Matemaatika ja kaasaeg

TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

MATEMAATIKA JA KAASAEG

VI

ABIMATERJALE MATEMAATIKA ÕPETAJATELE JA ÕPPIJATELE

TARTU 1965

ALGEBRA PÕHIMÕISTEID I

Jevgeni Gabovitš

Möödunud sajandi lõpul ja käesoleva sajandi algul toimusid matemaatika ühes vanimas harus — algebras — revolutsioonilise tähtsusega muutused. Üksikobjektide ja -operatsioonide uurimise asemel hakati vaatlema suvaliste hulkade elementidega defineeritud algebralisi operatsioone. Algebra muutus hulgateoreetiliseks ja aksiomaatiliseks distsipliiniks. Need muutused algebras, mis haarasid algul rühmateooria, seejärel korpuseteooria ja assotsiatiivsete ringide ning algebrate teooria, põhjustasid omakorda algebra mitmete uute harude — mitteassotsiatiivsete ja Lie' ringide teooria, struktuuriteooria, poolrühmateooria ning kategooriateooria — tekkimise ja väljaarenemise.

Algebra areng muutus veelgi kiiremaks pärast uute seoste avastamist algebra ja teiste matemaatiliste distsipliinide vahel. Viimastest mainime siin vaid tähtsamaid: topoloogia, funktsionaalanalüüs, matemaatiline loogika ja osaliselt järjestatud hulkade teooria. Tekkisid ja arenesid kiiresti ka algebra piirdealad: topoloogiline algebra, normeeritud ringide teooria, järjestatud algebraliste piirkondade teooria, homoloogiline algebra, diferentsiaalalgebra, universaalsete algebrate ja mudelite teooria.

Algebra kiire arengu ja suure osatähtsuse tõttu kaasaegses matemaatikas on teda tarvis tunda kõigil, kes oma kutsetöös puutuvad kokku matemaatikaga. Kahjuks puuduvad peaaegu kõigi kõrgemate õppeasutuste õppekavades tänapäeva algebrale pühendatud peatükid. Käesoleva artiklite seeriaga ei sea autor endale eesmärgiks selle lünga täitmist, küll aga huvi äratamist tänapäeva algebra vastu. Huvitatud lugeja käsutuses on ulatuslik kaasaegsele algebrale pühendatud kirjandus, millest esimeseks tutvumiseks soovitame kirjanduse loetelus toodud raamatuid. Neist viimases leiab lugeja algebra üksikuid harusid käsitlevate ülevaateartiklite ja raamatute üksikasjalise nimekirja.

1. Algebraline operatsioon

Tänapäeva matemaatikas kasutatakse mitmeid operatsioone, mis võivad olla defineeritud mitmesugustel hulkadel. Mainime näiteks arvude liitmist, lahutamist, korrutamist ja jagamist, vektorite skalaar- ning vektorkorrutist, hulkade ühendi ja ühisosa leidmise operatsioone[1] jms. Edaspidi vaatleme kõigi operatsioonide hulgast ainult neid, mis on defineeritud kogu vaadeldaval hulgal ja mille suhtes see hulk on *kinnine*, s.t. operatsiooni rakendamisel antud hulga elementidele saame alati sama hulga elemendi. Selliseid operatsioone nimetame algebralisteks operatsioonideks ehk teheteks.[2] Täpne definitsioon kõlab järgmiselt: kui hulga A igale kindlas järjekorras võetud elementide paarile (a, b) on seatud vastavusse hulga A üks kindel element c, siis öeldakse, et hulgas A on defineeritud *tehe* ehk *algebraline operatsioon* (võrdle [1], lk. 122).

Sõltuvalt sellest, kas tehte sümboliks kasutatakse märki $+$; &; $\cdot$; $\times$; $*$; $\circ$; $f(\ ,\ )$; $\cap$; $\cup$; $\wedge$; $\vee$ või midagi muud, kirjutatakse tehtega määratud vastavus kujul $c = a + b$; $c = a \& b$; $c = a \cdot b$; $c = a \times b$; $c = a * b$; $c = a \circ b$; $c = f(a, b)$; $c = a \cap b$; $c = a \cup b$; $c = a \wedge b$; $c = a \vee b$; jne. Kõige tarvitatavamad on märgid «$+$» ja «$\cdot$». Esimese puhul räägitakse aditiivsest, teise puhul aga multiplikatiivsest tähistusviisist.

Millistel hulkadel on ülal näiteina mainitud operatsioonid tehted ja millistel mitte? Liitmine on tehe kõigi täisarvude hulgal, kõigi positiivsete ratsionaalarvude hulgal, arvust 5 suuremate täisarvude hulgal ning ainult arvust 0 koosneval hulgal $\{0\}$; kuid mitte hulkadel $\{-1, 0, 1\}$ ja $\{0, 1, 2, 4, 8, 16, \ldots\}$. Tõepoolest, viimased hulgad pole liitmise suhtes kinnised, s. t. liitmise rakendamisel antud hulga arvudele võime saada arve, mis vastavasse hulka ei kuulu: $(-1) + (-1) = -2$, $1 + 2 = 3$ jne.

Lahutamine on tehe näiteks kõigi täisarvude hulgal ning hulgal $\{0\}$, kuid mitte kõigi positiivsete täisarvude hulgal, sest ta viib sellest hulgast välja: $1 - 2 = -1$.

Jagamine on tehe näiteks kõigi positiivsete ratsionaalarvude hulgal, kuid pole seda ei kõigi ratsionaalarvude ega ka kõigi positiivsete täisarvude hulgal. Tõepoolest, ratsionaalarvude hulga kõigi elementide korral pole jagamine defineeritud (nulliga jagada ei saa!), positiivsete täisarvude hulgast viib aga jagamine välja ($1 : 2$ ei ole täisarv).

Vektorite skalaarkorrutis ei ole tehe, sest kahe vektori skalaarkorrutis on arv, mitte vektor. Tasandil pole ka vektorite vektorkorrutis tehe, kuna ta viib tasandist välja, ruumi vektorite hulk on aga vektorkorrutise suhtes kinnine ja sellel hulgal on vektorkorrutis tehe.

Hulgal, mis koosneb kas antud hulga A kõigist alamhulkadest (kaasa arvatud tühi hulk ja A ise) või hulgast A ja ühest tema pärisalamhulgast, on nii ühendi kui ka ühisosa moodustamise ope-

[1] Vt. näit. G a b o v i t š, J., Opereerimine hulkadega. — Matemaatika ja kaasaeg, III, lk. 3—12.

[2] G. K a n g r o õpikus [1] kasutatakse samas tähenduses ka oskussõna «arvutusoperatsioon».

ratsioonid tehted. Kahest teineteisesse mittekuuluvast hulgast koosneval hulgal pole aga kumbki neist operatsioonidest tehe. Positiivsete täisarvude hulgal on tehe ka näiteks operatsioon $m \triangle n = 2^m mn$, kuid mitte operatsioon $m * n = \log_n m$ (miks?).

Ülesandeid:

1. Nimetada täisarvude hulki, milledel korrutamine on tehe, ja hulki, milledel korrutamine ei ole tehe.

2. Kahe lõigul [0, 1] defineeritud funktsiooni $f(x)$ ja $g(x)$ summaks nimetatakse funktsiooni $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$. Kas see operatsioon on tehe a) kõigi lõigul [0, 1] defineeritud funktsioonide hulgal? b) lõigul [0, 1] pidevate funktsioonide hulgal? c) nullist erinevate funktsioonide hulgal? d) ainult nullist erinevate väärtustega funktsioonide hulgal? e) ainult negatiivsete väärtustega funktsioonide hulgal? f) punktis $x = 0{,}5$ nulliga võrduvate funktsioonide hulgal?

2. Kommutatiivsus ja assotsiatiivsus

Arvude liitmisel või korrutamisel pole liidetavate või tegurite järjekord oluline, s. t.

$$a + b = b + a \quad \text{ja} \quad ab = ba.$$

Tehet «$\circ$», millel on omadus: iga elementidepaari (a, b) jaoks kehtib võrdus

$$a \circ b = b \circ a,$$

nimetatakse *kommutatiivseks*. Peale arvude liitmise ja korrutamise on kommutatiivsed veel näiteks hulkade ühisosa ja ühendi moodustamise operatsioonid. Lahutamine ja jagamine aga ei ole kommutatiivsed: $-1 = 2 - 3 \neq 3 - 2 = 1$; $\frac{9}{10} = \frac{3}{4} : \frac{5}{6} \neq \frac{5}{6} : \frac{3}{4} = \frac{10}{9}$. Ka eelmises punktis defineeritud operatsioon $\triangle$ pole kommutatiivne: $2 \triangle 3 = 2^2 \cdot 6 = 24$; $3 \triangle 2 = 2^3 \cdot 6 = 48$. Samuti ei ole kommutatiivne vektorkorrutis, sest $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$.

Arvude liitmisel või korrutamisel pole oluline ka sulgude paigutus, s. t.

$$(a + b) + c = a + (b + c), \quad (ab)c = a(bc).$$

Kui mistahes elementide a, b ja c korral kehtib võrdus

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c),$$

siis operatsiooni «$\circ$» nimetatakse *assotsiatiivseks*. Peale arvude liitmise ja korrutamise on assotsiatiivsed veel hulkade ühisosa ja ühendi moodustamise operatsioonid. Mitteassotsiatiivseteks operatsioonideks on arvude lahutamine

$$(2 - 3) - 4 = (-1) - 4 = -5, \; 2 - (3 - 4) = 2 - (-1) = 3$$

ja jagamine

$$\left(\frac{2}{3} : \frac{5}{6}\right) : \frac{1}{2} = \frac{4}{5} : \frac{1}{2} = \frac{8}{5}, \quad \frac{2}{3} : \left(\frac{5}{6} : \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3} : \frac{5}{3} = \frac{2}{5}.$$

Toome ühe näite assotsiatiivsest, kuid mittekommutatiivsest tehtest hulgal, mille elementideks on mingi lõpliku hulga teisendused. Lõpliku hulga A elemente tähistame arvudega $1, 2, \ldots, n$. Hulga A *teisenduseks* nimetame eeskirja, mis seab hulga A igale elemendile vastavusse mingi elemendi samast hulgast. Näiteks eeskiri, mis seab arvule 1 vastavusse arvu 3, arvudele 2 ja 3 aga arvu 1, on hulga $\{1, 2, 3\}$ teisendus. Seda teisendust tähistatakse sümboliga

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Üldiselt tähistatakse teisendust, mis seab elemendile 1 vastavusse elemendi α_1, elemendile 2 elemendi α_2 jne. sümboliga

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & \ldots & n\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n\end{pmatrix},$$

või lihtsalt

$$\begin{pmatrix}i\\ \alpha_i\end{pmatrix}.$$

Näiteks kaheelemendilise hulga $\{1, 2\}$ kõik võimalikud teisendused on järgmised:

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}.$$

Defineerime antud hulga A kõigi teisenduste hulgal operatsiooni, mille nimetame korrutamiseks: kahe teisenduse

$$a = \begin{pmatrix}1 & 2 & \ldots & n\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n\end{pmatrix} \text{ ja } b = \begin{pmatrix}1 & 2 & \ldots & n\\ \beta_1 & \beta_2 & \ldots & \beta_n\end{pmatrix}$$

korrutiseks loeme teisendust

$$c = a \cdot b = \begin{pmatrix}1 & 2 & \ldots & n\\ \beta_{\alpha_1} & \beta_{\alpha_2} & \ldots & \beta_{\alpha_n}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}i\\ \beta_{\alpha_i}\end{pmatrix}.$$

Kerge on näha, et teisendus c on saadud teisenduste a ja b järjest rakendamise tulemusena: selleks, et rakendada elemendile i teisendus c, tuleb talle algul rakendada teisendus a (tulemuseks on α_i), siis aga saadud elemendile α_i teisendus b, mille tulemusena saamegi β_{α_i}. Korrutame näiteks omavahel hulga $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ kaks teisendust:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 4 & 4 & 5 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 4 & 3 & 3 & 3 & 5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 3 & 3 & 5 & 4\end{pmatrix}.$$

Äsja defineeritud tehe ei ole kommutatiivne. Selles veendumiseks piisab, kui me näitame kaks konkreetset teisendust a ja b, mille korral korrutised $a \cdot b$ ja $b \cdot a$ on erinevad. Viieelemendilise hulga korral võivad sellisteks teisendusteks olla kasvõi viimases näites toodud teisendused. Tõepoolest,

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 4 & 3 & 3 & 3 & 5\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 4 & 4 & 5 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 5 & 4 & 4 & 4 & 1\end{pmatrix},$$

seega tegurite vahetamine muutis korrutist. Suvalise hulga $A =$

$= \{1, 2, \ldots, n\}$ puhul võivad sellisteks teisendusteks olla näiteks

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ 1 & 1 & 3 & \ldots & n \end{pmatrix} \text{ ja } a_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & & n \\ 2 & 2 & 3 & & n \end{pmatrix},$$

sest $a_1 \cdot a_2 = a_2$, kuid $a_2 \cdot a_1 = a_1$.

Teisenduste korrutis osutub aga assotsiatiivseks. Selles veendumiseks vaatleme kolme suvalist teisendust

$$a = \begin{pmatrix} i \\ \alpha_i \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} j \\ \beta_j \end{pmatrix} \text{ ja } c = \begin{pmatrix} k \\ \gamma_k \end{pmatrix}$$

ning korrutame need omavahel läbi sulgude kahe erineva paigutuse korral:

$$(a \cdot b) \cdot c = \left[\begin{pmatrix} i \\ \alpha_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} j \\ \beta_j \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} k \\ \gamma_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ \beta_{\alpha_i} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k \\ \gamma_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ \gamma_{\beta_{\alpha_i}} \end{pmatrix},$$

$$a \cdot (b \cdot c) = \begin{pmatrix} i \\ \alpha_i \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} j \\ \beta_j \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k \\ \gamma_k \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} i \\ \alpha_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} j \\ \gamma_{\beta_j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ \gamma_{\beta_{\alpha_i}} \end{pmatrix}.$$

Tulemuseks on mõlemal korral üks ja seesama teisendus; s. t. et $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$. Seega teisenduste korrutamine on assotsiatiivne ning me võime mitme teguri korrutamisel sulud hoopis ära jätta, kirjutades näiteks $a \cdot b \cdot c$.

Ülesandeid:

3) Kas operatsioon $a \circ b = a + b - a \cdot b$ on ratsionaalarvude vallas tehe? Kas ta on kommutatiivne ja assotsiatiivne?

4) Olgu teatava õpperühma kõik üliõpilased erinevat kasvu. Kahe üliõpilase korrutiseks nimetame lühemat nende hulgast. Kas see korrutamise operatsioon on tehe? Kas ta on kommutatiivne ja assotsiatiivne?

5) Leida järgmised teisenduste korrutised:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 3 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 7 & 7 & 7 & 3 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}^7$

6) Näidata mõne ülaltoodust erineva näite abil, et iga $n \leqslant 2$ korral hulga $\{1, 2, \ldots n\}$ teisenduste korrutamise tehe ei ole kommutatiivne.

3. Grupoidid ja poolrühmad

Hulka, millel on defineeritud üks algebraline operatsioon, nimetatakse *grupoidiks*. Kui see operatsioon on assotsiatiivne, siis räägitakse *assotsiatiivsest grupoidist* ehk *poolrühmast*. Kui aga operatsioon on kommutatiivne, siis kõneleme vastavalt *kommutatiivsest grupoidist* või *kommutatiivsest poolrühmast*. Hulka, kus on defineeritud vähemalt üks algebraline operatsioon, nimetatakse *algebraliseks süsteemiks* ehk *algebraliseks struktuuriks* (vt. [1], lk. 122).

Eelmistes punktides näideteks toodud hulgad olid algebralised süsteemid, enamasti grupoidid ja poolrühmad. Neid kordamata toome järgnevas veel mõningad uued näited. Kõigepealt kaks eriti lihtsat näidet.

Iga hulk muutub poolrühmaks, kui defineerida temas korrutamise operatsioon järgmiselt: $a \cdot b = a$, s.t. korrutis võrdub vasakpoolse teguriga. See operatsioon on ilmselt algebraline ja assotsiatiivne: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot c = a$, $a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b = a$. Muidugi pole nii saadud poolrühm kommutatiivne, sest $a \cdot b = a$, aga $b \cdot a = b$.

Kui hulgas on fikseeritud mingi element f ning operatsioon on defineeritud nii, et iga kahe elemendi a ja b korral $a \cdot b = f$, siis hulk muutub kommutatiivseks poolrühmaks: $a \cdot b = b \cdot a = f$.

Grupoidi elementi 0, millel on omadus, et grupoidi iga elemendi a korral $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$, nimetatakse selle grupoidi *nullelemendiks*. Eelmises lõigus defineeritud poolrühma nullelemendiks on element f.

Sellises arvude poolrühmas, kus tehteks on korrutamine, osutub nullelemendiks arv 0, kui ta on selle poolrühma element. Nullelementi pole aga kaugeltki mitte igas algebralises süsteemis: näiteks puudub nullelement naturaalarvude poolrühmas, kus tehteks on liitmine. Tõsi küll, sellisele poolrühmale võib lisada «arvu» ∞, defineerides iga täisarvu m jaoks

$$m + \infty = \infty + m = \infty.$$

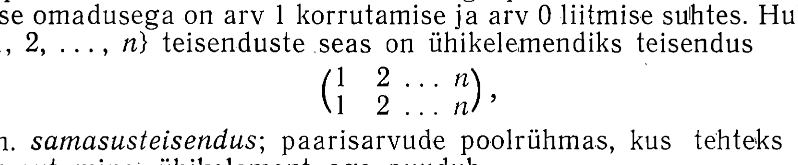
Nii saadud uue poolrühma nullelemendiks ongi «arv» ∞. Sellist nulli lisamist võib teostada ka mistahes grupoidi korral: tuleb vaid grupoidi elementide hulka täiendada sümboliga 0 ning defineerida juurde selle uue ning vanade elementide a korrutised valemitega $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$, $0 \cdot 0 = 0$.

Grupoidi elementi e, millel on omadus, et grupoidi iga elemendi a puhul $a \cdot e = e \cdot a = a$, nimetatakse grupoidi *ühikelemendiks*. Sellise omadusega on arv 1 korrutamise ja arv 0 liitmise suhtes. Hulga $\{1, 2, \ldots, n\}$ teisenduste seas on ühikelemendiks teisendus

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix},$$

nn. *samasusteisendus*; paarisarvude poolrühmas, kus tehteks on korrutamine, ühikelement aga puudub.

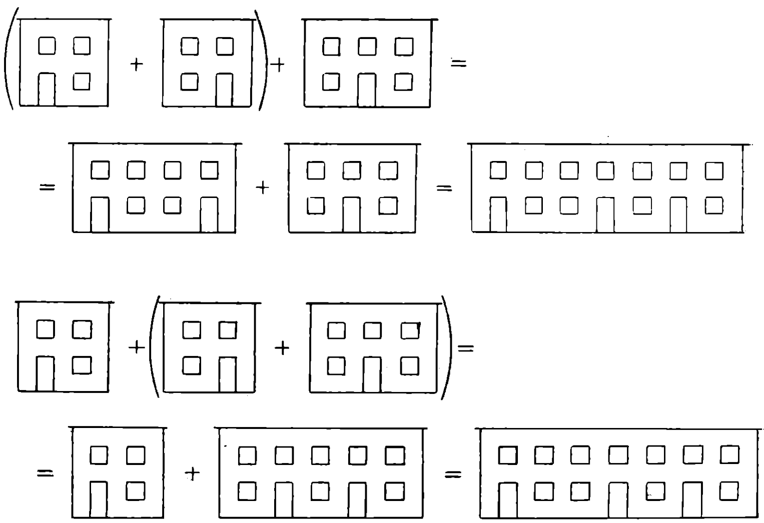
Positiivsete täisarvude hulk moodustab astendamise tehte $a \circ b = a^b$ suhtes grupoidi, kuid mitte poolrühma. Et assotsiatiivsuse seadus tõepoolest alati ei kehti, on näha sellest, et ühelt poolt



Joonis 1.

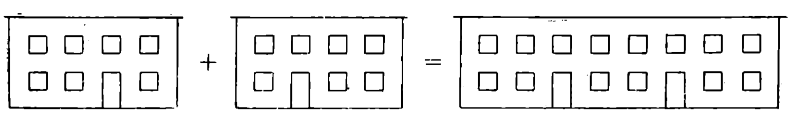
$(2 \circ 3) \circ 2 = 2^3 \circ 2 = 8 \circ 2 = 8^2 = 64$, teiselt poolt aga $2 \circ (3 \circ 2) = 2 \circ 3^2 = 2 \circ 9 = 2^9 = 512$. See grupoid ei ole ka kommutatiivne, sest näiteks $2^3 \neq 3^2$.

Huvitava poolrühma näite (*majade poolrühma*) võib konstrueerida järgmiselt. Selle poolrühma elementideks on kahekorruselised majad, mis võivad olla piiramatu pikkusega, kuid on kõik ühelaiused ning ühekõrgused. Kahe maja summaks loeme maja, mis tekib siis, kui vahetult esimese maja kõrvale temast paremale ehitada



Joonis 2.

teine maja ning viia nad ühise katuse alla (vt. joon. 1). Lihtne on veenduda, et majade liitmine on assotsiatiivne (vt. joon. 2), kuid mitte kommutatiivne (vrd. jooniseid 1 ja 3).



Joonis 3.

Sõnade poolrühma elementideks on mingi sümbolite (tähteae) hulga elementidest koostatud korteežid (sõnad). Näiteks, kui sümbolite hulk koosneb elementidest α, γ, 1, 7 ja 0, siis on sõnadeks $\alpha 70$, γ, $00\gamma 0$, α jne. Kahe sõna korrutiseks loeme sõna, mis moodustub teise sõna kirjutamisel vahetult esimese sõna järele (liitsõna!). Ilmselt on see operatsioon assotsiatiivne.

Sõnade grupoid koosneb sõnadest, mis konstrueeritakse tähtedest ja sulgudest. Eelmises näites kasutatud tähestiku korral on sõnadeks näiteks $(\alpha 1)$, $(\gamma(1\alpha)7)(\gamma(01))$ ja $(\gamma\alpha)(00)$. Samadest tähtedest samas järjekorras koosnevad sõnad loetakse erinevateks, kui nad erinevad sulgude paigutuse poolest. Seepärast $(a(b, c)) \neq ((a, b)c)$ ja meil on tegemist grupoidiga, mitte poolrühmaga.

Tehte (seega ka grupoidi või poolrühma) defineerimiseks kasutatakse nn. *Cayley tabelit*, mida nimetatakse lihtsalt korrutustabeliks, kui tegemist on multiplikatiivse kirjutusviisiga. Korrutustabelisse märgitakse kõigi võimalikkude teguripaaride korrutised. Muidugi on sellise tabeli konstrueerimine põhimõtteliselt võimalik ainult lõplike hulkade korral.

Tabel koostatakse järgmiselt. Tema esimesse ritta kirjutatakse kõik elemendid mingis järjekorras. Samad elemendid samas järjekorras moodustavad ka tabeli esimese veeru. Esimene rida ja veerg eraldatakse tabeli ülejäänud osast joontega (kusjuures ülemisse vasakusse nurka kantakse tavaliselt tehte märk). Tabeli täitmisel kirjutatakse korrutis $x \cdot y$ esimese veeru elemendist x paremale, esimese rea elemendi y alla.

Järgnevalt on toodud viis Cayley tabeli näidet, mis on ühtlasi vastavate grupoidide definitsioonideks:

$\cdot$	e
e	e

$\times$	a	b
a	a	a
b	b	a

$\cdot$	e	a
e	e	a
a	a	a

$\circ$	a	b	c
a	a	a	c
b	b	c	a
c	a	c	b

$\ast$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	a	b	e
b	b	b	b	e
c	c	e	e	e

Selleks et otsustada, kas tehe on assotsiatiivne, tuleb teostada täiendav analüüs, mis suurte tabelite korral võib olla üsna komplitseeritud. Toodud viie tabeli puhul ei valmista see analüüs küll erilisi raskusi. Osutub, et esimese ja kolmanda tabeliga defineeritud tehted on assotsiatiivsed ja vastavad hulgad seega poolrühmad (kui tegureiks on ainult e, siis olenemata sulgude paigutusest on ka korrutis e; kui aga vähemalt ühe tegurina esineb a, siis on korrutis a). Kolm ülejäänud tehet ei ole assotsiatiivsed. See ilmneb järgmistest näidetest:

$$b \times (a \times a) = b \times a = b, \qquad (b \times a) \times b = b \times b = a;$$
$$(a \circ b) \circ c = a \circ c = c, \qquad a \circ (b \circ c) = a \circ a = a;$$
$$(a \ast c) \ast b = e \ast b = b, \qquad a \ast (c \ast b) = a \ast e = a.$$

Eriti lihtsalt saab Cayley tabeli järgi otsustada, kas tegemist on kommutatiivse või mittekommutatiivse tehtega. Vajalik reegel järeldub vahetult tabeli ehitusest: tehe on kommutatiivne parajasti siis, kui tabel on sümmeetriline peadiagonaali (s. o. ülemisest vasakust nurgast väljuva diagonaali) suhtes. Seega on ülaltoodud näidetest esimese, kolmanda ja viienda tabeliga defineeritud tehted kommutatiivsed.

Ülesandeid:

7. Kuidas muutub poolrühma Cayley tabel, kui poolrühmale lisada nullelement? ühikelement?

8. Kuidas näeb välja Cayley tabelis ühikelemendile (nullelemendile) vastav rida ja veerg?

9. Milline on hulga $\{1, 2\}$ teisenduste poolrühma Cayley tabel?

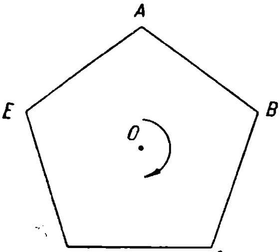
10. Konstrueerida poolrühma $A = \{a, a^2, a^3, a^4, a^5\}$ jaoks korrutustabel, kui $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, ning on teada, et $a^9 = a^6 = a^3$, $a^{10} = a^7 = a^4$ ja $a^8 = a^5$.

4. Isomorfism

Vaatleme naturaalarvude hulka 1, 2, 3, 4, ... poolrühmana liitmise suhtes. Selle poolrühma elementideks on araabia numbritega 1, 2, 3, ..., 9, 0 kirjutatud täisarvud. Kuid naturaalarvude hulga võib esitada ka teises sümboolikas, näiteks kujul I, II, III, IV, ... Käsitledes seda hulka poolrühmana liitmise suhtes, saame ilmselt sellesama (sõna kõige loomulikumas mõttes) poolrühma mis varemgi. Kuid formaalselt on need poolrühmad erinevad, sest nende elementide hulgad on erinevad.

Võrdleme omavahel veel kaht järgmist poolrühma. Koosnegu esimene poolrühm arvudest 0, 1, 2, 3 ja 4 ning olgu operatsioon $\oplus$ temas defineeritud järgmiselt: kahe arvu m ja n «summa» $m \oplus n$ võrdub arvuga $m + n$, kui see ei ületa nelja, ning arvuga $m + n - 5$, kui $m + n \geqslant 5$. Seega selle poolrühma Cayley tabel on järgmine:

$\oplus$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3



Joonis 4.

Teiseks vaatleme poolrühma, mille elementideks on korrapärase viisnurga pöörded a_0, a_1, a_2, a_3 ja a_4 ümber selle viisnurga sümmeetriakeskpunkti (joonisel 4 noolega näidatud suunas) vastavalt nurkade 0°, 72°, 114°, 216° ja 288° võrra. Kahe pöörde a_m ja a_n «summaks» $a_m \boxplus a_n$ nimetame sellist pööret a_i $(i = 0, 1, 2, 3, 4)$, mille rakendamise tulemus langeb ühte pöörete a_m ja a_n järjestikuse rakendamise tulemusega. Näiteks $a_3 \boxplus a_4$ tähendab, et viisnurka tuleb algul pöörata 216° võrra, siis aga veel 288° võrra; seega on viisnurka pööratud algasendiga võrreldes 144° võrra, niisiis $a_3 \boxplus a_4 = a_2$. Kokkuvõttes, selle poolrühma Cayley tabel tuleb niisugune:

$\boxplus$	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
a_0	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	a_1	a_2	a_3	a_4	a_0
a_2	a_2	a_3	a_4	a_0	a_1
a_3	a_3	a_4	a_0	a_1	a_2
a_4	a_4	a_0	a_1	a_2	a_3

Esimesel pilgul tundub, et need kaks poolrühma on täiesti erinevad: nad koosnevad erinevatest elementidest (arvud ja pöörded), nende tehted on nii tähistuse kui ka defineerimisviisi poolest erinevad. Kuid tarvitseb vaid asendada esimese poolrühma Cayley tabelis iga element i sümboliga a_i ($i = 0, 1, 2, 3, 4$) ja me saame teise poolrühma Cayley tabeli. Seega teatud mõttes ei erine ka need poolrühmad teineteisest.

Algebra seisukohalt ebaoluliselt erinevad üksteisest need grupoidid või poolrühmad, mis võib-olla koosnevad küll erinevatest elementidest, kuid sisaldavad elemente n.-ö. ühe palju [3] ning on sama algebralise ehitusega. Selliseid ebaoluliselt erinevaid poolrühmi või grupoide nimetatakse isomorfseteks (kreekakeelsetest sõnadest *ίσοσ* — sama ja *μορφη* — kuju).

Anname nüüd täpse definitsiooni. Kaht grupoidi või poolrühma nimetatakse *isomorfseteks*, kui nende elementide hulkade vahel on korraldatud selline üksühene vastavus, et esimese grupoidi või poolrühma kahe elemendi korrutisele vastab teises grupoidis või poolrühmas vastavate elementide korrutis. Kui esimene grupoid on $A = \{a_\alpha\}$, teine $B = \{b_\beta\}$ ning üksühene vastavus [4] φ seab elemendile a_α vastavusse elemendi $b_\alpha = a_\alpha\varphi$, siis definitsioonis esitatud nõue tähendab seda, et

$$(a_1 \cdot a_2)\varphi = (a_1\varphi)\cdot(a_2\varphi),$$

ehk seda, et $a_1 \cdot a_2 = a_3$ korral $b_1 \cdot b_2 = b_3$.

Käesoleva punkti algul näidetena toodud neli poolrühma on paarikaupa isomorfsed. Toome veel mõned näited. Grupoidid $P = \{a, b, c, d\}$ ja $Q = \{e, f, g, h\}$, mis on defineeritud vastavalt Cayley tabelitega

$\cdot$	a	b	c	d
a	b	a	a	c
b	c	a	d	b
c	b	b	b	a
d	a	b	a	d

ja

$\times$	e	f	g	h
e	f	f	h	f
f	g	h	f	e
g	h	f	g	h
h	h	h	e	f

[3] S. t. neil on sama võimsus (vt. näiteks viites 1 nimetatud artiklit).

[4] Hulgateoorias kasutatakse üksühese vastavuse tähistamiseks tavaliselt sümbolit «$\leftrightarrow$» (vt. näiteks viites 1 nimetatud artiklit). Algebras osutub aga sobivamaks siin toodud tähistus.

on isomorfsed. See saab ilmseks, kui korraldada P ja Q elementide vahel järgmine üksühene vastavus φ:

$$a\varphi = h, \quad b\varphi = f, \quad c\varphi = e, \quad d\varphi = g.$$

Poolrühm $A = \{a, b, c, d\}$, mis on defineeritud Cayley tabeliga

	a	b	c	d
a	a	a	d	d
b	a	b	c	d
c	a	c	b	d
d	a	d	a	d

on isomorfne hulga $\{1, 2\}$ kõigi teisenduste poolrühmaga (vt. lk. 6).

Toome siin veel isomorfismi kaks lihtsat omadust. Esimene neist väidab, et kui grupoid A on isomorfne poolrühmaga P, siis on A ise poolrühm (s. t. on assotsiatiivne). Tõepoolest, olgu a, b ja c grupoidi A kolm suvalist elementi ning x, y ja z — neile isomorfismi puhul vastavad poolrühma P elemendid. Vaatleme korrutist $a \cdot (b \cdot c)$. Isomorfismi tõttu vastab korrutisele $b \cdot c$ poolrühma P element $y \cdot z$ ning korrutisele $a \cdot (b \cdot c)$ element $x \cdot (y \cdot z)$. Et poolrühmas P kehtib assotsiatiivsuse seadus, siis $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$. Element $(x \cdot y) \cdot z$ aga vastab vaadeldavas isomorfismis grupoidi A elemendile $(a \cdot b) \cdot c$. Seega vastab element $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ grupoidi A kahele elemendile $a \cdot (b \cdot c)$ ja $(a \cdot b) \cdot c$. Vastavuse üksühesuse tõttu ei saa üks element vastata kahele erinevale elemendile, seega $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ ja A on assotsiatiivne grupoid ehk poolrühm.

Analoogiliselt saab tõestada ka teise omaduse: kui grupoid on isomorfne kommutatiivse grupoidiga, siis on ta ise kommutatiivne.

Ülesandeid:

11. Näidata, et kõigi paarisarvude ja kõigi täisarvude poolrühmad liitmise suhtes on isomorfsed.

12. Näidata, et kolmega jaguvate ja seitsmega jaguvate positiivsete täisarvude poolrühmad liitmise suhtes on isomorfsed.

13. Näidata (kasutades korrutise logaritmi valemit), et positiivsete reaalarvude poolrühm korrutamise suhtes ja kõikide reaalarvude poolrühm liitmise suhtes on isomorfsed.

14. Majade poolrühma iga maja on ehitatud kolme liiki tüüpmajadest. Milline peab olema selle majade poolrühmaga isomorfse sõnade poolrühma tähestik?

Kirjandus

1. Kangro, G., Kõrgem algebra. Tln., 1962.
2. Ван-дер-Варден, Б. Л., Современная алгебра, I ja II osa, М.—Л., 1937.
3. Курош, А. Г., Лекции по общей алгебре. М., 1962.

Küberneetika

AUTOMAATNE PROGRAMMEERIMINE

Ü. Kaasik, A. Korjus

Elektronarvutite kasutuselevõtmine on võimaldanud täielikult automatiseerida küll suurte ülesannete lahendamisega seotud arvutustööd, kuid mitte kogu lahendusprotsessi. Nimelt jääb inimese käsitsitööks esialgu veel nii ülesande lahendusalgoritmi koostamine kui ka selle programmeerimine [1]. Neist esimese tööga saavad ülesannete formuleerijad (insenerid, füüsikud, majandusteadlased jne.) enamasti ise hakkama, teine tuleb aga jätta spetsiaalse ettevalmistusega programmeerijate hooleks. Siit tulenebki üks põhilisi takistusi arvutite üha laialdasema rakendamise teel: lahendamist vajavate ülesannete arv kasvab tunduvalt kiiremini kui vilunud programmeerijate arv [2]. Programmeerimise töömahukus ja programmeerijate nappus ongi nendeks põhjusteks, miks viimastel aastatel nii intensiivselt uuritakse nn. *automaatse programmeerimise* küsimusi, s. t. võimalusi anda lisaks arvutamisele ka võimalikult suurem osa programmeerimisest elektronarvuti enese teostada.

Sisuliselt tähendab programmeerimine lahendusalgoritmi üleskirjutamist ühes erilises keeles — arvuti käskude keeles. Automaatset programmeerimist teostav programm (nn. *progammeeriv programm*) peab seega algoritmi «tõlkima» teatavast «inimkeelest» sellesse «arvutikeelde». Niisugust «inimkeelt», milles kirjutatult tuleb algoritmid programmeerivale programmile ette anda, nimetatakse tavaliselt vastava automaatse programmeerimise süsteemi *sisendkeeleks*.

Automaatse programmeerimise süsteemi loomisel tuleb koostada nii sisendkeel kui ka programmeeriv programm. Selle süsteemi tegelikul kasutajal on aga vaja tunda vaid sisendkeelt. Seega kasu-

[1] Lahendusalgoritmide üleskirjutamist ja programmeerimist on lühidalt kirjeldatud artiklites: Kaasik, Ü., Elektronarvutid ja programmeerimine. — Matemaatika ja kaasaeg, IV, lk. 18—30; Kaasik, Ü., Algoritmide blokk-skeemid. — Matemaatika ja kaasaeg, V, lk. 24—36. Programmeerimise põhimõistete tundmist vähemalt nende artiklite ulatuses on eeldatud ka käesoleva artikli lugejalt.

[2] Lähemalt on selle küsimuse kohta juttu artiklis: «Programmeerijate ettevalmistamisest», — käesolev kogumik, lk. 25—26.

tamise seisukohalt erinevad automaatse programmeerimise süsteemid üksteisest vaid oma sisendkeele poolest.

Sisendkeel peab rahuldama mõningaid ilmseid nõudeid. Nimelt peab ta: 1) lubama täpselt kirja panna võimalikult kõiki algoritme (vähemalt teatud kindlast valdkonnast), 2) olema kompaktne ja lihtsalt õpitav (lihtsam kui «käskude keel»), 3) olema tänapäeva tehniliste vahenditega lihtsalt arvutisse viidav (seda nõuet ei rahulda näiteks nn. «blokk-skeemide keel»).

Üheks levinumaks sisendkeeleks, mida kasutatakse peaaegu kõikides maades, on rahvusvaheline algoritmiline keel[3] ALGOL. See keel on võetud aluseks ka TRÜ arvutuskeskuses praegu katsetamisel oleva automaatse programmeerimise süsteemi sisendkeele koostamisel. Järgnevas kirjeldamegi ALGOL-i seda varianti, kasutades tema jaoks siiski nimetust ALGOL (vaadeldavas sisendkeeles üleskirjutatud lahendusalgoritme nimetame näiteks nende algoritmide ALGOL-programmideks).

Oma üldiselt ehituselt on ALGOL mitmeti sarnane matemaatilise teksti tavalise kirjutusviisiga: mõlemas kasutatakse analoogilisi tähistusi, sümboleid ja konstante, arvutuseeskirjad esitatakse avaldistena jne. Sellepärast peatume üksikasjalikumalt vaid nende kirjutusviiside erinevustel.

Mitmesuguste programmis esinevate suuruste (muutujad, funktsioonid) ja samuti programmi üksikute osade tähistamiseks kasutatakse ALGOL-programmides nn. identifikaatoreid. I d e n t i f i k a a t o r on vene tähestiku suurtest tähtedest ja numbritest moodustatud «sõna», mille esimeseks sümboliks on täht. Nii näiteks võib identifikaatoritena kasutada järgmisi «sõnu»: A, A2B, CYYPAPB, ИНДЕКС7, KTTP jne. Identifikaatoreid võib programmeerija valida (ja neile tähendust anda) täiesti oma äranägemise järgi. Erandi moodustavad vaid nn. r e s e r v e e r i t u d i d e n t i f i k a a t o r i d, millel on ALGOL-programmides alati oma kindel tähendus. Nii tohib näiteks sõnu СИН, КОС, ТАН ja КОТАН programmides kasutada vaid vastavate trigonomeetriliste funktsioonide tähistustes; sõnad БР, МР, НР ja КВК tähistavad vastavalt operatsioone, mida matemaatilises kirjanduses märgitakse sümbolitega $\geqslant$, $\leqslant$, $\neq$ ja $\sqrt{\ }$; sõnade НАЧАЛО ja КОНЕЦ vahele paigutatakse operaatorid, mida on tarvis vaadelda ühe tervikuna jne.

Põhiliselt kasutatakse identifikaatoreid mitmesuguste muutuvate suuruste tähistamiseks. Sealjuures tuleb muidugi silmas

[3] Nimetus ALGOL pärineb ingliskeelsetest sõnadest «*Algorithmic Language*». ALGOL-i nn. etalonkeele esialgne variant koostati 1958. a. mitme maa teadlaste osavõtul. 1960. a. anti täpsustatud variant (nn. ALGOL-60), millest siin kirjeldamisele tulev sisendkeel erineb eeskätt vaid selle poolest, et temas ladina alfabeedi asemel kasutatakse vene alfabeeti (sest arvuti «Ural-4» trükkimisseadmel puuduvad ladina tähed). Teistest kasutusel olevatest sisendkeeltest on kõige enam levinud FORTRAN (Formula Translator) ja COBOL (*Common Business Oriented Language*).

pidada, et erinevad muutujad oleksid tähistatud erinevate identifikaatoritega. Sageli on aga matemaatilistes ülesannetes otstarbekohane tähistada tervet rida muutujaid ühe ning sama tähega, mis on varustatud sobivate indeksitega (näiteks vektori või maatriksi elementide puhul). Niisugust ühtse tähistusega muutuvate suuruste kompleksi nimetatakse ALGOL-programmide korral m a s s i i v i k s. Et ALGOL-programmis tuleb kõik sümbolid kirjutada ühte ritta, pole tavaliste indeksite (samuti astendajate) kasutamine seal võimalik. Selle asemel kirjutatakse indeksid massiivi identifikaatori järele nurksulgudesse, näiteks AA1[M, H].

Vaadeldavas keeles on nõutud, et iga massiiv oleks enne tema esmakordset kasutamist defineeritud erilise nn. m a s s i i v i k i r j e l d u s e abil. Massiivikirjelduse ülesandeks on siduda kirjeldatava massiiviga üks kindel identifikaator ja reserveerida arvuti mälus vajalik arv pesi selle massiivi elementide salvestamiseks. Massiivikirjeldus algab reserveeritud sõnaga МАССИВ, millele järgneb kirjeldatava massiivi identifikaator, kus nurksulgudesse on indeksite asemele kirjutatud nende vähimad ja suurimad väärtused. Näiteks massiivikirjeldus

МАССИВ AA1[0 : 2, 1 : 5];

ütleb, et identifikaatoriga AA1 on programmis tähistatud kahedimensionaalne massiiv, mille esimene indeks saab omandada väärtusi 0, 1 ja 2 ning teine indeks väärtusi 1, 2, 3, 4 ja 5 (seega kuulub sellesse massiivi kokku $3 \cdot 5 = 15$ muutujat).

Ühe massiivikirjeldusega saab defineerida ka enam kui ühe massiivi. Näiteks massiivikirjeldus

МАССИВ (A[1 : 10, 6 : 11], B[1 : 100], C[1 : 7, 0 : 5, 0 : 4]);

defineerib kahedimensionaalse massiivi A (kokku 60 muutujat), ühedimensionaalse massiivi B (100 muutujat) ja kolmedimensionaalse massiivi C (210 muutujat).

Et arvutusoperatsioonide teostamine massiividega taandub tehetele nende massiivide koosseisu kuuluvate muutujatega, siis on arvutusprotsesside kirjeldamisel sageli tarvis tähistada ka üksikuid massiivi kuuluvaid muutujaid, nn. i n d e k s i t e g a m u u t u j a i d. Selleks kasutatakse massiivi identifikaatorit, millele nurksulgudes järgneb indeksite väärtuste loetelu. Sealjuures peab jälgima, et indeksite arv võrduks vastava massiivi kirjelduses antud dimensiooniga, ja et ühegi indeksi väärtus ei läheks välja kirjelduses antud piiridest. Näiteks viimati toodud massiivikirjelduse järel võib kasutada indeksitega muutujaid A[7, 11], C[4, 0, 1], B[76] jne., kuid mitte muutujaid A[3, 1, 1], A[0, 11], B[7, 6], C[0, 0, 0] jne.

Indeksite väärtuste loetelu ei tarvitse koosneda täisarvulistest konstantidest. Nende asemel võib kasutada teiste muutujate identifikaatoreid (või isegi aritmeetilisi avaldisi neist). Tuleb ainult pidada silmas, et indeksi kohal kasutatav muutuja omandaks vaid täisarvulisi väärtusi ja et need väärtused ei läheks välja vastava indeksi muutumisvahemikust. Näiteks võib viimati toodud massiivikirjelduse järel kasutada indeksitega muutujaid A[K, M], C[5, K, K], B[K + M], C[K + 1, M — 6, K — 1], kui identifikaatoritega K ja M tähistatud muutujad on sobivasse vahemikku kuuluvate täisarvuliste väärtustega.

Viimasest näitest selgus, et indeksina kasutatavate muutujate puhul on tähtis nende väärtuste täisarvulisus. Analoogilise olukorraga on tegemist ka mõnedel teistel juhtudel. Sellepärast ongi vaadeldavas sisendkeeles kokku lepitud, et iga muutuja saab omandada vaid üht kindlat tüüpi väärtusi. Erinevaid t ü ü p e on kokku neli: ЦЕЛЫЙ (täisarvud), ПЛАВАЮЩИЙ (ratsionaalarvud), ФИКСИРОВАННЫЙ (vahemikku (—1, +1) kuuluvad kümnendmurrud) ja ЛОГИЧЕСКИЙ (loogilise avaldise tõeväärtused).

ALGOL-programmides tuleb iga muutuja tüüp (enne selle muutuja kasutamist) määrata vastava tüübikirjeldusega. T ü ü b i k i r j e l d u s algab vastava tüübi nimega, millele järgneb sellesse tüüpi kuuluvate muutujate identifikaatorite loetelu. Rõhutame, et ühte massiivi kuuluvad muutujad peavad kõik olema sama tüüpi. Tüübikirjeldusse, mis peab eelnema massiivikirjeldusele, kirjutatakse sel juhul massiivi identifikaator, millele järgnevates nurksulgudes on massiivi dimensiooniga võrdne arv «vabu kohti». Näiteks tüübikirjeldus

ЦЕЛЫЙ (K, M, C[, ,], ИНДЕКС7);
ФИКСИРОВАННЫЙ (A2B, A[,], B[ ]);

teatab, et lihtsad muutujad K, M ja ИНДЕКС7 ning kõik kolmedimensionaalsesse massiivi C kuuluvad muutujad on täisarvulised, lihtne muutuja A2B, kahedimensionaalse massiivi A ja ühedimensionaalse massiivi B kõik muutujad aga lihtkümnendmurrud.

Samadesse tüüpidesse peavad kuuluma ka kõik programmis kasutatavad k o n s t a n d i d. Täisarvud kirjutatakse täiesti tavalisel viisil, näiteks: 11822, —17, 0 ja +987. Ratsionaalarvude kirjutamiseks on kaks võimalust. Esimene neist erineb tavalisest kirjutusviisist üksnes selle poolest, et täisosa eraldatakse murdosast mitte koma, vaid punkti abil; näiteks: —3.41 (tähendab arvu —3,41), +29.951, 68.017 ja 0.54389. Teises kirjutusviisis avaldatakse arv kahe teguri korrutisena, millest teine on kümne mingi aste; näiteks: —341 ⁎ —2 (tähendab korrutist $—341 \cdot 10^{-2} = —3{,}41$), 0.29951 ⁎ +3 (tähendab korrutist $0{,}29951 \cdot 10^{3} = 299{,}51$), 1 ⁎ 7 (tähendab arvu $1 \cdot 10^{7} = 10\,000\,000$) ja +6.8 ⁎ —5 (tähendab arvu $6{,}8 \cdot 10^{-5} = 0{,}000068$). Lihtkümnendmurdude puhul kirjutatakse eraldi tüvenumbrid ja neile eelnevate nullide arv, näiteks: 1 ⁎⁎ 3 (tähendab murdu 0,0001), —983 ⁎⁎ 5 (tähendab murdu —0,00000983) ja +71 ⁎⁎ 0 (tähendab murdu 0,71). Loogilistel konstantidel on ainult kaks võimalikku väärtust: 0 (tähenduses *väär*) ja 1 (tähenduses *tõene*).

Olgu veel märgitud, et kui mingi muutuja tüüp ei ole kirjeldatud, siis loetakse ta ratsionaalarvude tüüpi kuuluvaks.

Samuti nagu matemaatilises kirjanduses, nii on ka vaadeldavas sisendkeeles põhiliseks arvutuseeskirjade kirjeldamise vahendiks a r i t m e e t i l i s e d a v a l d i s e d. Iga selline avaldis on mingi arvulise väärtuse leidmise juhend. Kõige lihtsamal juhul võib see juhend ütelda, et otsitavaks väärtuseks on mingi konstant või ühe muutuja väärtus. Neid kõige lihtsamaid avaldisi aritmeetiliste tehete märkide ja ümarsulgudega sobivalt kombineerides saadaksegi keerulisemad avaldised. Aritmeetilisi tehteid tähistavad ALGOL-programmides järgmised sümbolid: $+$ (liitmine), $-$ (lahutamine või järgneva avaldise märgi muutmine vastupidiseks), $\times$ (korrutamine), / (jagamine) ja $\uparrow$ (astendamine).

Kui v_1 ja v_2 on mistahes aritmeetilised avaldised ning v_3 aritmeetiline avaldis, mis ei alga sümboliga $+$ või $-$, siis on aritmeetilisteks avaldisteks ka järgmised kombinatsioonid:

$$(v_1);\ +v_3;\ -v_3;\ v_1+v_3;\ v_1-v_3;\ (v_1)\times(v_2);\ (v_1)/(v_2);\ (v_1)\uparrow(v_2).$$

Järgmises tabelis on toodud mõned aritmeetiliste avaldiste näited:

Avaldise kuju ALGOL-programmis	Sama avaldis tavalises kirjaviisis
$(-B+КВК(B\uparrow 2-4A\times C))/2A$	$\frac{-B+\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$
$(КОС(2X))\uparrow 3-СИН((X/2)\uparrow 2)$	$\cos^3(2X)-\sin\left(\frac{X}{2}\right)^2$
$B[M,H]\times(-C[H]+E)/A[M]$	$\frac{B_{mn}(-C_n+E)}{A_m}$
$((X\uparrow 2\times Y\uparrow 3+0.1)\times Y\uparrow(X+4\ast-3)+$ $5\times X\uparrow 3)/(56\ast 4\times X\uparrow 3\times Y\uparrow 2+1.46X)$	$\frac{(X^2Y^3+0{,}1)\,Y^{X+0{,}004}+5X^3}{560000X^3Y^2+1{,}46X}$

Üleminek ühelt ALGOL-programmi realt teisele ei muuda avaldise tähendust. Seetõttu on selline üleminek lubatud avaldise mistahes kohas, kusjuures eelmise rea lõpus olevat tehtemärki ei tule järgmise rea alguses korrata (vt. tabeli viimane avaldis).

Aritmeetiliste avaldiste kirjutamisel tuleb arvestada, et esitatud arvutusoperatsioonid sooritatakse alati järgmises järjekorras: 1) sulgudesse paigutatud avaldiste väärtused arvutatakse eraldi ülejäänud avaldisest ja saadud tulemusi kasutatakse edasistes arvutustes; 2) sulgude puudumisel sooritatakse astendamine enne korrutamist, korrutamine enne jagamist ja jagamine enne liitmist ning lahutamist (seda reeglit on arvestatud ka viimases tabelis toodud näidetes).

ALGOL-programmides pole lubatud kasutada avaldisi, milles tehete teostamise järjekord ei ole üheselt määratud. Sellised on näiteks avaldised A / B / C, A ↑ B ↑ C jne. Tehete teostamise järjekorra üheseks määramiseks tuleb sel juhul kasutada sulgusid, näiteks (A / B) / C, A ↑ (B ↑ C) jne.

Sulgude või tehtemärkide ärajätmine on aritmeetilistes avaldistes lubatud vaid siis, kui see ei saa tekitada segadust. Näiteks korrutise 2×РААДИУС asemel võib kirjutada lihtsalt 2РААДИУС. Seevastu kirjutist РААДИУС2 tõlgendab programmeeriv programm kui uut identifikaatorit, mitte kui korrutist. Samal põhjusel ei või korrutise märki × ära jätta näiteks avaldises A × B.

Muutujaid, mille väärtustega teostatakse mingit arvutusoperatsiooni, nimetatakse selle operatsiooni o p e r a n d i d e k s. Näiteks liitmisoperatsiooni operandideks on mõlemad liidetavad, jagamisel jagatav ja jagaja jne. ALGOL-programmide täitmisel sooritatakse aritmeetilisi operatsioone ainult üht ja sama tüüpi arvudega, kusjuures tulemus kuulub operandidega samasse tüüpi. Sellest tingituna on ALGOL-programmides kasutatav aritmeetika üldtuntud aritmeetikast veidi erinev. Nende erinevuste esiletoomiseks vaatleme paari näidet.

Kui täisarvuliste muutujate A ja B väärtused on vastavalt 69 ja —8, siis jagatise A / B väärtuseks saame täisarvu —8. Kui need muutujad kuuluvad aga ratsionaalarvude tüüpi, siis operandide samade väärtuste (69.0 ja —8.0) korral saame jagatise A / B väärtuseks hoopis ratsionaalarvu —8.625.

Kui lihtkümnendmurdude tüüpi kuuluvate muutujate C1 ja C2 väärtused on 9817 ⁎⁎ 0 ja 24 ⁎⁎ 1, siis nende summa C1 + C2 väärtuseks osutub kümnendmurd 57 ⁎⁎ 2. Kui aga samade väärtustega (0.9817 ja 0.024) muutujad on ratsionaalarvude tüüpi, siis on nende summaks ratsionaalarv 1.0057.

Kui mingi operatsiooni operandid on erinevat tüüpi, siis enne operatsiooni sooritamist teisendatakse operandide väärtused ratsionaalarvudeks (ka operatsiooni tulemus saadakse sel juhul ratsionaalarvuna). Märgime, et operandi enese tüüp seejuures ei muutu.

Toodud reegleid kasutades saab iga aritmeetilise avaldise jaoks määrata, mis tüüpi arvudeks osutuvad tema väärtused. Seda väärtuste ühist tüüpi nimetatakse antud a v a l d i s e t ü ü b i k s. Rõhutame, et avaldiste tüüpi ei ole tarvis kirjeldada — see on operandide tüüpidega üheselt määratud.

Arvutusalgoritmides tuleb peale aritmeetiliste operatsioonide teatavasti sooritada ka nn. kontrollimisoperatsioone. ALGOL-programmides saab iga kontrollimisoperatsiooni esitada teatava loogilise avaldise tõeväärtuse kontrollimisena (tingimus loetakse täidetuks, kui see avaldis on tõene). L o o g i l i n e a v a l d i s kujutab endast mingit tõeväärtuse arvutamise eeskirja. Kõige lihtsamal juhul võib selline eeskiri ütelda, et otsitavaks tõeväärtuseks on mingi loogilise muutuja väärtus või konstant.

Loogiliste avaldiste üheks oluliseks eriliigiks on võrdlused. Iga v õ r d l u s moodustab aritmeetiliste avaldiste paari, mis on ühendatud võrdlemise sümboliga ja võetud sulgudesse. Vaadeldavas sisendkeeles saab kasutada kuut erinevat v õ r d l e m i s e s ü m b o l i t: $>$ (suurem), БР (suurem-võrdne), $=$ (võrdne), МР (väiksem-võrdne), $<$ (väiksem) ja НР (mittevõrdne). Toome paar võrdluste näidet:

(B ↑ 2 — 4A × C < 0.0) tähendab lauset: $B^2 - 4AC$ on negatiivne;

(Y НР 5) tähendab lauset: Y erineb viiest.

Võrdlus omandab väärtuse 1 (*tõene*) siis, kui vaadeldavate aritmeetiliste avaldiste väärtuste vahel esineb vastav olukord, vastasel juhul on võrdluse väärtus 0 (*väär*).

Loogilisi konstante või muutujaid ja võrdlusi loogiliste tehete ning sulgudega sobivalt kombineerides võib saada kuitahes keerulise struktuuriga loogilisi avaldisi. Loogilisi tehteid[4] tähistatakse vaadeldavas sisendkeeles järgmiste sümbolitega: НЕ (eitus), $\wedge$ (konjunktsioon ehk loogiline korrutamine), $\vee$ (disjunktsioon ehk loogiline liitmine), $\rightarrow$ (implikatsioon) ja ЭК (ekvivalents).

Kui b_1 ja b_2 on loogilised avaldised, siis on loogilisteks avaldisteks ka järgmised kombinatsioonid:

$b_1 \vee b_2$; $b_1 \rightarrow b_2$; b_1 ЭКb_2; (b_1); НЕ b_1; $b_1 \wedge b_2$;

Loogiliste avaldiste puhul tuleb arvestada, et nimetatud tehted sooritatakse alati järgmises järjekorras: 1) sulgudesse paigutatud avaldiste väärtused arvutatakse eraldi ülejäänud avaldisest ja saadud tulemusi kasutatakse edasistes arvutustes; 2) sulgude puudumisel sooritatakse kõik aritmeetilised tehted enne võrdlusoperatsioone ja eitamine enne loogilist korrutamist, loogiline korrutamine enne loogilist liitmist, loogiline liitmine enne implikatsiooni ning implikatsioon enne ekvivalentsi.

ALGOL-programmides pole lubatud kasutada loogilisi avaldisi, milles tehete teostamise järjekord ei ole üheselt määratud (näiteks A → B → C).

Toome veel mõned loogiliste avaldiste näited:

(A МР X) ∧ (X МР B); P → P ∨ K ∧ Б;

НЕ(PP ∧ KK) ∨ (A + B БР X).

Arvutusprotsessi käigus omandavad kasutatavad muutujad järjest uusi väärtusi. Muutujate väärtuste muutmine toimub ALGOL-programmides kindla kujuga eeskirja järgi, mida nimetatakse o m i s t a m i s o p e r a a t o r i k s. Omistamisoperaatori põhiliseks

---

[4] Loogiliste tehete definitsioonid võib leida näiteks artiklis: T a u t s, A., Matemaatilise loogika põhimõisteid. — Matemaatika ja kaasaeg, II, lk. 3—7.

osaks on mingi aritmeetiline (või loogiline) avaldis, mida vastava muutuja identifikaatorist eraldab omistamise sümbol «:=». Näiteks omistamisoperaator

$$X1 := (-B + KBK(B \uparrow 2 - 4A \times C))/2A$$

tähendab, et omistamise sümbolist paremal oleva avaldise väärtus (üks ruutvõrrandi lahendeist) tuleb teisendada vajalikku tüüpi konstandiks ja võtta muutuja X1 väärtuseks.

Nagu toodud näite puhul juba nimetatud, tuleb omistamisoperaatorite moodustamisel silmas pidada, et muutujale saab omistada ainult tema tüübiga kooskõlas olevaid väärtusi. Seetõttu juhul, kui omistamisoperaatoris esineva avaldise tüüp erineb muutuja tüübist, teisendatakse avaldise väärtus enne omistamist muutujaga üht tüüpi arvuks. Seejuures toimitakse järgmiste reeglite järgi.

Ratsionaalarvu teisendamine täisarvuks annab tulemuseks selle ratsionaalarvu täisosa (näiteks arvu 2.9116 ✳ 1 teisendamisel täisarvuks saame 29).

Ratsionaalarvu teisendamisel lihtkümnendmurruks saame tulemuseks selle ratsionaalarvu murdosa (näiteks arvu 17.823 ✳ —1 teisendamisel saame 7823 ✳✳ 0).

Täisarvud ja lihtkümnendmurrud säilitavad ratsionaalarvudeks teisendamisel oma väärtuse, kuid omandavad uue kirjapildi (näiteks täisarvu 32 ja kümnendmurru 5 ✳✳ 4 teisendamisel ratsionaalarvudeks saame vastavalt 32.0 ja 0.00005).

Täisarvu teisendamine lihtkümnendmurruks, samuti lihtkümnendmurru teisendamine täisarvuks annab alati tulemuseks nulli.

Omistamisoperaatorid, milles loogilise avaldise väärtus omistatakse arvulist tüüpi muutujale või aritmeetilise avaldise väärtus loogilisele muutujale, pole vaadeldavas sisendkeeles lubatud.

Olgu veel märgitud, et algul omistab programmeeriv programm kõigile muutujatele väärtuse null.

ALGOL-programmina esitatud lahendusalgoritm kujutab endast kirjelduste ja operaatorite jada, milles kõik kirjeldused ja operaatorid on üksteisest eraldatud semikoolonitega. Operaatori üheks põhiliigiks on omistamisoperaator, teiste põhiliikidega tutvume järgnevas. Peale põhiliikide on aga ALGOL-programmides sageli tarvis kasutada veel nn. liitoperaatoreid, mis saadakse mitme erineva operaatori ühendamisel üheks suuremaks operaatoriks. Operaatorite ühendamine liitoperaatoriks toimub sel teel, et nad paigutatakse nn. algava operaatorsulu НАЧАЛО ja lõppeva operaatorsulu КОНЕЦ vahele (seejuures võivad mõned ühendatavatest operaatoritest ise samuti olla liitoperaatorid).

ALGOL-programmi koostamisel võib kirjelduste ja operaatorite vahele paigutada veel mitmesuguseid programmi tööd selgitavaid märkusi (kommentaare). Kõik sellised märkused algavad reserveeritud sõnaga ПРИМЕЧАНИЕ ja eraldatakse ülejäänud programmist semikoolonitega. Et märkusele järgnev semikoolon on tema lõppemise tunnuseks, siis ei tohi ta ise sisaldada sümbolit «;». Programmi paigutatud märkused ei mõjuta ülesande lahenduskäiku, vaid ainult lihtsustavad programmi lugemist.

ALGOL-programmi moodustavate operaatorite ja kirjelduste jada peab alati lõppema sõnaga ФИНИШ, mis on paigutatud kahe semikooloni vahele. See sõna teatab programmeerivale programmile, et temale eelneva operaatoriga lõpeb vaadeldav programm.

Ülesande lahendamisel täidetakse ALGOL-programmis olevaid operaatoreid üldiselt n.-ö. loomulikus järjekorras, s.t. selles järjekorras, nagu nad programmi on kirjutatud. Teatavasti ei võimalda aga operaatorite loomulikus järjekorras täitmine kirjeldada harunevaid ja tsüklilisi arvutusalgoritme. Sellepärast on ALGOL-programmis ette nähtud võimalus muuta operaatorite täitmise järjekorda nn. suunamisoperaatorite, tsüklioperaatorite ja tingimuslike operaatorite abil.

Tingimuslik operaator on erikujuline liitoperaator, mis algab reserveeritud sõnaga ЕСЛИ. Edasi kuulub tingimusliku operaatori koosseisu mingi loogiline avaldis b («tingimus») ja sellest koma ning reserveeritud sõna ТО abil eraldatud operaator s. Tingimusliku operaatori üldkuju on seega

ЕСЛИ b, ТО s;

Selle operaatori täitmisel leitakse kõigepealt tingimuse b väärtus. Kui selleks väärtuseks osutub *tõene*, siis täidetakse operaator s ja asutakse järgmise operaatori vaatlemisele. Kui aga tingimuse väärtuseks saadakse *väär*, siis jäetakse operaator s vahele ja asutakse kohe järgmise operaatori vaatlemisele.

Selgitame tingimusliku operaatori kasutamist ühe lihtsa näitega. Kui algoritmi käigus on tarvis arvutada suurus $X = (C - \min(A, B)) \cdot \max(A, B)$, siis võib seda teostada näiteks järgmiselt:

ЕСЛИ (A > B), ТО НАЧАЛО P := B; B := A;
A := P КОНЕЦ; X := (C — A) × B;

Tingimusliku operaatori koosseisu kuuluv liitoperaator teostab siin muutujate A ja B väärtuste vahetamise juhul, kui A väärtus on suurem B väärtusest (loomulikult on see lubatav vaid siis, kui muutujate A ja B neid väärtusi programmis enam tarvis ei tule).

Tingimuslikku operaatorit võib kasutada ka teisel kujul:

ЕСЛИ b, ТО s_1 ИНАЧЕ s_2;

kus reserveeritud sõna ИНАЧЕ järel paiknev operaator s_2 tuleb täitmisele ainult siis, kui tingimuse b väärtuseks osutub *väär*. Seega sõltuvalt tingimuse b väärtusest täidetakse siin operaatoritest s_1 ja s_2 alati täpselt üks.

T s ü k l i o p e r a a t o r on samuti erikujuline liitoperaator. Ta algab reserveeritud sõnaga ДЛЯ, millele järgnevad mingi muutuja identifikaator n (tsükli p a r a m e e t e r), omistamise sümbol, sulgudesse paigutatud aritmeetiliste avaldiste kolmik v_1, v_2, v_3 (parameetri m u u t u m i s e e s k i r i), reserveeritud sõna ЦИКЛ ja lõpuks veel üks operaator s:

$$ДЛЯ\ n := (v_1,\ v_2,\ v_3)\ ЦИКЛ\ s;$$

Muutumiseeskirja koosseisu kuuluvate avaldiste v_1, v_2 ja v_3 väärtusi nimetatakse vastavalt parameetri a l g v ä ä r t u s e k s, s a m m u k s ja l õ p p v ä ä r t u s e k s. Tsüklioperaatori täitmisel antakse tema parameetrile kõigepealt algväärtus ja täidetakse operaator s. Seejärel liidetakse parameetrile tema samm ja täidetakse operaator s uuesti. Nüüd liidetakse parameetrile jälle samm ja korratakse vaadeldud protsessi seni, kuni parameetri väärtus kas 1) positiivse sammu korral osutub lõppväärtusest suuremaks, või 2) negatiivse sammu korral osutub lõppväärtusest väiksemaks. Tuleb arvestada, et kui näiteks positiivse sammu korral on algväärtus lõppväärtusest suurem, siis jääb sõnale ЦИКЛ järgnev operaator s üldse täitmata.

Illustreerime ka tsüklioperaatori kasutamist ühe lihtsa näitega. Koostame nimelt programmi kümnenda astme polünoomi $A_0X^{10} + A_1X^9 + \ldots + A_9X + A_{10}$ väärtuse arvutamiseks. Sealjuures eeldame, et programmi varasemas osas esineb massiivikirjeldus МАССИВ A[0 : 10] ja selle massiivi muutujatele on omistatud väärtused A_0, A_1, ..., A_9, A_{10}. Argumendi see väärtus, mille puhul polünoomi väärtus tuleb arvutada, olgu omistatud muutujale B. ALGOL-programmi, mis omistab polünoomi väärtuse muutujale C, võib siis kirjutada järgmiselt:

ЦЕЛЫЙ K; X := B; C := A[0]; ДЛЯ K := (1, 1, 10)
ЦИКЛ C := C × X + A[K];

Siin esineva tsüklioperaatori parameetriks on K, selle algväärtuseks, sammuks ja lõppväärtuseks vastavalt arvud 1, 1 ja 10. See tähendab, et operaator C := C × X + A[K] tuleb täita kokku 10 korda, muutuja K väärtustel 1, 2, ..., 10. Horneri skeemi kohaselt annabki see polünoomi väärtuse.

Tsüklioperaatori abil on mugav kirjeldada niisuguseid tsüklilisi arvutusalgoritme, milles tsükli kordamiste arv on ette teada. Mitmesuguste iteratsioonimeetodite jms. korral tuleb aga teatud arvutuseeskirja tsükliliselt korrata seni, kuni pole täidetud mingi etteantud tingimus. Sellistel juhtudel kasutatakse ALGOL-programmides tsüklioperaatorit, mis algab reserveeritud sõnaga ПОКА ja mille üldkuju on

$$ПОКА\ b,\ s;$$

Siin tähendab b teatavat loogilist avaldist («tingimus») ja s operaatorit, mis kuulub korduvale täitmisele senikaua, kui *b* väärtuseks on *väär*. Niipea kui osutub, et enne järjekordset kordamist *b* väärtus on *tõene*, jäetakse operaator *s* vahele ja minnakse programmis edasi. Selle operaatori kasutamise näide tuuakse käesoleva artikli lõpus.

Kõrvuti kirjeldatud võimalustega operaatorite täitmise loomuliku järjekorra muutmiseks kasutatakse ALGOL-programmides veel nn. suunamisoperaatorit, mis muudab operaatorite täitmise järjekorda ilma mingi tingimuse täidetuse kontrollimiseta (tingimusteta suunamine). Selle mooduse kasutamine tugineb asjaolule, et ALGOL-programmi üksikutele operaatoritele võib tarbe korral «panna nime» — varustada operaatorid märgenditega. Operaatori m ä r g e n d on kas täisarv või identifikaator, mis kirjutatakse märgitava operaatori ette ja eraldatakse sellest kooloniga. Märgendiga võib varustada mistahes operaatori (sealhulgas ka nn. t ü h j a o p e r a a t o r i, paigutades programmi näiteks kirjutise OP1 : ;), tuleb ainult silmas pidada, et ühel operaatoril ei saa olla mitut märgendit ja sama märgendiga ei tohi märkida mitut operaatorit.

S u u n a m i s o p e r a a t o r i üldkuju on HA *t*; kus HA on reserveeritud sõna ja *t* selle operaatori märgend, mis tuleb täitmisele vahetult pärast juhtimisoperaatorit. Suunamisoperaatori kasutamist on demonstreeritud järgmises näites, kus ühtlasi leiab rakendamist ka suurem osa vaadeldava sisendkeele teistest senikirjeldatud elementidest.

Näide veidi ulatuslikuma algoritmi üleskirjutamisest vaadeldavas sisendkeeles. Järgnev ALGOL-programm on kasutatav esimese saja algarvu leidmiseks (kui neid mingi ülesande lahendamise käigus tõepoolest vaja leida oleks). Ainus erinevus tegelikust programmist on siin selles, et kommentaari kirjutamiseks kasutatakse vene tähtede asemel ladina tähti.

```
ЦЕЛЫЙ (A, K, M, C[ ]); МАССИВ C[1 : 100];
ПРИМЕЧАНИЕ.Massiiv C[ ] on määratud leitavate algarvude
salvestamiseks;
A := 0; K := 1; ПОКА (A = 100), НАЧАЛО
K := K + 1; ДЛЯ M :=(2, 1, K — 1) ЦИКЛ
ЕСЛИ (K — M × (K/M) = 0), ТО НА КОРДАРВ;
A := A + 1; C[A] := K; КОРДАРВ: КОНЕЦ;
ФИНИШ;
```

Selle programmi üksikasjalikuma analüüsimise jätame lugejale.

(*Järgneb*)

PROGRAMMEERIJATE ETTEVALMISTAMISEST

Elektronarvutite osatähtsus rahvamajanduses on viimasel ajal tohutult kasvanud. Seda arvestades toodetaksegi üha enam ja üha võimsamaid arvuteid. Arvutite tegelik kasutamine kipub aga ikka sagedamini takerduma kvalifitseeritud programmeerijate nappuse tõttu. Programmeerijate vähesus on kogu maailmas muutunud niivõrd üldiseks nähtuseks, et paljud arvutuskeskused on olnud sunnitud minema n.-ö. kergema vastupanu teed: lahendamisele võetakse peamiselt niisuguseid ülesandeid, mida on lihtsam programmeerida, mis nõuavad ühe arvutitunni kohta vähem programmeerimisaega. Üsna sageli aga jäävad sellise «valikumeetodi» rakendamisel lahendamata just rahvamajanduslikult eriti olulised ülesanded.

Ainult kõrgemate õppeasutuste lõpetajate arvel programmeerijate niisugust puudujääki nähtavasti likvideerida ei õnnestu. Viimaste aastate praktika on aga näidanud, et suurema osa programmeerimisel vajalikust tööst saab edukalt anda keskharidusega programmeerijate hooleks. Veelgi enam, kõrgema haridusega programmeerijate kasutamine programmide suhteliselt lihtsamate osade koostamisel on tegelikult täielik raiskamine. Seda arvestades ongi ka Eesti NSV kolmes keskkoolis (Tartu I, Tallinna I ja Nõo Keskkool) loodud eriklassid keskharidusega matemaatikute-programmeerijate ettevalmistamiseks. Nähtavasti on seda aga vähe, sest küllaltki suur osa nende eriklasside lõpetajatest jätkab õpinguid kõrgemates koolides ning pole seega viie aasta vältel tegelike programmeerijatena kasutatav.

Hiljuti ilmus ajalehes «Pravda» tuntud matemaatiku A. Kronrodi artikkel [1], milles tõstetakse üles keskharidusega programmeerijate ettevalmistamise ulatuse olulise laiendamise küsimus. Autor töötab ise ühe eriklassi õpetajana ning varustas oma artikli allkirjaga: *A. Kronrod, füüsika-matemaatikadoktor, Teoreetilise ja Eksperimentaalfüüsika Instituudi matemaatikalaboratooriumi juhataja, Moskva VII Keskkooli õpetaja.* Toome järgnevalt mõned katkendid sellest artiklist.

[1] «Стране нужны программисты. Где их готовить?» (письмо в редакцию), «Правда», 28 ноября 1964 г.

«Kõrgema kvalifikatsiooniga matemaatikuid-programmeerijaid valmistatakse ette ülikoolis. Keskharidusega programmeerijaid hakkasid aga mõnedes matemaatilise kallakuga keskkoolides ette valmistama teadlased. Kas see on siis väljapääs olukorrast? Me vajame 5—6 aasta pärast umbes 80—100 tuhat keskharidusega programmeerijat aastas. Ei saa ometi tõsiselt loota, et sellise tohutu spetsialistide armee ettevalmistamine jääb endiselt teadlaste-entusiastide õlgadele!

Kuidas siis ülesannet lahendada?

Kogemused näitavad, et häid laborante-programmeerijaid saab ette valmistada iga matemaatilise kallakuga keskkool. Just need koolid peavadki meie arvates saama selleks baasiks, kus noortele õpetatakse programmeerija elukutset.

Esimene matemaatilise kallakuga kool loodi S. I. Švartzburdi algatusel 5 aastat tagasi Moskva 444. Keskkooli baasil. Selle kooli lõpetajatest said suurepärased laborandid, kes nüüd edukalt töötavad pealinna arvutuskeskustes. Praegu on Moskvas üle 60 matemaatilise kallakuga kooli. Vene NFSV teiste rajoonide võimekamate laste jaoks moodustasid akadeemik A. N. Kolmogorov ja tema õpilased internaatkooli, kus õpetatakse matemaatikat täiendatud programmi järgi. NSV Liidu Teaduste Akadeemia Siberi Osakonna matemaatikud õpetavad lapsi Novosibirski ülikooli juurde kuuluvas internaatkoolis. Matemaatilise kallakuga keskkoole moodustatakse ka teistes liiduvabariikides.

Matemaatika ja programmeerimise õpetamise võtsid enda õlgadele paljud teadlased. Nii töötab Moskva 7. Keskkoolis 27 teaduslikku töötajat-matemaatikut (peamiselt Teoreetilise ja Eksperimentaalfüüsika Instituudist).

Asi on selles, et kvalifitseeritud programmeerijal peab eelkõige olema tõhus matemaatiline haridus, mille baasil programmeerimise aluseid on õpilasele suhteliselt lihtne selgeks teha. Praktika on näidanud, et head õpetajad suudavad programmeerijaid keskkoolis ette valmistada ilma üldhariduslikku tsüklit kahjustamata.

Kuid oma koolitöö kogemustest ma tean, et üheaegselt ei saa õpetada üle 15—20 õpilase. Programmeerimise õpetamine nõuab suurt individuaalset tööd õpilastega. Pealegi ei saa seda õpetamist eraldada matemaatika põhikursusest — mõlemaid aineid peab tingimata õpetama sama õpetaja.

Seega, kui me tahame, et meil oleks küllaldaselt spetsialiste uue arvutustehnika täielikuks kasutamiseks, tuleb koolid kõigepealt varustada heade matemaatikaõpetajatega, kes tunnevad programmeerimist selle tänapäevasel tasemel. Meie koolidesse on vaja juba kõige lähemal ajal 5—10 tuhat sellist õpetajat. Juba praegu tuleb mõtelda, kuidas ja kus neid ette valmistada.

Kõike seda tuleb teha viivitamatult. Uued arvutid juba ootavad oma osavaid, tarku ja võimekaid peremehi!»

Majandusmatemaatika

LINEAARSE PLANEERIMISE RAKENDAMINE LOOMAKASVATUSES

T. Akkel

Loomakasvatuse eduka arendamise üheks eelduseks on küllaldase hulga söötade tootmine. Söötade tootmisplaani õige koostamine pole aga sugugi triviaalne ülesanne. Nimelt tuleb selle plaani koostamisel majandis arvestada nii loomade söödavajadusi kui ka olemasolevaid tootmisvõimalusi. Viimased sõltuvad aga mitte mõnest üksikust, vaid üsna suurest arvust mitmesugustest teguritest. Sellepärast tulebki vastava ala spetsialistidel söötade tootmisplaani koostamise käigus osa tegureid tahes-tahtmatult vaatlusest välja jätta. Loomulikult kannatab selle all koostatavate plaanide vastavus tegelikkusele.

Teiseks veel suuremaks puuduseks on asjaolu, et isegi kui nn. traditsiooniliste meetoditega koostatud plaanid ka rahuldavad nii söötmis- kui tootmistingimusi, pole nad antud olukorras võimalikkude plaanide hulgas parimad. Nagu mitmel pool teostatud arvutused on näidanud, saab sellisel viisil koostatud plaane peaaegu alati vähemalt 10—15% võrra parandada, s. t. leidub kõiki söödavajadusi ja tootmistingimusi rahuldav plaan, mille järgi toodetud söödad tulevad 10—15% odavamad (või saab toota 10—15% enam söötasid vms.).

Traditsiooniliste planeerimismeetodite niisuguseid puudusi arvestades on loomulik pöörduda matemaatilise planeerimise meetodite poole. Osutub koguni, et söötade tootmisplaani koostamist mõjustavate tegurite sobiva aproksimeerimise korral saab kõik seosed rahuldava täpsusega esitada lineaarsetena ja seega kasutada lineaarse planeerimise [1] meetodeid. Järgnevas ongi esitatud põllumajandusettevõtte söötade tootmise üks matemaatiline mudel, mis osutub olemasolevate tehniliste vahenditega lahendatavaks lineaarseks planeerimisülesandeks.

---

[1] Ülevaate lineaarse planeerimise põhimõtetest võib leida näiteks artiklis: Kaasik, Ü., Lineaarsed planeerimisülesanded. — Matemaatika ja kaasaeg, II, lk. 31—46.

Vaatleme söötade sellise tootmisplaani koostamist, mis majandi looduslikke ja majanduslikke tingimusi arvestades võimaldab toota maksimaalsel hulgal söötühikuid.

Söödavajaduse kindlaksmääramisel tuleb arvestada mitmete loomarühmade ja vastavate erinevate söötmisperioodide olemasolu. Reaalsuse täpse imiteerimise korral tuleks söötmisperioodid valida nii, et igal üksikul perioodil oleks võimalikkude söötade loetelu kogu selle perioodi vältel ühesugune. Näiteks piimakarja vaatlemise puhul tuleks aasta jagada kaheksaks perioodiks (16.—31. mai, juuni, juuli, august, september, 1.—15. oktoober, 16. oktoober — 15. november, 16. november — 15. mai), sest võimalikkude söötade loetelu on igal niisugusel perioodil erinev. Analoogiline on olukord ka teiste loomarühmade puhul. Seega kogu majandi puhul oleks tegemist kokku 25—30 erineva söötmisperioodiga. Arvestades, et igal perioodil on kasutada 20—30 erinevat sööta, saaksime 500—900 tundmatuga ülesande, kus kitsendusi on umbes 300. Niisuguse ülesande lahendamine on seotud väga suurte tehniliste raskustega.

Kui aga teise äärmusena vaadelda tervet aastat üheainsa söötmisperioodina, siis võime saada plaani, mis oma väikese täpsuse tõttu pole üldse realiseeritav (näiteks võib plaan näha ette loomade söötmist haljassöödaga ka talvel). Neid raskusi arvestades ongi äärmuslikud võimalused kõrvale jäetud ja vaatlusele võetud mudel, kus aasta jagatakse kaheks söötmisperioodiks: suvi (16. V—15. X) ja talv (16. X—15. V). Selleks, et ei tekiks söötade kuhjumist mõnele üksikule kuule, on mudelisse lisatud veel mõned täiendavad kitsendused, millest lähemalt räägime nende formuleerimisel.

Söötade tootmisplaani koostamise ülesande matemaatiliseks formuleerimiseks toome sisse järgmised tähistused:

i — sööda järjekorranumber;
j — loomarühma järjekorranumber ($j = 1, 2, \ldots, m$);
l — söötmisperioodi number ($l = 1, 2$);
s_i — söötühikute hulk sööda nr. i 1 kg kohta;
p_i — proteiini hulk (g-des) sööda nr. i 1 kg. kohta;
k_i — kuivaine hulk (kg-des) sööda nr. i 1 kg kohta;
h_i — saadav sööda kogus (kg-des) ha-lt[2];
$x_i^{j,l}$ — loomarühmale j söötmisperioodil l antava sööda nr. i tootmiseks vajaliku maa suurus (ha-tes).

Söötade all mõistetakse kõiki antud majandis kasvatada võivatest kultuuridest saadavaid söötasid. Eraldi arvestatakse põhi- ja kõrvaltoodangut. Nii on eri söötadeks loetud kaer (teraks) ja kaerapõhk, suhkrupeedi juurikad ja pealsed, põldhein (heinaks) ja põldheina ädal jne. Selline põhi- ja kõrvaltoodangu eraldamise

[2] Hektarilt saadava söödakoguse leidmiseks tuleb planeeritud hektarisaagist maha arvestada kaod ja hektarile vajatav seeme.

vajadus on tingitud enam kui ühe loomarühma olemasolust: avaneb võimalus planeerida põhitoodangut ühtedele ja kõrvaltoodangut teistele loomarühmadele. Peale majandis toodetavate on mudelisse lülitatud ka ostusöödad (õlikoogid, lõss, praak jne.).[3]

Asume nüüd söötade tootmist määravate kitsenduste sõnastamisele.

Söötmisega seotud kitsendused

Siia kuuluvad kitsendused, mis kindlustavad loomarühmadele vajaliku kvaliteediga ja vastavas koguses söötade tootmise.

1. Proteiini ja söötühikute hulga suhe. Vastavalt loomade söötmisnõuetele peab iga söötühiku kohta tulema teatud hulk seeduvat proteiini. Tavaliselt antakse proteiinisisalduse nõue teatava vahemikuna, näiteks Üleliidulise Loomakasvatuse Teadusliku Uurimise Instituudi andmetel[4] peavad lehmad 20-kilose päevase väljalüpsi korral saama 110—115 g proteiini söötühiku kohta. Seega tuleks esitada kaks tingimust: keskmine proteiinihulk söötühiku kohta peaks olema miinimumpiirist (antud näites 110 g) suurem ja maksimumpiirist (antud juhul 115 g) väiksem.

Et vaadeldavas mudelis seatakse eesmärgiks maksimaalse söötühikute hulga saamine, siis saadava lahendi kohaselt tuleb suurtel pindadel kasvatada suuri söödakoguseid andvaid kultuure (mais, suhkrupeet jne.). Viimased on aga enamuses proteiinivaesed ning seepärast tuleb saadavas lahendis proteiini keskmiselt söötühiku kohta alati vähem kui maksimumpiiriga lubatud (tavaliselt isegi võrdselt miinimumpiiriga). Seetõttu võibki proteiinihulga maksimumpiirist tulenevad kitsendused ära jätta ja piirduda vaid miinimumpiirile vastavate kitsendustega:

$$\sum_{i \in I^{j,l}} (p^j s_i - p_i) h_i x_i^{j,l} \leqslant 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, m; \; l = 1, 2),$$

kus p^j on proteiini miinimumpiir (g-des) sü kohta loomarühmale j ja $I^{j,l}$ tähendab loomarühmale j perioodil l sobivate söötade järjekorranumbrite hulka.

2. Kuivaine ja söötühikute hulga suhe. Söötmisnõudeid arvestades on vajalik piirata kuivaine hulka toodetava sööda ühe söötühiku kohta. Vastavad tingimused omandavad kuju

$$\sum_{i \in I^{j,l}} (k_i - k^j s_i) h_i x_i^{j,l} \leqslant 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, m; \; l = 1, 2),$$

kus k^j on loomarühmale j ühe söötühiku kohta maksimaalselt lubatud kuivaine hulk (kg-des).

---

[3] Ostusöötade puhul näitab $x_i^{j,l}$ loomarühmale j söötmisperioodiks l määratud sööda nr. i hulka.

[4] Vt. Нормы кормления и рационы для сельскохозяйственных животных. M., 1960, lk. 7.

Praktilised arvutused on näidanud, et saadavates ratsioonides ei ole kuivaine hulk söötühikus kunagi suurem kui 1,5 kg. Seepärast võib nende loomarühmade j korral, kellel kuivaine lubatud hulk k^j on üle 1,5 kg, vastava tingimuse hoopis ära jätta.

3. Haljassöötade maksimumpiirid. Kaheks perioodiks jaotatud ülesande korral võib tekkida olukord, et suveks planeeritakse liiga suures koguses niisugust haljassööta (näit. haljasmaisi), mida tegelikult saab kasutada ainult lühikese aja vältel. Seepärast tuleb mudelisse lisada tingimused, mis kindlustaksid haljassööda tootmist igal haljassöödaperioodil mitte suuremas koguses, kui seda vastaval perioodil sööta saab.

Omaette probleemiks on kultuurkarjamaa. Nimelt jaotub selle saak kuude vahel järgmiselt (%-des kogusaagist):

mai II pool	juuni	juuli	august	september	okt. I pool
15	35	20	15	10	5

Sellest tabelist näeme, et kultuurkarjamaa saak on eri perioodidel isesugune, eriti madal suve lõpul, mistõttu suve teiseks pooleks tuleb nähtavasti planeerida veel lisaks teisi haljassöötasid. Seda arvestades peab haljassööda osas võtma vaatlusele 6 perioodi. Sealjuures on veel otstarbekohane jätta võimalus samade karjamaade kasutamiseks eri perioodidel erinevatele loomarühmadele ja vaadelda seetõttu igal perioodil saadavat haljassöödasaaki eri söödana. Igaks haljassöödaperioodiks planeeritavad kultuurkarjamaa rohu ja teiste haljassöötade kogused kokku aga ei tohi ületada vastavale loomarühmale ettenähtud piiri.

Nii saamegi haljassöötade tootmist piiravad kitsendused, mis võib lühidalt kirjutada kujul

$$\sum_{i \in I^{j,1}} (\varkappa_{\mu i} - d_\mu^j) h_i s_i x_i^{j,1} \leqslant 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, 6;\ j = 1, 2, \ldots, m),$$

kus μ on haljassöödaperioodi järjekorranumber, d_μ^j perioodiks μ loomarühmale j lubatava haljassööda koguse maksimaalne osa kogu suvisest söödast ja

$$\varkappa_{\mu i} = \begin{cases} 1 \text{ kui sööt } i \text{ on perioodil } \mu \text{ kasutatav haljassööt,} \\ 0 \text{ ülejäänud juhtudel.} \end{cases}$$

Seoses nende kitsendustega võib kerkida küsimus ka proteiini ja söötühikute suhte kitsenduste sissetoomisest iga haljassööda perioodi jaoks. Võib ju mõnel haljassöödaperioodil tekkida proteiini puudujääk, teisel aga ülejääk. Praktika aga näitab, et nende kitsenduste juurdetoomiseks pole erilist vajadust. Nimelt on kultuurkarjamaa (kui põhilise haljassööda) ja ka enamuse teiste haljassöötade söötühiku proteiinisisaldus küllaltki lähedane loomarühmade proteiinivajadustele. Seepärast kõrvalekalded keskmisest proteiinivajadusest saavad tekkida vaid mittehaljassöötade kaudu ning nende nivelleerimine toimub teiste mittehaljassöötade arvel. Olukord muutub raskemaks siis, kui haljassöötadeks on proteiinivaesed kultuurid (näit. mais). Sel juhul võib tekkida proteiini teatav puudujääk, mis jääb teiste söötade arvel katmata ning tuleb kanda mudeli ebatäpsuse arvele. Sellised väikesed ebatäpsused on aga mudeli juures täiesti loomulikud, kui me tahame koostada mõistliku suurusega ülesannet. Ka käesoleval juhul võimaldab teatava ebatäpsuse lubamine ülesande mõõtmeid 2—3 korda vähendada ning sellega oluliselt lihtsustada tema lahendamist.

4. Söötade maksimumpiirid. Vastavalt söötmisnõuetele pole paljude söötade (vikk, mais jt.) andmine üle teatud piiri soovitatav. Olgu $b_r^{j,l}$ sööda r maksimaalselt lubatav osa loomarühma j kogusöödast perioodil l ja $K^{j,l}$ niisuguste söötade järjekorranumbrite hulgad, mille kasutamine (loomarühmale j perioodil l) üldse on kitsendatud. Vastavateks kitsendusteks saame siis

$$h_r s_r x_r^{j,l} - b_r^{j,l} \sum_{i \in I^{j,l}} h_i s_i x_i^{j,l} \leqslant 0$$

$$(j = 1, 2, \ldots, m;\ l = 1, 2;\ r \in K^{j,l}).$$

5. Söötade hulga miinimumpiir. Arvestades loomakasvatussaaduste vajadusi riiklike müügikohustuste täitmiseks ja majandisiseseks tarbimiseks, tuleb seada tingimused, mis garanteerivad vastavate koguste tootmise. Nõudes, et iga loomarühma j jaoks toodetaks vähemalt teatud minimaalne kogus sööta, saame kitsendused:

$$\sum_{i \in I^{j,2}} h_i s_i^{j,2} \geqslant S^{j,2} \qquad (j = 1, 2, \ldots, m),$$

kus $S^{j,2}$ näitab loomarühmale j perioodiks 2 (talveks) minimaalselt vajalikku söödahulka.

Siin on vastavad kitsendused kirja pandud ainult talve jaoks, sest suveks minimaalselt vajaliku söödahulga kindlustab talvise ja suvise sööda vahekorra tingimus.

6. Talvise ja suvise sööda vahekord. Eeldades ühtlast tootmist kogu aasta vältel tuleb nõuda, et talvise ja suvise sööda koguhulgad oleksid võrdelised vastavate söötmisperioodide (talve ja suve) pikkustega. Vaadeldava mudeli juures on suve pikkuseks 5 kuud ja talveks 7 kuud. Seega peaks suviste söötade kogus moodustama $\frac{5}{7}$ talvistest söötadest. Kui on aga tegemist loomarühmaga, mis annab ühel perioodil kuu kohta rohkem toodangut kui teisel, siis tuleb konstant $\frac{5}{7}$ asendada uuega (üheks selliseks loomarühmaks on näiteks lehmad, kes annavad suvel 5 kuu jooksul

60% aastatoodangust). Olgu η^j loomarühma j suvise ja talvise söödavajaduse suhe. Siis on vastavad tingimused kirjutatavad kujul:

$$\sum_{i \in I^{j,1}} h_i s_i x_i^{j,1} - \eta^j \sum_{i \in I^{j,2}} h_i s_i x_i^{j,2} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, m).$$

7. Loomarühmade vahekord. On täiesti loomulik, et söötade planeerimisel võib tekkida vajadus pidada silmas mõnede loomarühmade arvulist vahekorda. Näiteks piima müügi praeguse korra juures sõltub majandeile antav lõssi hulk müüdud piima hulgast. Seepärast tuleb põrsastele ja vasikatele vajaliku hulga lõssi saamiseks müüa teatud kogus piima, viimase saamiseks peab aga majandil olema vastava suurusega piimakari. Siit tulenebki nõue, et teatud arvu põrsaste ja vasikate kohta peab olema vähemalt üks lehm. Samuti on vajalik arvestada selliste loomarühmapaaride nagu lehmade ja vasikate, nuumikute ja põrsaste vahekorda, sest vasikaid ja põrsaid tuleb kasvatada vähemalt niipalju, et oleks kindlustatud karja taastootmine.

Vastavate kitsenduste lühidaks üleskirjutamiseks seame igale loomarühma numbrile j vastavusse nende loomarühmade numbrite hulga L^j, millede kogusuurust piirab rühma j suurus (näiteks, kui j on piimalehmade rühma number, siis L^j koosneb põrsaste ja vasikate rühmade numbritest; kui j on vasikate rühma number, siis L^j sisaldab vaid lehmade rühma numbri jne.). Olgu a^j hulka L^j kuuluvate numbritega loomarühmade kogusööda maksimaalne osa loomarühma j kogusöödast. Siis võib vaadeldavad kitsendused kirjutada järgmiselt:

$$\sum_{p \in L^j} \sum_{i \in I^{p,l}} h_i s_i x_i^{p,l} - a^j \sum_{i \in I^{j,l}} h_i s_i x_i^{j,l} \leqslant 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, m; \; l = 1, 2).$$

Söötade tootmisega seotud kitsendused

Seni vaadeldud kitsendused püstitati söötmisnõudeid ja minimaalselt vajalikku toodanguhulka arvestades. Nendest kitsendustest aga mudeli koostamiseks ei piisa, sest majandi käsutuses olevad ressursid (rahalised vahendid, väetiste kogused, põllu suurus jne.) ei tarvitse olla küllaldased igasuguste plaanide realiseerimiseks. Sellepärast on hädavajalik lülitada ülesandesse veel söötade tootmist piiravad kitsendused.

8. Põhi- ja kõrvaltoodangu vahekord. Nagu eespool märgitud, vaadeldakse põhi- ja kõrvaltoodangut eri söötadena. Kuna aga nii kõrval- kui põhitoodang saadakse ühelt ning samalt pinnalt, siis tuleb nõuda, et kõrvaltoodangulist sööta ei planeeritaks suuremalt pinnalt kui põhitoodangulist sööta. Võrdust külvipinna vastavate suuruste vahel pole sealjuures otstarbekohane nõuda, sest mõningatel juhtudel võib ülesandele saada parema lahendi (rohkem sööta) just juhul, kui osa kõrvaltoodangust jääb hoopis kasuta-

mata. See on seletatav asjaoluga, et mõnede kõrvaltoodanguliste söötade (peamiselt põhu) väikese proteiinisisalduse tõttu võimaldab kõrvaltoodangu osaline kasutamatajätmine suurendada suuresaagiliste, kuid keskmise proteiinisisaldusega söötade osatähtsust ning koos sellega ka saadavat söötühikute hulka.

Olgu P põhitoodanguliste söötade järjekorranumbrite hulk. Iga sööda $i \in P$ jaoks on antud vastavate kõrvaltoodanguliste söötade järjekorranumbrite hulk N_i. Siis nende külvipindade vahekorda piiravad kitsendused omandavad kuju

$$\sum_{j,l} \Big(\sum_{t \in N_i} x_t^{j,l} - x_i^{j,l} \Big) \leqslant 0 \qquad (i \in P),$$

kus välimine summa tuleb võtta üle kõikide indeksipaaride $j = 1, 2, \ldots, m$ ja $l = 1, 2$.

9. Põllumaa suurus. Üheks söötade tootmist piiravaks teguriks on selleks olemasoleva külvipinna suurus: kasvatatavatele söödakultuuridele planeeritav pind ei tohi ületada põllumaa kogusuurust. Sealjuures tuleb põhi- ja kõrvaltoodangulistest söötadest arvestada muidugi ainult esimesi. Nii saame kitsenduse

$$\sum_{\substack{j,l \\ i \in P'}} x_i^{j,l} \leqslant M,$$

kus M on majandi põllumaa kogusuurus ja P' tähendab kõikide põllult saadavate söötade (väljaarvatud kõrvaltoodangulised) järjekorranumbrite loetelu.

10. Kultuurkarjamaa kasutamine. Punktis 3 toodud kitsendustes me vaatlesime kultuurkarjamaa iga perioodi saaki eri söödana. Et aga igal niisugusel perioodil on tegemist ühe ja sama karjamaaga, siis tuleb nõuda, et nendel perioodidel oleksid söötade tootmiseks vajalikud pinnad võrdsed.[5] Seega peavad olema rahuldatud kitsendused

$$\sum_{j=1}^{m} (x_i^{j,l} - x_{i_0}^{j,l}) = 0 \qquad (i \in K),$$

kus hulk K koosneb kultuurkarjamaalt esimese viie perioodi vältel saadavate söötade järjekorranumbritest ja i_0 on kuuendal perioodil saadav sööt.

11. Söödakultuuride maksimumpiirid. Siia kuuluvad tingimused niisuguste kultuuride kohta, mida pole võimalik toota üle teatud piiri. Näiteks piirab loodusliku heina tootmist heinamaa suurus, mõne kultuuri (hübriidkaalikas vms.) puhul võib piiravaks olla aga seemne vähesus jne. Selle tingimuste rühma alla kuulu-

[5] Kui arvestada ka karjamaarohu sileerimise ning heinaks kuivatamise võimalusi, siis tuleks lisaks nõuda, et karjamaalt planeeritav haljassööda, silo ja heina hulk ei ületaks karjamaa kogutoodangut.

vad ka ostusöödad, sest majandile eraldatud limiidid on teada ning ülesande lahendamisel jagatakse need loomarühmade vahel. Nii saadavad kitsendused võib kirjutada kujul

$$\sum_{j,l} x_i^{j,l} \leqslant M_i \qquad (i \in H),$$

kus M_i näitab söödakultuuri i maksimaalselt võimalikku kasvupinda [6] ja H on kasvupindade osas kitsendatud söötade järjekorranumbrite loetelu.

12. Tööjõu- ja masinate varud. Majandi käsutuses olevate masinate all mõtleme traktoreid, kombaine, autosid, kuivateid ja teisi defitsiitseid seadmeid. Masinate ja tööjõu kasutamise iseloomu järgi tuleb aasta jaotada tööperioodideks nii, et ühtegi tööd ei tehta mitmel perioodil. Tööjõule ja masinaile vastavad perioodid ei tarvitse sealjuures olla ühised ja erinevate masinate kasutamise perioodid ei pea kokku langema. Kitsendusi pole vaja teha kõikide perioodide jaoks, vaid piisab, kui valida välja nn. pingelised perioodid, milledel teistega võrreldes kasutatakse tunduvalt rohkem tööjõudu (masinaid).

Tähendagu u perioodi numbrit, t_i^u tööjõu (masinate) kulu hektari kohta sööda i tootmiseks perioodil u, T^u tööjõu (masinate) varu perioodil u ja q perioodide koguarvu. Siis saame kitsendused:

$$\sum_{i,j,l} t_i^u x_i^{j,l} \leqslant T^u \qquad (u = 1, \ldots, q).$$

13. Väetiste varud. Väetiste õigeks jaotamiseks on vaja teada nii väetiste varusid kui ka vajadusi. Olgu tegemist kokku f liiki väetistega, kusjuures V^w on liiki w $(= 1, 2, \ldots, f)$ kuuluva väetise olemasolev varu. Väetuskatsetest on saadud seosed kasutatud väetiste koguste ja saagikuse vahel. Et neid mudelis arvestada, vaatleme erineval hulgal väetist saavaid kultuure eri söötadena (näiteks: suhkrupeet, sõnnikut ha-le 20 t; suhkrupeet, sõnnikut ha-le 30 t jne.). Kõikide väetist vajavate söödakultuuride korral pole seda küll mõtet teha, kuid mõnede söötade (suhkrupeet, mais, juurvili)vaatlemine 2—3 eri söödana osutub otstarbekohaseks.

Olgu v_i^w väetise w vajadus sööda i tootmiseks ühel hektaril. Väetiste varudest tingitud kitsendused on siis järgmised:

$$\sum_{i,j,l} v_i^w x_i^{j,l} \leqslant V^w \qquad (w = 1, 2, \ldots, f).$$

14. Söötühiku maksumus. Söötade tootmisel tuleb alati silmas pidada nende maksumust. Nõuame, et ühe söötühiku maksumus ei ületaks etteantud suurust R, s. t. lisame veel kitsenduse

$$\sum_{i,j,l} (r_i - R\, h_i s_i) x_i^{j,l} \leqslant 0,$$

kus r_i on sööda i tootmiskulud hektari kohta.

[6] Ostusöötade puhul tähendab M_i sööda i olemasolevat limiiti.

Sellega on vaadeldavasse mudelisse kuuluvad kitsendused ammendatud. Meid huvitab sellise lahendi leidmine, mis kindlustab majandile maksimaalse võimaliku söötade hulga tootmise. Seega tuleb maksimiseerida avaldis

$$\sum_{i,j,l} s_i h_i x_i^{j,l}.$$

Sõnastatud lineaarse planeerimisülesande kitsendused sisaldavad (sõltuvalt konkreetsest majandist) 150—200 võrratust, 300—500 tundmatuga $x_i^{j,l}$. Niisuguse ülesande lahendamine näiteks simpleksmeetodiga on niivõrd töömahukas, et pole jõukohane isegi keskmise võimsusega elektronarvutile. Õnneks võimaldab saadud ülesande struktuur aga lahendamist lihtsustada. Nimelt söötmisega seotud kitsendusi vaadeldes näeme, et neid saab jaotada niisugustesse rühmadesse, kus iga rühma võrratused sisaldavad vaid ühele loomarühmale ja ühele söötmisperioodile vastavaid tundmatuid (s. t. j ja l on iga rühma ulatuses konstantsed). Tootmisega seotud kitsenduste puhul pole selline jaotamine küll võimalik (seal on igas kitsenduses tegemist summeerimisega ka j või l järgi), kuid isegi osaline rühmitamine lihtsustab ülesannet tunduvalt: kitsenduste kordajate maatriks taandub n.-ö. blokk-kujule. Lehekülgedel 36—37 ongi toodud vaadeldava ülesande kitsenduste kordajatest moodustatud maatriksi üldkuju, kus täitmata osad tähendavad nulliga võrduvaid kordajaid (lihtsustamiseks on skeemil piirdutud vaid kahe loomarühmaga). Sellise maatriksiga planeerimisülesannete lahendamiseks saab aga kasutada nn. Dantzig-Wolfe'i meetodit [7], mille puhul juba jätkub keskmise võimsusega arvutist.

Olgu märgitud, et ka vaadeldud planeerimisülesande kordajate maatriksi enese koostamine on üsna töömahukas. Võrratuste kordajate leidmiseks saab aga samuti kasutada elektronarvutit, millega muide ühtlasi väheneb tunduvalt (ca 20—30 korda) arvutisse viidava informatsiooni maht.

Kokkuvõttes selgub seega, et seatud ülesanne on tänapäeva tehniliste vahenditega täielikult lahendatav.

Meenutame, et selle ülesande lahend annab üheaegselt nii loomade söötmisplaani kui ka söödakultuuride külviplaani (kultuuri i alla läheb $\sum_{j,l} x_i^{j,l}$ ha maad). Juhul kui tegelikud saagid osutuvad planeeritutest tunduvalt erinevateks, tuleb sügisel (pärast tegelike söödavarude kindlakstegemist) koostada uus söötmisplaan vastava planeerimisülesande lahendamise teel. See lineaarne planeerimisülesanne on aga tunduvalt lihtsamini sõnastatav, mistõttu seda siin pole vajadust vaadelda.

---

[7] Dantzig-Wolfe'i meetodi programmi elektronarvutile «Ural-4» koostas E. Sarv oma diplomitööna (1964. a.). Selle programmi abil saab lahendada ka siin esitatud ülesande.

Lehmad		Sead	
Suvi	Talv	Suvi	Talv
proteiini ja söötühikute hulga suhe			
haljassöötade maksimumpiirid			
söötade maksimumpiirid			
	proteiini ja söötühikute hulga suhe		
	söötade hulga miinimumpiir		
	söötade maksimumpiirid		
		proteiini ja söötühikute hulga suhe	
		kuivaine ja söötühikute hulga suhe	
		haljassöötade maksimumpiirid	
		söötade maksimumpiirid	
			proteiini ja söötühikute hulga suhe
			kuivaine ja söötühikute hulga suhe
			söötade hulga miinimumpiir
			söötade maksimumpiirid

<table>
<tr><td>Talvise ja suvise sööda vahekord</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Talvise ja suvise sööda vahekord</td></tr>
<tr><td colspan="2">Loomarühmade vahekord</td></tr>
<tr><td colspan="2">Põhi- ja kõrvaltoodangu vahekord</td></tr>
<tr><td colspan="2">Põllumaa suurus</td></tr>
<tr><td colspan="2">Kultuurkarjamaa kasutamine</td></tr>
<tr><td colspan="2">Söödakultuuride maksimumpiirid</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tööjõu ja masinate varud</td></tr>
<tr><td colspan="2">Väetiste varud</td></tr>
<tr><td colspan="2">Söötühiku maksumus</td></tr>
</table>

Söötade tootmisplaani koostamise ülesande kitsenduste kordajatest moodustatud maatriksi skeem.

MATEMAATILISTE MEETODITE RAKENDAMISEST TŠEHHOSLOVAKKIA SOTSIALISTLIKU VABARIIGI RAHVAMAJANDUSES

Viimastel aastatel on mitmed TRÜ matemaatikud käinud pikemail teaduslikel komandeeringuil välismaal. 1963.—1964. õppeaasta vältel viibis Tšehhoslovakkia SV-s ka eelmise artikli autor TRÜ arvutusmatemaatika kateedri aspirant Tõnu Akkel. Tema komandeeringu eesmärgiks oli tutvuda matemaatiliste meetodite ja arvutustehnika rakendamisel saavutatud tulemustega (eeskätt põllumajanduse valdkonnas).

Kõigest kuuldust-nähtust esitas sm. Akkel kolleegidele üsna ulatusliku ülevaate. Siinkohal piirdume vaid mõne väljavõtte toomisega sellest ülevaatest.

Eriti laialdaselt rakendatakse Tšehhoslovakkia rahvamajanduses nn. perfokaart-arvuteid. Selle baasiks on arenenud perfomasinate tööstus, eesotsas tehasega «ARITMA». Sealjuures pole need tehased üksnes arvutite tootjad, vaid neis töötatakse välja ka paljude ülesannete lahendamise metoodika ning koostatakse vastavad programmid. Lisaks sellele töötavad analoogilised programmeerijate grupid veel ministeeriumide ja suuremate ettevõtete masinarvutusjaamade juures. Nende ülesandeks on vastava rahvamajandusharu või ettevõtte jaoks spetsiifiliste ülesannete lahendamise programmide koostamine.

Ka Põllu- ja Metsamajanduse Ministeeriumil on oma masinarvutusjaam, mis lisaks ministeeriumi tellimuste täitmisele (mitmesuguste materjalide statistiline läbitöötamine) organiseerib uute piirkondlike masin-arvutusjaamade (kolhooside ja sovhooside teenindamiseks) avamist ning varustab neid vastavate programmidega. Praegu on piirkondlikke masin-arvutusjaamu veel vähe, kuid 5—6 aasta jooksul kavatsetakse neid luua niipalju, et kõikides majandites saaks mehhaniseerida vähemalt palgaarvutuse ja laodokumentide läbitöötamise.

Arveldustööde mehhaniseerimine vabastab osa tööjõudu teisteks töödeks ning võimaldab saada informatsiooni, mis on vajalik nii ettevõtete juhtimisel kui ka mitmesuguste plaanide koostamisel. Samuti kergendab selline mehhaniseerimine tunduvalt matemaatiliste planeerimismeetodite rakendamist.

Matemaatiliste planeerimismeetodite ja nende rakendamise võimaluste uurimisega tegeldakse paljudes asutustes, nii Tšehhoslovakkia Teaduste Akadeemia instituutides kui ka kõrgemates koolides. Viimastes pööratakse ühtlasi suurt tähelepanu vastava kaadri ettevalmistamisele, sest vajadus selle järele kasvab.

Teoreetiliste uurimuste tähtsamateks keskusteks on Tšehhoslovakkia Teaduste Akadeemia Matemaatika Instituut (prof. Fiedleri grupp), Karlovy Ülikool (eesotsas prof. Nožičkaga) ja Bratislava Ülikool (eesotsas prof. Kotzigiga). Peamised uurimused on nendes asutustes seotud just graafiteooria mitmesuguste rakendustega, näiteks sobivate lahendusmeetodite leidmisega optimaalsete plaanide koostamise ülesannetele. Samuti on Matemaatika Instituudis välja töötatud graafiteooriale tuginevaid meetodeid mitmete erikujuliste suuremõõduliste maatriksite pööramiseks (kasutatakse eeskätt bilansimaatriksite pööramisel).

Matemaatiliste meetodite rakendamisega (aga samuti ka mõnede teoreetiliste küsimustega) tegeldakse peamiselt majandusliku kallakuga instituutides ja kõrgemates koolides. Tähtsamate keskustena võib selles osas nimetada Tšehhoslovakkia Teaduste Akadeemia Majandusinstituuti, Praha Kõrgemat Majanduskooli, Bratislava Kõrgemat Majanduskooli, Põllumajanduse Ökonoomika Teadusliku Uurimise Instituuti jt. Samuti on vastavad uurimislaboratooriumid mitmete ministeeriumide (Kergetööstuse, Transpordi, Keemiatööstuse jt.) juures. Vaadeldavatest probleemidest nimetame näiteks järgmisi: söödakultuuride külviplaani struktuuri leidmine põllumajandusettevõtteile, põllumajandusettevõtte tootmise mudeli koostamine, noorloomade transport mägistesse rajoonidesse, materjali kadude minimiseerimine trikootööstuses, töögraafikute koostamine naftatöötlemise ettevõtetele, bilansi koostamine keemiatööstusele jne.

Nimetatud probleemid on kõik üsna ulatuslikud ning nõuavad elektronarvutite kasutamist. Enamus olemasolevaist elektronarvuteist kuulub praegu ministeeriumide või ettevõtete laboratooriumidele, kus peale planeerimisülesannete lahendatakse ka mitmesuguseid tehnilisi (puhtarvutuslikke) ülesandeid.

Arvutuskeskused on varustatud peamiselt välismaiste arvutitega, kuid tšehhidel valmis 1960. a. ka oma arvuti — EPOS. See on üheaadressiline 9-kohaliste kümnendarvudega (liikuva koma režiimis) töötav arvuti, mis teeb 10.000—20.000 tehet sekundis; ferriitmälu maksimaalse suuruse juures mahutab see 40.000 arvu. Nimetatud arvuti on eksperimentaalne, ehitamisel olevat pooljuhtidel töötavat varianti EPOS II aga hakatakse seeriaviisiliselt tootma.

Eriti väärib rõhutamist majandusteadlaste ja matemaatikute viljakas koostöö, tänu millele matemaatika osatähtsus Tšehhoslovakkia rahvamajanduses suureneb pidevalt ja annab üha märgatavamat efekti.

KONSTRUKTSIOONID SIRKLI JA JOONLAUAGA

K. Ariva

Konstruktsioonülesannetele ei pühendata kooli geomeetriatundides harilikult kuigi tõsist tähelepanu. Suure ajakulu tõttu, mis on seotud nende ülesannetega, kaldub õpetaja neid asetama geomeetria teisejärguliste küsimuste hulka. Õpilane aga ei armasta seda liiki ülesandeid nende näilise raskuse pärast. Programmiline ülekoormatus kohustuslike teoreetiliste tõestuste ballastiga takistab konstruktsioonilise suuna tõhusat viljelemist koolis. Vaevalt küll selline olukord soodustab geomeetria omapära ja olemuse mõistmist ning püsivate geomeetriaalaste teadmiste omandamist. Konstruktsioonide näitlikkust, nende vahetut veenvust ei saa asendada ühegi puhtloogilise arutluse tublisti varjatuma iluga. Geomeetrilised konstruktsioonid moodustavad matemaatilise üldhariduse olulise koostisosa: nad pakuvad rikkalikku materjali koolikursuse süvendamiseks, huvi äratamiseks geomeetria vastu ja matemaatilise taibu arendamiseks õppijas.

Teisest küljest tekitavad need ülesanded probleeme, mida pole võimalik lahendada elementaarmatemaatika vahenditega ja mille uurimine pakub sageli tõsist teaduslikku huvi. Sellepärast on konstruktiivne geomeetria (geomeetria haru, milles uuritakse konstruktsioonülesannetesse puutuvaid küsimusi) tihedalt seotud kõrgema matemaatika mitmete valdkondadega.

Järgnevais ridades vaatleme põgusalt konstruktiivse geomeetria mõnda teoreetilise kallakuga probleemi.

1. Antud konstruktsioonülesande puhul kerkib alati küsimus selle lahendamiseks kasutatavaist vahendeist. Antiikaega ulatuv traditsioon kitsendab vahendite valikut õige tunduvalt: *piirduda tuleb ainult sirkli ja joonlauaga.* Nende instrumentide lubatavus on väljendatud kahe lausega, mis kuuluvad Eukleidese põhitõdede (aksioomide) süsteemi: — «Igast punktist saab igasse teise punkti tõmmata sirge.» — «Ümber iga keskpunkti saab tõmmata iga raadiusega ringjoone.» Eukleides piirdus põhikonstruktsioonide postuleerimisel ainult nende nõuetega. Nende tarvilikkus on ilmne, sest sirge ja ringjoon on kõige lihtsamini konstrueeritavad jooned ja seega põhilise tähtsusega joonestuspraktikas ka tänapäeval. Kuid aksiomaatiliselt ülesehitatud teoorias, nagu seda on Eukleidese geomeetria, võib kasutada ainult neid vahendeid, mille lubatavus on fikseeritud põhilausetes. Siit tulenebki ülejäänud konstrueerimisvahendite lubamatus. Sellepärast nimetatakse Eukleidese geomeetriat sageli sirkli ja joonlaua geomeetriaks.

Kaasaegses geomeetrias ei leidu muidugi «ainulubatud» konstrueerimisvahendeid. Kuid kooli geomeetria on jäänud sirkli ja joonlaua geomeetriaks ka tänapäeval. Sellepärast vaatleme järgnevas ainult nende instrumentidega seotud küsimusi. Märgime täpsustavalt, et joonlaua kui konstrueerimisvahendi all tuleb mõista «ühe äärega» ja ilma märkideta joonlauda, s. t. vahendit, millega saab küll tõmmata sirgeid, kuid ei saa vahetult (teise ääre abil) konstrueerida paralleelset sirget antuga ega võrrelda sirglõikude pikkusi.

Eukleidiline traditsioon jättis järgnevatele põlvkondadele päranduseks rea komplitseeritud probleeme, mille täielik lahendamine õnnestus alles kõige uuemal ajal. Antiikajal, aga ka hiljem, lugesid matemaatikud sirklit ja joonlauda universaalseiks konstrueerimisvahendeiks. Selle arvamuse aluseks ei olnud niipalju nende instrumentide tinglik lubatavus kui nende oletatav võimsus: arvati, et nende abil on lahendatav iga geomeetriline konstruktsioonülesanne. Selline põhjendamatu eelarvamus mõjus negatiivselt geomeetria arengule, sundides sageli matemaatikuid tegema tohutuid pingutusi olematute lahendamismeetodite otsimiseks. Eredateks näideteks sellest valdkonnast on kolm kuulsat klassikalist ülesannet, mille päritolu ulatub antiik-kreeka ajaloo hämarusse:

1) *ringi kvadratuuri probleem* — ehitada antud ringiga pindvõrdne ruut;

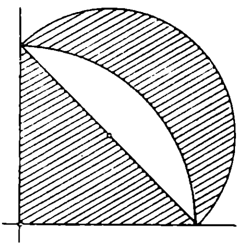
2) *nurga trisektsiooni probleem* — jaotada antud nurk kolmeks võrdseks osaks;

3) *kuubi kahekordistamise probleem* — ehitada sellise kuubi serv, mille ruumala on antud kuubi ruumala kahekordne.

Kerge on mõista, et matemaatilise probleemi mittelahendatavuse tõestamine on üldiselt keerukam ülesanne kui raske, kuid lahenduva probleemi lahendamine. Nõnda suudeti ka märgitud ülesannete kohta alles 19. sajandil täiesti rangelt näidata, et nad ei kuulu sirkli ja joonlaua geomeetriasse. Sellest hoolimata ei ole viljatud lahendamiskatsed lakanud veel meie päevil. Lünkliku matemaatilise haridusega diletandid leiavad üha uusi «lahendusi» neile ülesannetele, mis kuuluvad ühte kategooriasse Eukleidese V postulaadi probleemiga geomeetrias ja «igavese jõumasina» probleemiga füüsikas.

Peatume järgnevalt kahel esimesel ülesandel.

2. Ringi kvadratuuri probleemi lahendatavus sirkli ja joonlaua abil ei tekitanud paljude sajandite jooksul kahtlust ka kõige nimekamais matemaatikuis. Probleemi populaarsus kasvas koos ebaõnnestunud lahendamiskatsete arvuga. Selline usk toetus muuseas juba 5. saj. e. m. a. Hippokratese töödest tuntud konstruktsioonidele, mis lasevad kvadreerida mõningaid ringjoonelisi «kuukesi» (s. o. kahe ringjoone kaarega piiratud tasandi osi). Elementaarsete arvutustega on kerge veenduda, et näiteks viirutatud «kuuke» joonisel 1 on pindvõrdne viirutatud kolmnurgaga. Viimasele saab aga hõlpsasti leida pindvõrdse ruudu.



Joonis 1.

Üks esimesi, kes kahtles probleemi lahenduvuses, oli Leonardo da Vinci (15. saj.). Kuid kahtlusest range tõestuseni tuli käia veel pikk tee. Da Vinci arvamust püüdsid viljatult tõestada sellised suurvaimud nagu Isaac Newton (17. saj.) ja Leonhard Euler (18. saj.). Küsimuse lõplik selgitamine viis algebra ja arvuteooria valdkonda.

Ringi pindala $\pi r^2 = {}^1/_2 \cdot (2\pi r) r$ on võrdne sellise kolmnurga pindalaga, mille alus on $2\pi r$ ja kõrgus r. Kui selline kolmnurk on leitud, siis lõikude $r/2$ ja $2\pi r$ geomeetriline keskmine $\sqrt{2\pi r \cdot r/2}$ osutub kolmnurgaga pindvõrdse ruudu küljeks. Seega on piisav osata antud lõigu r abil konstrueerida lõiku $2\pi r$. Vastupidi, kui ringi kvadratuur oleks teostatav sirkli ja joonlaua abil ja a oleks vastava ruudu külg, siis $\pi r^2 = a^2$ ja lõik pikkusega $2\pi r = 2a^2/r$ oleks leitav lõikude a, $2a$ ja r neljanda võrdelisena. Niisiis probleem on samaväärne ülesandega konstrueerida lõik pikkusega $2\pi r$ (ringjoone «sirgestamise» ülesanne).

Loeme raadiuseks pikkusühiku, siis taandub küsimus lõigu 2π konstrueerimisele sirkli ja joonlaua abil. Koolikursuses vaadeldakse niisuguse lõigu ehitamist, mis mingi valemi abil avaldub antud lõigu (või lõikude) funktsioonina. Konstruktiivses geomeetrias näidatakse, et lõiku saab antud lõigu (lõikude) kaudu sirkli ja joonlaua abil ehitada parajasti siis, kui tema pikkus on avaldatav antud pikkuse (pikkuste) kaudu lõpliku arvu ratsionaalsete tehete ja ruutjuurte leidmise abil. Teatavasti on arv π irratsionaalne (seda näitas esimesena saksa matemaatik J. H. Lambert 18. saj.), s.t. ei ole ühiku kaudu ratsionaalselt väljendatav. Arve, mis on ühiku kaudu avaldatavad lõpliku arvu ratsionaalsete ja ruutirratsionaalsete operatsioonide abil, moodustavad osa nn. *algebralistest arvudest*; mittealgebralisi arve nimetatakse *transtsendentseteks*.

Nagu näeme, on ringi kvadreeruvus sirkli ja joonlaua abil tihedasti seotud arvu π iseärasustega. Küsimuse keerukuse illustreerimiseks märgime, et ehkki transtsendentsete arvude hulk on «suurem» algebraliste omast (matemaatilises keeles: esimene hulk on suurema võimsusega kui teine), osati esimesi transtsendentseid arve leida (täpsemalt — näidata nende transtsendentsust) alles 19. saj. teisel poolel. Sellal anti lõplik vastus ka ringi kvadratuuri probleemile: saksa matemaatik Ferdinand L i n d e m a n n tõestas 1882. a., et π on transtsendentne arv.

See kategooriline tulemus ei kõrvalda muidugi võimalust ülesande ligikaudseks lahendamiseks. Toome ühe näite, mis pärineb poola matemaatikult A. K o c h a n s k y l t (17. saj.):

$$AB = AC = BD = FG = GH = HI = 1 \quad \text{(vt. joon. 2)}$$

$$CI = \sqrt{40/3 - 2\sqrt{3}} \approx 3{,}1415 \approx \pi.$$

Seega kujutab lõik CI ligikaudselt lõiku, mille pikkus võrdub poole ühikringjoone pikkusega.

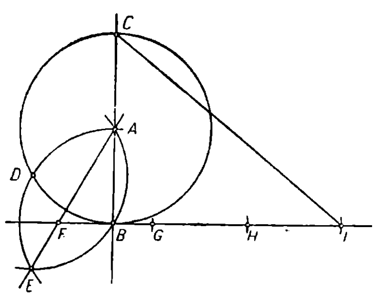
3. Vaatleme nüüd nurga trisektsiooniprobleemi. Olgu antud nurk α. Tähistame otsitava nurga φ; siis

$$\cos \alpha = \cos 3\varphi = 4 \cos^3\varphi - 3 \cos \varphi.$$

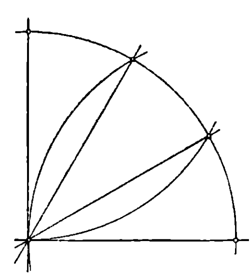
Kasutades tähistusi $\cos \varphi = x/2$ ja $\cos \alpha = a/2$, saame võrrandi

$$x^3 - 3x - a = 0.$$

Oletame, et lõik x on leitud. Ehitame kolmnurga, mille kaatet on $x/2$ ja hüpotenuus on 1. Selles kolmnurgas antud kaateti juures olev teravnurk ongi otsitav. Seega on probleemi lahendamiseks piisav osata ehitada lõiku x: küsimus taandub kuupvõrrandi lahendi konstrueerimisele.



Joonis 2.



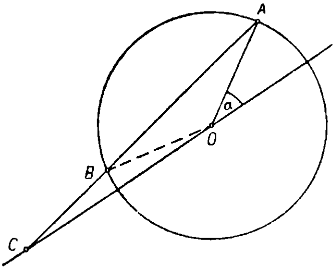
Joonis 3.

Konstruktiivses geomeetrias näidatakse, et ratsionaalsete kordajatega taandatud kuupvõrrandi lahendi konstrueerimiseks sirkli ja joonlaua abil on tarvilik, et sellel võrrandil leiduks vähemalt üks ratsionaalne juur. See nõue ei ole muidugi rahuldatud iga a, s. o. iga nurga α korral. Järelikult ei ole nurga trisektsiooni probleem üldiselt sirkli ja joonlaua abil lahendatav.

Näiteks $\alpha = \pi/3$ korral tuleb lahendada võrrand $x^3 - 3x - 1 = 0$, millel pole ratsionaalseid juuri, nagu saab kergesti kontrollida [1]. Sellepärast ei saa nurka $\pi/3$ ainult sirkli ja joonlaua abil jaotada kolmeks täpselt võrdseks osaks. Kuid $\alpha = \pi/2$ puhul saame võrrandi $x^3 - 3x = 0$, millel on ratsionaalne juur $x = 0$. Ja tõepoolest: täisnurk on soovitud viisil hõlpsasti jaotatav (vt. joon. 3).

Ilmselt on ülesanne alati lahenduv, kui $\alpha = \pi/2n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Leidub ka teisi lahenduvaid juhte. Lisame veel, et piisab ainult teravnurkade vaatlemisest, sest nürinurga α puhul $\alpha = \pi - \beta$, $\alpha/3 = \pi/3 - \beta/3$, s. t. probleem taandub jälle teravnurga juhule.

Iga nurka saab lihtsal viisil jaotada kolmeks võrdseks osaks, kasutades kahe märgiga joonlauda (ja muidugi sirklit). Vastava konstruktsiooni leidis pärimuse järgi juba **A r c h i m e d e s** (3. saj. e. m. a).



Joonis 4.

Olgu $r = OA$ joonlaua märkide vaheline kaugus ja α jaotatav nurk (vt. joon. 4). Joonlaua abil tõmbame lõigu AC nii, et $BC = r$,

siis $\alpha = \pi - \widehat{AOC} = \pi - (\widehat{BCO} + \widehat{BOA}) = (\pi - \widehat{BOA}) - \widehat{BCO} = 2\widehat{OBA} - \widehat{BCO} = 4\widehat{BCO} - \widehat{BCO} = 3\widehat{BCO}$, seega $\widehat{BCO}$ on kolmandik nurgast α: $\widehat{BCO} = \alpha/3$.

4. Kooligeomeetrias vaadeldakse korrapärase n-nurga konstrueerimist juhtudel, kui n on kas 3, 4, 5, 6 või saadav nendest kahekordistamise teel. Kuidas on aga lugu mistahes korrapärase n-nurgaga? Teisiti: missuguste n väärtuste puhul on võimalik jaotada ringjoont sirkli ja joonlaua abil n võrdseks osaks?

Kolmnurga ja nelinurga abil saab hõlpsasti ehitada 12-nurga, sest $^1/_3 - {}^1/_4 = {}^1/_{12}$. Samal viisil saame kolmnurga ja viisnurga kaudu 15-nurga: $^2/_3 - {}^3/_5 = {}^1/_{15}$. Üldistame seda võtet. Olgu ringjoon jaotatud n võrdseks osaks väärtuste $n = p$ ja $n = q$ $(p < q)$ puhul. Leiame täisarvud x ja y, mis rahuldavad võrdust

$$x/p - y/q = 1/pq.$$

Arvude x ja y abil saab ehitada korrapärase hulknurga külgede arvuga $n = pq$: ühe külje leidmiseks tarvitseb vaid ringjoone x-kordsest p-ndikust lahutada y-kordne q-ndik. Niisiis taandub küsimus võrrandi $qx - py = 1$ täisarvuliste lahendite otsimisele.

Täisarvulisi lahendeid ei leidu, kui arvudel p ja q on ühistegur. Tõepoolest, juhul $p = br$ ja $q = ar$ peaks kehtima $ax - by = 1/r$,

[1] Vt. K a a s i k, Ü., Kuupvõrrandi trigonomeetriline lahendamine. — Matemaatika ja kaasaeg, I. Trt., 1963, lk. 26—38.

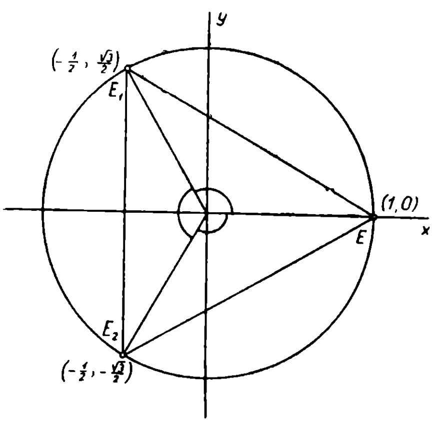
mis on täisarvuliste x ja y korral võimatu. Kui aga p ja q on ühistegurita, siis osutub võrrand alati täisarvudes lahenduvaks. Ehkki see asjaolu on elementaarselt tõestatav, loobume siin ruumipuudusel tõestuse esitamisest.

Seega pakuvad erilist huvi juhud, kui n on algarv või selle aste. Karl Friedrich Gauss näitas 1796. a., et n algarvulise väärtuse puhul on korrapärane n-nurk konstrueeritav sirkli ja joonlaua abil parajasti siis, kui n on esitatav kujul[2] $2^{2^k}+1$. Seda lauset ei saa elementaarsete vahenditega tõestada. Piirdume siin vaid tähelepanu juhtimisega seosele, mis uuritaval probleemil on koolimatemaatika kõige abstraktsema peatükiga — kompleksarvude teooriaga.

Ilmselt võib ringjoone jaotamisel piirduda juhuga, kus raadiuseks on ühiklõik. Teatavasti

$$\sqrt[3]{1} = \cos 2k\pi/3 + i \sin 2k\pi/3,$$

kusjuures erinevaid juuri on kolm, näiteks $k = 0, 1, 2$ puhul. Et argument kasvab alati ühe ja sama suuruse $2\pi/3$ võrra, siis võime juure väärtusi kujutada ühikringjoone korrapärase kõõlkolmnurga tippudena (joon. 5). Analoogiliselt saame talitada $\sqrt[n]{1}$ puhul. Seega on korrapärase n-nurga konstrueerimine samaväärne võrrandi $z^n - 1 = 0$ (kus z on kompleksarv) kõigi juurte leidmisega.



Joonis 5.

Et $z^n - 1 = (z-1)(z^{n-1} + z^{n-2} + \ldots + 1)$, siis taandub küsimus õieti võrrandi $z^{n-1} + z^{n-2} + \ldots + 1 = 0$ lahendite otsimisele. Seda võrrandit nimetatakse ringjoone jaotamise võrrandiks.

Paneme tähele, et piisav on osata leida ainult üks jaotuspunktidest, mingi E_i $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$. Tõepoolest, paigutades kaare EE_i sirkliga $n-2$ korda järjestikku ringjoonele, saame n algarvulisuse tõttu kätte kõik jaotuspunktid. Algebraliselt on piisav leida üks võrrandi juurtest — ülejäänud juured saame selle astendamise teel.

Esitame mõned näited.

Kirjutame ringjoone jaotamise võrrandi $n = 5$ puhul:

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0.$$

[2] Selliseid arve nimetatakse Fermat' arvudeks. Lähemalt on nendest juttu artiklis Tamme, E., Pierre Fermat ja XVII sajandi matemaatika. — Matemaatika ja kaasaeg, V. Trt., 1964, lk. 74—87.

Kui $k=1$, siis $z=\cos 2\pi/5+i\sin 2\pi/5$. See väärtus rahuldab ka võrrandit

$$z^2+z+1+1/z+1/z^2=0.$$

Toome sisse tähistuse $z+1/z=v$, siis $z^2+1/z^2=(z+1/z)^2-2=$ $=v^2-2$ ja võrrandi saame esitada lihtsal kujul:

$$v^2+v-1=0.$$

Siit

$$v=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Kuid

$$v=\cos 2\pi/5+i\sin 2\pi/5+\frac{1}{\cos 2\pi/5+i\sin 2\pi/5}=2\cos 2\pi/5>0.$$

Järelikult

$$v=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Nagu märkisime eespool, on selline lõik sirkli ja joonlauaga konstrueeritav. Olgu vaadeldav lahend $z=x+yi$, siis

$$v=x+yi+\frac{1}{x+yi}=x+yi+\frac{x-yi}{x^2+y^2}=2x,\text{ sest } x^2+y^2=1.$$

Seega $x=v/2$, s. t. vaadeldavat juurt kujutava punkti abstsissi saab konstrueerida. Oleme tõestanud, et korrapärast viisnurka on võimalik ehitada sirkli ja joonlaua abil.

Kui $n=7$, siis annab analoogiline arutelu:

$$\begin{aligned}&z^3+z^2+z+1+1/z+1/z^2+1/z^3=0,\\&z^3+3z+3/z+1/z^3=v^3,\\&z^3+1/z^3=v^3-3v,\\&v^3+v^2-2v-1=0.\end{aligned}$$

Sellel võrrandil ei ole ratsionaalseid juuri (kontrollida!), seega lõik v ja järelikult ka korrapärane 7-nurk ei ole konstrueeritav ainult sirkli, ja joonlaua abil.

Vaatleme mõningaid Fermat' arve $n=2^{2^k}+1$:

k	0	1	2	3	4	5
n	3	5	17	257	65 537	4 294 967 297

Esimesed viis on algarvud; selliste külgede arvudega korrapäraste hulknurkade jaoks leidub sirkli-joonlaua konstruktsioon. Kuid viimane jagub 641-ga:

$$\begin{aligned}2^{32}+1&=2^{28}\cdot 2^4+1=2^{28}\cdot(641-625)+1=\\&=2^{28}\cdot 641-2^{28}\cdot 625+1=2^{28}\cdot 641-[(2^7\cdot 5)^4-1]=\\&=2^{28}\cdot 641-(2^7\cdot 5+1)(2^7\cdot 5-1)[(2^7\cdot 5)^2+1]=\\&=641\{2^{28}-(2^7\cdot 5-1)[(2^7\cdot 5)^2+1]\}.\end{aligned}$$

Sõnastame nüüd Gaussi lause üldisel kujul: *korrapärast n-nurka on võimalik konstrueerida sirkli ja joonlaua abil parajasti siis, kui $n = 2^m p_1 p_2 \ldots p_s$, kus $p_1, p_2, \ldots, p_s$ on erinevad algarvud, millel on kuju $2^{2^k} + 1$.*

Ilmselt vaatlesime eelnevas selle lause kitsast erijuhtu. Märgime veel lisaks, et küsimus, kas Fermat' arvude hulgas leidub lõplik või lõpmatu hulk algarve, on seni lahendamata.

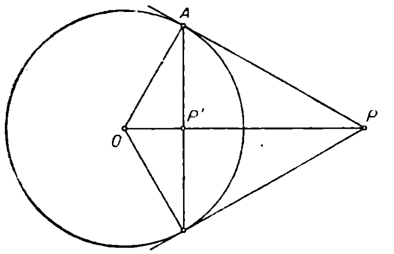
Korrapärast hulknurka, mille külgede arv on algarv, kuid pole esitatav kujul $2^{2^k} + 1$, ei saa sirkli ja joonlauaga ehitada. Näiteks on 641 algarv, millel ei ole sellist kuju, sellepärast ei ole konstrueeritav viimase tabelis antud arvuga võrdse külgede arvuga korrapärane hulknurk.

Gaussi üldkriteeriumist tuleneb, et n-nurgad juhul $n = 4 = 2^2$, $n = 6 = 2 \cdot (2^{2^0} + 1)$ ja $n = 8 = 2^3$ on sirkli ja joonlaua abil konstrueeritavad. Kuid $n = 9 = (2^{2^0} + 1)^2$ puhul on konstruktsioon võimatu, sest tegurid pole erinevad. Kuna $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, siis ei ole ühekraadiline nurk ehitatav ainult sirkli ja joonlauaga.

5. Paljud konstruktsioonülesanded on kergesti lahenduvad üksnes sirkli abil. Sirklijoonis on aga alati tunduvalt täpsem joonlauaga teostatust. Sellepärast tekkis juba ammu küsimus, millised on sirkli rakendatavuse piirid. Vastuse andis itaallane Lorenzo Mascheroni 1797. a. Nimelt tõestas ta huvitava lause: *kõiki sirkli ja joonlauaga lahendatavaid ülesandeid saab lahendada ka ainult sirkli abil.*

Mascheroni tulemus on üsna ootamatu. Lause tekitab vahest teatud hämmastust selle tõttu, et ilmselt pole sirkliga võimalik konstrueerida pidevat sirget. Asi on selles, et nn. sirkligeomeetrias loetakse sirge ehitatuks, kui on leitud tema mistahes kaks punkti.

Mascheroni konstruktsioonid nõuavad sageli väga kunstlikke võtteid, mis ei allu ühtsetele reeglitele. Selle puuduse kõrvaldas saksa matemaatik A. Adler möödunud sajandi lõpul. Adler arendas välja üldise meetodi sirkligeomeetria jaoks ja tõestas ühtlasi uuel viisil Mascheroni lause. Peatume põgusalt tema meetodi põhiideedel.



Joonis 6.

Adleri töö aluseks on inversiooni printsiip. Inversiooni mõisteni jõuame järgmiselt. Vaatleme tasandil (joon. 6) mingit ringjoont, mille keskpunkt O ei ühti punktiga P. Punkti P' poolsirgel OP nimetatakse punktiga P inversseks punktiks vaadeldava ringjoone suhtes, kui on rahuldatud tingimus

$$OP \cdot OP' = r^2.$$

Et $\frac{OA}{OP}=\frac{OP'}{OA}$, siis on P' punktist P tõmmatud puutujatega määratud kõõlu ja sirge OP lõikepunkt.

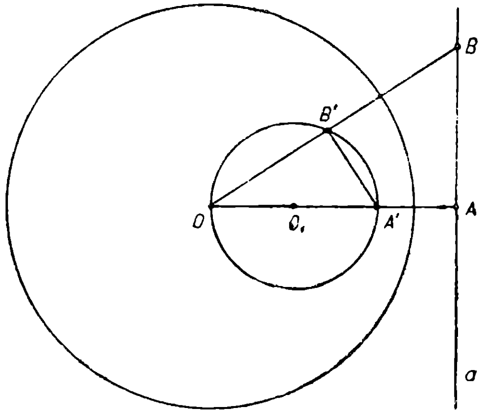
Vaadeldavat ringjoont nimetatakse **baasringjooneks**, tema keskpunkti **inversiooni pooluseks**. Ilmselt P on inversne punktiga P', s. t. inverssus on punktide vastastikune omadus. Igale punktile (peale O) vastab üheselt määratud inversne punkt. Kui $OP > r$, siis $OP' < r$. Punkti liikumisel mööda mingit joont kirjeldab inversne punkt samuti teatud joone. Neid jooni nimetatakse teineteisega inversseteks.

Tähistame sümboliga (O, OA) ringjoont, mille keskpunkt on O ja millel asub punkt A. Kergesti saab kontrollida, et kehtivad laused:

1) kahe joone lõikepunkti inversne punkt on inverssete joonte lõikepunkt;

2) kui sirge läbib poolust, siis on ta inversne iseendaga; kui sirge AB ei läbi poolust O, siis temaga inversne joon on poolust läbiv ringjoon (O_1, O_1O), mille puhul $O_1O \perp AB$;

3) poolust mitteläbiva ringjoonega inversne joon on ringjoon.



Joonis 7.

Tõestame näitena teise lause teise osa. Olgu OA ristlõik antud sirgele a ja punkt A' inversne ristlõigu alusega A (vt. joon. 7). Vastaku sirge a suvalisele punktile B inversne punkt B'. Et $OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = r^2$, s. o.

$$\frac{OB}{OA}=\frac{OA'}{OB'},$$

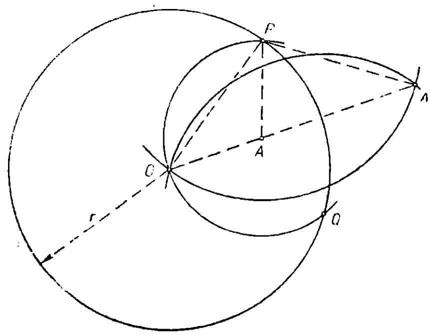
siis $\triangle OAB \sim \triangle OB'A'$. Järelikult $\widehat{OB'A'} = \widehat{OAB} = \pi/2$. Siit ilmnebki, et P liikumisel mööda sirget a liigub P' mööda ringjoont, mis läbib poolust.

Adleri meetod põhineb asjaolul, et antud punkti, sirge ja ringjoone inverssed objektid on konstrueeritavad ainult sirkliga. Veendume selles mõne näite varal.

Määrame punkti, mis on inversne punktiga A baasringjoone (O, r) suhtes (joon. 8). Selleks tõmbame ringjoone (A, AO) ja leiame lõikepunktide P ning Q abil punkti A'. Võrdhaarsete kolmnurkade OAP ja OPA' sarnasuse tõttu

$$OA \cdot OA' = OP^2 = r^2,$$

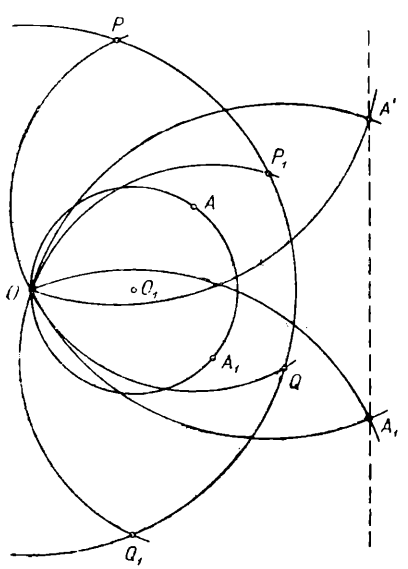
s. t. A' on otsitav punkt.



Joonis 8.

Juhul kui $OA < r/2$, määrame esmalt punkti A_1 nii, et $OA_1 = nOA$ (n naturaalarv) ja $OA_1 > r/2$. Siis leiame juba vaadeldud viisil punktiga A_1 inversse punkti A'_1. Punkt A', mille puhul $OA' = nOA'_1$, on inversne punktiga A, sest

$$r^2 = OA_1 \cdot OA'_1 = nOA \cdot \frac{OA'}{n} = OA \cdot OA'.$$



Joonis 9.

Ehitame veel sirge, mis on inversne poolust läbiva ringjoonega. On lihtne veenduda, et juhul, kui antud ringjoon lõikab baasringjoont punktides A ja B, siis sirge AB ongi otsitav. Sellepärast vaatleme mittelõikuvaid ringjooni (joon. 9). Valime antud ringjoonel (keskpunktiga O_1) vabalt punktid A ja A_1 ning konstrueerime nendega inverssed punktid A' ja A'_1 baasringjoone (keskpunktiga O) suhtes. Siis sirge $A'A'_1$ on inversne antud ringjoonega.

Inversiooni kasutamise näitena lahendame ülesande: leida antud ringjoone keskpunkt, kasutades ainult sirklit.

Valime antud ringjoonel (joonisel 10 väiksem ringjoon) vabalt punkti O. Tõmbame ringjoone ümber keskpunkti O. Lõigaku see antud ringjoont punktides A ja B. Loeme uue ringjoone baasiks; siis on antud ringjoon ja sirge AB inverssed kujundid. Järelikult on ülesandeks leida sirgega AB inversse ringjoone keskpunkt.

Konstrueerime poolusega O sümmeetrilise punkti O_1 sirge AB suhtes. Leiame punkti O_1 inversse punkti. Selleks tõmbame läbi pooluse ringjoone (O_1, O_1O). Lõikepunktide C ja D abil ehitame punktiga O sümmeetrilise punkti O'_1 sirge CD suhtes.

Et $\triangle OCO'_1 \sim \triangle OOC_1$, siis $\frac{OO_1}{OC} = \frac{OC}{OO_1'}$, s. o. $OO_1 \cdot OO'_1 = r^2$. Seega on O'_1 punktiga O_1 inversne punkt.

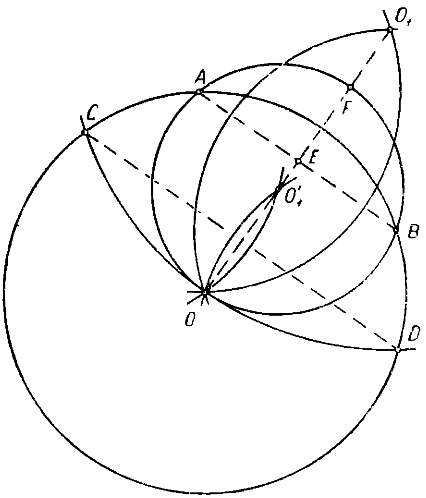
Lõigaku sirge OO_1 sirget AB punktis E ja antud ringjoont punktis F. Konstruktsioonist järeldub:

$$OO_1 \perp AB,$$
$$OE \cdot OF = r^2,$$
$$OE = {}^1/_2 OO_1.$$

Järelikult

$$OO_1 \cdot OO'_1 = 1/2 OO_1 \cdot OF,$$
$$OO'_1 = {}^1/_2 OF,$$

s.t. O'_1 on otsitav keskpunkt.



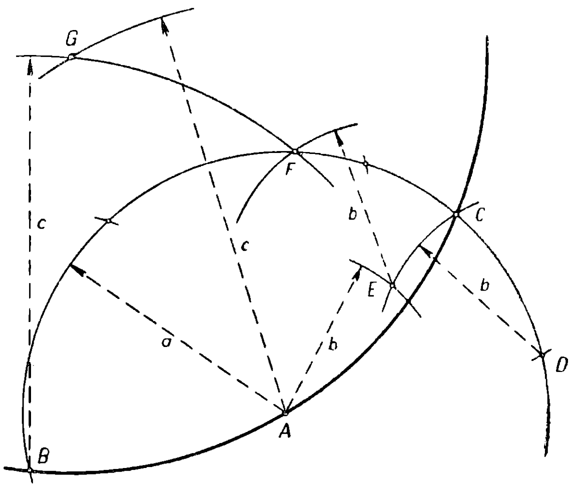
Joonis 10.

Seda ülesannet saab muidugi lahendada ka inversiooni rakendamata. Kuid on oluline märkida, et inversiooni printsiip annab ühtse meetodi sirkligeomeetria ülesannete lahendamiseks. Selle tõttu kaob vajadus kunstlike lahendusvõtete otsimiseks.

Võrdluseks esitame sama ülesande lahenduse Adleri meetodit kasutamata. Valime antud ringjoone (jämedam kaar joonisel 11) mingi punkti A keskpunktiks uuele ringjoonele vabalt võetud raadiusega a. Konstrueerime lõikepunkti B suhtes diametraalse punkti D. Määrame punktid E, F, G joonisel 11 näidatud viisil. Jäägu lugeja enda hooleks tõestada, et G on antud ringjoone keskpunkt!

Lõpuks mõni sõna ainult joonlauaga sooritatavaist konstruktsioonidest. Sellelgi probleemil on praktiline väärtus, eriti maamõõdutöödel, kus kujundite suurte mõõtmete tõttu sirklit ei saa kasutada. Kõige täielikum uurimus sellelt alalt pärineb saksa matemaatikult J. Steinerilt (19. saj.).

Ainult joonlauaga lahendatavate probleemide hulk on väga kitsas. Nõnda ei saa sel teel lõiku poolitada, tõmmata antud sirge paralleeli ja ristsirget läbi antud punkti, leida antud ringjoone keskpunkti, jne. Ilmneb aga, et joonlauaga on võimalik teostada kõiki sirkli-joonlaua konstruktsioone, kui lubada ainult ühekordset sirkli kasutamist. Nimelt kehtib Steineri lause: *Iga ülesanne, mis on lahendatav sirkli ja joonlaua abil, on lahendatav ka ainult joonlauaga, kui tasandile on varem joonestatud mingi ringjoon ja märgitud selle keskpunkt.*



Joonis 11.

Käesoleva artikli raamid ei võimalda ei selle ega ka paljude muude konstruktiivse geomeetria probleemide analüüsi. Asjasthuvitatud lugejale võib soovitada järgmist lihtsa käsitlusviisiga kirjandust:

1. Аргунов, Б. И., Балк, М. Б., Геометрические построения на плоскости. М., 1955.
2. Костовский, А. И., Геометрические построения одним циркулем. М., 1959 (Популярные лекции по математике, вып. 29).
3. Смогоржевский, А. С., Линейка в геометрических построениях. М., 1957. (Популярные лекции по математике, вып. 25).
4. Александров, И. И., Сборник геометрических задач на построение. М., 1950.
5. Чистяков, В. Д., Три знаменитые задачи древности. Пособие для внеклассовой работы. М., 1963.

* * *

Millise arvu viies aste on 844 596 301?

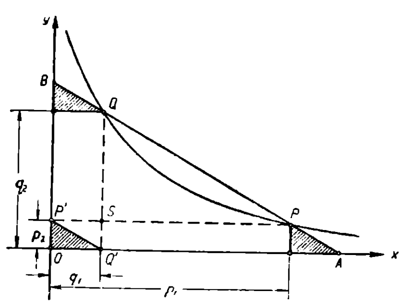
* * *

Arvu 571 428 korrutamisel 5-ga ja jagamisel 4-ga saame 714 285, s. t. esimene number läheb viimaseks. Leida arv, mille korrutamisel 4-ga ja jagamisel 5-ga juhtub sama.

NURGA TRISEKTSIOON HÜPERBOOLI ABIL

M. Rahula

Teatavasti on nurga trisektsioon (kolmeks jaotamine) sirkli ja joonlaua abil võimatu. Teiselt poolt on teada, et nurga võib jaotada kolmeks võrdseks osaks teistsuguste vahenditega, või ka sirkli ja joonlauaga, kui tasandil on eelnevalt antud mõni selleks sobiv kõver. Alljärgnevalt vaatleme lihtsat võtet[1] nurga kolmeks jaotamiseks juhul, kui on ette antud võrdhaarne hüperbool — pöördvõrdelise sõltuvuse $y = \frac{a}{x}$ graafik. Olgu vastavalt x- ja y-teljel võetud kaks punkti A ning B nii, et neid ühendav sirglõik lõikab hüperbooli kahes punktis P ja Q (vt. joon. 1).



Joonis 1.

Tõestame lause: *lõigud AP ja QB on võrdsed.*

Tõestus: Olgu punkti P koordinaatideks p_1 ja p_2 (s. t. $P'P = p_1$ ja $OP' = p_2$) ning punkti Q koordinaatideks q_1 ja q_2 (s. t. $OQ' = q_1$ ja $Q'Q = q_2$). Et P ja Q asuvad hüperboolil, siis $p_1 p_2 = q_1 q_2 = a$. Paneme tähele, et $\triangle SPQ$ ja $\triangle OQ'P'$ on sarnased. Tõepoolest, nende kaatetid on paralleelsed ja kehtib võrdus $\frac{SP}{OQ'} = \frac{SQ}{OP'}$ $\left(\text{ehk } \frac{p_1 - q_1}{q_1} = \frac{q_2 - p_2}{p_2}\right)$, sest $p_1 p_2 = q_1 q_2$. Järelikult, $AB \parallel Q'P'$.

---

[1] Allakirjutanu jõudis selle võtteni kirjavahetuse käigus sm. N. S k r õ n n i k u g a (Tšerkasskaja obl.)

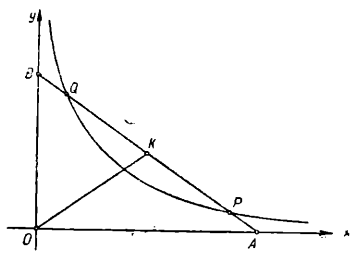
Rööpkülikutest $APP'Q'$ ja $P'Q'QB$ näeme, et $AP = Q'P' = QB$. Väide on tõestatud.

Lausest järeldame, et

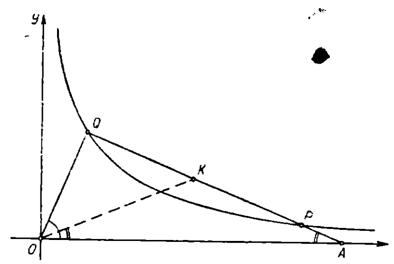
1) lõigu AB keskpunkt K on ka hüperbooli kõõlu PQ keskpunktiks (vt. joon. 2) ja

2) lõigud AK, OK, BK on võrdsed ning kolmnurgad OKA ja OKB võrdhaarsed.

Järgnevalt tõestame teoreemi (vt. joon. 3 — tähistused samad): *kui* $PQ = 2OQ$, *siis* $\angle QOA = 3\angle KOA$.



Joonis 2.



Joonis 3.

Tõestus: Et $OQ = QK$, siis

$$\angle QOK = \angle QKO = \angle KOA + \angle KAO = 2 \angle KOA,$$

sest $\triangle OKA$ on võrdhaarne. Tähendab,

$$\angle QOA = \angle KOA + \angle QOK = 3 \angle KOA.$$

See teoreem võimaldab hõlpsasti iga teravnurga α jaotada kolmeks võrdseks osaks: selleks on vaja moodustada $\angle AOQ = \alpha$ ja punktist Q tõmmata kõõl QP, mis on lõigust OQ kaks korda pikem; nurk OAQ, või AOK, ongi $\frac{\alpha}{3}$. Ka nürinurga trisektsioon on võrdhaarse hüperbooli abil teostatav.

Kas *EI* või *JA*?

Kui see ülesanne, mille Te lahendasite enne, kui Te lahendasite ülesande, mille Te lahendasite pärast seda ülesannet, mille Te lahendasite enne käesolevat, oli raskem kui ülesanne, mille Te lahendasite pärast seda ülesannet, mille Te lahendasite enne käesolevat ülesannet, kas siis enne käesolevat ülesannet lahendatud ülesanne oli käesolevast raskem?

AUTONEDIAANSED KOLMNURGAD[1]

S. I. Zetel

1. Lõiku, mis ühendab kolmnurga tippu vastasküljega ja jaotab selle külje suhtes $(n-1):1$ või $1:(n-1)$, nimetatakse kolmnurga n e d i a a n i k s. Eeldame, et n on suvaline (kuid fikseeritud) ühest suurem reaalarv[2]. Tegelikult võime piirduda ja piirdumegi juhuga, kus $n \geqslant 2$, sest juht $1 < n < 2$ on lihtsalt taandatav juhule $n > 2$: tarvitseb vaid kolmnurga külje AB asemel vaadelda külge BA, s. o. sama külge teisest otspunktist lähtudes. Juhul $n = 2$ saame sellest definitsioonist mediaani, juhul $n = 3$ nn. t e r t s i a a n i jne. Järgnevas eeldatakse, et kolmnurga kõikidest tippudest on tõmmatud nediaanid, kusjuures juhul $n \neq 2$ on nad võetud nii, et iga tipu juurde jääb ühe lähiskülje pikem lõik ja teise lähiskülje lühem lõik.

Esialgu vaatleme juhtu, kus kolmnurga ABC küljed $BC = a$, $CA = b$ ja $AB = c$ on jaotatud suhtes $(n-1):1$, alates vastavalt otspunktidest B, C ja A. Nediaane, mis sellise jaotuse teostavad, tähistame vastavalt $d_a^{(n)}$, $d_b^{(n)}$ ja $d_c^{(n)}$. Kui aga kolmnurga ABC vaadeldavad küljed on jaotatud nimetatud otspunktidest alates suhtes $1:(n-1)$, siis tähistame sellist jaotust teostavaid nediaane sümbolitega $d'_a{}^{(n)}$, $d'_b{}^{(n)}$ ja $d'_c{}^{(n)}$.

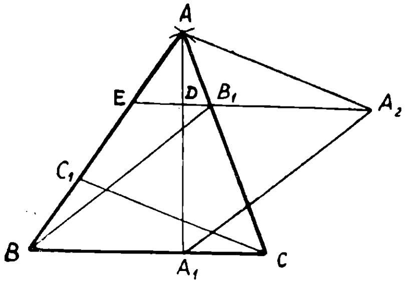
Tõestame teoreemi, mille kehtivus $n = 2$ puhul on juba teada (vt. Matemaatika ja kaasaeg, V, lk. 69): *Iga kolmnurga nediaanidest saab konstrueerida kolmnurga.*

T õ e s t u s. Olgu AA_1, BB_1 ja CC_1 kolmnurga ABC nediaanid (vt. joon. 1). Tõmbame läbi punkti B_1 sirge EB_1 paralleelselt küljega BC ja läbi punkti A_1 sirge A_1A_2 paralleelselt nediaaniga BB_1. Konstrueeritud sirgete lõikepunkti A_2 ühendame punktiga A. Kolmnurgad AEA_2 ja C_1BC on kongruentsed, sest $\angle AEA_2 = \angle C_1BC$, $AE = C_1B$ ja $EA_2 = BC$. Viimati nimetatud külgede

[1] Käesolev artikkel üldistab autori eelmise artikli (vt. Matemaatika ja kaasaeg, V, lk. 68—73) tulemusi. Artikli on tõlkinud L. Kivistik.

[2] Artikli venekeelses käsikirjas on eeldatud, et n on naturaalarv. Tõlkija ettepanekul vaadeldakse siin aga üldisemat juhtu, sest kõik tulemused kehtivad ka siis, kui n on reaalarv. Seoses sellega ongi tõlkija autori nõusolekul artikli mõnede osade (eriti punkti 5) käsitlust mõnevõrra muutnud ja lisanud punkti 7. — Toimetus.

võrdus järeldub sellest, et sarnastes kolmnurkades AEB_1 ja ABC on $\frac{AE}{AB} = \frac{EB_1}{BC} = \frac{AB_1}{AC} = \frac{1}{n}$ ja kolmnurgas ABC on $\frac{C_1B}{AB} = \frac{A_1C}{BC} = \frac{1}{n}$, lõigud B_1A_2 ja BA_1 on aga võrdsed. Seega $A_2A = CC_1$. Et konstruktsiooni kohaselt $A_1A_2 = BB_1$, siis ongi kolmnurk AA_1A_2 antud kolmnurga ABC nediaanidest konstrueeritud kolmnurk ehk kolmnurga ABC nediaankolmnurk. Teoreem on tõestatud.



Joonis 1.

Edasi vaatleme nediaankolmnurka AA_1A_2. Lõik A_2D on selle kolmnurga nediaan, sest $AD = \frac{AA_1}{n}$. Arvutades nediaani A_2D pikkuse, saame

$$A_2D = A_2B_1 + B_1D = A_1B + B_1D = \frac{(n-1)a}{n} + \frac{a}{n^2} = \frac{n^2-n+1}{n^2}a,$$

kus $a = BC$. Samuti leiame, et kolmnurga AA_1A_2 ülejäänud nediaanide pikkused on $\frac{n^2-n+1}{n^2}b$ ja $\frac{n^2-n+1}{n^2}c$, kus b ja c on vastavalt külgede CA ja AB pikkused.

Siit näeme, et *antud kolmnurga ABC nediaankolmnurga nediaankolmnurk on sarnane kolmnurgaga ABC.*

Vaadeldes kolmnurka AA_1A_2 koosnevana kolmnurkadest DA_1A_2 ja DAA_2, millel on ühine alus DA_2 ja mille kõrguste summa võrdub esialgse kolmnurga ABC alusele a tõmmatud kõrgusega h_a, arvutame nediaankolmnurga AA_1A_2 pindala $S_n = S_{AA_1A_2}$ kolmnurga ABC pindala S kaudu:

$$S_n = \frac{A_2D \cdot h_a}{2} = \frac{n^2-n+1}{n^2} \cdot \frac{ah_a}{2} = \frac{n^2-n+1}{n^2} S.$$

Avaldanud nediaankolmnurga pindala Heroni valemi abil, leiame siit antud kolmnurga ABC pindala tema nediaanide kaudu:

$$S = \frac{n^2}{n^2-n+1}\sqrt{d^{(n)}(d^{(n)} - d_a^{(n)})(d^{(n)} - d_b^{(n)})(d^{(n)} - d_c^{(n)})},$$

kus $d^{(n)} = \frac{1}{2}(d_a^{(n)} + d_b^{(n)} + d_c^{(n)})$. Erijuhtudel, kui $n = 2$ ja $n = 3$, saame sellest üldisest valemist kolmnurga pindala avaldise mediaanide kaudu:

$$S = \frac{4}{3}\sqrt{m(m-m_a)(m-m_b)(m-m_c)}$$

ja samuti tertsiaanide kaudu:

$$S = \frac{9}{7}\sqrt{t(t-t_a)(t-t_b)(t-t_c)},$$

kus $m_a = d_a^{(2)}$, $m_b = d_b^{(2)}$, $m_c = d_c^{(2)}$ on kolmurga ABC mediaanid ja $m = d^{(2)}$ — nende poolsumma, $t_a = d_a^{(3)}$, $t_b = d_b^{(3)}$, $t_c = d_c^{(3)}$ aga kolmnurga tertsiaanid ja $t = d^{(3)}$ — nende poolsumma.

2. Leiame kolmnurgast AA_1C nediaani $AA_1 = d_a^{(n)}$ pikkuse ruudu:

$$[d_a^{(n)}]^2 = b^2 + \frac{a^2}{n^2} - \frac{2ab\cos C}{n} = b^2 + \frac{a^2}{n^2} + \frac{c^2-a^2-b^2}{n} =$$

$$= \frac{n^2b^2 + a^2 + nc^2 - na^2 - nb^2}{n^2} = \frac{n(n-1)b^2 + nc^2 - (n-1)a^2}{n^2}.$$

Analoogiliselt arvutame ülejäänud nediaanide pikkuste ruudud. Saame järgmised valemid:

$$\begin{aligned} d_a^{(n)} &= \frac{1}{n}\sqrt{n(n-1)b^2 + nc^2 - (n-1)a^2},\\ d_b^{(n)} &= \frac{1}{n}\sqrt{n(n-1)c^2 + na^2 - (n-1)b^2},\\ d_c^{(n)} &= \frac{1}{n}\sqrt{n(n-1)a^2 + nb^2 - (n-1)c^2}. \end{aligned} \tag{1}$$

Viimastest seostest leiame, et

$$[d_a^{(n)}]^2 + [d_b^{(n)}]^2 + [d_c^{(n)}]^2 = \frac{n^2-n+1}{n^2}(a^2+b^2+c^2).$$

Erijuhul

$$t_a^2 + t_b^2 + t_c^2 = \frac{7}{9}(a^2+b^2+c^2).$$

3. Vaatleme nüüd nediaane

$$AA_1' = d_a'^{(n)},\ BB_1' = d_b'^{(n)} \text{ ja } CC_1' = d_c'^{(n)}$$

(vt. joon. 2). Ilmselt saab ka nendest nediaanidest konstrueerida kolmnurga. Nediaankolmnurga $AA_1'A_2'$ pindala leiame nagu varemgi:

$$S_n' = S_{AA_1'A_2'} = \frac{n^2-n+1}{n^2}S.$$

Seega *nediaankolmnurgad* AA_1A_2 *ja* $AA_1'A_2'$ *on pindvõrdsed.* Vaadeldavate nediaanide pikkused avalduvad sarnaselt varem vaadeldutega:

$$\begin{aligned} d_a'^{(n)} &= \frac{1}{n}\sqrt{n(n-1)c^2 + nb^2 - (n-1)a^2},\\ d_b'^{(n)} &= \frac{1}{n}\sqrt{n(n-1)a^2 + nc^2 - (n-1)b^2},\\ d_c'^{(n)} &= \frac{1}{n}\sqrt{n(n-1)b^2 + na^2 - (n-1)c^2}. \end{aligned} \tag{2}$$

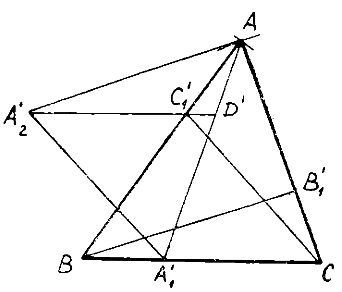
Siit aga saame

$$[d_a'^{(n)}]^2 + [d_b'^{(n)}]^2 + [d'_c{}^{(n)}]^2 = \frac{n^2 - n + 1}{n^2}(a^2 + b^2 + c^2),$$

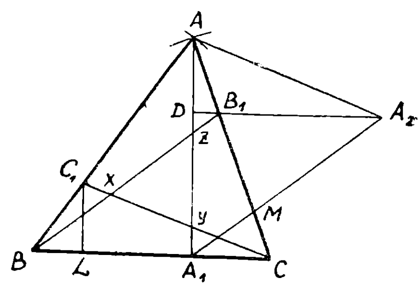
millest järeldub huvitav võrdus

$$[d_a^{(n)}]^2 + [d_b^{(n)}]^2 + [d_c^{(n)}]^2 = [d_a'^{(n)}]^2 + [d_b'^{(n)}]^2 + [d_c'^{(n)}]^2.$$

4. Kolmnurga ABC nediaanid AA_1, BB_1 ja CC_1 moodustavad lõikudes kolmnurga XYZ (vt. joon. 3), mida me nimetame n e d i a a n i d e l õ i k u m i s e l t e k k i v a k s k o l m n u r g a k s. Kolmnurk XYZ ja varemvaadeldud viisil konstrueeritud nediaankolmnurk AA_1A_2 on sarnased, sest nende küljed on paralleelsed.



Joonis 2.



Joonis 3.

Avaldame nediaanide lõikumisel tekkiva kolmnurga XYZ külje YZ nediaani AA_1 kaudu. Selleks avaldame AA_1 kaudu AZ ja YA_1 ning kasutame seost

$$YZ = AA_1 - AZ - YA_1. \tag{3}$$

AZ arvutamiseks kirjutame välja sarnaste kolmnurkade AZB_1 ja AA_1M külgede suhted:

$$\frac{AZ}{AA_1} = \frac{AB_1}{AM} = \frac{\frac{1}{n}AC}{AC - MC}. \tag{4}$$

Sarnastest kolmnurkadest A_1MC ja BB_1C saame

$$\frac{MC}{B_1C} = \frac{A_1C}{BC} = \frac{1}{n};$$

arvestades, et $B_1C = \left(1 - \frac{1}{n}\right)AC$, leiame

$$MC = \frac{1}{n}B_1C = \frac{n-1}{n^2}AC.$$

Seosest (4) järeldub nüüd:

$$\frac{AZ}{AA_1}=\frac{\frac{1}{n}AC}{\left(1-\frac{n-1}{n^2}\right)AC}=\frac{n}{n^2-n+1}$$

ehk

$$AZ=\frac{n}{n^2-n+1}AA_1. \tag{5}$$

YA_1 arvutamiseks tõmbame lõigu C_1L paralleelselt nediaaniga AA_1 ja leiame saadud sarnaste kolmnurkade C_1BL ja ABA_1 külgede suhted:

$$\frac{C_1L}{AA_1}=\frac{BL}{BA_1}=\frac{BC_1}{BA}=\frac{1}{n}.$$

Siit

$$C_1L=\frac{1}{n}AA_1 \tag{6}$$

ja

$$BL=\frac{1}{n}BA_1=\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)BC. \tag{7}$$

Kolmnurkade A_1YC ja LC_1C sarnasuse ning seose (7) tõttu saame nüüd

$$\frac{YA_1}{C_1L}=\frac{A_1C}{LC}=\frac{\frac{1}{n}BC}{BC-BL}=\frac{\frac{1}{n}BC}{\left[1-\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]BC}$$

ja arvestades seost (6) leiame

$$YA_1=\frac{\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)}\cdot\frac{1}{n}AA_1=\frac{1}{n^2-n+1}AA_1. \tag{8}$$

Seoste (3), (5) ja (8) abil saame lõpuks otsitava suuruse

$$YZ=\left(1-\frac{n}{n^2-n+1}-\frac{1}{n^2-n+1}\right)AA_1=\frac{n(n-2)}{n^2-n+1}AA_1.$$

Leitud tulemustest järeldub:

1) $AZ:ZY:YA_1=n:n(n-2):1$;

2) kõikidest nediaanide kolmikutest lõikuvad ainult mediaanid ühes punktis, mis jaotab need suhtes $2:1$ (tipust lugedes);

3) tertsiaanide juhul
$AZ:ZY:YA_1=3:3:1$,
$AZ=ZY,\ BX=XZ,\ CY=YX$;

4) $\frac{\overline{S}_n}{S}=\frac{(n-2)^2}{n^2-n+1}$, kus $\overline{S}_n$ on nediaanide lõikumisel tekkinud kolmnurga XYZ pindala.

Tõepoolest, arvestades, et sarnaste kolmnurkade pindalad suhtuvad nagu vastavate külgede ruudud, leiame, et

$$\frac{\overline{S}_n}{S_n} = \frac{n^2(n-2)^2}{(n^2-n+1)^2},$$

kus S_n on nediaankolmnurga AA_1A_2 pindala. Et aga

$$S_n = \frac{n^2-n+1}{n^2} S,$$

siis kehtib võrdus 4).

Erijuhul, kui $n=3$, saame $\overline{S}_n = \frac{1}{7} S$. Viimase tulemuse esitas tuntud poola matemaatik H. Steinhaus.[3]

5. Nimetame kolmnurga ABC autonediaanseks, kui üks tema kahest nediaankolmnurgast (n on endiselt fikseeritud) on sarnane kolmnurgaga ABC. Kui kolmnurk ABC on autonediaanne, siis leidub üks nediaanide kolmik, mille lõikumisel tekkiv kolmnurk on sarnane kolmnurgaga ABC.

Märgime kõigepealt, et *võrdkülgne kolmnurk on autonediaanne iga n puhul*, sest valemite (1) ja (2) põhjal on võrdkülgse kolmnurga nediaanid võrdsed ja seega ka nediaankolmnurk võrdkülgne.

Lihtne on veenduda, et võrdhaarne kolmnurk saab olla autonediaanne vaid siis, kui ta on võrdkülgne. Tõepoolest, kui $b=c$ puhul nõuda, et nediaanidest $d_a^{(n)}$, $d_b^{(n)}$ ja $d_c^{(n)}$ kaks oleksid omavahel võrdsed, järeldub seostest (1), et $a=b=c$. Samale tulemusele jõuame nediaanide $d_a'^{(n)}$, $d_b'^{(n)}$ ja $d_c'^{(n)}$ korral. Seega tarvitseb meil järgnevas vaadelda vaid iseküIgseid kolmnurki. Sealjuures eeldame, et külgede tähistus on valitud nii, et

$$a < b < c. \tag{9}$$

Nagu on tõestatud autori eelmises artiklis[4], on sel juhul

$$d_a^{(2)} > d_b^{(2)} > d_c^{(2)}.$$

Nediaanide pikkuste pideva sõltuvuse tõttu n-st jääb nediaanide sama suurusjärjestus püsima ka arvule 2 lähedastel n väärtustel. Üldiselt aga ei tarvitse see järjestus kehtida. Et kolmnurga autonediaansuse uurimisel on nediaanide suurusjärjestus oluline, siis vaatleme, millised võimalused siin esinevad. Kolme suurust $d_a^{(n)}$, $d_b^{(n)}$, $d_c^{(n)}$ saab järjestada kuuel erineval viisil. Nendest neli järjestust ei ole antud juhul võimalikud, sest valemitest (1) järeldub eeldustel (9) ja $n \geqslant 2$, et

$$d_c^{(n)} < d_b^{(n)} \quad \text{ja} \quad d_c^{(n)} < d_a^{(n)}.$$

---

[3] Штейнгауз, Г., Математический калейдоскоп. М., 1949, lk. 9.

[4] Zetel, S. I., Automediaansed kolmnurgad. — Matemaatika ja kaasaeg, V, lk. 68—73.

Seega jääb üle kaks võimalust:

$$d_c^{(n)} < d_b^{(n)} < d_a^{(n)} \tag{10}$$

ja

$$d_c^{(n)} < d_a^{(n)} < d_b^{(n)}. \tag{11}$$

Nagu nägime, kehtib iga antud kolmnurga puhul esimene suurusjärjestus, kui n on 2 või arvule 2 lähedane reaalarv. Nediaanide teine suurusjärjestus esineb antud kolmnurgas aga küllalt suure n väärtuse korral. Tõepoolest, arvestades võrratusi (9) ja seda, et

$$\lim_{n\to\infty} d_c^{(n)} = a, \quad \lim_{n\to\infty} d_a^{(n)} = b, \quad \lim_{n\to\infty} d_b^{(n)} = c,$$

näemegi, et teatud n väärtusest alates hakkab kehtima suurusjärjestus (11). Reaalarv n, millest alates hakkavad kehtima võrratused (11), oleneb kolmnurga külgede pikkuste vahekorrast ja on leitav seostest (1).

Sama on olukord nediaanide $d_a'^{(n)}$, $d_b'^{(n)}$ ja $d_c'^{(n)}$ korral: kui n on 2 või arvule 2 lähedane suurus, siis

$$d_c'^{(n)} < d_b'^{(n)} < d_a'^{(n)}, \tag{12}$$

kui aga n on küllalt suur, siis

$$d_b'^{(n)} < d_c'^{(n)} < d_a'^{(n)}. \tag{13}$$

Leiame nüüd kolmnurga autonediaansuse tarvilikud ja piisavad tingimused, vaadeldes algul nediaane $d_a^{(n)}$, $d_b^{(n)}$, $d_c^{(n)}$ juhul, kui nende suurusjärjestus on antud võrratustega (11). Siis on kolmnurga autonediaansuseks tarvilik ja piisav, et

$$\frac{[d_c^{(n)}]^2}{a^2} = \frac{[d_a^{(n)}]^2}{b^2} = \frac{[d_b^{(n)}]^2}{c^2},$$

ehk arvestades seoseid (1) ja asjaolu, et sarnaste kolmnurkade vastavate külgede ruudud suhtuvad nagu kolmnurkade pindalad,

$$\frac{n(n-1)a^2+nb^2-(n-1)c^2}{n^2a^2} = \frac{n(n-1)b^2+nc^2-(n-1)a^2}{n^2b^2} =$$

$$= \frac{n(n-1)c^2+na^2-(n-1)b^2}{n^2c^2} = \frac{S_n}{S} = \frac{n^2-n+1}{n^2}.$$

Lihtne on kontrollida, et saadud võrduste kehtivusest järeldub külgede võrdsus

$$a = b = c,$$

mis on vastuolus eeldusega (9). Niisiis ei saa kolmnurk, kus nediaanide suurusjärjestus rahuldab võrratusi (11), olla autonediaanne. Sama on olukord nediaanide $d_a'^{(n)}$, $d_b'^{(n)}$ ja $d_c'^{(n)}$ korral: kolmnurk, kus nende nediaanide suurusjärjestus on antud võrratustega (13), ei saa olla autonediaanne. *Isekülgses autonediaanses kolmnurgas* (kui selliseid eksisteerib) *peab seega nediaanide suurusjärjestus olema vastupidine külgede suurusjärjestusele.*

Seostest (1) leiame, et võrratuste (10) kehtivuseks peab olema

$$(2n-1)a^2+(n^2-2n)c^2 < (n^2-1)b^2, \tag{14}$$

seostest (2) näeme aga, et võrratuste (12) kehtivus eeldab, et

$$(n^2-1)b^2<(n^2-2n)a^2+(2n-1)c^2. \tag{15}$$

Seega on kolmnurga autonediaansuseks tarvilik, et nediaanid rahuldaksid kas võrratust (14) või (15).

Lähtudes nediaanide suurusjärjestuste (10) ja (12) korral kolmnurga autonediaansuse tarvilikest ja piisavatest tingimustest

$$\frac{[d_c^{(n)}]^2}{a^2}=\frac{[d_b^{(n)}]^2}{b^2}=\frac{[d_a^{(n)}]^2}{c^2}=\frac{n^2-n+1}{n^2}$$

ja vastavalt

$$\frac{[d_c'^{(n)}]^2}{a^2}=\frac{[d_b'^{(n)}]^2}{b^2}=\frac{[d_a'^{(n)}]^2}{c^2}=\frac{n^2-n+1}{n^2}$$

leiame neid tingimusi lihtsustades, et esimesel juhul

$$(n-1)c^2+a^2=nb^2, \tag{16}$$

teisel juhul

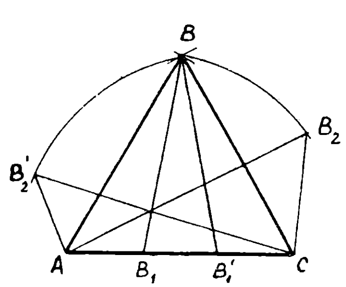
$$(n-1)a^2+c^2=nb^2. \tag{17}$$

Tingimused (14) ja (15) osutuvad nüüd liigseiks, sest nad järelduvad võrratusest (9) ja vastavalt seostest (16) ning (17). Seega on kolmnurga autonediaansuseks tarvilik ja piisav, et juhul, kui vaadeldakse nediaane $d_a^{(n)}$, $d_b^{(n)}$ ja $d_c^{(n)}$, kehtiks seos (16), nediaanide $d_a'^{(n)}$, $d_b'^{(n)}$ ja $d_c'^{(n)}$ vaatlemisel aga seos (17). Juhul kui $n=2$, saame mõlemast seosest ühe ja sama tingimuse:

$$a^2+c^2=2b^2.$$

Et leidub iseküլgseid kolmnurki, mille külgede pikkused rahuldavad tingimusi (16) või (17), siis leidub ka isekülgseid autonediaanseid kolmnurki. Järgmises punktis vaatleme, kuidas neid konstrueerida.

6. Eeldades, et n on fikseeritud, konstrueerime kõigepealt autonediaanse kolmnurga antud keskmise külje b järgi. Selleks ehitame küljele $AC=b$ võrdkülgse kolmnurga ABC ja tõmbame sellele nediaanid BB_1 ja BB_1' (joon. 4; joonisel on võetud $n=3$). Punktide B_1 ja B_1' kui keskpunktide ümber joonestame ringjooned raadiustega $BB_1=BB_1'$. Olgu B_2 ja B_2' suvalised punktid neil ringjoontel; siis kolmnurgad AB_2C ja $AB_2'C$ on autonediaansed.



Joonis 4.

Kolmnurkade AB_2C ja $AB_2'C$ autonediaansus on tõestatav samuti nagu vastavalt konstrueeritud kolmnurga automediaansus (vt.

viide 4, lk. 59). Nimelt, rakendades kolmnurkadele AB_2B_1 ja B_2CB_1 koosinuslauset, võime kirjutada:

$$AB_2^2 = AB_1^2 + B_1B_2^2 + 2AB_1 \cdot B_1B_2 \cos \alpha, \qquad (18)$$

$$CB_2^2 = B_1C^2 + B_1B_2^2 - 2B_1C \cdot B_1B_2 \cos \alpha, \qquad (19)$$

kus $\alpha = \angle B_2B_1C$. Kui arvestada, et $B_1C = (n-1)AB_1$, siis pärast võrduse (18) mõlemate poolte korrutamist $(n-1)$-ga ja saadud võrduse liitmist võrdusele (19) vabaneme suurusest $\cos \alpha$:

$$CB_2^2 + (n-1)AB_2^2 = B_1C^2 + (n-1)AB_1^2 + nB_1B_2^2.$$

Kasutades veel seoseid

$$AB_1 = \frac{1}{n} AC, \quad B_1C = \frac{n-1}{n} AC, \quad B_1B_2^2 = \frac{n^2-n+1}{n^2} AC^2$$

(B_1B_2 võrdub võrdkülgse kolmnurga ABC nediaaniga!), leiame pärast sarnaste liikmete koondamist, et

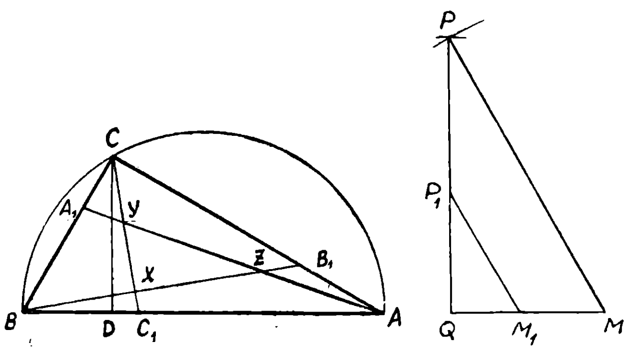
$$(n-1)AB_2^2 + CB_2^2 = nAC^2$$

ehk

$$(n-1)c^2 + a^2 = nb^2,$$

s. t. kehtib kolmnurga AB_2C autonediaansuse tarvilik ja piisav tingimus (16). Samuti saame näidata, et tingimus (16) kehtib ka kolmnurga $AB_2'C$ korral.

Edasi peatume pikemalt t ä i s n u r k s e t e autonediaansete kolmnurkade konstrueerimisel.



Joonis 5.

Kui hüpotenuus c ette anda, siis omandab autonediaansuse tarvilik ja piisav tingimus (16) kuju

$$\frac{b^2}{a^2} = n, \qquad (20)$$

tingimus (17) aga kuju

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{n}{n-1}. \qquad (21)$$

Seega on täisnurkne kolmnurk antud n korral autonediaanne parajasti siis, kui tema kaatetid a ja b rahuldavad kas tingimust (20) või tingimust (21).

Selleks et konstrueerida antud hüpotenuusiga täisnurksest autonediaanset kolmnurka, mis rahuldab tingimust (20), joonestame hüpotenuusile $AB = c$ kui diameetrile poolringi (vt. joon. 5). Võtame $BD = \frac{AB}{n+1}$ (joonisel $n = 3$) ja tõmbame punktist D lõigule AB ristlõigu kuni lõikumiseni ringjoonega punktis C. Kolmnurk ACB ongi otsitav kolmnurk. Joonisel 5 on esitatud kolmnurga ACB tertsiaanidest konstrueeritud kolmnurk PQM ja tertsiaanide lõikumisel tekkinud kolmnurgaga ZXY kongruentne kolmnurk P_1QM_1. Kolmnurga ACB autonediaansuse tõestamiseks avaldame Eukleidese teoreemi abil kaatetite ruudud:

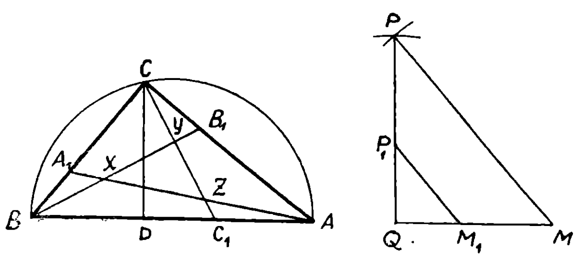
$$BC^2 = BD \cdot AB = \frac{1}{n+1} AB^2,$$

$$AC^2 = AD \cdot AB = \frac{n}{n+1} AB^2.$$

Siit

$$\frac{AC^2}{BC^2} = n, \quad \text{s. o.} \quad \frac{b^2}{a^2} = n.$$

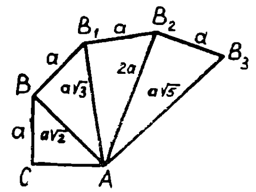
Tingimust (21) rahuldava antud hüpotenuusiga täisnurkse



Joonis 6.

autonediaanse kolmnurga konstruktsioon on näidatud joonisel 6. Otsitava kolmnurga saamiseks joonestatakse hüpotenuusile $AB = c$ kui diameetrile poolring, võetakse $BD = \frac{n}{2n-1} AB$ (joonisel $n = 3$) ja tõmmatakse punktist D ristsirge lõigule AB kuni lõikumiseni ringjoonega punktis C. Siis kolmnurk ACB ongi otsitav. Konstruktsioon on põhjendatav samuti nagu eelmine. Joonisel 6 on esitatud ka nediaanidest konstrueeritud kolmnurk PQM ja nediaanide lõikumisel tekkinud kolmnurgaga ZXY kongruentne kolmnurk P_1QM_1.

Vaatleme veel, kuidas konstrueerida täisnurkset autonediaanset kolmnurka lühema kaateti a järgi. Joonestame kõigepealt täisnurkse võrdhaarse kolmnurga kaatetitega $AC = BC = a$ (joon. 7). Punktis B tõmbame hüpotenuusile ristlõigu $BB_1 = a$. Kolmnurk ABB_1 on automediaanne. Punktis B_1 konstrueerime kolmnurga ABB_1 hüpotenuusile ristlõigu $B_1B_2 = a$. Saame autotertsiaanse kolmnurga AB_1B_2 jne. Üldiselt n-es täisnurkne kolmnurk tuleb külgedega a, $a\sqrt{n}$, $a\sqrt{n+1}$. Et kaatetite $a\sqrt{n}$ ja a ruutude suhe on n, siis on n-es kolmnurk $AB_{n-2}B_{n-1}$ autonediaanne naturaalarvu n suhtes. Ka juhul, kui n ei ole naturaalarv, on kolmnurk[5] $(a, a\sqrt{n}, a\sqrt{n+1})$ muidugi autonediaanne (n suhtes), kuid ta ei ole kirjeldatud viisil konstrueeritav. Kõik viimati konstrueeritud autonediaansed kolmnurgad on esitatavad kujul $(a, a\sqrt{n}, a\sqrt{n+1})$, olles seega sarnased kolmnurgaga $(1, \sqrt{n}, \sqrt{n+1})$.



Joonis 7.

Tingimust (21) rahuldab ka autonediaanne täisnurkne kolmnurk $(\sqrt{n-1}, \sqrt{n}, \sqrt{2n-1})$ ja kõik temaga sarnased kolmnurgad $(a\sqrt{n-1}, a\sqrt{n}, a\sqrt{2n-1})$. Nende kahe tüübiga ongi kõik täisnurksed autonediaansed kolmnurgad ammendatud. Näiteks, kui $n = 3$, saame kaks tüüpi autotertsiaanseid täisnurkseid kolmnurki: $(1, \sqrt{3}, 2)$ ja $(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$ ning kõik nendega sarnased kolmnurgad. Kui $n = 2$, siis mõlemad tüübid ühtivad.

Kui kolmnurgad $(1, \sqrt{n}, \sqrt{n+1})$ ja $(\sqrt{n-1}, \sqrt{n}, \sqrt{2n-1})$ paigutada teineteise kõrvale nii, et nende võrdsed küljed ühtivad, siis tekib kolmnurk $(\sqrt{n+1}, \sqrt{n-1}+1, \sqrt{2n-1})$; vastupidi, kui on antud viimane kolmnurk, siis saame ta küljele $\sqrt{n-1}+1$ tõmmatud kõrguse abil jaotada kaheks täisnurkseks autonediaanseks kolmnurgaks.

Kui $n > 2$ puhul asetada kolmnurk $(1, \sqrt{n}, \sqrt{n+1})$ kolmnurgale $(\sqrt{n-1}, \sqrt{n}, \sqrt{2n-1})$ nii, et kaatetid $\sqrt{n}$ ühtivad ja külg 1 satub küljele $\sqrt{n-1}$, siis tekib nürinurkne kolmnurk $(\sqrt{n-1}-1, \sqrt{n+1}, \sqrt{2n-1})$. Vastupidi, kui tõmmata sellise kolmnurga külje $\sqrt{n-1}-1$ pikendusele kõrgus, siis tekib kaks täisnurkset autonediaanset kolmnurka.

Täisnurkse autonediaanse kolmnurga leidmise ülesanne on seotud järgmise ekstreemumülesandega: joonestada ringi diameetriga d niisugune täisnurkne kolmnurk, mille ühe kaateti korrutis teise n-da astmega on maksimaalne.

Tõepoolest, tuleb leida kaatetid x ja y nii, et korrutis $z = xy^n$

[5] Sümbol (a, b, c) tähendab kolmnurka külgedega a, b ja c.

oleks maksimaalne, kusjuures $x^2+y^2=d^2$. Asendades siin z avaldisse $x=\sqrt{d^2-y^2}$, saame ühe muutuja funktsiooni

$$z=y^n\sqrt{d^2-y^2}.$$

Maksimumi korral peab selle funktsiooni tuletis võrduma nulliga. Viimane tingimus annab võrrandi

$$ny^{n-1}\sqrt{d^2-y^2}-\frac{y^{n+1}}{\sqrt{d^2-y^2}}=0,$$

millest

$$y^2=\frac{n}{n+1}d^2$$

ja järelikult

$$x^2=d^2-\frac{n}{n+1}d^2=\frac{d^2}{n+1}.$$

Seega $\frac{y^2}{x^2}=n$, s. t. otsitav kolmnurk on autonediaanne. Märgime, et ülesanne on lahendatav ka tuletise mõistet kasutamata[6].

7. Püstitame lõpuks küsimuse, kas iga isekülgse kolmnurga (a, b, c) jaoks, kus $a<b<c$, leidub reaalarv $n \geqslant 2$ nii, et kolmnurk oleks selle n korral autonediaanne? Vastus küsimusele järeldub lihtsalt kolmnurga autonediaansuse tarvilikust ja piisavast tingimusest (16) või (17), mida võib esitada vastavalt kas kujul

$$n=\frac{c^2-a^2}{c^2-b^2} \tag{22}$$

või kujul

$$n=\frac{c^2-a^2}{b^2-a^2} \tag{23}$$

Valemitest (16) ja (17) näeme, et kolmnurk on automediaanne parajasti siis, kui $a^2+c^2=2b^2$. Kui see tingimus pole täidetud, siis juhul, kui $a^2+c^2<2b^2$, on $\frac{c^2-a^2}{c^2-b^2}>2$ ja $1<\frac{c^2-a^2}{b^2-a^2}<2$; juhul, kui $a^2+c^2>2b^2$, on aga $1<\frac{c^2-a^2}{c^2-b^2}<2$ ja $\frac{c^2-a^2}{b^2-a^2}>2$.

Kui $a^2+c^2<2b^2$, siis on kolmnurk sarnane nediaankolmnurgaga, mis on konstrueeritud nediaanidest $d_a^{(n)}$, $d_b^{(n)}$, $d_c^{(n)}$, kus $n=\frac{c^2-a^2}{c^2-b^2}$; kui aga $a^2+c^2>2b^2$, siis on kolmnurk sarnane nediaankolmnurgaga, mis on konstrueeritud nediaanidest $d'^{(n)}_a$, $d'^{(n)}_b$, $d'^{(n)}_c$, kus $n=\frac{c^2-a^2}{b^2-a^2}$.

---

[6] Vt. Зетель, С. И., Задачи на максимум и минимум. М., 1949.

Seega leidub iga iseküIgse kolmnurga jaoks parajasti üks reaalarv $n \geqslant 2$, nii, et kolmnurk on selle n suhtes autonediaanne.

Nagu me juba eespool kindlaks tegime, on võrdkülgne kolmnurk iga n suhtes autonediaanne, võrdhaarne kolmnurk pole aga ühegi n suhtes autonediaanne. Võrdhaarseid kolmnurki võib vaadelda isekülgsete autonediaansete kolmnurkade piirjuhuna, mille saame, lastes keskmise külje pikkuse piiramatult läheneda kas pikimale või lühimale. Need piirjuhud saame ka autonediaansuse tarvilikest ja piisavatest tingimustest (16) ja (17), jagades võrduste mõlemad pooled n-ga ja lastes n piiramatult kasvada.

Matemaatilist meelelahutust

Vanuse määramine

See trikk kõlbab ainult enam kui kümneaastaste isikute vanuse määramiseks. Paluge isikul, kelle vanust Te soovite määrata, liita enda vanusele 90, tõmmata maha tulemuse esimene number (sajalised) ja liita see allesjäänud arvule. Vastuse teatamisel tarvitseb vaid liita sellele 9 ja vanus ongi määratud.

Näide. Olgu küsitletava isiku vanus 22 aastat. Liites sellele 90 saab ta 112 ja pärast sajaliste liitmist arvu ülejäänud osale 13. Selle arvu teatab ta Teile, ning tõepoolest: $13 + 9 = 22$.

Vanuse määramine koos petmiskatse kindlakstegemisega

Paluge isikul, kelle vanust on tarvis määrata: 1) kirjutada üles enda vanus käesoleva aasta lõpuks; 2) liita sellele enda vanus tuleva aasta lõpuks; 3) korrutada tulemus viiega; 4) liita tulemusele enda sünniaasta viimane number ning teatada Teile vastus.

Teatatud arvust lahutage 5, siis tulemuse kaks esimest numbrit annavadki otsitud vanuse (käesoleva aasta lõpuks).

Vanuse õigsuse kontrollimiseks lahutage saadud tulemuse viimane number käesoleva aasta arvust (1965). Selle vahe viimane numbrikoht peab ühtima määratud vanuse viimase numbriga. Kui see pole nii, siis on küsitletav püüdnud petta ja tema tegelik vanus peab lõppema viimatileitud numbriga (siinjuures on eeldatud, et küsitletav liitis neljandal sammul oma tegeliku sünniaasta viimase numbri; selle tagamiseks tuleb neljas samm teatada hästi kiiresti ja nõuda kohe vastuse ütlemist).

Näide 1. Teatati arv 274. Lahutades sellest 5 saame 269. Tulemuse kaks esimest numbrit annavad vanuse 26. Kontrolliks lahutame viimase numbri 9 aastaarvust 1965. a. Saame 1956, mis lõpeb samuti kuuega nagu leitud vanuski. Seega võib arvata, et arvutustes kasutatud vanus oli õige.

Näide 2. Teatati arv 231. Lahutades sellest 5 saame 226. Seega arvutustes kasutatud vanus oli 22. Kontrolliks lahutame: $1965 - 6 = 1959$. Siit näeme, et meid on tahetud petta, tegelik vanus peab lõppema 9-ga ja olema seega nähtavasti 29.

Märkus. Petmiskatse kindlakstegemine ei õnnestu siis, kui küsitletav «teeb» ennast 10 aastat nooremaks.

Matemaatika ajaloost

ARVSÕNADE PÄRITOLUST EESTI KEELES

H. Rätsep

1. Arvsõnade tekkimine ja kujunemine mistahes keeles on seoses olnud seda keelt kõneleva rahva, sugukonna ühiskondliku arengu tasemega, tsivilisatsiooni astmega. Enne arvu mõiste ja abstraktsete numeraalide tekkimist eksisteeris primitiivses ühiskonnas loendamine, mis toimus esialgu samaaegselt kahe märgisüsteemi abil — kasutati sõnu koos vastavate žestidega. Aluseks olid seejuures tavaliselt kehaosad: žestiga osutati teatavale kehaosale ja lausuti samal ajal selle nimetus. Enamasti kasutati loendamise vahendeina sõrmi ja varbaid, kuid mõnedel rahvastel ka muid kehaosi. Seepärast on täiesti arusaadav, et paljudes keeltes on arvsõnad kujunenud kehaosade nimetustest. Niisugust loendamist kohtame praegugi mõnede Lõuna-Ameerika indiaanlaste ja paapuate suguharude juures.

Näiteks Uus-Ginea elanikud alustavad loendamist vasaku käe väikese sõrme kõverdamisega. Seejärel kõverdatakse teisi sõrmi järjekorras, osutatakse siis vasaku käe osadele, õlale, kuklale, rinnale, rinnakorvile, minnakse edasi parema käe juurde ja lõpetatakse toiming parema käe väikese sõrmega. Igale kehaosale viidates nimetatakse ka seda märkiv sõna. Igal kehaosal on niisiis kindel numbriline väärtus. Loendamise sõnaline külg on järgmine: 1 — *monou* 'väike sõrm (vasakul käel)', 2 — *reere* 'järgmine sõrm', 3 — *kaupa* 'keskmine sõrm', 4 — *moreere* 'nimetissõrm', 5 — *aira* 'pöial', 6 — *ankora* 'ranne', 7 — *mirika mako* 'küünarvars', 8 — *na* 'küünarnukk', 9 — *ara* 'õlg', 10 — *ano* 'kukal (vasakul)' 11 — *ame* 'vasak rind', 12 — *onkari* 'rinnakorv', 13 — *ame* (*nekai*) 'parem rind', 14 — *ano* 'kukal (paremal)', 15 — *ara* '(parem) õlg', 16 — *na* '(parem) küünarnukk', 17 — *mirika mako* 'küünarvars (paremal)', 18 — *ankora* '(parem)ranne', 19 — *aira* 'pöial', 20 — *moreere* 'nimetissõrm', 21 — *kaupa* 'keskmine sõrm', 22 — *reere* 'järgmine sõrm', 23 — *monou* 'väike sõrm'. Nagu me näeme, saab sel viisil loendada kuni 23-ni. Sellisest esialgsest loendamisviisist on säilinud jälgi paljudes maailma keeltes. Nii on paljud tšuktši, korjaki, jukagiiri keele arvsõnad seoses kehaosade nimetustega.

Loendamise ulatus olenes muidugi vastava rahva elatustasemest ja kaubanduslikest suhetest. Pidi olema, mida loendada. Kui peremees suudab oma koduloomi nimepidi meeles pidada, pole tal neid tarvis loendada. Niisiis loendamine on ikkagi samm konkreetsest abstraktse suunas.

Alles hiljem siirduti žestide ja sõnade koostoimel sündinud loendamisest edasi abstraktsete arvude kasutamisele, arvusüsteemidele. Üleminek konkreetselt abstraktsele toimus järk-järgult. Esialgu oli arv ikkagi erilist huvi pakkuvate esemete omadus ja seda ei saadud lahutada neist esemeist ning teistele esemetele üle kanda. Leidub primitiivsel elujärjel rahvaid, kes oskavad küll loendada puutüvesid ja raha, ent mitte külasid.

2. Neid fakte ja seisukohti tuleb meil silmas pidada ka siis, kui me vaatleme arvsõnade probleemi kõige varasemas kindlalt fikseeritavas perioodis soome-ugri keelte (nende hulgas ka eesti keele) arengus.

See vanim periood soome-ugri keelte arengus on nn. uraali periood, mis lõppes umbes 6000 aastat tagasi, s. o. 4000 a. e. m. a. Sel ajal polnud olemas veel eri soome-ugri keeli ega ka samojeedi keeli, vaid neid keeli kõnelejate eelkäijad elasid ühe keelekollektiivina Volga keskjooksu ja Uraali mägede vahemail ning kõnelesid murdeliste erinevustega uraali aluskeelt. Arengutasemelt olid nad neoliitikumis.

Senised uurimused on osutanud, et eesti keeles pole ühtki arvsõna, mis päris kindlasti pärineks uraali aluskeelest. Veelgi enam, on selgunud, et soome-ugri ja samojeedi keeltel puuduvad üldse ühised arvsõnad, niisiis ei tunne me ühtki uraali aluskeele arvsõna. Ja ometi on rohkesti ühiseid sõnu soome-ugri ja samojeedi keeltes. Selles ühiste arvsõnade puudumise faktis pole midagi üllatavat, kui arvesse võtta eespool esitatud üldisi seisukohti. Uraali aluskeelt kõnelejad olid niivõrd madalal arenemisastmel, et abstraktsed arvumõisted polnud neil ilmselt veel välja kujunenud. Arvumõisted arenevad välja ennekõike ikka sellistel rahvastel, kellel on juba olemas küllalt märkimisväärne kaubandus. Seda aga uraali aluskeelt kõnelejail polnud, elasid nad ju põlislaantest piiratud aladel. Loendada muidugi osati ja arvatakse, et loendamisel kasutati eespool kirjeldatud sõrmede-varvaste meetodit.

Kuna sellistest kehaosade nimetustest võisid areneda hiljem arvsõnad, siis on püütud leida vastavusi kehaosade nimetuste ja arvsõnade vahel ka soome-ugri keeltes. Tulemused on seni olnud võrdlemisi tagasihoidlikud.

Soome uurija A. K a n n i s t o on avaldanud arvamust, et sõna *kümme*, mille varasem kuju on *kümmen*, võiks ühendada somaatilise sõna *kämmal* varasema vormiga *kämmen*, mis oli olemas juba uraali aluskeelele järgnenud soome-ugri aluskeeles. Muidugi päris kindlaks või tõestatuks seda kõrvutust veel pidada ei saa.

Ungari uurija F. K o v á c s on jõudnud järeldusele, et ungari *húsz* '20' ja sellele vastavad komi *ki̮̯ź*, udmurdi *ki̮̯ź*, mansi *kus*, handi *hūs*, *kōs* on ühendatavad samojeedi sõnaga *hāsa-* 'inimene'. Tähenduslikult pole sellises kõrvutuses midagi kummalist: kümme sõrme ja kümme varvast oli ju kõik, mis ühe inimese puhul loendamisel arvesse tuli. Pealegi leidub teisi keeli, kus kohtame samasugust vahekorda. Kui see seletus paika peab, siis kinnitaks ta eelnevaid seisukohti ja näitaks, et uraali aluskeeles lõppes loendamine kahekümnega.

Samuti on võimalik, et sõna *viis* (varasema kujuga *viite*) on suguluses samojeedi keelte kätt märkiva sõnaperega: neenetsi *ŋuda*, nganassaani *jütü*, eenetsi *uda*, *ura*; selkupi *uty* ja kamassi *uda*. Seegi arvamus vajab veel kinnitamist.

Samas laadis on soome uurija T. L e h t i s a l o seletanud ka samojeedi kuut märkiva sõna päritolu. Ta ühendab neenetsi *mat̀'*, *mahttat*, eenetsi *motu'*, nganassaani *matu'*, selkupi *muktet*, kamassi *muktu'd* neenetsi verbiga *maδā* 'üle vee minema', millel on vasteid ka lapi keeles (*mokse-* 'üle vee minema') ja handi keeles (*mŏχt̬ə* 'läbi'). Tähenduste diferents seletatakse sellega, et arvu kuus puhul siirduti loendamisel ühelt käelt teisele ning sõna esialgne tähendus oli 'asi, mis on üle läinud, siirdunud'. Paralleelne muutus esineb ka Aasia eskimo keeles, kus *arvinlik* '6' tuleneb verbist *arviχtuŋa* 'lähen üle teisele kaldale'.

3. Uraali aluskeel lahknes umbes 6000 aastat tagasi, kusjuures see lahknemine oli ilmselt seoses vastava keelekollektiivi kaheks eraldumisega. Põhjapoolsel keelealal kujunes aja jooksul uus iseseisev keel — samojeedi aluskeel, tänapäeva samojeedi keelte — neenetsi, nganassaani, eenetsi, selkupi ja kamassi keele eelkäija. Lõunapoolsel keelealal kujunes soome-ugri aluskeel, millest lähtuvad praegused soome-ugri keeled. Soome-ugri aluskeel püsis umbes kolmanda aastatuhandeni enne meie ajaarvamist ja seda kõneldi Volga keskjooksu ning Uraali mägede vahelisel maa-alal, vähe lõuna pool uraali aluskeele paiknemisrajoonist.

Sel perioodil tekivad esimesed tõelised arvsõnad, mis on ühised kõigile tänapäeva soome-ugri keeltele. Need on eesti keeles *üks*, *kaks*, *kolm*, *neli*, *viis* ja *kuus*. Tabelis 1 on esitatud nende arvsõnade vasted kõigis soome-ugri keeltes.

Samojeedi keeltes on arvsõnad kujunenud täiesti iseseisvalt, nagu juba eespool märkisime. Tabelis 2 esitame samade arvude vasted ka kolmes samojeedi keeles.

4. Arvsõna *seitse* on praegustel andmetel eelmistest noorem, ta oli juba olemas umbes 4000 aastat tagasi. Sellele sõnale ei leidu vasteid ugri keeltes (ungari, handi ja mansi keeles), mille eelkäija ugri aluskeel kujunes välja pärast soome-ugri aluskeele lahknemist.

Tabel 1.

	1	2	3	4	5	6
eesti	*üks*	*kaks*	*kolm*	*neli*	*viis*	*kuus*
soome	*yksi*	*kaksi*	*kolme*	*neljä*	*viisi*	*kuusi*
karjala	*ükši*	*kakši*	*kolme*	*ńel'l'ä*	*viizi*	*kuuži*
vepsa	*üks*	*kakś*	*koumę*	*ńel'*	*vii̯ž*	*kuź*
vadja	*ühsi*	*kahsi*	*kẹm*	*nellä*	*vīz̄*	*kūsi*
liivi	*ik̄š*	*kak̄š*	*kᵘol̄'m*	*nēl'a*	*vīž̄*	*kūž̄*
norralapi	*ok¦tâ*	*guok'tĕ*	*gol¦ƀmâ*	*njæl¦ljĕ*	*vit¦tâ*	*gut¦tâ*
mordva	*vejke*	*kavto*	*kolmo*	*ńil'e*	*vete*	*koto*
mari	*ik, iktə*	*kok, koktət*	*kẹm*	*nẹl*	*wəts*	*kut, kù·δət*
komi	*ẹt, ẹtik*	*ki̮k*	*kujim*	*ńol'*	*vit*	*kvat'*
udmurdi	*ok, odik*	*ki̮k*	*kwiń*	*ńil'*	*vit'*	*ku̯at'*
mansi	*äk, ääkwe*	*kit*	*qoorəm*	*ńila*	*äät*	*qåt*
handi	*ĭt*	*kət, kät*	*koləm*	*ńəlä*	*wet*	*kut*
ungari	—	*két, kettő*	*három*	*négy*	*öt*	*hat*

Märkusi: 1. Ungari keele *egy* 'üks' ei ole etümoloogiliselt ühendatav teiste samatähenduslike sõnadega soome-ugri keeltes.

2. Mansi ja handi ühte märkivad sõnad kuuluvad sellesse rühma kahtlemisi, sest nende häälikulise külje seletamisega on raskusi.

3. Sõnadele *kaks* ja *viis* on mõned uurijad esitanud vasteid samojeedi keeltest, kuid häälikuliste mittevastavuste tõttu on nad viimasel ajal kõrvale jäetud.

Tabel 2.

	1	2	3	4	5	6
neenetsi	*ŋoob', nopoj*	*sidæ*	*nææhar'*	*teet*	*sambææng*	*mat̀'*
selkupi	*ukkyr*	*šitty*	*nååqyr*	*teetty*	*sombyla*	*muktet*
kamassi	*o'm, o'b*	*šide*	*naagur*	*tee'də*	*sumna*	*muktu'd*

Sõnal *seitse* on sugulaskeeltes järgmised vasted: soome *seitsemän*, karjala *seit't'šei*, vepsa *seitšime*, liivi *seis*, mordva *śiśem*, mari *šəšəm*, *šem*; komi *śiźim*, udmurdi *śiźim*.

Ugri keeltes on tarvitusel hoopis teine tüvi: *mansi sǟt*, handi *jäwət*, *täwət*; ungari *hét*. See tüvi on laenatud indo-euroopa aluskeelele lähedasest keelest, mida kõnelevad hõimud elasid soomeugrilastest lõuna pool. Vrd. sanskriti *sapta*, avesta *hapta*. Tuleb arvata, et ugri keelte sõna vanus pole väiksem sõna s e i t s e vanusest läänepoolsetes soome-ugri keeltes.

Samojeedi keeltes märgib seitset neenetsi *si'iw*, nganassaani *saibua*, selkupi *seel'či*, kamassi *sej'bü*, eenetsi *se'o*. Nad ei ole suguluses *seitse*-sõnaga.

5. Omapärase kujunemislooga on arvsõnad *kaheksa* ja *üheksa*. Nende vasted sugulaskeeltes on järgmised:

k a h e k s a — soome *kahdeksan*, karjala *kahekšan*, vepsa *kahtsan*, vadja *kahęsā*, liivi *kǫ'dəks*, norralapi *gavce*, mordva *kavkso*, mari *kändäkš*;

ü h e k s a — soome *yhdeksän*, karjala *ühekšan*, vepsa *ühtsan*, vadja *ühesǟ*, liivi *ī'dəks*, norralapi *ovce*, mordva *vejksę*, mari *əndekš*.

Nagu me näeme, puuduvad neil sõnadel vasted permi ja ugri keeltes. Üldiselt levinud arvamuse kohaselt on nende sõnade puhul tegemist vanade liitsõnadega, mille esiosaks on olnud arvsõnade *üks* ja *kaks* (varasema kujuga *ükti* ja *kakti*) kuluvormid. Liitsõna teist, viimast komponenti *-deksan* (veelgi varem *deksam*) on peetud laenuks soome-ugri rahvastest lõuna pool Lõuna-Venemaal elanud indo-euroopa keeli kõnelnud hõimudelt. Vrd. indo-euroopa aluskeele *dek̂m*, ladina *decem*, kreeka *deka* jne.

Kui lähtuda seisukohast, et *deksan* on indo-euroopa laen tähendusega 'kümme', siis peaks nende liitsõnade sõnasõnaliseks tähenduseks olema *kaheksa* 'kahega kümme' ja *üheksa* 'ühega kümme'. Tuleb arvata, et see sõna on laenatud eriti vanast indo-euroopa keelevormist, mis on veel lähedane indo-euroopa aluskeelele. Niisiis nende sõnade vanus paistab olevat suuremgi, kui võib järeldada sugulaskeelte vastete põhjal.

Moodustamisviisilt on need sõnad sama tüüpi kui ladina *duodeviginti* '18' ja *undeviginti* '19', udmurdi *t'amis* '8' ja *ukmis* '9' (*-mis* '10'), komi *kikjamis* '8' ja *ekmis* '9', selkupi *šitty čäŋgytyl' köt* ~ *šitty čäŋ köt* '8' ('kümme ilma kaheta'), *ukkyr čäŋgytyl' köt* ~ *okkyr čäŋ köt* '9' ('kümme ilma üheta'); jukagiiri *kunirkileʒeoi* '9' ('üheta kümme'), keeti *ynəm bəńśa qoś* '8' ('kaheta kümme'), *quśam bəńśa qoś* '9' ('üheta kümme') ja draviidi keelkonda (Indias) kuuluvas kanara keeles *entu* '8' (*eradu* '2', *hattu* '10'), *ombhattu* '9' (*ondu*, *obba* '1'). Ei pruugi sugugi oletada indo-euroopa keelte mõju nende arvsõnade konstruktsioonis, sest niisugune moodustamisviis on levinud mitmel pool maailmas; peale eespool mainitud keelte veel austroneeslastel, semiitidel, hotentottidel, bantudel, tiibetlastel, birmalastel, ainudel, eskimotel, indiaanlastel. Kahtlemata on siin olemas seos mõlema käe sõrmede abil loendamise pildiga. Pealegi paistab, et primitiivne inimene püüdis esialgu näha võimalikult väikest kvantiteeti.

Mõnedes samojeedi keeltes moodustatakse kaheksat ja üheksat märkivad sõnad hoopis teisiti, vrd. neenetsi *sidnteet* '8' (õigupoolest 'kaks korda neli'), *haasawajüü* '9' (*haasawa* 'samojeed', *jüü'* '10') (sõna-sõnalt 'samojeedi kümme', sellega on seletatav ka, miks samojeedid köidavad kimpu 9 nahka). Vrd. ka neenetsi *luucajüü'* '10' (*luuca* 'venelane', seega 'venelaste kümme'). Siit ilmneb, et *jüü'* tähendas esialgu ainult suurt hulka.

Kuid rootsi keeleteadlane B. C o l l i n d e r on andnud sõnadele *kaheksa* ja *üheksa* teistsuguse seletuse. Tema arvates mingisugust laensõna neis sõnades ei peitu, vaid *kaheksa* ja *üheksa* on tuletatud *ks*-liite abil sõnadest *üks* ja *kaks*. Collinderi seletus pole soome-ugri keeleteadlaste hulgas leidnud eriti suurt poolehoidu, sõnade tähenduslik külg jääb sel korral võrdlemisi ähmaseks, kuigi peab nentima, et laenu seletamisel on mõningaid häälikulisi raskusi, mis vajavad lisapõhjendusi.

6. Kümmet märkivate sõnade kasutamisele võtmisel on soome-ugri keeled läinud mitut erinevat teed mööda. Eri soome-ugri keeltes on tarvitusel pool tosinat sõna, mis tähistavat kümmet.

Meie *kümme*-sõnale on vasteid peale läänemeresoome keelte ainult mordva keeles: soome *kymmenen*, karjala *kümmenen*, vepsa *kümńe*, vadja *tšümmē*, liivi *kim̄*, mordva *ḱemeń*. Nende andmete põhjal pole selle sõna vanus üle 3000 aasta. Huvitavat lisavalgust heidab *kümme*-sõna päritolule võrdlus *kümme* ~ *kämmal* (see, muide on küsitav).

Lapi, mari ja mansi keeles märgitakse kümmet sõnaga, mis on tuletatud meie *lugema*-verbile sugulaslikust verbist: norralapi *lokke* '10', mari *lu* '10', mansi *loß* '10'. *Lugema*-verb pärineb juba soome-ugri aluskeelest ja tähendas esialgu 'loendama'. Arvsõna esialgne tähendus oli 'hulk, loendamise tulemus', kust siis aja jooksul arenes abstraktse arvu tähendus. Muide soome keeles tähendab sõna *luku* kõige muu kõrval ka arvu ja arvutamist.

Kolmas selle tähendusega sõna esineb praegu liitarvsõnade järelkomponendina udmurdi, mansi ja ungari keeles: udmurdi *-mi̮n* — *komi̮n* '30', *ńḙl'ami̮n* '40', *veti̮mi̮n* '50', *kvai̭ti̮mi̮n* '60'; mansi *-mən* — *nälmən* '40', *ätmən* '50', *χòtpən* '60'; ungari *-van*, *-ven* — *negyven* '40', *ötven* '50', *hatvan* '60' jne.

Selle sõna vasteks eesti keeles on *mõni*, mis meil märgib praegu ebamäärast hulka, vrd. ka soome *moni* 'mitu', karjala *mońi* 'mitu', vadja *męni* 'mitu', liivi *mūnda* 'mitu, mõni', norralapi *moanâk* 'küllalt mitu (4—10)'. Ka siin on tähenduse areng toimunud suunas 'ebamäärane hulk' > 'määratud hulk'.

Mõni-sõnale on häälikuliselt ja tähenduslikult lähedasi sõnu leitud ka indo-euroopa keeltest: gooti *manags*, vanaülemsaksa *manag*, vanarootsi *mangen* 'mitu', vanaiiri *menic* 'sage, üldine', vanaslaavi *mŭnogŭ* 'palju, mitu'. Osa fennougriste on arvamusel, et see sõna kuulub uraali ja indo-euroopa keelte sugulusele viitavate sõnade hulka.

Permi keeltes on kümmet tähistavaks iseseisvaks sõnaks *das*, mis võib olla seoses juba varem esitatud *deksan* vormiga. Oletatakse nimelt, et siin on tegemist algupäralt sama sõna laenamisega iraani keeltest, vrd. avesta *dasa* '10', osseedi *das* '10'. Iraani aluskeelest on laenatud ungari *tíz* '10'.

Eelnevast võib järeldada: soome-ugri aluskeeles puudus oma kümmet märkiv sõna, see kas laenati võõrsilt või saadi tähendussiirde teel ebamäärast kvantiteeti märkivatest sõnadest.

7. Arvsõna *sada* pole oma sõna, vaid laen indo-euroopa poolelt, vrd. sanskriti *śata-*, avesta *sata-*, ladina *centum*. Ta pärineb otseselt indo-iraani aluskeelest ning laenati soome-ugri aluskeelde. Sellele viitab ennekõike vastete olemasolu kõigis soome-ugri keeltes: soome *sata*, karjala *sada*, vepsa *sada*, vadja *sata*, liivi *sadà*, norralapi *čuođe*, mordva *śado*, mari *südö*, udmurdi *śu*, komi *śo*, mansi *šaat*, *saat*, handi *sat*, *sot*; ungari *száz*. Sõna laenamine soome-ugri aluskeelde on kahtlemata seoses tihedate kaubanduslike vahekordadega nende rahvaste vahel.

Muide sada märkivad samojeedi sõnad (neenetsi *jur*, nganassaani *jir*, eenetsi *jūz*, kamassi *t'üs*) on laenud türgi-tatari keeltest.

8. Laenuks on osutunud ka arvsõna *tuhat*, see on aga tunduvalt noorem. Praegu esineb ta läänemeresoome ja volga keeltes: soome *tuhat*, karjala *tuhat*, vepsa *tuha*, vadja *tuhaᴅ*, liivi *tu'ont*, mordva *t'ožov*, mari *təžem*. Sõna *tuhat* on laenatud kaks kuni kolm tuhat aastat tagasi balti keelte (läti, leedu ja muinaspreisi) eelkäijast alusbalti keelest, vrd. leedu *túkstantis*, läti *tūkstotis*, muinaspreisi *tūsimtons*. Tõenäoliselt laenati see sõna läänemeresoome aluskeelde ja volga keeltesse eraldi.

Kaugemates sugulaskeeltes on tuhandet märkivad sõnad pärit indo-iraani aluskeelest, siiski natuke hilisemast ajast kui sõna *sada*.

Veelgi suuremaid arve tähistavad sõnad *miljon*, *miljard* jne. on hilised laenud saksa keelest.

9. Liitarvsõnad *üksteist*, *kaksteist*, *kolmteist*, *neliteist*, *viisteist*, *kuusteist*, *seitseteist*, *kaheksateist* ja *üheksateist* moodustavad omaette rühma, nende konstruktsioonis näeme vana, läänemeresoome aluskeelde tagasi minevat liitarvsõnade moodustamise viisi. Varasemas eesti keeles ulatus selline moodustamisviis teisest kümnest

kaugemale. Sellele viitavad ka andmed varasemaist eesti keele grammatikaist ja tekstidest ning murretest. Nii kirjutab Anton Thor Helle 1732. a. oma grammatikas, et 21 on eesti keeles *ükskolmat*, 22 — *kakskolmat*, 41 — *üksviiet*, aga 91 — *üheksakümmend ja üks*. Ja veel 1843. a. märgib Eduard Ahrens, et eestlane kasutavat kiirel lugemisel eespool nimetatud liitarvsõnade moodustamise viisi, näiteks *viis rubla kolmat kümmet* '25 rubla'.

Eesti murretes on selline viis säilinud ainult loendamisel teatud tegevuste puhul. Nii on loetud haspeldamisel Käinas, Ridalas, Kihnus, Kosel, Harju-Jaanis, Haljalas, Viru-Nigulas, Lüganusel, Annas, Pilistveres, Maarja-Magdaleenas jm. Mõned aastad tagasi oli nende ridade kirjutajal võimalik kuulda Saaremaal Valjalas kangast ülesseadvat eidekest lugevat: *ükskolmat*, *kakskolmat*, *kolmkolmat*, *nelikolmat*, *viiskolmat*, *kuuskolmat*, *seitsekolmat* jne. Lääne-Nigulas ja Keilas on kasutatud seda loendamisviisi ringmängudes, Saaremaal on loetud nõnda lesti jne.

Sellist tüüpi liitsõnad on soome keeles veel praegugi paralleelvormidena kasutamisel. Niisiis soomlane võib lugeda kas *kaksikymmentä yksi*, *kaksikymmentä kaksi*, *kaksikymmentä kolme*, *kaksikymmentä neljä*, *kaksikymmentä viisi* või vanemat moodi *yksikolmatta*, *kaksikolmatta*, *kolmekolmatta*, *neljäkolmatta*, *viisikolmatta*. Seda laadi arvsõnade küllaltki suurt vanust näitab see, et nad esinevad ka lapi keeles, vrd. rootsilapi *akta nuppē låhkāi* '11' ('teise kümne üks'), *vihta nuppē låhkāi* '15', *vihta kålmāt låhkāi* '25', *kuhta kauftsāt låhkāi* '76', jne. Kaugemates sugulaskeeltes selliseid konstruktsioone siiski ei kasutata.

Vormid *üksteist*, *kaksteist* jne. on lühendvormid, nende täielikum kuju on *üksteistkümmend*, *kaksteistkümmend*. Liitarvsõnade teine komponent *-teistkümmend* on osastav sõnaühendist *teine kümme*. Siin on säilinud veel *kümme*-sõna vanem osastavavorm *kümmend* praeguse *kümmet* kõrval. Tuleb veel märkida, et neis osastava vormides ilmneb osastava käände vana funktsioon, koha osutamine, mis on lähedane praeguse seestütleva ja alaltütleva käände põhifunktsioonile. Seega *üksteistkümmend* tähendab tegelikult 'üks teisest kümnest', *kaksteistkümmend* 'kaks teisest kümnest' jne. Peale eelmainitud arvsõnade kuulub siia ka sõna *poolteist*, tegelikult siis 'pool teisest'. Varasemas kirjakeeles kohtame ka vorme *pool kolmat* '$2\frac{1}{2}$', *pool neljat* '$3\frac{1}{2}$', *pool viiet* '$4\frac{1}{2}$'.

10. Praegu kasutamisel olevate *kakskümmend üks*, *kakskümmend kaks* jne. tüüpi liitarvsõnade päritolu on veel ebaselge. Tüüp ise on levinud paljudes soome-ugri keeltes. Kuid mõned keeleteadlased on avaldanud arvamist, nagu oleksid sellised sõnaühendid eesti keeles välja kujunenud indo-euroopa, eriti saksa keele eeskujul ja võrdlemisi hilja. Vanemas kirjakeeles kohtame veel kolmandatki liitarvsõnade moodustamisviisi: *üks peale kolmekümne* '31', *kaks peale kolmekümne* '32' jne.

11. Kümneliste nimetused *kakskümmend*, *kolmkümmend*, *nelikümmend*, *viiskümmend*, *kuuskümmend*, *seitsekümmend*, *kaheksakümmend* ja *üheksakümmend* on küllaltki vanad: neile on otseseid vasteid kõigis läänemeresoome keeltes. Eakusele viitab ka arhailine osastavavorm *kümmend*, kuigi sel siin pole vana, kohta osutavat tähendust nagu *üksteistkümmend*-tüüpi vormides.

12. Lõpuks lubatagu peatuda sõna *arv* päritolul. Sel sõnal on otseseid vasteid mitmes soome-ugri keeles kuni ungari keeleni: soome *arvo* 'väärtus, tähtsus, au, auaste', karjala *arv* 'hind, väärtus, tähtsus', vepsa *arv* 'hind', vadja *arvo* 'mõistus, arusaamine', liivi *ǭra* 'mõte, arvamine, arve, suund', norralapi *ar'vo* 'väärtus, tähtsus, austus, arvamine', ungari *ár*, *árr* 'hind', *áru* 'hind, kaup'. Nagu sugulaskeeltest selgub, pole üheski teises soome-ugri keeles selle sõna tähenduseks 'arv', vaid sõna esialgseks tähenduseks oli 'hind'. Praegu meil esineva tähenduse on sõna *arv* saanud alles eesti keele iseseisva eksisteerimise perioodil. Muide sõna *aru* 'mõistus' on *arv*-sõna variant. Nagu märgitud, esineb mitmes teises soome-ugri keeles 'arv' tähenduses sõna, mis vastab meie sõnale *lugu*.

Arv on tõenäoliselt pärit samast tüvest kui sõna *arvama*. Ebakindlaks peetakse väidet, et *arva*-tüvi oleks laenatud indo-iraani keeltest, vrd. sanskriti *arghás*, osseedi *ary* 'väärtus, hind'.

13. Eelnev lühiülevaade peaks osutama, kuivõrd mitmepalgeline on eesti keele arvsõnade algupära. Lõplike järelduste tegemine eri perioodidel kasutamisel olnud arvusüsteemi kohta jääb siiski edaspidiseks. Võiks arvata, et loendamissüsteemiks uraali aluskeeles on mingi primitiivne vigesimaalsüsteem, mis tugines otseselt sõrmede ja varvaste hulgale; soome-ugri aluskeeles kujunes algul välja kuuendsüsteem, mille asemele tuli seitsmendsüsteem (viimase jälgi on leitud ka ugri rahvaste rahvaluulest). Hiljem, kaubanduslike suhete arenedes tuli iraanlastelt detsimaalsüsteem.

Kirjandus

Collinder, Bj., Die Wörter für fünf, sechs und sieben im Lappischen. — Festskrift til Rektor. J. Qvigstad, Tromsø, 1928, lk. 356—374.

Collinder, Bj., *Kahdeksan* ja *yhdeksan*. — Virittäjä, 1953, lk. 92—98.

Donner, K., Uralilaisista lukusanoista. — Virittäjä, 1933, lk. 386—389.

Kovács, F., Ist das ungarische Zahlwort húsz 'viginti' eine Zusammensetzung? — Acta Linguistica Academiae Scientiarum Hungaricae VIII, Budapest, 1958, lk. 343—360.

Kovács, F., Some Remarks on Uralic Numerals. — Acta Linguistica Academiae Scientiarum Hungaricae. X, 1—2, Budapest, 1960, lk. 117—129.

Laki, K., The number system based on six in the Proto Finno-Ugric language. — Journ. Washington Acad. Sci., 1960, 50, № 4, 1—11.

Lehtisalo, T., Samojedin 'kuutta' merkitsevästä lukusanasta. — Virittäjä, 1953, lk. 128—129.

Setälä, E. N., Aus dem Gebiet der Lehnbeziehungen. I. Einige Zahlwörter. Finnisch-ugrische Forschungen XII, lk. 161—170.

Башмакова И. Г., Юшкевич А. П., Происхождение систем счисления. — Энциклопедия элементарной математики. I, М.—Л., 1951, 9—74.

A. C. CLAIRAUT — MATEMAATIK, GEODEET, ASTRONOOM

Ü. Lumiste

Matemaatika ajaloos on üheks huvitavamaks ajajärguks XVIII sajand. Eelnenud sajandi suurte mõtlejate P. Fermat', R. Descartes'i, B. Pascali ja sajandivahetuse gigantide I. Newtoni ja G. W. Leibnizi pingutuste viljana oli valmis sepistatud uus vahe relv looduse saladuste alistamiseks — diferentsiaal- ja integraalarvutus. Selle rakendamine loodusnähtuste uurimisel tõi kaasa uute teaduseharude — teoreetilise mehhaanika, optika, geodeesia, hüdraulika jt. tekkimise. Sündis matemaatiline loodusteadus, nii nagu tänapäeval sünnivad matemaatiline keeleteadus, matemaatiline majandusteadus jt. Need uurijad, kelle kätes vastsündinu tugevnes nüüdisaegse tsivilisatsiooni üheks alussambaks, on alatiseks pälvinud inimkonna tänu ja lugupidamise.

Üheks nende seas on XVIII sajandi esimese poole silmapaistvamaid matemaatikuid, teoreetilise geodeesia rajaja ja taevamehhaanika edasiarendaja prantsuse õpetlane A. C. Clairaut, kelle surmast käesoleva aasta 17. mail möödub 200 aastat. Pariisi matemaatiku paljulapselises perekonnas 7. mail 1713. a. sündinud Alexis Claude Clairaut [l.: aleksis klood kleroo] tulek teadusse on üks esimesi ja hiilgavamaid näiteid varases nooruses ilmnenud hämmastavatest matemaatilistest võimetest. Ta ei olnud veel kolmeteistkümneaastanegi, kui rakendas isalt saadud teadmisi esimeses iseseisvas uurimuses. 1726. aastal esitati Pariisi Teaduste Akadeemiale nooruki töö, milles diferentsiaalarvutuse abil käsitleti järgmisi neljandat järku jooni

$$x^4 = a^2(x^2 + y^2),\ x^2(x^2 + y^2) = a^4,\ x^2(a^2 - y^2) = a^4,$$
$$x^4 = a^2(a^2 - y^2)$$

— lahendati ülesandeid, millega nüüdisajal tegelevad üliõpilased kõrgema kooli esimestel kursustel. Akadeemikud panid noorele autorile suuri lootusi. Töö trükiti 8 aasta pärast (1734) Berliini Teaduste Akadeemia väljaandes.

Teises töös, mille A. Clairaut saatis akadeemiale 16-aastasena, näitas ta end juba küpse uurijana. J. de Molières, hinnates Clairaut' tööd, märkis, et see teeks au ka vilunuimale matemaatikule. Ja tõepoolest, noore Clairaut' uurimus, mis 1731. a. ilmus 119-leheküljelise raamatuna pealkirja all «Uurimusi kaksikkõverusega joontest» (*Recherches sur les courbes à double courbure*) on tänapäevani jäänud silmapaistvale kohale matemaatika ajaloos.

Selles käsitletakse esmakordselt niisuguse põhjalikkusega ruumilisi jooni (s. t. jooni, mille punktid ei asu ühel tasandil). Clairaut kirjutab sissejuhatuses: «*Ma arvan, et pean neid jooni nimetama kaksikkõverusega joonteks, sest kui neid mainitud viisil vaadelda* (projektsioonide abil kahele ristuvale tasandile — Ü. L.), *siis võtavad nad alati osa n.-ö. kahe joone kõverusest*». Clairaut mõtleb siin nähtavasti seda, et ruumilist joont ei saa kunagi projekteerida tasandile sirgeks. Märkigem ühtlasi, et tollal tunti ainult tasandilise joone kõverust ja nimelt seda kõverust kahe projektsiooni korral peabki Clairaut silmas kõneldes «kaksikkõverusega joontest».

Toodud tsitaadist saab selgeks ka Clairaut käsitlusviis — ta vaatles ruumilist joont kahe pinna (lihtsaimal juhul kahe projekteeriva pinna) lõikejoonena. Analüütilise geomeetria seisukohalt on nimelt pinda mõnes mõttes lihtsam esitada kui ruumilist joont. On ju teada, et üks võrrand, mis seob kaht koordinaati x ja y tasandil, määrab üldiselt kõneldes tasandilise joone, kuid üks võrrand kolme koordinaadi puhul ruumis määrab mitte enam joone, vaid pinna. Joone saamiseks tuleb lisada veel teine võrrand, nii et tekiks kahe pinna lõikumine.

Eeltoodust nähtub, et Clairaut' käsitlusviis erineb oluliselt praegusest, kus joont vaadeldakse omaette objektina sõltumatult nendest pindadest, millede lõikumisel teda võib saada. Nüüdisaegse kõverateooria mõistetest [1] vaatleb Clairaut ainult puutujat ja normaaltasandit. Tema töö on säilitanud ajaloolise väärtuse kui esimene tõsisem katsetus ruumiliste kõverate uurimise ja üldse ruumilise analüütilise geomeetria loomise alal.

Tollal äratas aga nooruki mahukas uurimus üldist tähelepanu. Akadeemikud pöördusid kuninga poole palvega teha Clairaut'

---

[1] Vt. Matemaatika ja kaasaeg, III, Trt., 1964, lk. 76—77.

puhul erand eeskirjale, mille järgi Pariisi akadeemiasse valitu pidi olema vähemalt 20-aastane, ja nii saigi Clairaut'st juba 18-aastaselt akadeemia adjunkt.

Akadeemias jätkas Clairaut oma matemaatilisi uurimusi, mille seas pälvib erilist huvi 1734. a. avaldatud töö praegu tema nime kandvast diferentsiaalvõrrandist

$$y = xy' + f(y').$$

XVIII sajandil olid mitmesugused diferentsiaalvõrrandid saanud matemaatikute pingsaima tähelepanu objektiks. Nendes nähti universaalset vahendit looduses esinevate ajas või ruumis muutuvate suuruste vaheliste sõltuvuste uurimiseks. Tavalistest algebralistest võrranditest erinevad nad seetõttu, et otsitavaks on mitte suuruse hetkeline väärtus — arv, vaid suurustevaheline sõltuvus — funktsioon. Veelgi olulisem erinevus seisneb selles, et tavalistele algebra, trigonomeetria ja logaritmarvutuste tehetele on lisandunud diferentsiaalarvutuse eriline tehe — funktsiooni diferentseerimine (ehk tuletise võtmine). Ülaltoodud Clairaut' võrrandis on näiteks x sõltumatu muutuja (argument), y temast sõltuv suurus (funktsioon) ja y' selle funktsiooni tuletis; $f(y')$ on sümbol, mis tähistab funktsiooni argumendist y'. Selle võrrandi abil selgitas Clairaut veenvalt varem palju arusaamatusi tekitanud vahekorra diferentsiaalvõrrandi üldlahendi ja iseärase lahendi vahel. Toodud võrrandi üldlahendiks on teatavasti

$$y = Cx + f(C);$$

geomeetriliselt võib seda tõlgendada sirgeparvena tasandil. Iseärane lahend, mida võib parameetriliselt esitada kujul

$$x = -f'(t),\ y = -tf'(t) + f(t),$$

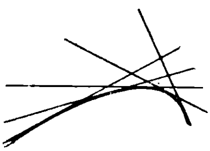
määrab selle sirgeparve mähisjoone. Nii et iseärane lahend on üldlahendiga määratava kõveraparve mähisjoon (vt. joon. 1)!

Eriti silmapaistvate tulemusteni jõudis A. Clairaut diferentsiaal- ja integraalarvutuse rakendamisel geodeesias. Ühe esimese huvitava saavutusena tõestas ta 1733. a. (20-aastasena) praegu tema nime kandva lause pöördpindade geodeetiliste joonte kohta. Pöördpinnaks nimetatakse teatavasti pinda, mis tekib joone pöörlemisel mingi telje ümber; teisiti öeldes, pinda, mille lõikamisel teljega risti olevate tasanditega saame alati ringjooni (pöördpinna nn. paralleele). Geodeetiliseks jooneks pinnal on, näitlikult kõneldes, iga niisugune joon, mida mööda läheb mingi kahe punkti vahele pinna peale pinguli tõmmatud niit (vt. joon. 2). Clairaut' lause väidab järgmist. Pöördpinna geodeetilise joone punkti A kaugus r pöördeteljest on pöördvõrdeline siinusega selle geodeetilise joone ja punkti A läbiva paralleeli vahelisest nurgast α:

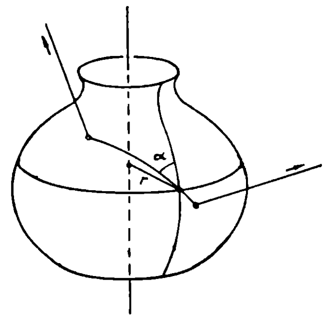
$$r \sin \alpha = \text{const}.$$

Lause seos geodeesiaga on ilmne. Maa pind kujutab ju endast esimeses lähenduses pöördellipsoidi, geodeetilised jooned on aga lühimateks kahe punkti vahel Maa pinnal.

Clairaut edasine tegevus on veelgi tihedamalt seotud geodeesiaga. Tollal ei olnud veel vaibunud võitlus Newtoni gravitatsiooniteooria ümber. Kartesiaanlaste (R. Descartesi poolehoidjate) ning klerikaalide (kirikumeeste) kõige olulisemaks vastuväiteks oli see, et Newtoni teooria, mis selgitas küll enneolematu rangusega



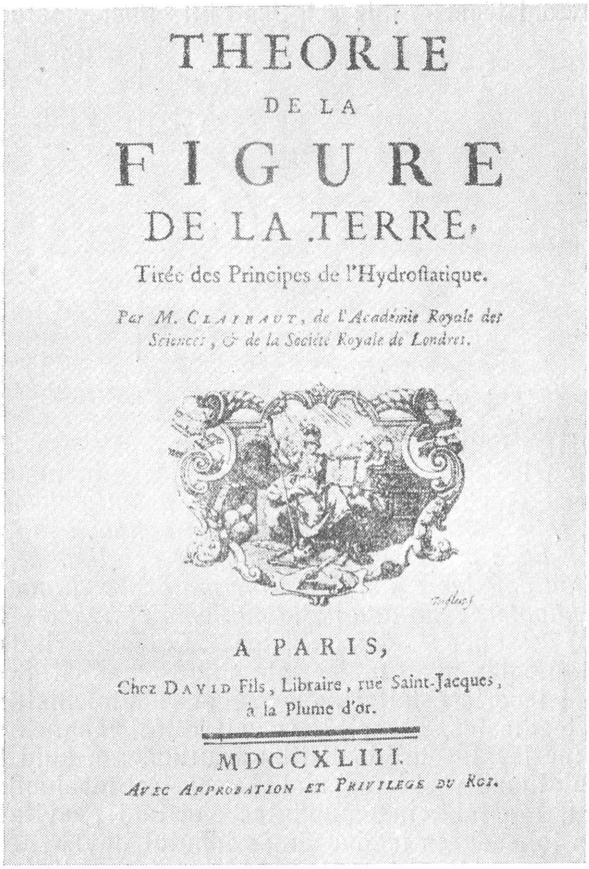
Joonis 1.



Joonis 2.

nähtuste välise külje, jättis põhjuste osas küsimuse täiesti lahtiseks. Newton ise kirjutas oma «Loodusfilosoofia matemaatilistes printsiipides» (1686): *«Piisab sellest, et gravitatsioon tõepoolest on olemas, toimib ülalkäsitletud seaduste kohaselt ning on küllaldane taevakehade ja mere kõigi liikumiste selgitamiseks. ... Gravitatsioonijõu omaduste põhjusi ei ole ma seni suutnud nähtustest järeldada, hüpoteese ma aga välja mõtlema ei hakka.»* Teise väljaande (1713) eessõnas seletas redaktor R. Cotes gravitatsioonijõudu koguni kui «Looja» poolt mateeriale antud omadust. Seetõttu tekitas Newtoni teooria esialgu mõnesugust rahulolematust tolleaegseis täppisteadlastes, kes olid vaevalt alles vabanenud skolastikast selle meelevaldsete idealistlike arutlustega, kuid kelle materialism ei ulatunud veel kaugemale Descartesi mehhanistlikest seisukohtadest. Iga fakt, mis puudutas Newtoni gravitatsiooniteooriat, äratas tolleaegses teaduseilmas tohutut huvi.

Üheks kõige kättesaadavamaks katse- ja vaatlusobjektiks oli sellal Maa. Lähtudes osakeste kokkutõmbejõu ja Maa sisemise ehituse kohta tehtud mõningatest oletustest arvutasid I. Newton ja veel varem Ch. Huygens välja põhilised Maa kuju iseloomustavad suurused. Mõlemate arvutused näitasid, et Maa peaks olema telje suunas kokku surutud. Kuid nn. ekstsentrilisuse suuruse kohta läksid nende tulemused lahku. Probleemi selgitamiseks korraldas Pariisi akadeemia aastatel 1684—1718 meridiaani kaarte mõõtmise Prantsusmaa piires Pariisist põhja ja lõuna suunas. Vigade tõttu mõõtmistes ja metoodikas saadi teoreetilistele arvutustele vastupidine tulemus — Maa oleks nagu pidanud olema telje suunas hoopis välja venitatud. Lõpliku selguse saamiseks saatis Pariisi akadeemia mõne aja pärast välja kaks suurt ekspeditsiooni. Üks neist töötas 1735—1742. a. Peruus ning mõõtis meridiaani kaare ekvaatori piirkonnas, teine viibis aastail 1736—1737 analoogilise ülesandega Lapimaal polaaralal. Viimase koosseisus oli ka


THEORIE

DE LA

FIGURE

DE LA TERRE,

Tirée des Principes de l'Hydrostatique.

Par M. Clairaut, de l'Académie Royale des Sciences, & de la Société Royale de Londres.

A PARIS,

Chez David Fils, Libraire, rue Saint-Jacques, à la Plume d'or.

MDCCXLIII.

Avec Approbation et Privilege du Roi.

noor Clairaut. Mõlema ekspeditsiooni tulemuste võrdlemine Prantsusmaal meridiaani mõõtmisel saadud andmetega näitas esmakordselt täie veendumusega Newtoni ennustuste õigsust.

Probleemi teoreetilise osa läbitöötamise võttis oma hooleks A. Clairaut. Uurimistöö tulemused avaldas ta 1743. aastal raamatus «Hüdrostaatika alustele tuginev Maa kuju teooria» (*Théorie de la figure de la terre, tirée des principes de l'Hydrostatique*). Selles andis Clairaut teist järku lineaarse diferentsiaalvõrrandi, mis kirjeldab Maa sisemiste pöördellipsoidiaalsete kihtide tiheduse seost ekstsentrilisusega. Koos sellega näitas ta, et Newtoni arvutused vastavad ühtlase tiheduse juhule, Huygensi omad aga juhule, kui kogu mass on koondatud Maa keskpunkti. Clairaut' raamat kuulub geodeesia klassikaliste tööde hulka. Tema tulemused on veel praegugi aluseks Maa kuju uurimisel raskusjõu mõõtmiste abil.

Rakenduslikult tähtsa probleemi uurimisel jõudis Clairaut mitme uue matemaatilise tulemuseni. Nii tuletas ta oma 1739.—1740. a. avaldatud artiklites (samaaegselt kuulsa Peterburi akadeemiku L. Euleriga) lineaarsete diferentsiaalvormide

$$Pdx + Qdy, \quad Kdx + Ldy + Mdz$$

integreeruvustingimused (s. t. tingimused, mille puhul need vormid on täisdiferentsiaalid). Samuti andis ta tingimuse võrrandi

$$Kdx + Ldy + Mdz = 0$$

täielikuks integreeruvuseks (s. t. vasaku poole nn. integreeriva teguri olemasoluks):

$$K\left(\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) + L\left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial K}{\partial z}\right) + M\left(\frac{\partial K}{\partial y} - \frac{\partial L}{\partial x}\right) = 0,$$

Seoses nende uurimustega võttis Clairaut esmakordselt matemaatikas kasutusele kõverjoonse integraali

$$\int_L Pdx + Qdy.$$

Maa kuju teoreetilisel uurimisel jõudis Clairaut ka ühe matemaatika ajaloos olulist osa etendanud probleemini: missugused võivad üldse olla aeglaselt pöörleva mittehomogeense vedeliku tasakaaluasendid? Probleem köitis 19. saj. lõpul prantsuse matemaatiku A. Poincaré tähelepanu ja selle lahendas 1892. a. lõplikult vene teadlane A. M. Ljapunov, kes rajas aluse nn. stabiilsusteooriale.

A. Clairaut' tööd gravitatsiooniteooria kontrolli osas ei piirdunud ainult Maa kuju uurimisega. Vähem tähtsad ei ole tema tööd taevamehhaanikas. Nii tõi talle suure tunnustuse osavõtt Peterburi Teaduste Akadeemia poolt 1750. aastal väljakuulutatud konkursist teemal: «*Näidata, kas kõik Kuu liikumises vaadeldavad häiritused on kooskõlas Newtoni teooriaga ja milline peab olema nende häirituste teooria tegelikult, nii et selle järgi saaks täpselt välja arvutada Kuu asendi mistahes ajahetkel*». Akadeemia preemia omanikuks sai A. Clairaut, kes esimesena võttis tänu oma edusammudele nn. kolme keha probleemi alal Kuu liikumise uurimisel arvesse Päikese gravitatsiooni mõju ning täiustas tunduvalt meetodeid Kuu orbiidi arvutamiseks. Tema töö «Kuu teooria» (*Théorie de la Lune*) avaldati Peterburis 1752. a., kaks aastat hiljem aga valiti A. Clairaut Peterburi Akadeemia auliikmeks.

Teiseks Clairaut silmapaistvaks tööks taevamehhaanikas on Halley komeedi ilmumise täpne ennustamine. Inglise astronoom E. Halley (1656—1742) tõestas, et 1682. a. näha olnud komeedi liikumine on perioodiline. 1758. aastal oli oodata uuesti komeedi ilmumist Päikese lähedusse. Clairaut sooritas tohutu töö komeedi orbiidi arvutamisel, võttes arvesse Jupiteri ja Saturni mõju, ning näitas, et komeet peab mõnevõrra hilinema ja läbima perigee mitte 1758. aastal, vaid 1759. aasta märtsis-aprillis. Nii oligi — Newtoni gravitatsiooniteooria oli saanud uue hiilgava kinnituse[2]. Ka seda Clairaut' tööd premeeris Peterburi Akadeemia.

Mainimata ei või jätta ka Clairaut üht vähem tähelepanu äratanud tööd taevamehhaanikast. 1759. a. avaldas ta artikli, milles järeldas tollal tuntud planeetide liikumises esinevate ebakorrapärasuste alusel uue veel tundmatu planeedi olemasolu. Ja tõesti, 1781. a. avastas inglise astronoom W. Herschel, teadmata midagi Clairaut' ennustusest, uue taevakeha. Vene akadeemiku A. I. Lexelli arvutused näitasid, et see ei ole komeet, nagu arvas esialgu Herschel, vaid planeet, mis sai nimeks Uraan. Clairaut' nime mainitakse selle planeediga seoses aga paraku harva. Küllap on põhjuseks see, et Clairaut' ettenägelikkuse sel puhul varjutab kaugelt järgmise planeedi — Neptuni avastamise lugu. Juba Lexell oletas Uraani liikumises esinevate ebakorrapärasuste põhjal uue planeedi olemasolu. Kuid vaatlusandmete puudulikkuse tõttu saadi selle orbiidi arvutamisele asuda alles 19. sajandi keskel. Selle gigantse töö teostasid teineteisest sõltumatult inglise astronoom J. Adams 1845. a. ja prantsuse astronoom U. Leverrier 1846. a., kes tõestasid mitte üksnes planeedi olemasolu, vaid näitasid vaatlejaile kätte ka tema asukoha (Leverrier näiteks veaga ainult 52′).

Uraani avastamise ajal ei olnud A. C. Clairaut enam elus. Ta ei saanudki isiklikult veenduda oma ennustuse õigsuses. Laialt austatud õpetlasena suri ta Pariisis 17. mail 1765. aastal, jättes endast mälestusena parima, mida teadlane võib anda, — oma loomingu.

---

[2] Huvipakkuv on märkida, et Halley komeedi viimane ilmumine oli 1909. a., järgmist oodatakse 1985—1986. a.

TRADITSIOONILINE MATEMAATIKAPROFESSOR[1]

populaarsetest anekdootidest on alati hajameelne. Ta arvab, et kaotas vihmavarju, kuigi tal on mõlemas käes vihmavari. Ta eelistab seista näoga tahvli ja seljaga klassi poole. Ta kirjutab a, ütleb b, võtab selle arvesse kui c, aga tegelikult peab olema d. Mõningaid tema mõtteterasid antakse edasi põlvest põlve:

«Geomeetria on kunst õigesti arutleda ebaõigete jooniste abil».

«Minu meetod raskuse ületamiseks seisneb temast möödaminemises».

«Milles on õieti erinevus meetodi ja kunstliku võtte vahel? Meetod on kunstlik võte, mida te kasutate kaks korda».

Sellelt traditsiooniliselt matemaatikaprofessorilt on lõppude-lõpuks siiski midagi õppida. Jääme lootma, et niisugune õpetaja, kellelt pole midagi õppida, ei muutu traditsiooniliseks.

---

[1] Vt. Пойа, Д., Как решать задачу. М., 1959.

Matemaatiline päevaraja

«MATEMAATIKA AJALOO LÜHIÜLEVAADE»

A. Jägel

Nii võiks eesti keeles kõlada D. J. Struiki raamatu *«A concise History of Mathematics»* pealkiri. Teose autor Dirk Jan Strüik on tuntud hollandi-ameerika matemaatik, kelle sulest pärineb uurimusi tensoranalüüsi, mitmemõõtmelise diferentsiaalgeomeetria, hüdrodünaamika, tõenäosusteooria ja matemaatika ajaloo alalt. Ta on sündinud 30. septembril 1894. a. Rotterdamis, lõpetanud 1922. a. Leideni ülikooli ning töötab alates 1927. a. Ameerika Ühendriikides Massachusettsi Tehnoloogiainstituudi matemaatikaprofessorina. D. J. Struiki eakaaslaseks ja kolleegiks instituudis oli muide Norbert Wiener (1894—1964)[1]. D. J. Struik on ameerika intelligentsi selle osa esindaja, kelle sümpaatia kuulub rahu- ja sotsialismileerile, kes teab ja oskab hinnata marksismi teooriat. Alates 1948. a., mil tema «Matemaatika ajaloo lühiülevaade» ilmus inglise keeles, on seda välja antud poola, ukraina, ungari ja tšehhi keeles, saksa keeles koguni kahel korral; ka inglise keeles osutus vajalikuks teine väljaanne. Mõned kuud tagasi muutus see raamat kättesaadavaks laiale nõukogude lugejaskonnale venekeelse tõlke «Краткий очерк истории математики» näol, millele tõlkija I. Pogrebõsski on lisanud autori nõusolekul mõningad paragrahvid matemaatika ajaloo kohta Venemaal.

Millega see raamat meid siis rõõmustab?

Kõigepealt muidugi sellega, et väga tagasihoidlikus mahus (paarsada lehekülge) on autor esitanud järjekindlalt ning elavalt matemaatika paljusajandilise ajaloo põhifaktid ja ideelised suunad. Kuid on midagi veel väärtuslikumat — nimelt see, *kuidas* autor materjali esitab ja millise pilguga ta matemaatika arengule vaatab. See ei ole üksteisele järgnevate ideede loetelu, vaid ... anname siiski sõna raamatu autorile:[2] «Algusest peale olen ma mõistnud, et matemaatika ajalugu ei ole ainult mõistete arengu ajalugu, vaid on inimtegevuse ajaloo üks osa, milles peegeldub inimese, ja seejuures mitte abstraktse inimese, vaid inimese kui ühiskonna liikme võitlus loodusega. Kuid siiski vaatleb enamus matemaatika ajaloolasi seda peaaegu eranditult ühelt matemaatikult teisele üleminevate ning edasiarendatavate ideede ja mõistete ajaloona. Galilei mõjutas Cavalierit, Cavalieri — Pascali, Pascal — Leibnizi, aga Leibniz — vendi Bernoullisid. Need ajaloolased meenutavad ainult võimaluse korral üht ja teist tähtsat poliitilist või religioosset sündmust, nagu Aleksander Suure vallutusi või islami usu levimist, mille mõju matemaatika arengule on niivõrd suur, et seda ignoreerida ei saa. Taoline meetod on ühekülgne, aga mitte vale, — see selgitab välja olulised etapid matemaatika ajaloost. Kuid selle puhul ei selgu, et eksisteerib tihe seos matemaatika ja ajastu üldkultuuriliste püüdluste vahel, mis otseselt või kaudselt peegeldavad domineerivaid ühiskondlikke ja majanduslikke tingimusi.

Ilmekaks näiteks on 16. sajandi algebraistide tegevus. Need renessansiajastu matemaatikud võtsid osa üldisest kul-

[1] Vt. Винер, Н. Л., Я — математик. М., 1964.

[2] Kõik kirjutises esitatud tsitaadid on võetud raamatu eessõnast, mille autor kirjutas venekeelsele tõlkele.

tuurilisest liikumisest, nad olid ühtlasi loovad meedikud, arhitektid, maalikunstnikud, tsiviil- ja sõjaasjanduse insenerid, aga ka kaupmehed. Nende tegevust innustas suurte ja võimsate kaubanduslinnade areng. Varajane merkantilism [3] ei andnud meile ainult algebraliste võrrandite uue teooria, vaid andis ka uue õpetuse perspektiivist.»...

«Ühiskondlik-majanduslike tegurite mõju ideede arengule pole tavaliselt vahetu. Need tegurid mõjusid sageli füüsika, geograafia, navigatsiooni või isegi arhitektuuri, maalikunsti, religiooni ja filosoofia kaudu. Harva on tähtsad matemaatilised avastused ühiskondliku mõjustuse otseseks tulemuseks, neis ei ole midagi utilitaarset. G. H. Hardy märkis kunagi, et «tõeliste» matemaatikute «tõeline» matemaatika, Fermat' ja Euleri matemaatika, Gaussi, Abeli ja Riemanni matemaatika on peaaegu täiesti «tarbetu» praktilise kasutamise seisukohalt. Asja tuum ei seisne aga selles (kuigi hämmastavalt palju tollest mineviku «tarbetust» matemaatikast on meie arvutustesajandil, kosmiliste lendude, automatiseerimise ja üldse teadusliku tehnoloogia sajandil muutunud «kasulikuks» matemaatikaks). Me peame püüdma mõista, *millisel viisil* ühiskond mõjustab täppisteadusi. Sageli süvendab see meie arusaamist nendes teadustes valitsevatest suundadest. Muidugi on tõsi, et ühiskond, kus arenevad ülikoolid, toetab teadusliku tegevuse vormi, milles võib elada omaenda ideede maailmas. Kuid see ideede maailm on ajastu vajaduste ja tendentside omapäraseks väljenduseks; siin piisab selle meenutamisest, kuidas rühmateooria ühendas mitu enne peaaegu sõltumatult arenenud matemaatika suunda. Niisugune nähtus puhta mõtte sfääris oli prantsuse revolutsioonile järgnenud aastatel sooritatud tohutu hulga geomeetriliste uurimuste ning sellega seotud matemaatilise mõtte revolutsioniseerumise tagajärg. Gaussi tähtsust matemaatikas võib võrrelda Hegeli tähtsusega filosoofias, Beethoveni omaga muusikas, Goethe omaga kirjanduses. Ning kas polnud Galois tõepoolest prantsuse revolutsiooni poeg?»

D. J. Struiki sõnade järgi võib matemaatika ajalugu, kui seda vaadelda ainult ideede ajaloona, muuta eriliseks «vaimu fenomenoloogiaks», mõistuse fenomenoloogiaks, ning kompetentne autor võiks oma kätega rajada suurepärase mõttepalee, kus leiaksid sobiva koha nii heegellik terminoloogia kui ka Hegeli mõttekäigud. Kuid, ... «selline lähenemine matemaatika ajaloole jääb kogu oma veetlevuse juures ikkagi ühekülgseks, ajuti isegi desorienteerivaks. Me peame alati mõistma, et matemaatilised arusaamad ei ole mõistuse suvaline looming, vaid reaalse, objektiivse maailma peegeldus, kuigi sageli väga abstraktsel kujul. See selgitab, miks erinevate ajastute matemaatikud suutsid üksteist mõista, miks teoreetiline matemaatika võib muutuda rakendusmatemaatikaks ja miks rakendusmatemaatika suudab väljendada mehhaanika, füüsika, isegi bioloogia ja majandusteaduse mõnede harude seadusi. See selgitab, miks on võimalik matemaatika materialistlik dialektika, millele viitas Friedrich Engels. Seepärast peab matemaatika ajaloolane tegutsema tasakaalukalt, arvestades matemaatilise loomingu vabadust oma mõistete kujundamisel ning samal ajal enesele aru andes sellest, et need mõisted on edaspidises matemaatika arengus väärtuslikud vaid siis, kui nad väljendavad reaalse maailma, sealhulgas ka inimese kui ühiskondliku olendi meeleliste tajude maailma, mingit sõltuvust või seaduspärasust.»

Kuidas raamatu autoril on tegelikkuses õnnestunud neid seisukohti realiseerida, küllap sellega lähemalt tutvumiseks on vist kõige mõistlikum lasta «oma silmal olla kuningas».

---

[3] Merkantilism oli 15.—18. saj. rea Euroopa feodaalriikide majanduspoliitika, mille kohaselt majanduslik jõukus seisnes käibevahendite külluses, aga mitte ühiskondlikus tootmises. See poliitika väljendas kasvava kodanluse huve ja oli omal ajal majandusliku mõtte progressiivseks suunaks.

KOMPLEKSMUUTUJA FUNKTSIOONIDE TEOORIA EESTIKEELNE ÕPIK

E. Jürimäe

Viimasel kahel aastal on eestikeelne matemaatiline kirjandus täienenud üsna mitme sisuka teose võrra. Üheks neist on ENSV TA tegevliikme prof. Harald Kerese õpiku «Matemaatilise füüsika meetodid»[1] I osa, milles käsitletakse kompleksmuutuja funktsioonide teooriat. Käesolev raamat on välja kasvanud autori kunagistest loengutest füüsikaosakonna üliõpilastele Tartu Riiklikus Ülikoolis, mistõttu on silmas peetud eeskätt vastava teooria füüsika-alaseid rakendusi ning raamatu kasutajatena arvestatud esmajärjekorras füüsikuid. Et aga autor on lisanud hulgaliselt täiendavat materjali (see on eraldatud iga paragrahvi lõpposasse), siis on raamat hästi kasutatav ka matemaatikaosakonnas õppivatel üliõpilastel. Peale selle on prof. H. Kerese raamat osaliselt rakendatav õpikuna ka Tallinna Polütehnilises Instituudis, kus mõningal määral õpetatakse kompleksmuutuja funktsioonide teooriat. Eriti sobiv on õpik kaugõppijatele, sest autor on taotlenud just aine iseseisva omandamise eesmärki. Sel põhjusel on lisatud küllaltki arvukalt ülesandeid — kokku 372. Iseseisva õppimise seisukohalt on eriti hinnatav, et sisukorras on ülesannete puhul otseselt märgitud, millise teoreetilise osa kohta vastav ülesanne on mõeldud. Paljude ülesannete puhul on aga puuduseks vastuste mitteandmine.

Raamat algab kompleksarvude vaatlemisega. Ei anta küll kompleksarvu definitsiooni, kuid vaadeldakse geomeetrilist interpretatsiooni, tehteid kompleksarvudega ning nende tehete omadusi. On käsitletud ka mõningaid kompleksarvude geomeetriaga seotud küsimusi.

Kompleksmuutuja funktsiooni mõiste käsitlemisel on eriti detailselt peatutud kõikidel elementaarfunktsioonidel (§ 4), tutvustades põhjalikult nende geomeetrilisi omadusi. Samas tuuakse sisse ka Riemanni pinna mõiste. Kui autor siirdub funktsiooni diferentseerimisega seotud küsimuste juurde, siis mitmeste funktsioonide puhul vaatleb ta neid juba vastavatel Riemanni pindadel.

Kuigi vaadeldav raamat mitmetes kohtades oma käsitluselt oluliselt erineb teistest selletaolistest õpikutest, on siiski kõige enam metoodilist uudsust integraali mõiste käsitlemisel. Käesoleva artikli maht kahjuks ei võimalda selle metoodilise uuenduse sügavamat analüüsi. See nõuaks terve rea mõistete esitamist ning teiste käsitlustega võrdlemist.

Enne astmeridade vaatlemisele asumist on autor esitanud terve rea tulemusi arv- ja funktsionaalridade alalt. Nende hulgas leidub palju niisugust, mida meil kasutada olevais venekeelsetes õpikutes enamasti ei esine. Seetõttu pakub raamat mõningat lisa ka neile, kellel on olemas vastav venekeelne kirjandus. Sama kehtib ka vaadeldava raamatu kahe viimase paragrahvi kohta, kus vaadeldakse asümptootilisi ridu ning operaatorimeetodit.

Seni vaatlesime seda positiivset osa, mis kaasnes vaadeldava raamatu ilmumisega. On aga ka üks negatiivne moment. Nimelt on käesolev raamat esimene eestikeelne kompleksmuutuja teooria alane õpik, seega ka tähtis vastava eestikeelse terminoloogia juurutamisel. Aga just terminoloogia osas ei saa autoriga kõiges nõustada. Matemaatilisse terminoloogiasse on vastavad mõisted juurdunud mõnevõrra teistsugusena, kui need esinevad käesolevas raamatus. See on ilmselt tingitud sellest, et viimase kümne aasta jooksul on autor seisnud eemal matemaatikute kollektiivist. Aga just need viimased 10 aastat on olnud otsustavad uute matemaatiliste terminite loomisel.

Autor ei ole kasutanud üldiselt levinud terminit «ümbrus». Selle termini asemel kasutatakse vaadeldavas raamatus «ring», mis hoopiski vähem iseloomustab asja sisu. Koos «ringi» mõistega esineb autoril «naabruse» mõiste, mida aga üldiselt ei kasutata, ning mille järele pole nähtavasti ka tarvidust. On ju autori kasutatud

[1] Keres, H., Matemaatilise füüsika meetodid, I. Tln., 1964.

«naabrus» tegelikult «ümbrus», millesse vaadeldav punkt ei kuulu. Ka «koondusvusala» asemel kasutavad matemaatikud terminit «koonduvuspiirkond». Samuti on matemaatikute keelepruuki juurdunud terminid «iseärane punkt» ja «korrapärane osa» pooleldi võõrsõnadest koosnevate ühendite «singulaarne punkt» ja «regulaarosa» asemel, mida on kasutatud vaadeldavas õpikus. Soovitavaks ei saa ka pidada autori poolt kasutatud mõisteid «reaal-» ja «kompleksfunktsioon». Toodud näited ei ole ainsad. Raamatus leidub veel teisigi matemaatikute keelepruugile võõraid ütlemisi. Ühelt poolt tekitab see mõningat segadust terminoloogias, teiselt poolt aga viitab tungivale vajadusele matemaatika oskussõnastiku järele.

Oma materjali valikult ning esitusmeetodilt on kõnesolev raamat eestikeelsele matemaatilisele kirjandusele väärtuslik lisa. Eelnevas juba märkisime raamatu positiivset osa üliõpilaste seisukohalt. Ei saa aga ka märkimata jätta selle raamatu tähtsust ja vajalikkust meie täppisteadlastele, samuti matemaatikahuviliste ringile. Seetõttu võib arvata, et ilmunud 1000-eksemplarine tiraaž ostetakse ära kaunis lühikese ajaga. Jääb vaid loota, et raamatu esimesele osale järgneb peatselt teine.

MOSKVA MATEMAATIKASELTS 100-AASTANE

G. Vainikko

Moskva Matemaatikaselts, üks vanimaid maailmas, pühitses hiljuti 100 aasta juubelit.

Seltsi loomise initsiaatoriks oli Moskva Ülikooli erruläinud professor N. D. Brašman (1796—1866). Tema korteris toimuski 15. (27.) septembril 1864. a. seltsi asutamiskoosolek. Koosoleku protokollis on fikseeritud seltsi eesmärgina «vastastikune mõjustamine matemaatiliste teaduste viljelemisel». Kolmteist asutajaliiget jaotasid omavahel matemaatika valdkonnad, mille uuemaid edusamme nad kohustusid jälgima ja seltsi istungitel regulaarselt ette kandma. Seltsi esimeseseks presidendiks valiti N. D. Brašman.

Asutajaliikmete hulgas kohtame ka Tartu Ülikooli lõpetanud lätlast K. Petersoni (1828—1881), kelle uurimuste väärtus sai täies ulatuses selgeks alles hiljem ja keda nüüd õigustatult peetakse Moskva diferentsiaalgeomeetria koolkonna rajajaks. K. Peterson töötas Moskvas gümnaasiumiõpetajana ega ole kunagi istunud ülikooli õppetoolil, mistõttu tuleb eriti hinnata Moskva Matemaatikaseltsi osa tema innustamisel sügavateks uurimusteks.

Alates 1866. a. ilmub regulaarselt seltsi väljaanne «Математический сборник». Selles vene vanimas matemaatilises ajakirjas trükiti algul nii referaate ettekannetest seltsi istungeil kui ka originaalseid töid. Teiste seas avaldas siin rea silmapaistvaid töid tolle aja üks juhtivamaid matemaatikuid P. L. Tšebõšov. Seltsi liikmete arv ja originaalsete uurimistööde maht kasvas pidevalt.

Saja aastaga on selts läbi käinud pika arengutee. Möödunud sajandi lõpuks kristalliseerus välja kaks peamist uurimissuunda: peale eespool mainitud diferentsiaalgeomeetria arenes rakendusmatemaatika ja mehhaanika uurimissuund, mille suurima esindajana märgime N. J. Žukovskit (1847—1921). Käesoleva sajandi algul lisandus neile veel tugev hulga- ja funktsiooniteooria koolkond, mille loojateks olid D. F. Jegorov (1869—1931) ja N. N. Luzin (1883—1950). Peale Suurt Oktoobrirevolutsiooni kujunesid seltsis välja paljud uued uurimissuunad. Toome ära mõned peamistest koolkondadest koos nende suurimate esindajatega: tõenäosusteooria (A. N. Kolmogorov, V. I. Glivenko), topoloogia (P. S. Aleksandrov, L. S. Pontrjagin, P. S. Urõson), funktsionaalanalüüs (I. M. Gelfand), rühmateooria (O. J. Schmidt, A. G. Kuroš, A. I. Maltsev), arvuteooria (A. J. Hintšin), kompleksmuutuja funktsioonide teooria (I. I. Privalov), harilikud ja osatuletistega diferentsiaalvõrrandid (V. V. Stepanov, V. V. Nemõtski, I. G. Petrovski). Üheks kõige värskemaks, kuid juba väga viljakaks uurimissuunaks on optimaalsete protsesside matemaatiline teooria, mille rajajaks on akadeemik L. S. Pontrjagin (sünd. 1908. a.).

Heaks traditsiooniks, mis ühendab seltsi ajalugu saja aasta vältel, on piiritu teaduslik entusiasm, lai filosoofiline lähenemine matemaatika sõlmküsimustele ja suurte jõudude koondamine nende lahendamiseks. Filosoofilistes küsimustes on seltsi liikmed asunud selle loomisest saadik materialistlikel positsioonidel. Juba 1869. a. formuleeris seltsi tolleaegne president A. J. Davidov suurepäraselt matemaatika ja üldse teaduse osa ühiskonnas: «Kuigi igasuguste teadmiste lõppeesmärgiks on kasulik rakendamine, ei tohi teadust tõkestada nende raamidega. Kes oma teaduslikes uurimustes juhindub ainult praktilise kasu mõttest, ei sellel õnnestu oma püüdlusi näha eduga kroonituna. Teaduse ainsaks eesmärgiks võib olla loodusseaduste tundmaõppimine.»

Alates 1932. a. on Moskva Matemaatikaseltsi presidendiks akadeemik P. S. Aleksandrov (sünd. 1896. a.). Käesoleval ajal on selts saavutanud juhtiva koha maailma matemaatiliste ühingute hulgas, tema väljaanded «Математический сборник» ja «Успехи математических наук», mida toimetatakse koostöös NSVL Teaduste Akadeemiaga, on aga kõige autoriteetsemad matemaatilised ajakirjad kogu maailmas.

Kuid seltsi tegevus ei piirdu kaugeltki puhtteadusliku tööga, vaid ta teeb ka suurt üldhariduslikku tööd: arutab kesk- ja kõrgemate õppeasutuste õpikuid, peab populaarseid loenguid keskkoolide õpetajatele ja õpilastele, organiseerib matemaatikaolümpiaade keskkoolides, tegeleb matemaatika filosoofiliste probleemidega jne.

UUED AKADEEMIKUD NÕUKOGUDE MATEMAATIKUTE PEREST

Nõukogude teaduse arengus on tähtsateks organisatsioonilist laadi sündmusteks uute akadeemikute valimised NSVL Teaduste Akadeemiasse. Viimased sellised valimised toimusid 26. juunil 1964. a., mil akadeemia sai järjekordse täienduse 28 tegevliikme (akadeemiku) ja 51 korrespondentliikme näol.

Matemaatika alal valiti neli uut akadeemikut. Noorem neist on Ukraina TA Küberneetika Instituudi direktor Viktor Mihhailovitš Gluškov (sünd. 24. aug. 1923. a.). Tema kohta ilmus artikkel seoses talle 1964. a. Lenini preemia omistamisega (Matemaatika ja kaasaeg, III, lk. 73—74). Ülejäänud kolme uue akadeemiku elu ja tegevus, millest püüavad põgusa ülevaate anda järgnevad read, on olnud tihedalt seotud meile lähedase kangelaslinna Leningradiga.

Pikka aega oli Leningradi Riikliku Ülikooli rektoriks Aleksandr Danilovitš Aleksandrov. Sündinud 5. augustil 1912. a. Rjazani oblastis Volõni külas ja veetnud lapsepõlve Leningradis, lõpetas A. D. Aleksandrov 1933. a. Leningradi ülikooli teoreetilise füüsika erialal ning sooritas V. A. Foki juhendamisel rea sellealaseid uurimusi. Kuid B. N. Delone suunamisel kalduvad A. D. Aleksandrovi huvid matemaatikasse, eriti geomeetriasse. 1935 aastal kaitseb ta sel alal kandidaadiväitekirja, kaks aastat hiljem doktoriväitekirja ning saab samal aastal Leningradi ülikooli professoriks, 1938. aastast on ta ühtlasi NSVL TA Matemaatika Instituudi Leningradi osakonna vanem teaduslik töötaja. 1942. a. omistatakse talle geomeetria-alaste tööde eest riiklik preemia, 1946. a. aga valitakse NSVL TA korrespondentliikmeks. A. D. Aleksandrov on ka rahvusvahelise N. I. Lobatševski nim. preemia laureaat (1951). Aastatel 1952—1964 oli ta Leningradi ülikooli rektor. Pärast valimist akadeemikuks siirdus ta tööle Novosibirskisse, NSVL TA Siberi osakonna teaduslikku keskusse.

A. D. Aleksandrov on kaasaja suurimaid geomeetreid, kumerate ja üldisemate mitteregulaarsete pindade globaalse teooria looja. Tema töödes põimuvad elementaargeomeetria lihtsad kujundid (nagu näiteks kumerad hulktahukad, milledest ta on muide kirjutanud eraldi monograafia) kaasaja hulgateooria sügavaimate mõistete ja meetoditega. A. D. Aleksandrovil on

olulisi töid teoreetilise füüsika alalt. Ühtlasi on ta silmapaistev ühiskonnategelane, elavat tähelepanu on äratanud tema publitsistlikud artiklid. Lisaks kõigele on ta meisterportlanealpinist, ning isegi oma 50. sünnipäeva võttis vastu Pamiiris.

A. D. Aleksandrovil on olnud sidemeid ka Tartu ülikooliga. 1952. a. märtsis luges ta Tartus geomeetria aluste kursust, 1963. aastal aga viibis oma endise lähedase kolleegi, praeguse TRÜ rektori prof. F. Klementi 60. aasta juubeli tähistamisel.

Leningradi ülikooli kauaaegseks professoriks oli ka Leonid Vitaljevitš Kantorovitš, kes sündis 19. jaanuaril 1912. a. Leningradis arsti perekonnas, lõpetas 1930. aastal Leningradi ülikooli, mille õppejõuks sai 1932. a. Aastatel 1930—1939 töötas ta paralleelselt Leningradi Tööstusehitusinseneride Instituudis. 1934. a. on L. V. Kantorovitš juba professor, aasta hiljem aga omistati talle (ilma väitekirja kaitsmiseta) doktorikraad. Alates 1940. aastast töötab L. V. Kantorovitš NSVL TA Matemaatikainstituudi Leningradi osakonnas. Tööde eest funktsionaalanalüüsi valdkonnas omistati talle 1949. a. riiklik preemia, 1958. a. valiti ta NSVL TA korrespondentliikmeks. 1960. a. siirdus L. V. Kantorovitš tööle Novosibirskisse vastrajatud NSVL TA Siberi osakonna teaduslikku keskusse.

L. V. Kantorovitši põhilised tööd haaravad mitmekesist probleemistlikku reaalmuutuja funktsioonide teooriast, analüüsi lähendusmeetodite valdkonnast, funktsionaalanalüüsist (pooljärjestatud ruumid, lähendusmeetodid), elektronarvutite kasutamisest planeerimises majandusmatemaatikas jm. Tema uurimused on olnud teedrajavaiks ka eesti matemaatikute (Ü. Kaasik, E. Tamme, L. Võhandu jt.) viljeldud

funktsionaalanalüüsi lähendusmeetodite suunale. Kahel korral (1955 ja 1961) on L. V. Kantorovitš olnud külaliseks Tartu matemaatikutel.

Leningradi ülikooli kasvandik ja hilisem professor on samuti Juri Vladimirovitš Linnik. Sündinud 8. jaanuaril 1915. a. Ukrainas Belaja Tserkovi linnas tuntud optiku V. P. Linniku perekonnas, siirdus ta 1926. a. koos vanematega Leningradi, kus lõpetas ülikooli (1938) ja aspirantuuri (1940). Väitekirja kaitsmisel

1940. a. omistati talle kohe doktorikraad. Kolme aasta pärast on J. V. Linnik professor, 1944. aastal alustab tööd Leningradi ülikoolis. Uurimuste eest omistati J. V. Linnikule 1947. a. riiklik preemia. NSVL TA korrespondentliikmeks valiti ta 1953. a.

J. V. Linniku põhilised tööd kuuluvad arvuteooriasse, tõenäosusteooriasse, matemaatilisse statistikasse. Ta on uurinud naturaalarvude esitamist ruutvormidega ja andnud väga täpse hinnangu vähima algarvu jaoks suure vahega aritmeetilises jadas. Tõenäosusteoorias täpsustas ta Ljapunovi teoreemiga seotud asümptootilise valemi jääkliiget ning uuris mittehomogeenseid Markovi ahelaid.

„Matemaatika ja kaasaja" keelenurk

Paljud «Matemaatika ja kaasaja» lugejad on avaldanud soovi näha meie väljaande veergudel ka matemaatilise terminoloogia alaseid kirjutisi. Vastuseks sellele soovile avame käesolevas numbris «Matemaatika ja kaasaja» keelenurga.

Loodetavasti saab alljärgnev J. Gabovitši probleemitihe artikkel rohkete vastukajade osaliseks ning avab terminoloogia-alase diskussiooni, milleks meeleldi pakume ruumi oma väljaande lehekülgedel.

Ühtlasi märgiksime siin veel mõningaid probleeme, mille lahendamisel sooviksime lugejate abi arvamuste ning ettepanekute näol.

Eesti keeles puudub sõna universaalse programmjuhtimisega arvuti jaoks (heakõlaline ja juba levikuosaliseks saanud «arvuti» on sünonüümiks üldiselt «arvutusmasinale»). Palume matemaatikute ja keelemeeste ettepanekuid selle terminoloogiaalase lünga likvideerimiseks!

Teine, terminoloogiaga lähedalt seotud probleem puudutab matemaatikute nimede transliteratsiooni. Tooksime siin vaid ühe näite: tuntud vene matemaatik Tšebõšov on seni eestikeelses kirjanduses esinenud peaasjalikult kujul «Tšebõšev» — vastavalt venekeelsele kirjutusviisile «Чебышев», kuigi hääldamise seisukohalt (rõhk viimasel silbil) oleks õigem esimesena märgitud eestikeelne kirjaviis.

Lugejapoolsed arvamused ja ettepanekud palume saata toimetusse aadressil:

Tartu, V. Kingissepa 16,
TRÜ algebra ja geomeetria kateeder.
«Matemaatika ja kaasaja» toimetus.

MATEMAATILISE TERMINOLOOGIA PROBLEEME

Jakob Gabovitš

Mõne kuu pärast ilmub EPA rotaprindil trükituna H. Espenbergi ja allakirjutanu toimetamisel «Väike eesti-vene ja vene-eesti matemaatika oskussõnastik».

Nimetatud teose hädavajalikkus venekeelse matemaatilise kirjanduse lugemisel, venekeelsete teaduslike artiklite kirjutamisel, tõlkimisel jne. ei vaja tõestamist. Tahaksin siin aga puudutada veel üht eesmärki, mille seadsid endale sõnastiku koostajad (Autorite kollektiivi kuuluvad H. Espenberg, J. Gabovitš, H. Merilo, A. Humbel, E. Tiit ja H. Vallner) — nimelt eestikeelse matemaatilise terminoloogia ühtlustamist.

Terminoloogia ühtlustamine ei tähenda sugugi mitte alati ja igal juhul kahest käibelolevast terminist ühe ainulubatavaks tunnistamist (näiteks on tarvitamiseks sobivad niihästi *kaksliige* ja *hulkliige* kui ka *binoom* ja *polünoom*). Paljudel juhtudel püüdsid autorid aga tarbetuna näivat dualismi vältida ning jätsid välja halvema kõlaga, võõrapärasema ning vähemlevinud paralleelvormi. Toome võrdluseks mõned selliseid termineid:

Soovitav termin	Ebasoovitav sünonüüm
suvaline	*meelevaldne*
sõltuma	*olenema*
rööpkülik	*parallelogramm*
ümbermõõt	*perimeeter*
ristsirge	*perpendikulaar*
võrdeline	*proportsionaalne*
tasand	*tasapind*
fookus	*tulipunkt*
keskpunkt	*tsenter*
joontrapets	*kõverjooneline trapets*
bisektortasand	*nurgapoolitaja tasand*

Huvitav on märkida, et parallelism terminoloogias on osaliselt seotud nii erialaliste kui ka «geograafiliste» erinevustega.

Nii näiteks kasutavad matemaatikud sõna *rühm*, füüsikud aga sama mõiste jaoks sõna *grupp*. Matemaatikud räägivad *rajaülesandest* ja *rajatingimustest* (analoogiliselt *integreerimisraja* ja *rajajoonega*), füüsikud aga *ääreülesandest* ja *ääretingimustest*.

«Geograafilised» erinevused matemaatilises terminoloogias ilmnevad eeskätt Tartu ja Tallinna (TPI ja eriti TPedI õppejõudude ning nende õpilaste) oskussõnade pruugis. Nii kasutatakse Tallinnas sõnu *järjend*, *inteegrima* ja *diferentsima*, Tartus vastavalt *jada*, *integreerima* ja *diferentseerima*. Viimase sõna «Tallinnavorm» tekitab, muide, tõsiseid arusaamatusi: diferentsimiseks on sobivam nimetada funktsiooni $y = f(x)$ diferentsi $\Delta y = f(x+h) - f(x)$ leidmist.

Viimase mõistega seoses veel üks küsimus: sõna «diferentseerima» tähendab eesti keeles niihästi funktsiooni tuletise kui ka diferentsiaali leidmist. Otstarbekas oleks jätta nimetatud oskussõna üksnes viimase tehte vasteks, leides esimese jaoks uue termini (näiteks inglise ja prantsuse keelest tuletatud *deriveerima*).

Raskusi terminoloogias esineb mitte ainult uute matemaatiliste mõistete puhul, vaid mõnikord ka «klassikaliste» ja õppetöös sageli tarvitatavate mõistete korral. Nii näiteks on palju vaidlusi tekitanud küsimus, kuidas tõlkida eesti keelde *раскрытие неопределенности*. Ilmselt on sageli kasutatav termin *määramatuse avamine* ebasobiv. Pärast asja tõsist arutamist otsustas sõnastiku autorite kollektiiv termini *määramatuse kõrvaldamine* kasuks. Loodame, et viimane rahuldab kõiki «tarbijaid»!

Teise näitena mainiksime geomeetrilist keha, mis kannab vene keeles nimetust *цилиндрический брус* (ülalt kõverpinnaga piiratud silindritaoline keha, mille ruumala avaldub kahekordse integraalina). Me nimetasime selle keha *pindsilindriks* analoogia põhjal *joontrapetsiga*. Olgu tähendatud, et õppetöös Eesti Põllumajanduse Akadeemias on see termin juba ammu «käibel» ja õigustab ennast nähtavasti.

Nimetatud sõnastik käsitleb ainult n.-ö. «klassikalise» matemaatika alast sõnavara. Praegu on aga eriti aktuaalne spetsiaalse küberneetilise oskussõnastiku koostamine, mis käsitleks ka matemaatilise loogika, majandusmatemaatika, biomeetria, semiootika ja teiste sugulusharude terminoloogiat. Areneb ju tänapäeval küberneetika eriti kiiresti ja sellepärast on siin terminoloogia probleemid väga teravad. Toon ühe näite. Dots. Ü. Kaasiku ettepanekul tõlgitakse *линейное программирование* eesti keelde *lineaarne planeerimine*. Viimane termin osutus nii sisuliselt kui ka vormilt väga õnnestunuks ja leidis meie vabariigis laialdast levikut. Kuid vahetevahel esineb ka sõnasõnalist tõlget *lineaarne programmeerimine*. Viimane termin on ilmselt ebasobiv, sest *programmeerimine* tähendab arvutusmatemaatikas hoopis programmi koostamist arvuti jaoks.

Millised terminoloogia-alased ülesanded seisavad veel Eesti NSV matemaatikute ees? Terminoloogia ühtlustamiseks, fikseerimiseks ja täieliku matemaatika oskussõnastiku koostamiseks tuleks meie arvates võtta päevakorda kompetentse vabariikliku komisjoni loomine, kuhu kuuluksid nii Tallinna kui ka Tartu matemaatikud. Niisuguse komisjoni loomine on hädavajalik sellepärast, et kiiresti arenevas matemaatikas tuleb järjest juurde uusi mõisteid, mis vajavad uusi termineid. Kui uute eestikeelsete terminite loomine peaks toimuma «isevoolu» teel, siis võib tulevikus tekkida olukord, kus Tartu ja Tallinna matemaatikud üksteist enam ei mõista.

VASTUSEKS ÜHELE MUHEDALE KUID VAHEDALE REAGEERINGULE

O. Rünk

Käesoleva väljaande kolmandat numbrit sirvides märkasin oma suureks üllatuseks, et minu tagasihoidlik mõttemõlgutus «Arutlusi pöördteoreemi mõiste ümber» (vt. Matemaatika metoodiliste artiklite kogumik. II, Tln., 1964) on äratanud dots. Ü. Kaasiku tähelepanu [1]. Selle omapärase reageeringu tihedate ridade vahelt paistab, et lool on mingi vigurlik vint sees, aga kas selle vindi «spin» on hüva- või kurakäeline, see kohe silma ei hakka. Võimalike libastumiste vältimiseks otsustasin vastuse kirjutada kahes variandis: 1) oletusel, et loos peituva vintviguri spin (s) on hüvakuline (positiivne); 2) et eelmine oletus kui koband on liband [2].

I variant ($s>0$)

Sm. Kaasiku kahetsus, et allakirjutanu on jäänud peatuma n.-ö. poolele teele, pole ilmselt siiras, sest vastasel korral ei oleks tal arvatavasti leidunud aega ja huvi i s e teekonda jätkata — kuni sihtkohta (kas või sohu) väljajõudmiseni. Kas alati just lõpuni välja minema p e a b, on küsimus omaette. Kui mingist punktist peale edasiminek pole otstarbekohane, siis see ei tähenda veel, et tagasiminek on paratamatu. Aga tagasi minna muidugi võib, isegi lõpuni. Võiks näiteks eesti keeles rahulikult korraga kriipsu peale tõmmata terminitele *aksioom*, *teoreem*, *lemma* ja *pöördteoreem* ning nende asemel kasutada (saksa keele eeskujul) liitsõnu, kus põhisõnana esineb ikka üldmõiste *lause* (mis tähendab esmajoones vormi), selles vormis peituvat sisu aga selgitaks mingi eespoolne komponent: *põhilause* (Grundsatz), *õppelause* (Lehrsatz), *abilause* (Hilfssatz), *pöördlause* (Umkehrsatz). On selge, et terminoloogia muutuks sellega mõnevõrra lihtsamaks (süsteemikindlamaks), keel aga vaesemaks, kohmakamaks.

Uue termini suhtes on igal keeletarvitajal muidugi õigus asuda kas pooldavale või eitavale seisukohale. Minule näiteks meeldivad väga dots. Kaasiku äsjaloodud uudisterminid *pöörand* ja *liband*, võib-olla sellepärast, et need on tuletatud minu oma sõnast *libaspöörand* — lihtsa pooleks jagamise teel. Säherdune tuletamise viis muidugi õigustaks loorberitegi pooleks jagamist; aga mina olen rahul ka väiksema poolega, kui dots. Kaasik lepib suuremaga. Nii või teisiti — sõnadele *pöörand* ja *liband* võib ennustada teatud tulevikku eesti keeles.

Mis puutub dots. Kaasiku loodud ja propageeritud uudisterminisse *koband*, siis ma pean tunnistama, et see mulle põrmugi ei meeldi. Ka loorberid jätaksin siin tervenisti temale, kuigi olen kindel, et tema ilma minu poolt antud välise tõuketa vaevalt oleks säärase tähelepanuväärse keelelise loominguga toime tulnud. Julgen kahelda ka *kobandi* nii laiahaardelises rakendusväljas, nagu seda nähakse ette nimetatud reageeringus. Kui mõne õpetatud mehe loomingulises töös ehk esinebki mõnikord tõelist kobamist (s. t. p i m e s i kobamist), siis enamikul juhtumeil on tunnetusprotsessis siiski tegemist j u h i t u d kobamisega (intuitsiooniga). Seepärast pole *koband* võistlusvõimeline sõnadega *oletus* ja *hüpotees* tunnetusprotsessis esineva p r o v i s o o r s e o t s u s t u s e märkimiseks. Hoopiski ei tohiks *kobandil* kohta olla a m m u s t a e g a ä r a p r o o v i t u d tõdede publitseerimisel sõnas ja kirjas. Vaevalt küll leidub nii veidrat õpetlast, kes tõttaks midagi teistele edasi andma n.-ö. kobandifaasis. Vähemalt reaalteaduste esindajail pole säärast kalduvust kunagi täheldatud! Ei tohi unustada, et loenguis ja raamatuis tegeleme me alati tuntud tõdede t a a s l o o m i s e g a, mitte aga tundmatute nähtuste maailmas k o b a m i s e g a. Heuristilise õppemeetodi rakendamisel asetame me intuitiivse kobamise olukorda ju ainult õ p i l a s e, õpetajale enesele pole see olukord tarvilik. Niisiis on kobamine õpetami-

[1] K a a s i k, Ü., Mõtteid ühe artikli lugemisel. — Matemaatika ja kaasaeg, III. Trt, 1964, lk. 78—79.

[2] Kasutatud on dots. Ü. Kaasiku soovitatud uusi termineid.

sel vaid teatav didaktilis-metoodiline võte; järelikult meie senist käibekeelt tõestuskäikude esitamisel hoopiski pole tarvis revideerimisele võtta.

II variant ($s < 0$)

Püüd midagi tõestada meetodil *reductio ad absurdum*, pealegi stiililt lõpuni tõsiselt väljapeetuna, on osutunud lugejaile alati teretulnud meelelahutuseks. Arvan, et selgi korral said lugejad oma närvikavale anda ajutist lõdvendust mõne muige või naeratuse kaudu, mis see tõestus neis esile kutsuda suutis. See kõik korvab tuhandekordselt ainsa kannatadasaanu tühise nördimuse.

Sellest, et dots. Kaasik oma artiklis «Mõtteid ühe artikli lugemisel» täiesti mööda läks selle «ühe artikli» tuumküsimusest, kipuksin järeldama, et see tuum oli tema meelest nii kesine, et see mingeid mõtteid ei äratanud. Rõõmustaksin siiralt, kui õnnestuks tõestada, et minu seesugune järeldus kui koband on liband.

„Matemaatika ja kaasaja" kirjakast

Viimasel ajal on «Matemaatika ja kaasaja» toimetusse saabunud rohkesti kirju — niihästi soove tellimiseks ja pretensioone väljaande vähese kättesaadavuse ning väikese tiraaži osas, kui ka ankeedivastuseid. Et mitmed saabunud kirjadest ja ankeetidest sisaldavad laiemaid lugejate hulki huvitavaid probleeme, siis vastame neile osaliselt enne kokkuvõtte tegemist kõigist laekunud ankeetidest.

Kõige sisukamad vastused on antud küsimusele: «Milliseid küsimusi käsitlevaid materjale Te sooviksite näha järgmises numbris?». Soove ja ettepanekuid on olnud peaaegu igal ankeedivastajal ning kõik need rõõmustavad toimetust.

Osutus, et suur osa materjalidest, mille vastu tunti huvi, oli juba planeeritud «Matemaatika ja kaasaja» käesoleva aasta numbritesse. Nii on lugejani jõudnud artikkel Fermat' kohta, samuti konstruktsioonidest sirkli ja joonlauaga; lähemates numbrites ilmub veel artikleid Einsteinist, geomeetria probleemidest jne. Suurmeeste elulugusid koos ülevaatega teaduslikest töödest on kavas esitada vastavalt nende tähtpäevadele; sellega avaneb lugejal võimalus tutvuda ka matemaatika ajalooga väljaspool Eestit. Ühtlasi ilmub mõningaid temaatilisi artikleid (näiteks järgmises numbris artikkel logaritmide ajaloost) vastuseks soovile käsitleda ajaloorubriigis koolikursusest tuttavate mõistete kujunemist.

Paljud lugejad soovisid teada, missugused on kaasaja matemaatika sõlmprobleemid, viimase aja tähtsamad avastused. Sellist ülevaateartiklit meil seni ei ole ilmunud (mõnevõrra sellelaadiline oli vast ainult prof. G. Kangro artikkel eelmises numbris) ning seda peamiselt raskuste tõttu, mida niisuguse artikli kirjutamine valmistab. Esiteks, on ju teada, et igasuguste avastuste tähtsust hindab alles aeg, seega on «momendi tähtsaima avastuse» määramine mõnes suhtes võimatu. Teisest küljest on kaasaegne matemaatika niivõrd abstraktne, et selle uusimate saavutuste kirjeldamine elementaarsete vahenditega ei ole tavaliselt teostatav. Lisaks sellele toimub matemaatika areng kaasajal nii laiahaardeliselt, et isegi olulisemate uurimissuundade loetelu (ilma lähema kirjeldamiseta) veniks kaunis pikale. Kõige selle tõttu ei olegi toimetusel õnnestunud seni leida nimetatud küsimuste valgustamiseks sobivat materjali, kuid me loodame siiski seda — vähemalt osaliseltki — edaspidi teha.

Teine põhjendatud pretensioon toimetusele on — 8-klassilisele koolile sobiva materjali puudumine. Kuna selliseid soove on rohkesti laekunud, esitame juba käesolevas numbris mõned ülesanded ka 8-klassilistele koolidele. Edaspidi on kavas tuua rubriigis «Täiendusi koolimatemaatikale» artikleid ka keskmise kooliea jaoks.

Mis puutub pretensioonidesse kogumike raske kättesaadavuse kohta, siis peab ütlema, et väljaande tiraaž on pidevalt kasvanud ning kui ilmneb, et ka praegusest ei piisa, on mõeldav tiraaži edasine suurendamine. Palume ainult lugejaid kindlasti toimetust informeerida väljaande arvukuse ebapiisavusest, vastasel korral ei ole meil alust tiraaži suurendamiseks.

Veel üks ettepanek, mis esitati meile, kuid mille me oleme sunnitud andma edasi oma lugejatele: nimelt soovitakse näha «Päevakaja» lehekülgedel ülevaateid matemaatikaringide tegevusest vabariigi koolides. Trükiksime vastavaid teateid meelsasti, kuid selleks vajame kaastööd. Lugejaid huvitavad veel vabariigi paremate matemaatikaõpetajate metoodilist laadi kogemused, juubelid, matemaatikaõhtud koolides ja muu, mis puutub vabariigi matemaatikaelusse. Ka selles loodame oma kaastööliste abile.

Jääme ootama edaspidigi rohkesti kirju, sealhulgas huvitavat kaastööd.

Kroonika

MEIE KÜLALISI

Käesoleva aasta veebruaris külastas Tartu Riiklikku Ülikooli matemaatikaprofessor Vladimir Andrejevitš Uspenski, kes esines loengutsükliga «Matemaatika humanitaarteadlastele».

V. A. Uspenski näol on meil tegemist laia profiiliga teadlasega. Ta töötab peamiselt matemaatilise loogika, algoritmiteooria ja matemaatilise lingvistika alal (lugedes vastavaid kursusi ning juhendades seminare Moskva Riiklikus Ülikoolis). Samaaegselt on ta tuntud väljapaistva semiootikaspetsialistina (avas muuseas Kääriku suvekooli ettekandega semiootika üldprobleemidest). Tema töid on tõlgitud inglise, saksa, jaapani, tšehhi, poola ja hiina keelde.

Loengukursuse «Matemaatika humanitaarteadlastele» organiseerijaks oli vene kirjanduse kateeder. Selle omapärase sarja eesmärk polnud mitte niivõrd rakendusmatemaatika tutvustamine, samuti mitte ka ülevaate andmine matemaatika probleemidest, kuivõrd just range ja loogilise mõtlemisviisi omandamine.

Lektor alustas põhitõdede kordamisega, minnes järk-järgult üle keerulisemate matemaatiliste distsipliinide käsitlemisele. Nii tegeldi näiteks hulgateooriaga, programmeerimisega, aksiomaatilise meetodiga jm. Kursust aitasid elavamaks muuta ka «kodused» ülesanded, mis leidsid innustunud vastuvõttu.

V. A. Uspenski leidis kuulajatega kiiresti kontakti, loengud möödusid täisauditooriumi ees (kuulajate hulgas oli humanitaarala inimeste kõrval ka matemaatikuid).

Huviga oodatakse Tartu humanitaarteadlaste hulgas järgmist kohtumist matemaatikadoktor V. A. Uspenskiga.

E. Heller

UUSI TEADUSTE KANDIDAATE

22. märtsil 1965. a. kaitses oma väitekirja «Loogiliste võrrandite lahendamine» Eesti NSV TA Füüsika ja Astronoomia Instituudi noorem teaduslik töötaja **Ants Tauts.** Tööd juhendas füüsika-matemaatikakandidaat

dots. Ü. Kaasik, oponeerisid füüsika-matemaatikadoktor prof. B. Trahtenbrot (Novosibirskist) ja füüsika-matemaatikakandidaat dots. I. Kull.

Väitekirjas vaadeldakse loogilisi võrrandeid, s. o. loogilisi valemeid, mis sisaldavad tundmatuks loetud sümboleid. Lahendiks loetakse valemite süsteemi, mille paigutamine tundmatute asemele muudab võrrandi samaselt tõeseks valemiks. Väitekirjas esitatakse lõplikud algoritmid loogiliste võrrandite lahendamiseks lausearvutuses ja ühekohalises predikaatarvutuses ning iteratsioonimeetod loogiliste võrrandite lahendamiseks üldjuhul.

TRÜ Füüsika-Matemaatikateaduskonna nõukogu otsustas A. Tautsile omistada füüsika-matemaatikakandidaadi kraadi.

Ants Tauts on sündinud Tõrvas 22. juulil 1936. a. Ta lõpetas 1955. a. Rapla Keskkooli, kus tema matemaatikaõpetajaks oli A. Must. Tartu Riikliku Ülikooli matemaatikaosakonna lõpetas A. Tauts 1960. aastal.

UUSI ÜLIKOOLI LÕPETANUD MATEMAATIKUID

23. ja 24. detsembril 1964. aastal kaitsti Tartu Riikliku Ülikooli matemaatikaosakonnas järgmised diplomitööd:

1. K a r u, Ove. Tootmisõpetuse sisu ja ülesanded matemaatikaklassides. (Juh. dots. O. Prinits.)
2. L i i v a, Taivo. Ringsilindrilise kooriku arvutamisest impulsskoormisele. (Juh. dots. U. Nigul.)
3. S a k k o v, Elmar-Oskar. Ristkülikukujulise plaadi pärastkriitilise staadiumi analüüs silindrilisel läbipaindel. (Juh. prof. Ü. Lepik.)
4. V a i n i k k o, Ivi. Mõningaid nõtkete ümmarguste plaatide paindeülesandeid. (Juh. prof. Ü. Lepik.)

Nimetatud lõpetajatele anti mehhaaniku kvalifikatsioon.

5. H e n n o, Jaak. Poolrühmad ja moodulid. (Juh. dots. kt. J. Hion.)
6. K o l d e, Rein. Einsteini ruumide holonoomiarühmadest. (Juh. dots. Ü. Lumiste.)
7. P a r r i n g, Aivo. Elektromagnetiliste ruumide geomeetriast. (Juh. dots. Ü. Lumiste.)
8. T ü r n p u, Heino. Fourier' ridade absoluutne summeeruvus. (Juh. prof. G. Kangro.)

Nimetatud lõpetajatele anti matemaatiku kvalifikatsioon.

9. I h e r, Ain. Vähimruutude meetodi kasutamine. (Juh. dots. Ü. Kaasik.)
10. K a r m a, Otto. Järjekorrateooriast. (Juh. dots. Ü. Kaasik.)
11. K a r o l i n, Malle. Faktoranalüüsi programmeerimine. (Juh. van.-õp. E. Tiit.)
12. K i h o, Jüri. Keemilise informatsiooni töötlemine. (Juh. dots. V. Palm.)
13. R e i s n e r, Mauno. Lineaarse planeerimisülesande täisarvulise lahendamise programm elektronarvutile «Minsk-2». (Juh. A. Jägel.)
14. S a r v, Enn. Dantzig-Wolfe'i meetodi standardprogramm. (Juh. dots. Ü. Kaasik.)
15. S e p a n d i, Anne. Automaatsest «luuletamisest». (Juh. dots. Ü. Kaasik.)

Peale nende lõpetasid riigieksamitega matemaatikaosakonna

16. A d a m s o n, Ille,
17. K i i s, Hele,

kes said (samuti kui ka viimati loetletud diplomandid) arvutusmatemaatiku kvalifikatsiooni.

29. oktoobril 1964. a. omistati pärast riigieksamite sooritamist keskkooli matemaatikaõpetaja kvalifikatsioon TRÜ Kaugõppe Pedagoogilise Instituudi matemaatikaharu järgmistele lõpetajatele:

1. A n d r a, Linda,
2. R i i e t, Marie,
3. K i m m e l, Ruth,
4. K ü t t, Heino,
5. V a r e m a, Lehta-Helene.

ÜLELIIDULINE ARVUTUSMATEMAATIKA KONVERENTS

Viimasel aastakümnel on arvutusmatemaatika hoogsalt arenenud, põimudes üha enam teiste matemaatika harudega, ammutades neist probleeme ja meetodeid. See areng on tihedalt seotud elektronarvutitega varustatud arvutuskeskuste loomisega, kus lahendatakse täppisteadustest, tehnikast, majandusest jne. pärinevaid arvutuslikke probleeme matemaatikute otsesel juhtimisel.

Paljudes meie maa keskustes töötavate arvutusmatemaatikute töö koordineerimisel ja suunamisel etendavad olulist osa M. V. Lomonossovi nimelise Moskva Riikliku Ülikooli juures peetavad üleliidulised arvutusmatemaatika konverentsid. Eelmine selline ulatuslik nõupidamine toimus viie aasta eest 16.—21. novembrini 1959. a., millest võttis osa üle 2500 matemaatiku ning esitati enam kui 200 ettekannet.

Käesoleval aastal 22.—26. jaanuarini Moskvas toimunud arvutusmatemaatika konverentsil oli osavõtjate arvu vähendamise eesmärgil mõnevõrra piiratud temaatikat, jättes välja arvutustehnika, programmeerimise ja matemaatilise loogikaga seotud küsimused. Sellele vaatamata oli osavõtjaid rohkem kui 2000 ja esitati üle 300 ettekande. Meie vabariigi matemaatikutest võtsid konverentsi tööst osa A. Jägel, L. Kivistik, E. Tamme, G. Vainikko ja M. Viitso TRÜ-st, R. Jürgenson ja H. Joamets Füüsika ja Astronoomia Instituudist, I. Petersen, T. Tobias ja S. Ulm Küberneetika Instituudist ning M. Levin TPI-st. Ettekannetega esinesid A. Jägel, G. Vainikko, R. Jürgenson, I. Petersen, T. Tobias ja S. Ulm. Kõigi ettekannete kestuseks oli ette nähtud 15 minutit.

Konverents andis ülevaate väga paljudel aladel arvutusmeetodite väljatöötamise ja uurimise osas teostatavast tööst. Istungid toimusid paralleelselt kaheksas sektsioonis:

1. algebra arvutusmeetodid, kvadratuurvalemid ja funktsioonide lähendamine;
2. harilikud diferentsiaalvõrrandid;
3. osatuletistega diferentsiaalvõrrandid;
4. integraal- ja funktsionaalvõrrandid;
5. optimiseerimise ülesanded;
6. mittekorrektselt püstitatud ülesanded;
7. mehhaanika ülesanded;
8. füüsika ja keemia ülesanded.

Esinejate hulgas kohtasime kõrvuti arvutusmatemaatika suundade juhtivate jõududega arvukalt noori matemaatikuid. Ettekannetele järgnesid sageli elavad ja sisukad mõttevahetused.

Lõpp-plenaaristungil kõnelesid S. L. Sobolev ja A. N. Tihhonov tänapäeva arvutusmatemaatika mõningatest iseloomulikest joontest. Konverentsil vastuvõetud otsuses juhiti tähelepanu vajadusele tõhustada informatsiooni vahetamist arvutusmatemaatikas teostatavate tööde kohta ning organiseerida suvekoole arvutusmatemaatika probleemide alal.

E. Tamme

OPTIMAALSE JUHTIMISE ALANE SEMINAR TA KÜBERNEETIKA INSTITUUDIS

Küberneetika Instituudi automaatikasektori teaduslikud töötajad R. Tavast, Ü. Jaaksoo ja L. Jamštšikova tegelevad alates möödunud aasta algusest Kiviõli Põlevkivikeemia Kombinaadi formaliinitsehhi jaoks optimaalsete juhtimisalgoritmide väljatöötamisega. Ühtlasi uuris R. Tavast maksimumprintsiibi rakendamise võimalusi mõningate metallurgiaprotsesside juhtimisele. Et tihendada sidet tehnoloogiliste optimaalse juhtimisega tegelevate töögruppide ja arvutusmatemaatikute vahel, selleks organiseeriti instituudis 1965. a. kevadtalvel seminar, millel peeti järgmised ettekanded:

S. Ulm: Bellmani optimaalsusprintsiip. Dünaamiline programmeerimine ja variatsioonarvutus. Dünaamiline programmeerimine ja optimaalse juhtimise ülesanded.

T. Tobias: Pontrjagini maksimumprintsiip.

L. Jamštšikova: Optimaalse juhtimise ülesannete numbrilisi lahendusmeetodeid.

E. Leinemann: Aeg-optimaalsed juhtimisülesanded.

V. Arro: Ühest aeg-optimaalse juhtimisülesande ligikaudsest lahendusmeetodist.

R. Tavast: Maksimumprintsiibi rakendusi tehnoloogiliste protsesside juhtimisel.

I. Keis: Klassikaline mehhaanika ja optimaalse juhtimise probleemide seostest.

J. Kajari: Dünaamilise programmeerimise rakendamisest matemaatilise ökonoomika variantsioonprobleemidele.

S. Ulm

Bibliograafia

Eesti NSV-s ilmunud matemaatika-alase kirjanduse nimestik

November-detsember 1964

(Koostanud E. Annus)

RAAMATUD

Automaatregulaatorite valik ja häälestamine. (Arvestusmeetodid.) Koostanud ja tõlkinud H. L i n d. Tln., «Eesti Raamat», 1964. 164 lk.

L u h t, L. **Arvutusmeetodid. II.** Trt,, 1964. 216 lk. (Tartu Riiklik Ülikool.) — Trükitud rotaprindil 650 eks.

Т а у т с, А. **Решение логических уравнений.** Автореферат. Тарту, 1964. 8 с. (Тартуский гос. ун-т.)

PERIOODIKAS ILMUNUD

ARTIKLID

Eesti NSV Teaduste Akadeemia Toimetised. Füüsika-, Matemaatika- ja tehnikateaduste seeria. Tln., 1964.

Nr. 4. Matemaatika-alased artiklid (vene k., resümeed eesti ja inglise k.):

* *

H. A b e n. Keerukate optiliste süsteemide parameetrite eksperimentaalsest määramisest. — H. S a l u m. Kodeering numbriliste skeemide kirjeldamiseks ja modelleerimiseks. — M. K o t l i. Sisendkeel aritmeetiliste ülesannete automaatseks programmeerimiseks. — P. H a n k o. Loogiliste skeemide sünteesimise algoritmidest. — A. J ä g e l. Maksimumfunktsiooni põhiomadused ühe klassi parameetrilise lineaarse programmeerimise probleemi puhul. — F. N o v o d. Järjestikkompensatsiooniseadme põhiparameetrite määramisest.

Matemaatika ja kaasaeg. Abimaterjale matemaatika õpetajatele ja õppijatele. IV. Trt., 1964. 111 lk. (Tartu Riiklik Ülikool.)

Sisu: Professor Hermann Jaakson (nekroloog). — J. G a b o v i t š. Nelja värvi probleem. — Ü. K a a s i k. Elektronarvutid ja programmeerimine. — A. K o l m o g o r o v. Automaadid ja elu. — A. J ä g e l. Operatsioonianalüüs. — M. L e v i n. Teenindusobjekti optimaalsest paigutusest elamukvartalis. — Tuhmunud käsikirjad. — E. T a m m e. Positsioonilised arvusüsteemid. — Arvudest ja arvutamisest. — L. K i v i s t i k. Algarvud. — E. S a r v. Täisarvude jaguvustunnuseid. — Jevgeni G a b o v i t š. Kuues rahvusvaheline matemaatikaolümpiaad. — Vanaaegseid ülesandeid. — Ü. L u m i s t e. Lehekülgi matemaatika ajaloost Eestis. — E. L a u g a s t e. Arvud eesti rahvaluules. — E. T i i t. Uus täiendus ülikooli perele. — J. G a b o v i t š. Teaduse ajaloolaste kokkutulek. — E. T i i t. Loodusuurijate päev Käärikul. — I. K u l l. Ekstralingvistiliste modelleerivate süsteemide alane suvekool Käärikul. — Kroonika. — Bibliograafia. — Ülesandeid.

L i n t s, A. Algklasside matemaatika õpetamise probleeme. — «Nõukogude Kool», 1964, nr. 11, lk. 859—863.

Loodusuurijate Seltsi vanim tegevliige 70-aastane. (G. Rägo). — Loodusuurijate Seltsi Aastaraamat, 56 kd., 1964. lk. 5—6.

Ülesandeid

Alljärgnevate ülesannete lahendused palume saata aadressil: Tartu, Eesti Põllumajanduse Akadeemia, matemaatika kateeder, H. Espenberg. Seejuures varustage ümbrik märgusõnaga «Ülesanded». Lahenduste saatmisel pole nõutav, et oleksid lahendatud kõik ülesanded, võib piirduda ka üksikute väljavalitud ülesannete lahendamisega.

Toimetus premeerib 1965. aastal (numbrites VI—IX) ilmuvate ülesannete parimaid lahendajaid matemaatilise kirjanduse ning «Matemaatika ja kaasaja» eksemplaridega. Lahendusi võib saata kuni ülejärgmise numbri ilmumiseni; pärast seda arvestatakse ainult originaalseid, avaldatutest oluliselt erinevaid lahendusi. Arvestamisele tulevad ka väljaspool ülesannete rubriiki esitatud ülesannete lahendused ja avaldatud paradokside selgitused.

Eraldi hinnatakse kooliõpilaste lahendusi, parimad tulemused võetakse arvesse täppisteaduste olümpiaadi lõppvoorule kutsumisel ja ülikooli sisseastumisel.

Ülesandeid elementaarmatemaatikast[1]

I

1. Tõestada, et iga kolmest suurema algarvu ruudu jagamisel 24-ga tekib jääk 1.

2. Tõestada, et $11^{10^{1963}} - 1$ jagub 10^{1964}-ga.

3. Inimese vanus 1962. aastal võrdus tema sünniaasta numbrite summaga. Mis aastal see inimene sündis?

4. Lahendada võrrandisüsteem

$$\frac{xy}{x+y} = 1 - z,$$

$$\frac{yz}{y+z} = 2 - x,$$

$$\frac{xz}{z+x} = 2 - y.$$

5. Konstrueerida trapets tema ühe aluse, diagonaalide ning diagonaalidevahelise nurga järgi.

6. Tõestada, et mistahes nelinurga külgede keskpunktid on teatava rööpküliku tippudeks.

(Ülesanded on võetud 1963. a. matemaatikaolümpiaadidel esitatute hulgast).

II

7. Leida kolmnurga ABC nurgad, kui

$$\frac{a^3 + b^3 - c^3}{a + b - c} = c^2 \text{ ja } \sin\alpha \sin\beta = \frac{3}{4}.$$

---

[1] I osa ülesannete lahendamisel on tarvis eelteadmisi ainult 1.—7. klassi matemaatikast.

8. Lahendada võrrand

$$\frac{\sqrt[3]{(a+x)^2}+\sqrt[3]{(a-x)^2}}{\sqrt[3]{(a+x)^2}-\sqrt[3]{(a-x)^2}}=c.$$

9. Iseküılgse kolmnurga üks nurk on 60° ja kõigi külgede pikkused on täisarvulised. Tõestada, et suurima külje pikkus ei väljendu algarvuna.

10. Võrdhaarses kolmnurgas ABC $AB=BC=b$, $AC=a$, $\angle ABC=20°$. Tõestada, et $a^3+b^3=3ab^2$.

11. Kolmnurga küljed a, b, c $(a<b<c)$ moodustavad aritmeetilise progressiooni. Tõestada, et

$$6Rr=ac,$$

kus R ja r on ümber- ja siseringjoone raadiused.

12. x pioneeri korjas kokku $\left(\frac{3x+7}{2}\right)^2$ pähklit. Pähklid jaotati omavahel võrdselt. Jaotamisel ülejäänud 18 pähklit otsustati viia loomaaias olevale oravale. Mitu pähklit sai iga pioneer?

Ülesande koostas **A. Kanter** Tallinnast.

KOGUMIKU NELJANDA VIHIKU ÜLESANNETE LAHENDUSED

A. Elementaarmatemaatika

Ülesande nr. 1 lahendus. Moodustagu kolmnurga nurgad α, β ja γ aritmeetilise progressiooni. Siis

$$\alpha+\gamma=2\beta$$

ning

$$\alpha+\beta+\gamma=3\beta=180°,$$

millest

$$\beta=60°.$$

Kui kolmnurga küljed a, b, c moodustavad aritmeetilise progressiooni, siis

$$a+c=2b,$$

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=2.$$

Siit saame siinusteoreemi põhjal, et

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}+\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}=2,$$

$$\sin\alpha+\sin\gamma=\sqrt{3},$$

$$2\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}=\sqrt{3},$$

$$\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}=1,$$

$$\alpha=\gamma=60°.$$

Järelikult otsitav kolmnurk on võrdkülgne kolmnurk, milles nii küljed kui ka nurgad moodustavad aritmeetilise progressiooni vahega $d=0$.

Ülesande nr. 2 lahendus. Lihtsate trigonomeetriliste teisenduste abil saame nurkade vahelisele seosele anda kuju

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta - \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma = \frac{\sin\alpha\sin\beta}{2\cos\gamma},$$

mille jagamisel $\sin^2\alpha$-ga leiame

$$1 + \frac{\sin^2\beta}{\sin^2\alpha} - \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\cos\gamma = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\cdot\frac{1}{2\cos\gamma}.$$

Kuna

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{b}{a} \quad \text{ning} \quad \cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab},$$

siis

$$1 + \frac{b^2}{a^2} - \frac{a^2+b^2-c^2}{2a^2} = \frac{b^2}{a^2+b^2-c^2}.$$

Siit

$$(a^2+b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2) = 2a^2b^2,$$
$$a^4 + b^4 = c^4.$$

Ülesande nr. 3 lahendus. Kuna $a_2 + b = m$, $c - a_1 = n$, (vt. joon.), siis

$$a_2c - a_1a_2 + bc - a_1b = mn.$$

Tuginedes teoreemile, mille põhjal

$$AD^2 = bc - a_1a_2,$$

saame

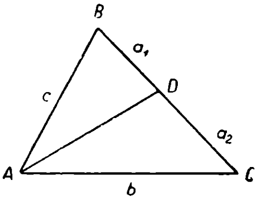
$$a_2c - a_1b + AD^2 = mn.$$

Et aga

$$\frac{a_2}{b} = \frac{a_1}{c}, \qquad a_2c = a_1b,$$

siis

$$AD^2 = mn, \qquad AD = \sqrt{mn}.$$



Ülesande nr. 4 lahendus. Ülesande tingimuse põhjal

$$100a + 10b + c = 81c + 9b + a,$$

kusjuures $0 \leqslant a, b, c \leqslant 9$. Esitame saadud seose kujul

$$c - a = \frac{b + 19c}{99}.$$

Kuna $c - a$ on naturaalarv, siis

$$\frac{b + 19c}{99} = 1$$

(antud jagatise ainsaks naturaalarvuliseks väärtuseks saab olla 1, kuna $0 < b + 19c \leqslant 180$). Siit

$$b = 4, \qquad c = 5$$

ning $a = 4$. Järelikult otsitav arv on 445.

Ülesande nr. 5 lahendus. Olgu $x = X + \alpha$, kus $X = [x]$, $0 \leqslant \alpha < 1$. Siis

$$\arctan\left(\tan\frac{2x-1}{2}\pi\right) = \arctan\left[\tan\left(X\pi + \frac{2\alpha - 1}{2}\pi\right)\right] = \frac{2\alpha - 1}{2}\pi.$$

Seega tõestatava samasuse vasak pool omandab kuju

$$\frac{2(X+\alpha) - 1}{2} - \frac{1}{\pi}\cdot\frac{2\alpha - 1}{2}\pi = X,$$

mida oligi vaja tõestada.

B. Kõrgem matemaatika

Ülesande nr. 1 lahendus. Selleks, et võrrandeil $x = by + cz + du$, $y = ax + cz + du$, $z = ax + by + du$ ja $u = ax + by + cz$ oleks mittetriviaalne lahend, on tarvilik ja piisav, et

$$\begin{vmatrix} -1 & b & c & d \\ a & -1 & c & d \\ a & b & -1 & d \\ a & b & c & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Jagades determinandi väljaarvutamisel saadava seose avaldisega $(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)$, jõuamegi nõutava võrduseni.

Ülesande nr. 2. lahendus.[1] Olgu $f(x) = 2x \ln^2 x - x(x-1)(x+3)\ln x + (x-1)^2(3x-1)$. Leiame $f'(x)$ ja $f''(x)$:

$$f'(x) = 2\ln^2 x - (x-1)(3x+7)\ln x + 8(x-1)^2,$$

$$f''(x) = \frac{3x^2+2x-2}{x}\varphi(x), \text{ kus } \varphi(x) = \frac{(13x-7)(x-1)}{3x^2+2x-2} - 2\ln x.$$

$$\text{Kuna } \varphi(1) = 0 \text{ ning } \varphi'(x) = -\frac{2(x-1)^3(9x-4)}{x(3x^2+2x-2)^2} < 0$$

$x > 1$ puhul, siis $\varphi(x)$ ning $f''(x)$ on negatiivsed $x > 1$ puhul. Et $f'(1) = 0$, siis ka $f'(x) < 0$ $x > 1$ puhul, millest $f(1) = 0$ tõttu järeldubki

$$f(x) < 0, \text{ kui } 1 < x < \infty.$$

RAHVUSVAHELISTE MATEMAATIKAOLÜMPIAADIDE ÜLESANNETE LAHENDUSI

II olümpiaad.

Ülesanne nr. 1. Leida kõik kolmekohalised arvud, mille jagamisel 11-ga saame jagatise, mis on võrdne jagatava numbrite ruutude summaga.

Lahendus. Arv $z = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$ jagub 11-ga, kui alternatiivne ristsumma $a_0 - a_1 + a_2 - \ldots + (-1)^n a_n$ jagub 11-ga. Kolmekohalise arvu $z = 100a + 10b + c$ jaoks on seega vastavateks tingimusteks

$$a - b + c = 0 \tag{1}$$

või

$$a - b + c = 11 \tag{2}$$

($a - b + c$ ei saa ühekohaliste positiivsete arvude a, b ja c korral olla 22, 33 jne.). Otsitav arv peab rahuldama tingimust

$$100a + 10b + c = 11(a^2 + b^2 + c^2). \tag{3}$$

Võrdusest (1) saame, et $b = a + c$. Asendame b viimases võrrandis $(a + c)$-ga, koondame ja jagame võrrandi mõlemad pooled 11-ga:

$$10a + c = 2(a^2 + ac + c^2).$$

Seega $10a + c$ ning eriti ka c peab olema paarisarv.

---

[1] Märkus. Selle ülesande teksti kogumiku neljandas vihikus on sattunud viga. Teiseks liikmeks võrratuse vasakul poolel peab olema $-x(x-1)(x+3)\ln x$.

Lahendame nüüd saadud võrrandi a suhtes.

$$a = \frac{5-c}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{25-8c-3c^2}.$$

Juhul $c \geqslant 2$ on juuritav avaldis negatiivne. Seega võib sobida ainult $c=0$. Siis on

$$a = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}\cdot 5,$$

s. t. $a_1 = 5$; $a_2 = 0$. Teine lahend antud ülesande jaoks ei sobi. Võrrandist (1) leiame, et $b = 5$. Seega on otsitav arv 550. Tõepoolest, $11\cdot(25+25) = 550$.

Kui avaldame b võrdusest (2) ja asetame võrrandisse (3), saame pärast lihtsustamist

$$10a + c = 131 + 2(a^2 + c^2 + ac - 11a - 11c),$$

millest järeldub, et c peab olema paaritu. Avaldades saadud võrrandist a, leiame

$$a = \frac{16-c}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{14c-3c^2-6}.$$

Siin saab juuritav negatiivseks, kui $c \geqslant 5$. Järelikult kas $c=1$ või $c=3$. Kui $c=1$, siis a ei avaldu naturaalarvuna. Kui $c=3$, siis

$$a_1 = 8 \text{ ja } a_2 = 5.$$

Võrdusest (2) leiame, et esimesel juhul $b=0$, teisel juhul $b=-3$, mis ei sobi. Seega teiseks arvuks, mis püstitatud nõuet rahuldab, on 803. Tõepoolest, $11(64+9) = 803$.

Ülesanne nr. 2. Lahendada võrratus

$$\frac{4x^2}{(1-\sqrt{1+2x})^2} < 2x+9.$$

Lahendus. Arvestades, et

$$\frac{4x^2}{(1-\sqrt{1+2x})^2} = \frac{4x^2(1+\sqrt{1+2x})^2}{[1-(1+2x)]^2} = (1+\sqrt{1+2x})^2,$$

saame võrratusele kuju

$$(1+\sqrt{1+2x})^2 < 2x+9,$$

millest

$$2\sqrt{1+2x} < 7, \quad x < \frac{45}{8}.$$

Et võrratuse vasak pool on reaalne ainult siis, kui $x \geqslant -\frac{1}{2}$ ja et ta ei ole määratud kohal $x=0$, siis on lahendiks:

$$-\frac{1}{2} \leqslant x < 0 \quad \text{ja} \quad 0 < x < \frac{45}{8}.$$

Ülesanne nr. 3. Täisnurkse kolmnurga ABC hüpotenuus on jaotatud n võrdseks osaks, kusjuures n on paaritu arv, α tähistab nurka, mille all punktist A on näha nendest omavahel võrdsetest lõikudest see, mis sisaldab hüpotenuusi keskpunkti. Kõrguse ja hüpotenuusi pikkusteks on vastavalt h ja a. Tõestada, et

$$\tan\alpha = \frac{4nh}{(n^2-1)a}.$$

Lahendus. Tuginedes joonisel 1 esitatud tähistustele avaldame x-i üks kord nurga β ja teine kord nurga $\alpha+\beta$ kaudu:

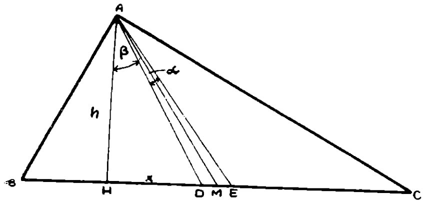
$$x = h \tan\beta; \quad x = h \tan(\alpha + \beta) - \frac{a}{n}.$$

Seega

$$h \tan(\alpha + \beta) - \frac{a}{n} = h \tan\beta.$$

Kasutame kahe nurga summa tangensi valemit ja avaldame $\tan\alpha$:

$$\tan\alpha = \frac{a}{nh + a \cdot \tan\beta + nh \tan^2\beta}.$$



Joonis 1.

Et $\tan\beta = \frac{x}{h}$, siis

$$\tan\alpha = \frac{ah}{nh^2 + ax + nx^2}.$$

Kasutades lauset täisnurkse kolmnurga kõrguse kohta võime kirjutada, et

$$h^2 = \left(\frac{n-1}{2} \cdot \frac{a}{n} - x\right)\left(\frac{n+1}{2} \cdot \frac{a}{n} + x\right),$$

s. t. $h^2 = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4n^2} - \frac{ax}{n} - x^2$.

Asendame $\tan\alpha$ avaldises h^2 leitud avaldisega:

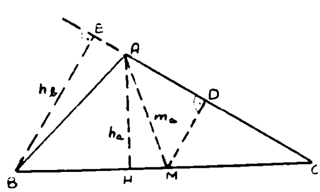
$$\tan\alpha = \frac{ah}{\frac{a^2n}{4} - \frac{a^2}{4n} - ax - nx^2 + ax + nx^2}$$

ja siit

$$\tan\alpha = \frac{4nh}{(n^2-1)a}, \quad \text{m.o.t.t.}$$

Ülesanne nr. 4. Konstrueerida kolmnurk ABC, kui on antud tema kõrgused h_b ja h_a ning tipust A tõmmatud mediaan m_a.

Lahendus. a) Analüüs (vt. joon. 2). Kiirte lause põhjal on $h_b : MD = BC : MC = 2 : 1$, s. t., et



Joonis 2.

$$MD = \frac{1}{2} h_b.$$

b) Konstruktsioon (vt. joon. 3). Konstrueerime h_a, m_a ja täisnurga abil kolmnurga $\triangle AHM$ või $\triangle AHM'$. Joonestame ühe ringjoone diameetrile AM ja teise keskpunktiga punktis M ning raadiusega $\frac{1}{2} h_b$. Nende ringjoonte lõikepunktideks on D ja D'. Sirged AD ja AD' lõikavad sirget MH punktides C ja C'. Raadiustega MC ja MC' tõmmatud ringjooned lõikavad sirget HM vastavalt punktides B ja B'. Kolmnurgad $\triangle ABC$ ja $\triangle AB'C'$ rahuldavad püstitatud tingimusi.

c) Tõestus. Konstruktsiooni põhjal on

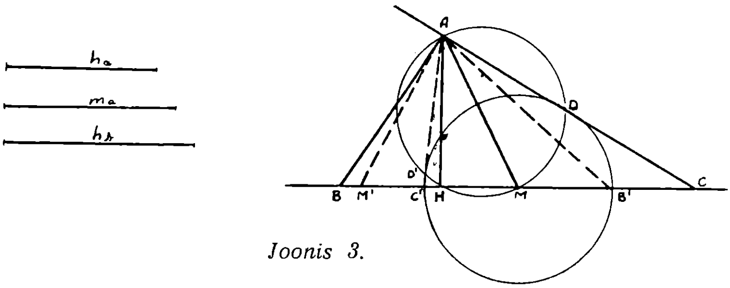
1) $AH = h_a$; $AM = AM' = m_a$;

2) $MD = MD' = \frac{1}{2} h_b$;

3) $\angle MDA = \angle MD'A = 90°$;

4) $MC = MB$, $MC' = MB'$.

Punktidest B ja B' tõmbame veel ristlõigud vastavalt sirgetele AD ja AD'; saame punktid E ja E' (joonisel 3 neid ei ole). Nüüd on $BE \perp AC$ ja $BE' \perp AC'$. Niisiis $BC : MC = BE : MD$ ja $BC : MC = 2 : 1$ tõttu $BE = h_b$;



Joonis 3.

seega $\triangle ABC$ ning $\triangle AB'C'$ on nõutud kolmnurgad. Konstruktsioon on võimalik, kui $m_a > h_a$ ja $h_b < 2m_a$.

Ülesanne nr. 5. On antud kuup $ABCDA'B'C'D'$.

a) Olgu X mingi punkt diagonaalil AC ja Y mingi punkt diagonaalil $B'D'$. Leida lõigu XY keskpunkti geomeetriline koht.

b) Leida lõigul XY asetseva punkti Z geomeetriline koht, kui punkti Z asukoht on määratud võrdusega

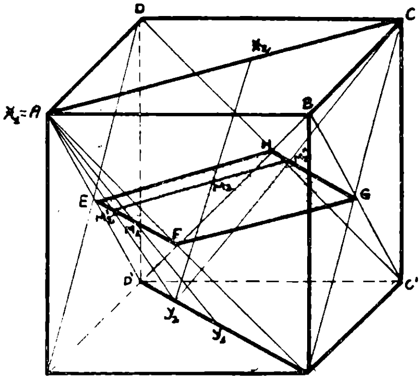
$$ZY = 2XZ.$$

Lahendus. a) Olgu kuubi serva pikkus a (joon. 4).

Olgu algul $X_1 = A$ ja Y_1 liikugu vabalt lõigul $B'D'$. Siin on

$$AE : ED' = AM_1 : M_1Y_1 = \\ = AF : FB' = 1 : 1.$$

Lõigu X_1Y_1 keskpunkt kirjeldab lõigu EF. Samuti saaksime lõigud FG, GH ja HE. Et $AE : ED' = CH : HD' = = CG : GB' = AF : FB'$, siis on lõigud EF, FG, GH ja HE tasandil $EFGH$ ja ümbritsevad otsitavat geomeetrilist kohta.



Joonis 4.

Olgu nüüd X_2 mistahes punkt lõigul AC ja Y_2 lõigul $B'D'$. M_2 on lõigu X_2Y_2 keskpunkt. Tuleb tõestada, et M_2 on tasandi $EFGH$ punkt. Selleks ühendame Y_2 punktidega A ja C. Lõikudel EF ja GH võtame lõikude Y_2A ja Y_2C keskpunktid M_2' ja M_2''. Lõigud AY_2, YC_2, AC ja X_2Y_2 asuvad tasandil AY_2C, kusjuures

$$AM_2' : M_2'Y_2 = X_2M_2 : M_2Y_2 = CM_2''M_2''Y_2 = 1 : 1.$$

Punkt M_2 peab järelikult asuma lõigul $M_2'M_2''$. Lõik $M_2'M_2''$ asub aga tasandil $EFGH$, seega paikneb seal ka punkt M_2.

Et $AE : ED' = AF : FB' = 1 : 1$, siis $EF \parallel D'B'$. Tähendab EF on paralleelne tasandiga $A'B'C'D'$. Lõik FG on ka paralleelne tasandiga $ABCD$, GH on paralleelne tasandiga $A'B'C'D'$ ja HE on paralleelne tasandiga $ABCD$. Seega on tasand $EFGH$ paralleelne kuubi põhjadega.

Ruudu diagonaal $D'B' = a\sqrt{2}$. Et $AE : AD' = AF : AB' = 1 : 2$, siis $EF = \frac{a}{2}\sqrt{2}$. Analoogiliselt leiame, et $FG = GH = HE = \frac{a}{2}\sqrt{2}$. Et nelinurga tipud asetsevad külgtahkude keskpunktides ja tema küljed on võrdsed, siis on $EFGH$ ruut. Seega lõigu XY keskpunkti geomeetriliseks kohaks on ruut, mille tipud asetsevad külgtahkude keskpunktides.

b) Analoogiliselt juhuga a) saab näidata, et siin on geomeetriliseks kohaks ristkülik, mis on paralleelne põhjaga ja asub temast kaugusel $\frac{a}{3}$.

Selle ristküliku mõõtmed on $\frac{a}{3}\sqrt{2}$ ja $\frac{a}{3}\sqrt{8}$.

Ülesanne nr. 6. On antud koonus, millesse on kujutatud kera ja viimase ümber püstsilinder, mille üks põhi on koonuse põhjaga ühel ja samal tasandil. Koonuse ruumala on V_1 ja silindri ruumala V_2.

a) Tõestada, et $V_1 \neq V_2$.

b) Leida väikseim k väärtus, mille puhul $V_1 = kV_2$ ja konstrueerida selle juhu jaoks koonuse telglõike tipunurk.

Lahendus. Tuginedes joonisele 5 võime kirjutada, et

$$V_{\text{koonus}} = V_1 = \frac{\pi r_1^2 h}{3}, \qquad (1)$$

$$V_{\text{silinder}} = V_2 = \pi r_2^2 \cdot 2r_2 = 2\pi r_2^3, \qquad (2)$$

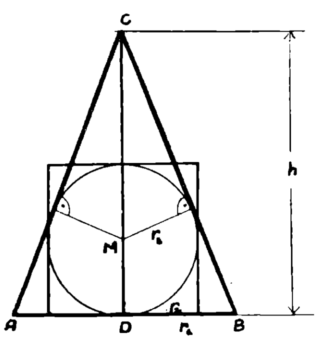
$\triangle DBC \sim \triangle EMC$ (täisnurksed kolmnurgad ühise teravnurgaga).

Seega

$$\frac{ME}{MC} = \frac{DB}{CB}, \quad \text{s. t.} \quad \frac{r_2}{h - r_2} = \frac{r_1}{\sqrt{r_1^2 + h_1^2}}.$$

Tõstame viimase võrduse mõlemad pooled ruutu ja avaldame r_1:

$$r_1^2 = \frac{r_2^2 h}{h - 2r_2}. \qquad (3)$$



Joonis 5.

Asetame saadud r_1 avaldise koonuse ruumala valemisse (1):

$$V_1 = \frac{\pi r_2^2 h^2}{3(h - 2r_2)}.$$

Moodustame nüüd suhte $\frac{V_1}{V_2}$:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{h^2}{6r_2(h - 2r_2)}.$$

a) Oletame, et $\frac{V_1}{V_2} = 1$. Siis saame h jaoks ruutvõrrandi

$$h^2 - 6r_2 h + 12r_2^2 = 0, \quad \text{millest} \quad h = 3r_2 \pm \sqrt{9r_2^2 - 12r_2^2},$$

millel pole reaalset väärtust. Seega $V_1 \neq V_2$.

b) Oletame, et $\frac{V_1}{V_2} = k$, siis saame h jaoks ruutvõrrandi

$$h^2 - 6kr_2 h + 12kr_2^2 = 0, \quad \text{millest} \quad h = 3kr_2 \pm \sqrt{9k^2 r_2^2 - 12kr_2^2}.$$

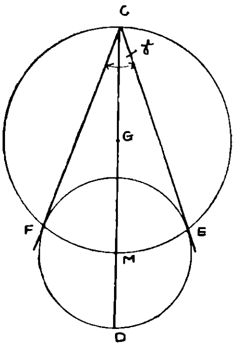
h jaoks saame reaalse väärtuse, kui $9k^2 r_2^2 - 12kr_2^2 \geq 0$. Seda võrratust rahuldavad väärtused $k \geqslant \frac{4}{3}$ ja $k \leqslant 0$. Teine väärtuste piirkond aga ei sobi, sest k oli ruumalade, s. t. positiivsete arvude suhe. Seega $k \geqslant \frac{4}{3}$ ja $k = \frac{4}{3}$ on väikseim arv, mille korral $V_1 = kV_2$. Telglõike tipunurga konstrueerimiseks asetame saadud k väärtuse h avaldisse; saame

$$h = 4r_2.$$

Joonestame lõigu DC pikkusega $4r_2$. Nüüd joonestame ringjoone diameetriga $MC = 3r_2$ (joon. 6). Diameetri otspunkti M ümber joonestame ringjoone raadiusega r_2. Ringjoonte lõikepunkte F ja E diameetri teise otspunktiga C ühendades saamegi seal nõutud nurga γ. Teisiti võib seda konstruktsiooni läbi viia tuginedes valemile

$$r_1^2 = \frac{r_2^2 h}{h - 2r_2}.$$

Et $h = 4r_2$, siis $r_1^2 = 2r_2^2$ ja $r_1 = r_2\sqrt{2}$ ja $DB = DA = r_2\sqrt{2}$.



Joonis 6.

Ülesanne nr. 7. On antud võrdhaarne trapets alustega a ja b ning kõrgusega h.

a) Leida konstrueerimise teel trapetsi sümmeetriateljel punkt P, millest mõlemad haarad paistavad täisnurga all.

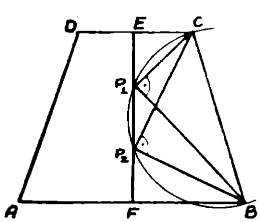
b) Leida punkti P kaugus ühest alusest.

c) Millised tingimused peavad kehtima, et oleks võimalik punkti P konstrueerida?

Lahendus. a) Analüüs. Olgu joonisel 7 $EP_1 = x_2$, $FP_1 = x_1$, $AB = a$, $DC = b$, $EF = h$ ja $\angle BP_1C = \angle BP_2C = 90°$.

P_1 ja P_2 peavad asetsema ringjoonel diameetriga BC (või AD).

b) Konstruktsioon. Haarale kui diameetrile joonestatakse ringjoon. See kas lõikab sümmeetriatelge kahes punktis, ühes punktis või ei lõika üldse. Need punktid ongi otsitavad punktid.



Joonis 7.

Et $\triangle BFP_1 \sim \triangle P_1EC$, siis $x_1 : \frac{a}{2} = \frac{b}{2} : x_2$, s. t. et $x_1 \cdot x_2 = \frac{ab}{4}$. Kuna $x_1 + x_2 = h$, siis x_1 ja x_2 on ruutvõrrandi

$$x^2 - hx + \frac{ab}{4} = 0$$

lahenditeks. Sellest võrrandist

$$x = \frac{h}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{h^2 - ab}.$$

c) Konstruktsioon on võimalik, kui $h^2 \geqslant ab$.

SISUKORD

На эстонском языке
Тартуский государственный университет
г. Тарту, ул. Юликооли, 18

МАТЕМАТИКА И СОВРЕМЕННОСТЬ. VI.

Вспомогательные материалы для преподающих
и изучающих математику

Toimetaja E. Tiit
Korrektor E. Võhandu

Ladumisele antud 29. I 1965. Trükkimisele antud 13. IV 1965. Paber 60 × 90, 1/16. Trükipoognaid 6,75. Arvestuspoognaid 8. Trükiarv 2000. MB-03232. Tellimise nr. 962.
Hans Heidemanni nim. trükikoda, Tartu, Ülikooli 17/19. II

Hind 35 kop.