite järjekorrast, on siin alati $x\cdot y\neq y\cdot x$. Ühtlasi leiab selle näite puhul kinnitust ülalmainitud fakt erinevate jagatiste olemasolust: $s_1\cdot a^{-1}=s_1\cdot b=s_3$ ja $a^{-1}\cdot s_1=b\cdot s_1=s_2$.

Mittekommutatiivse rühma moodustavad ka ratsionaalfunktsioonid

$$e=x,\quad f_1=\frac{1}{x},\quad f_2=1-x,\quad f_3=\frac{x}{x-1},\quad c=\frac{x-1}{x},\quad d=\frac{1}{1-x},$$

kui tehtena «o» vaadelda liitfunktsiooni moodustamist. Siis on näiteks

$$f_2\circ c=1-\frac{x-1}{x}=\frac{x-x+1}{x}=\frac{1}{x}=f_1,$$

$$c\circ f_2=\frac{(1-x)-1}{1-x}=\frac{-x}{1-x}=\frac{x}{x-1}=f_3$$

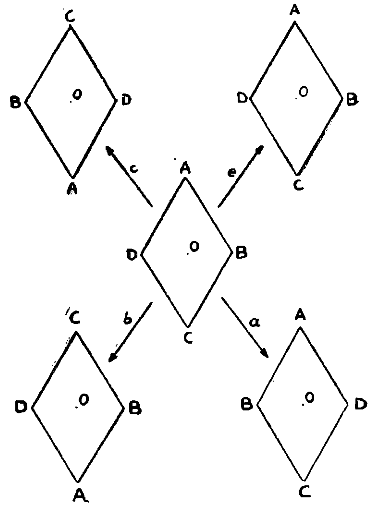
ja $f_3^{-1}=f_3$, sest

$$f_3\circ f_3=\frac{\dfrac{x}{x-1}}{\dfrac{x}{x-1}-1}=\frac{\dfrac{x}{x-1}}{\dfrac{x-x+1}{x-1}}=x=e,$$

aga e on selle rühma ühikelement (miks?).

Rühma moodustavad ka rombi sümmeetriateisendused. Neid on neli (vt. joon. 2): samasusteisenduse e, peegeldused a ja b diagonaalide suhtes ning tsentraalsümmeetria c. Selle rühma Cayley tabel on järgmine

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e



Joonis 2.

Uurides tähelepanelikult seda ja eelmist Cayley tabelit paneme tähele, et tabeli igas reas ja igas veerus esineb iga element üks ja ainult üks kord (poolrühmade korral, mis ei kujutanud endast rühmi, oli olukord teistsugune: leheküljel 16 on esitatud poolrühma H Cayley tabel, mille neljandas reas näiteks elemendid a ja b ei ole üldse esindatud, elemendid c ja f aga esinevad kumbki kaks korda).

Rühmade Cayley tabelite selline omadus on seotud võrrandite[3] $u \cdot x = v$ ja $y \cdot u = v$ lahenduvuse tingimusega rühma definitsioonis. Nimelt selleks, et võrrand $u \cdot x = v$ oleks iga v korral lahenduv, peavad tabelis u-le vastavas reas eksisteerima kõik v-d, s. t. rühma kõik elemendid. Lõpliku rühma korral järeldub siit, et iga v peab selles reas esinema ainult üks kord. Aga ka lõpmata rühma korral ei saa neid üheski reas olla kaks, sest siis oleks kahe erineva elemendi x_1 ja x_2 korral $u \cdot x_1 = v$ ja $u \cdot x_2 = v$; korrutades mõlemad võrdused vasakult u^{-1}-ga saame: $x_1 = u^{-1} \cdot v$ ja $x_2 = u^{-1} \cdot v$, mis on vastuolus eeldusega, et $x_1 \neq x_2$. Analoogiline arutelu näitab, et rühma Cayley tabeli veergudel on samasugune omadus.

Vastupidi, kui poolrühma Cayley tabeli igas reas ja veerus on esindatud poolrühma iga element, siis selles poolrühmas on võrrandid $u \cdot x = v$ ja $y \cdot u = v$ lahenduvad. Kui see poolrühm on ühikelemendiga, siis on ta rühm.

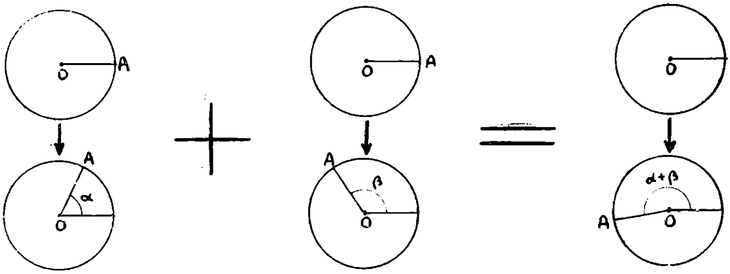
Ülesandeid:

18. Tõestada, et korrapärase kolmnurga pöörded, mis viivad tipud tippudeks, moodustavad monogeense rühma.

---

[3] Segaduste vältimiseks on rühma mistahes elemente siin tähistatud tähtedega u ja v.

19. Tõestada, et ringjoone pöörded ümber keskpunkti (vt. joon. 3) moodustavad rühma, mis on isomorfne kõikide reaalarvude aditiivse rühmaga.



Joonis 3.

20. Kas kõik nullist erinevad arvud kujuga $a+b\sqrt{13}$ moodustavad korrutamise suhtes rühma, kui a ja b on: 1) täisarvud; 2) ratsionaalarvud?

21. Tõestada, et funktsioonid e, f_1, f_2, f_3, c ja d (vt. lk. 22) moodustavad rühma, mis on isomorfne samal leheküljel Cayley tabeli abil defineeritud kuueelemendilise mittekommutatiivse rühmaga.

7. Substitutsioonide rühmad

Nagu eelmises punktis mainisime, ei moodusta lõpliku hulga kõik teisendused rühma, sest mõningatel teisendustel ei leidu pöördelementi ehk *pöördteisendust*. Muidugi leidub ka selliseid teisendusi, milledel pöördteisendus on olemas. Näiteks seosest

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&4&5&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&1&2&3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&3&4&5\end{pmatrix}$$

nähtub, et

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&4&5&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&1&2&3&4\end{pmatrix}.$$

Üldiselt leidub lõpliku hulga $\{1, 2, \ldots, n\}$ teisendusel $i \rightarrow a_i$ pöördteisendus siis ja ainult siis, kui elementide a_i seas pole võrdseid, ehk teiste sõnadega, kui teisendus on üksühene.

Kuna kahe üksühese teisenduse korrutis on jällegi üksühene teisendus, siis antud lõpliku hulga kõik üksühesed teisendused ehk *substitutsioonid*, nagu neid teisiti nimetatakse, moodustavad rühma. Hulga $\{1, 2, \ldots, n\}$ kõigi substitutsioonide rühma tähistatakse sümboliga S_n; nii rühma S_n ennast kui ka tema alamrühmi nimetatakse *sümmeetrilisteks* rühmadeks. Nimetus tuleneb sellest, et (nagu me hiljem veendume) substitutsioonide rühmad on tihedalt seotud geomeetriliste kujundite sümmeetria uurimisega. Rühm S_n koosneb $n!$ elemendist, sest sümbolite $1, 2, \ldots, n$ igale permutatsioonile vastab üks ja ainult üks substitutsioon.

Ainsaks kommutatiivseks substitutsioonide rühmaks S_n on kaheelemendiline rühm S_2. Rühm S_3 koosneb kuuest elemendist ning pole kommutatiivne, nagu nähtub järgmisest näitest:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}.$$

Rühm S_3 on isomorfne eelmises punktis Cayley tabeli abil defineeritud mittekommutatiivse kuueelemendilise rühmaga. Selles veendumiseks tarvitseb vaid tuua S_3 elementide jaoks sisse järgmised tähistused:

$$e=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix},\quad s_1=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix},\quad s_2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix},$$

$$s_3=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix},\quad a=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$$

ning koostada rühma S_3 Cayley tabel.

Lihtne on veenduda, et kõik rühmad, mis koosnevad vähem kui kuuest elemendist, on kommutatiivsed. Nendeks rühmadeks on järgmiste Cayley tabelitega määratud monogeensed rühmad (moodustava elemendiga a neljal viimasel juhul):

	e
e	*e*

	e	*a*
e	*e*	*a*
a	*a*	*e*

	e	*a*	*b*
e	*e*	*a*	*b*
a	*a*	*b*	*e*
b	*b*	*e*	*a*

	e	*a*	*b*	*c*
e	*e*	*a*	*b*	*c*
a	*a*	*b*	*c*	*e*
b	*b*	*c*	*e*	*a*
c	*c*	*e*	*a*	*b*

	e	*a*	*b*	*c*	*d*
e	*e*	*a*	*b*	*c*	*d*
a	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*
b	*b*	*c*	*d*	*e*	*a*
c	*c*	*d*	*e*	*a*	*b*
d	*d*	*e*	*a*	*b*	*c*

ning rombi sümmeetria rühm (vt. lk. 23), mida nimetatakse veel *Cayley nelirühmaks*. Seega S_3 on minimaalse elementide arvuga mittekommutatiivne rühm.

Kuna monogeenne rühm sisaldab ühikelemendi, siis on ta alati $(1, l)$-järku ning koosneb l elemendist. Rühma *järguks* nimetatakse rühmateoorias rühma elementide arvu. Seega monogeense rühma järguks nimetatakse edaspidi mitte paari $(1, l)$, vaid lihtsalt arvu l.

Lõplike rühmade teoorias on üheks tähtsamaks küsimuseks kõigi antud järku (n-järku) rühmade kirjeldamine. Kuigi see ülesanne pole teoreetiliselt lahendumatu, muutub selline kirjeldus n suurte väärtuste korral praktiliselt teostamatuks. Küll aga võib seda ülesannet lahendada n väikeste väärtuste korral. On näiteks teada, kui palju on omavahel mitteisomorfseid rühmi

$n \leqslant 31$ jaoks. Need andmed on koondatud järgmisse tabelisse:

Rühma järk	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Rühmade arv	1	1	1	2	1	2	1	5	2	2	1	5	1	2	1	14

Rühma järk	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Rühmade arv	1	5	1	5	2	2	1	15	2	2	5	4	1	4	1

On kirjeldatud kõik rühmade tüübid juhul, kui nende järk avaldub kujul p, p^2, p^3, p^4, p^5, pq, pq^2 või pqr, kus p, q ja r on algarvud. On näiteks selgitatud, et eksisteerib ainult kaks mitteisomorfset rühma järguga p^2, mõlemad nad on kommutatiivsed. Järku pq võib olla kaks oluliselt erinevat rühma: kommutatiivne ja mittekommutatiivne, kusjuures mittekommutatiivne eksisteerib vaid siis, kui $p > q$ korral saame p jagamisel q-ga jäägiks 1. Viieteistkümnendat järku rühmi näiteks on ainult üks. See on kooskõlas eelnevaga: $15 = 5 \cdot 3$ ja viie jagamisel kolmega saame ühest erineva jäägi 2.

Rühmas S_n võib ära märkida $\frac{n!}{2}$ elemendist koosneva alamrühma A_n, mida nimetatakse *vahelduvaks* rühmaks. Tema elementideks on nn. paarissubstitutsioonid. Substitutsiooni

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 1 & 8 & 2 & 4 & 7 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

alumises reas on mitu sellist arvudepaari, mis moodustavad nn. *inversiooni*: suurem arv seisab väiksemast vasakul. Kokku on neid inversioone 12: arv 5 moodustab inversiooni arvudega 1, 2, 3 ja 4, arv 8 arvudega 2, 3, 4, 6 ja 7, arv 4 arvuga 3 ning arv 7 arvudega 3 ja 6. Seda substitutsiooni ja ka iga teist, mille alumises reas on paarisarv inversioone nimetataksegi *paarissubstitutsiooniks*. Võib tõestada, et paarissubstitutsioonide korrutis on jälle paarissubstitutsioon. Et ühiksubstitutsioon on ka paarissubstitutsioon (null inversiooni!), siis järeldub siit, et paarissubstitutsiooni pöördsubstitutsioon on samuti paarissubstitutsioon ja seega moodustavad paarissubstitutsioonid tõepoolest rühma. Näiteks A_3 koosneb elementidest e, a ja b.

Rühmad S_n on huvitavad mitte ainult selle poolest, et kujutavad endast mittekommutatiivseid rühmi. Nad on teatud mõttes universaalsed rühmad: saab näidata, et rühmas S_n leidub iga n-järku rühmaga isomorfne alamrühm.

Substitutsioonide rühmade teooria on ajalooliselt esimeseks kaasaegse algebra haruks. Esimeste sügavamate tulemusteni selles teoorias jõudis Evariste Galois (1811—1832, hukkus traagiliselt duellil 21-aastasena), kes taandas algebraliste võrrandite radikaalides lahenduvuse uurimise nendele vastavate substitutsioonide rühmade uurimisele. Galois' geniaalsed tööd said üldtuntuks aga alles aastakümneid pärast autori surma. eriti seoses Camille Jordani (1838—1922) «Traktaadi substitutsioonidest» ilmumisega 1870. a. Viimases monograafias olid kokku võetud lõplike rühmade teooria tulemused koos nende rakendustega arvu- ja funktsiooniteoorias ning algebralises geomeetrias.

Järk-järgult selgus, et enamik tulemustest ei põhine asjaolul, et rühma elementideks on substitutsioonid, vaid tulenevad teatud omadustega operatsiooni olemasolust lõpliku hulga elementide seas. Nii tekkis lõplike rühmade aksiomaatiline teooria, mille arenguperioodiks sai möödunud sajandi lõpp ning käesoleva sajandi algus ning mille edusammud on seotud G. Frobeniuse, O. Hölderi, W Burnside'i, I. Schuri, G. A. Milleri jt. nimedega.

Kuid lõplikkuse nõue, olles liiga rangeks kitsenduseks, ei saanud alatiseks rahuldada matemaatikuid. Esimesed uurimused lõpmatute rühmade teooria ja rakenduste alal kuuluvad C. Jordanile ning tema õpilastele S. Liele ja F. Kleinile. Teetähiseks rühmateooria arengus on aga Kiievi ülikooli noore õppejõu Otto Juljevitš Schmidti (1891—1956) 1916. a. ilmunud monograafia «Abstraktne rühmateooria», milles esmakordselt käsitleti süstemaatiliselt rühmateooriat ilma lõplikkuse nõudeta.

Tänu O. J. Schmidti ja tema õpilaste entusiasmile on abstraktse ehk üldise rühmateooria edasine areng väga suurel määral toimunud nõukogude matemaatika raamides. Mainime siin A. N. Maltsevit, B. I. Plotkinit ning O. J. Schmidti õpilasi A. G. Kurošit, S. A. Tšunihinit, A. A. Kulakovi, V. K. Turkinit ja A. P. Ditsmanit. Ka tänapäeval jätkub rühmateooria kiire areng. Huvitav on märkida, et kõrvuti üldise rühmateooria edasiarendamisega hakati viimastel aastatel jälle suurt tähelepanu pöörama lõplikele rühmadele. Muuseas, kasutades abstraktse rühmateooria väga sügavaid tulemusi, lahendati aastakümneid lahendamata seisnud probleeme, millest mõned esitas juba Burnside.

Ülesandeid:

22. Tõestada, et kahe substitutsiooni korrutis on substitutsioon.

23. Tõestada, et a) S_∞ — lõpmatu hulga kõigi üksüheste teisenduste hulk moodustab rühma korrutamise operatsiooni suhtes; b) alamrühma rühmas S_∞ moodustavad sellised teisendused, mis jätavad paigale kõik elemendid, välja arvatud mingi lõplik hulk neist; c) rühmas S_∞ leiduvad iga n korral alamrühmad, mis on isomorfsed rühmaga S_n.

24. Leida vahelduva rühma A_4 kõik alamrühmad.

AUTOMAATNE PROGRAMMEERIMINE[1]

Ü. Kaasik, A. Korjus

Praktikas esineb väga sageli niisuguseid arvutusalgoritme, mille erinevates kohtades tuleb rakendada üht ning sama arvutuseeskirja või valemit. Seda tüüpi algoritmi programmeerimisel on kirjutiste lühendamiseks loomulik esitada korduvalt kasutatav arvutuseeskiri üheainsa programmilõiguna, mille poole programmi teistest kohtadest võib tarbe korral pöörduda. Niisuguseid enam-vähem iseseisvaid programmilõike, mille poole mujalt programmist saab ajutiselt pöörduda ja seejärel jätkata arvutusi katkenud kohast, nimetatakse tavaliselt alamprogrammideks.

Mingi arvutuseeskirja esitamine iseseisva alamprogrammina võib osutuda otstarbekohaseks aga isegi siis, kui seda vaadeldavas algoritmis kasutatakse vaid ühekordselt. Nimelt saab ulatuslikuma ülesande lahendamise peaaegu alati taandada terve rea lihtsamate ülesannete lahendamisele. Üsna sageli on nende lihtsamate ülesannete lahendusalgoritmid sealjuures aga juba varem programmeeritud ja neid säilitatakse vastava arvutuskeskuse programmide kogus (programmoteegis). Järelikult on töö kokkuhoiu huvides oluline, et sobivate valmis programmilõikude kui alamprogrammide sisselülitamine koostatavasse programmi (nn. põhiprogrammi) oleks võimalikult lihtne.

Lihtsa süsteemi olemasolu alamprogrammide lülitamiseks põhiprogrammi on tähtis veel ühelt seisukohalt. Nimelt võimaldab see ulatuslikuma ülesande lahendamiseks vajaliku programmi koostamisel kasutada mitut programmeerijat — erinevaid alamprogramme võivad koostada erinevad isikud.

Kõiki neid põhjusi arvestades ongi ka ALGOL-programmide koostamisel ette nähtud alamprogrammide laialdase kasutamise võimalus. Praktika vajadusi arvestades on kirjeldatavas süstee-

---

[1] Käesoleva artikli algus vt. Matemaatika ja kaasaeg, VI, lk. 14—24. Ühtlasi on soovitav tutvuda ka selle sarja eelnevate artiklitega: Kaasik, Ü., Elektronarvutid ja programmeerimine. — Matemaatika ja kaasaeg, IV, lk. 18—30; Kaasik, Ü., Algoritmide blokk-skeemid. — Matemaatika ja kaasaeg, V, lk. 24—36.

mis reserveeritud koguni kolm erinevat viisi alamprogrammide lülitamiseks põhiprogrammi. Vastavalt sellele kasutatakse erinevat tüüpi alamprogrammide jaoks ka kolme erinevat nimetust: funktsioonid, alamprogrammid ja protseduurid.

ALGOL-programmides kõige sagedamini kasutatava alamprogrammide liigi moodustavad funktsioonid. Funktsiooniks nimetatakse siin sellist arvutuseeskirja, mille rakendamine teatud kindlate suuruste (funktsiooni argumentide) väärtustele annab kas arvulise või loogilise väärtuse, mida nimetatakse funktsiooni väärtuseks. Sealjuures on oluline, et funktsiooni väärtuse arvutamise eeskiri oleks esitatav üheainsa (aritmeetilise või loogilise) avaldisena.

Et funktsiooni määrava arvutuseeskirja koostamisel pole vaja teada tema argumentide konkreetseid väärtusi, siis vastavas alamprogrammis asendatakse argumendid mingite identifikaatoritega — neid nimetatakse selle funktsiooni formaalseteks argumentideks.

Vaadeldavat tüüpi alamprogrammide defineerimiseks kasutatakse ALGOL-programmides nn. funktsioonikirjeldusi, mille üldkuju on järgmine:

$$\text{ФУНКЦИЯ}\ f(a_1,\ a_2, \sim\sim, a_n) := v;$$

Siin ФУНКЦИЯ on selliste kirjelduste jaoks reserveeritud sõna, f — kirjeldatava funktsiooni identifikaator (defineeritava funktsiooni nimi), a_1, a_2, ... , a_n — funktsiooni formaalseid argumente tähistavad identifikaatorid[2] ning v — funktsiooni määravat arvutuseeskirja kujutav avaldis.

Funktsioonikirjelduses võib kasutada iga süntaktiliselt korrektset avaldist v, mis kõrvuti funktsiooni formaalseid argumente tähistavate identifikaatoritega võib sisaldada ka põhiprogrammis esinevaid identifikaatoreid. Siinjuures tuleb aga arvestada, et funktsioonikirjelduses formaalseid argumente tähistavad identifikaatorid a_1, a_2, ... , a_n pole mingil moel seotud põhiprogrammi identifikaatoritega; seda isegi juhul, kui mõni a_i langeb oma kirjapildilt kokku põhiprogrammis esineva identifikaatoriga. Selles muide seisnebki funktsioonikirjeldusena esitatud alamprogrammi suhteline sõltumatus põhiprogrammist: funktsiooni argumentide tähistamisel pole oluline arvestada põhiprogrammis kasutatud tähistusi. Ülejäänud identifikaatoreid (mis ei kuulu argumentide loendisse a_1, a_2, ... , a_n) võib funktsioonikirjelduses kasutada aga ainult selles tähenduses, mille neile annab põhiprogramm. See märkus käib ka funktsiooni nimetusena kasutatava identifikaatori f kohta. Et f kuulub seega põhi-

[2] Sümboliga $\sim\sim$ on ALGOL-programmide üksikute konstruktsioonide üldkujude esitamisel asendatud tavalised mõttepunktid. See on vajalik segaduste vältimiseks, sest punktid kuuluvad ise ALGOL-i tähestiku hulka ja näiteks funktsioonikirjeldusse neid paigutada ei tohi.

programmi identifikaatorite hulka, tuleb ka tema tüüp (s. t. funktsiooni väärtuste tüüp) määrata sobiva tüübikirjeldusega. See tüübikirjeldus peab sealjuures paiknema ALGOL-programmis enne vastavat funktsioonikirjeldust. Funktsiooni identifikaator kirjutatakse tüübikirjeldusse koos järgnevate ümarsulgudega, näiteks

ЦЕЛЫЙ f();

Kui funktsiooni tüüp pole kirjeldatud, siis kuulub ta automaatselt tüüpi ПЛАВАЮЩИЙ.

Toome nüüd mõned konkreetsete funktsioonikirjelduste näited. Kirjeldusega

ФУНКЦИЯ НОРМИРУУТ (A, B, C) := A ↑ 2 + B ↑ 2 + C ↑ 2;

saame funktsiooni, mille (reaalarvulisteks) väärtusteks on avaldise $A^2 + B^2 + C^2$ väärtused. Kirjeldusega

ФУНКЦИЯ Ф(B, Ф) := (B ↑ 2 + 3.5B × Ф + Ф ↑ 2)/(B + Ф);

defineeritud funktsiooni väärtusteks on aga avaldise

$$\frac{B^2 + 3{,}5B\Phi + \Phi^2}{B + \Phi}$$

reaalarvulised väärtused. Tüübi- ja funktsioonikirjeldus

ЛОГИЧЕСКИЙ Л();

ФУНКЦИЯ Л(P, C) := B ЭК (НЕ(P ∧ C));

defineerivad seevastu loogilise funktsiooni, mille väärtuseks on avaldise $B \sim \overline{(P \wedge C)}$ väärtused.

Toodud näidetes sisaldavad kaht esimest funktsiooni defineerivad avaldised ainult formaalsete argumentide identifikaatoreid, kolmandas näites lisandub neile aga veel põhiprogrammi identifikaator B. Teises näites on identifikaatorite valikuga juhitud tähelepanu veel sellele, et formaalse argumendi identifikaator võib tarbe korral ühte langeda isegi defineeritava funktsiooni identifikaatoriga.

Funktsioonikirjeldused on määratud ainult vastavate alamprogrammide defineerimiseks. Pöördumine nende alamprogrammide poole toimub vastavate nn. väärtustatud funktsioonide abil. Põhiprogrammi kõigisse nendesse kohtadesse, kus on tarvis arvutada funktsiooni f konkreetseid väärtusi, paigutatakse iseseisva avaldisena või selle osana väärtustatud funktsioon $f(v_1, v_2, \ldots, v_n)$. Siin $v_1, v_2, \ldots, v_n$ on kas mingid avaldised või väärtustatud funktsioonid, mille väärtusi programmi sellel kohal tuleb kasutada funktsiooni f tegelike argumentidena. Nii näiteks võivad ülalkirjeldatud funktsioonile vastavateks väärtustatud funktsioonideks olla Ф(—4, НОРМИРУУТ (1, M+2,5H)), Ф(Ф(3.1, П), Ф(П, — 5.3)) jne.

Oma keelelistelt omadustelt on väärtustatud funktsioon täiesti analoogiline muutujaga, mida kasutatakse aritmeetilise või loogilise avaldise koostisosana. Seega võib väärtustatud funktsioone kasutada näiteks järgmistes omistamisoperaatorites:

$$\text{В1} := \text{Л}((\text{В2 МР В3}), \text{НЕ В});$$

$$\text{Т} := (\text{Ф}(\text{А} \uparrow 2 + 1{,}1 - \text{С}) \uparrow 3 - 2\text{С})/\text{НОРМИРУУТ}(\text{С}, \text{А}, \text{Р});$$

Funktsioonide kasutamisel ALGOL-programmides peab silmas pidama järgmist reeglit: *iga funktsioon tuleb enne tema esmakordset kasutamist põhiprogrammi operaatorites defineerida vastava kirjeldusega.* Sellest reeglist moodustavad erandi vaid nn. sisemised funktsioonid. Need funktsioonid on ALGOL-programmides defineeritud juba oma identifikaatoritega, mis kujutavad selle keele reserveeritud sõnu ja neile vastavaid väärtustatud funktsioone võib programmi operaatorites kasutada ilma eelneva kirjelduseta (vajaliku arvutuseeskirja moodustab programmeeriv programm). Sisemiste funktsioonide hulka võetakse tavaliselt kõik elementaarfunktsioonid ja mõned teised sageli kasutatavad funktsioonid.

TRÜ arvutuskeskuses väljatöötatud automaatse programmeerimise süsteemis on sisemisteks funktsioonideks esialgu valitud järgmises tabelis loetletud funktsioonid.

Jrk. nr.	Vastava väärtustatud funktsiooni üldkuju	Funktsiooni arvutuseeskirja selgitus
1	КВК(v)	ruutjuur
2	ЭКС(v)	eksponentfunktsioon (arvu e aste)
3	ЛОГ(v)	naturaallogaritm
4	СИН(v)	siinus
5	КОС(v)	koosinus
6	ТАН(v)	tangens
7	КОТАН(v)	kootangens
8	АРКСИН(v)	arkussiinuse peaväärtus
9	АРККОС(v)	arkuskoosinuse ,,
10	АРКТАН(v)	arkustangensi ,,
11	АБС(v)	absoluutväärtus
12	МАКС(v_1 v_2, ∿∿, v_n)	avaldiste $v_1, v_2, \ldots . v_n$ väärtuste hulgast algebraliselt kõige suurema leidmine
13	МИН(v_1, v_2, ∿∿, v_n)	avaldiste $v_1, v_2, \ldots, v_n$ väärtuste hulgast algebraliselt kõige väiksema leidmine
14	МОД(v_1, v_2)	avaldise v_1 täisarvulise väärtuse jagamisel avaldise v_2 täisarvulise väärtusega saadava jäägi leidmine
15	СИГН(v)	funktsiooni väärtuseks on $\begin{cases} +1, \text{ kui } v > 0 \\ 0, \text{ kui } v = 0 \\ -1, \text{ kui } v < 0 \end{cases}$

Funktsioonikirjeldustega saab põhiprogrammis defineerida vaid suhteliselt lihtsaid alamprogramme. Seetõttu on nende kasutamise ulatus üsna piiratud: nad võimaldavad peamiselt vältida keeruliste avaldiste korduvat üleskirjutamist ühes ning samas ALGOL-programmis ja täiendada programmoteeki uute alamprogrammidega. Hoopis mitmekesisemad on kirjeldusega ПОДПРОГРАММА defineeritavate alamprogrammide rakendamise võimalused.

Reserveeritud sõnaga ПОДПРОГРАММА algav kirjeldus defineerib iseseisva alamprogrammina mistahes konstruktsiooniga liitoperaatori *s*. Selle kirjelduse üldkuju on:

ПОДПРОГРАММА *a*, *s*;

kus *a* tähendab defineeritava alamprogrammi identifikaatorit (selle alamprogrammi nime).

Pöördumine nii defineeritud alamprogrammi poole toimub spetsiaalse operaatoriga

ВХОД *a*;

kus ВХОД on sellise pöördumisoperaatori jaoks reserveeritud sõna. Operaatori ВХОД *a* tulemusel asutakse kohe pärast tema täitmist teostama alamprogrammi *a* kirjeldusse kuuluvat liitoperaatorit *s*.

Liitoperaatori *s* täitmist alustatakse alati tema esimesest operaatorist, s. t. operaatorist, mis vahetult järgneb esimesele operaatorsulule НАЧАЛО. Tema koosseisu kuuluvaid operaatoreid täidetakse tavaliste reeglitega määratud järjekorras seni, kuni tuleb teostamisele eriline, ühest ainsast reserveeritud sõnast ВЫХОД koosnev operaator. Operaatori ВЫХОД täitmine katkestab alamprogrammi töö ja suunab põhiprogrammi sellele operaatorile, mis vahetult järgneb operaatorile ВХОД, millega pöörduti antud alamprogrammi poole. Alamprogramm võib tarbe korral sisaldada mitu operaatorit ВЫХОД.

Kõrvuti n.-ö. operatsioonilist laadi operaatoriga (omistamis-, suunamis- ja tsüklioperaatorid) võib alamprogrammi kirjeldusse kuuluv liitoperaator *s* sisaldada ka kirjeldusi ja kommentaare, s. t. kõiki programmi põhilisi koostisosi. Toomegi näite niisuguse alamprogrammi kirjeldamisest, milles enamik neid koostisosi leidub (programmi otstarve on seletatud tema tekstis kommentaarina; olgu vaid märgitud, et programm töötab üksnes siis, kui A väärtus on mittenegatiivne):

ПОДПРОГРАММА АЛГАРВ, НАЧАЛО ЦЕЛЫЙ (И, М); ПРИМЕЧАНИЕ. See alamprogramm kontrollib, kas põhiprogrammi täisarvulise muutuja A väärtus on algarvuline. Kui A väärtuseks on algarv, siis põhiprogrammi loogilisele muutujale B omistatakse väärtus 1, vastasel korral aga väärtus 0;

```
М := КВК(А);
ДЛЯ И := (2, 1, М) ЦИКЛ ЕСЛИ (МОД (А, И) = 0), ТО
НАЧАЛО В := 0; ВЫХОД КОНЕЦ;
В := 1; ВЫХОД КОНЕЦ АЛГАРВ;
```

Alamprogrammi identifikaatori (АЛГАРВ) kordamine liitoperaatori *s* viimase operaatorsulu järel pole siin tingimata vajalik, kuid lihtsustab programmi lugemist. Defineeritud alamprogrammi poole pöördumiseks tuleb muutujale A omistada väärtus, mille algarvulisust on tarvis kontrollida, ja seejärel kirjutada operaator

ВХОД АЛГАРВ;

Vahetult selle järel paiknevale operaatorile annabki üks operaatoritest ВЫХОД pärast alamprogrammi täitmist jälle juhtimise.

Lähemat selgitust vajavad alamprogrammi koosseisu kuuluvad kirjeldused (toodud näites on selliseks muutujate *И* ja *М* tüübikirjeldus). Nimelt on nendel kirjeldustel peale oma tavaliste funktsioonide täita veel üks eriline ülesanne: tuua alamprogrammi sisse uus tähistuste tase. Analoogilise olukorraga oli meil tegemist juba funktsioonikirjelduste puhul, kus funktsiooni formaalseid argumente tähistavad identifikaatorid polnud tegelikult seotud põhiprogrammi identifikaatoritega.

Kui mingi muutuja tüüp on alamprogrammis kirjeldatud, siis see muutuja on vaadeldavas alamprogrammis lokaliseeritud. See tähendab, et vastav identifikaator tähistab sellist muutujat, mille väärtusi saab kasutada ning millele saab uusi väärtusi omistada ainult selles alamprogrammis. Täpselt sama kirjapildiga identifikaator tähistaks põhiprogrammis hoopis teist muutujat, millel pole alamprogrammis lokaliseeritud muutujaga sisuliselt midagi ühist. Toodud näites on alamprogrammis АЛГАРВ lokaliseeritud muutujateks seega *И* ja *М*.

Need muutujad, mille tüüpi alamprogrammis ei kirjeldata, pole lokaliseeritud ja kujutavad endast seega põhiprogrammi muutujaid. Näiteks toodud alamprogrammis on põhiprogrammi muutujateks A ja B.

Muutujate lokaliseerimine on vajalik alamprogrammide suhtelise sõltumatuse saavutamiseks. See võimaldab näiteks üksikute alamprogrammide koostamise jaotada erinevate programmeerijate vahel, kusjuures neil ei tarvitse muretseda kasutatava tähistuse kooskõlastamise üle. Samuti võimaldab tähistuste sõltumatus ilma muutusteta kasutada varem koostatud alamprogramme.

Kõik alamprogrammis kasutatud märgendid on seal lokaliseeritud. See tähendab, et väljaspool alamprogrammi kirjeldust paiknevate suunamisoperaatoritega pole võimalik suunata alamprogrammi märgitud operaatoritele. Ainsaks alamprogrammi poole pöördumise mooduseks on operaatori ВХОД kasutamine. Samuti pole alamprogrammis paiknevate suunamisoperaatoritega võimalik suunata väljapoole seda alamprogrammi. Alamprogrammist väljumise ainsaks teeks on operaator ВЫХОД.

Märgendite niisugune lokaliseerimine on samuti vajalik alamprogrammide sõltumatuse saavutamiseks (kuigi esimene nimetatud kitsendustest võib takistada alamprogrammi osade kasutamist omaette alamprogrammidena). Sel teel muutuvad alamprogrammid täielikeks ja kinnisteks, neid võib arvuti mäluseadmesse tuua näiteks alles siis, kui põhiprogrammis esineb vastav operaator ВХОД.

Programmeerimisel on kirjeldust ПОДПРОГРАММА eriti kohane kasutada ühe ning sellesama algoritmi erinevate osade esitamisel alamprogrammidena. Nende suhteline sõltumatus ja täielikkus võimaldab ökonoomsemalt kasutada elektronarvuti mäluseadet ja lihtsustab ALGOL-programmide koostamist. Paraku pole aga selle kirjeldusega esitatavad alamprogrammid siiski eriti kohased erinevates põhiprogrammides kasutamiseks. Eeskätt takistab seda asjaolu, et nendes alamprogrammides esineb mittelokaliseeritud muutujate ja massiivide identifikaatoreid, mille tõttu teatud osa alamprogrammis esinevatest tähistustest peab alati olema kooskõlastatud vastava põhiprogrammi tähistustega.

Kinnist ja põhiprogrammist täielikult sõltumatut alamprogrammi nimetatakse p r o t s e d u u r i k s. Protseduuri lülitamiseks ALGOL-programmi kasutatakse spetsiaalset p r o t s e d u u r i k i r j e l d u s t, mille üldkuju on järgmine:

ПРОЦЕДУРА $p(l)$; s;

Siin ПРОЦЕДУРА on selliste kirjelduste jaoks reserveeritud sõna, p — kirjeldatava protseduuri identifikaator (defineeritava alamprogrammi nimetus), l — protseduuri nn. formaalsete parameetrite loend ja s — selle kirjeldusega protseduurina esitatav liitoperaator.

Muutujate, massiivide, funktsioonide, alamprogrammide ja protseduuride identifikaatoreid, märgendeid ning avaldisi, mille vahendusel protseduur tema täitmise ajaks seostatakse põhiprogrammiga, nimetatakse p a r a m e e t r i t e k s. Igal protseduuril on teatud kindel arv parameetreid.

Oma ülesannetelt jagunevad protseduuri parameetrid kolme liiki: sisend-, väljund- ja pöördumisparameetrid. S i s e n d p a r a m e e t r i t e abil dikteerib põhiprogramm protseduuri sisuks oleva arvutusprotsessi sooritamiseks vajalikud lähteandmed, v ä l j u n d p a r a m e e t r i t e abil aga antakse põhiprogrammile selle arvutusprotsessi tulemused. P ö ö r d u m i s p a r a m e e t r i t e kaudu teatatakse protseduurile põhiprogrammi märgendid ning nende põhiprogrammis defineeritud funktsioonide, alamprogrammide ja teiste protseduuride nimetused, mida vaadeldava protseduuri sisuks olevas arvutusprotsessis võib kasutada.

Parameetreid, mida kasutatakse protseduurikirjelduses, nimetatakse tema formaalseteks parameetriteks. Protseduuri formaalsete parameetrite loend on üksteise järele kirjutatud ja omavahel komadega eraldatud identifikaatorite lõplik jada. See jada algab vaadeldava protseduuri kõigi sisendparameerite loendiga l_1, millele pärast semikoolonit järgneb tema väljundparameetrite loend l_2 ja lõpuks (pärast semikoolonit) pöördumisparameetrite loend l_3. Seega protseduuri formaalsete parameetrite loendil (l) on üldiselt kuju $(l_1;\ l_2;\ l_3)$.

Igal konkreetsel protseduuril aga võivad mingisse liiki kuuluvad parameetrid ka puududa. Sel juhul jäetakse vastav osa l_i formaalsete parameetrite loendist lihtsalt välja. Parameetrite üksikute liikide esituse poolest saab formaalsete parameetrite loendil (l) olla järelikult seitse erinevat üldkuju: $(l_1;\ l_2;\ l_3)$, (l_1), $(l_1;\ l_2)$, $(l_1;\ ;\ l_3)$, $(;\ l_2)$, $(;\ l_2;\ l_3)$ ja $(;\ ;\ l_3)$. Näiteks võib ainult sisend- ja pöördumisparameetreid sisaldava protseduuri parameerite loend olla järgmine:

$$(\mathrm{A1},\ \mathrm{A2},\ \mathrm{Б},\ \mathrm{В};;\Phi\ (),\ \Gamma\ (,,)).$$

Pöördumine protseduurina defineeritud alamprogrammi poole toimub nn. protseduurioperaatoriga

$$p(r);$$

kus p on täitmisele tuleva protseduuri identifikaator ja (r) — tema tegelike parameetrite loend. Protseduuri tegelike parameetrite loend (r) on oma üldkujult täiesti ühesugune tema formaalsete parameetrite loendiga (l). Nimelt, see peab sisaldama täpselt sama palju sisend-, väljund- ja pöördumisparameetreid kui formaalsete parameetrite loend.

Protseduuri formaalset ja tegelikku parameetrit nimetatakse vastavateks, kui nad parameetrite loendites (l) ja (r) paiknevad samadel kohtadel. Öeldakse, et protseduuri tegelikud parameetrid on kooskõlas vastavate formaalsete parameetritega, kui protseduuri sisuks olevas liitoperaatoris s esinevate formaalsete parameetrite asendamine vastavate tegelike parameetritega, mis vajaduse korral on paigutatud ümarsulgudesse, annab süntaktiliselt korrektse operaatori.

ALGOL-programmides lubatakse kasutada ainult niisuguseid protseduurioperaatoreid, kus parameetrite loendites toodud tegelikud parameetrid on kooskõlas selle protseduuri vastavate formaalsete parameetritega. Seetõttu on parameetrite kooskõlastamise probleem protseduuride kasutamisel üheks keskseks küsimuseks. Kahjuks ei luba käesoleva artikli ulatus meid sellel küsimusel pikemalt peatuda. Seetõttu piirdume vaid järgmise tabeli esitamisega, mis näitab, milliseid keeleühikuid on lubatud kasutada protseduuri formaalsete ja tegelike parameetritena ning sisaldab ka juhiseid nende parameetrite kooskõlastamiseks.

Parameetri liik	Formaalne parameeter	Vastav kooskõlas olev tegelik parameeter	Märkusi
Sisendparameetrid	Lihtsa muutuja identifikaator	Avaldis või väärtustatud funktsioon	
	Massiivi identifikaator (koos nurksulgudega)	Massiivi identifikaator (koos nurksulgudega)	Vastavatel massiividel peab olema sama dimensioon
Väljundparameetrid	Lihtsa muutuja identifikaator	Lihtne või indeksitega muutuja	
	Massiivi identifikaator (koos nurksulgudega)	Massiivi identifikaator (koos nurksulgudega)	Vastavatel massiividel peab olema sama dimensioon
Pöördumisparameetrid	Alamprogrammi identifikaator	Alamprogrammi identifikaator	
	Funktsiooni identifikaator (koos ümarsulgudega)	Kirjeldusega ФУНКЦИЯ defineeritud funktsiooni identifikaator (koos ümarsulgudega)	Vastavatel funktsioonidel peab olema võrdne arv argumente
	Mingi teise protseduuri identifikaator (koos ümarsulgudega)	Kirjeldusega ПРОЦЕДУРА defineeritud mingi teise protseduuri idendifikaator (koos ümarsulgudega)	Vastavatel protseduuridel peab olema võrdne arv sama laadi sisend-, väljund-, ja pöördumisparameetreid
	Märgend	Märgend	

Protseduurioperaatori $p(r)$ täitmise esimeseks sammuks on formaalsete parameetrite asendamine vastavate tegelike parameetritega. Selle asendamise seisukohalt võib protseduuri formaalsed parameetrid jaotada kahte klassi. Esimesse klassi kuuluvad need sisendparameetrid, mille tähiseks on lihtsa muutuja identifikaator; teise klassi kõik ülejäänud parameetrid (massiivi identifikaatorid sisendparameetrite kohal, väljundparameetrid ja pöördumisparameetrid).

Esimesse klassi kuuluvatele formaalsetele parameetritele omistatakse protseduurioperaatori täitmisele asumisel vastavate tegelike parameetrite väärtused, millega tegelike parameetrite osavõtt protseduuri sisuks olevatest arvutustest piirdubki. Näiteks, kui mingile selle klassi parameetrile protseduuri täitmise käigus omistatakse uus väärtus, siis ei muuda see vastava tegeliku parameetri väärtust põhiprogrammis.

Teise klassi kuuluvad formaalsed parameetrid asendatakse protseduurioperaatori täitmisel ajutiselt (kuni protseduuri täitmise lõpuni) vastavate tegelike parameetritega. See tähendab, et kõik protseduuris ettenähtud operatsioonid teostatakse tegelikeks parameetriteks olevate põhiprogrammi muutujatega, kasutatakse põhiprogrammi funktsioone, alamprogramme ja protseduure ning pöördutakse seal esinevate märgitud operaatorite poole.

Protseduurioperaatori $p(r)$ täitmine seisneb protseduuri p kirjelduses toodud liitoperaatori s täitmises, kus teise klassi kuuluvad formaalsed parameetrid on asendatud vastavate tegelike parameetritega ja esimesse klassi kuuluvatele parameetritele on antud loendiga (r) määratud algväärtused. Seda liitoperaatorit täidetakse täpselt samal viisil nagu alamprogrammi kirjeldusse kuuluvat liitoperaatorit. Ka väljumine protseduurist toimub operaatoriga ВЫХОД, mis suunab protseduurioperaatorile $p(r)$ vahetult järgnevale operaatorile.

Kõrvuti operatsioonilist laadi operaatoritega peab protseduurikirjeldusse kuuluv liitoperaator s sisaldama ka kõikide oma identifikaatorite tüübikirjeldused (vastasel juhul kuuluvad need automaatselt ratsionaalarvude tüüpi), samuti kõikide massiivide kirjeldused. Kirjeldamata jäävad vaid need massiivid, funktsioonid, alamprogrammid ja protseduurid, mille identifikaatorid esinevad tema formaalsete parameetrite loendis. Rõhutame, et protseduuri sisuks olev liitoperaator võib omakorda sisaldada ka funktsiooni- ja alamprogrammikirjeldusi. Seevastu ta ei tohi aga sisaldada mingi teise protseduuri kirjeldust. Nimelt pole vaadeldavas keeles lubatud paigutada üht protseduurikirjeldust teise.

Erandlikult on kõik identifikaatorid ja märgendid, mida kasutatakse protseduurikirjeldusse kuuluvas liitoperaatoris s (kaasa arvatud kõik formaalsed parameetrid), selles protseduuris lokaliseeritud. Tänu sellele saab protseduuri kasutada koos mistahes põhiprogrammiga ilma, et temas oleks tarvis teha mingeid muudatusi.

Esitatud üldiste põhimõtete illustreerimiseks kirjeldame iseseisvate protseduuridena võrrandi $\Phi(X)=0$ lahendamise algoritmi vahemiku poolitamise meetodil[3] ja nn. simpleksmeetodit[4] lineaarsete planeerimisülesannete lahendamiseks.

---

[3] Selle algoritmi ja tema blokk-skeemiga tutvumiseks vt. Matemaatika ja kaasaeg, V, lk. 32.

[4] Samas, lk. 34.

```
ПРОЦЕДУРА ВЫРЛАХ (А, Б, Е; Х, У; Ф());
НАЧАЛО ПРИМЕЧАНИЕ. See on standardne programm võrrandi Ф(Х) = 0
                   lahendamiseks vahemiku poolitamise meetodiga;
    ЦЕЛЫЙ Р; Х := А; Р := 1;
1: У := Ф(Х); ЕСЛИ (У = 0), ТО ВЫХОД; ЕСЛИ (Р = 0), ТО
    НАЧАЛО ЕСЛИ (У × В > 0), ТО
        НАЧАЛО В := У; А := Х КОНЕЦ
        ИНАЧЕ НАЧАЛО С := У; Б := Х КОНЕЦ;
    2: ЕСЛИ (Б — А БР Е), ТО
        НАЧАЛО Х := (А + Б)/2; НА 1 КОНЕЦ; ВЫХОД
    КОНЕЦ; ЕСЛИ (Р = 1), ТО
        НАЧАЛО В := У; Х := Б; Р := Р + 1; НА 1 КОНЕЦ
        ИНАЧЕ ЕСЛИ (У × В > 0), ТО СТОП
            ИНАЧЕ НАЧАЛО С := У; Р := 0; НА 2 КОНЕЦ;
КОНЕЦ ВЫРЛАХ();
```

Selle protseduuri üksikasjalikuma analüüsimise jätame lugejale. Märgime ainult, et reserveeritud sõnaga СТОП on siin tähistatud operaator, mis peatab arvuti (juhul kui vaadeldav meetod pole rakendatav). Samuti jätame lugejale ka järgmise protseduuri analüüsimise.

```
ПРОЦЕДУРА СИМПЛЕКС (Н, М, Е, С, А[,]; Б[], Р, Т);
НАЧАЛО ПРИМЕЧАНИЕ. See on ALGOL-programm niisuguste lineaarsete
                   planeerimisülesannete lahendamiseks, kus tundma-
                   tute arv pole suurem kui 70 ja kitsenduste arv
                   pole suurem kui 30;
ЦЕЛЫЙ (Б[], В[], И, Й, К, Л, М, Н, Т); ЛОГИЧЕСКИЙ Р;
МАССИВ (В[1 : 40], Г[0 : 40], Ф[0 : 30]);
    ПРИМЕЧАНИЕ. Siin on M kitsenduste arv, M + N — tundmatute arv,
                A — võrrandisüsteemi ja sihifunktsiooni kordajatest
                moodustatud maatriks, E — väike arv (arvutuste täp-
                sus), C — suur arv, B — alglahendis nulliga võrduvate
                vabade tundmatute indeksitest moodustatud vektor, И
                ja Й kasutatakse maatriksi elementide tähistamisel in-
                deksitena, P on muutuja, mille väärtus näitab, kas
                antud ülesandele leiti optimaalne lahend või mitte;
    ДЛЯ Й := (1, 1, Н) ЦИКЛ В[Й] := Й; Б[0] := 0;
    ДЛЯ И := (1, 1, М) ЦИКЛ Б[И] := Н + И;
    ПРИМЕЧАНИЕ. Nende operaatoritega moodustati vektorid B ja Б;
01: Х := —Е; ДЛЯ Й := (1, 1, Н) ЦИКЛ
        НАЧАЛО ЕСЛИ (А[0, Й] < Х), ТО
            НАЧАЛО Л := Й; Х := А[0, Й] КОНЕЦ
        КОНЕЦ; ЕСЛИ (Х = —Е), ТО
            НАЧАЛО Р := 1; ВЫХОД КОНЕЦ;
    ПРИМЕЧАНИЕ. Eelnevate operaatorite teostamisel leiti maatriksi A esi-
                mesest reast kõige suurema absoluutväärtusega nega-
                tiivne element. Kui selles reas negatiivseid elemente
                polnud, loeti ülesanne lahendatuks, omistati muutujale
                P väärtus 1 (tunnusena, et leidus optimaalne lahend)
                ja väljuti protseduurist;
    Х := С; ДЛЯ И := (1, 1, М) ЦИКЛ
        НАЧАЛО ЕСЛИ (А[И, Л] > Е), ТО
            ЕСЛИ (А[И, О]/А[И, Л] < Х), ТО
                НАЧАЛО К := И; Х := А[И, О]/А[И, Л] КОНЕЦ
```

КОНЕЦ; ЕСЛИ (Х = С), ТО
НАЧАЛО Р := 0; Т := В[Л]; ВЫХОД КОНЕЦ;
ПРИМЕЧАНИЕ. Nende operaatoritega leiti jagatiste А[И, О]/А[И, Л] (И = 1,2, . . . , М) seast kõige väiksem positiivne jagatis. Kontrolliti, kas ülesanne on lahenduv. Kui ülesanne polnud lahenduv, siis omistati muutujale Р väärtus null, muutujale Т selle tundmatu indeksi väärtus, mida võib piiramatult suurendada ja väljuti protseduurist;
Х := А[К, Л]; ДЛЯ Й := (0, 1, Н) ЦИКЛ
НАЧАЛО Г[Й] := А[К, Й]/Х; А[К, Й] := 0.0 КОНЕЦ;
Г[Л] := 1.0/Х; ДЛЯ И := (0, 1, М) ЦИКЛ
НАЧАЛО Ф[И] := А[И, Л]; А[И, Л] := 0.0 КОНЕЦ;
Ф[К] := —1.0; ДЛЯ И := (0, 1, М) ЦИКЛ
НАЧАЛО Х := Ф[И]; ДЛЯ Й := (0, 1, Н) ЦИКЛ
А[И, Й] := А[И, Й] — Г[Й] × Х;
КОНЕЦ;
ПРИМЕЧАНИЕ. Eelnevate operaatorite täitmisel teostati ettenähtud teisendused maatriksi А elementidega;
И := В[Л]; В[Л] := Б[К]; Б[К] := И; НА 01;
ПРИМЕЧАНИЕ. Nende operaatoritega vahetati ühe vaba tundmatu ja baasitundmatu indeksid. Alustatakse lahendamise uut sammu operaatorist 01;
КОНЕЦ СИМПЛЕКС();

Vaadeldavas sisendkeeles kirjutatud ALGOL-programmides on teatud protseduure lubatud kasutada ilma, et neid oleks eelnevalt kirjeldatud vastavate protseduurikirjeldustega. Selliseid protseduure nimetatakse standardseteks ja need on määratud juba oma identifikaatoritega, mis kujutavad endast reserveeritud sõnu. Siinkohal nimetame ainult kahte standardset protseduuri: ЧИТАТЬ ja ПИСАТЬ. Esimest neist kasutatakse ülesannete algandmete salvestamisel elektronarvutisse, teist aga vastuste väljastamisel.

* * *

Toodud lühike ülevaade ALGOL-programmide koostamisega seotud küsimustest ei hõlma kaugeltki kõiki neid üksikasju, mida programmeerimisel on oluline teada. Neil, kes soovivad põhjalikumalt tundma õppida kirjeldatud keelt ja ALGOL-programmide koostamise metoodikat, soovitame tutvuda järgmiste raamatutega:

1. Мак-Кракен, Д. Д., Программирование на АЛГОЛе. М., 1964.
2. Лавров, С. С., Универсальный язык программирования. М., 1964.
3. Корьюс, А., Описание входного языка системы автоматизации программирования. Труды Вычислительного Центра ТГУ, 5, Тарту, 1965.

KALENDRILISE PLANEERIMISE ÜLESANNETE MATEMAATILINE LAHENDAMINE

Ü. Kaasik, R. Mullari

Tänapäeva üldiselt kiire tehnilise progressi juures on tootmise juhtimise meetodid ikka veel paljuski jäänud möödunud sajandi tasemele. Selle vastuolu tõttu ongi matemaatiliste meetodite ja elektronarvutite rakendamine tööstusettevõtete töö kalendrilise planeerimisega seotud ülesannete lahendamisel eriti aktuaalseks muutunud. Vastavate uurimustega tegelevad praegu paljud instituudid ja laboratooriumid üle kogu maailma.

TRÜ arvutuskeskuses hakati kalendrilise planeerimise ülesannete matemaatilise lahendamisega tegelema juba 1960. aastal. Uurimistöö käigus on korduvalt tulnud ümber hinnata nii ülesannete endi esialgset matemaatilist formuleerimist kui ka selle alusel väljatöötatava uue planeerimissüsteemi praktikasse rakendamise sobivaid mooduseid. Järgnevalt peatumegi veidi mõnel olulisemal järeldusel, millele TRÜ arvutuskeskuses on jõutud ja mis põhijoontes ka iseloomustavad loodavat planeerimissüsteemi.

1. Üleminek järkjärgulisusest

Vähegi suurema tehase töö operatiivne juhtimine ja sellele aluseks olev kalendriline planeerimine on seotud väga paljude tingimuste-asjaolude jooksva arvestamisega, s. t. suurte informatsioonihulkade kiire läbitöötamisega, mis on täielikult jõukohane vaid kaasaegsetele elektronarvutitele. Et tegelikult tehaste tööd ikkagi juhitakse, ja praegu põhiliselt elektronarvutite abita, siis on see võimalik ainult informatsiooni äärmiselt jämeda läbitöötamise teel, inimmõtlemise intuitiivseid vorme kasutades.

Osutub aga, et nn. kogemuslik-intuitiivseid planeerimismeetodeid tuleb kasutada mitte ainult enne elektronarvutite ja matemaatiliste meetodite rakendamist, vaid küllaltki pikka aega ka nendega samaaegselt, läbipõimunult. Nimelt peab üleminek matemaatiliste meetodite ja elektronarvutite kasutamisele toimuma järkjärguliselt, ja seda mitte ainult puhttehnilistel põhjustel. Selle poolt räägivad ka mitmed enam põhimõttelist laadi asjaolud.

Operatiivse juhtimise kogemuslik-intuitiivsete meetodite kasutamisel on küllaltki suur osa vajalikust informatsioonist salvestatud vaid inimese mälus; selline informatsiooni salvestamise viis on antud juhul tunduvalt ökonoomsem kõikidest muudest viisidest. Elektronarvutite rakendamine aga eeldab (vähemalt tänapäeval), et kogu vajalik informatsioon oleks registreeritud rangelt formaliseeritud ja korrastatud kujul. Paraku pole formaliseeritus ja korrastatus intuitiivsete mõtlemisvormide kasutamisel aga inimmälule kaugeltki omane. Siin on peaaegu võimatu välja selgitada isegi seda, millist informatsiooni ühele või teisele arvamusele jõudmiseks kasutati. Sellepärast tuleb matemaatiliste meetodite juurutamise perioodil paratamatult lähtuda vägagi puudulikust põhiinformatsioonist.

Kasutatava informatsiooni ebatäielikkus väljendub tavaliselt selles, et matemaatiliste meetodite rakendamisel kalendrilisel planeerimisel selgub järjest uusi tegelikkuses esinevaid asjaolusid, mida kas pole vastavate andmete puudumisel seni üldse veel arvesse võetud või on arvestatud valesti. Samal ajal aga oskavad praktikud neid asjaolusid oma kogemustele tugineva intuitsiooni abil vähemalt teatud määralgi vastuvõetavalt arvestada. Seetõttu ei või sugugi kindel olla, et rakendatavad matemaatilised planeerimismeetodid oleksid otsekohe suutelised edukalt konkureerima kogemuslik-intuitiivsete meetoditega.

Niisugust olukorda arvestades saabki täielikult või osaliselt automatiseeritud ja praktikas edukalt rakendatavat juhtimissüsteemi luua vaid järk-järgult, paljuski juhindudes selle süsteemi üksikute osade tegeliku juurutamise käigus saadavatest kogemustest. Sealjuures osutub nähtavasti paratamatuks, et süsteemi täiendamisel tuleb tema varem kasutusele võetud osi pidevalt ümber teha ja parandada.

Matemaatiliste meetodite kasutuselevõtmise algperioodil, kui olemasolev informatsioon on eriti puudulik, tuleb loodavasse süsteemi lülitada üsna rohkelt mitmesuguseid kogemuslik-intuitiivselt saadud hinnanguid ja normatiive (detailide tootmistsükli keskmine pikkus, töödeldavate partiide sobivad suurused jms.). Nagu kogemused näitavad, iseloomustavad need tegelikku tootmist tavaliselt tunduvalt paremini, kui reaalsust seni vaid ühekülgselt peegeldavate matemaatiliste valemite abil saadud suurused. See tähendab, et valemite kasutamisega ei tohi liialdada — teaduslikult põhjendatud valemeid mitmesuguste planeerimiseks vajalike suuruste leidmiseks on sageli võimalik saada alles praktikute poolt intuitiivselt määratud suuruste järkjärgulisel täpsustamisel nende tegeliku kasutamise käigus.

Kõigest öeldust järeldubki tootmise planeerimise ja juhtimise järkjärgulise automatiseerimise loomulik tee. Selle asemel, et algusest peale iga hinna eest püüda võimalikult täielikult rakendada matemaatilise planeerimise klassikalisi meetodeid (lineaarne planeerimine jms.), osutub hoopis otstarbekohasemaks koondada jõupingutused järgmistesse suundadesse.

Kõigepealt tuleb viivitamatult automatiseerida need planeerimise ja operatiivse juhtimise osad, kus olemasolev informatsioon seda vähemalt teatud headusega võimaldab (olgu siin kasutatavad «matemaatilised meetodid» kasvõi kõige elementaarsema aritmeetika tasemel). TRÜ arvutuskeskuses näiteks alustati tehases olevate seadmete keskmise koormatuse ja teiste analoogiliste näitajate süstemaatilise arvutamisega. Tootmise juhtimise süsteemi see veel muidugi ei muuda, kuid võimaldab siiski kogemuslik-intuitiivsesse juhtimisse sisse viia mõningaid täpsustusi, formaliseeritud elemente.

Järgmiseks etapiks valiti TRÜ arvutuskeskuses tehase tsehhide igakuiste tootmisülesannete mehhaniseeritud koostamine, mille kaudu juba teatav osa operatiivsest juhtimisest langeb elektronarvutile. Ka siin on kasutatav matemaatiline aparaat esialgu veel üsna lihtne. Seoses koostatud tootmisülesannete tegelikul rakendamisel saadavate kogemustega selguvad aga (juba formaliseeritud kujul) järjest uued ja uued sõltuvused tehase tööd iseloomustavate mitmesuguste näitajate vahel. Nende sõltuvuste järkjärguline arvestamine tootmisülesannete koostamisel ja edasi juba tehase töö operatiivsel juhtimisel üldse on aga lahutamatult seotud kasutatava matemaatilise aparaadi pideva täiustamisega kaasaja kõrgeima tasemeni.

Meetodite järkjärgulise täiustamise käigus toimub ühtlasi niisuguste tootmist iseloomustavate suuruste võimalikult täpne määramine, mida tavaliselt saadakse vaid praktikute intuitsioonile toetudes. Ka selles valdkonnas saab muide kasutada elektronarvuti abi — nii rohkete faktiliste andmete statistilisel läbitöötamisel kui ka tehtud järelduste kontrollimisel. Nagu juba öeldud, peab selliste põhinäitajate määramine toimuma käsikäes planeerimise järkjärgulise automatiseerimise ja «matematiseerimisega».

2. Optimaalsuse kriteeriumist

Matemaatiliste planeerimisülesannete klassikalises sõnastuses [1] on eeldatud teatava täpselt määratud sihifunktsiooni olemasolu. Selle funktsiooni väärtus n.-ö. mõõdab koostatava plaani headust, annab kriteeriumi, mille järgi otsustatakse plaani optimaalsuse üle.

Paljudes majanduslikes probleemides ei valmista sihifunktsiooni leidmine erilisi raskusi. Tehasesisese planeerimisega seotud ülesannete korral pole aga olukord enamasti sugugi nii lihtne. Nimelt ei suuda tänapäeva majandusteadus veel kaugeltki

[1] Lineaarse planeerimisülesande sõnastuse võib leida näiteks kogumikust Matemaatika ja kaasaeg, II, lk. 34—35.

üheselt määrata, millise kriteeriumi järgi tuleks otsustada tehasesisese planeerimise optimaalsuse üle, mida seada tehase töö eesmärgiks. Nii ongi praegu kasutusel terve rida näitajaid, mille järgi hinnatakse tehase tegevust: väljalastava toodangu hulk (üldmaht ja nomenklatuur), toodangu kvaliteet, omahind jne. Kõigi nende näitajate optimaalset väärtust pole aga reeglina võimalik üheaegselt saavutada. Võimalik on vaid teatav kompromiss nende vahel. Milline see kompromiss peaks olema, s. t. kuidas näeb välja vastav sihifunktsioon, seda võib praegu vaid väga ligikaudselt oletada.

Olgu näiteks plaani koostamisel tarvis arvestada ülalnimetatud kolme faktorit: toodangu hulka, kvaliteeti ja omahinda. Plaani headust mõõtva sihifunktsiooni kohta võib siis muidugi väita, et see sõltub nendest faktoritest, et ta peab olema esimese kahe suhtes kasvav ja viimase suhtes kahanev funktsioon. Majanduslikke seoseid lähemalt uurides saab anda veel teisigi nõudeid, mida see funktsioon peab rahuldama, kuid üheselt teda nende nõuetega määrata siiski ei õnnestu.

Seega saab meie teadmiste praeguse taseme juures määrata vaid sihifunktsiooni üldise kuju, s. t. teatava vägagi laia funktsioonide klassi, kuhu ta peab kuuluma. Sealjuures iga funktsioon sellest klassist on ühesuguse õigusega võetav sihifunktsiooniks.

Muidugi, matemaatiliste planeerimis- ja juhtimismeetodite järkjärgulise juurutamise käigus (ja põhiliselt sellisel viisil) see klass üha kitseneb vastavalt meie teadmiste kasvule. Pole aga alust loota, et see funktsioonide klass niipea kahaneks üheainsa (konstantse kordaja ja liidetava täpsuseni määratud) sihifunktsioonini. Ja kas ta üldse kunagi (kasvõi piirilgi) võib üheks funktsiooniks kahaneda, on omaette probleem. Vaevalt me näiteks usume, et eksisteeriks ilu või headuse kvantitatiivselt täpselt ja üheselt määratavad kriteeriumid (s. t. vastavad sihifunktsioonid). Ei ole küllaldast alust arvata, et planeerimisülesannetes määravaks oleva üldmajandusliku kasu kriteeriumiga, mis kokkuvõttes tähendab ühiskonna liikmete heakäekäigu nõuet nüüd ja tulevikus, peaks olema teisiti.

Seega tuleb lugeda täiesti loomulikuks sellist matemaatilise planeerimise ülesande formuleeringut, kus antud kitsendusi rahuldavate plaanide hulgast tuleb leida selline, mis annaks maksimaalse väärtuse kasvõi ühelegi funktsioonile antud funktsioonide klassist.

Meie teadmiste praeguse taseme juures on tehase tööd iseloomustavate näitajate seas üheks kõige ebamäärasemaks just ajafaktori osa. See aga tähendab, et tehase töö kalendrilise planeerimise ülesannetes on võimalike sihifunktsioonide hulk eriti lai. Seetõttu leidub suur hulk kõige erinevamaid kalenderplaane ja tehase töö operatiivse juhtimise mooduseid üldse, mida on võimalik mingis mõistlikus mõttes optimaalseks tunnistada. Ja kui arvestada veel meie kasutuses oleva informatsiooni äärmist puudulikkust üldse (vt. p. 1), leidub otse määratu hulk kõige erinevamaid kalenderplaane, mida mingis vastuvõetavas mõttes võime lugeda optimaalseteks.

Sellises olukorras muutub aga optimiseerimise probleem tehase kalenderplaanide koostamisel esialgu hoopis teisejärguliseks. Töö juhtimise järkjärgulise formaliseerimise ning sellest välja kasvava mehhaniseerimise ja automatiseerimise kõrval omandab keskse koha kõigi kalenderplaanidele esitatavate oluliste nõuete ja tingimuste, samuti ajafaktori osa järkjärguline väljaselgitamine. Alles selle tulemusel võib optimiseerimise probleem tehase töö kalenderplaanide koostamisel ning töö operatiivsel juhtimisel samm-sammult esile tõusta ja keskseks probleemiks muutuda.

3. Juhuslikkuse arvestamisest

Kalendrilise planeerimise ülesannete üheks iseärasuseks on juhuslikkuse kui objektiivselt eksisteeriva faktori arvestamise möödapääsmatus. Tootmises esineb paratamatult mitmesuguseid juhuslikkusi (tööpinkide avariid, materjalide puudumine, praak, tööliste haigestumine, kõrvalekaldumine keskmistest normatiividest jne.), ette saab nende mõju hinnata vaid teatava tõenäosusega. Ilma neid juhuslikkusi arvesse võtmata pole aga võimalik saada praktikas edukalt rakendatavaid tulemusi.

Näiteks ei saa kuidagi nõustuda üsna laialt levinud püüdega koostada pikema perioodi (terve kuu) peale ette jäigad tootmisgraafikud. Mitmesuguste juhuslikkuste mõju tagajärjel pole need graafikud praktikas peaaegu kunagi realiseeritavad. Kui aga nõuda niisugustest pikaajalistest graafikutest võimalikult täpset kinnipidamist, siis reeglina see ei abista, vaid segab tootmist.

Öeldut arvestades tundub hoopis loomulikumana koostada pikema aja peale ette mitte rangeid, vaid n.-ö. orienteerivaid graafikuid, kus kõik juhuslikud suurused on arvesse võetud oma keskväärtuste näol. Tootmise tegelik käik ei ühti sel juhul koostatud graafikuga: vahel ta ennetab selle, samas aga jääb maha. Piltlikult öeldes: tegelik tootmine kõigub oma orienteeriva graafiku kui teatava tasakaaluasendi ümber. Nende kõikumiste suurust ja iseloomu saab sealjuures hinnata vaadeldavate juhuslike suuruste jaotusseaduste kaudu (siit tuleneb ühtlasi vajadus tootmises esinevate juhuslike suuruste detailseks statistiliseks uurimiseks).

Mis puutub jäikadesse kalendrilistesse graafikutesse, siis neid on mõtet koostada ette vaid suhteliselt lühikesteks ajavahemikeks (paariks-kolmeks päevaks). Lühikeste ajavahemike jooksul pole nimelt juhuslikkuste mõju nii märgatav ja neid võib erilist viga tegemata ignoreerida. Niisuguse lühiajalise graafiku saab igaks perioodiks koostada orienteeriva graafiku ja tegelikult kujunenud olukorra baasil.

Sellise kaheetapilise kalendrilise planeerimise meetodit täpsustataksegi praegu TRÜ arvutuskeskuses. Orienteeriva graafiku koostamine toimub selle meetodi kohaselt elektronarvutil, lühiajaliste täpsete graafikute koostamine aga «käsitsi» — tehase dispetšerite ning meistrite poolt. Niisugust tööjaotust arvestades püütaksegi orienteeriv graafik koostada selliselt, et tegeliku töö korraldamine selle järgi oleks võimalikult lihtne.

Millist töö korraldamise metoodikat lugeda lihtsaks, see sõltub muidugi antud momendi tehnilistest ja teoreetilistest võimalustest (ideaalselt lihtne on selline metoodika, mille korral midagi pole vaja teha!). Praegu on igatahes otsustatud lugeda lihtsaks järgmist reeglit: alati, kui on võimalik alustada uut tööd, tuleb kõikide võimalikkude tööde hulgast valida see, mille alustamise tähtaeg orienteerivas graafikus on kõige varasem; kui selliseid töid on mitu, siis valida neist vähem töömahukas. Seda reeglit silmas pidades toimub ka orienteeriva graafiku koostamine. Nimelt määratakse tööde orienteeriva alustamise tähtajad nii, et sellise orienteeriva graafiku ja äsja sõnastatud reegli järgi tööd korraldades tegeliku tootmise keskmine kõrvalekaldumine orienteerivast graafikust oleks väike.

4. Tegelikkuse modelleerimisest

Nagu ülalpool juba korduvalt rõhutasime, peab tootmise efektiivseks juhtimiseks põhjalikult tundma mitmesuguseid seaduspärasusi ja sõltuvusi. Selgitasime ka, et neid sõltuvusi ei ole võimalik määrata ainult aprioorsete «terve mõistuse» kaalutluste või matemaatiliste uurimuste abil, vaid et siin on tingimata vajalik vahetu kontakt tegelikkusega matemaatiliste meetodite järkjärgulisele rakendamisele tugineva praktika näol. Muidugi ei välista see igasuguste aprioorsete matemaatiliste uurimuste võimalikkust ja vajalikkust, kuid me peame arvestama, et need uurimused võivad anda positiivseid tulemusi ikkagi ainult piiratud ulatuses, s. o. tootmise mõningate külgede väljaselgitamisel.

Aga ka sellisel juhul, kui meie kasutuses olevate formaliseeritud ja korrastatud teadmiste hulk on juba piisav, võime jääda tõsistesse raskustesse. Oletame näiteks, et oleme koostanud aprioorse matemaatilise mudeli, kus võrrandite kujul on kirja pandud kõigi oluliste faktorite otsene mõju tootmise meid huvitavatele külgedele, kuid samuti ka seosed nende faktorite vahel. Kõik kaudsed mõjud ja tootmise vaadeldavates külgedes avalduvad seaduspärasused on siis leitavad saadud võrrandisüsteemi lahendamisel. Kuid tootmise üksikutele külgedele olulist mõju avaldavate faktorite arv võib sageli osutuda nii suureks ja esinevad seosed nii keerulisteks, et vastava süsteemi lahendamiseks oleme sunnitud tegema tegelikku olukorda tunduvalt lihtsustavaid lisaeeldusi. Selle tagajärjel väheneb aga tulemuste kvaliteet kuni nende võib-olla et isegi täieliku praktilise kõlbmatuseni.

Selline olukord sunnib meid otsima teist teed, pöörduma praktikasse, kus tootmises avalduvaid seaduspärasusi saab leida tootmise käigu jälgimisel. Selleks tuleb koguda suur hulk tootmise käiku iseloomustavate näitajate kokkukuuluvaid väärtusekomplekte ja leida vastava matemaatilise töötlemise teel nende näitajate vahelised seosed. Kuid ka siin on oma «aga». Nimelt tuleb meil tootmise käigu lihtsal jälgimisel piirduda ainult *olemasolevate* tingimuste ja olukordadega. Meie andmed kannavad piiratuse ja ühekülgsuse pitserit ja nende põhjal saadavad seosed on seega ainult äärmiselt ligikaudselt kasutatavad «uute» olukordade kirjeldamiseks. Pealegi kulub vajaliku hulga andmete saamiseks tootmise käigu tegelikust jälgimisest küllaltki pikk aeg.

Kõige loomulikumaks väljapääsuks sellisest ummikust näib olevat tootmise meid huvitavate külgede küberneetilise mudeli koostamine, kus tootmist imiteeritakse elektronarvutil üksikute tootmisprotsesside ja -operatsioonide kestuse, järgnevuse ja kooskõlastatuse seisukohalt. Mitmesuguste näitajate kokkukuuluvad väärtused saadakse siis küberneetilise mudeli «töö» jälgimisel. Sellist mudelit on võimalik «töösse rakendada» suvalises režiimis, millega me vabaneme saadavate andmete ühekülgsusest. Pealegi saab niisugusel viisil koguda suure hulga andmeid erakordselt lühikese ajaga. Modelleerimise õigsust saab siinjuures hinnata tegelikkuse ja mudeli andmete võrdlemisel (kui need on kogutud teineteisele vastavatel töörežiimidel).

TRÜ arvutuskeskuses on modelleerimismeetodil lahendatud mitmed ülesanded. Näiteks tuli välja selgitada, kuidas sõltuvad põlevkivikarjääri töötulemused kaevandusmasinate kompleksis kasutatavate masinate arvust ja tehnoloogilistest parameetritest. Antud juhul kujunes vastava matemaatilise mudeli koostamine, kõnelemata selle lahendamisest, lootusetult keeruliseks. Tootmise tegelikku käiku oli aga võimalik jälgida ainult ühe kindlate parameetritega kaevandusmasinate kompleksi korral, sest teistsuguseid masinaid ei olnud lihtsalt olemas. Seega polnud ülesannet üldse võimalik lahendada teisiti kui modelleerimise teel. Küberneetilise mudeli abil saadud tulemused võimaldasid aga teha põhjendatud ettepanekuid uute kaevandusmasinate projekteerimiseks.

Samasuguseid meetodeid rakendatakse ka kalendrilise planeerimise ülesande korral. Näiteks kasutatakse detailipartii tootmistsükli pikkuse määramisel ka küberneetilise mudeli abi. Kuigi kirjanduses on antud terve rida vastavaid valemeid, ei ole neis küllalt põhjendatult arvestatud tootmistsükli ühte olulist juhusliku iseloomuga komponenti — operatsioonidevahelist aega. Siin näib mudeli kasutamine tegeliku tootmise jälgimise ning praktikute intuitsiooni arvestamise kõrval olevat peaaegu et ainus tee kõigiti põhjendatud valemi saamiseks. Pealegi on praegusel etapil intuitiivne moment detailide tootmise organiseerimisel veel niivõrd tugev, et arvestamisele tulevad tingimused on «matemaatilisele» kirjeldusele suures osas kättesaamatud.

Analoogilisel viisil parandatakse ka teisi valemeid kalendrilise planeerimise jaoks vajalike suuruste leidmiseks. Samuti on küberneetiline modelleerimine ainus võimalik meetod väljatöötatud planeerimissüsteemi n.-ö. uute osade viimaseks kontrollimiseks enne nende tegelikku juurutamist.

«KAUBANDUSLIKKE» ÜLESANDEID

1. Kaks kaupmeest ostsid üheskoos 100 taalri eest sigu, makstes 5 sea eest 2 taalrit, ning lootsid nende edasimüümisel saada suurt kasu. Asjaolude muutumise tõttu olid nad aga sunnitud sead kiiresti sama hinna eest maha müüma. Nad jaotasid ostetud 250 siga omavahel, kusjuures ühele kaupmehele sai 125 paremat, teisele 125 halvemat looma. Esimene müüs oma sead kallimalt, andes kaks siga ühe taalri eest, teine aga kolm siga ühe taalri eest.

Esimene sai kiiresti 120 seast lahti ning kogus seega 60 taalrit. Sel ajal sai teine sama arvu loomade müügist aga 40 taalrit. Seega osutus, et kaupmehed olid müünud sigu keskmiselt sama hinna eest, nagu nad ostsid, kuid ometi said ostuhinna kätte juba siis, kui veel 10 looma oli müümata.

Ülesandeks on selgitada, missuguste loomadega selline kasulik tehing veel võimalik on.

2. Kaupluse, milles töötab m müüjat, tohib avada alles siis, kui kohal on vähemalt n müüjat ($n < m$), kusjuures pole oluline, missuguses osakonnas need müüjad töötavad. Et see oleks võimalik, otsustati panna kaupluse uksele k lukku, ning anda igale müüjale p võtit.

Kui väikesed võivad olla arvud k ja p selleks, et alati, kui kohal on n müüjat, saaksid nad kõigi võtmeid kasutades kaupluse avada, kuid ükski ($n-1$)-st müüjast koosnev grupp ei saaks oma võtmete abil kauplusesse pääseda? Anda ühtlasi võtmete jaotamise eeskiri!

* * *

Ühesugused metallrahad on paigutatud (lapiti) lauale nii, et igaüks puudutab täpselt kolme ülejäänutest. Kui suur on minimaalne arv rahasid, mille korral selline paigutus osutub võimalikuks? Ülesannet on soovitav lahendada ilma rahasid kasutamata; ühtlasi tuleks aga sirkli ja joonlaua abil valmistada ka vastav täpne joonis.

See ülesanne on võetud ajakirjast «Наука и жизнь» (№ 5, 1965. a., lk. 96). Juhime ainult lugejate tähelepanu sellele, et samas (lk. 158) toodud lahendus pole õige.

Täiendusi koolimatemaatikale

MATEMAATIKA ON KAUNIS

Rózsa Péter

Matemaatikadoktor professor Rózsa Péter on ungari tuntud naismatemaatik. Järgnevas avaldame tema ettekande, mille ta pidas 15. oktoobril 1963. a. Rostockis (SDV) keskkooliõpetajatele ja -õpilastele.[1] Loodame, et see innustab ka meie kooliõpilasi matemaatika saladustesse tungimisel.

Toimetus.

Minu kallid kuulajad!

Ma olen siin selleks, et püüda teile edasi anda oma veendumust matemaatika ilust. Kui ma alustasin oma õpinguid, kahtlesin ma väga, kas olen matemaatika vääriline. Siis ütles üks kolleeg mulle otsustava sõna: mitte mina ei ole matemaatikaga tegelemise vääriline, vaid matemaatika on väärt, et temaga tegelda. Oma väärilisuses kahtlen ma sageli nüüdki, hoolimata saadud auhindadest ning professuurist, kuid mul ei teki kunagi kahtlust selles, et midagi paremat ja ilusamat poleks ma suutnud teha, kui tegelda matemaatikaga.

Üks asjaolu ei võimalda mul aga siin oma mõtetele vaba voli anda. Nimelt olen ma kõik, mis mul matemaatika kohta on öelda mitte- ja veel-mitte-matemaatikutele, kirja pannud raamatus, mis on tõlgitud ka saksa keelde. Kuna Saksa Demokraatlikus Vabariigis on ilmumisel juba selle raamatu kolmas trükk, siis ma oletan, et küllap on mõned kuulajatest seda lugenud. Sellepärast ma otsustasingi mitte rääkida sellest, millest on juttu raamatus, kuigi polnud sugugi kerge leida uusi mõtteid selle teema kohta ja leitudki on omavahel vaid nõrgalt seotud. Praegu ei saa aga enam midagi muuta isegi siis, kui ükski kuulajatest ei ole seda raamatut lugenud, sest minu saksa keele oskus pole improviseerimiseks küllaldane. Igal juhul soovitan aga lugeda oma raamatut «Mäng lõpmatusega»[2] — selles leidub matemaatika ilu kohta rohkem materjali kui käesolevas ettekandes.

---

[1] Ettekande tõlkis (mõningate kärbetega) H. Espenberg ajakirjast «*Mathematik in der Schule*», 1964, nr. 2, lk. 81—90.

[2] Originaal: Péter, R., *Das Spiel mit dem Unendlichen*. Leipzig, 1957.

Kindlasti kahtlevad mõned juba algusest peale selles, kuidas saab kuiva «ükskordühte» ilusaks nimetada? Minu eesmärgiks ongi näidata, et matemaatika pole kuiv ega ole ka üksnes «ükskordüks», vaid et tal on isegi kunstiga palju sugulust.

Esiteks on suur eksiarvamus, et matemaatik peamiselt arvutab. Oma õpilaste hulgast (alates kümnendast eluaastast kuni ülikooli esimese kursuseni) olen ma matemaatiliste võimetega õpilasi välja valinud järgmise lõbusa ülesandega. Meil on kaks ühesugust klaasi. Ühte kallame veini, teise sama palju vett (mitte päris täis). Siis võtame ühe lusikatäie veini esimesest klaasist, valame teises klaasis oleva vee hulka ja segame. Seejärel paneme ühe lusikatäie seda segu esimesse klaasi veini hulka. Selle tulemusena on veeklaasis natuke veini ja veiniklaasis pisut vett. Kumba on rohkem: kas puhast veini veeklaasis või puhast vett veiniklaasis?

Oluline ei ole siin mitte õige vastuse leidmine (ülesandes peitub väike lõks, millesse paljud langevad: arvatakse, et vette on kallatud lusikatäis veini, veini hulka aga valati lusikatäis segu, järelikult puhast vett vähem kui lusikatäis), vaid asi seisneb selles, kas rahuldutakse järgmise seletusega.

Veinis on sama palju vett kui vees veini. Vaatame näiteks veiniklaasi alguses ja lõpus, arvestamata seda, mis toimus vahepeal. Vedelikku on selles klaasis lõpuks sama palju nagu alguses. Erinevus on ainult selles, et ta on kaotanud natuke puhast veini (see on nüüd veeklaasis) ja võitnud veidi puhast vett. Oleks kaotus olnud suurem või väiksem kui võit, siis peaks temas vedelikku olema vähem või rohkem kui alguses. Järelikult on kaotus — vette viidud vein — sama suur kui võit — juurde saadud vesi.

Need, kes mõtlevad vähem matemaatiliselt, ütleme, näiteks füüsikud, ei rahuldu veel selle loogiliselt selge seletusega. Neid rahuldab vastav arvutus. Kui ühes lusikatäies segus on näiteks kolm neljandikku vett ja üks neljandik veini, siis toome me lusikatäiest veinist, mis vette kallati, ühe neljandiku jälle tagasi. Nii et kui me tõstsime kolmveerand lusikatäit vett veini hulka, jäi ka vette ainult kolmveerand lusikatäit veini.

Nagu näha, on matemaatikutele iseloomulik mitte arvutamine, vaid selge mõtlemine: oskus mitte arvestada ebaolulisi asju.

Väike kõrvalmärkus: arvestamata võib jätta muidugi sellised asjad, mis ei puuduta käsitletava küsimuse olemust. Väikesed õpilased kipuvad ütlema: «Rööpküliku diagonaalid on võrdsed. See on õige kõigi rööpkülikute korral, välja arvatud kaldnurksed.» Selliste vigade puhul ma esitan alati lõbusa küsimuse: «Mille poolest erinevad Barbarossa ja Napoleon?» Vastuseks on: «Mitte millegi poolest. Kummalgi ei ole punast habet, välja arvatud Barbarossal».

Nii, see oli vaid väike kõrvalmärkus.

Teine ülesanne, milles arve enam üldse ei esine, mis nõuab lahendamiseks ainult abstraheerimisoskust, võimet küsimuse suhtes ebaolulisi asju mitte arvestada (ja seetõttu ongi ülesanne matemaatiliselt mõtlejate jaoks), on järgmine.

Rong sõidab läbi tunneli. Kupee avatud aknast sissetulev suits teeb tahmaseks kõigi kolme reisija ninad. Nad vaatavad üksteist ja naeravad. Igaüks mõtleb, et just tema on õnnelikule kohale istunud ja tema nina on puhtaks jäänud. Kuidas taipab kõige arukam neist kolmest, et ka tema nina on tahmane? Seejuures saab ta tugineda ainult järgmisele kolmele eeldusele: 1. midagi muud naerda ei ole; 2. kumbki ülejäänutest ei lõpeta naermist; 3. kui keegi teaks, et ta ise on naeruväärne, siis ta ei naeraks.

Lahendus ei ole eriti lihtne, kuid põhiline pole mitte see, kas mõni leiab iseseisvalt lahenduse, vaid see, et mittematemaatiliselt mõtlejad ei piirdu tehtud eeldustega. Mind on sageli pahandatud selliste lahendustega nagu: «Kõige arukam vaatab peeglisse» või «Kõige arukam mõtleb: teiste ninad on tahmased, miks peaksin mina erandiks olema». Õige lahenduse saan ma kõige paremini jutustada esimeses isikus; andestage, et ma ennast kõige arukamana esitlen. Teiste nimed olgu näiteks Kurt ja Hans. Ma mõtlen järgmiselt: Kurdil on põhjust naerda, sest ta näeb Hansu tahmast nina. Aga ta näeb ka, et Hans naerab. Miks ei tule ta siis selle peale, et ka tema nina on tahmane? Muidu tema arvates Hans ei näeks midagi naeruväärset, välja arvatud juhul, kui ka minu nina on tahmane. Nii see olukord siis aga ongi, sest Hans naerab edasi ja ka Kurt ei lõpeta naermist, järeldades, Hansu naermisest, et ka tema nina on tahmane.

See, et tuginetakse kord juba kindlaks määratud eeldustele ning järelduste tegemisel peale nende muud midagi ei kasutata, ongi matemaatika aksiomaatilises ülesehituses põhiline. Selline süstemaatiline ülesehitus muutus eriti tähtsaks siis, kui niinimetatud «naiivses» matemaatikas tekkisid vastuolud. Selle juurde tulen ma aga veel tagasi. Siinkohal tahaksin märkida ainult seda, et aksioomidega ei saa kunagi haarata käsitletava objekti kõiki omadusi, vaid ainult mõningaid neist. Nii võibki juhtuda, et täiesti erinevad objektid, milledel on ainult mõned ühised omadused, rahuldavad samu aksioome. Siis öeldakse, et vaadeldaval aksioomide süsteemil on erinevaid «mudeleid». Näiteid selle kohta on toodud minu raamatus, mistõttu ma ei taha siin sellel lähemalt peatuda.

Abstraktsioon, millest ka siin juttu oli, etendab olulist osa kogu matemaatikas. Juba meie naturaalarvud on tekkinud abstraktsiooni teel. On teada algelisi rahvaid, kes kasutasid ümmarguste, lapikute jm. asjade loendamiseks erinevaid arvsõnu; kui neil on näiteks seitse sellist arvude jada, siis vajavad nad kümneni lugemiseks kokku 70 erinevat arvsõna. Aja jooksul kaotab üks neist jadadest oma erilise «värvingu» ja sel viisil muutuvad vastavad arvsõnad arvudeks. Näiteks ühe suguharu loendamisvahendiks olid lapikud konnakarbid ja esialgselt loendati seal lapikuid esemeid järgmiste sõnadega (vastavas keeles): «ükskonnakarp, kakskonnakarpi, jne.». Aja jooksul aga kadus täielikult konnakarpidega seotud tähendus, nii et nüüd tähendab «ükskonnakarp» lihtsalt «ühte», «kakskonnakarpi» lihtsalt «kahte» jne.

Igaüks võib ka ise jälgida, kuidas kujuneb välja arvu mõiste väikesel lapsel, kes meie silmade all kultuurinimeseks areneb. Kulub tükk aega, enne kui talle saab selgeks mõistete «kaks silma», «kaks jalga», «kaks pähklit» ühine omadus, nimelt nende arv. Hall tähis «2» on ainult paljude elavate kahtede sümboliks. Seda vaadates peaks meie silmade ette kerkima pilt sellest, kuidas maailma kõik paarid — kaks tuvi, kaks talle, kaks lõvi, aga ka kaks jalga, kaks sõna jne. — Noa laevale marsivad.

Selle peale võib öelda: jah, abstraktse arvu mõiste juurde on tõepoolest jõutud elavate, oma värvinguga asjade kaudu, aga edaspidi tegeleb matemaatika juba selle värvitu mõistega — arvuga. Kuid mida matemaatika ühe käega ära võtab, seda annab ta teise käega rikkalikult tagasi: maalib värvituks muutunud pildi ootamatute, uute toonidega. Kuus õuna, kuus kodujänest on näiteks palju huvitavamad kui nendest abstraheeritud arv kuus, mida kasutatakse loendamisel. Ent millise omapärase, huvitava tooni omandab see kuus, kui avastatakse, et ta on esimene täiuslik arv! Seda mõistet arvatavasti kõik ei tunne. Arvu pärisjagajaks on iga temast väiksem arv, millega ta ilma jäägita jagub; arvu nimetame täiuslikuks, kui ta on võrdne oma pärisjagajate summaga. Näiteks arvu 6 pärisjagajateks on arvud 1, 2, ja 3 ning tõepoolest:

$$1 + 2 + 3 = 6.$$

Avastamisrõõmu, mis on arvatavasti suurim inimlik rõõm, ei suuda ükski teine õppeaine pakkuda sellises ulatuses kui matemaatika. Koolilastelt, keda ma varem õpetasin, olen selles suhtes palju õppinud. Mul ei oleks näiteks kunagi mõttesse tulnud hakata kaheteistkümneaastaste tüdrukute klassis rääkima Eukleidese algoritmist, aga minu õpilased viisid mind ise selleni. Tahaksin sellest tunnist jutustada.

Me tegelesime sellega, et mina ütlesin kaks arvu ning õpilased leidsid nende suurima ühisteguri. Väikeste arvude korral läks see kiiresti. Ma nimetasid aga järjest suuremaid arve, et õpilased tunneksid raskust ning hakkaksid mingit meetodit nõudma. Ma mõtlesin, et selleks meetodiks kujuneb algteguriteks lahutamine.

Arvude 60 ja 48 suurima ühisteguri leidsid õpilased veel kergesti: «Kaksteist!» Aga üks tüdruk märkas: «See on ju sama palju kui 60 ja 48 vahe.»

«See on juhus», ütlesin ma ja tahtsin edasi minna. Aga nad ei lasknud mul jätkata: «Öelge meile, palun, selliseid arve, kus see nii ei ole.»

«Hästi. Ka 60 ja 36 suurimaks ühisteguriks on 12, aga nende vahe on 24.»

Uus vahelehüüe: «Siin on vahe suurimast ühistegurist kaks korda suurem.»

«Jah, see ei ole muidugi juhus. Arvude vahe ja ka summa jagub alati nende kõigi ühisteguritega.» Tõsi küll, see vajas üksikasjalikku selgitust, aga seejärel tahtsin ma juba tõepoolest edasi minna. Ometi ei saanud ma seda ikka teha. Üks tüdruk küsis: «Kas just selle põhjal ei saakski leida meetodit suurima ühisteguri leidmiseks?»

Muidugi saab! See ongi ju Eukleidese algoritmi põhiidee! Nii loobusin ma oma plaanist ning läksin õpilaste näidatud teed mööda.

Näiteks arvude 116 ja 36 suurima ühisteguri leidmine on seetõttu raske, et 116 on väga suur. Aga nüüd me teame, et suurim ühistegur peitub ka nende vahes, s. o. arvus 80, aga 80 on juba väiksem kui 116. Teiselt poolt, iga teguriga millega jaguvad 80 ja 36, jagub ka nende summa 116. Seega me võime arvude 116 ja 36 asemel leida hoopis arvude 80 ja 36 suurima ühisteguri. Kes ka neid arve liiga suureks peab, võib 80 asemel võtta 80 ja 36 vahe 44. Arvude 44 ja 36 suurimat ühisjagajat on juba palju lihtsam leida. Kes aga ka seda vaeva säästa tahab, võib 44 asemel võtta nende arvude vahe 8, seejärel 36 asemel arvude 36 ja 8 vahe 28, 28 asemel arvude 28 ja 8 vahe 20, 20 asemel arvude 20 ja 8 vahe 12 ja lõpuks 12 asemel arvude 12 ja 8 vahe 4. Et aga arvude 4 ja 8 suurim ühistegur on 4, seda näeb pimegi.

Nii said õpilased kätte soovitud meetodi: arve tuleb lahutamise teel vähendada nii, et suurima ühisteguri leidmine osutub lapsemänguks.

Loomulikult muutus korduv lahutamine tüdrukutele õige ruttu igavaks ja nad märkasid, et see ongi ülearune. Nii näiteks lahutasime me äsja 116-st kolm korda 36, kuni jäi järele 8. Siis lahutasime selle 8 neli korda 36-st kuni järele jäi 4. Järelikult võib mitmekordse lahutamise asemel jagada ning suurema arvu asendada jäägiga. Sellega ongi meetod leitud.

Tahaksin veel mainida, et andekatele õpilastele on matemaatikas jõukohane mitte ainult tuntud tulemuste uuestiavastamine. Ma tunnen õpilast, kes oli kaheteistkümneaastane, kui tema esimene uus matemaatiline tulemus (mis väljus koolimatemaatika raamidest) ilmus matemaatilises ajakirjas. Mõnel teisel alal oleks see vaevalt mõeldav.

Avastuste põhjuseks on ka see, et matemaatilises loomingus sisaldub alati rohkem, kui me ette oleme planeerinud. See on üheks ühiseks jooneks kirjandusteostega, mille tegelastel on omaenda elu, milles autor ei saa enam midagi muuta.

Inimene võttis loendamiseks kasutusele naturaalarvud, aga nendel on oma seadused, mida ta ette ei näinud ega saa ka enam muuta; ning matemaatikud näevad vaeva sellega, et neid avastada. Ka minu õpilased avastasid sageli mõndagi, millele ma polnud mõelnudki. Ma tahaksin selle kohta veel ühe näite tuua. Ma jutustasin oma armsaimas keskkooliklassis, et on olemas arvutuskunstnikke, kes lahendavad üllatava kiirusega keerulisi arvutusülesandeid, kuid aeglaselt arvutav matemaatik võib neid sageli ületada teatud matemaatiliste seoste tundmise tõttu. Muuseas tahtsin ma näidata, kuidas saab kiiresti arvutada summat

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6},$$

aga ühtlasi ka iga summat, mis saadakse järgnevate sama tüüpi liikmete liitmise teel. Ma palusin oma õpilasi vaadelda neid arve hoolikamalt. Lootsin, et mõni neist märkab, et

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1},$$

sest parempoolset avaldist ühisele nimetajale viies saame

$$\frac{n+1-n}{n(n+1)},$$

kus lugejaks jääb lihtsalt 1. Järelikult saab vaadeldud summat kirjutada kujul

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}.$$

Siin koonduvad kõik liikmed peale esimese ja viimase ning otsekohe võib öelda tulemuse:

$$1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}.$$

Üks tüdrukutest tegi aga hoopis teistsuguse tähelepaneku, millel ei ole küll midagi ühist kiire liitmisega, ent mis on iseenesest väga huvitav. Ta märkas, et toodud näites nimetajad

$$1\cdot 2,\ 2\cdot 3,\ 3\cdot 4,\ 4\cdot 5,\ 5\cdot 6,\ 6\cdot 7,\ 7\cdot 8,\ 8\cdot 9,\ 9\cdot 10,\ \ldots$$

annavad peale korrutamist reeglipäraselt korduvate lõppnumbritega arvud:

$$2\quad 6\quad 2\quad 0\quad 0\quad 2\quad 6\quad 2\quad 0\quad \ldots\ .$$

Niisuguse seaduspärasuse üldkehtivust pole tõepoolest raske tõestada; ehk on mõnel pärast ettekannet tahtmist selle üle järele mõelda. Selles sisaldub ka teatav mängumoment, mis on jällegi matemaatika ja kunsti ühiseks jooneks. Võib-olla tunnevad mõned kuulajad kunstnik Düreri vaselõiget «Melanhoolia», millel on kujutatud järgmine maagiline ruut:

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

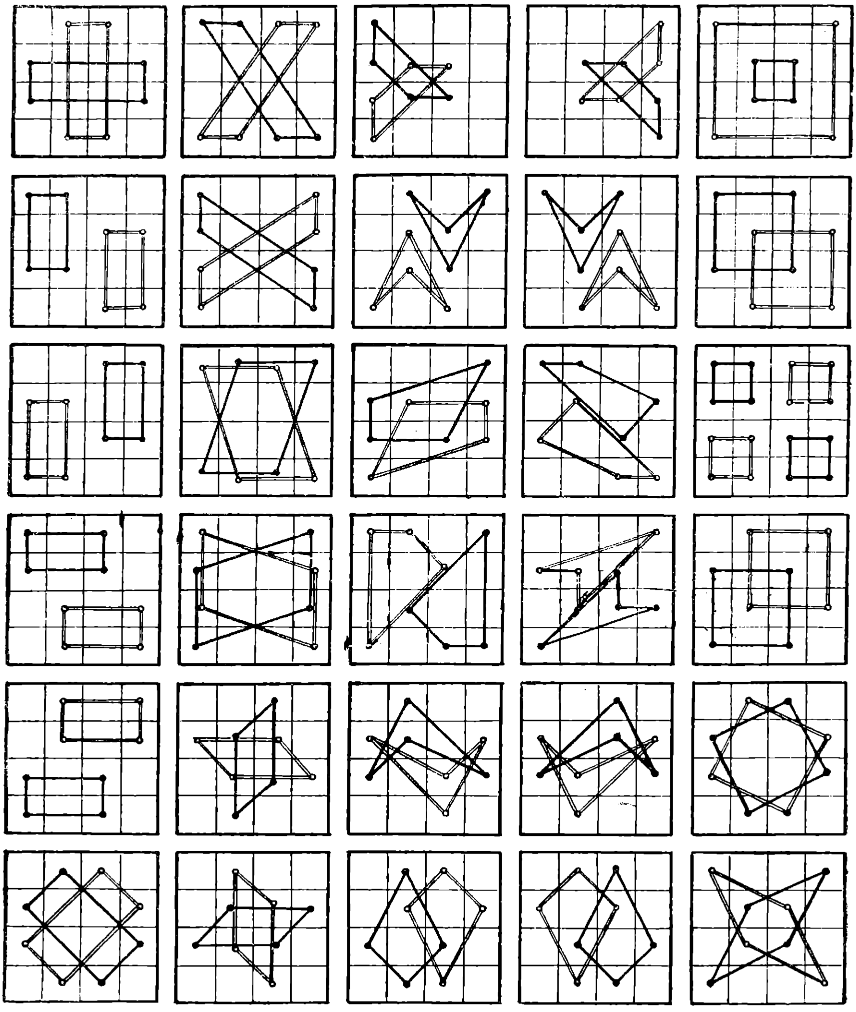
Märgitud aastaarv 1514 on pildi valmimise aasta. Ruutu nimetatakse maagiliseks, sest iga rea või veeru või diagonaali arvude liitmisel saame sama summa, nimelt 34. Ent see Düreri ruut on veelgi maagilisem. Kui moodustada näiteks nende nelja arvu summa, mis seisavad ruudu nurkades, siis saame samuti 34. Sama arvu saame ka järgmise lehekülje joonistel ruutu kujundatud nelinurkade tippudes asuvate arvude summaks. Seda peab igaüks muidugi ise järele kontrollima.

Niisiis varjab Düreri ruut endas ühiselt matemaatika ja kunsti mängumomenti.

Tahaksin rääkida ka ühest paradoksist, nn. Richardi antinoomiast, mis samuti sisaldab mõningal määral mängumomenti.

Kujutleme endale kirjutusmasinat, mis sobib kõigi eestikeelsete[3] tekstide jaoks. Eeldame, et sellega saab trükkida 95 erinevat märki, lugedes märkide hulka ka sõnavahe (tühiku). Kui selle masinaga hakataks trükkima, siis tuleks näiteks saja märgiga tekst enamasti välja mõttetuna; ent juhuslikult võib välja tulla ka mõistliku sisuga tekst. Kõigi võimalike saja märgiga tekstide hulgas esinevad näiteks kõik — nii õiged kui ka valed — abielukuulutused, sest nad koosnevad alati vähem kui sajast märgist, kusjuures nende lõppu võib tarbe korral paigutada nii palju tühikuid, et saaks kokku 100 märki. Siit on juba arusaadav, et saja märgiga tekste on väga palju, kuid mitte lõpmata palju. Esimese märgi valikuks on 95 võimalust, iga esimese märgi korral on teise märgi valikuks jälle 95 võimalust, seega kahe esimese märgi valikuks $95 \cdot 95$ võimalust jne. Nii näemegi, et saja märgiga tekste on 95^{100}, mis on suur, kuid lõplik arv. Nende tekstide hulgas esinevad ka naturaalarvude definitsioonid. Nii näiteks on arv 3 defineeritav järgmise tekstiga (millele

[3] Originaalis — saksakeelsete.



järgnevad sõnavahed): «Väikseim paaritu algarv». Kuid iga naturaalarvu ei saa defineerida sajast märgist koosneva tekstiga, sest naturaalarve on lõpmata palju. Vaatleme vähimat naturaalarvu, mida ei saa defineerida sajast märgist koosneva tekstiga. Ma defineerin: «Vähim naturaalarv, mida ei saa saja märgi abil defineerida». Võib kontrollida, et see definitsioon koosneb 58 märgist; kui nende järele trükkida 42 tühikut, saamegi täpselt 100 märki. Arvu, mida ei saa defineerida saja märgi abil, saab siiski defineerida saja märgi abil. See ongi Richardi antinoomia.

Selline paradoks annab juba märku, et matemaatika ei ole igav «ükskordüks».

Matemaatika aksiomaatilise ülesehituse eesmärgiks on just peamiselt selliste vastuolude väljalülitamine. Mõisted, milledest kõneldakse aksioomides, ei kujuta endast midagi konkreetset, vaid mistahes objekte, millel on aksioomides väljendatud põhiomadused. Salaja mõtleb aga igaüks, kes nendega tegeleb, konkreetsetele objektidele. Ma juba mainisin mitmesuguseid mudeleid, mis võivad rahuldada samu aksioome.

Kunsti ja matemaatika ühistest joontest tahaksin ma mainida veel vaid ühte, vististi kõige erutavamat — kohtumist lõpmatusega. Üks näide kirjandusest, nimelt Thomas Manni teosest «Joseph ja tema vennad»:

Sügav on mineviku kaev. Kas ei peaks teda mitte põhjatuks nimetama? Seda isegi siis, ja võib-olla just nimelt siis, kui see on vaid inimolend, kelle minevik on kõne ja küsimuse all... Sest just siis juhtub, et mida sügavamalt asja uuritakse, mida kaugemale mineviku allmaailma tungitakse, seda enam mitteloođitavateks osutuvad inimsuse, tema ajaloo ja siivsuse algmed, ükskõik kui pikalt me oma loodi ka lahti ei keriks, seda enam edasi ning kaugemale põhjatusse nad taganevad. Oluline on siin just «edasi ja kaugemale», sest väljauurimatu mängib meiega narrimängu. Ta pakub pettepeatusi ja teesilte, millede saavutamisel avanevad üha uued minevikurajad.

Ja matemaatikas? Minu raamat, millest ma ei taha siin midagi tsiteerida, oligi pühendatud just kohtumistele lõpmatusega. Siin tahaksin ma näite varal, mida minu raamatus ei leidu, näidata, kuidas laheneb pinevus, mille toob kaasa lõpmatusega seotud elamus.

Keegi ütleb: «Telliskivi kaalub 1 kilogramm ning veel pool oma kaalust. Mitu kilogrammi kaalub telliskivi?»

Võib arutleda selliselt. Kõigepealt kaalub telliskivi 1 kilo ning sellele lisaks veel poole telliskivi kaalu: $\frac{1}{2}$ kilo ja veel pool poolest kivist, s. o. veerand telliskivi. Veerandi telliskivi kaal on $\frac{1}{4}$ kilo ning pool veerandist telliskivist, s. o. kaheksandik telliskivi. Seega kaalub telliskivi

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$$

kilo ning veel kaheksandik telliskivi. Nii läheb see edasi:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots \text{ kuni lõpmatuseni.}$$

Teiselt poolt on aga selge, et vasakpoolne kaalukauss ühe telliskiviga on tasakaalus parempoolse kaalukausiga, millel on 1 kilogramm ning pool telliskivi. Pool telliskivi paremal on tasakaalus poolega tervest telliskivist vasakul. Seega peab teise poolega tasakaalus olema 1 kilogramm paremal. Järelikult kaalub pool telliskivi 1 kilogramm ning terve telliskivi 2 kilogrammi. Segadus lõpmatusse kulgeva liitmisega laheneb: lõpmatu rea

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots \text{ (lõpmatuseni)}$$

summa on täpselt 2.

Oleks stiilikohane lõpetada oma ettekanne nii, nagu see toimub muusikas pinevuse lahendamisel. Mõned kuulajad aga peavad seda kindlasti puuduseks, et siin ei ole öeldud ühtegi sõna matemaatika praktilisest rakendamisest. Kuid selles suhtes ei vaja matemaatika mingit kaitsekõnet. On ju üldiselt teada, et ta on hädavajalik peaaegu kogu inimloomingus, eriti aga majanduslikus loomingus. Ma tahtsin veenda neid, kes teda kasulikuks, kuid värvituks ja kuivaks, paratamatuks nuhtluseks peavad. Ma ise töötan alal, mis on tekkinud matemaatika seesmiseks otstarbeks. See on nn. rekurssiivsete funktsioonide teooria, mille kohta ma ei oleks võinud uneski näha, et teda saaks ka praktiliselt rakendada. Aga tänapäeval? Minu raamat rekurssiivsetest funktsioonidest oli teiseks ungari matemaatiliseks tööks, mis Nõukogude Liidus on välja antud ning just sel praktilisel põhjusel, et tema sisu on muutunud hädavajalikuks arvutusmasinate teoorias. Ja nii juhtub varem või hiljem kõigi nn. puhta matemaatika harudega. Oma ettekandes tahtsin ma näidata, et matemaatikasse võib armuda ning seejuures pole kunagi põhjust karta, et tegeldakse millegi kasutuga.

ARVAMUSI MATEMAATIKAST

Kes on matemaatikale pühitsetud, need leiavad sealt naudinguid, mis on analoogilised kunsti ja muusika poolt pakutavaile. Nad imetlevad arvude ja kujundite peent harmooniat; nad on vaimustatud, kui mõni uus avastus avab neile ootamatuid pespektiive; ja rõõm, mida nad niiviisi tunda saavad — eks ole ju seegi oma loomult esteetiline, ehkki meeltel pole seal mingit osa?...

...Sellepärast ma ei kõhklegi ütlemast, et matemaatika on seda väärt, et teda kultiveeritaks tema enda pärast, ja et see peaks samavõrra kehtima ka teooriate suhtes, mida ei saa füüsikale rakendada.

H. Poincaré, 1897.

* * *

See ei olnud a i n u l t püüdlemine universaalsele haridusele, mis tõmbas kõiki renessansi suuri meistreid, nagu Brunellescot, Leonardo da Vincit, Raffaeli, Michelangelot ja eriti ka Albrecht Dürerit vastupandamatu jõuga matemaatiliste teaduste poole. Nad olid teadlikud, et kogu individuaalse kujutlusvõime vabadusele vaatamata allub ka kunst paratamatuse seadusele, ja ümberpöördult: oma loogilise ülesehituse kogu ranguse juures järgib ka matemaatika ilu seadust.

F. Rudio.

ARVRIDADEST

E. Tiit

Lõpliku hulga arvude liitmine ja lahutamine on kõigile tuttav juba algkoolipäevilt. Keegi ei kahtle selles, et kui on antud 2, 3 või isegi 1000 arvu (positiivset või negatiivset), siis saab alati leida nende summa. Samuti on üldtuntud, et liidetavate järjekorra võib valida vabalt, nii kuidas see mugavamana tundub — ilma, et summa väärtus sellest muutuks. Arvude liitmisel võime neid ka rühmitada, näiteks

$$23+9+17+40+11=(23+17)+(9+11)+40=$$
$$=40+20+40=100.$$

Mõnikord võib aga tekkida vajadus lõpmata paljude liidetavate summa leidmiseks. Näiteks selle kohta on kasvõi telliskivi kaalu leidmine eelmises artiklis (vt. lk. 56). Mida aga sellise summa all üldse mõistetakse? Ei saa ju tegelikult liita lõpmata palju arve: ükskõik kui mitu arvu me ka kokku liidaksime, on saadud summa ikkagi vaid lõpliku arvu liidetavate summa.

Lõpmatu hulga liidetavate summat

$$a_1+a_2+a_3+\ldots$$

nimetatakse arvreaks. Arvrea summa defineeritakse liidetavate lõplike summade piirväärtusena liidetavate arvu lõpmatul kasvamisel. Sellise summaga puutume kokku juba keskkoolikursuses: nimelt tuletatakse seal lõpmatult kahaneva geomeetrilise progressiooni summa valem.

Lõpmatut summat ehk arvrida kasutatakse väga paljude matemaatiliste probleemide puhul ja kaugeltki mitte alati pole tema summa leidmine nii lihtne nagu geomeetrilise progressiooni korral. Selliste summade uurimiseks on isegi välja kujunenud kõrgema matemaatika haru — ridade teooria.

Vaatleme mõningaid näiteid.

Näide 1. Keskkoolis defineeritakse ringi pindala korrapärase kõõlhulknurga pindala piirväärtusena hulknurga külgede arvu piiramatul kasvamisel. Selle definitsiooni abil võime ringi ümbermõõtu kasutamata arvutada ringi pindala ning seega ühtlasi kontrollida π arvulist väärtust.

Valime hulknurkadeks kõigepealt ruudu, siis korrapärase kaheksanurga, korrapärase 16-nurga, jne. Nõnda toimides ei tarvitse me iga kord arvutada tervet hulknurga pindala, vaid võime piirduda juurdetekkinud kolmnurkade pindalade liitmisega varem saadud pindalale. Ringi pindala avaldub siis lõpmatu rea $S_1 + 4S^{(2)} + 8S^{(3)} + 16S^{(4)} + \ldots + 2^n S^{(n)} + \ldots$ summana, kus S_1 on ruudu pindala, $S^{(n)}$ aga 2^n-nurga ühest ja 2^{n+1}-nurga kahest küljest moodustunud kolmnurga pindala (vt. joon. 1). Seega $2^n S^{(n)}$ on korrapärase 2^{n+1}-nurga pindala S_n ja korrapärase 2^n-nurga pindala S_{n-1} vahe.

Olgu ringi raadius 1. Siis ruudu pindala $S_1 = (\sqrt{2})^2 = 2$ ja 8-nurga pindala $S_2 = S_1 + 4S^{(2)}$, kus $S^{(2)}$ on kolmnurga $A_1A_2A_5$ pindala. Et

$$A_1A_2 = \sqrt{2}$$

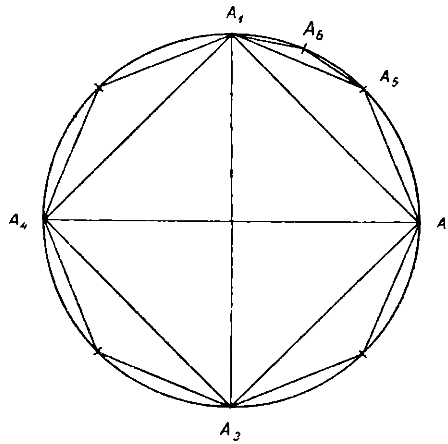
ja nurk

$$A_1A_5A_2 = \frac{6}{8} \cdot 180^\circ = 135^\circ,$$

siis

$$S^{(2)} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \tan 22^\circ 30' =$$

$$= 0{,}2071 \text{ ning } S_2 = 2{,}828.$$



Joonis 1.

Leiame nüüd 16-nurga pindala $S_3 = S_1 + 4S^{(2)} + 8S^{(3)}$, kus $S^{(3)}$ on kolmnurga $A_1A_6A_5$ pindala. Et

$$S^{(3)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}\cos 22^\circ 30'} \cdot \frac{\tan 11^\circ 15'}{2\sqrt{2}\cos 22^\circ 30'}, \qquad 8S^{(3)} = \frac{\tan 11^\circ 15'}{\cos^2 22^\circ 30'} = 0{,}234,$$

siis $S_3 = 3{,}062$.

Mida rohkem liidetavaid me sellise protsessi käigus leiame ning summale lisame, seda täpsema väärtuse saame ringi pindalale (eeldades muidugi, et me teostame arvutused küllaldase täpsusega). Ringi pindala täpset väärtust, mida väljendab lõpmatu rea summa, me aga tegelikult liitmise teel leida ei saa, kuigi võime pindala arvutada kasvõi näiteks 100 õige kohaga.

Näide 2. Ühes looduslikult kaunis kohas asuva turismibaasi külalisraamatusse kirjutab iga külastaja oma nime. Kui palju nimesid koguneb üldse sellesse külalisraamatusse (oletame, et raamatu täissaamisel asendatakse see uuega, kusjuures loetelu jätkub)? Allkirjade arv raamatus avaldub rea

$$n_1 + n_2 + n_3 + \ldots$$

summana, kus n_1 on vaatamisväärsust esimesel päeval külastanud turistide arv, n_2 — teisel päeval käinud külastajate arv jne.

Toome nüüd sisse mõned lõpmatute ridadega seotud mõisted. Rea

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

o s a s u m m a k s s_n nimetame rea esimese n liikme summat:

$$s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2, \quad \ldots,$$

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Rida nimetatakse **koonduvaks**, kui tema osasummade jadal $s_1, s_2, s_3, \ldots$ on lõplik piirväärtus $s = \lim_{n\to\infty} s_n$, s. t. iga positiivse arvu ε korral leidub selline arv N, et

$$|s_n - s| < \varepsilon \text{ iga } n > N \text{ korral.}$$

Osasummade jada piirväärtust s nimetatakse rea **summaks** ja kirjutatakse

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = s.$$

Kui aga rea osasummade jadal pole lõplikku piirväärtust, siis nimetatakse rida **hajuvaks**. Nii osutub hajuvaks rida näites 2: tõepoolest, siin ei lähene osasummade väärtused mingile lõplikule piirväärtusele, vaid nad saavad igast lõplikust arvust suuremaks (kui vaid allkirju küllalt kaua kogutakse). Sellisel juhul kõneldakse ka, et rea summaks on $+\infty$. Hajuva rea summaks võib olla samuti $-\infty$, seda siis, kui rea osasummad saavad väiksemaks igast etteantud negatiivsest arvust [1].

Näide 3. Aritmeetiliste progressioonide

$$-1 - 2 - 3 - 4 - \ldots$$

ja

$$100 + 99 + 98 + \ldots + 1 + 0 - 1 - \ldots - 99 - 100 - 101 - \ldots$$

summaks on mõlemal $-\infty$. Ehkki teise rea osasummad esialgu kiiresti kasvavad, nii et 100 liikme summa on 5050, on 201 liikme summa juba 0 ning edaspidi osasummad kahanevad järjest.

Leidub aga ka selliseid hajuvaid ridu, mille summa ei ole ei $+\infty$ ega ka $-\infty$. Niisugused on järgnevates näidetes toodud geomeetriliste progressioonide summad.

Näide 4. Rea

$$1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + \ldots$$

osasummad on järjest $1, -1, 3, -5, 11, -21, \ldots$. Kuigi nende absoluutväärtused lähenevad lõpmatusele, ei saa kõik osasummad (alates mingist kohast) ometi ei suuremaks ega ka väiksemaks ühestki arvust. Seega pole vaadeldaval real ei lõplikku ega ka lõpmatut summat: meil on tegemist nn. **võnkuva** reaga.

Näide 5. Vaatleme rida

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots,$$

mille osasummad on järjest $1, 0, 1, 0, 1, \ldots$. Sellele reale on tähelepanu pühendanud mitmed teadlased, sealhulgas ka kaks oma ajastu geniaalseimat matemaatikut — G. W. Leibniz ja L. Euler, kelle nimede järgi vaadeldavat rida vahel ka nimetatakse. Omapärase järelduseni jõudis selle rea kaudu Leibnizi kaasaegne, munk Guido Grandi [2]. Kasutades geomeetrilise progressiooni summa valemit teguriga -1, leidis ta, et

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots = 1 + (-1) + (-1)^2 + (-1)^3 + \ldots = \frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2}.$$

---

[1] Niisuguseid hajuvaid ridu nimetatakse vahel ka $+\infty$-eks ning $-\infty$-eks koonduvateks, et neid eraldada näidetes 4 ja 5 kirjeldatavast hajuvate ridade tüübist.

[2] Näide pärineb raamatust: Krbek, F., *Über Zahlen und Überzahlen*. Leipzig, 1964, lk. 93.

Teiselt poolt aga

$$1-1+1-1+1-1+1-1\ldots=(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots=$$
$$=0+0+0+\ldots,$$

ja kaht tulemust kokku võttes

$$0+0+0+0\ldots=\frac{1}{2}!$$

Viimase võrdusega «tõestas» Grandi, et jumal võis maailma luua eimillestki!

Selle «tulemuse» analüüsimiseks vaatleme, millistel ridadel võib üldse olla summa.

Rea hajuvuse näitamine osutub sageli väga lihtsaks, kui arvestada, et *koonduva rea üldliige läheneb nullile*. Tõepoolest, et $a_n=s_n-s_{n-1}$, siis koonduva rea korral

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} s_n-\lim_{n\to\infty} s_{n-1}=s-s=0.$$

Sellest tunnusest järeldub, et iga rida, mille üldliige ei lähene nullile, on hajuv. Seetõttu on kõik näidetes 2—5 vaadeldud read hajuvad. Nüüd selgub ka viga Grandi arutlustes (vt. näide 5): Euleri rida $1-1+1-1+\ldots$ on hajuv ning tal ei ole lõplikku summat.

Kahjuks ei järeldu rea üldliikme lähenemisest nullile veel rea koonduvus.

Näide 6. Kahes linnas A ja B kuulutati välja vabatahtlik korjandus. Linnas A annetab esimene isik A_1 rahakoguse $a_1=100$; isik A_2 ei raatsi anda sama palju, kuid ei tihka ka panust palju vähendada, annetades $a_2=90$; isik A_3 annetab 90% A_2 panusest, A_4 jällegi 90% A_3 annetusest jne.

Teises linnas B sattus esimeseks annetajaks B_1, õige kitsi inimene, kes andis kõigest rahakoguse $b_1=1$; järgmine annetaja B_2 ei ole ka liiga häbelik, kärpides panust poole võrra: $b_2=\frac{1}{2}$. Edasi järgnevad $b_3=\frac{1}{3}$, $b_4=\frac{1}{4}$, ...

Kummas linnas koguneb varem korjanduskarpi rahakogus 2000?

Vaatleme kõigepealt linna A. Annetused moodustavad geomeetrilise progressiooni, kus

$$a_1=100,\ a_2=90,\ a_3=81,\ \ldots,\ a_{10}=38{,}7,\ \ldots$$

ja

$$s=\frac{100}{1-0{,}9}=1000.$$

Seega oleks annetuste kogusummaks lõpmata paljude annetajate korral vaid 1000, rahasummat 2000 ei õnnestu aga selliste annetuste korral kunagi koguda.

Püüame nüüd analüüsida korjanduse käiku linnas B. Annetused moodustavad siin rea

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots,$$

mida nimetatakse h a r m o o n i l i s e k s. Kuigi selle rea üldliige läheneb nullile, osutub rida ometi hajuvaks, nii uskumatu, kui see esimesel pilgul ka ei tundu. Tõepoolest, selle rea osasummad s_n saavad suuremaks igast lõplikust arvust. Viimase väite põhjendamiseks rühmitame rea liikmed alates teisest, võttes n-dasse rühma 2^{n-1} liiget:

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\dots+\frac{1}{16}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{17}+\frac{1}{18}+\dots+\frac{1}{32}\right)+\dots.$$

Igasse rühma kuuluvate liikmete summa on lihtsalt hinnatav:

$$\frac{1}{2}=2^{n-1}\cdot\frac{1}{2^n}\leqslant\frac{1}{2^{n-1}+1}+\frac{1}{2^{n-1}+2}+\dots+\frac{1}{2^n}<2^{n-1}\cdot\frac{1}{2^{n-1}}=1,$$

kusjuures vasakpoolses võrratuses kehtib võrdus ainult juhul $n=1$. Kasutades seda hinnangut n esimese rühma kohta, saame võrratuse

$$1+\frac{n}{2}<s_{2^n}<1+n \quad (n>1), \tag{1}$$

millest järeldubki, et

$$\lim_{n\to\infty} s_{2^n}=\infty.$$

Nii on linnas B tõepoolest võimalik koguda 2000-line rahasumma, kui vaid annetajaid on küllalt palju. Vajaliku annetajate arvu M täpne määramine on siin aga väga keerukas. Võrratusest (1) saame siiski hinnangu

$$s_{2M-1}<M<s_{2^{2M-2}},$$

millest järeldub, et ülesandes nõutud rahakoguse korjamiseks on tarvis rohkem kui $2^{1999}\approx 10^{600}$ annetaja panuseid. (Inimeste arv maakeral on $3\cdot10^9$, seega tuleks maakera igal elanikul käia korjanduskasti juures umbes $3\cdot10^{590}$ korda. Olgu märgitud, et 75-aastane eluiga vältab umbes $2{,}4\cdot10^9$ sekundit!).

Viimase näite kogemuste varal veendume, et rea koondumiseks on vähe sellest, kui tema liikmed lähenevad nullile. Kuidas siiski kindlaks teha rea koonduvust? Otseselt koonduvuse definitsiooni alusel on seda sageli üsna raske otsustada, sest rida uurima asudes ei ole meil ju tavaliselt teada tema summa s. Seetõttu ongi tuletatud väga mitmesuguseid koonduvustunnuseid, mis paljudel juhtudel võimaldavad lihtsalt selgitada vaadeldava rea koonduvust. Tutvume neist mõnega.

Suhteliselt lihtsam on uurida nn. positiivsete liikmetega ridade (s. t. ridade, mille kõik liikmed on positiivsed) koonduvust. Selliste ridade osasummade jada on monotoonselt kasvav. Alati, kui real eksisteerib lõplik summa s, on osasummad s_n tõkestatud:

$$s_n\leqslant s.$$

Reaalarvude omaduste põhjal on õige ka vastupidine väide: *positiivsete liikmetega rida koondub, kui tema osasummad on tõkestatud*, s. t. kui leidub selline arv M, millest vaadeldava rea kõik osasummad on väiksemad:

$$s_n<M \text{ iga } n \text{ korral.}$$

Märgime, et seda positiivsete liikmetega rea omadust kasutasime juba esimeses näites. Me võisime olla kindlad, et ringi pindala väljendav rida koondub, sest ringi sisse joonestatud hulknurga pindala on alati väiksem ükskõik millisest sama ringi ümber joonestatud hulknurga pindalast.

Positiivsete liikmetega ridade koonduvuse või hajuvuse kindlakstegemiseks saab kasutada ka võrdlemist teiste ridadega, mille «käitumine» meil on juba teada. Sellise võimaluse annab nn. ridade võrdlustunnus.

Kui ridade

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots \tag{2}$$

ja

$$b_1 + b_2 + b_3 + \ldots \tag{3}$$

liikmeid seob võrratus

$$0 \leqslant a_n \leqslant b_n \tag{4}$$

vähemalt alates mingist n väärtusest N, siis rea (3) *koonduvusest järeldub rea* (2) *koonduvus ja rea* (2) *hajuvusest rea* (3) *hajuvus.*

Tõestame tunnuse kõigepealt eeldusel, et võrratus (4) kehtib iga n korral. Kui rea (3) osasummad $s'_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$ on tõkestatud, on seda ka rea (2) osasummad s_n, sest $s_n \leqslant s'_n$, ja järelikult rida (2) koondub.

Vastupidi, kui rida (2) hajub, siis peab kindlasti olema $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$, sest positiivsete liikmetega rea osasummad kasvavad. Et $s'_n \geqslant s_n$, siis ka $\lim\limits_{n\to\infty} s'_n = \infty$.

Et lõpliku hulga liikmete ärajätmine või juurdeliitmine ei muuda rea koonduvust ega hajuvust, on tõestus läbiviidav ka üldjuhul.

Tunnuse tegelikul rakendamisel tuleb eriti jälgida seda, kas võrratus, mis näib realiikmete vahel kehtivat, jääb tõepoolest jõusse iga n korral. Nii paistab näites 6 esialgu, nagu oleks täidetud võrratus $a_n > b_n$. Et rida $a_1 + a_2 + \ldots$ seal koondub, siis peaks sellest järelduma ka teise rea koonduvus. Osutub aga, et see võrratus kehtib ainult esimeste liikmete korral. Kuid juba $a_{100} < \frac{1}{100} = b_{100}$, ning edaspidi jääb täidetuks võrratus (4), mis ei võimalda rea (2) koonduvusest teha mingit järeldust rea (3) koonduvuse kohta.

Ridade võrdlustunnuse abil saab tuletada mitmesuguseid teisi koonduvustunnuseid. Esitame neist d'Alemberti tunnuse, mis põhineb võrdlemisel geomeetrilise progressiooniga.

Eksisteerigu positiivsete liikmetega rea (2) *korral piirväärtus*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = D.$$

Kui $D < 1$, siis see rida koondub, kui $D > 1$, siis rida hajub.

Tõestame kõigepealt selle tunnuse esimese poole. Olgu $D < 1$. Võtame mingi q vahemikust $D < q < 1$, siis piirväärtuse definitsiooni põhjal leidub kindlasti indeks N nii, et

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < q, \quad \text{kui } n > N.$$

Kasutades jällegi lõpliku arvu realiikmete ärajätmise võimalust, oletame, et see võrratus kehtib iga n korral. Siis saame võrratused:

$$a_{n+1} < a_n q < a_{n-1} q^2 < \ldots < a_1 q^n$$

ja seega on iga realiige a_n väiksem geomeetrilise progressiooni liikmest $a_1 q^{n-1}$. Ridade võrdlustunnuse põhjal selline rida koondub.

Rea hajuvus juhul $D > 1$ järeldub asjaolust, et sel korral alates teatavast indeksist $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ ehk $a_{n+1} > a_n$, mistõttu rea üldliige a_n ei saa läheneda nullile.

Kahjuks ei anna d'Alemberti tunnus meile vastust rea koonduvuse kohta juhul, kui $D = 1$.

Näide 7. Uurime rea $5 + \frac{5^2}{2!} + \frac{5^3}{3!} + \frac{5^4}{4!} + \ldots + \frac{5^n}{n!} + \ldots$ koonduvust. Et

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5^{n+1} n!}{(n+1)! \cdot 5^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{n+1} = 0 < 1,$$

siis peab see rida koonduma.

Positiivsete liikmetega read koonduvad vaid siis, kui nende üldliikmed lähenevad küllalt kiiresti nullile. Ometi leidub ridu, mis on alati koonduvad, kui vaid rea üldliige läheneb nullile. Need aga ei kuulu enam positiivsete ridade hulka, vaid sisaldavad ka negatiivseid liikmeid. Kehtib nimelt järgnev Leibnizi koonduvustunnus.

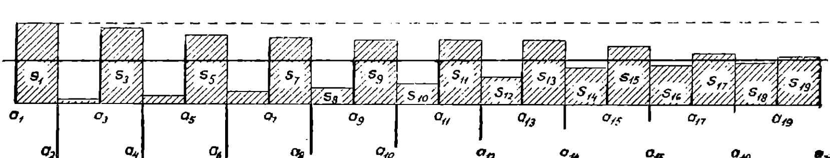
Vahelduvate märkidega monotoonselt kahanevate liikmetega rida

$$c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \ldots, \quad 0 < c_{n+1} < c_n \quad (n = 1,2,\ldots)$$

koondub alati, kui

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 0.$$

Tõestuse idee esitame geomeetriliselt. Joonisel 2 kujutavad



Joonis 2.

lõigud realiikmeid $a_n = (-1)^{n-1} c_n$, viirutatud osa kõrgus aga rea osasummasid. Joonise abil veendume, et paarisindeksitega osasummad s_{2n} järjest kasvavad, paaritute indeksitega osasummad s_{2n-1} aga kahanevad, kusjuures nende vahe $s_{2n-1} - s_{2n} = c_{2n}$ läheneb nullile, mistõttu rida koondub.

Ühtlasi näeme, et saame summale s hinnangu:

$$0 < s < c_1.$$

Toome nüüd näite[3], mis manitseb meid ettevaatusele lõplike summade omaduste ülekandmisel lõpmatutele ridadele.

Näide 8. Tõestame, et iga arv võrdub poolega enesest. Selleks vaatleme rida

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\frac{1}{11}-\frac{1}{12}+\ldots.$$

Leibnizi tunnuse põhjal koondub see rida ning tema summa s rahuldab võrratusi $0 < s < 1$ (muide, $s = \ln 2 = 0{,}6931$). Korrutame rea kõik liikmed kahega; vastavalt kahekordistub ka summa:

$$2-1+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+\frac{2}{5}-\frac{1}{3}+\frac{2}{7}-\frac{1}{4}+\frac{2}{9}-\frac{1}{5}+\frac{2}{11}-\frac{1}{6}+\ldots=2s.$$

Kirjutame nüüd viimase rea veidi teisiti:

$$(2-1)-\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{4}+\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{5}\right)-\frac{1}{6}+\left(\frac{2}{7}-\frac{1}{7}\right)-\ldots=2s.$$

See on tõepoolest sama rida: siin on kasutatud kõiki tema liikmeid, igaühte ainult üks kord ja ühtegi pole välja jäetud; sulgude asetamine aga asja sisuliselt ei muuda (need võiks ka ära jätta). Kui me nüüd teostame sulgudes märgitud tehted, saame esialgse rea

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\ldots,$$

mille summa oli teatavasti s.

Järelikult $s = 2s$!

Ilmselt peab siin kuskil olema viga!

Rea summa muutumist põhjustab nimelt tema liikmete ümberjärjestamine. Vaadeldud näites me tõime ju liikme $-\frac{1}{2}$ neljandalt kohalt kolmandale, liikme $-\frac{1}{3}$ kuuendalt viiendale, liikme $-\frac{1}{4}$ kaheksandalt kuuendale, liikme $-\frac{1}{6}$ kaheteistkümnendalt üheksandale jne. Vastavalt nihkusid tahapoole positiivsed liikmed: uues reas on iga positiivse liikme järel kaks negatiivset. Tõsi, rida on sama, s. t. esialgse rea igale liikmele on leitud koht uues reas ning pole juurde võetud ka uusi liikmeid, kuid kõigi realiikmete järjekorranumbrid (peale kahe esimese) on muutunud nii, et negatiivsed nihkusid ettepoole, nende n.-ö. «tihedus» suurenes, positiivsed aga jäid tahapoole. Sellise ümberpaigutuse mõjul on rea iga osasumma muutunud väiksemaks, kusjuures osasummade jada koondub endisest väiksemaks arvuks. Seetõttu ongi saadud rea summa väiksem lähterea summast.

Toodud näitest ilmneb veel üks oluline erinevus lõpliku ja lõpmatu summa vahel: viimase korral ei või alati muuta liikmete järjekorda. Kerkib küsimus, millal on lõpmatu rea korral liikmete ümberjärjestamine lubatud, millal mitte? Selle selgitamiseks tutvume kõigepealt rea absoluutse ja tingimisi koonduvuse mõistetega.

---

[3] Näide pärineb raamatust Пойа, Д., Математика и правдоподобные рассуждения. M., 1957, lk. 54.

Vaatleme koos reaga ka selle rea liikmete absoluutväärtustest moodustatud rida; positiivsete liikmetega rea puhul (näited 1, 2, 6, 7) langevad mõlemad read ühte, muude ridade puhul aga mitte.

Rea koonduvusest ei tarvitse alati järeldada tema absoluutväärtustest moodustatud rea koonduvus. Nii on näiteks koonduva rea

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$$

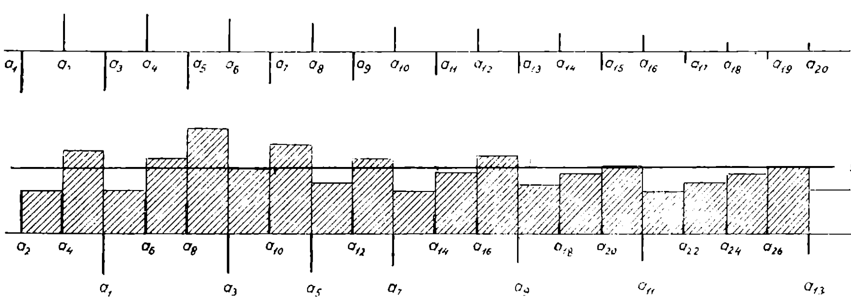
liikmete absoluutväärtustest moodustatud reaks

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots,$$

s. t. harmooniline rida, mis, nagu juba teame, hajub.

Ridu, mille liikmete absoluutväärtustest moodustatud rida koondub, nimetatakse absoluutselt koonduvaks. Saab tõestada, et *iga absoluutselt koonduv rida koondub ka tavalises mõttes.*

Ridu, mis ei ole absoluutselt koonduvad, nimetatakse tingimisi koonduvateks. Sellises reas peab olema lõpmata



Joonis 3.

palju nii positiivseid kui ka negatiivseid liikmeid ja neist mõlematest moodustatud read peavad hajuma. Niisuguste ridade kohta tõestas Riemann möödunud sajandi keskel järgneva teoreemi, mis kannab tema nime.

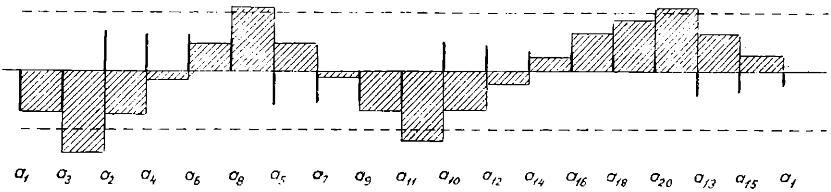
Tingimisi koonduva rea liikmete ümberjärjestamisel võib saada mistahes reaalarvuks koonduva rea.

Selle teoreemi ranget tõestust me siin ei esita, küll aga illustreerime tõestuse põhiideed geomeetriliselt joonisel 3.

Üleval on kujutatud lähterida, all aga ümberjärjestatud rida, mille summaks me soovime saada s'. Selleks liidame kõigepealt niipalju positiivseid liikmeid, et summa parajasti ületaks s', siis võtame esimese negatiivse liikme. Kui selle liitmise järel jäi summa väiksemaks kui s', siis lisame jällegi ühe või mitu positiivset liiget seni, kuni summa parajasti ületab s'; kui esimese negatiivse liikme liitmine ei muutnud summat s'-st väiksemaks, liidame negatiivseid liikmeid mitu, kuid ikka ainult seni, kuni summa saab parajasti s'-st väiksemaks ja asume siis positiivsete liikmete liitmisele. Nii saame olukorra, kus osasumma s'_n erineb s'-st vähem kui maksimaalse seni kasutamata jäetud realiikme võrra; et me neid aga järjest kasutame, sealjuures nii, et kõigi positiivsete realiikmete omavaheline järjestus jääb muutumatuks (samuti ka kõigi negatiivsete oma), ja lähterida oli koonduv, siis

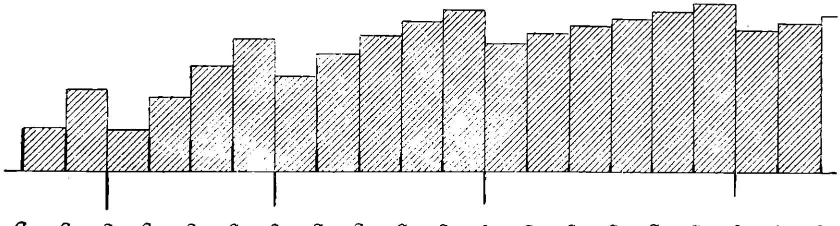
$$s'_n \to s'.$$

Sama rida võib ümber järjestada ka võnkuvaks hajuvaks reaks (vt. joonis 4), aga samuti hajuvaks reaks, mille summa on



Joonis 4.

näiteks $+\infty$. Kuid ka sellise ümberjärjestamise korral tuleb ära kasutada kõik negatiivsed realiikmed, kuigi neid võib paigutada ritta kuitahes «hõredalt» (vt. joonis 5).



Joonis 5.

Absoluutselt koonduva rea summa ei muutu aga mingi ümberjärjestamise puhul.

Näide 9. Vaatleme rida

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\ldots=\frac{2}{3}.$$

Proovime seda rida ümber järjestada näiteks reaks, mille summa on 2.

Selleks oleks tarvis kõigepealt leida positiivsete liikmete summa, mis on suurem kui 2. Kuid näeme, et

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\ldots=\frac{4}{3}<2,$$

seega niisuguse summa saamiseks ei piisa ka rea kõigist positiivsetest liikmetest.

Ükskõik missuguse suuruse $s' > \frac{2}{3}$ me ka valiksime soovitavaks uueks summaks, alati tuleb kätte nappus positiivsetest liikmetest, kui aga $s' < \frac{2}{3}$, siis ei jätku negatiivseid liikmeid.

Olgu märgitud, et kaasaegses ridade teoorias vaadeldakse eeskätt hajuvaid ridu, seades viimastele teatud summeerimismenetluste abil vastavusse sobivaid summasid (üldisemas mõttes).[4]

Üheks lihtsamaks ja vanemaks summeerimismenetluseks on aritmeetiliste keskmiste menetlus, mis defineerib iga rea summa selle osasummade aritmeetiliste keskmiste jada piirväärtusena. Saab tõestada, et see menetlus seab igale koonduvale reale vastavusse tavalise summa, aga mõnelegi hajuvale reale saame omistada lõpliku summa. Näiteks Euleri rea osasummade aritmeetilised keskmised on

$$s'_1 = s_1 = 1; \quad s'_2 = \frac{s_1 + s_2}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2};$$

$$s'_3 = \frac{1+0+1}{3} = \frac{2}{3}; \quad s'_4 = \frac{1+0+1+0}{4} = \frac{1}{2};$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$s'_{2n} = \frac{1}{2}; \quad s'_{2n+1} = \frac{n+1}{2n+1};$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ja seega $\lim s'_n = \frac{1}{2}$. Seda seost märgitakse järgmiselt:

$$C_1(1 - 1 + 1 - 1 + 1 \ldots) = \frac{1}{2},$$

kus C_1 on aritmeetiliste keskmiste menetluse tähis (matemaatik E. Cesáro nime järgi, kes seda menetlust on uurinud). Seega on tõepoolest võimalik saada Euleri rea summaks $\frac{1}{2}$, nagu seda kasutas juba Grandi, kuid see pole enam summa tavalises mõttes.

Hajuvate ridade uurimisele on pühendatud paljude Tartu matemaatikute (prof. G. Kangro ning tema õpilaste — S. Baroni, E. Jürimäe, E. Reimersi, T. Sõrmuse, M. Tõnnovi jt.) teaduslikud tööd.

---

[4] Tutvumiseks ridade teooria mõningate probleemidega võiks soovitada elementaarselt kirjutatud raamatut: Маркушевич, А. И., Ряды. М., 1957.

UUS KLASSIVÄLISE TÖÖ VORM

Jevgeni Gabovitš

M. V. Lomonossovi nimelise Moskva Riikliku Ülikooli Mehhaanika-Matemaatikateaduskonna juures töötab juba kaks aastat uus matemaatikakool vanemate klasside õpilaste jaoks. Töö koolis on korraldatud kaugõppe korras. Kooli sisseastumiseks tuleb sooritada eksam, mis seisneb ülesannete kompleksi kirjalikus lahendamises.

Õppetöö koolis kestab kaks aastat. Neile, kes kahe aasta jooksul on edukalt lahendanud esitatud ülesandeid, antakse välja Moskva ülikooli kaugõppe matemaatikakooli lõputunnistus.

Kooli peamiseks organisaatoriks ja selle teadusliku nõukogu esimeheks on üks silmapaistvamaid nõukogude matemaatikuid, NSVL TA korrespondentliige I. M. Gelfand.

Kaugõppe matemaatikakooli organiseerimisega avanes Moskva matemaatikutel võimalus luua otseseid sidemeid meie maa kõige erinevamate piirkondade andekate noortega. Kuid eeskätt on see kool mõeldud VNFSV keskoblastite maanoortele. Teiste vabariikide õpilaste jaoks kavatsetakse luua kaugõppekooli filiaalid kohalike ülikoolide ja pedagoogiliste instituutide juurde. Sellised filiaalid on juba alustanud tegevust Kasahstanis, Ukrainas ja Valgevenes.

Kuidas on korraldatud töö kaugõppe matemaatikakoolis? Igale selle kooli õpilasele saadetakse regulaarselt välja ülesanded ning Moskva ülikooli õppejõudude poolt otseselt matemaatikakooli jaoks kirjutatud brošüürid (neist on osa paljundatud rotaprindil, osa aga ilmub raamatukestena sarjas «Matemaatika. Füüsika-matemaatikakooli raamatukogu»). Selles sarjas on seni ilmunud kaks brošüüri: «Koordinaatide meetod» ning «Funktsioonid ja graafikud». Kummagi brošüüri kaasautoriks ja ka kogu sarja toimetajaks on I. M. Gelfand. Brošüürid on kirjutatud niisuguses vormis, et lugejal tekib mulje, nagu ta vestleks õppejõuga. Märgime siinkohal, et oleks kasulik tõlkida eesti keelde nii selles sarjas juba ilmunud kui ka edaspidi ilmuvad brošüürid.

Ülesannete lahendusi kontrollitakse väga hoolikalt, kusjuures ühe õpilase töid parandab mõlema õppeaasta jooksul üks ja sama isik (üliõpilane või aspirant). Hinnete panemisele kaasneb iga vea üksikasjalik kirjalik analüüs. Seejuures pööratakse erilist tähelepanu matemaatilise mõtlemisviisi juurutamisele ja matemaatilise kultuuri tõstmisele.

Moskva kaugõppe matemaatikakooli 1965.—1966. õppeaasta sisseastumiseksami ülesanded on järgmised:

1. Tõestada, et täisarvud N^5 ja N lõpevad mõlemad ühe ja sama numbriga.

2. Nelinurga $ABCD$ sisse on joonestatud ringjoon keskpunktiga punktis O. Tõestada et nurkade AOB ja COD summa on 180°.

3. Lahendada võrrand $|x-1|-2|x-2|+3|x-3|=4$, kus $|a|$ tähendab arvu a absoluutväärtust:

$$|a|=\begin{cases} a, & \text{kui } a \geqslant 0, \\ -a, & \text{kui } a < 0. \end{cases}$$

(Tuletame meelde, et võrrandi lahendamine tähendab kõikide niisuguste arvude leidmist, mis seda võrrandit rahuldavad, kusjuures tuleb ka tõestada, et muid selliseid arve pole olemas.)

4. Maleturniirist võtsid osa viis maletajat. Millised olid selle turniiri kõikide mängude tulemused, kui on teada, et a) iga maletaja mängis iga teise osavõtjaga ja seejuures ainult ühe korra; b) mängu võitjale antakse üks punkt, kaotajale aga null punkti, viigi puhul saab kumbki maletajatest pool punkti; c) kõik maletajad kogusid erineva arvu punkte; d) turniiri võitja ei teinud ühtegi viiki; e) teisele kohale tulnud maletaja ei kaotanud ühtegi partiid; f) neljandale kohale platseerunud maletaja ei võitnud ühtegi partiid.

5. Tõestada, et korrapärase kaheksanurga pindala võrdub tema suurima ja vähima diagonaali korrutisega.

6. Milliseid arve on esimese miljoni naturaalarvu seas rohkem: kas neid, mille kirjutamisel tuleb kasutada numbrit üks, või neid, mis on kirjutatavad ilma üheta?

7. Kolmnurga ABC kõrgused lõikuvad punktis O. Leida nurk C, teades, et $OC=AB$.

8. Millise vähima väärtuse võib omandada avaldis

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y},$$

kui x ja y on positiivsed arvud, mille summa on 5?

9. Malelaua ruudud on nummerdatud arvudega 1, 2, 3, ..., 64; kusjuures ruudud esimeses reas on vasakult paremale märgitud numbritega 1, 2, ..., 8, teises reas samuti vasakult paremale numbritega 9, 10, ..., 16 jne. Seejärel on malelauale asetatud kaheksa vankrit nii, et ükski vanker ei saaks lüüa ühtegi teist vankrit (vanker lööb mööda seda horisontaali ja vertikaali, millel ta ise asetseb). Missuguste arvuliste väärtustega võib olla nende ruutude numbrite summa, millel asetsevad vankrid?

10. Jalakäija liigub konstantse kiirusega mööda tänavat, kus paikneb trammiliin. Ta märkab, et iga viie minuti järel tuleb talle vastu tramm ja et iga seitsme minuti järel möödub temast tramm. Milliste ajavahemike tagant väljuvad trammid liini otspunktidest, kui on teada, et need ajavahemikud on kogu aeg mõlemas otspunktis samasugused ja et trammid liiguvad konstantse kiirusega ja peatumata?

11. Tasandil on antud kolm paralleelset sirget. Konstrueerida ruut, mille kolm tippu asetsevad neil kolmel sirgel.

12. Milline peab olema arv a, et võrranditel

$$x^3 + ax + 1 = 0 \text{ ja } x^4 + ax^2 + 1 = 0$$

oleks ühine lahend?

13. Kolmnurga ABC mediaanidest on konstrueeritud kolmnurk $A_1B_1C_1$, seejärel aga kolmnurga $A_1B_1C_1$ mediaanidest kolmnurk $A_2B_2C_2$. Tõestada, et kolmnurgad ABC ja $A_2B_2C_2$ on sarnased ning leida sarnasustegur.

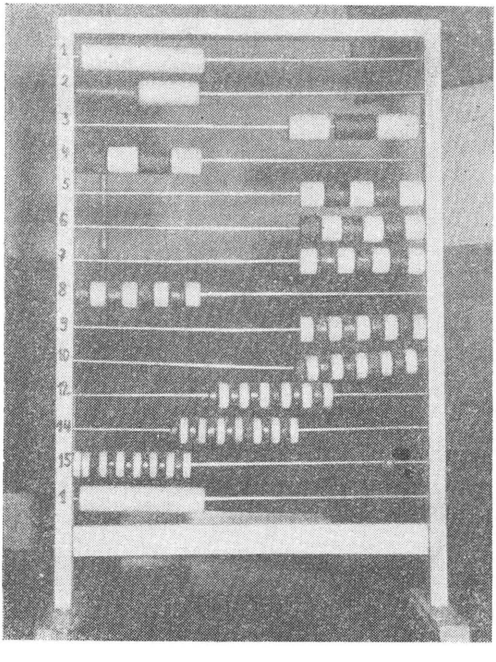
Toimetuselt

Ka Tartu Riikliku Ülikooli juurde on alates 1. jaanuarist 1966. a. kavas luua Moskva kaugõppe matemaatikakooli filiaal. Õppetöö toimuks siin eesti (soovi korral ka vene) keeles.

Õpilastel, kes soovivad astuda nimetatud kooli õppima, palume lahendada ülaltoodud ülesanded (või osa neist) ning saata lahendused koos avaldusega kooli astumiseks hiljemalt 1. detsembriks k. a. aadressil: Tartu, V. Kingissepa 16—2, «Matemaatika ja kaasaja» toimetus. Lisada tuleb ka matemaatikaõpetaja nõusolek ning ärakiri viimasest klassitunnistusest.

Soovitame kaugõppekooli õppima astuda kõigil keskkooli vanemate klasside õpilastel, kellel on kavas edasi õppida matemaatika, füüsika või tehnika erialadel. Kaugõppe matemaatikakooli lõputunnistuse hindeid võetakse arvesse ka ülikooli astumisel.

MURDUDE ARVELAUD



Kõrvaloleval fotol näete ühte huvitavat õppevahendit, mille on Elva Keskkooli matemaatikaõpetaja Irma Tulevi projekti järgi valmistanud sama kooli meister L. Randver koos õpilastega.

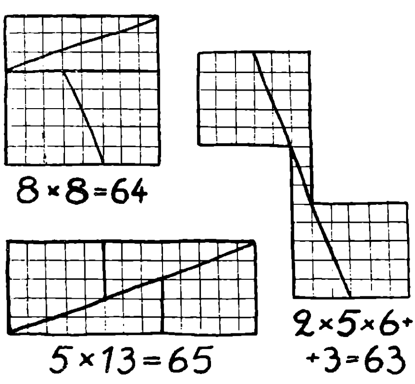
See «masin» on abivahendiks murdude õpetamisel viiendas klassis. Niisuguse õppevahendi abil on lihtne murde liita ja lahutada, aga ka võrrelda. Näitlikult saab selgeks murdude põhiomadus, samuti see, miks sama lugejaga murd on seda väiksem, mida suurem on tema nimetaja jne. Murdude ühenimeliseks teisendamine on küllaltki raske küsimus 5. klassis, arvelaua abil aga muutub see palju lihtsamaks ja huvitavamaks. Murdude arvelaud meeldib õpilastele ja on heaks abiliseks õpetajale. Seda kasutatakse pidevalt murdude õpetamisel Elva Keskkooli viiendas ja kuuendas klassis, aga ka algklassides.

MAAGILISE GEOMEETRIA ALUSEID

Tõeleid Roosinupp

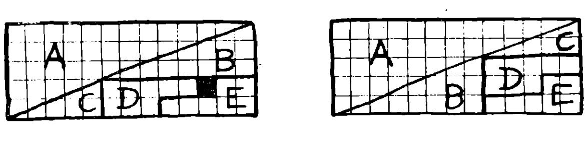
Kõik lugejad on kahtlemata tutvunud nn. teadusliku matemaatikaga ehk matemaatikateadusega. See koosneb teatavasti peamiselt igasugustest teoreemidest, tõestustest ja muudest igavatest asjadest. Väga vähesed äravalitud on aga tegemist teinud maagilise matemaatikaga, mis küll samuti sisaldab teoreeme ja tõestusi, aga mitte igavaid. Allakirjutanu ei saa end kahjuks nimetada just maagilise matemaatika loojaks[1], küll aga selle silmapaistvaks spetsialistiks ja edasiarendajaks, eriti maagilise matemaatika ühe tähtsaima haru — maagilise geomeetria valdkonnas.

Maagilise geomeetria alustega tutvumist on sobiv alustada mõnede klassikaliste «konstruktsiooniülesannetega». Kõigis sellistes ülesannetes näidatakse mingi kujundi tükkideks lõikamise ja nendest tükkidest uue kujundi kokkulappimise teel, et mateeria jäävuse seadus on ilmselt väär: alati on nende operatsioonide tulemusel midagi kas ära kadunud või juurde tulnud. Järgnevalt toomegi vastavaid näiteid.



1. Juuresoleval joonisel on toodud kolm erinevat kujundit. Alustame vasakul ülal paiknevast ruudust, mille külje pikkus on 8 ja pindala seega 64 ühikut. Lõikame selle ruudu joonisel näidatud viisil neljaks tükiks: kaheks kolmnurgaks ja kaheks trapetsiks. Kui nendest tükkidest moodustada ristkülik (joonisel vasakul all), siis on selle pindala juba 65 ühikut. Et aga lugejal ei tekiks ekslik arvamine, nagu saaks ruudu pindala selle osade teisiti paigutamisel ainult suureneda, selleks on joonise paremal poolel toodud veel samade tükkide teistsuguse ühendamise tulemus — seekord aga pindalaga 63 ühikut.

2. Ühe näite varal me juba veendusime, et tükkideks lõigatud kujundi osade sobiva ühendamise teel saab selle kujundi pindala muuta. Kerkib õigustatud küsimus: kus kohal see pindala juurde tuleb või ära kaob? Sellele küsimusele vastamiseks ongi määratud järgmine joonis.

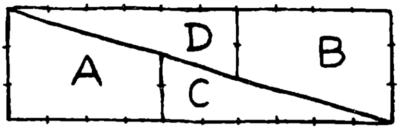


[1] Maagilise matemaatika ajaloo ning klassikaliste tulemuste ülevaate võib leida algallikast: Гарднер, М., Математические чудеса и тайны. М., 1964.

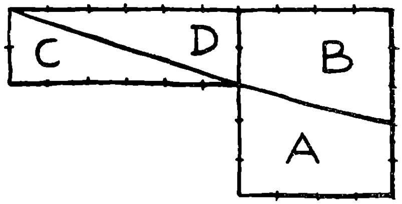
Vasakpoolsest ristkülikust on välja lõigatud ühe pindalaühiku suurune tükk (joonisel must). Selle tühimiku täitmiseks lõikame kujundi viieks osaks: *A*, *B*, *C*, *D* ja *E*. Jättes kolmnurga *A* paigale paigutame ülejäänud tükid parempoolsel joonisel näidatud viisil ümber. Nii saamegi eelmisega ühesuuruse ristküliku, ainult ilma väljalõiketa. Sellega olemegi mitte ainult veendunud ristküliku pindala suurenemises, vaid ka näinud, millise koha peal see suurenemine toimub. Nüüd jääb juba lugejate ülesandeks kontrollida, kas ristküliku pindala ka mõne teise koha peal suurendada õnnestub!

3. Eelmistest näidetest võis tekkida mulje, nagu saaks pindala vaid ühe ühiku kaupa muuta. See mulje pole muidugi õige — kõrvaltoodud joonis ongi just tehtud niisuguse eksiarvamuse kummutamiseks. Nagu igaüks oma silmaga veenduda võib, saab äärmiselt lihtsa konstruktsiooniga suurendada kujundi pindala ka tervelt 2 ühiku (ehk peaaegu 7%) võrra.

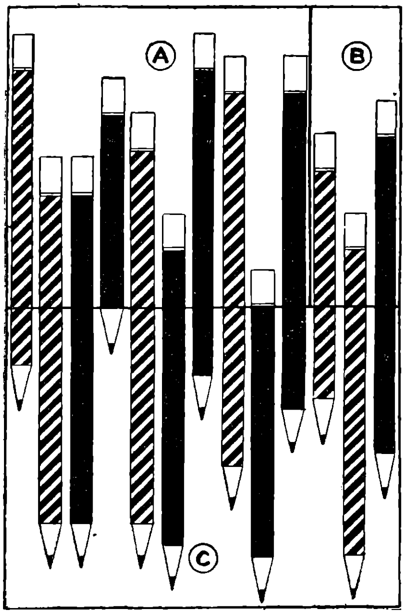
Mis puutub senistes näidetes kasutatud konstruktsioonidesse, siis on nad üldse kõik olnud äärmiselt lihtsad. Selle lihtsuse rõhutamiseks ongi kõik joonised muide tehtud lihtsalt käega. Täpsema väljajoonistamise jätame juba lugejate eneste hooleks. Veelgi lihtsam on aga võtta paberitükk ja teostada kõik vajalikud lõikamised ning kokkulappimised.



$10 \times 3 = 30$



$(2 \times 6) + (4 \times 5) = 32$



4. Seni me vaatlesime vaid pindalade muutumist lihtsate geomeetriliste kujundite tükkideks lõikamise tagajärjel. Sama meetodit saab aga kasutada ka keerulisemate materiaalsete objektide kadumise või tekkimise demonstreerimiseks.

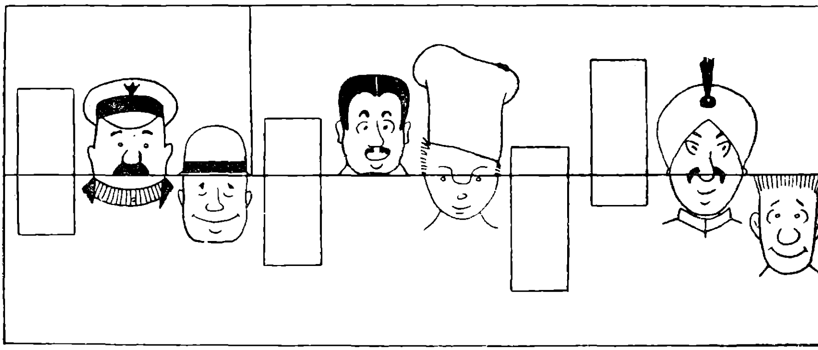
Selle valdkonna kohta saab siin aga tuua vaid mõned üsna lihtsad näited, sest keerulisemate juhtude vaatlemine pole kahjuks trükitehniliselt võimalik. Alustame ühe eriti lihtsa näitega.

Kõrvaloleval joonisel on kujutatud 13 pliiatsit — 6 sinist (joonisel vöödilised) ja 7 punast (joonisel mustad). Lõikame selle pildi näidatud jooni mööda kolmeks osaks *A*, *B* ja *C*. Jättes osa *C* paigale vahetame omavahel osad *A* ja *B*. Tulemus on lausa hämmastav: saame hoopis 7 sinist ja 6 punast pliiatsit. Järelikult üks punane pliiats muutub selle operatsiooni käigus siniseks.

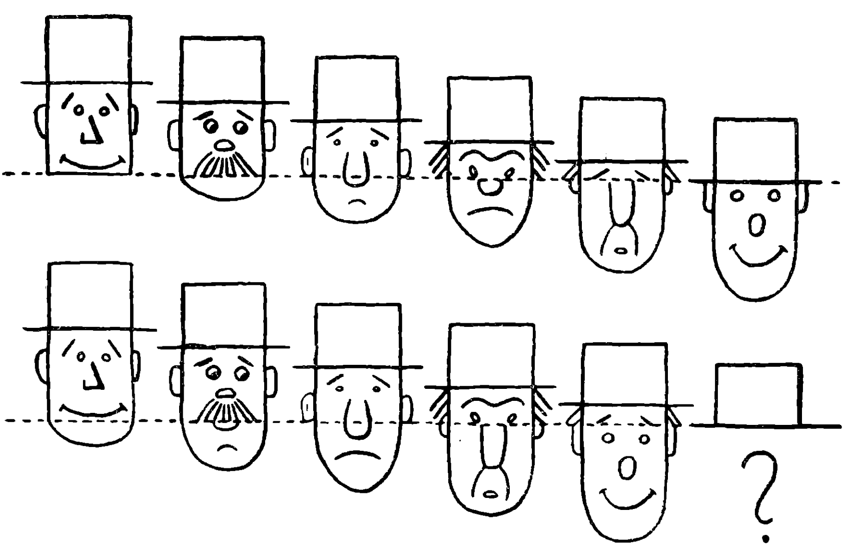
Jääb vaid soovitada lugejail teostada sama eksperiment pliiatsitega ja veenduda selle õiguses!

5. Läheme nüüd mateeria veelgi keerulisemate vormide juurde. Siintoodud joonisel on kujutatud kuus meest ja neli õlleklaasi (viimased küll veidi abstraktsionistlikult!). Lõikame joonise jälle kolmeks osaks ja vahetame omavahel kaks ülemist. Ja mis me näeme? Joonisel on nüüd vaid viis meest aga ühtlasi ka viis õlleklaasi. Üks mees on ilmselt õlleklaasiks muutunud!

Olgu märgitud, et seda joonist võib edukalt kasutada näitliku materjalina näiteks alkoholivastasel loengul.



6. Lõpetame maagilise geomeetria aluste tutvustamise veel ühe näitega inimeste maagilise muutumise valdkonnast. Erilisi kommentaare siintoodud joonis nähtavasti ei vaja (kui aga vajab, siis jääb nende väljamõtlemine lugejale koduseks ülesandeks).

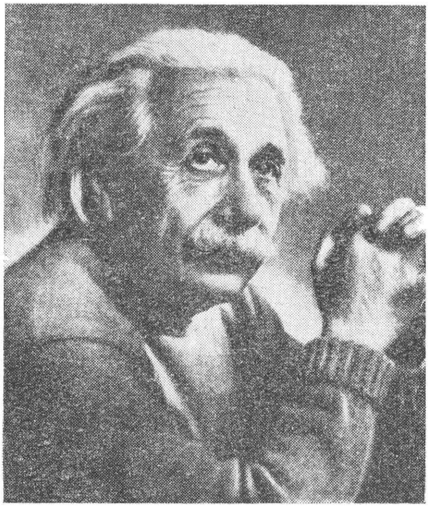


ALBERT EINSTEIN JA KAASAEGNE FÜÜSIKA

A. Koppel

Tänavu täitub 60 aastat kaasaegse füüsika ühe tähtsaima teooria — relatiivsusteooria loomisest. Kümme aastat tagasi — 17. aprillil 1955 suri aga selle teooria looja, üks kõigi aegade suurimaid füüsikuid — Albert Einstein.

Suur Relatiivsuse Pealik — niisuguse tiitli andis üks indiaanlaste suguharu Albert Einsteinile, kui ta 1930. aastal seda suguharu USA-s külastas. Ja tõepoolest — eelkõige relativistliku füüsika alusepanijana tunnebki inimkond Einsteini.



E r i r e l a t i i v s u s t e o o r i a andis Einstein füüsikale oma 26. eluaastal. See teooria sai aluseks loodusseaduste uurimisel inertsiaalsüsteemides[1] (ja neis taustsüsteemides, mida küllaldase täpsusega saab lugeda inertsiaalsüsteemideks). Erirelatiivsusteooria tugineb kahele põhiprintsiibile: 1) loodusnähtuste kirjeldamisel on kõik inertsiaalsüsteemid samaväärsed ja 2) valguse kiirus vaakuumis on kõigi inertsiaalsüsteemide suhtes suunast sõltumatult[2] 300 000 km/s. Kogu erirelatiivsusteooria tuleneb nüüd loogiliselt nendest põhiprintsiipidest, mis on eksperimendiga täielikus kooskõlas. Siit jõutakse kehade pikkuse ja aja kulgemise

---

[1] Inertsiaalsüsteemi ja üldse taustsüsteemi mõiste kohta vt. raamatust Õ i g l a n e, H., Vestlus relatiivsusteooriast. Tln., 1958.

[2] Kolmekohalise täpsusega.

rütmi sõltuvusele kiirusest. Siit tulenevad ka uued mehhaanikaseadused. Osutub, et liikuva keha kiiruse lähenemisel valguse kiirusele muutuvad vanad mehhaanikaseadused, sealhulgas hästi tuntud Newtoni II seadus, kehtetuteks. Kehade liikumist kirjeldab relativistlik mehhaanika täpsemalt.

Relatiivsusteooria üheks olulisemaks järelduseks on seos massi ja energia vahel. Relatiivsusteooriaga kaob füüsikast eetri kui erilise mehhaanilise keskkonna mõiste, mida varem peeti vajalikuks elektromagnetiliste lainete, sealhulgas valguse levimise seletamiseks. Seevastu tuleb füüsikasse uus mõiste — väli kui objektiivne reaalsus, kui ainest erinev, kuid sama reaalne mateeria esinemisvorm. Elektromagnetiliste lainete levik kujutab endast välja levikut lõpliku kiirusega, kusjuures väli võib levida nii aines kui ka tühjuses.

Erirelatiivsusteooria aitas kõrvaldada rea raskusi ja arusaamatusi, millega füüsika areng oli kokku põrganud käesoleva sajandi alguseks. Mitmed seni seletamatutena näivad katsetulemused said nüüd lihtsa ja loomuliku seletuse. Relatiivsusteooria avas aga füüsikale ka uusi arenguteid. Just relatiivsusteooriast tulenev massi ja energia seos oli see, mis näitas teed tuumaenergia vabastamiseks. Tänapäeva aatomi- ja tuumafüüsika pole mõeldavad ilma mikroosakeste võimsate kiirendajateta. Kuid mujalgi füüsikalistes uurimustes ja tehnilistes rakendustes kasutatakse laialdaselt seadmeid, milles mikroosakesed liiguvad ülisuurte kiirustega. Selliste seadmete — olgu nad siis kiirendajad või televiisorid — ehitamine on aga täiesti võimatu ilma relatiivsusteooriale tuginevate arvutusteta. Nii on erirelatiivsusteooria meie aatomisajandi teaduse ülimalt oluline koostisosa, milleta oleks mõeldamatu meie sajandi aatomienergeetika koos oma tohutute arenguperspektiividega.

Et uued eksperimentaalsed faktid ei mahtunud enam vana füüsika süsteemi, siis vajas füüsika areng sajandi algul tungivalt erirelatiivsusteooria loomist. Ja kahtlemata oleks see teooria varem või hiljem loodud ka Einsteinita. Kuivõrd teaduse areng sel juhul oleks pidurdunud, on muidugi iseküsimus. Pärast erirelatiivsusteooria loomist nägi selle teooria piiratust ja vajadust üldisema teooria järele aga ainult Einstein üksi. Järgnesidki kümmekond aastat täis loomingulise mõtte erakordset sihikindlust, lahendamata probleemidele vastuse otsimise haruldast visadust ja loomingulist üksindust, sest enamik füüsikuid ei suutnud tollal mõista Einsteini taotlusi. 1916. aastaks lõi Einstein teooria, mis kujunes erirelatiivsusteooria üldistuseks, saades nimeks üldrelatiivsusteooria. Tuntud füüsik A. Sommerfeld kirjutas: «Filosoofilise mõtlemise niisuguse sügavuse ja järjekindlusega, mida pole loodusuurijate peades varem olnud, Gaussi ja Riemanni meenutava matemaatilise jõuga püstitas Einstein kümne aasta jooksul hoone, mille ees meie ... seisame, tundes hämmastust ja peapööritust.» Ja füüsikud on tänapäevani veendumuses, et kui poleks olnud Einsteini peaaegu pretsedenditut kangekaelsust, siis oleks vaevalt üldrelatiivsusteooriat senini üldse loodudki.

Üldrelatiivsusteooria analüüsib aja ja ruumi omadusi veelgi sügavamalt kui erirelatiivsusteooria. Teooria kehtivusala ei ole siin enam piiratud ainult inertsiaalsüsteemidega. Üldrelatiivsusteooria seletab ka raskusnähtuste olemuse harmoonilises kooskõlas ideedega, mida tõi kaasa juba erirelatiivsusteooria. Newtoni gravitatsiooniteooria kohaselt mõjuvad kehadele gravitatsioonijõud, kuid kehade vahel ei ole olemas midagi. Vastavalt üldrelatiivsusteooriale eksisteerib aga kehade vahel gravitatsiooniväli, mis vahendabki kehade vastastikust gravitatsioonilist mõjutamist ning mis on lahutamatult seotud aja ja ruumi omadustega. Kehad muudavad ruumi «kõveraks» ja see kõver ruum, kus kehtivad mitteeukleidilise geomeetria seadused, määrab omakorda kehade liikumise. Raskusjõud on seega üldrelatiivsusteooria järgi ruumi kõveruse ilmsikstulek. Selles teoorias põimuvad orgaanilises seoses füüsika ja geomeetria. Üldine relatiivsusteooria annab gravitatsioonivälja jaoks võrrandid, mis määravad selle välja struktuuri ja kehade liikumise temas.

Oma loogilise ranguse ja seesmise matemaatilise ilu poolest on üldrelatiivsusteooria tänaseni jäänud füüsikaliste teooriate hulgas ületamatuks. Selle teooria järeldused, mis on kontrollitavad vaatluste ja katsetega, erinevad aga ainult õige vähe Newtoni gravitatsiooniteooria omadest. 1916. aastal kinnitas üldrelatiivsusteooriat ainult üks nähtus — planeet Merkuuri periheeli [3] nihe, mis pole seletatav Newtoni teooriaga. Erakordselt sügava mulje jättis 1919. aastal täieliku päikesevarjutuse ajal mõõdetud ja varem mittetuntud efekti — Päikese lähedalt möödunud valguskiire tegeliku kõrvalekaldumise kooskõla üldrelatiivsusteooria ennustusega. Lisaks eespool nimetatuile on üldrelatiivsusteooria kinnituseks veel valguse sageduse muutumine gravitatsiooniväljas. Kõik teised teooria ennustused räägivad niisugustest vaevalt märgatavatest nähtustest, mida kaasaegnegi mõõtmistäpsus ei võimalda avastada. Ka ülalkirjeldatud kolm nähtust on n.-ö. katsevigade piiride lähedusse jäävad efektid ja nõuavad väga peeni mõõtmisi. Seega näib üldrelatiivsusteooria olevat nii sügavale looduse peensustesse tunginud, et katsed ja vaatlused ei suuda kuidagi järele jõuda. Aga ka ükski vaatlus ega katse ei ole senini sellele teooriale vastu rääkinud. Üldrelatiivsusteooria kui Newtoni gravitatsiooniteooriast täpsema teooria peamiseks rakendusalaks on tänapäeval kosmose avarused, sellised mastaabid, mille suhtes mitte ainult päikesesüsteem, vaid kogu meie Linnutee tähesüsteem on väikeseks objektiks. Teaduslikku kos-

---

[3] Planeedi orbiidi Päikesele kõige lähem punkt.

moloogiat peetakse kaasajal täiesti mõeldamatuks ilma üldrelatiivsusteooriata.

Üldrelatiivsusteooria peamine jõud on aga kahtlemata tema sisemises järjekindluses ja põhioletuste lihtsuses. Ta kuulub tähtsa koostisosana meie kaasaegsesse füüsikalisse maailmapilti. Üldrelatiivsusteooria sisuliste rikkuste ammendamine pole kaugeltki lõppenud. «Tänapäeval sarnaneb see teooria noorele rohelisele kasvavale puule, mille kroon sööstab kõrgele üles, juured aga tungivad eksperimendi näol ikka sügavamale ja sügavamale Maasse», kirjutas 1962. aastal L. Infeld — Einsteini üks omaaegseid lähedasemaid kaastöölisi.

Erirelatiivsusteooria põhiseisukohad esitas Einstein esmakordselt 1905. aastal ajakirjas *«Annalen der Physik»* ilmunud töös «Liikuvate kehade elektrodünaamikast». Samal aastal ja samas ajakirjas ilmus aga veel kaks Einsteini tööd, millel oli oluline osa füüsika arengus. Ühest neist annab ta range molekulaarstatistilise seletuse Browni liikumisele — vedeliku või gaasi molekulide mõju all oleva väikese osakese korrapäratule liikumisele. Teises neist annab Einstein fotoefekti teooria, millega ta toob esmakordselt füüsikasse valguse osakese mõiste tänapäevases tõlgenduses ja paneb aluse kaasaegsele ettekujutusele valguse dualistlikust loomusest — valgus on samaaegselt nii lainetus kui osakeste voog. Nende töödega saab Einsteinist üks alussammaste rajajaid ka tänapäeva statistilisele füüsikale ja kvantteooriale.

Elu viimased kolmkümmend aastat pühendas Einstein erakordse sihikindlusega ja peaaegu täielikus loomingulises eraldatuses nn. ühtse välja teooria loomise katsetele. See oli Einsteini elutöö loogiliseks jätkuks. Einstein seadis eesmärgiks jõuda teooriani, millest saaks relatiivsusteooria edasiarendus ja üldistus ning mis kirjeldaks kõiki looduses eksisteerivaid välju kui ühtset füüsikalist objekti, kui ühtset välja. Autori kavatsuse kohaselt peab ühtse välja teooria tuginema veel üldisematele ideedele, mõistetele ja seaduspärasustele kui relatiivsusteooria, samuti peab ta andma tingimused, millal ühtne väli võtab näiteks gravitatsioonivälja kuju ja allub üldise relatiivsusteooria võrranditele. Ühtse välja teooria peab saama teooriaks, mida iseloomustab «seesmine täius», mis annab objektiivse ja põhjusliku seose kõigi tuntud füüsikaseaduste ja füüsikaliste konstantide vahel, seob ühisesse põhjuslikkuse ahelasse nii kosmose kui mikromaailma seaduspärasused.

Ühtse välja teooria loomise katsed ei viinud Einsteini siiski loodetud tulemustele. Selle põhjuseks näib aga kõige enam olevat füüsika arengu mittevastavus, samuti matemaatilise aparatuuri mittepiisavus Einsteini kavandatud programmile. W. Heisenberg kirjutab: «Sel ajal, kui Einstein tegeles ühtse välja teooria probleemiga, avastati pidevalt uusi elementaarosakesi, aga koos sellega ka neile vastavaid uusi välju. Seepärast ei olnud Einsteini programmi realiseerimiseks veel tugevat empiirilist baasi...»

Einsteini püüdlustega luua ühtse välja teooria kui «seesmise täiusega» teooria on seotud tema suhtumine tänapäeva kvantteooriasse — mikromaailma ja selle uuelaadilisi seaduspärasusi kirjeldavasse teooriasse. Mitmete oma varasemate töödega andis Einstein olulise panuse kvantteooria loomisse. Eelkõige kuulub siia valguse dualismi avastamine. 1917. aastal näitas Einstein ka nn. indutseeritud kiirguse olemasolu võimalust teatud tingimustes. Sellele nähtusele tugineb kogu tänapäeva nn. aatomraadiotehnika, sealhulgas tohutu intensiivsusega valguskiirt kiirgavate seadmete — laserite töö. Hiljem aga ei võtnud Einstein peaaegu üldse osa aatomi- ja tuumafüüsika-alastest uurimustest ja tema suhtumine hoogsalt arenevasse kvantteooriasse kujunes üldiselt eitavaks. Näib, et selle negatiivse suhtumise tingis eelkõige asjaolu, et mikromaailma, eriti elementaarosakesi kirjeldav teooria pidi kõigepealt läbima sellise tee, kus Einsteini taolisele füüsikule, kelle eesmärgiks oli jõuda «seesmise täiusega» teooriani, polnud esialgu midagi teha. Sest kui kvantmehhaanikat, s. o. mikroosakeste kui tervikute mehhaanilist liikumist kirjeldavat teooriat võibki lugeda tänapäeval lõpetatuks ja seesmiselt harmooniliseks, siis elementaarosakesi, nende vastastikuseid muundumisi, struktuuri ja nendega seotud välju kirjeldavat teooriat ei saa veel praegugi lugeda ei lõpetatuks ega täiuslikuks.

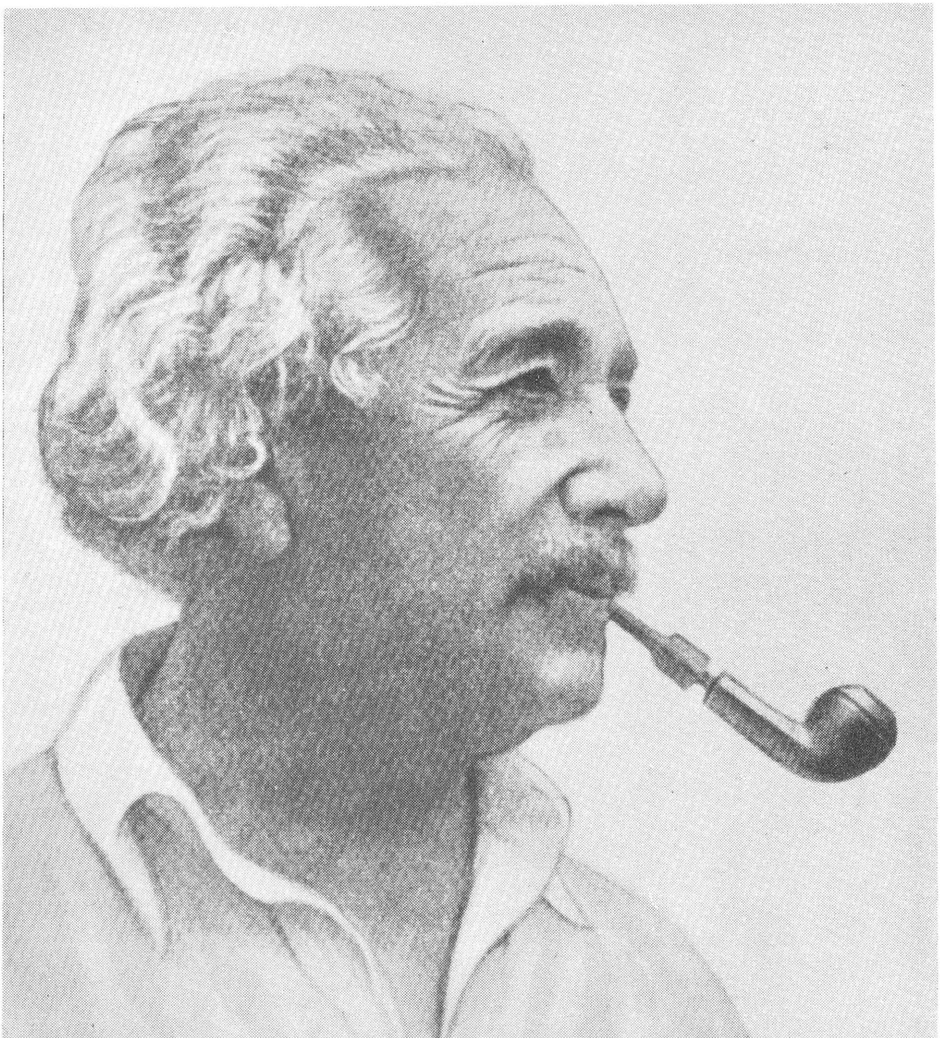
Kahtlemata on Einsteini panus füüsikasse tema loodud teooriate — fotoefekti teooria, Browni liikumise teooria, erirelatiivsusteooria ja eriti muidugi üldrelatiivsusteooria näol tohutult suur. Kuid rääkides Einsteini vaimsest pärandusest füüsikale ja üldse teadusele ning inimkonnale, oleks siiski üsna väär ainult sellega piirduda.

Hiiglaslik on osa, mida Einstein etendas meie sajandi füüsikalise ja üldse teadusliku mõtlemise kujunemisel. Juba erirelatiivsusteooria loomisega andis ta suurepärase eeskuju uute radade rajamiseks teaduses. See oli esimene, n.-ö. meeletu füüsikaline teooria, mis õpetas ületama hirmu paradoksaalsetena tunduvate faktide ees ning lülitama selliseid paradoksaalseid fakte harmoonilisse maailmapilti. Samasugune näivate paradokside mittekartmine iseloomustab Einsteini antud fotoefekti teooriat — valguse dualistlik loomus lülitatakse harmoonilise koostisosana meie ettekujutustesse loodusest. Erirelatiivsusteooria oli ka esimene füüsikaline teooria, mille puhul loogilisest vajadusest tingituna kindlalt loobuti «silmnähtavuse» nõudest, heideti kõrvale aprioorne eeldus, et looduses peab kõik vastama meie igapäevasest kogemusest saadud ettekujutustele. Teaduse areng meie sajandil näitaski, et selliste «meeletute» ja igapäevastele kogemustele mittevastavate teooriate loomine on hädavajalik looduse saladuste peensustesse tungimiseks. Alates Einsteinist saab seega selgeks, et teadusel tuleb luua ka sellised kontseptsioone, mis esialgu võivadki näida «meeletutena» ja vasturääkivatena «ilmsetele» loogilistele skeemidele, «tervele mõistusele» ning vaatluste «silmnähtavatele» tulemustele, kuid vastavad ometi seejuures täpsemale eksperimendile ja täpsemale, rangemale ja täiuslikumale loogilisele skeemile. Meie päevil, näiteks on saanud hädavajalikuks uue, elementaarosakeste maailma sügavamalt mõista aitava teooria loomine. Ja füüsikud on üldiselt arvamusel, et siin peab lõhe «silmnähtavuse» ja teooria vahel olema veelgi suurem kui sajandi alguse füüsikaliste teooriate puhul. Nii nagu relatiivsusteooria tekkimisel tuli harjuda terve rea esimesel pilgul täiesti pöörastena näivate asjadega, nagu näiteks pikkuste ja ajavahemike relatiivsusega, nii toob kahtlemata ka elementaarosakeste uus ja sügavam teooria kaasa olulisi muutusi meie füüsikalises maailmapildis. Tänapäeva füüsikateoreetikute mõttestiili ja üldist olukorda teoreetilises füüsikas iseloomustavad vägagi piltlikult Niels Bohri sõnad elementaarosakeste uue teooria ühe esialgse variandi arutamisel: «Ei ole kahtlust, et meie ees on meeletu teooria. Küsimus seisab selles, kas ta on küllalt meeletu, et vastata tegelikkusele». Niisiis praegu võib füüsikuid rahuldada vaid v ä g a «meeletu» teooria!

Einsteini teaduslikule loomingule on omane orgaaniline a n t i d o g m a t i s m. «Einstein — see on kõige selle surematu, elava, antidogmaatilise kokkuvõte ja süntees, mis on olnud teaduse ajaloos», kirjutab biograaf B. G. Kuznetsov. Einsteini teaduslik looming on suurepäraseks eeskujuks, kuidas heita vanad ja iganenud, olgugi seejuures üldtunnustatud seisukohad kartmatult kõrvale ja rajada uusi teid teaduses, anda uusi teaduse arengu vajadusi rahuldavaid ideid ja teooriaid. Kuid tõeliselt antidogmaatiline mõte ei dogmatiseeri kunagi ka eitust ennast. Näidates vana, XIX sajandi lõpuks väljakujunenud füüsika, nn. klassikalise füüsika piiratust ja temas valitsevat dogmaatilist seisakut, juhtis Einstein ühtlasi tähelepanu klassikalise füüsika väärtustele, tema heale vastavusele loodusega teatud nähtuste valdkonnas.

Einstein ei püüdnud esineda ka prohveti osas, kes ise esitas igavesi absoluutseid tõdesid. Otse vastupidi, tema teaduslike ideede endi sisu välistab nende absolutiseerimise. Kuni oma surmani ei loobunud Einstein rõhutamast, et relatiivsusteooria vajab samuti edasiarendamist ja tulevikus tuleb jõuda loodust veelgi sügavamalt kirjeldava teooriani.

Tänapäeva füüsikale on avaldanud suurt mõju Einsteini t e a d u s l i k u m õ t l e m i s e s t i i l, mida iseloomustab eelkõige füüsikaliste ja filosoofiliste probleemide suur lähedus, kohati koguni ühtesulamine. Kogu Einsteini loomingule, eelkõige aga üldrelatiivsusteooriale ja ühtse välja teooria loomise katsetele



Albert Einstein
14. III 1879—18. IV 1955

A. Einstein erirelatiivsusteooria loomise ajal (1905) on omane püüd looduse võimalikult üldisemate ja sügavamate seaduspärasuste tunnetamise poole. Ja tänapäeval võibki lugeda üldrelatiivsusteooria üheks väärtuseks füüsikale ka seda, et tema aluste ja probleemidega tutvumine õpetab füüsikuid vaatlema füüsikaliste nähtuste maailma võimalikult üldisemast aspektist, nägema üksikute nähtuste ja seaduspärasuste kohta üldises füüsikalises maailmapildis.

Einstein juhib füüsikute tähelepanu ka järjest enam tähtsust omandavale probleemile: missugune peab olema vahekord «puhta mõtte» ja tunnetuse empiirilise baasi vahel. «Kui me ei usuks, et tegelikkust on võimalik haarata teoreetiliste kontseptsioonidega, kui me poleks veendunud, et meie maailmal on seesmine harmoonia, siis ei oleks ka teadust», rõhutab Einstein koos Infeldiga raamatus «Füüsika evolutsioon». Teisal kirjutab Einstein, et «pääs kõige sügavamate põhimõtteliste küsimuste juurde füüsikas nõuab kõige peenemaid matemaatilisi meetodeid». Aga samal ajal oli Einsteini üheks põhiveendumuseks ka see, et abstraktne mõte üksi, kui laitmatu ta oma loogiliselt ranguselt ka oleks, ei või ise leida looduse tegelikke seaduspärasusi. Väärivad tähelepanu Einsteini kui kõigi aegade ühe suurima füüsikateoreetiku sõnad: «Kõik, mida me teame reaalsusest, lähtub katsest ja kinnitub katsega.»

Oleks väär hinnata Einsteini elu viimast perioodi, tema püüdeid luua ühtse välja teooriat kui täiesti viljatut ja füüsikale kasutut. Einsteini suur ja sügavust taotlev mõttetöö aitas palju kaasa püstitatud küsimuse keerukuste ja lahendamise raskuste väljaselgitamisele. Ja mis veelgi olulisem — Einsteini otsingud viisid paljude hoopis uute probleemideni. Mitmedki Einsteini ideed jäid päranduseks tulevastele põlvkondadele, järjest sügavamalt loodust peegeldavate teooriate loomiseks.

Ka Einsteini kriitilist hoiakut kvantteooria suhtes ei tule käsitada ainuüksi negatiivse seisukohana, veelgi vähem püüdena, mis nõuaks taandumist kvantteooria positsioonidelt klassikalise füüsika positsioonidele, kvantstatistiliselt põhjuslikkuse kontseptsioonilt klassikalise statistika kontseptsioonidele. Faktiliselt kritiseeris Einstein kvantteooriat hoopiski radikaalsematelt positsioonidelt. Ja ei tohi kaugeltki unustada ka eitamise tunnetuslikku tähtsust. Kvantfüüsika üks rajajaid Niels Bohr kirjutab sel puhul: «. . . Ma tahaksin väga nüüd, kus Einsteini enam ei ole meiega, rääkida sellest, kui palju tegi see inimene kvantfüüsika heaks oma igavese, taltsutamatu püüdega täiuslikkuse poole, arhitektuurilise harmoonia poole, teooriate klassikalise lõpetatuse poole, ühtse süsteemi poole, mille alusel võiks arendada kogu füüsikalist maailmapilti. . . . Igal uuel etapil heitis Einstein väljakutse teadusele ja kui ei oleks olnud neid väljakutseid, oleks kvantfüüsika areng märgatavalt pikemaks veninud . . .»

ALBERT EINSTEINI MÕTTEID MATEMAATIKAST

Ü. Lumiste

Nagu iga tänapäeva füüsikateoreetik, pidi A. Einstein tundma hästi matemaatika neid harusid, mida tal tuli rakendada oma uurimustes. Sageli ei piisanud valmis meetodite kasutamisest — neid tuli tihti loovalt edasi arendada. Kõige selle kõrval huvitus Einstein elavalt ka üldisemat laadi filosoofilistest probleemidest, nagu füüsikalise maailma ja matemaatilise abstraktsiooni vahekorrast, matemaatikast kui reaalsuse tunnetamise vahendist jm. Tema kui kõikide aegade ühe suurima füüsikateoreetiku seisukohad neis küsimustes on väärtuslikud mitte ainult matemaatikule, vaid kõigile teaduse arengust ja filosoofilistest probleemidest huvitatud isikuile.

A. Einstein gümnaasiumiõpilasena

Lähem tutvus matemaatikaga algas Einsteinil juba varases nooruses. Innustajateks olid insenerist onu ja vanaisa. Onu kõneles poisile: «Algebra — see on lõbus teadus. Kui me ei suuda tabada jahilooma, keda me kütime, siis me nimetame ta ajutiselt «iksiks» ja jätkame jahti, kuni pistame ta kotti.» Einstein ise meenutab oma autobiograafias (ja teistes kirjutistes) õpingute aega järgmiselt.

Kui olin 12-aastane, sain hoopis teistlaadi ime osaliseks: selle allikaks oli raamatuke eukleidilisest geomeetriast tasandil. Seal olid väited, näiteks kolmnurga kõrguste lõikumisest ühes punktis, mis ei olnud sugugi endastmõistetavad, kuid olid ometi tõestatavad veenvusega, mis oleks nagu kõrvaldanud igasuguse kahtluse. Niisugune selgus ja veenvus jättis mulle kirjeldamatu mulje. Mind ei seganud see, et aksioomid tuli omaks võtta tõestuseta. Üldse oli mulle küllalt, kui võisin oma tõestustes tugineda niisugustele *väidetele, mille tõesus näis mulle vaieldamatu. Mäletan näiteks, et Pythagorase teoreemi tutvustas mulle vanaisa veel enne, kui mu pihku sattus õnnistatud raamatuke geomeetriast. Suure vaevaga õnnestus mul «tõestada» see teoreem sarnaste kolmnurkade abil, kuigi pidasin seejuures täiesti «ilmseks», et täisnurkse kolmnurga külgede suhe määratakse täielikult ühega tema teravnurkadest. Mulle näis, et tõestada tuleb ainult seda, mis ei ole taolises mõttes «ilmne». Ka objektid, millega tegeleb geomeetria, ei paistnud mulle olevat teistlaadi kui «nähtavad ja kombitavad» esemed, s. t. esemed, mis on tajutavad meeleorganeile. See primitiivne arusaam põhines muidugi sellel, et alateadlikult arvestasin seost geomeetriliste mõistete ja nähtavate esemete vahel (pikkus — jäik varras jne.). Võimalik, et I. Kanti tuntud küsimuse seade «sünteetilise á priori otsustuse» kohta tuginebki sellele arusaamale.*

Kuigi paistis nii, nagu võiks puhta mõtlemise teel saada tõepärast informatsiooni kaemuslike asjade kohta, ometi rajanes see «ime» eksiarvamusele. Sellele vaatamata näib igale, kes tunnetab taolist «imet» esimest korda, imeväärsena fakt ise, et inimene on võimeline saavutama abstraktses mõtlemises niisugust usaldatavuse ja puhtuse astet, mida näitasid meile esimesena kreeklased geomeetrias.

(*Autobiographisches*[1], 1949)

* * *

Me austame Antiik-Kreekat — Lääne teaduse hälli. Siin loodi esimesena loogiline süsteem — tõeline mõtte ime; ta järeldused voolavad üksteisest sellise selgusega, et igaüks saab täiesti tõepäraseks. Jutt on Eukleidese geomeetriast. See imetlusväärne teos andis inimmõttele tema järgnevais püüdlusis väga suure eneseusalduse. Keda nooruses pole haaranud entusiasm taolise loomingu ees, see ei ole sündinud, et saada teoreetikuks.

(*Comment je vois le monde*[2], 1934)

* * *

12—16 aasta vanuses tutvusin matemaatika, kaasaarvatud diferentsiaal- ja integraalarvutuse algmetega. Seejuures sattusid mulle õnneks raamatud, milles ei pööratud liialt palju tähelepanu loogilisele rangusele, kuid see-eest oli kõikjal hästi esile toodud põhiidee. Need harrastused olid tõeliselt köitvad; neis oli mõttesööste, mis muljeterikkuselt ei jäänud maha elementaargeomeetria «imest» — analüütilise geomeetria põhiidee, lõpmatud read, diferentsiaali ja integraali mõiste.

Selleks ajaks, kui ma 17-aastaselt astusin Zürichi polütehnikumi füüsika-matemaatika üliõpilaseks, olin ma juba veidi tuttav teoreetilise füüsikaga. Mul olid seal suurepärased õpetajad (näiteks Hurvitz, Minkowski), nii et ma, tõtt öelda, oleksin võinud saada soliidse matemaatilise hariduse. Mina aga töötasin suurema osa ajast füüsika laboratooriumis, vaimustudes vahetust kokkupuutest eksperimendiga ... Mulle kui üliõpilasele ei olnud veel selge, et pääs kõige sügavamate põhimõtteliste probleemide juurde füüsikas nõuab kõige peenemaid matemaatilisi meetodeid. See hakkas mulle selguma alles aegamööda, pärast paljusid aastaid iseseisvat teaduslikku tööd.

(*Autobiographisches*, 1949)

Tee, mida mööda sammus Einstein teaduses, viis teda paratamatult üpris keeruka ja tehniliselt raskepärase matemaatikani. Esialgu erirelatiivsusteoorias võis läbi saada veel suhteliselt lihtsate matemaatiliste meetoditega, milledele andis lõpliku vormi Einsteini endine õpetaja Hermann Minkowski (1864—1909) (kes muide märkis pärast erirelatiivsusteooria ilmumist, et ta ei

---

[1] Tõlgitud väljaandest: Эйнштейн и современная физика. М., 1956.
[2] Vt. Кузнецов, Б. Г., Эйнштейн. М., 1962, lk. 105.

oodanud midagi taolist oma Zürichi üliõpilaselt). Einstein kirjutab selle kohta järgmist.

Enne Minkowski uurimusi tuli mõne füüsikaseaduse invariantsuse kontrollimiseks viia Lorentzi teisendus läbi lõpuni. Minkowskil õnnestus luua selline aparaat, et seaduse matemaatiline kuju ise juba kindlustab tema invariantsuse Lorentzi teisenduste suhtes. Luues neljamõõtmelise tensorarvutuse andis Minkowski neljamõõtmelise ruumi jaoks selle, mida ruumi kolme mõõtme puhul annab harilik vektorarvutus.[3] *Ta näitas samuti, et Lorentzi teisendus ei ole midagi muud kui koordinaadistiku pööre neljamõõtmelises ruumis (kui mitte arvestada erinevust märgis, mis on tingitud aja eriiseloomust).*

(*Autobiographisches*, 1949)

Erirelatiivsusteooria matemaatiliseks aparaadiks on seega lineaaralgebra (täpsemalt kõneldes teatav eriline neljamõõteline analüütiline geomeetria koos vastava tensoralgebraga). Kuid niipea, kui Einstein asus oma kontseptsioone laiendama ka gravitatsiooninähtuste valdkonda, selgus kohe selle lineaarse aparaadi piiratus.

Lineaarsed seadused rahuldavad lahendite osas superpositsiooni printsiipi ja ei ütle järelikult midagi elementaarmoodustiste vastasmõju kohta. Tõelised seadused ei saa olla lineaarsed ega või olla saadavad lineaarsetest seadustest.

Gravitatsiooniteooria õpetas mulle: empiiriliste faktide kogu, ükskõik kui ulatuslik ta ka oleks, ei või viia nii keerukate võrranditeni. Katsetega võib kontrollida teooriat, kuid ei ole teed katsetest teooria loomiseni. Sedavõrd komplitseeritud võrrandid nagu gravitatsioonivälja omad, on leitavad ainult pärast loogiliselt lihtsa matemaatilise tingimuse leidmist, mis määrab täielikult või peaaegu täielikult nende võrrandite kuju. Kui aga niisugused küllalt ranged formaalsed tingimused on juba leitud, siis on teooria konstrueerimiseks vaja üsna vähe faktilisi andmeid. Gravitatsioonivõrrandite puhul on sellisteks formaalseteks tingimusteks: neljamõõtmelisus ja oletus, et ruumi struktuur määratakse sümmeetrilise tensoriga. Need tingimused koos invariantsuse nõudega pidevate teisenduste rühma suhtes määravad võrrandite kuju praktiliselt täiesti üheselt.

Tee, mida mööda ma läksin üldrelatiivsusteooria esialgsel formuleerimisel, on iseloomustatav järgmiselt. Kui me isegi ei tea, missugused on need muutujad (välja struktuur), millega tuleb kirjeldada füüsikalist ruumi, siis on meile ometi küllalt hästi tuntud üks erijuht: erirelatiivsusteooria «väljavaba» ruum. Niisugust ruumi iseloomustab see, et sobivalt valitud koordinaatsüsteemis kahe punktiga seotud avaldis

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - dx_4^2 \quad (1)$$

kujutab endast mõõdetavat suurust (kauguse ruutu), järelikult on reaalse füüsikalise sisuga. Suvalises süsteemis see suurus avaldub järgmiselt:

$$ds^2 = g_{ik} dx_i dx_k, \quad (2)$$

kus indeksid omandavad väärtusi 1-st kuni 4-ni. Suurused g_{ik} moodustavad sümmeetrilise tensori.

---

[3] Neljamõõtmelise ruumi all mõtleb Einstein siin muidugi aeg-ruumi. Tensorarvutuse lõi juba möödunud sajandi lõpul itaalia matemaatik G. Ricci-Curbastro (1853—1925). Minkowski vaid rakendas seda aeg-ruumi uurimisel. Meetodi kõige hiilgavamad rakendused, mis tegid tensorarvutuse laialt tuntuks, kuuluvad siiski Einsteinile endale.

Füüsikalise ruumi üldist seadust ... ma iseloomustasin sellega, et kuigi väli on ikkagi veel esitatav Riemanni meetrikaga (2) vastava sümmeetrilise tensori abil, ometi ei leidu esitust kujul (1) (arvestamata lõpmata väikest lähendust) ... On selge, et sel juhul peavad kehtima välja võrrandid, mis esitavad eelneva seaduse üldistust (kitsenduste nõrgendamist).

(*Autobiographisches*, 1949)

Eeltoodust nähtub, et Einsteinil on üldrelatiivsusteooria arendamisel «areeniks» neljamõõtmeline Riemanni ruum, mida ta füüsikaliselt tõlgendab ühtse aeg-ruumina. Sellise ruumi struktuur määratakse iga punkti ümbruses täielikult kahevalentse sümmeetrilise tensoriga g_{ik} — ruumi nn. meetrilise tensoriga. Juba Minkowski uurimusest selgus, et tensor g_{ik} peab olema erilise ehitusega: maatriksi g_{ik} omaväärtustest peavad kolm olema ühe märgiga ja üks — see, mis vastab ajale — sellest erineva märgiga (vt. (1)). Einsteini julge üldistus viis aga selleni, et aeg-ruumi tuli tal üldiselt vaadelda mitte enam «tasasena», vaid igas punktis veidi «kõverana» (nii, nagu näiteks ookeani pinda tuleb vaadelda pisut kõverana). Matemaatiliselt tähendab see, et ruumis ei ole võimalik leida koordinaate selliselt, et meetrilise tensori g_{ik} komponentidel oleksid kõikides punktides täpselt ühesugused väärtused. Analüütilise geomeetria asemele astub siin diferentsiaalgeomeetria, täpsemalt öeldes viimase haru, mida tuntakse Riemanni geomeetria nime all. Niisugust «kõvera» ruumi geomeetriat olid matemaatikud viljelnud juba möödunud sajandi keskpaigast alates ja loonud aparatuuri, milleta Einsteinil poleks üldse olnud võimalik oma geniaalseid ideid täpsesse ja rangesse vormi valada.

Einstein ei saanud aga piirduda ainult valmis meetodite rakendamisega. Tal tuli leida võimalusi ka nende täiustamiseks. Tensoranalüüsis, mis sai uue geomeetria ja füüsika (ning hiljem veel mitme teise täppisteaduse haru) peamiseks uurimisvahendiks, tuntakse «Einsteini summeerimiskokkulepet». Selle järgi võib näiteks avaldist

$$\sum_{i,k=1}^{4} g_{ik}dx_i dx_k = g_{11}(dx_1)^2 + \ldots + g_{44}(dx_4)^2 + \\ + 2g_{12}dx_1dx_2 + \ldots + 2g_{34}dx_3dx_4$$

kirjutada rahulikult ilma summamärgita kujul $g_{ik}dx_idx_k$ (nagu Einstein teebki valemis (2)). Mingeid arusaamatusi, nagu juba kauaaegne praktika on veenvalt näidanud, ei ole vaja karta. Vastupidi — kirjutised muutuvad palju lihtsamateks ja seetõttu ülevaatlikumateks.

Einsteini üldrelatiivsusteooriast selgus, et gravitatsiooninähtuste kirjeldamisel on eriline tähtsus üht eritüüpi Riemanni ruumidel, mida praegu tuntaksegi matemaatikas Einsteini ruumide nime all. Viimaste teooria on kujunenud ühtviisi tähtsaks nii geomeetriale kui füüsikale. Üldiste Riemanni ruumide seast eraldatakse nad üht erilist geomeetrilist omadust väljendava diferentsiaalvõrrandisüsteemiga, mis Einsteini järgi osutub gravitatsioonivälja võrrandisüsteemiks tühja ruumi ja homogeenselt paikneva mateeriaga täidetud ruumi jaoks.

Selle süsteemi lahendamine kujutab endast äärmiselt komplitseeritud ülesannet. Einsteini ühest kirjast oma kunagisele lähimale kaastöötajale poola füüsikateoreetikule L. Infeldile loeme:

Ärge pange pahaks, et ma nii vähe kirjutan. Probleemideemon surub mind halastamatult oma küünte vahele ja sunnib tegema meeleheitlikke pingutusi, et ületada matemaatilisi raskusi.

L. Infeld meenutab ühise töö aegu[4]: «Väljateooria — niisugune nagu Maxwelli elektromagnetilise välja teooria või Einsteini gravitatsioonivälja teooria — on formuleeritud osatuletistega diferentsiaalvõrrandite abil. Nende võrrandite lahendamiseks, selleks et leida tulemus, mida võib võrrelda eksperimendiga, tuleb integreerida. See on sageli seotud pika ja töörohke protseduuriga. Loogiline ahel, mis viib teooriast vaatlusteni, seisneb peaasjalikult niisuguses diferentsiaalvõrrandite integreerimise protseduuris. Selles seisnevad meie peamised tehnilised raskused. Kui me kuude kaupa töötasime sedalaadi probleemide kallal, kõneles Einstein: «Issandat jumalat ei huvita meie matemaatilised raskused. Ta integreerib empiiriliselt».[5]

Selles lauses väljendub Einsteini veendumus, et loodusseadused on järeldatavad lihtsast teooriast, ning et nimelt lihtsus, aga mitte deduktsiooniga seotud tehnilised raskused on antud teooria ilu mõõdupuuks.»

Ühtse väljateooria loomise katsed viisid Einsteini veelgi suuremate üldistuste juurde, milledega matemaatikud seni polnud veel tihanudki tegelema hakata. Ta võttis esimesena vaatluse alla niinimetatud üldistatud Riemanni ruumid (ehk Einsteini mitteriimanlikud ruumid). Nad erinevad Riemanni ruumidest esmajoones selle poolest, et sümmeetriline tensor g_{ik} on asendatud samasuguse mittesümmeetrilise tensoriga. Nende ruumide geomeetria uurimine on tänapäeval alles täies hoos.

Einsteini tööd innustasid matemaatikuid ka teistlaadi üldistustele. Nii tõi H. Weyl sisse nn. afiinse seostusega ruumid, J. A. Schouten ja E. Cartan projektiivse ja konformse seostusega ruumid, mis kõik on ühel või teisel moel kasulikud ka füüsikas. Üldse tuleb öelda, et üldise relatiivsusteooria loomine on triumfiks mitte ainult abstraktsele geomeetriale ja selle analüütilisele aparaadile, vaid üldse ideedele geomeetria ja füüsika tihedast

---

[4] Инфельд, Л., Мои воспоминания об Эйнштейне. Kogumikus: Эйнштейн и современная физика. М., 1956.

[5] Einstein, kerge huumorivarjundiga, nagu ta seda sageli armastas teha, personifitseerib kogu looduse «Issanda jumala» isikusse.

seosest, mida selgelt väljendasid juba N. I. Lobatševski ja B. Riemann. Peamiselt nende ideede kohta käivad ka Einsteini enda filosoofilist laadi mõtteavaldused matemaatikast. Alljärgnevalt neist mõningaid.

Tavaliselt on kombeks geomeetria käsitlemisel abstraheerida igasugused sidemed tema mõistete ja meie kogemuse vahel. Kahtlemata on omad eelised puhtalt loogiliste, juba loomult ebatäielikust eksperimendist mitte sõltuvate asjade väljaeraldamises. Puhast matemaatikut see rahuldab. Talle on küllalt, kui ta suudab oma teoreemid tuletada aksioomidest korrektselt, s. t. ilma loogiliste vigadeta. Küsimus, kas eukleidiline geomeetria on õige või mitte, teda ei puuduta. Kuid meie eesmärkideks on vajalik siduda geomeetria põhimõisted looduse objektidega; ilma niisuguse seoseta ei ole geomeetrial füüsika jaoks mingit väärtust.

(*The Meaning of Relativity*[6], 1953)

* * *

Kaasaja teaduse seisukohalt geomeetria omaette võetuna pole seotud, rangelt kõneldes, üldse mittemingite katsetega, teda tuleb nende puhul rakendada koos mehhaanikaga, optikaga jne ... Geomeetria peab eelnema füüsikale, sest viimase seadused ei ole väljendatavad ilma geomeetriata. Seetõttu peabki geomeetria näima teadusena, mis loogiliselt eelneb igale eksperimendile ja igale eksperimentaalteadusele.

(Неэвклидова геометрия и физика[7])

* * *

Eksperiment jääb kahtlemata matemaatiliste konstruktsioonide füüsikas rakendatavuse ainsaks kriteeriumiks, kuid tõeliselt loominguline printsiip sisaldub nimelt matemaatikas. Selliselt vaatekohalt pean ma õigeks antiik-õpetlaste veendumust: puhas mõte on võimeline haarama reaalset.

(*Comment je vois le monde*, 1934)

* * *

Mõistete süsteem, nagu lauseõpetuse struktuuri määravad reeglidki, on inimlooming. Kuigi mõistete süsteemid omaette on loogiliselt täiesti meelevaldsed, seob neid siiski see, et nad peavad: esiteks, lubama võimalikult usaldatavat (intuitiivset) ja täielikku vastavust aistingute koguga; teiseks, nad peavad püüdma läbi ajada vähima arvu loogiliselt sõltumatute elementidega (põhimõtete ja aksioomidega), s. t. niisuguste mõistetega, mille jaoks ei anta definitsioone, ja niisuguste lausetega, mille jaoks ei anta tõestust.

(*Autobiographisches*, 1949)

* * *

Füüsikaliste teooriate ainus erinevus matemaatilistest konstruktsioonidest seisneb järgnevas. Füüsikaline teooria peab andma oluliselt täieliku ja taas kindlaks tehtava vastavuse kindlates terminites kirjeldatud reaalsuse ja vahetute meeleliste tajumuste vahel. Küsimus sellest, kuidas seda vastavust seada, on lahendatav ainult intuitiivselt ega või olla väljendatav loogiliselt formuleeritud teooria raames.

(*The Meaning of Relativity*, 1953)

---

[6] Tõlgitud väljaandest: Эйнштейн, А., Сущность теории относительности. М., 1955.

[7] V. F. Kagani arhiivist leitud Einsteini käsikiri, mis avaldati kogumikus: Эйнштейн и развитие физико-математической мысли. М., 1962.

LOGARITMIDE SÜND

E. Tamme

Matemaatika õpetamisel keskkoolis pööratakse sageli üsna vähe tähelepanu käsitletavate küsimuste ajaloole. Kuid faktide toomine matemaatika ajaloost seab õpitava aine paljudel juhtudel hoopis uude valgusse, aitab äratada huvi selle vastu ja teeb ta seetõttu paremini omandatavaks. Käesolevas kirjutises heidame pilgu sellele, kuidas matemaatikute arsenali ilmusid logaritmid ja kuidas koostati esimesed logaritmide tabelid.

Logaritmide sünnist, s. t. ajast, millal John Napier (loe: ′neipiər) avaldas esimesed logaritmitabelid, möödus 1964. aastal kolm ja pool sajandit. Logaritmide kasutuselevõtmine toimus olukorras, kus Euroopas üldise majandusliku ja kultuurilise arengu baasil hoogustus ka matemaatika areng ning laienesid tema rakendusalad. Palju tegeldi sellal arvutamisega, eriti seoses täpsete trigonomeetriliste tabelite koostamisega, mida vajasid astronoomid ja meresõitjad, ehitajad ja konstruktorid. Trigonomeetriliste tabelite arvutamisest võtsid osa ka tuntud astronoomid Mikolaj Kopernik (1473—1543) ja Johannes Kepler (1571—1630) ning nende õpilased ja kaastöötajad. Näiteks XVI sajandi lõpul ilmusid Koperniku õpilaste koostatud 10-kohalised tabelid, milles sisaldusid kõigi kuue trigonomeetrilise funktsiooni väärtused iga 10″ tagant. Murdude vältimiseks [1] võeti seejuures ringi raadiuseks $r = 10^{10}$.

On hästi teada, et paljukohaliste arvude korrutamine ja jagamine nõuab palju aega ja vaeva. Arvutamise lihtsustamiseks otsiti mitmesuguseid teid. Teatavaid võimalusi selleks pakkusid ka trigonomeetrilised tabelid. Näiteks valemi

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

ja koosinustabeli abil saab arvude korrutamise taandada liitmi-

[1] Kümnendmurrud võttis Euroopas kasutusele madalmaade insener Simon Stevin alles 1585. a. Neid rakendas aga enam kui poolteist sajandit varem al-Kaši — Samarkandi observatooriumis töötanud silmapaistev matemaatik ja astronoom.

sele ja lahutamisele[2]. Tunduvalt efektiivsemaks arvutusabivahendiks kujunesid aga logaritmid, mis järk-järgult tõrjusid välja teised meetodid.

Logaritmide idee

Põhimõtted, millele tugineb logaritmide kasutamine arvutusabivahendina, olid tuntud juba enne XVII sajandit. Eriti selgelt väljendas neid saksa matemaatik Michael Stifel (1485—1567) oma peatöös «Üldine aritmeetika» (*Arithmetica integra*, 1544).

Stifel vaatles nimelt ühe ja sama arvu astmeid, näiteks geomeetrilist progressiooni

$$2^1 = 2,\ 2^2 = 4,\ 2^3 = 8,\ 2^4 = 16,\ 2^5 = 32,\ 2^6 = 64,\ 2^7 = 128, \ldots$$

Jätkates seda ka vasakule

$$2^0 = 1,\ 2^{-1} = \frac{1}{2},\ 2^{-2} = \frac{1}{4},\ 2^{-3} = \frac{1}{8}, \ldots$$

saame tabeli:

—3	—2	—1	0	1	2	3	4	5	6	7
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64	128

Selle tabeli teises reas on geomeetrilise progressiooni $\{2^n\}$ liikmed, esimese reas aga vastavad astendajad, mis moodustavad aritmeetilise progressiooni. Vaadeldes neid progressioone, näitas Stifel, et geomeetrilise progressiooni liikmete korrutamise saab taandada vastava aritmeetilise progressiooni liikmete liitmisele (kusjuures võib tekkida vajadus tabeli pikendamiseks). Näiteks

$$4 \cdot 16 = 2^2 \cdot 2^4 = 2^{2+4} = 2^6 = 64,$$

$$\frac{1}{8} \cdot 128 = 2^{-3} \cdot 2^7 = 2^{-3+7} = 2^4 = 16.$$

Analoogiliselt taandub geomeetrilise progressiooni liikmete jagamine, asendamine ja juurimine aritmeetilise progressiooni vastavate liikmete lahutamisele, korrutamisele ja jagamisele. Näiteks

$$64 : \frac{1}{2} = 2^6 : 2^{-1} = 2^{6-(-1)} = 2^7 = 128,$$

$$\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{2^6} = 2^{6:3} = 2^2 = 4.$$

[2] Vrd. Lumiste, Ü., Lehekülgi matemaatika ajaloost Eestis. — Matemaatika ja kaasaeg, I. 1963, lk. 51.

Ülaltoodud tabeli esimeses reas on sisuliselt teise rea arvude logaritmid alusel 2. Kuid see tabel on liialt hõre tema kasutamiseks arvutuspraktikas. Seda Stifel ei taotlenudki. Oma märkused lõpetas ta sõnadega: «Võiks kirjutada terve uue raamatu imepärastest arvudest, kuid siin tuleb mul sellega piirduda ja mööduda neist kinnisilmi».

Stifeli sõnastatud ideid saab kasutada arvutuste lihtsustamiseks ainult siis, kui koostada geomeetrilise progressiooni tabelid, milles progressiooni liikmed paiknevad küllalt väikeste vahemike tagant. Selle saavutamiseks tuleb progressiooni tegur valida lähedane ühele. Esimesteks sellisteks tabeliteks on Simon Stevini (1548—1620) liitprotsentide tabelid, milles on esitatud geomeetrilised progressioonid

$$1,\ 1+r,\ (1+r)^2,\ (1+r)^3,\ (1+r)^4,\ (1+r)^5,\ \ldots$$

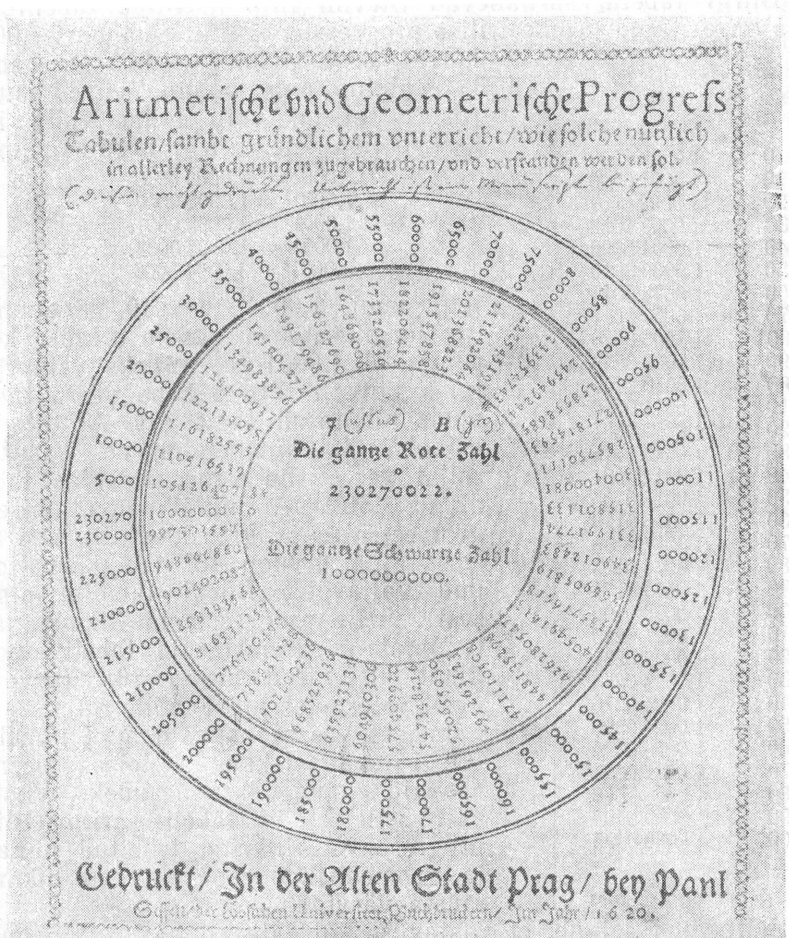
mõnede r väärtuste korral ($r = 0{,}01$; $0{,}02$; $0{,}03$; $0{,}04$; $0{,}05$). Kuigi neid tabeleid oleks saanud (eriti $r = 0{,}01$ korral) kasutada ka korrutamise, jagamise, astendamise ja juurimise hõlbustamiseks juhul, kui nõutakse suhteliselt väikest täpsust, ei viita Stevin sedalaadi võimalustele.

Logaritmide tõelisteks loojateks tuleb lugeda šotlast John Napieri ja šveitslast Jobst Bürgit, kes peaaegu samaaegselt ja teineteisest sõltumatult koostasid ulatuslikud logaritmide tabelid ning näitasid nende kasutamist arvutusabivahendina. Napier ja Bürgi avaldasid oma tabelid vastavalt 1614. ja 1620. aastal. Esikohale tuleb kahtlemata tõsta täiuslikumad Napieri tabelid, kuid tutvumist alustame siiski Bürgi omadest, sest need on oma ehituselt lihtsamad.

Bürgi tabelid

Šveitsist pärit Jobst Bürgi (1552—1632) töötas tunnustatud kellassepana ja astronoomiliste instrumentide meistrina Kasselis ja Prahas. Kuigi tal polnud matemaatilist eriharidust, saavutas ta tänu oma visadusele ja talendile ka arvutajana ja matemaatikuna märkimisväärseid tulemusi, mida ta aga kahjuks ei armastanud avaldada. Eriti viljakaks kujunes Bürgi koostöö Johannes Kepleriga Praha astronoomia observatooriumis, kus ta abistas Keplerit tohutute arvutuste teostamisel, mis viisid planeetide liikumise seaduste (nn. Kepleri seaduste) avastamiseni. Märgime, et Bürgi hakkas iseseisvalt kasutama kümnendmurde (arvatavasti sõltumatult Stevinist) ja tegeles rida aastaid siinustabelite koostamisega, mille sammuks oli 2″.

Logaritmide tabelid arvutas Bürgi aastatel 1603—1611 Prahas, kuid trükist ilmusid need sealsamas alles 1620. a. (ja sedagi Kepleri pealekäimisel), kandes vastavalt selle aja tavadele pikka paljuütlevat pealkirja «Aritmeetilise ja geomeetrilise progressiooni tabelid ühes põhjaliku õpetusega, kuidas neid tuleb mõista ja igasugustes arvutustes kasulikult rakendada» (*Aritmetische und Geometrische Progress-Tabulen*...). Viivitus maksis Bürgile prioriteedi. Juba 6 aastat varem olid trükitud Napieri märksa täiuslikumad tabelid. Kepler märkis 1627. a., et Bürgi oleks saa-



Bürgi tabelite tiitelleht. Sellel on välimises ringis numbrid trükitud punasega, sisemises mustaga.

nud oma tabelid avaldada aastaid enne Napierit, kuid «viivitav salatseja jättis vastsündinud lapse endale, selle asemel, et teda üldsuse kasuks suureks kasvatada». 1620. a. ei äratanud Bürgi tabelid enam erilist tähelepanu. Neist on säilinud vaid üksikud eksemplarid ja needki ilma pealkirjas lubatud «põhjaliku õpetuseta», mida nähtavasti ei trükitudki koos tabelitega («õpetus» leiti hiljem ja avaldati 1856. a.). Bürgi töö käsikirja säilitatakse Pulkovo obervatooriumis koos teiste Kepleri arhiivi materjalidega.

Bürgi tabelid sarnanevad Stevini liitprotsentide tabelitega, neis on esitatud geomeetrilise progressiooni liikmed teguri 1,0001 korral, s. t. astmed $(1{,}0001)^n$. Tabeli koostamine pole põhimõtteliselt kuigi raske, sellega võib toime tulla iga keskkooliõpilane. Bürgi arvutas nimelt

$$1{,}0001^0 = 1{,}0000\,0000,$$
$$1{,}0001^1 = 1{,}0001\,0000,$$
$$1{,}0001^2 = 1{,}0002\,0001,$$
$$1{,}0001^3 = 1{,}0003\,0003,$$
$$1{,}0001^4 = 1{,}0004\,0006$$

jne. kuni $1{,}0001^{23027} \approx 10$. Seejuures iga järgneva arvu saame eelmise korrutamisel 1,0001-ga, milleks eelnevale tuleb lihtsalt liita 4 koha võrra tahapoole nihutatud sama arv. Arvestades asjaolu, et kümnendmurde kasutati sellal veel üsna vähe, sisaldas tabel ainult täisarve, mille saavutamiseks geomeetrilise progressiooni liikmed on korrutatud arvuga 10^8 (vt. kõrvaltoodud väljavõtet Bürgi tabelite algusest). Selle progressiooni liikmete astendajate n asemel olid tabelis tegelikult kirjutatud arvud $10n$ (arvatavasti interpoleerimise hõlbustamiseks). Esimeses veerus asuvaid arve nimetas Bürgi «punasteks» ja teises veerus asuvaid «mustadeks» arvudeks. Vastavalt sellele olid tabelis aritmeetilise progressiooni liikmed trükitud punase ja geomeetrilise progressiooni liikmed musta värviga.

x	y
0	1 0000 0000
10	1 0001 0000
20	1 0002 0001
30	1 0003 0003
40	1 0004 0006
50	1 0005 0010
60	1 0006 0015
70	1 0007 0021
80	1 0008 0028
90	1 0009 0036
100	1 0010 0045
110	1 0011 0055
120	1 0012 0066
130	1 0013 0078
140	1 0014 0091
150	1 0015 0105
160	1 0016 0120
170	1 0017 0136
180	1 0018 0153
190	1 0019 0171
200	1 0020 0190
210	1 0021 0210
220	1 0022 0231
230	1 0023 0253
240	1 0024 0276
250	1 0025 0300
260	1 0026 0325
270	1 0027 0351
280	1 0028 0378
290	1 0029 0406
300	1 0030 0435

Eeltoodust selgub, et vastavuses olevate «punaste» ja «mustade» arvude vahel kehtib järgmine seos:

$$y = 10^8 \cdot (1{,}0001)^{x:10} = 10^8 \cdot a^{x:10^5},$$

kus konstant

$$a = \left(1 + \frac{1}{10000}\right)^{10000} = 2{,}718\,145\,9\ \ldots$$

on lähedane naturaallogaritmide alusele

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2{,}718\,281\,8 \ldots$$

Logaritmi mõistet kasutades võib seose x ja y kirjutada ka kujul

$$x : 10^5 = \log_a (y : 10^8).$$

Et Bürgi tabel on korrastatud «punaste» arvude järele, mis kasvavad sammuga 10, siis on meil faktiliselt tegemist antilogaritmide tabeliga alusel a. Bürgil küll logaritmi aluse mõistet ei esine ning sõltuvalt sellest, kuhu paigutame koma «punastel» arvudel, võime neid tõlgitseda logaritmidena mitmesugustel alustel. Näiteks võib neid vaadelda ka logaritmidena alusel 1,0001, sest

$$x : 10 = \log_{1,0001} (y : 10^8).$$

Bürgi tabel lõpeb nn. «täieliku punase» arvuga 230 270,022 (see interpoleerimise teel saadud arv on ainsaks mittetäisarvuks «punaste» hulgas), millele vastab nn. «täielik must» arv 10 0000 0000. Tabelis sisalduva 23 027 «musta» arvu leidmine nõudis suurt arvutustööd, milleks Bürgil kulus 8 aastat. Ümardamisest tingitud täpsuse kao vähendamiseks tuli arvutamisel säilitada ka teatav hulk lisakohti, mis tulemustes on ümardatud. Arvutuste täpsust iseloomustab asjaolu, et «täielikus punases» arvus on kõik 9 kümnendkohta õiged. Märgime, et seda tüüpi tabelite maht ja tihedus sõltuvad oluliselt sellest, kuivõrd vähe erineb geomeetrilise progressiooni tegur 1-st. Näiteks teguri 1,001 korral saaksime umbes 10 korda väiksema tabeli.

Bürgi tabeli kasutamine tugineb põhimõtetele, mis sõnastas juba Stifel. Jaotame algebralised tehted nende sooritamise raskust arvestades järgmisse kolme klassi:

I	liitmine	lahutamine
II	korrutamine	jagamine
III	astendamine	juurimine

Vaadeldud tabel võimaldab taandada II klassi tehete sooritamise I klassi tehetele ja III klassi tehete sooritamise II klassi tehetele (seejuures tuleb korrutada ja jagada vastavalt astendaja ja juurijaga). Näiteks kahe arvu a ja b korrutise arvutamisel leiame neile kui «mustadele» arvudele vastavad «punased» arvud, liidame need omavahel ning otsime summale vastava «musta» arvu, mis võrdubki korrutisega ab. Seejuures võib tekkida vajadus järgmise kolme abivõtte järele, mida on üldse sobiv kasutada arvutamisel 10-st erineva alusega logaritmide (näit. naturaallogaritmide) tabelite abil.

1. Kui lähtearvu suurusjärk ei ühti «mustade» arvude suurusjärguga (s. t. ta ei asu vahemikus $10^8 \leqslant a \leqslant 10^9$), siis tuleb teda kõigepealt korrutada sobivalt valitud astmega 10^k, kus k on täisarv. Näiteks arvu 36 asemel otsime

«mustade» arvude huigast 3 600 0000. Tulemuse suurusjärgu võime määrata «silma järgi» samal põhimõttel nagu arvutuslükati kasutamiselgi.

2. Kui lähtearvul on küll sobiv suurusjärk, kuid ta siiski ei ühti täpselt ühegi «musta» arvuga, siis Bürgi soovitab leida vastava «punase» arvu lineaarse interpolatsiooni abil. Seejuures lihtsustab arvutamist asjaolu, et vastavalt tabeli koostamise põhimõtetele võrdub kahe järjestikkuse musta arvu erinevus neist esimesega, korrutatuna 0,0001-ga. Lineaarse interpolatsiooni järele võib tekkida vajadus ka «punastele» arvudele vastavate «mustade» leidmisel.

3. Tehete sooritamisel «punaste» arvudega (näit. nende liitmisel või lahutamisel) võib juhtuda, et tulemus on kas negatiivne või suurem «täielikust punasest» arvust, millisel juhul ta ei asu «punaste» arvude vahemikus. Sellisel juhul tuleb kõigepealt tulemusele liita või sellest lahutada «täielik punane» arv (see vastab tulemuse korrutamisele või jagamisele 10-ga) ning alles seejärel pöörduda tabeli poole. Bürgi vaatleb näitena jagatise

$$154\,030\,185 : 205\,518\,112$$

arvutamist. Jagatavale ja jagajale vastavad «punased» arvud 43 200 ja 72 040. Et nende vahe on negatiivne, siis leitakse 43 200—72 040 asemel

$$230\,270{,}022 + 43\,200 - 72\,040 = 201\,430{,}022,$$

millele vastab must arv 749 472 554. Seega

$$154\,030\,185 : 205\,518\,112 = 0{,}749\,972\,554.$$

Napieri tabelid

John Napier ehk ladinapäraselt Neper (1550—1617) on šoti aadlik, kes sai suurepärase hariduse oma kodumaal ja Hollandis. Palju aega pühendas ta aga astroloogiliste horoskoopide arvutamisele. On ilmunud näiteks raamat «Verine almanahh, mis sisaldab palju õigeid ennustusi sellest, mis juhtub 1647. aastal, ühes arvutustega hirmsa kohtumõistmise aja saabumise kohta. Koostanud ja avaldanud kuulus astroloog Merchistoni lord Neper». Tuleb aga arvestada võimalust, et tegemist on võltsinguga.

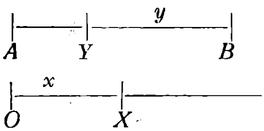
Matemaatika ja astronoomiaga tegeles Napier asjaarmastajana. Ta tundis aga hästi selle aja töid astronoomiast ja sfäärilisest trionomeetriast ning saavutas ka ise nendel aladel märkimisväärseid tulemusi. Mainime, et just Napier soovitas eraldada kümnendmurru murdosa täisosast koma või punktide abil, mis XVII sajandil järk-järgult võetigi üldkasutatavaks.

Ühest Napieri kirjast saame teada, et logaritmitabelite moodustamise ja kasutamise idee oli tal juba 1594. aastal. Kuid kulus veel 20 aastat arvutustööd enne, kui 1614. a. võis ilmuda Napieri peatöö «Imepäraste logaritmitabelite kirjeldus» (*Mirifici logarithmorum canonis descriptio*) Töö eesmärgist kirjutab ta sissejuhatuses: «Ma olen alati püüdnud, kuivõrd seda lubavad minu jõud ja võimed, vabaneda arvutamise raskusest ja igavusest, mille tüütus paljusid peletab matemaatika õppimisest».

Põhimõttelise tähtsusega, eriti logaritmide hilisemal rakendamisel kõrgemas matemaatikas, oli Napieri antud logaritmi kinemaatiline definitsioon. Kui Bürgi kõrvutas ainult aritmeetilist ja

John Napier
1550—1617

geomeetrilist progressiooni, mis võimaldas saada vaid diskreetse tabeli, siis Napier määratles logaritmi pideva funktsionaalse sõltuvusena järgmisel viisil. Ta vaatles kahe punkti X ja Y liikumist kahel sirgel. Punktid lähtugu samal hetkel ja sama kiirusega vastavalt kohtadelt A ja O. Seejuures punkt X liikugu ühtlaselt, punkt Y aga aeglustuvalt nii, et tema kiirus igal hetkel oleks võrdeline punkti poolt veel läbimata lõigu YB pikkusega y. Iga hetke jaoks saame 2 arvu: $y = YB$ ja $x = OX$, millest teist Napier nimetab esimese l o g a r i t m i k s. Viimane termin tuleneb kahest kreekakeelsest sõnast λόγος (suhe) ja ἀριθμός (arv). Seega otseses tõlkes tähendab logaritm suhtearvu, mille all Napier mõtles teatavaid abiarve. Varem on Napier logaritme nimetanud ka «kunstlikeks arvudeks».



Kaasaegse sümboolika abil saame seose x ja y vahel väljendada valemiga

$$\frac{x}{r} = -\ln\frac{y}{r} = \log_{1/e}\frac{y}{r},$$

kus r on lõigu AB pikkus ja ln tähistab naturaallogaritme, s. t. logaritme, mille aluseks on eespool defineeritud arv $e = 2{,}718\ldots$

Tõepoolest, tähistades punktide Y ja X kiirused v_Y ja v_X, saame Napieri definitsioonist seose

$$\frac{v_Y}{v_X} = \frac{y}{r}, \text{ ehk } \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{r}.$$

Viimase diferentsiaalvõrrandi integreerimisel leiamegi

$$\frac{x}{r} = -\ln\frac{y}{r}, \text{ sest } x = 0, \text{ kui } y = r.$$

Asudes tutvuma Napieri tabelitega näeme, et neis sisalduvad seitsmekohalised trigonomeetriliste funktsioonide ja nende logaritmide väärtused, kusjuures murdude vältimiseks on võetud $AB = r = 10^7$. Tabeli igal leheküljel on 7 veergu (vt. lk. 98), 1. veerus on nurgad α iga $1'$ tagant, teises nende siinused (täpsemalt suurused $y = r\sin\alpha$) ja kolmandas siinuste logaritmid (suurused $x = -r\ln\sin\alpha$). Viimases veerus asuvad esimese veeru nurkade täiendusnurgad $90° - \alpha$, kuuendas nende siinused (ehk esimese veeru nurkade koosinused) ning viiendas viimaste logaritmid. Keskmises veerus on kolmanda ja viienda veeru logaritmide vahed, s. t. esimese veeru nurkade tangensite logaritmid, sest

$$\log\tan\alpha = \log\sin\alpha - \log\cos\alpha = \log\sin\alpha - \log\sin(90° - \alpha).$$

Vastavust Napieri tabeli teise ja kolmanda ning kuuenda ja viienda veeru arvude vahel saab kasutada samuti nagu vastavust «mustade» ja «punaste» arvude vahel Bürgi tabelites. Kuid Napieri tabelid avavad ka uusi võimalusi, eriti trigonomeetriliste arvutuste teostamisel, millele tabeli sissejuhatavas osas on ka viidatud.

Napieri tabelite viimaselt leheküljelt loeme: «Et selle tabeli arvutused, mida oleks pidanud teostama paljude arvutajate osa-


MIRIFICI

Logarithmorum
Canonis descriptio,

Ejusque usus, in utraque
Trigonometria, ut etiam in
omni Logistica Mathematica,
Amplissimi, Facillimi, &
expeditissimi explicatio.

Authore ac Inventore,
IOANNE NEPERO,
Barone Merchistonii,
&c. Scoto.

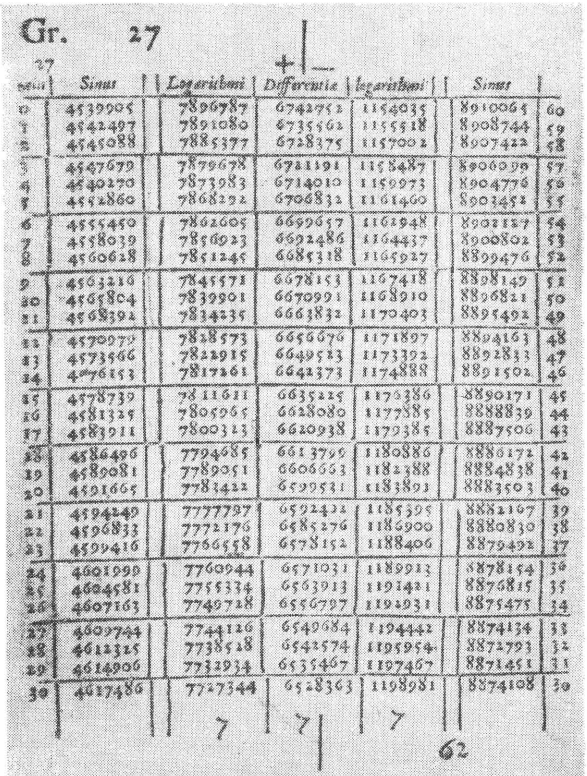
L. EVERS.

EDINBURGI,
Ex officina ANDREÆ HART
Bibliopolæ, CIƆ. DC. XIV.

Napieri tabelite tiitelleht

võtul, on sooritanud üks inimene, siis pole ime, kui temas peitub palju vigu. Tekkisid need arvutaja väsimuse või tipograafia hooletuse tõttu, nende eest palun heatahtlikult lugejalt vabandust. Siiski, kui ma näen, et õpetlastel on sellest leiutisest meeldivat kasu, siis võib-olla ma peatselt selgitan viisi, kuidas seda teost täiustada, et teda avaldada paljude arvutajate poolt hoopis täpsemana teostatuna, kui see on võimalik ühele. Miski pole tekkides täiuslik.»

Napieri lubatud teos, milles selgitatakse logaritmide arvutamise võtteid, ilmus aga alles pärast autori surma, kandes pealkirja «Imepäraste logaritmitabelite ehitus» (*Mirifici logarithmorum canonis constructio*, 1619). Arvatavasti on ta kirja pandud aga varem ülalvaadeldust. Näiteks esineb siin «logaritmi» asemel veel termin «kunstlik arv».



Gr. 27

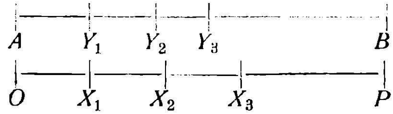
\+ | —

27 min	Sinus	Logarithmi	Differentiae	logarithmi	Sinus	
0	4539905	7896787	6742752	1154035	8910065	60
1	4542497	7891080	6735562	1155518	8908744	59
2	4545088	7885377	6728375	1157002	8907422	58
3	4547679	7879678	6721191	1158487	8906099	57
4	4550270	7873983	6714010	1159973	8904776	56
5	4552860	7868292	6706832	1161460	8903451	55
6	4555450	7862605	6699657	1162948	8902127	54
7	4558039	7856923	6692486	1164437	8900802	53
8	4560628	7851245	6685318	1165927	8899476	52
9	4563216	7845571	6678153	1167418	8898149	51
10	4565804	7839901	6670991	1168910	8896821	50
11	4568392	7834235	6663832	1170403	8895492	49
12	4570979	7828573	6656676	1171897	8894163	48
13	4573566	7822915	6649523	1173392	8892833	47
14	4576153	7817261	6642373	1174888	8891502	46
15	4578739	7811611	6635225	1176386	8890171	45
16	4581325	7805965	6628080	1177885	8888839	44
17	4583911	7800323	6620938	1179385	8887506	43
18	4586496	7794685	6613799	1180886	8886172	42
19	4589081	7789051	6606663	1182388	8884838	41
20	4591665	7783422	6599531	1183891	8883503	40
21	4594249	7777797	6592422	1185395	8882167	39
22	4596833	7772176	6585276	1186900	8880830	38
23	4599416	7766558	6578152	1188406	8879492	37
24	4601999	7760944	6571031	1189913	8878154	36
25	4604581	7755334	6563913	1191421	8876815	35
26	4607163	7749728	6556797	1192931	8875475	34
27	4609744	7744126	6549684	1194442	8874134	33
28	4612325	7738528	6542574	1195954	8872793	32
29	4614906	7732934	6535467	1197467	8871451	31
30	4617486	7727344	6528363	1198981	8874108	30
		7	7	7		

62

Lehekülg Napieri tabelitest

Me saame teada, et logaritmide tegelikul arvutamisel jaotab Napier ühtlaselt liikuval punktil X lõigu $OP = AB = r$ läbimiseks kuluva aja 10^7 võrdseks ajavahemikuks ning oletab, et nendel väga väikestel ajavahemikel toimub



ka punkti Y liikumise ühtlaselt ja nimelt kiirusega, mis on võrdeline punkti Y kaugusega punktist B ajavahemiku algul. Oletame, et punktide algkiirus $v = 1$ ja samuti lõigu AB pikkus $r = 1$ (Napieril oli murdude vältimiseks tegelikult $r = 10^7$) ning tähistame punktide Y ja X asukohad 1., 2., 3., . . .

ajavahemiku lõpul $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ ja $X_1, X_2, X_3, \ldots$. Siis esimese ajavahemiku lõpul

$$x_1 = OX_1 = \frac{1}{10^7}, \quad y_1 = Y_1B = 1 - \frac{1}{10^7}.$$

Edasi liigub punkt Y kiirusega $y_1 = 1 - \frac{1}{10^7}$, mistõttu

$$x_2 = OX_2 = \frac{2}{10^7}, \quad y_2 = Y_2B = 1 - \frac{1}{10^7} - \frac{1}{10^7}\left(1 - \frac{1}{10^7}\right) = \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^2.$$

Kolmanda ajavahemiku lõpul

$$x_3 = OX_3 = \frac{3}{10^7}, \quad y_3 = Y_3B = \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^2 - \frac{1}{10^7}\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^2 = \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^3.$$

Induktiivselt pole raske veenduda, et ka üldiselt n-nda ajavahemiku lõpul

$$x_n = OX_n = \frac{n}{10^7}, \quad y_n = Y_nB = \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^n.$$

Tegelik arvutusprotsess on Napieril väga lähedane Bürgi omaga, ainult geomeetriline progressioon on Napieril mitte kasvav, nagu Bürgil, vaid kahanev. Ka siin on geomeetrilise progressiooni liikmete arvutamine näiteks valemi

$$y_n = y_{n-1} - 0,000\,000\,1\, y_{n-1}$$

abil äärmiselt lihtne, kuigi aeganõudev. Et Napieril on geomeetrilise progressiooni tegur tunduvalt lähemal 1-le kui Bürgil, siis vajaliku ulatusega tabeli saamiseks ainult viimase valemi abil tuleks sooritada miljoneid samme, mis praktiliselt pole enam hästi teostatav. Seetõttu kasutab Napier kunstlikke võtteid, mis võimaldavad oluliselt vähendada arvutuste mahtu, näiteks teataval etapil piirduda ainult geomeetrilise progressiooni iga sajanda liikme leidmisega.[3]

Sellisel teel saadav Bürgi tabeliga analoogiline aritmeetilise ja geomeetrilise progressiooni tabel etendab Napieril vaid abitabeli osa. Selle baasil moodustab Napier 1614. a. avaldatud põhitabeli, milleks interpoleerimise abil tuli veel leida siinuste logaritmid.

Üleminek definitsioonis määratud pidevalt funktsioonilt geomeetrilise progressiooni moodustamisele tingib seda, et Napieri logaritmide aluseks pole enam täpselt $^1/_e$, vaid $^1/_b$, kus

$$b = (1,\ 000\,000\,1)^{10\,000\,000} = 2{,}718\,281\,69\ldots$$

väga vähe erineb arvust $e = 2{,}718\,281\,128\ldots$ Erinevus on sedavõrd väike, et vastavate logaritmide erinevus peaks olema väiksem Napieri tabeli viimase koha ühikust. Tegelikult on aga Napier tabelite koostamisel teinud väikese arvutusvea, mistõttu, vaatamata väga hoolikalt teostatud arvutustele, pole tabelis logaritmide viimased kohad enam õiged. Muide seda viga saab tõlgendada ka logaritmidesüsteemi aluse asendamisega arvust $^1/_b$ veidi erineva arvuga.

Kümnendlogaritmid

Paljud Napieri kaasaegsed mõistsid uute tabelite tähtsust arvutusabivahendina ning võtsid nad vaimustusega vastu. Peatselt avaldas Edward Wright (surn. 1615) tabelid ladina keelest inglise keelde tõlgitud tekstiga. Londoni kolledži profes-

---

[3] Lähemalt Napieri arvutusvõtetest võib lugeda raamatust: Абельсон И. Б., Рождение логарифмов. М.—Л., 1948, ptk. V.

sor Henry Briggs (1556—1630) kirjutas: «Neper, Merchistoni lord, on minu pea ja käed tööle pannud oma uute ja imetlusväärsete logaritmidega. Ma loodan teda käesoleval suvel näha ... Mitte kunagi pole ma näinud raamatut, mis oleks mulle rohkem meeldinud ja mind enam imetlema pannud.» Briggs teostaski kavatsuse ning sõitis 1615. a. suvel Šotimaale Edinburghi. Kohtumisel Napieriga olevat ta öelnud: «Milord, ma võtsin selle pika reisi ette ainult selleks, et Teid näha ja teada saada, millise teravmeelse relva ja kunsti abil Te jõudsite mõttele suurepärasest abivahendist astronoomidele — logaritmidest. Muide, nüüd imestan ma rohkem selle üle, et keegi neid varem ei leidnud, seevõrra näivad nad lihtsatena pärast seda, kui neid tunda.»

Napier ja Briggs sõbrunesid ning arutasid kohtumisel küsimust uute, arvutamiseks veelgi sobivamate logaritmitabelite koostamisest. Nimelt Napieri tabelite kasutamisel toovad endaga kaasa mõningaid ebameeldivusi asjaolud, et 0-ga võrdub mitte arvu 1 vaid arvu 10^7 logaritm ning et arvu korrutamisel või jagamisel kümne täisastmega oluliselt muutub tema logaritm. Nende asjaolude analüüsimisel olid nii Briggs kui ka Napier juba varem jõudnud kümnendlogaritmide sissetoomise ideele. Koos töötasid nad välja selle logaritmisüsteemi põhimõtte, mis tugineb järgmise geomeetrilise ja aritmeetilise progressiooni võrdlemisele:

Arvud	1	10	10^2	10^3	10^4	...
Logaritmid	0	1	2	3	4	...

Tabelite koostamisel tuli leida logaritmid ka arvudest, mis pole kümne täisastmed. Briggs asuski innuga tööle, kasutades seejuures vägagi leidlikke võtteid [4]. Ta külastas Napieri ka 1616. a. suvel ning 1617. a. ilmusidki Briggsi tabelid arvude 1 — 1000 8-kohaliste kümnendlogaritmidega. Seetõttu nimetatakse kümnendlogaritme vahel ka Briggsi logaritmideks. Briggs jätkas arvutusi ning avaldas 1624. a. 14-kohalised kümnendlogaritmid arvudest 1 — 20 000 ja 90 000 — 101 000. Seejärel asus ta koostama 10-kohalisi tabeleid trigonomeetriliste funktsioonide logaritmidest, mis ilmusid posthuumselt 1633. a. Märgime, et nendes tabelites oli kraad jaotatud 100 minutiks ja minut omakorda 100 sekundiks, s. t. kümnendsüsteem oli laiendatud ka nurgamõõtudele.

Briggsi tööd jätkas hollandi raamatukaupmees Adriaen Vlack (1600—1667), kes 1828. a. avaldas 10-kohalised tabelid

[4] Mõnedest Briggsi arvutusvõtetest on juttu raamatutes: Гиршвальд, Л. Я., История открытия логарифмов. Харьков, 1952; Рыбников, К. А., История математики, I. M., 1960.

arvude 1 — 100 000 kümnendlogaritmidega ning varsti seejärel ka 10-kohalised tabelid trigonomeetriliste funktsioonide logaritmidega nurkadest iga 10″ järele. Sellega olid üldjoontes lõpule viidud tohutud arvutustööd logaritmitabelite koostamiseks. Hilisemad tabelid tuginevad sageli Vlacki tabelitele, kuigi on muudetud viimaste struktuuri ja parandatud neis esinevaid vigu. Märgime, et Vlacki tabelitest on leitud 173 viga ning isegi austria arvutaja Georg Vega (1756—1802) poolt väga hoolikalt koostatud 7-kohalised tabelid (ilmusid 1783. a.) sisaldasid veel 5 viga.

Logaritmitabelite edasine areng on toimunud kahes suunas. Ühelt poolt on üldkasutusele võetud järk-järgult väiksemaid tabeleid. Nii andsid Vlacki 10-kohalised tabelid teed 7-kohalistele, seejärel 5-kohalistele tabelitele; tänapäeval aga kasutatakse koolides enamasti 4-kohalisi tabeleid. Sellised üleminekud ei toimunud sugugi rahulikult, vaid nõudsid visa võitlust, sest paljud ei tahtnud nõustuda õigustatud väidetega, et enamikes arvutustes saavutame küllaldase täpsuse ka hoopis väiksemate ja mugavamate tabelite abil, mis suurel määral lihtsustab logaritmide kasutamist ja kiirendab arvutamist.

Teiselt poolt esineb teaduses ja tehnikas arvutusi, mis nõuavad väga suurt täpsust. Nende sooritamiseks on koostatud suure kümnendkohtade arvuga tabelid. Märgime näiteks Wolframi 48-kohalisi logaritme arvudest 1 — 10 000 ja Adamsi 260-kohalisi logaritme arvudest 2, 3, 5, 7 ja 10 (mõlemad on naturaallogaritmide tabelid).

Osutub, et logaritmide omadused ja kasutamisviis ei sõltu palju logaritmide süsteemi alusest. Logaritmi kaasaegse definitsiooni abil on nimelt üsna lihtne näidata, et logaritmid alusel a ja b on omavahel võrdelised:

$$\log_b x = \frac{1}{\log_a b} \log_a x \quad (a > 0,\ b > 0).$$

Näiteks naturaallogaritmid avalduvad kümnendlogaritmide kaudu järgmiselt:

$$\ln x = \frac{1}{M} \log x, \qquad \text{kus } \frac{1}{M} = \frac{1}{\log e} = 2{,}302\,585\,092\,994 \ldots .$$

Seetõttu on ühe aluse jaoks koostatud logaritmitabelite abil üsna lihtne leida logaritme ka mingil teisel alusel. Arvutusabivahendina on kõige enam levinud kümnendlogaritmid, sest nende murdosa (mantiss) ei muutu logaritmitava arvu korrutamisel või jagamisel kümne täisastmega.

Kõrgemas matemaatikas aga kasutatakse peaaegu erandituIt naturaallogaritme, sest nende korral on kõige lihtsam teostada diferentseerimist ja teisi matemaatilise analüüsi tehteid. Mainime, et naturaallogaritme nimetatakse vahel ka mitte päris õigustatult Napieri logaritmideks. Tegelikult Napieri arvutatud logaritmid, nagu eespool selgitasime, erinesid naturaallogaritmidest, kuigi vähe. Esimesed väikesed naturaallogaritmide tabelid avaldas 1619. a. vähetuntud inglise matemaatikaõpetaja John Speidel, nimetust «naturaallogaritm» hakkas aga 1668. a. kasutama Nicolaus Mercator (Kaufmann, 1620—1687).

Märgime veel, et sümbolid logaritmide tähistamiseks on tekkinud loomulikul sõnade lühendamise teel ning nad võeti kasutusele varsti pärast esimeste logaritmitabelite ilmumist, kuigi seda tegid eri autorid mõnevõrra erineval kujul. Näiteks sümbolit «Log» kohtame Kepleri (1624) ja Briggsi (1630) töödes, sümbolit «log» aga itaallase B. Cavalieri (1632) juures.

Logaritmid on möödunud kolme ja poole sajandi jooksul etendanud väga tähtsat osa arvutusabivahendina. Seda iseloomustas XIX sajandi prantsuse matemaatik ja astronoom Pierre Simon Laplace, väites, et «logaritmide leiutamine vähendas astronoomide tööd, pikendas nende elu». Tänapäeval on logaritmitabelite osa arvutuste teostamisel mõnevõrra vähenenud, sest järjest igapäevasemaks muutuvad nende võistlejad — arvutuslükatid ja arvutusmasinad, mille ajalugu on peaaegu sama pikk nagu logaritmide ajalugugi. Juba 1620. aastal hakkas logaritmilisi skaalasid arvutamisel kasutama Londoni professor Edmund Gunter (1581—1626) ning esimese teadaoleva aritmomeetri arvude liitmiseks, lahutamiseks, korrutamiseks ja jagamiseks konstrueeris ja ehitas 1623. a. Tübingenis saksa matemaatikaprofessor Wilhelm Schickard (1592—1635). Nende arvutusvahendite arengu jälgimine nõuaks aga juba omaette artiklit.

NOVALISE[1] MÕTTETERI MATEMAATIKAST

Kogu matemaatika — see on õigupoolest üks suur võrrand teiste teaduste jaoks.

Mida logaritmid on matemaatikale, seda on matemaatika teistele teadustele.

Matemaatika — see tähendab teadust üldse. Seetõttu kõik teadused peavad saama matemaatikaks.

Nüüdne matemaatika on ... mõtlemise abivahend.

Tema piiritu rakendatavus on tema enese vajalikuks postulaadiks.

Tema aluseks on seesmine kooskõla, ülesehituse terviklikkus.

Tõeline matemaatik — see on tõeline entusiast.

Ilma entusiasmita pole mingit matemaatikat.

See, kes ei võta aukartusega matemaatilist raamatut ja ei loe seda kui avastust, see ei mõista teda.

[1] Novalis (kodanikunimega Friedrich von Hardenberg, 1772—1801) on saksa poeet-romantik.

Matemaatiline päevakaja

ÜHEST PEDAGOOGIDELE VAJALIKUST BROŠÜÜRIST

I. Kull

Teadusalade areng toimub tänapäeval ühe kiirenevas tempos. Nii näiteks kahekordistub inimteadmiste hulk umbes 10 aastaga. Kõik see sunnib paratamatult otsima võtteid ja meetodeid õppeprotsessi efektiivsuse suurendamiseks. Üheks selliseks meetodiks on programmeeritud õpetamine, mis on rakendamist leidnud nii Nõukogude Liidus kui ka välismaal (eriti USA-s). Et tõsisem huvi programmeeritud õpetamise probleemide vastu tekkis meie maal alles 1960-ndatel aastatel, on ülevaatlikke teoseid sellelt alalt ilmunud ainult üksikuid, needki pühendatud peamiselt ühe või teise kollektiivi töösuundade ja -tulemuste käsitlemisele. Seda enam on põhjust rõõmu tunda U. Aguri brošüüri ilmumisest, mille eesmärgiks on asjaliku ja igakülgse ülevaate andmine ülalnimetatud küsimustest.[1]

Brošüüris analüüsitakse kõigepealt traditsioonilise õppeviisi puudusi (õppeprotsessi mitteküllaldane individualiseeritus, süstemaatilise kontrolli puudumine jne.), mille kõrvaldamise püüded põhjustasidki programmeeritud õpetamise tekkimist. Programmeeritud õpetamise üldiselt aktsepteeritud ja täpne määrang praegusajal veel puudub. U. Agur iseloomustab programmeeritud õpetamist järgmiste momentide esiletõstmisega: 1) kursuse range, detailideni viimistletud ülesehitus materjali loogilise struktuuri alusel; 2) õppematerjali doseerimine, s. o. esitamine annustena; 3) kohustuslik materjali omandatuse kontroll iga annuse esitamise järel; 4) kontrolli tulemuste kohene teatavakstegemine õppijale.

Nendes seisukohtades ei ole iseenesest midagi printsipiaalselt uut. Programmeeritud õpetamise iseärasus seisneb aga nende põhimõtete võimalikult täielikus ja järjekindlas rakendamises.

Brošüüri järgnevas osas vaadeldakse õppematerjali programmeerimise meetodeid. Nii on võimalik materjali esitada kas jada- või hargprogrammi abil. Viimasel juhul sõltub õppeprotsessi käik (annuste valik ja nende järjekord) õpilase vastustest kontrollküsimustele. Materjali omandamise kontrolli võib samuti teostada kahel erineval viisil, kasutades kas nn. valikvastuste või konstrueeritavate vastuste meetodit. Edasi antakse ülevaade õpetamismasinatest, kõige lihtsamatest — perfoplaatidest, kuni kõige komplitseeritumateni — kaasaegsete arvutite baasil töötavate automatiseeritud klassideni. Viimases peatükis käsitletakse programmeeritud õpetamise mõningaid teoreetilisi ja pedagoogilisi probleeme (traditsioonilise ja uue õppemeetodi vahekord, programmeeritud õpetamise efektiivsuse määramine jne.), samuti edasisi perspektiive.

Kõiki brošüüri kohta tehtavaid märkusi on võimalik resümeerida umbes järgmiselt: teos paistab silma ladusa sõnastuse ja küsimuste selge ning asjaliku käsitluse poolest.

Kuigi vaadeldavas brošüüris leiavad käsitlemist mitmed küsimused õppetööst just kõrgemates koolides (nagu märgib ka brošüüri pealkiri), on teoses esitatav põhiline probleemistik sõltumatu sellest, kas on tegemist alg-, kesk- või kõrgema kooliga. Seepärast on selle brošüüriga soovitav tutvuda kõigil pedagoogidel. Kahjuks on see ilmunud aga rotaprindiväljaandena ja väikeses tiraažis. Käesoleva kirjutise autori arvates tuleks nimetatud teos tingimata anda välja trükis — nii eesti kui ka vene keeles.

---

[1] A g u r, U., Programmeeritud õpetamine ja õpetamismasinad ning nende rakendamine kõrgemas koolis. Tln., 1964, 120 lk., TPI rotaprindi väljaanne.

MILLEGA TEGELDAKSE ÜLIKOOLI MATEMAATIKARINGIS?

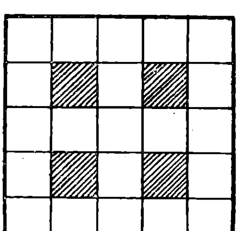
A. Riesen

1964/65. õppeaasta algusest oli möödunud ainult paar nädalat, kui matemaatika- ja füüsikaosakonna värsketest tudengitest moodustati matemaatikaring. Avakoosolekul tutvustasid õppejõud K. Ariva, E. Jürimäe, I. Kull, L. Kivistik ja E. Tiit kohalviibijatele probleeme, mille käsitlemine oleks mõeldav ringi tööna I kursusel.

Üliõpilased valisid vastavalt huvialadele endile teemad; moodustati arvutusmatemaatika ja geomeetria töörühmad (viimasesse kuuluvad ka II kursuse üliõpilased). Vene õppekeelega osakonna üliõpilased alustasid tööd matemaatilise analüüsi rühmas.

Liikmete arvult on kõige suurem arvutusmatemaatikarühm. Peatume kõigepealt mõningatel küsimustel, mis on olnud arutlusobjektideks selles rühmas. Sissejuhatavas ettekandes rääkis dotsent Ü. Kaasik lahendusalgoritmi blokk-skeemi koostamisest ülesande ettevalmistamisel elektronarvutil lahendamiseks.[1]

Järgnevatel koosolekutel esinesid Tartu I Keskkooli lõpetajad, kelle tööd olid valminud juba keskkoolis Ü. Kaasiku juhendamisel. T. Urbanik tutvustas ristsõnade koostamise programmi blokk-skeemi. Selle alusel on ta teinud ka programmi, mille järgi elektronarvuti valib viietäheliste sõnade sõnastikust 6 sobivat sõna allpool esitatud ruudustikku.



Programmi ühekäiguliste maleülesannete lahendamiseks koostas T. Haldre, kes järgmisel koosolekul tutvustas programmi blokk-skeemi ning kirjeldas selle koostamisel rakendatud ideid.

J. Simm käsitles üht suhteliselt lihtsat kahe mängija vahelist mängu malelaual ning esitas ringi koosolekul nimetatud mängu taktikalise blokk-skeemi (koostatud oli ka programm). Palju elevust tekitas kohalolijate hulgas mäng kuulajate ja «masina» vahel (viimase osas esines programmi autor). Mäng lõppes alati «masina» võiduga.

Järgnes seeria referatiivseid ettekandeid matemaatilise statistika alalt (juhendaja E. Tiit).

Ettekannetega aritmeetilisest keskmisest ja dispersioonist esines A. Riesen. Näited oma kursuse erinevate rühmade hinnete võrdlemisest andsid võimalusi ka nendest probleemidest huvitavalt rääkida.

Seejärel kõneles J. Karu teemal «Spearmani korrelatsioon.» Näitena arvutas ettekandja korrelatsiooni üliõpilaste mütsinumbrite ja kontrolltööde hinnete vahel (noormeestel ilmnes siin tugev positiivne, tütarlastel aga nõrk negatiivne korrelatsioon).

Teist semestrit alustas A. Vainer kauguse mõiste põhjalikuma analüüsimisega.[2]

Teiseks semestriks jõudsid tulemusteni ka need üliõpilased, kelle ülesandeks oli järelduste tegemine läbitöötatud statistilise materjali põhjal.

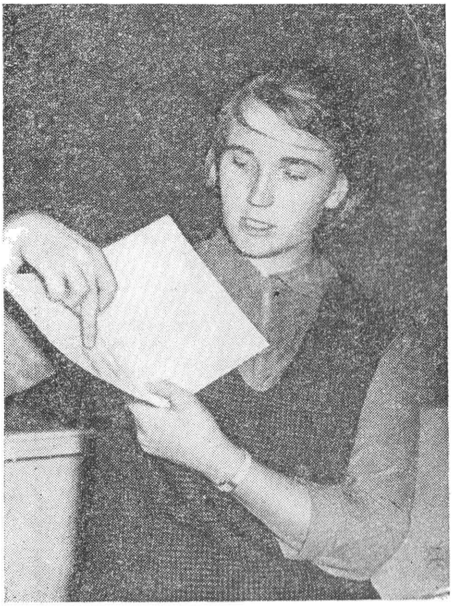
Mahuka arvutusliku töö tegi ära S. Noomen, kes uuris matemaatikaosakonna üliõpilaskandidaatide ja üliõpilaste eksamitulemuste kooskõla, võrreldes küpsuseksamite, sisseastumiseksamite ja ülikooli I kursuse kevadiste eksamite tulemusi (vaadeldi ainult matemaatilisi aineid). Kahe aastakäigu (1961 ja 1963) andmete põhjal arvutati välja kooskõlakordajad. Selgus näiteks, et suhteliselt

[1] Vt. Matemaatika ja kaasaeg, V, lk. 24—36.

[2] Lähemalt vt. Võhandu, L. Kauguse mõiste rakendusi. — Matemaatika ja kaasaeg, II, 1964, lk. 25—30.

suured on need kordajad küpsuseksamite ja sisseastumiseksamite tulemuste võrdlemisel, kõigi kolme eksami tulemuste võrdlemisel aga üsna väikesed.

Kirjandusteoste stiili statistilist uurimist ei ole eesti kirjanduses seni veel tehtud — seda kinnitavad ka kirjandusteadlased. Arvutusmatemaatikarühma liige T. Laisk proovis



Arvutusmatemaatikarühma liige Tiina Laisk esinemas

nimetatud meetodit rakendada Ed. Vilde loomingu analüüsimiseks. Prof. V. Alttoa nõuandel valiti uurimiseks teosed «Musta mantliga mees», «Mahtra sõda» ja «Mäeküla piimamees», kusjuures uuriti erinevate lausetüüpide pikkusi ning esinemissagedusi vaadeldavate teoste erinevates osades

Stiili erinevus vaadeldavates teostes on ilmne: esimest raamatut iseloomustab suhteliselt pikk dialoog ja kirjeldavate lausete väike hulk. «Mahtra sõjas» on stabiilne lausete pikkus, ülekaalu omandavad kirjeldavad laused, kuna otsene kõne on lühike. «Mäeküla piimamehes» on lausete pikkus kõige suurem, dialoogi esineb suhteliselt vähe. Huvitav on lausete pikkuse dünaamika teose vältel, mis iseloomustab sündmustiku pinget.

S. Mänd, L. Lahesalu ja E. Tamre töötavad dots. I. Kulli juhendamisel läbi «Vanemuise» külastajate ankeete. Tulemused kujunevad loodetavasti väärtuslikeks ja on kasulikud ka teatrile.

K. Torpatsil valmis ankeet matemaatikaosakonna lõpetajate kohta. Ankeedi täitjad vastavad nii teaduslikku töösse kui ka isiklikku ellu puutuvatele küsimustele. Ankeedi andmete läbitöötamine pakub kahtlemata materjali nii osakonna ajaloo uurimisel kui ka mitmesuguste statistilist laadi järelduste tegemisel.

Üks rühma töökoosolekutest toimus aga Tõraveres, kus tutvuti astrofüüsika observatooriumiga, samuti viimase arvutuskeskusega.

«Külalisena» arvutusmatemaatikarühmas esines M. Puks, kelle ettekanne «Landau sümbolid *o* ja *O*» kuulub matemaatilise analüüsi valdkonda.

Vene õppekeelega I kursuse matemaatikutest moodustati matemaatilise analüüsi rühm. Tööd alustati lihtsamate ülesannetega, nagu trigonomeetriliste võrrandite lahendamine, graafikute konstrueerimine ja algebraliste võrrandite täisarvuliste juurte leidmine. Edasi asuti purema juba keerukamaid pähkleid: käsitlusele tulid hüperboolsed funktsioonid, rekurrentsed jadad, Fibonacci arvud, ridade koonduvustunnused, lõigul pidevate funktsioonide põhiteoreemide tõestamine Heine-Boreli lemma abil. Dotsentide S. Baroni ja E. Reimersi juhendamisel püütakse ringi töö korraldada nii, et juba II kursusel oleks võimalik alustada iseseisvat tööd.

Geomeetriarühma töö, kuhu peale I ja II kursuse matemaatikute kuulub ka füüsikuid, on oma iseloomult referatiivne. Ettekanded on planeeritud mitme aasta peale perspektiiviga anda rühma liikmetele soliidne geomeetria-alane ettevalmistus iseseisvaks teaduslikuks tööks.

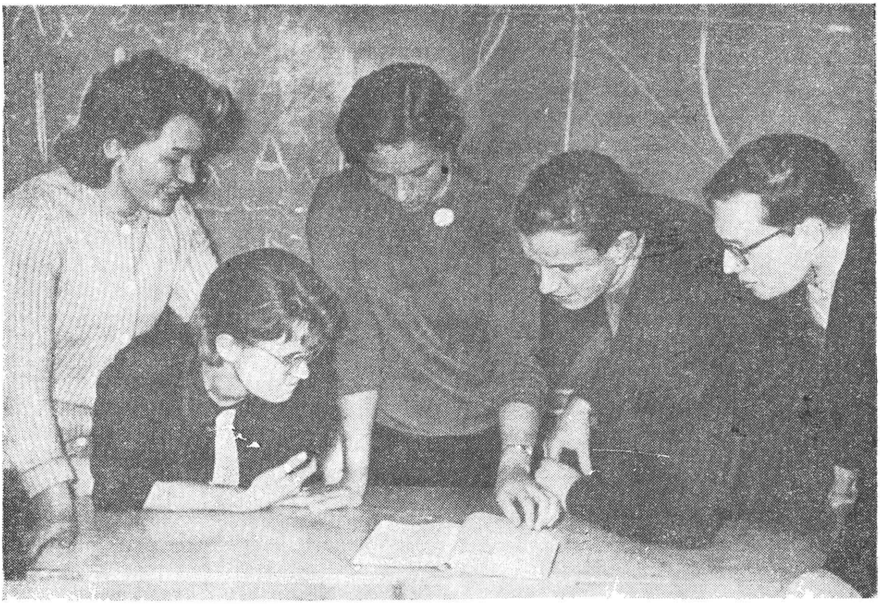
Õppejõudude K. Ariva ja M. Rahula juhendamisel võtavad ringi tööst aktiivselt osa R. Tammeveski, P. Mälk, A. Kolde, T. Haldre, I. Tart, E. Vajak jt.

Geomeetriarühma esialgseks tematikaks on põhiliselt tensormeetod.

Vektori mõiste on tuttav igaühele juba keskkoolist. Vektorarvutus ja selle üldistus — tensorarvutus — kus. Tensorarvutusega abstraktses mitmemõõtmelises ruumis tutvutakse gi geomeetriarühmas.

Plaanis on veel erirelatiivsusteooria, hiljem teadmiste täienedes aga ka üldrelatiivsusteooria matemaatilise aparatuuri uurimine.

On loomulik, et iga üliõpilane võtab osa mingist aineringist. Et olla meister, peab oma ala armastama,



Geomeetriarühma liikmed (vasakult) R. Tammeveski, A. Kolde, E. Vajak, T. Haldre ja I. Tart heidavad pilku Riemanni geomeetriasse.

aitavad tunduvalt kaasa paljude geomeetriliste ja füüsikaliste probleemide lahendamisel.

Tensori all mõistetakse mingil viisil järjestatud (reana, tabelina jne.) arvude või koordinaatide hulka, mis kirjeldab teatud geomeetrilist või füüsikalist objekti ja muutumisel teisendub koordinaatsüsteemi kindla eeskirja järgi. Oluline on selliste suuruste (invariantide) leidmine, mis iseloomustavad antud objekti sõltumata koordinaadistikust. Lihtsamaks tensori näiteks on vektor (harilikus ruumis kolme koordinaadiga), invariandi näiteks aga selle vektori pikkus

pühendama sellele ka vaba aega. Matemaatikute meistrikssaamine aga algabki just matemaatikaringis!

Tänapäeva matemaatika paljudest suundadest leiavad ringis käsitlemist muidugi vaid üsna vähesed. Tematika märgatavat laiendamist takistab aga see, et ring on määratud üksnes nooremate kursuste üliõpilastele, olles seega vaid n.-ö. sissejuhatuseks edasisele iseseisvale tööle. Põhjalik hargnemine suundade järgi toimub nimelt 3. kursusel. Siitpeale jätkub töö vastavate juhendajate juures juba kas individuaalselt või 2—3 liikmelistes rühmades.

ELEKTRONARVUTIGA LEITUD MARSRUUTIDE JÄRGI

M. Reigo

Käesoleva aasta veebruari algul valmis TA Küberneetika Instituudis programm, mis on määratud ühetüübiliste autovedude marsruutide koostamiseks elektronarvutil «Minsk-2». Selle programmi abil toimub praegu isekallutajate veomarsruutide koostamine Tallinna Autokaubaveo Valitsuse jaoks. Iga päev kella 12-ks saadetakse järgmise päeva vedude nõudmised Küberneetika Instituudi arvutuskeskusesse. Seal need perforeeritakse, antakse arvutisse ja juba kella 13-ks saadakse valmis marsruudid, mille alusel koostatakse autojuhtide teekonnalehed.

Marsruutide väljavalimiseks kasutatakse meetodit, mille kirjeldus on antud B. Geronimuse jt. artiklis [1].

[1] Vt. Геронимус, Б. и др., Применение систематического метода в планировании перевозок. — «Автомобильный транспорт», 1961, № 7, lk. 30—34. Probleemi sõnastus on esitatud ka artiklis: Kull, I., Transport ja matemaatika. — Matemaatika ja kaasaeg, III, lk. 39—49.

Selle metoodika rakendamine võimaldab vähendada tühisõitude kogupikkust umbes ühe kolmandiku võrra, võrreldes transpordis varem kasutusel olnud planeerimisvõtetega.

Marsruutide leidmiseks koostatud programm sisaldab ühe osana ka transpordiülesande lahendusprogrammi. Viimase mõõtmeid arvestades on Tallinn jagatud 44 mikrorajooniks, kusjuures vastav kauguste maatriks paikneb pidevalt elektronarvuti välismälus (magnetlindil).

Enne programmi valmimist tehti sama tööd Tallinna Autokaubaveo Valitsuses käsitsi. Vedude suuremate mahtude korral tuli ülesannet kunstlikult vähendada, kuid ka siis oli lahendamine töömahukas ja aeganõudev. Et aga lahendamise aeg oli piiratud, siis ei olnud enamasti võimalik ei parandada lahendamisel tekkinud vigu ega leida kõiki võimalikke marsruute. Nendest puudustest vabanemiseks võetigi kasutusele elektronarvuti. Nüüd sõidavad isekallutajad Tallinnas juba elektronarvuti koostatud marsruutide järgi!

„Matemaatika ja kaasaja" kirjakast

MIDA ANDIS «MATEMAATIKA JA KAASAJA» ANKEET?

«Matemaatika ja kaasaja» IV numbriga kaasa saadetud ankeetidest [1] on suur hulk toimetusse tagasi saabunud koos sisukate vastustega. Kõige elavamalt on «Matemaatika ja kaasaja» ankeedile reageerinud õpetajad — üle 60% vastustest kuulub nendele. Arvukuselt järgmine on mitmesuguste erialade inseneride grupp (18% ankeete), õpilastelt pärineb laekunud ankeetidest kõigest 12%, ülejäänud autoriteks on mitmesuguste erialade esindajad (filoloogia, metsandus, majandusteadus), pensionärid ja lõpuks ka «anonüümsed» isikud, kes on punkti 1 hoopis täitmata jätnud. Enamus vastajatest oli lugenud kõiki numbreid, seega peegeldavad ankeedivastustes antud hinnangud väljaannet tervikuna.

Küsimuse 3 («Millised artiklid meeldisid Teile kõige rohkem?») vastused näitasid, et kõige populaarsem autor on Ü. Lumiste, kelle artiklile «Lehekülgi matemaatika ajaloost Eestis» sai osaks ligi 30% antud positiivsetest hinnangutest; järgnesid «Küberneetika teoreetilisi probleeme» (15% hinnanguid), «Nelja värvi probleem» (11%) ja terve rida teisi artikleid, mis olid kõige rohkem meeldinud ühele või teisele lugejale.

Rubriikidest said peaaegu võrdselt lugejate heakskiidu osaliseks «Täiendusi koolimatemaatikale», «Küibernee-

[1] Ankeedid olid kaasas vaid osal tiraažist.

tika» ja «Matemaatika ajalugu». Vihikutest on seni parimaks peetud IV numbrit.

Küsimusele 4 («Millised artiklid ei meeldinud või tundusid ebaotstarbekohastena») oli kriitilise sisuga vastus ainult kahes ankeedis: üks vastajaist (õpetaja) leidis, et liigselt on ruumi raisatud elektronarvutitega seotud probleemidele, teisele (insener) ei meeldinud üks artikkel rubriigist «Täiendusi koolimatemaatikale». Ülejäänud lugejad kas pidasid kõiki artikleid vajalikeks või ei täitnud vastavat lahtrit üldse.

Küsimusele 5 («Kas artiklid olid kirjutatud arusaadavalt») vastas üle 70% ankeeditäitjatest jaatavalt, 10% teatud reservatsiooniga («üldiselt arusaadavad»), 20% vastajatest — eeskätt keskkooliõpilased ning mittematemaatilise haridusega lugejad märkisid mõningate artiklite puhul, et need tundusid rasketena.

Olgu siin märgitud toimetuse seisukoht: kõikide artiklite kirjutamine sellisel tasemel, et nad oleksid arusaadavad eranditult igale lugejale, sunniks meid oma materjalivalikut liigselt piirama, mis muudaks väljaande suurele osale lugejaskonnast vähehuvitavaks. Seetõttu loodame, et kuigi mõni artikkel osale lugejatest raskena tundub, ei tehta selle eest toimetusele liigseid etteheiteid, vaid tõsise huvi korral püütakse vastava kirjanduse abil, mis peaaegu alati on artiklis märgitud, iseseisvalt materjali mõistmiseni jõuda.

Kõik küsimusele 6 vastanud lugejad pidasid ülesannete lahendamist vajalikuks. Kahjuks ei ole avaldatud arvamusi ülesannete jõukohasuse kohta (kuigi on märgitud, et neid lahendati).

Vastused küsimusele 7 (rubriikide «Matemaatiline päevakaja» ja «Kroonika» kohta) on üldiselt positiivsed («...pean neid rubriike väga huvitavateks»). Ainuke negatiivne hinnang (mittematemaatikult) kõlab: «Vaid kitsale ringkonnale huvitav materjal». Sellele vastukaaluks võib aga tuua arvamuse teiselt mittematemaatikult: «Informatsiooni ja kroonika nurk on väga huvitav, eriti teiste alade esindajatele». Üldine soov on näha neis rubriikides materjale ka vennasvabariikide ja välismaa matemaatikaelu kohta. Püüame seda soovi senisest rohkem arvestada!

Uutest rubriikidest soovivad lugejad näha nelja: eestikeelse matemaatilise terminoloogia, biomeetria, mängude teooria ja insenerimatemaatika tarvis. Esimese neist avasime juba eelnevas numbris. Ülejäänud kolm ei tule toimetuse arvates iseseisvate rubriikidena arvesse, küll aga püüame mainitud suundi käsitlevaid artikleid avaldada rubriikides «Küberneetika» ja «Majandusmatemaatika».

Kõige rohkem on vastuseid kirjutatud küsimusele 9 — peaaegu igal ankeedivastajal on olnud soove avaldatavate materjalide kohta. Osale neist soovidest vastasime juba «Matemaatika ja kaasaja» eelmises numbris; on aga ka neid soove, milledele me pole vastanud, kuid püüame arvesse võtta (osalt küll alles järgnevas aastakäigus, sest käesoleva aastakäigu sisu on põhijoontes juba planeeritud).

Omapoolseid materjalipakkumisi laekus ankeedivastajailt kahjuks vähe. Siin tuleks veel korrata: lugejaid huvitab vabariigi matemaatikaelu selle kõige laiemas mõttes; ka see, missuguste metoodiliste küsimustega tegelevad õpetajad, mida tehakse koolide matemaatikaringides, milliseid probleeme lahendavad matemaatikud tööstuses jne. Selle kõige kohta ootame teilt kaastööd!

Küsimusele 12 («Kas peetakse vajalikuks muuta «Matemaatika ja kaasaeg» ajakirjaks?») olid lugejate vastused kõige üksmeelsemad: ühtegi eitavat vastust siin ei leidunud, tühjaks oli jäänud see lahter ainult kahes ankeedis (täitjad olid mittematemaatikud), ülejäänute vastusteks olid «Jah», «Tingimata vajalik», «Kindlasti» jne.

Täname siin kõiki ankeedile vastajaid ja palume oma lugejatelt edaspidi aktiivset osavõttu «Matemaatika ja kaasaja» ees seisvate probleemide lahendamisest nii kaastöö kui ka nõuannetega.

Toimetus

UUSI TEADUSTE KANDIDAATE

27. mail 1965. aastal kaitses oma väitekirja «Loogiliste skeemide sünteesist» ENSV TA Küberneetika Instituudi noorem teaduslik töötaja **Pia Hanko.** Tööd juhendas dots. Ü. Kaasik, oponeerisid füüsika-matemaatikadoktor A. Humal ja füüsika-matemaatikakandidaat I. Kull.

Väitekirjas esitatakse piisav tingimus selleks, et antud loogiline valem oleks kvaasikordumisteta skeemi juhtivusvalem. Uuritakse loogiliste valemite kvaasikordumisteta realiseeritavust juhul, kui nimetatud tingimus ei ole täidetud. Saadud tulemuste põhjal esitatakse kaks algoritmi, mis on vajalikud loogiliste skeemide sünteesimisel. Esimene algoritm eraldab antud loogilise funktsiooni disjunktiivses normaalkujus need liikmete kombinatsioonid, mis ei rahulda kvaasikordumisteta realiseeritavuse tingimusi. Juhul kui selliseid kombinatsioone ei leidu, teeb algoritm kindlaks valemi realiseeritavuse kvaasikordumisteta skeemina. Teine algoritm määrab kindlaks vajalikud kordumised otsitavas skeemis.

Pia Hanko on sündinud Tallinnas 14. jaanuaril 1932. a. Ta lõpetas 1950. aastal Tallinna 7. Keskkooli, kus tema matemaatikaõpetajaks oli R. Meresmaa. Tartu Riikliku Ülikooli matemaatikaosakonna lõpetas P. Hanko 1955. aastal.

TOIMUS KESKKOOLIÕPILASTE 12. TÄPPISTEADUSTE OLÜMPIAAD

Et täppisteadusi õpilaste hulgas populariseerida ja nende huvi matemaatika, füüsika ja keemia vastu tõsta, selleks organiseerivad ENSV Haridusministeerium ja Tartu Riiklik Ülikool igal aastal keskkooliõpilaste täppisteaduste olümpiaade.

Viimastel aastatel on see olümpiaad hõlmanud tuhandeid meie vabariigi koolide õpilasi. Seda võimaldas olümpiaadi laiendamine õpilastele alates seitsmendast õppeaastast: VII ja VIII klasside õpilased moodustavad C-grupi, IX ja X klasside õpilased B-grupi ja XI klasside õpilased A-grupi. On aga saanud traditsiooniks, et nooremate klasside õpilased räägivad tõsiselt kaasa vanemate klasside olümpiaadidel auhinnaliste kohtade jagamisel. Eriti on see silma paistnud A-grupi olümpiaadil. Nimetagem siin Kehra Keskkooli endist õpilast U n d o U u s i, Haapsalu 1. Keskkooli endist õpilast V e l l o L o o r i t s a t, Tallinna 2. Keskkooli lõpetanud H i l j a I h e r i t ja J a a k T e p a n d i t ning viimastel olümpiaadidel eriti silmapaistvalt esinenud Tartu 5. Keskkooli 10. klassi õpilast M i h k e l A u l i.

Täppisteaduste olümpiaad toimub ülesannete lahendamise võistlusena eraldi kolmes aines: matemaatikas, füüsikas ja keemias. See võistlus viiakse läbi kolmes voorus. Esimene neist toimub detsembris ja jaanuaris, kus õpilased lahendavad kodus neile antud ülesanded. Teine voor toimub juba kindlaksmääratud kuupäevadel ja kellaaegadel koolides ja kolmas voor samuti kindlaksmääratud ajal: B-grupile suuremates linnades ja rajoonikeskustes ning Agrupile Tartu Riiklikus Ülikoolis. C-grupis toimub olümpiaad ainult matemaatikas ja see viiakse läbi kahevoorulisena, s. t. selgitatakse ainult koolide parimad. B-grupis selguvad aga linnade ja rajoonide parimad ning A-grupis vabariigi parimad noored täppisteadlased.

Olümpiaade koolides juhivad vastavad olümpiaadi koolikomisjonid, linnades ja rajoonides olümpiaadi linna- või rajoonikomisjonid ja vabariiklikus ulatuses vabariiklik komisjon. Viimase esimeheks on juba aastaid olnud Tartu Riikliku Ülikooli Füüsika-Matemaatikateaduskonna dekaan dots. Anatoli Mitt.

Olümpiaadi võitjaid autasustatakse diplomite ja väärtuslike auhindadega ning lõpuklasside õpilased vabastatakse kevadel vastava aine küpsuseksameist.

Käesoleva aasta märtsi lõpul toimus Tartu Riiklikus Ülikoolis 12. täppisteaduste olümpiaadi A-grupi III voor, kus selgusid vabariigi 1964/65. õppeaasta parimad noored täppisteadlased. Matemaatikaolümpiaadi lõppvoorust võttis osa 52 õpilast 28 vabariigi keskkoolist. Neile anti lahendada järgmised ülesanded:

1. Tõestada, et igas kolmnurgas kehtib seos

$$\tan\frac{\alpha}{2}\cdot\tan\frac{\beta}{2}+\tan\frac{\beta}{2}\cdot\tan\frac{\gamma}{2}=\frac{b}{p},$$

kus b on kolmnurga üks külg ja $2p$ ümbermõõt.

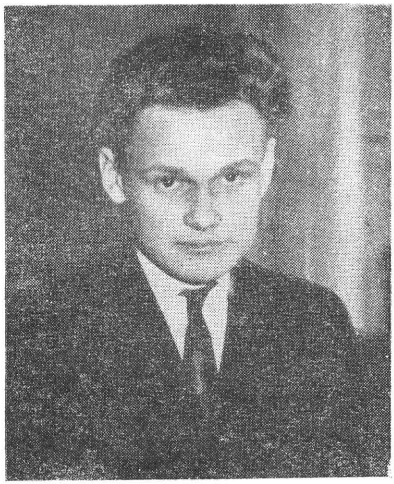
2. Lahendada võrrand:

$$(3x+2)^4+(2x-4)^4=$$
$$=(2x+3)^4+(4x-2)^4.$$

3. On antud rööpkülik $ABCD$. Küljega AB paralleelne sirge lõikab külgi BC ja AD ning diagonaali AC vastavalt punktides K, M ja L. Tõestada, et kolmnurgad ABK ja ALD on pindvõrdsed.

4. On antud aritmeetiline progressioon $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ ja geomeetriline progressioon $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$, mille puhul $a_1=b_1$, $a_2=b_2$. Progressioonid on kasvavad ja positiivsete liikmetega. Tõestada, et aritmeetilise progressiooni kõik liikmed, alates kolmandast, on väiksemad geomeetrilise progressiooni vastavaist liikmeist.

Esimese ülesande lahendas õigesti 23 õpilast, teise 40 õpilast, kolmanda 32 õpilast ja neljanda 14 õpilast. Kasutades hindamist nagu tavaliselt 5-palli süsteemis, saaks hinde «5» panna seitsmele parimale tööle, hinde «4» järgnevale kuuele tööle, hinde «3» kümnele tööle, hinde «2» kahekümne neljale tööle ja ühtegi ülesannet polnud suutnud lahendada viis olümpiaadist osavõtjat.



Mihkel Aul

Parimateks osutusid:

1. Mihkel Aul, Tartu 5. Keskkool,
2. Mihhail Popov, Tallinna 6. Keskkool,
3. Natalia Kolossova, Tallinna 31. Keskkool,
4. Piret Keres, Tartu 1. Keskkool,
5. Viktor Näkk, Tapa 2. Keskkool,
6. Boris Freidin, Tallinna 19. Keskkool,
7. Aleksander Petrušin, Tallinna 23. Keskkool,
8. Indrek Kolka, Viljandi 1. Keskkool,
9. Anatoli Stulov, Tallinna 19. Keskkool,
10. Vladimir Smirnov, Tallinna 25. Keskkool.

Parima kooli nimetuse sai matemaatika alal Tallinna 6. Keskkool ja sellele koolile antakse üle Tartu Riikliku Ülikooli ränddiplom, mis on varem rippunud Tallinna 1. Keskkooli, Pärnu 1. Keskooli, Viljandi 2. Keskkooli ja neli aastat Tallinna 2. Keskkooli seinal.

Keemiaolümpiaadil olid parimateks:

1. Mihkel Aul, Tartu 5. Keskkool,
2. Rein Mäll, Tartu 5. Keskkool,
3. Rein Hiob, Pärnu 2. Keskkool.

Füüsikas olid võitjateks:

1. Mihkel Aul, Tartu 5. Keskkool,
2. Vladimir Nõmm, Tallinna 6. Keskkool,
3. Rein Kipper, Tartu 1. Keskkool.

Keemia alal tunnistati parimaks kooliks Tartu 5. Keskkool ja füüsika alal jällegi Tallinna 6. Keskkool.

Olümpiaadi kõigil kolmel alal võistelnud õpilastest oli parim Mihkel Aul. Temale järgnesid Mihhail Popov Tallinna 6. Keskkoolist ja Aavo Heinlo Tallinna 7. Keskkoolist.

Olümpiaadi lõppvoorust osavõtjatele ei olnud need päevad ainult pingelisteks võistluspäevadeks, vaid olid ka enesetäiendamiseks ja kultuuriliseks meelelahutuseks. Seda kindlustasid ekskursioonid Tartu Riikliku Ülikooli arvutuskeskusesse, samuti füüsika ja keemia laboratooriumidesse, ülikooli õppejõudude dots. Ü. Kaasiku, v.-õp. V. Kargu ja R. Tani loengud ning Weberi ooperi «Nõidkütt» ja Kuusbergi näidendi «Andres Lapeteuse juhtum» jälgimine teatris «Vanemuine».

O. Prinits

TEINE LEND KESKHARIDUSEGA MATEMAATIKUID

Käesoleval aastal lõpetas A. H. Tammsaare nimelises Tartu 1. Keskkoolis juba teine lend programmeerijaid. Õppimist matemaatika eriharus alustatakse alates 9. klassist tootmiseriala õppimise korras.

Peale tavalise keskkoolikursuse võetakse nendes klassides läbi veel terve rida eriaineid, nagu kõrgema matemaatika alused, ligikaudsed arvutusmeetodid, elektronarvutid ja programmeerimine. Eriaineid õpetavad Tartu Riikliku Ülikooli õppejõud ja arvutuskeskuse töötajad.

Matemaatik-programmeerija kvalifikatsiooni saamiseks tuleb õpilastel teoreetilise ainete kõrval läbi teha ka arvutusmeetodite ning programmeerimise praktikad. Tootmisõpetus lõpeb praktikatöö arvestamisega ja kvalifikatsioonieksamiga. Praktikatööks on mingi probleemi iseseisev lahendamine ja vastava programmi koostamine elektronarvutile «Ural-1». Selle töö teostanud õpilased lubatakse kvalifikatsioonieksamile. Eksami sooritanud õpilastele omistatakse matemaatik-programmeerija kvalifikatsioon ja erialaline kategooria.

19. III 1965. a. toimunud kvalifikatsioonieksamil said kõrgeima, s. o. **3. kategooria** järgmised lõpetajad:

1. Kalda, Aadu
2. Keres, Piret
3. Kipper, Rein
4. Kuldmaa, Enn
5. Kõbas, Marge
6. Redi, Varpo
7. Tõrva, Liia
8. Univer, Tiiu.

2. kategooria:

1. Aben, Enn
2. Aimla, Märt
3. Astel, Helle
4. Kert, Jüri
5. Kotsar, Tiina
6. Kuut, Riina
7. Kährik, Ülo
8. Laar, Virve
9. Leit, Sulev
10. Lepp, Riho
11. Loo, Andres
12. Tampõld, Lembit

1. kategooria:

1. Engel, Heino
2. Helstein, Aurelia
3. Lambur, Tõnu

1964/65. õppeaastal lõpetas arvutusmatemaatika erialal ka Tallinna 1. Keskkoolis esimene lend.

L. Luht

Bibliograafia

Eesti NSV-s ilmunud matemaatika-alase kirjanduse nimestik

Jaanuar—veebruar 1965

(Koostanud E. Annus)

RAAMATUD

A g u r, U. **Programmeeritud õpetamine ja õpetamismasinad ning nende rakendamine kõrgemas koolis.** Tln., 1964. 120 lk. — Trükitud rotaprindil 900 eks.

M e r e s t e, U. **Keskmised ja variatsiooni-näitarvud.** Trt., 1965. 151 lk. (TRÜ. Rahanduse ja krediidi kateeder.) — Trükitud rotaprindil 500 eks.

P a s t, V. ja K o o r i t s, A. **Füüsikalis-keemilised arvutused.** Trt., 1965. 172 lk. (TRÜ. Keemia kateeder.) — Trükitud rotaprindil 200 eks.

R e l v i k, H. ja S i l d e, D. **D'Alambert'i printsiip. Dünaamika üldvõrrand. Lagrange'i teist liiki võrrandid.** Tln., 1964. 92 lk. (TPI. Teoreetilise mehhaanika kateeder.) — Trükitud rotaprindil 600 eks.

R u u b e l, A ja R i i v e s, S. **Kujutava geomeetria koduseid harjutusülesandeid EPA kaugõppeteaduskonna üliõpilastele.** I vihik. Trt., 1964. 28 lk. (Eesti Põllumajanduse Akadeemia.) — Trükitud rotaprindil 1000 eks.

Matemaatika. Metoodiliste artiklite kogumik. III. Tln., 1965. 76 lk. (ENSV Ministrite Nõukogu Riiklik Kõrgema ja Kesk-Erihariduse Komitee. Teaduslik-metoodiline Kabinet.)

Sisu: J. R e i m a n d. Matemaatika algmete arengu seosest majandusliku eluga ürgkogukonnas. — I. K u l l. Lineaarsest planeerimisest. — Ü. K a a s i k. Hulkliikmete astendamine. — J. G a i d u k. Ekstreemumülesannete õpetamise metoodikast. — M. L e v i n. Kahe elementaarse teoreemi üldistused. — A. R u u b e l. Horneri skeem graafilises käsitluses. — H. M e r i l o. Keskkooli algebrast. — M. L e v i n. Ülesandeid õpilastele.

Matemaatika ja kaasaeg. Abimaterjale matemaatika õpetajatele ja õppijatele. V. Trt, 1964. 112 lk. (Tartu Riiklik Ülikool.)

Sisu: G. K a n g r o. Kaasaja matemaatilise analüüsi mõned iseloomulikud jooned. — Ü. L e p i k. Mis on plastilisuseteooria? — Ü. K a a s i k. Algoritmide blokk-skeemid. — I. K u l l. Dünaamiline planeerimine. — H. A b e n, J. K a j a r i. Operatsioonianalüüsi kasutamisest linna generaalplaani koostamisel. — J a k o b G a b o v i t š. Veidi kolmnurga aritmeetikat. — S. I. Z e t e l. Automediaansed kolmnurgad. — E. T a m m e. Pierre Fermat ja XVII sajandi matemaatika. — I. R a b i n o v i t š. Eestist võrsunud matemaatikaklassik. — A. P a l g e. 15 aastat akadeemik N. N. Luzini surmast. — A. V i h m a n. 75 aastat prof. Albert Borkvelli sünnist. — J. P u k k. «Minsk-2» — esimene pooljuhtidel elektornarvuti vabariigis. — Ü. L u m i s t e. Muljeid teaduslikelt konverentsidelt. — O. K a r u. Vabariigi noorim. — K. V e l s k e r. Metoodika-alane seminar Tartu Riiklikus Ülikoolis. — Toimub järjekordne täppisteadustealane konverents. — E. A n n u s. Eesti NSV-s ilmunud matemaatika-alase kirjanduse nimestik. September-oktoober 1964. — Ülesandeid. — Rahvusvaheliste matemaatikaolümpiaadide ülesannete lahendusi.

Труды Вычислительного центра. Выпуск 4. Тарту, 1964. 68 стр. (Тартуский гос. ун-т) — Ротапринт 500 экз.

Содержание: С. Лухт, М. Крулль. М. Рахенди. Расчеты загруженности станочного парка завода.

Труды Вычислительного центра. Выпуск 5. Тарту, 1965. 119 стр. (Тартуский гос. ун-т) — Ротапринт 300 экз.

Содержание: А. Корьюс. Описание входного языка системы автоматизации программирования.

PERIOODIKAS ILMUNUD ARTIKLID

L i n t s, A. Programmeeritud õpetamise probleeme matemaatikas. — «Nõukogude Kool», 1964, nr. 12, lk. 934—938.

U s a i, M. Võrratuste õpetamise metoodika. — «Nõukogude Kool», 1965, nr. 1, lk. 60—67; nr. 2, lk. 134—141.

Ülesandeid elementaarmatemaatikast [1]

I

1. Perekonnas on 4 liiget: isa, ema, poeg ja tütar. Nende vanuste summa on 73 aastat. Isa on emast 3 a. vanem, tütar aga pojast 2 a. vanem. Neli aastat tagasi oli perekonna koguvanus 58 aastat. Kui vana on iga perekonnaliige praegu?

2. Kas

a) $19^{91}+91^{19}$ jagub 10-ga?
b) $43^{93}+93^{43}$ jagub 25-ga?
c) $57^{75}+75^{57}$ jagub 8-ga?
d) $46^{64}+64^{46}$ jagub 3-ga?

3. Kas ringi kõõlud, mis pole diameetriteks, saavad lõikepunktis üksteist poolitada?

4. Kuidas leida ringi keskpunkt, kui käepärast on ainult joonestuskolmnurk ja pliiats?

II

5. Kaks turistide gruppi väljusid samaaegselt süstadel — üks punktist A vastuvoolu ja teine punktist B pärivoolu — teineteisele vastu. Esimene grupp, kohtudes teise grupiga punktis C, pöördus ümber ning edasine sõit toimus koos (teise grupi kiirusega). Poolteise tunni pärast peale väljumist jõudsid mõlemad grupid punkti D, mis asub punktist B 15 km kaugusel. Kui esimene grupp oleks väljunud 1 tund varem teisest grupist, siis oleksid nad kohtunud punktis E, mis asub punktidest A ja B võrdsel kaugusel.
Leida kummagi grupi sõidukiirus kalda suhtes ning punkti C kaugus punktist A, kui punktide A ja B vaheline kaugus on 20 km.

6. On antud kuup $ABCDA_1B_1C_1D_1$, kus AA_1, BB_1, CC_1 ja DD_1 on külgservad. Millises suhtes jaotab serva C_1B_1 tasand, mis läbib tippu A, tahu $A_1B_1C_1D_1$ keskpunkti F ja tahu BB_1C_1C keskpunkti G?

7. Lahendada võrratus

$$\frac{5}{4}\sin^2 x+\frac{1}{4}\sin^2 2x>\cos 2x.$$

8. Näidata, et võrrandil

$$2\sin^2\frac{x}{2}\sin^2\frac{x}{6}=x^2+\frac{1}{x^2}$$

ei ole lahendeid.

---

[1] Elementaarmatemaatika ülesanded on jaotatud kahte ossa nii, et I rühma ülesannete lahendamisel poleks vaja teadmisi matemaatikast rohkem kui keskkooli 7 klassi ulatuses.

Ülesandeid kõrgemast matemaatikast

1. Uurida rea $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \tan \frac{x}{2^n}$ $(x \neq k\pi,\ k$ — täisarv)

koonduvust.

2. Näidata, et

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & a_2 \\ 1 & \frac{1}{a_4} & 1 \\ a_2 & 1 & a_3 \end{vmatrix} = 0,$$

kus $a_k = \frac{\sin(k\theta + \alpha)}{\sin k\theta}$ $(\alpha,\ \theta$ — suvalised, $\sin k\theta \neq 0)$.

KOGUMIKU VIIENDA VIHIKU ÜLESANNETE LAHENDUSED

A. Elementaarmatemaatika

Ülesande nr. 1 lahendus. Avaldame täisnurkse kolmnurga ABE pindala kahel viisil:

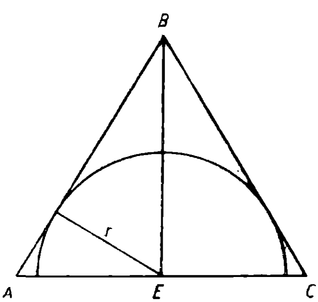
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot h = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot r.$$

Et

$$AB = \sqrt{\frac{a^2}{4} + h^2} = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + 4h^2},$$

siis

$$r = \frac{ah}{\sqrt{a^2 + 4h^2}}.$$



Ülesande nr. 2. lahendus. Arvestades, et

$$\alpha + \beta = -(\gamma + \delta),\ \cos(\alpha + \beta) = \cos(\gamma + \delta),$$

saame

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma + \cos 2\delta = 2\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) +$$
$$+ 2\cos(\gamma + \delta)\cos(\gamma - \delta) = 2\cos(\gamma + \delta)\cos(\alpha - \beta) +$$
$$+ 2\cos(\alpha + \beta)\cos(\gamma - \delta).$$

Teisendades saadud avaldist summa ja vahe koosinuse valemite põhjal, jõuamegi nõutava tulemuseni.

Ülesande nr. 3 lahendus. Ülesandel on kaks lahendust:

$$\begin{array}{r} 847108 \\ +\ 95438 \\ \hline 942546 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 847138 \\ +\ 95408 \\ \hline 942546 \end{array}$$

Ülesande nr. 4 lahendus. Korrutises $n^2 - 3n = n(n - 3)$ on tegurid n ja $n - 3$ kas ühisjagajata arvud või on nende suurimaks ühisjagajaks arv 3.

Kui n ja $n - 3$ on ühisjagajata arvud, siis nende korrutis on täisruut siis ja ainult siis, kui kumbki neist arvudest on täisruut:

$$n = b^2, \quad n - 3 = a^2 \quad (0 < a < b).$$

Sel juhul $b^2 - a^2 = 3$, $(b-a)(b+a) = 3$,

$$\begin{cases} b-a=1 \\ b+a=3, \end{cases}$$

$$a=1, \ b=2 \text{ ning } n=4.$$

Kui n ja $n-3$ suurimaks ühisjagajaks on arv 3, siis nende korrutis on täisruut siis ja ainult siis, kui

$$n-3=3a^2, \quad n=3b^2 \quad (0<a<b).$$

Sel juhul

$$3b^2-3a^2=3$$

$$a=0, \quad b=1 \text{ ning } n=3.$$

Seega n^2-3n on täisruut ainult $n=3$ ja $n=4$ puhul.

B. Kõrgem matemaatika

Ülesande nr. 1 lahendus. Valime koordinaatteljestiku nii, et kolmnurkade alused asuvad x-teljel ning esimese kolmnurga aluse keskpunkt nullpunktis. Siis kolmnurkade tipud on $\left(0, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$, $\left(2, \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$, $\left(6, \frac{5}{2}\sqrt{3}\right)$, $\left(12, \frac{7}{2}\sqrt{3}\right)$, ..., $\left(n^2-n, \frac{2n-1}{2}\sqrt{3}\right)$, ... Elimineerides n-i seostest

$$x=n^2-n, \quad y=\frac{2n-1}{2}\sqrt{3},$$

saame

$$y^2=3\left(x+\frac{1}{4}\right),$$

mis esitab parabooli fookusega $F\left(\frac{1}{2}, 0\right)$. Tipu $\left(n^2-n, \frac{2n-1}{2}\sqrt{3}\right)$ kaugus fookusest on n^2-n+1.

Ülesande nr. 2 lahendus. Et võrrandi vasakul poolel on avaldise $x^2(1-x)y'+x(x+2)y$ tuletis, siis võrrandi esimene integraal on

$$x^2(1-x)y'+x(x+2)y=\frac{x^3+C_1}{3}.$$

Saadud lineaarse diferentsiaalvõrrandi üldlahend on

$$\frac{x^2}{(x-1)^3}y=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2(x-1)^2}+\frac{C_1+1}{9(x-1)^3}-\ln C_2\sqrt[3]{x-1}.$$

RAHVUSVAHELISTE MATEMAATIKAOLÜMPIAADIDE ÜLESANNETE LAHENDUSI

III olümpiaad

Ülesanne nr. 1. Lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} x+y+z=a, \\ x^2+y^2+z^2=b^2, \\ xy=z^2, \end{cases}$$

kus a ja b on etteantud arvud. Missugust tingimust peavad rahuldama arvud

a ja b, et süsteemi lahendid x, y ja z oleksid kõik positiivsed ja mittevõrdsed.

Lahendus. Tõstes süsteemi esimese võrrandi mõlemad pooled ruutu, lahutades sellest teise võrrandi ning asendades kolmandast $xy = z^2$, saame

$$2z(x+y+z) = a^2 - b^2 \quad \text{ehk} \quad 2az = a^2 - b^2,$$

millest

$$z = \frac{a^2 - b^2}{2a}. \tag{1}$$

Et $x + y = a - z = \dfrac{a^2 + b^2}{2a}$ ja $xy = z^2 = \dfrac{(a^2 - b^2)^2}{4a^2}$,

siis x ja y on ruutvõrrandi

$$4a^2u^2 - 2a(a^2 + b^2)u + (a^2 - b^2)^2 = 0$$

lahenditeks. Seega süsteemi lahenditeks on:

$$\begin{cases} x = \dfrac{a^2 + b^2 \pm \sqrt{(a^2 - 3b^2)(b^2 - 3a^2)}}{4a}, \\[2ex] y = \dfrac{a^2 + b^2 \mp \sqrt{(a^2 - 3b^2)(b^2 - 3a^2)}}{4a}, \\[2ex] z = \dfrac{a^2 - b^2}{2a}. \end{cases}$$

Süsteemi esimesest võrrandist saame vahetult, et

$$a > 0. \tag{2}$$

Tingimusest $z > 0$ järeldub nüüd, et $a^2 - b^2 > 0$, millest omakorda järeldub, et

$$a > |b|. \tag{3}$$

Ruutvõrrandi diskriminant annab tingimuse

$$a^2 - 3b^2 < 0, \tag{4}$$

sest (3) põhjal $b^2 - 3a^2 < 0$. Lihtsustades tingimust (4) saame (2) põhjal

$$a < \sqrt{3}\,|b|.$$

Tingimused (2), (3) ja (4) annavad järgmise tingimuse:

$$1 < \frac{a}{|b|} < \sqrt{3}. \tag{5}$$

Tingimus (5) ongi tarvilik ja piisav, et süsteemi lahendid oleksid positiivsed ja erinevad.

Ülesanne nr. 2. Kolmnurga küljed on a, b ja c ning pindala on S. Tõestada, et kehtib võrratus

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 4S\sqrt{3}. \tag{6}$$

Missugustel tingimustel kehtib siin võrdus?

Lahendus. Koosinuslause ja kolmnurga pindala valemi põhjal saame anda võrratusele (6) kuju

$$b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha + b^2 + c^2 \geqslant 4 \cdot \frac{1}{2}ab\sin\gamma \cdot \sqrt{3}.$$

Et siinuslause põhjal $a\sin\gamma = c\sin\alpha$, siis

$$b^2 + c^2 - bc\cos\alpha \geqslant \sqrt{3}bc\sin\alpha,$$

$$b^2 + c^2 \geqslant bc(\sqrt{3}\sin\alpha + \cos\alpha),$$

$$b^2 + c^2 \geqslant 2bc\cos(60^\circ - \alpha).$$

Et iga x korral $|\cos x| \leqslant 1$, siis tõepoolest võrratus kehtib.

Võrdus kehtib, kui $b = c$ ja $60° - a = 0$, s. t. kui kolmnurk on võrdkülgne.

Ülesanne nr. 3. Lahendada võrrand

$$\cos^n x - \sin^n x = 1,$$

kus n on mingi naturaalarv.

L a h e n d u s. Vaatleme eraldi kahte juhtu:

1° $n = 2k$, $k = 1, 2, \dots$ ja

2° $n = 2k + 1$, $k = 0, 1, 2, \dots$.

Juhul 1° on iga x korral $\cos^n x \geqslant 0$ ja $\sin^n x \geqslant 0$, millest järeldub, et lahenditeks on vaid need x väärtused, mille puhul $|\cos x| = 1$ ja $\sin x = 0$, s. t. $x = s\pi$, $s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Juhul 2° saavad lahenditena kõne alla tulla vaid need x väärtused, mille korral $\cos x \geqslant 0$ ja $\sin x \leqslant 0$, s. t. IV veerandi nurgad. Et käesoleval juhul $(-1)^n = -1$, siis võrrandi lahenditeks on vähemalt need x väärtused, mille puhul $\cos x = 1$ ja $\sin x = 0$, või $\cos x = 0$ ja $\sin x = -1$. Järelikult on lahenditeks $x_1 = 2s\pi$ ja $x_2 = \frac{3}{2}\pi + 2s\pi$ ($s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Näitame, et võrrandil pole teisi lahendeid, s. t. et tema lahendiks ei saa olla niisugune x^*, mille korral $1 > \cos x^* > 0$ ja $-1 < \sin x^* < 0$. Lähtume seosest $\cos^2 x^* + \sin^2 x^* = 1$. Kui $n = 2k + 1 > 2$, siis tehtud eeldustel x^* kohta saame, et

$$\cos^2 x^* > \cos^2 x^* \cdot \cos^{2k-1} x^* = \cos^{2k+1} x^*$$

ja

$$\sin^2 x^* > \sin^2 x^* (-\sin^{2k-1} x^*) = -\sin^{2k+1} x^*;$$

järelikult

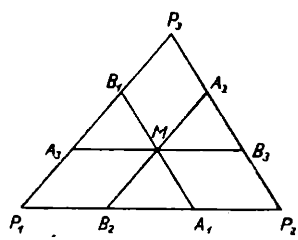
$$\cos^{2k+1} x^* - \sin^{2k+1} x^* < 1.$$

Kui aga $n = 2k + 1 < 2$, s. t. $n = 1$, siis järeldub võrratustest $\cos^2 x^* < \cos x^*$ ja $\sin^2 x^* < -\sin x^*$, et $\cos x^* - \sin x^* > 1$.

Kokkuvõttes saame, et võrrandi lahenditeks on:

$$x = \begin{cases} s\pi, \quad s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots & \text{kui } n \text{ on paarisarv.} \\ \left.\begin{array}{l} 2s\pi, \quad s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \\ \frac{3}{2}\pi + 2s\pi, \; s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{array}\right\} & \text{kui } n \text{ on paaritu arv.} \end{cases}$$

Ülesanne nr. 4. On antud kolmnurk $P_1P_2P_3$ ja selles punkt P. Sirged P_1P, P_2P, P_3P lõikavad kolmnurga vastaskülgi vastavalt punktides Q_1, Q_2, Q_3. Tõestada, et suhte $\frac{P_1P}{PQ_1}$, $\frac{P_2P}{PQ_2}$, $\frac{P_3P}{PQ_3}$ hulgas on vähemalt üks, mis ei ole suurem kui 2, ja vähemalt üks, mis ei ole väiksem kui 2.



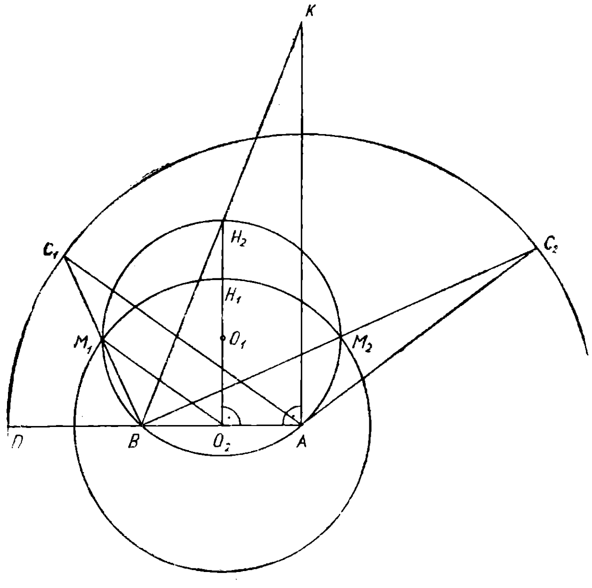
Joonis 1.

L a h e n d u s. Olgu M kolmnurga $P_1P_2P_3$ mediaanide lõikepunkt (joonis 1); $A_1B_1 \parallel P_2P_3$, $A_2B_2 \parallel P_1P_3$ ja $A_3B_3 \parallel P_1P_2$.

Trapetsid $A_1B_1P_3P_2$, $A_2B_2P_1P_3$ ja $A_3B_3P_2P_1$ katavad täielikult kolmnurga $P_1P_2P_3$; samuti kaetakse kolmnurk $P_1P_2P_3$ täielikult kolmnurkade $P_iA_iB_i$ ($i = 1, 2, 3$) poolt. Öeldust järeldub, et kuhu me ka punkti P ei paigutaks kolmnurka $P_1P_2P_3$, leiab alati aset kaks järgnevat olukorda:

1°. Leidub kolmnurk $P_{i_0}A_{i_0}B_{i_0}$ ($1 \leqslant i_0 \leqslant 3$) nii, et punkt P asub kas selle kolmnurga sees või küljel $A_{i_0}B_{i_0}$.

2°. Leidub trapets $A_{j_0}B_{j_0}P_sP_k$ $(1 \leqslant j_0 \leqslant 3,\ s \neq k,\ s \neq j_0\ k \neq j_0)$ nii, et punkt P asub kas selle trapetsi sees või alusel $A_{i_0}B_{i_0}$. Näitame, et 1° puhul $\frac{P_{i_0}P}{PQ_{i_0}} \leqslant 2$ ja 2° puhul $\frac{P_{j_0}P}{PQ_{j_0}} \geqslant 2$. Lõikude P_iQ_i ja A_iB_i lõikepunkti tähistame L_i. Kiirte teoreemi ja kolmnurga mediaanide lõikepunkti omaduste tõttu $\frac{P_iL_i}{L_iQ_i} = 2$. Kui leiab aset 1°, siis $P_{i_0}P \leqslant P_{i_0}L_{i_0}$ ja $PQ_{i_0} \geqslant L_{i_0}Q_{i_0}$, millest järeldub, et $\frac{P_{i_0}P}{PQ_{i_0}} \leqslant 2$; juhul 2° kehtib $P_{j_0}P \geqslant P_{j_0}L_{j_0}$ ja $PQ_{j_0} \leqslant L_{j_0}Q_{j_0}$, mis annavad, et $\frac{P_{j_0}P}{PQ_{j_0}} \geqslant 2$, m. o. t. t.



Joonis 2.

Ülesanne nr. 5. Konstrueerida kolmnurk ABC, kui $AC = b$, $AB = c$ ja $\angle AMB = \omega$, kusjuures M on külje BC keskpunkt ja $\omega < 90^\circ$. Tõestada, et ülesanne on lahenduv siis ja ainult siis, kui

$$b \tan \frac{\omega}{2} \leqslant c < b.$$

Millal kehtib võrdus?

L a h e n d u s. Konstrueerime algul ringjoone, mille kõõluks on $c = AB$ ja sellele kõõlule toetuvaks piirdenurgaks ω (joonis 2; $\omega = \angle AM_1B$). Olgu selle ringjoone keskpunktiks O_1. Lõigu AB keskpunktist O_2 tõmbame ringjoone raadiusega $O_2M_1 = \frac{b}{2}$. Lõikugu need ringjooned punktides M_1 ja M_2. Punktist A tõmbame ringjoone raadiusega $AD = b$. Kiired BM_1 ja BM_2 lõikugu selle ringjoonega vastavalt punktidest C_1 ja C_2. Et $2O_2M_1 = AC_1$ ja $BO_2 = O_2A$, siis O_2M_1 on kolmnurga ABC_1 kesklõik ning $BM_1 = M_1C_1$; analoogiliselt saame tõestada, et $BM_2 = M_2C_2$. Seega AM_1 on kolmnurga ABC_1 mediaaniks ja AM_2 on kolmnurga ABC_2 mediaaniks, mistõttu mõlemad kolmnurgad rahuldavad ülesande tingimusi.

Et ω on teravnurk, siis $c < b$. Tõepoolest, kolmnurkade BM_1A ja C_1M_1A vastavate külgede võrdsusest järeldub, et suurema nurga $180° - \omega = \angle C_1M_1A$ vastas on ka suurem külg.

Seega on ülesanne lahenduv siis ja ainult siis, kui $c < b$ ning ringjoontel keskpunktidega O_1 ja O_2 on vähemalt üks ühine punkt. Viimane tingimus on samaväärne tingimusega

$$O_2H_2 \geqslant O_2H_1, \qquad \frac{c}{2}\cot\frac{\omega}{2} \geqslant \frac{b}{2}, \qquad b\tan\frac{\omega}{2} \leqslant c.$$

Järelikult tingimus $b\tan\frac{\omega}{2} \leqslant c < b$ on tarvilik ja piisav ülesande lahenduvuseks. Juhul kui H ja H_2 ühtivad, siis $b\tan\frac{\omega}{2} = c$ ($M_1 = M_2 = H_1 = H_2$ ja $C_1 = C_2 = K$); et $BO_2 \perp O_2H_2$, siis võrduse korral on tegemist täisnurkse kolmnurgaga, mille kaatetid on b ja c.

Ülesanne nr. 6. On antud tasand ε ja kolm mitte ühel sirgel asetsevat punkti A, B ja C. Nende punktide poolt määratud tasand ei ole paralleelne tasandiga ε. Tasandil ε on võetud kolm punkti A', B', ja C'. Lõikude AA', BB' ja CC' keskpunktid on tähistatud vastavalt tähtedega L, M ja N. Tähega G on tähistatud kolmnurga LMN raskuspunkt. (Siin ei vaadelda selliseid punktide A', B' ja C' asendeid, mille korral LMN ei moodusta kolmnurka).

Leida punkti G geomeetriline koht, kui punktid A', B' ja C' üksteisest sõltumatult liiguvad tasandil ε.

L a h e n d u s. Konstrueerime 3 tasandit ε_A, ε_B ja ε_C järgmiselt: $\varepsilon_A \parallel \varepsilon_B \parallel \varepsilon_C \parallel \varepsilon$, kusjuures ε_A (ε_B ja ε_C) on punktist A (B ja C) ning tasandist ε võrdsel kaugusel. Missuguse punkti A' me ka tasandil ε ei valiks, siis kiirte teoreemi põhjal on lõigu AA' keskpunkt alati tasandil ε_A (analoogiline olukord kehtib ka lõikude BB' ja CC' keskpunktide kohta, mis on vastavalt tasanditel ε_B ja ε_C). Kehtib ka vastupidine: missuguse punkti A'' me ka tasandil ε_A ei valiks, lõikub sirge AA'' tasandiga ε punktis A' nii, et $AA'' = A''A'$; analoogiline olukord on kehtiv ka tasandite ε_B ja ε_C iga punkti korral, s. t. $BB'' = B''B'$ ja $CC'' = C''C'$. Juhul kui mõni tasanditest ε_A, ε_B või ε_C ühtib tasandiga ε, siis konstrueeritakse A'', B'' või C'' järgi A', B' või C' nii, et A', B' või C' asub sirgel AA'', BB'' või CC'', kusjuures $AA'' = A''A'$, $BB'' = B''B'$ või $CC'' = C''C'$. Järelikult punktide L, M ja N geomeetriline koht on tasand ε_A, ε_B ja vastavalt ε_C. Tasandit, mis on paralleelne ε_A-ga ja mis asub võrdsel kaugusel nii tasandist ε_A kui ka tasandist ε_B, tähistame ε_{AB}. Et punktid A' ja B' liiguvad üksteisest sõltumatult, siis ka L ja M liiguvad üksteisest sõltumatult, millest järeldub, et lõigu LM keskpunkti geomeetriline koht on tasand ε_{AB}. Tasandite ε_{AB} ja ε_C vahele paneme nendega paralleelse tasandi ε_{ABC} nii, et selle kaugus tasandist ε_C on kaks korda suurem kui kaugus tasandist ε_{AB}. Et tasand ε_C on punkti N geomeetriline koht, siis punktide A', B' ja C' üksteisest sõltumatu liikumise tõttu järeldub, et tasand ε_{ABC} on kolmnurga LMN mediaanide lõikepunkti geomeetriline koht. Et kolmnurga puhul mediaanide lõikepunkt ja kolmnurga raskuskese ühtivad, siis punkti G geomeetriline koht on tasand ε_{ABC}.

SISUKORD