0000101

Matematika ja kaasaeg

1010000

TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

MATEMAATIKA JA KAASAEG

V

ABIMATERJALE MATEMAATIKA ÕPETAJATELE JA ÕPPIJATELE

TARTU 1964

Kunstiline kujundus: V. Allsalu

Художественное оформление: В. Аллсалу

Тартуский государственный университет
г. Тарту, ул. Юликооли, 18

МАТЕМАТИКА И СОВРЕМЕННОСТЬ. V.

Вспомогательные материалы для преподающих и изучающих математику

На эстонском языке

Toimetaja L. Roots
Korrektor E. Võhandu

Ladumisele antud 16. XI 1964. Trükkimisele antud 20. I 1965. Paber 60 × 90, 1/16. Trükipoognaid 7 + 1 kleebis. Arvestuspoognaid 8,1. Trükiarv 2000. MB-00053. Tell. nr. 8791.

Hans Heidemanni nim. trükikoda. Tartu, Ülikooli 17/19. II
Hind 35 kop.

KAASAEGSE MATEMAATILISE ANALÜÜSI MÕNED ISELOOMULIKUD JOONED

G. Kangro

Matemaatilise analüüsi arvukatest harudest on kaasaegse analüüsi arengule kõige enam mõju avaldanud reaalmuutuja funktsiooniteooria ja funktsionaalanalüüs. Käesoleva sajandi esimesel veerandil mõistetigi kaasaegse matemaatilise analüüsi all põhiliselt reaalmuutuja funktsiooniteooriat, tänapäeval aga tähendab kaasaegne analüüs eeskätt funktsionaalanalüüsi. Tekib küsimus, miks ei ole kaasaegsele analüüsile saanud iseloomulikuks mõni teine analüüsi haru, nagu kompleksmuutuja funktsiooniteooria, integraalvõrrandite teooria, diferentsiaalvõrrandite kvalitatiivne teooria, funktsioonide lähendamise teooria või operaatorarvutus, mis kujunesid välja ligikaudu samaaegselt reaalmuutuja funktsiooniteooriaga. Vastus sellele küsimusele on lihtne: viimati nimetatud distsipliinid ei ole kaasa aidanud funktsiooni mõiste kui analüüsi põhilise uurimisobjekti laiendamisele nii suurel määral kui reaalmuutuja funktsiooniteooria, eriti aga funktsionaalanalüüs. Tutvume kõigepealt reaalmuutuja funktsiooniteooria põhiliste iseärasustega.

1. Reaalmuutuja funktsiooniteooria. Matemaatilises analüüsis tekkis tema olemasolu esimese kahe sajandi vältel rida probleeme, millele klassikalise analüüsi raamides polnud võimalik saada vastust. Esitame mõned näited nendest.

1) Üheks raskemaks probleemiks diferentsiaalarvutuses on küsimus funktsiooni $f(x)$ tuletise olemasolust ehk, geomeetriliselt kõneldes, joone $y = f(x)$ puutuja olemasolust. Tekib näiteks küsimus: missugustes punktides on sirgestuval (s. t. pikkust omaval) pideval joonel olemas puutuja?

2) Mille poolest erineb Riemanni mõttes integreeruv funktsioon pidevast funktsioonist?

3) Teatavasti ristkülikus $[a, b; c, d]$ pideva funktsiooni $f(x, y)$ korral kehtib valem

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\,dx,$$

s. t. on lubatav integreerimiste järjekorra muutmine. Missuguste integreeruvate funktsioonide korral on lubatav integreerimiste järjekorra muutmine?

4) On teada, et igal pideval funktsioonil $f(x)$ on olemas algfunktsioon, s. t. niisugune funktsioon $F(x)$, mille puhul $F'(x) = f(x)$. Missugustel integreeruvatel funktsioonidel on olemas algfunktsioon?

5) Mille poolest erineb funktsionaaljada $\{f_n(x)\}$ harilik koonduvus lõigus $[a, b]$ sisuliselt selle jada ühtlasest koonduvusest lõigus $[a, b]$?

Otsides vastust nendele ja paljudele teistele taolistele küsimustele, rajas prantsuse matemaatikute kool eesotsas Boreli, Baire'i ja Lebesgue'iga möödunud sajandi vahetusel reaalmuutuja funktsiooniteooria. Missugused uued ideed ja meetodid tõi siis reaalmuutuja funktsiooniteooria klassikalisse analüüsi?

Esiteks, reaalmuutuja funktsiooniteooria väidab, et funktsioonide vallas jäävad mitmed seaduspärasused varjatuks seetõttu, et nad ei kehti funktsiooni kogu määramispiirkonnas, vaid avalduvad alles siis, kui eraldada määramispiirkonnast üks teatavas mõttes mitteoluline osa, nn. hulk mõõduga null. Mis on hulk mõõduga null?

Öeldakse, et *arvsirgel asetsev punktihulk E on mõõduga null, kui vastavalt igale positiivsele arvule ε leidub arvsirgel jada vahemikke $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$, mille pikkuste summa ei ületa arvu ε ja mis katavad hulga E* (selles mõttes, et E iga punkt kuulub mingisse vahemikku δ_n). Näiteks iga loenduv hulk (s. t. hulk, mille elemente saab järjestada lõpmatu jadana) on mõõduga null. Tõepoolest, kui $E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$, siis võttes $\delta_n = \left(x_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, x_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ näeme, et vahemiku δ_n pikkus l_n avaldub kujul $l_n = x_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} - \left(x_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right) = 2\frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \frac{\varepsilon}{2^n}$ ja seega

$$\sum_{n=1}^{\infty} l_n = \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \varepsilon.$$

Et x_n kuulub vahemikku δ_n, siis hulk E on mõõduga null.

Kui funktsioonil $f(x)$ on teatav omadus niisuguse hulga igas punktis, mis saadakse $f(x)$ määramispiirkonnast D pärast mingi nullmõõduga hulga E eraldamist, siis öeldakse, et funktsioonil $f(x)$ on see omadus peaaegu kõikjal hulgal D. Näiteks, kui funktsiooni $f(x)$ katkevuspunktide hulk on mõõduga null, siis öeldakse, et $f(x)$ on pidev peaaegu kõikjal.

Teiseks, reaalmuutuja funktsiooniteooria väidab, et funktsioonide vallas mitmed seaduspärasused, mis avalduvad integraalide kaudu, jäävad sageli märkamatuks seetõttu, et need integraalid ei eksisteeri. Seepärast reaalmuutuja funktsiooniteooria üheks põhiliseks ülesandeks on laiendada klassikalise Riemanni integraali mõistet nii, et uus integraal oleks üldisem ja paremate omadustega kui Riemanni integraal. Üheks niisuguseks Riemanni integraali kõige enam tuntud üldistuseks on Lebesgue'i integraal, mille puhul funktsiooni tõkestatus ei ole integreeruvuse eelduseks, funktsioon ja tema absoluutväärtus on üheaegselt integreeruvad, piirile üleminek integraali märgi all on lubatud palju avaramatel eeldustel kui Riemanni integraali puhul jne. Lebesgue'i integraali eelised Riemanni integraali ees on niivõrd suured, et kaasaegse analüüsi seisukohalt osutub Riemanni integraal liigseks koormaks matemaatilise analüüsi kursuses, omades põhiliselt vaid ajaloolist tähtsust. Oma negatiivset suhtumist Riemanni integraali teooriasse avaldab väga ilmekalt prantsuse silmapaistev matemaatik Dieudonné [1]: «Võib olla veendunud, et kui see peatükk ei kannaks nii autoriteetset nime, oleks ta ammugi välja lülitatud analüüsi kursusest, sest igale töötavale matemaatikule (kõige austuse juures Riemanni geeniuse vastu) on päris selge, et meie päevil see «teooria» võib pretendeerida vaid mitte liiga huvitava harjutuse kohale mõõdu ja integraali üldises teoorias».

Toetudes nullmõõduga hulga ärajätmise ja Riemanni integraali Lebesgue'i integraaliga asendamise ideedele, saab eespool tõstetud küsimustele anda järgmised vastused [2].

1) Sirgestuval pideval joonel on olemas puutuja peaaegu kõikjal.

2) Riemanni mõttes integreeruv funktsioon on pidev peaaegu kõikjal.

3) Integreerimiste järjekorra muutmine on lubatav kõigi Lebesgue'i mõttes integreeruvate funktsioonide puhul.

4) Kõigil Lebesgue'i mõttes integreeruvatel funktsioonidel on olemas algfunktsioon peaaegu kõikjal.

5) Kui funktsionaaljada $\{f_n(x)\}$ koondub lõigus $[a, b]$, siis saab sellest lõigust eraldada kuitahes väikese mõõduga [1] hulga nii, et jada $\{f_n(x)\}$ koondub lõigu $[a, b]$ ülejäänud osas ühtlaselt.

Viimane tulemus on antud Moskva matemaatiku Jegorovi poolt 1911. a. See on üks neist tulemustest, mis panid aluse reaalmuutuja funktsiooniteooria Moskva koolile.

Nullmõõduga hulga ärajätmise ja Riemanni integraali

---

[1] Hulga E mõõduks nimetatakse integraali $\int_E dx$. Seega näiteks lõigu $[a, b]$ mõõt tähendab selle lõigu pikkust $b - a$.

Lebesgue'i integraaliga asendamise ideed on reaalmuutuja funktsiooniteooria kaks iseloomulikku joont. Nende ideede järjekindel teostamine nõudis analüüsi ülesehitamist kindlale hulgateooria baasile. Hulgateoreetilise seisukoha valitsevaks muutumine on üks kaasaegse matemaatika iseärasus üldse. Peale hulgateooria hakkasid matemaatilise analüüsi arengut oluliselt mõjutama algebra ja geomeetria, tuues analüüsi kaasa aksiomaatilise meetodi. Et aksiomaatilise meetodi sisu ja rakendusväli on kaasajal oluliselt laienenud, mille tulemusena kaasaegse matemaatika mitmed iseloomulikud jooned on seotud just aksiomaatilise meetodiga, siis peatume selle meetodi juures lähemalt.

2. Aksiomaatiline meetod. Kaasajal pole aksiomaatiline meetod ainult selleks, et loogiliselt rangel ja ülevaatlikul kujul esitada ühte või teist (sageli juba valmisolevat teooriat), vaid aksiomaatiline meetod, ühendatuna nn. struktuuri mõistega, on saanud kvalitatiivselt uued rakendusvõimalused keerukate matemaatiliste probleemide uurimisel. Mida tähendab struktuur matemaatikas?

Vastavalt filosoofiast tuntud üldise vastastikuse seose ja sõltuvuse seadusele on reaalsuses esinevate hulkade elementide ja nende mitmesuguste moodustiste[2] vahel väga mitmesugused seosed, mille matemaatiliseks abstraktsiooniks ongi struktuur. Tähendab, *hulgas R on defineeritud struktuur, kui selle hulga elementide või nende moodustiste (näiteks alamhulkade) vahel on määratud üks või mitu seost.* Kui R on abstraktne hulk (s. t. pole teada hulga R elementide konkreetne tähendus), siis need seosed antakse aksioomide kaudu, mida peavad rahuldama hulga R elemendid või nende moodustised. Aksioome, mis määravad antud struktuuri, nimetatakse selle struktuuri aksioomideks. Antud struktuuri aksioomide loogilised järeldused moodustavad selle struktuuri teooria. Struktuuri mõiste on antud Nicolas Bourbaki pseudonüümi all esinevate prantsuse ja USA silmapaistvate matemaatikute poolt, kelle hulka kuulub tõenäoliselt ka Dieudonné [3].

Matemaatikas esinevad kõige sagedamini kolme tüüpi struktuurid, nn. põhistruktuurid: 1) algebraline struktuur, 2) topoloogiline struktuur, 3) järjestuse struktuur. Peatume nende juures lähemalt.

1) Algebraline struktuur hulgas R määratakse sellega, et defineeritakse hulgas R üks või mitu algebralist operatsiooni ehk tehet, nõudes neilt tehetelt teatavate arvutusseaduste rahuldamist. Need arvutusseadused moodustavadki algebralise struktuuri aksioomid. Selle järgi, missugustele

---

[2] Kui hulk koosneb näiteks aatomitest, siis viimaste moodustisteks on molekulid.

arvutusseadustele alluvad hulgas R defineeritud tehted, saame ühe või teise algebralise struktuuri: rühma, ringi, korpuse, poolrühma, poolringi, integriteetkonna, vektorruumi, algebra[3], struktuuri[3], mudeli, kategooria jne. Näiteks poolrühm on ühe tehtega struktuur, mis allub assotsiatiivsuse seadusele, s. o. seadusele $(ab)c=a(bc)$ (kui nimetada tehet korrutamiseks); rühm on selline poolrühm, kus võrrand $bx=a$ on alati lahenduv; ring on kahe tehtega struktuur, mis ühe tehte — liitmise suhtes kujutab rühma, teise tehte — korrutamise suhtes aga poolrühma, kusjuures mõlemad tehted on seotud distributiivsuse seadustega $(a+b)c=ac+bc$, $c(a+b)=ca+cb$; jne. [4].

Algebraline struktuur, mis kõige sagedamini esineb matemaatilises analüüsis, on vektorruum. Vektorruum on kahe tehtega struktuur, mis ühe tehte — liitmise suhtes kujutab kommutatiivset rühma (s. t. rühma, kus kehtib kommutatiivsuse seadus $a+b=b+a$), teise tehte — arvuga korrutamise ehk, nagu öeldakse skalaariga korrutamise suhtes aga rahuldab assotsiatiivsuse ja distributiivsuse seadusi ning tingimust $1.a=a$. Vektorruumi moodustavad näiteks kõik vektorid eukleidilises ruumis, millest tulenebki vektorruumi nimetus. Vektorruumi moodustavad ka kõik mingis piirkonnas D defineeritud funktsioonid, kõik piirkonnas D pidevad funktsioonid, kõik piirkonnas D diferentseeruvad funktsioonid jne., kui mõista funktsioonide liitmist ja korrutamist skalaariga tavalisel viisil.

2) Topoloogiline struktuur hulgas R määratakse sellega, et hulga R iga punktiga (s. t. elemendiga) seotakse teatavad R alamhulgad, mida nimetatakse selle punkti ümbrusteks. Siinjuures peavad need ümbrused rahuldama järgmist kahte aksioomi, mis on hästi tuntud juhul, kui R on eukleidiline ruum:

a) punkti a iga kahe ümbruse U ja V puhul leidub kolmas ümbrus W, mis sisaldub mõlemas ümbruses U ja V;

b) kui punkt b kuulub punkti a ümbrusesse U, siis leidub b ümbrus V, mis ka kuulub ümbrusesse U.

Hulka R, milles on defineeritud topoloogiline struktuur, nimetatakse topoloogiliseks ruumiks. Näiteks eukleidiline ruum on topoloogiline ruum, kui mõista punkti a ümbruse all iga kera, mille keskpunktiks on a. Kui hulk R on vektorruum, siis määratakse ümbruse mõiste sageli nn. normi mõiste abil, mis üldistab vektori pikkuse mõistet eukleidilises ruumis. Vektori a norm $\|a\|$ defineeritakse kui mittenegatiivne reaalarv, mis

---

[3] Sõnad «algebra» ja «struktuur» esinevad algebras peale üldise tähenduse veel eritähenduses kui teatavad konkreetsed algebralised struktuurid.

rahuldab järgmist kolme aksioomi:

1) $\|a\| = 0$ parajasti siis, kui $a = 0$,

2) $\|\lambda a\| = |\lambda| \|a\|$,

3) $\|a + b\| \leqslant \|a\| + \|b\|$,

kus λ tähendab skalaari. Vektorruumi, milles on defineeritud topoloogiline struktuur, nimetatakse lineaarseks ruumiks. Kui lineaarse ruumi topoloogiline struktuur on määratud normi abil, siis kõneldakse lineaarsest normeeritud ruumist. Lineaarses normeeritud ruumis nimetatakse punktihulka, mis koosneb kõigist punktidest x, mille puhul $\|x - a\| < r$ $(r > 0)$, keraks keskpunktiga a ja raadiusega r. Punkti a ümbruse all mõistetakse siis (nagu eukleidilises ruumiski) iga kera, mille keskpunktiks on a. Näiteks vektorruum, mis koosneb kõigist kinnises piirkonnas D pidevatest funktsioonidest $f(t)$, muutub lineaarseks normeeritud ruumiks, kui defineerida funktsiooni $f(t)$ norm $\|f\|$ valemiga $\|f\| = \max\limits_{t \in D} |f(t)|$. Topoloogilisi ruume uurib üks geomeetria harusid — topoloogia, topoloogilisi algebralisi süsteeme aga topoloogiline algebra (algebra seisukohalt) ja algebraline topoloogia (topoloogia seisukohalt).

3) Järjestuse struktuur hulgas R määratakse sellega, et hulga R teatavate (mitte tingimata kõigi) elementide paaride puhul lepitakse kokku, et üks element järgneb teisele, märkides seda näiteks sümboliga $a < b$ (b järgneb a-le). Siinjuures nõutakse järgmise kahe aksioomi täidetust:

a) kui $a < b$ ja $b < c$, siis $a < c$,

b) kui $a < b$, siis $a \neq b$.

Hulka, milles on defineeritud järjestuse struktuur, nimetatakse järjestatud hulgaks. Näiteks kõigi kompleksarvude hulk osutub järjestatud hulgaks, kui lugeda seos $a < b$ kehtivaks, kui a moodul on väiksem b moodulist. Samuti mingi antud hulga kõigi alamhulkade süsteem muutub järjestatud hulgaks, kui lugeda alamhulkade A ja B vahel kehtivaks seos $A < B$ siis, kui A sisaldub hulgas B, aga ei ühti viimasega.

Süsteemides, mida uurib kaasaegne analüüs, esinevad enamasti mitmed struktuurid korraga. Kui need struktuurid pole koos uuritava süsteemiga ette antud, siis on matemaatiku ülesandeks avastada struktuurid, mis võivad esineda uuritavas süsteemis. Kuidas seda teha?

Siin ilmnebki aksiomaatilise meetodi suur tähtsus kaasajal. Matemaatik avastab uuritavas süsteemis varjatult esineva struktuuri, kontrollides, kas süsteemi elemendid või nende moodustised rahuldavad oletatava struktuuri aksioome. Siinjuures etendab olulist osa uurija intuitsioon, mis võimaldab tal ligikaudu ette näha otsitava struktuuri tüübi. Kuid intuitsioon võib ka vahel osutuda petlikuks. Niisugusel juhul võib matemaatik varem oodatud struktuuri asemel sattuda uuele, ootamatule struktuurile. Selle ootamatu struktuuri ilmumine aga annab kasulikku informatsiooni uurija intuitsiooni suunamiseks lähemale tegelikule olukorrale.

Kui uuritavas süsteemis on kindlaks tehtud mingi struktuur (ootamatu või intuitiivselt ettenähtud), siis avaneb kohe võimalus rakendada uuritavale süsteemile avastatud struktuuri kogu teooriat ja seega kiiresti edasi jõuda probleemi lahendamise suunas. Matemaatik, kes ei oska uuritavast süsteemist välja eraldada üksikuid struktuure, on sunnitud uurima neid struktuure kõiki koos ja seetõttu mitte suutes läbi näha probleemi tuuma, satub ebaolulistele üksikasjadele ja pikkadele, väsitavatele arvutustele. Kokkuvõttes võime öelda, et aksiomaatiline meetod koos struktuuri mõiste teadliku kasutamisega võimaldab matemaatikul:

1) *intuitiivselt sügavamini läbi näha probleemi lahendamise käiku ja oma intuitsiooni vajaduse korral teadlikult suunata;*

2) *teostada nn. mõtte ökonoomia printsiipi, s. t. jõuda probleemi lahenduseni mõttekäikude kaudu, mis, olles maksimaalselt seotud probleemi olemusega, kasutavad maksimaalselt ära olemasolevad teooriad;*

3) *asendada klassikalisele matemaatikale omased pikad arvutused tõestuskäikudes sisuliste arutlustega.*

Nendes aksiomaatilise meetodi kvalitatiivselt uutes rakendusvõimalustes peituvadki kaasaegse matemaatika kõige iseloomulikumad jooned.

Aksiomaatilise meetodi niisuguse rakendamise selgitamiseks tõestame kaasaegse analüüsi meetoditega ühe teoreemi Fourier' ridade teooriast, mis kannab küberneetika looja Norbert Wieneri nime.

3. Wieneri teoreem. On teada, et kui funktsioonid $f(t)$ ja $g(t)$ on arendatavad kõikjal absoluutselt koonduvateks Fourier' ridadeks [4]

$$f(t) = \sum_n \alpha_n e^{int}, \quad g(t) = \sum_n \beta_n e^{int},$$

siis ka korrutis $f(t)g(t)$ on arendatav absoluutselt koonduvaks Fourier' reaks $\sum_n \gamma_n e^{int}$, kusjuures $\gamma_n = \sum_k \alpha_n \beta_{n-k}$. Tekib küsimus, *kas juhul, kui $f(t)$ on arendatav kõikjal absoluutselt koonduvaks Fourier' reaks, ka funktsioon $\frac{1}{f(t)}$ arendub samasuguseks Fourier' reaks, kui eeldada, et $f(x) \neq 0$ kõikjal.*

---

[4] Lühiduse mõttes kasutame Fourier' ridade komplekskuju, kusjuures summeerimisindeks n omandab kõik täisarvulised väärtused.

Olgu R kõigi nende funktsioonide hulk, mille Fourier' read on absoluutselt koonduvad kõikjal. Defineerides hulga R funktsioonidega tavalisel viisil liitmise ja korrutamise, ei ole raske näha, et R osutub kommutatiivseks ringiks[5] (s. t. ringiks, milles korrutamine on kommutatiivne), kusjuures selles ringis on olemas ühikelement — konstantne funktsioon $f(x) \equiv 1$. Seega uuritav probleem taandub küsimusele, kas ringi R suvalisel elemendil $f(t)$ on olemas pöördelement $\frac{1}{f(t)}$ selles ringis. Vastuse sellele küsimusele annab ringiteooriast tuntud lihtne teoreem, mille järgi ringi R elemendil a on olemas pöördelement a^{-1} selles ringis parajasti siis, kui a ei kuulu ringi R ühessegi maksimaalsesse ideaali. Siinjuures ideaaliks mistahes ringis R nimetatakse niisugust ringist R erinevat alamhulka, mis koos iga kahe elemendiga a ja b sisaldab ka nende summat $a+b$, aga koos iga elemendiga a ka korrutist ar, kus r on ringi R suvaline element. Näiteks eespool defineeritud funktsioonide ringis R moodustavad ideaali kõik need funktsioonid $f(t)$, mille väärtus mingil kindlal kohal t_0 on null. Tõepoolest, kui $f(t_0)=0$ ja $g(t_0)=0$, siis ka

$$f(t_0)+g(t_0)=0, \quad f(t_0)h(t_0)=0$$

iga $h(t)$ korral ringist R. Ringi niisugust ideaali, mis ei sisaldu selle ringi üheski teises ideaalis, nimetataksegi maksimaalseks ideaaliks.

Eespool toodud ringiteooria teoreemi rakendamine funktsioonide ringile R põrkub aga tõsistele raskustele, sest ringiteooria ei anna mingit meetodit antud ringi maksimaalsete ideaalide kirjeldamiseks. Seepärast tekib vajadus otsida ringis R uusi struktuure. Osutubki, et ring R saab topoloogilise struktuuri, kui defineerida funktsiooni $f(t)$ norm $\|f\|$ valemiga $\|f\| = \sum_n |a_n|$. Saadud topoloogilist ringi nimetatakse normeeritud ringiks. Nõukogude matemaatikud Gelfand, Neumark jt. on arendanud väga sisuka normeeritud ringide teooria, mis kujutab funktsionaalanalüüsi ühte tähtsamat haru. Selles teoorias näidatakse, et kommutatiivse normeeritud ringi R igale elemendile saab seada vastavusse teatava kompleksarvu nii, et ringi R elementide summale vastab vastavate kompleksarvude summa ja korrutisele — korrutis, kusjuures ringi R elemendile a vastava kompleksarvu moodul ei ületa elemendi a normi $\|a\|$. Ringi R need elemendid, millele

[5] Siinjuures tuleb silmas pidada, et rea $\sum_n a_n e^{int}$ absoluutsest koonduvusest kõikjal järeldub rea $\sum_n |a_n|$ koonduvus.

vastab arv null, moodustavadki maksimaalse ideaali. Rakendades seda tulemust absoluutselt koonduva Fourier' reaga funktsioonide ringile R, saame lihtsa arutluse teel kindlaks teha, et eespool näitena toodud ideaalid, mis koosnesid ringi R nendest funktsioonidest $f(t)$, kus $f(t_0)=0$, kujutavadki kõiki maksimaalseid ideaale ringis R. Tähendab, $\frac{1}{f(t)}$ kuulub ringi R parajasti siis, kui $f(t)\neq 0$ kõikjal. Sellega on Wieneri teoreem tõestatud.

Võrreldes siin esitatud Wieneri teoreemi tõestust Wieneri originaalse tõestusega [5] näeme, et viimane, kui klassikaline tõestus sisaldab rohkesti kunstlikke arvutusi. Tõestuskäikudes arvutuste asendamine arutlustega iseloomustabki aga, nagu juba nimetatud, kaasaegset matemaatikat.

Aksiomaatilise meetodi rakendamisega seotud iseärasused on iseloomulikud kaasaegsele matemaatikale üldse, mitte ainult matemaatilisele analüüsile. Et kindlaks teha, missugused struktuuride põhitüübid peavad tingimata esinema kaasaegses analüüsis, heidame põgusa pilgu funktsionaalanalüüsi olemusse.

4. F u n k t s i o n a a l a n a l ü ü s. Funktsionaalanalüüs kujunes välja käesoleva sajandi kolmekümnendateks aastateks eeskätt saksa matemaatiku H i l b e r t i, ungari matemaatiku R i e s z i ja poola matemaatiku B a n a c h i uurimuste tulemusena klassikalise analüüsi, geomeetria ja algebra ideede ning meetodite ühendamisel. Funktsionaalanalüüs erineb klassikalisest analüüsist eeskätt selle poolest, et siin on saanud funktsioon kvalitatiivselt uue, erakordselt avara sisu: klassikalise funktsiooni mõiste on üle kasvanud kaasaegseks o p e r a a t o r i mõisteks. Olgu R ja R' mingid suvalised hulgad. Kui hulga R igale elemendile vastab hulga R' kindel element, siis öeldakse, et hulgal R on defineeritud operaator, mille väärtused kuuluvad hulka R'. Tähistades operaatori tähega F, märgime sümboliga $F(x)$ hulga R elemendile x vastava elemendi hulgast R' (analoogiliselt klassikalisele funktsioonile, mis kujutab operaatorit, mille määramispiirkonnaks R on mingi hulk eukleidilises ruumis ja muutumispiirkonnaks R' mingi hulk arvsirgel). Ka reaalmuutuja funktsiooniteoorias on funktsiooni mõiste oluliselt avardunud võrreldes temale eelneva ajastu klassikalise funktsiooni mõistega, kuid mitte sel määral nagu funktsionaalanalüüsis. Nimelt sel ajal, kui klassikaline analüüs piirdub põhiliselt pidevate (täpsemalt peaaegu kõikjal pidevate, s. o. Riemanni mõttes integreeruvate) funktsioonide uurimisega, vaatleb reaalmuutuja funktsiooniteooria nn. m õ õ t u v a i d f u n k t s i o o n e, mis, nagu näitas Moskva matemaatik L u z i n juba 1912. a., erinevad pidevatest funktsioonidest kuitahes väikese (aga siiski nullist erineva) mõõduga hulgal.

Et operaatorite uurimisel oleks võimalik rakendada piirväärtuste meetodit kui matemaatilise analüüsi põhilist meetodit, peab hulkadesse R ja R' tooma ümbruse mõiste, teiste sõnadega, hulkades R ja R' tuleb defineerida mingi topoloogiline struktuur. Siin peitubki üks kanal, mille kaudu geomeetrilised ideed ja meetodid jõuavad kaasaegsesse analüüsi. Teine kanal (mille juures me käesolevas artiklis ei peatu), peitub mitmemõõtmeliste pindade diferentsiaalgeomeetrias. Hulkades R ja R', mis esinevad operaatori F määramis- ja muutumispiirkondadena, peab aga olema defineeritud ka algebraline struktuur. Millest see nähtub?

Funktsionaalanalüüsi esimene iseloomulik joon avaldub selles, et siin on äärmiselt suur tähtsus nn. lineaarsetel probleemidel, s. o. probleemidel, mis on kirjeldatavad lineaarsete operaatoritega. Siinjuures nimetame operaatorit F lineaarseks, kui F rahuldab järgmist kahte tingimust:

$$F(x_1 + x_2) = F(x_1) + F(x_2), \quad F(\lambda x) = \lambda F(x),$$

kus x_1, x_2 ja x on suvalised elemendid hulgas R, aga λ — suvaline skalaar. Näiteks nn. diferentseerimisoperator $F(x) = \frac{dx}{dt}$, kus $x = x(t)$ tähendab diferentseeruvat t funktsiooni, on lineaarne operaator. Lineaarsuse tingimustel on mõte vaid siis, kui hulkades R ja R' on defineeritud liitmise ja skalaariga korrutamise tehted. Need tehted aga toovad hulkadesse R ja R' vähemalt vektorruumi struktuuri. Seega lineaarse operaatori F korral peavad hulgad R ja R' olema vähemalt lineaarsed ruumid. Öeldu käib aga ka mittelineaarse operaatori F kohta, kui nõuda selle operaatori diferentseeruvust. Nimelt analoogiliselt funktsiooni diferentseeruvuse mõistega nimetame operaatorit F diferentseeruvaks, kui operaatorit F saab lokaalselt (s. t. antud punkti ümbruses) kuitahes täpselt lähendada pideva lineaarse operaatoriga. Täpsemalt, operaator F on diferentseeruv kohal x, kui leidub niisugune pidev lineaarne operaator A, et kehtib seos

$$F(x + h) - F(x) = A(h) + \alpha,$$

kus α on kõrgemat järku lõpmata väike kui h protsessis $h \to 0$ (0 tähendab siin R kui vektorruumi nullelementi). Operaatorit A nimetatakse operaatori F tuletiseks kohal x. Seega kui F on mittelineaarne operaator, siis tema tuletis ikkagi on lineaarne operaator, millel on mõte ainult siis, kui hulkades R ja R' on olemas vektorruumi struktuur.

Siit ilmneb vektorruumi suur tähtsus kaasaegses analüüsis. Liialdamata võib öelda, et vektorruum on üks kõige põhilisemaid mõisteid kaasaegses matemaatikas üldse. Sellest ilmneb ka lineaaralgebra suur osatähtsus tänapäeva matemaatikas. Klassikaline analüüs aga teatavasti ei kasuta mitme muutuja funktsioonide teoorias esinevate teisenduste (näiteks muutujate vahetuse) kui operaatorite tuletise mõistet, milleks on mitme muutuja funktsioonide teoorias aluseks oleva eukleidilise ruumi kui vektorruumi teatav lineaarteisendus. Selle lineaarteisenduse asemel kasutab klassikaline analüüs ainult tema determinanti — nn. funktsionaaldeterminanti. Seetõttu klassikalisel mitme muutuja funktsioonide diferentsiaal- ja integraalarvutusel puudub see mõistete ja meetodite selgus ning algebraline ja geomeetriline läbinähtavus, mis on omane funktsionaalanalüüsi vastavatele mõistetele ja meetoditele (muidugi sellele, kes funktsionaalanalüüsi tunneb).

Nagu nägime, peavad süsteemides, mida uurib funktsionaalanalüüs, esinema tingimata topoloogiline ja algebraline struktuur. Seega, kui reaalmuutuja funktsiooniteooriat saab sügavalt mõista ainult see, kes tunneb hästi hulgateooriat, siis funktsionaalanalüüsi sügavaks sisuliseks mõistmiseks on vaja peale hulgateooria veel hästi tunda topoloogiat ja kaasaegset algebrat. Selles peitub funktsionaalanalüüsi teine iseloomulik joon.

Lõpuks olgu rõhutatud, et käesolevas artiklis ei ole puudutatud kaasaegse analüüsi neid iseloomulikke jooni, mis on seotud nn. konstruktiivse meetodiga, kuna konstruktiivne matemaatiline analüüs pole veel välja jõudnud oma kujunemise faasist. Ei ole aga midagi võimatut selles, kui konstruktiivne analüüs saab kord funktsionaalanalüüsi asemel tuleviku kaasaegsele analüüsile iseloomustavaks osaks.

Tsiteeritud kirjandus

1. Дьёдонне, М. Основы современного анализа. М., 1964.
2. Kull, I., Reaalmuutuja funktsioonide teooria. Trt., 1962.
3. Бурбаки, Н. Архитектура математики. — «Математическое просвещение». 1960 № 5, lk. 99—112.
4. Курош, А. Г., Лекции по общей алгебре. М., 1962.
5. Бари, Н. К. Тригонометрические ряды. М., 1961.

MIS ON PLASTILISUSETEOORIA?

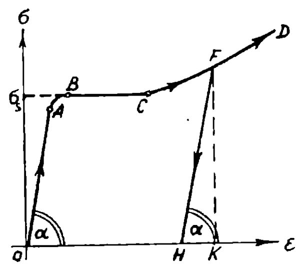
Ü. Lepik

Kiire tehniline progress kahekümnendal sajandil on mõjunud viljastavalt teaduse arengule. Peamiselt just tehnika vajaduse tõttu on tekkinud mitmed uued teaduseharud nagu küberneetika, informatsiooniteooria, magnetohüdrodünaamika, plasmateooria, üleheliliste kiiruste mehhaanika, kvantkeemia jt. Sellesse loetellu tuleks paigutada ka plastilisuseteooria. Ehkki esimesed tööd sellelt alalt on pärit juba 1870. aastast, oli neil esialgu vaid puhtteoreetiline tähtsus. Laiaulatuslik plastilisuseteooria areng koos rakendamisega tehnikasse algas alles mõnikümmend aastat tagasi. Tänapäeval on see teaduseharu aga muutunud küllaltki ulatuslikuks distsipliiniks, mille tundmiseta poleks võimalik mitmete kaasaegsete seadmete ja konstruktsioonide projekteerimine. Arvestades plastilisuseteooria «noorust» on tema problemaatika ja rakendused laiemates ringkondades veel suhteliselt vähe tuntud. Selle lünga osaline täitmine ongi käesoleva kirjutise ülesandeks.

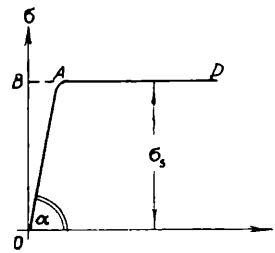
1. Materjali tõmbediagramm. Vaatleme silindrilist varrast, mis on valmistatud terasest, vasest, puust või mõnest muust materjalist ja mis on asetatud tõmbemasinasse. Vardale rakendatud koormust P suurendatakse pidevalt. Olgu F varda ristlõike pindala; suurus $\sigma = {}^{P}/_{F}$ iseloomustab siis vardas mõjuvat tõmbepinget. Tähistame varda algpikkuse l-ga, tema pikenemise antud koormuse mõjul Δl-ga; relatiivne pikenemine on seega $\varepsilon = \Delta l / l$. Vaatame, kuidas oleneb relatiivne pikenemine varda pingest. Selleks koostame tõmbekatse andmete põhjal joonisel 1 kujutatud diagrammi. Diagrammi osas OA on pinge võrdeline deformatsiooniga; see on nn. elastsete deformatsioonide piirkond. Puutuja tõusu punktis O nimetatakse elastsusmooduliks ja tähistatakse sümboliga E, seega $E = \tan \alpha$. Pärast suhteliselt lühikest üleminekupiirkonda AB järgneb meie diagrammil lõik BC, mille ulatuses pinge σ ei muutu. Sel korral öeldakse, et toimub materjali plastiline voolamine ning piirkonda BC nimetatakse voolavuspiirkonnaks. Pinget voolavuspiirkonnas tähistame sümboliga σ_s. Edasi järgneb graafikul uuesti tõusev osa CD (nn.

kalestumispiirkond), kuni lõpuks punktis D varda tugevusvaru on ammendatud ja toimub purunemine.

Joonisel 1 esitatud diagrammi kuju sõltub olulisel määral varda materjalist. Nii näiteks võib mõnedel juhtudel puududa voolavuspiirkond, teistel kalestumispiirkond jne. Kui lihtsuse mõttes jätta arvesse võtmata kalestumispiirkond, siis saame diagrammi, mis vastab nn. ideaalselt plastilisele materjalile (joon. 2). Mõningate probleemide korral osutub vajalikuks liht-



Joonis 1.



Joonis 2.

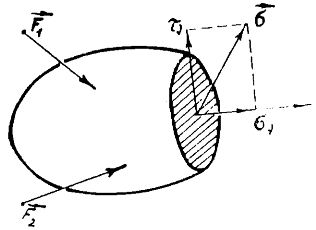
sustada saadud diagrammi veelgi. Kuna üldiselt on elastsusmoodul E üsna suur arv (näit. terase korral $E = 2{,}1 \cdot 10^6$ kg/cm^2), siis võib võtta $E \to \infty$ ning diagramm joonisel 2 koosneb nüüd kahest ristuvast sirgest OB ja BD. Diagrammi osas OB on $\varepsilon = 0$ ning seega mingeid deformatsioone ei toimu (materjal on jäik), sellele järgneb aga plastiline voolamine konstantse pinge σ_s juures. Niisugust nn. jäik-plastilisele materjalile vastavat diagrammi kasutatakse tänapäeval üsna sageli.

Siiani oletasime, et varda tõmbekatsel kasvab koormus monotoonselt. Vaatleme aga nüüd juhtu, kus mingis diagrammi punktis F (joonisel 1) hakatakse koormust vähendama. Katse näitab, et sel korral me liigume diagrammil mööda sirget FH, mis on rööbiti elastsete deformatsioonide piirkonnaga OA. Koormuse täielikul mahavõtmisel jääb üks osa deformatsioonist (lõik OH) püsima; seda nimetame jääkdeformatsiooniks ehk plastiliseks deformatsiooniks. Tagasiminev osa HK kannab aga elastse deformatsiooni nimetust. Kui koormuse langus teostada lõigul OA, siis kogu deformatsioon on elastne ja pärast koormuse mahavõtmist vardas mingeid jääkdeformatsioone ei ilmne.

Elastsusteoorias kasutatakse diagrammilt joonisel 1 ära ainult piirkond OA. Selge, et niisugune tee pole kuigi ökonoomne, sest siin ei ammendata materjali tugevusvaru täielikult. Kui võtta arvesse ka plastiliste deformatsioonide piirkond AD, siis võime (eriti just suure kalestumisega materjalide korral) sama detaili koormata tunduvalt enam. Viimase asjaolu tõttu leiab plastilisuseteooria inseneride hulgas järjest enam tähelepanu.

2. **Peapinged ja peadeformatsioonid.** Eespool käsitlesime suhteliselt lihtsat ülesannet, kus pinge- ja deformatsiooniseisundid olid ühedimensioonilised. Vaatleme nüüd, kuidas määrata pingeid ja deformatsioone meelevaldse kujuga kehas, millele on peale pandud mingid väliskoormused. Kujutleme, et oleme vaadeldava keha läbi lõiganud tasandiga ja eemaldanud sellest ühe poole (joon. 3).

Lisaks rakendatud koormustele F_1, F_2 jne. peavad lõikepinnal mõjuma mingid tungid, mis kompenseerivad äralõigatud osa mõju. Nende tungide suurust pinnaühiku kohta nimetamegi pingeks vaadeldaval lõiketasandil. Pingevektor σ üldiselt ei ühti lõiketasandi normaaliga ν, vaid on nii normaalkomponendiga σ_ν kui ka lõiketasandis asetseva tangentsiaalkomponendiga τ_ν. Mõlemad suurused sõltuvad valitud lõikepinna orientatsioonist. Võib tõestada, et keha igas punktis saab näidata kolme ristuvat tasandit, mille puhul kogupinge on normaalne (s. t. $\tau_\nu = 0$). Niisugustele tasanditele vastavaid pingeid σ_1, σ_2, σ_3 nimetatakse p e a p i n g e t e k s; tasandid ise kannavad p e a t a s a n d i t e nimetust.



Joonis 3.

Võib püstitada veel teistsugusegi probleemiseade: leida tasandid, milledel tangentsiaalpinged omandavad ekstremaalsed väärtused. Saab näidata, et niisugusteks tasanditeks osutuvad peatasanditevahelisi nurki poolitavad tasandid. Neile tasandeile vastavaid t a n g e n t s i a a l p i n g e t e e k s t r e m a a l s e i d v ä ä r t u s i tähistame sümbolitega τ_1, τ_2, τ_3; kehtivad võrdused

$$\tau_1 = \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3), \qquad \tau_2 = \frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1), \qquad \tau_3 = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2). \tag{1}$$

Asume nüüd deformatsiooniseisundi analüüsimisele. Selleks eraldame vaadeldavast kehast välja elementaar-risttahuka ja uurime selle muutumist deformatsiooni käigus. Siin tuleb eristada kahte asjaolu. Ühelt poolt muutuvad deformeerimisel risttahuka külgede pikkused, teiselt poolt võivad aga muutuda ka nurgad risttahuka külgservade vahel (niisugust deformatsiooni nimetatakse nihkedeformatsiooniks). On alati võimalik keha igas punktis näidata kolm niisugust ristiseisvat sihti, et nende sihtidega rööbiti võetud risttahuka külgservad ei allu nihkedeformatsioonidele (s. t. muutuvad vaid risttahuka mõõtmed, kuid nurgad külgservade vahel jäävad endiselt täisnurkadeks). Niisuguseid sihte nimetatakse d e f o r m a t s i o o n i p e a s i h t i d e k s; nende sihtidega ristiseisvaid tasandeid — d e f o r -

matsiooni peatasandeiks. Peasihtidele vastavaid relatiivseid deformatsioone nimetatakse peapikenemiseks (neid tähistame sümbolitega ε_1, ε_2, ε_3). Analoogiliselt sellele, mida nägime eespool pingeseisundi uurimisel, võib ka siin otsida tasandeid, millel nihkedeformatsioonid oleksid ekstremaalsed. Sellised tasandid kannavad peanihketasandite nime ja osutuvad deformatsiooni peatasandite vaheliste nurkade poolitajateks. Peanihketasandeile vastavad nihkekomponendid (need on risttahuka tahkude vaheliste täisnurkade muudud) kannavad nimetust peanihked. Peapikenemistega on peanihked γ_1, γ_2, γ_3 seotud valemitega

$$\gamma_1 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \quad \gamma_2 = \varepsilon_3 - \varepsilon_1, \quad \gamma_3 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2. \tag{2}$$

Mõningatel juhtudel kasutatakse plastilisuseteoorias deformatsioonide (s. o. relatiivsete pikenemiste ning nihete) asemel vastavate suuruste muutusi ajaühikus (muutumiskiirusi). Kõik, mis on eespool öeldud deformatsiooniseisundi kohta, jääb kehtima ka siin, kui vaid asendada sõnad «deformatsioon», «peapikenemine», «peanihe» nimetustega «deformatsioonikiirus», «peapikenemiskiirus» ja «peanihkekiirus».

3. Plastilisusetingimused. Vaatame nüüd, missugustel tingimustel ilmnevad keha mingis punktis plastilised deformatsioonid. Ühedimensioonilise pingeseisundi korral (näit. varda venitus) on probleemi lahendus väga lihtne — plastilised deformatsioonid tekivad siis, kui pinge vardas ületab elastsuspiiri (punkt A joonisel 1). Kuna aga elastsuspiir tavaliselt vaid vähe erineb voolavuspiirist σ_s, siis võime plastilisuse tingimuseks antud juhul võtta $\sigma = \sigma_s$. Hoopis keerukam on saada plastilisusetingimusi üldise (s. o. kolmedimensioonilise pingeseisundi) juhuks.

Ajalooliselt esimese plastilisusetingimuse esitas B. de Saint-Venant 1871. a. Aluseks olid prantsuse inseneri H. Tresca katsed. Surudes metalle suure rõhu all läbi väikese avause pani Tresca tähele, et plastiline voolamine algab antud metalli juures alati siis, kui maksimaalne tangentsiaalne pinge omandab väärtuse $\frac{1}{2}\sigma_s$. Kandes selle tulemuse üle üldise pingeseisundi juhule formuleeris Saint-Venant oma plastilisusetingimuse kujul

$$|\tau_1| \leqslant \frac{\sigma_s}{2}, \quad |\tau_2| \leqslant \frac{\sigma_s}{2}, \quad |\tau_3| \leqslant \frac{\sigma_s}{2}. \tag{3}$$

Niikaua, kui nendes kolmes valemis figureerivad võrratusmärgid, on deformatsioonid keha antud punktis elastsed; kui aga kas või ükski võrratusest asendub võrdusega, siis ilmnevad plastilised deformatsioonid.

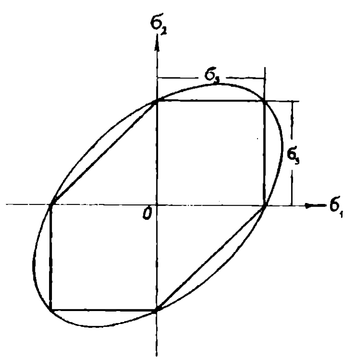
Kuna Saint-Venant'i plastilisusetingimuse puhul tuleb kogu aeg opereerida kolme võrratusega, siis tegi R. Mises 1913. a.

ettepaneku tingimused (3) asendada lihtsama nõudega

$$\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2 \leqslant \frac{1}{2}\sigma_s^2. \qquad (4)$$

Mises luges Saint-Venant'i tingimust täpseks, enda oma aga ligikaudseks. Hilisem analüüs ja vastavad katsed näitasid aga, et Misese tingimus on tegelikkusega koguni paremini kooskõlas kui Saint-Venant'i võrratused. Teoreetilise põhjenduse sellele esialgu paradoksaalsele tulemusele andis H. H e n c k y 1924. a.

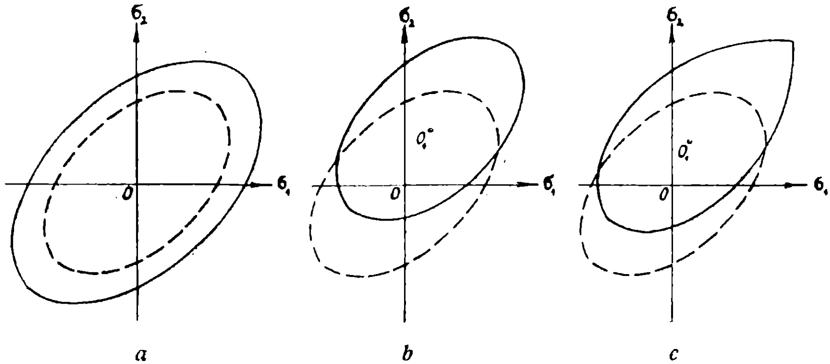
Saint-Venant'i ja Misese tingimused esitatakse tavaliselt teljestikus, kus koordinaattelgedeks on pingete peasuunad. Lihtsuse mõttes piirdume vaid juhuga, kus $\sigma_3 = 0$ (tasandiline pingeseisund). Arvestades valemeid (1), (3) ja (4) näeme, et Misese tingimus on $\sigma_1\sigma_2$-tasandil esitatav ellipsina, Saint-Venant'i tingimus aga selle sisse joonestatud kuusnurgana (joon. 4.).



Joonis 4.

Erinevus mõlema plastilisusetingimuse vahel on suhteliselt väike ning küsimus, kumba neist kasutada, pole praktika seisukohalt tavaliselt kuigi oluline. On huvitav märkida, et viimase aja uurimustes on uuesti hakatud kasutama Saint-Venant'i tingimust. Põhjuseks on siin asjaolu, et Saint-Venant'i tingimus on pingekomponentide suhtes tükati lineaarne, mis mõningate probleemide puhul (näiteks kandevõime määramine) lihtsustab lahenduskäiku tunduvalt.

Olgu meil antud mingi plastilisusetingimus (näiteks Misese tingimus). Ideaalselt plastilise (s. o. kalestumiseta) materjali korral ei saa ellipsi kuju ja mõõtmed deformatsiooni käigus muutuda. Kui pingeseisundit iseloomustav punkt (σ_1, σ_2) asetseb ellipsi sees, siis deformatsioonid on elastsed, kui see punkt aga asetseb ellipsil, toimub keha vastavas punktis plastiline voolamine. Kalestumisega materjali korral muutub plastiliste deformatsioonide kasvades üldiselt nii ellipsi kuju kui ka asend. On ette pandud mitmesuguseid kalestumishüpoteese, mida skemaatiliselt esitab joonis 5. Joonisel 5a on toodud nn. i s o t r o o p n e k a l e s t u m i n e (ellips jääb oma esialgse kujuga sarnaseks ning on sarnasusasendis); joonisel 5b näeme nn. k i n e m a a t i l i s t k a l e s t u m i s t (muutub ellipsi keskpunkti asend). Mõned viimase aja uurimused annavad põhjust oletada, et plastiliste deformatsioonide käigus võib muutuda ka ellipsi kuju: ellips oleks nagu kummikelme, mis venitatakse välja mingis oma punktis (tekib nn. nurkpunkt — joon. 5c). Küsimusele, missugune kõigist esitatud kalestumismehhanismidest peegeldab tegelikkust kõige täpsemini, võivad vastuse anda vaid eksperimentaalsed andmed. Neid on aga tänapäeval kahjuks veel vähe, et teha lõplikku otsust ühe või teise hüpoteesi kasuks.



Joonis 5.

Isotroopse kalestumise korral võib Misese tingimusele anda praktilisteks rakendusteks sobivama kuju, kui sisse tuua **p i n g e i n t e n s i i v s u s e** σ_i ja **d e f o r m a t s i o o n i i n t e n s i i v s u s e** e_i mõisted valemitega

$$
\begin{aligned}
\sigma_i &= \sqrt{2}\sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2},\\
e_i &= \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2}.
\end{aligned}
\qquad (5)
$$

Ideaalselt plastilise materjali korral on Misese tingimuseks nüüd valemi (4) põhjal $\sigma_i \leqslant \sigma_s$. Kalestumise korral on pingeintensiivsus deformatsiooniintensiivsuse funktsiooniks: $\sigma_i = \Phi(e_i)$. Rohkearvulised katsed on näidanud, et funktsiooni Φ kuju praktiliselt ei sõltu koormamisviisist. See asjaolu annab võimaluse funktsiooni Φ määramiseks näit. tõmbediagrammilt (joon. 1).

4. Deformatsiooni- ja voolutüüpi plastilisuseteooriad. Plastilisuseteooria ülesannete formuleerimisel ning lahendamisel ei saa piirduda üksnes plastilisusetingimustega, vaid on tarvis teada ka seoseid pingete deformatsioonide (resp. deformatsioonikiiruste) vahel. Nende seoste konstrueerimisel võib kasutada mitmesuguseid lähtehüpoteese, mis viivad erinevatele plastilisuseteooriatele.

Üheks tänapäeval enam kasutatavaks plastilisuseteooriaks on nn. **v ä i k e s t e e l a s t i l i s - p l a s t i l i s t e d e f o r m a t -**

sioonide teooria (ehk lühemalt «deformatsiooniteooria»), mille loojaks loetakse H. Hencky't (1924. a.) ja millele kaasaegse kuju on andnud A. A. Iljušin. Deformatsiooniteooria baseerub hüpoteesil, mille kohaselt ekstremaalsed tangentsiaalsed pinged on keha igas punktis võrdelised peanihetega, s. t.

$$\frac{\tau_1}{\gamma_1} = \frac{\tau_2}{\gamma_2} = \frac{\tau_3}{\gamma_3}. \tag{6}$$

Teistes nn. «voolutüüpi» plastilisuseteooriates seotakse pinged deformatsioonikiirustega, võttes näiteks maksimaalsed tangentsiaalsed pinged võrdelisteks peanihete kiirustega, s. t.

$$\frac{\tau_1}{\dot{\gamma}_1} = \frac{\tau_2}{\dot{\gamma}_2} = \frac{\tau_3}{\dot{\gamma}_3}, \tag{7}$$

kus $\dot{\gamma}_1$, $\dot{\gamma}_2$, $\dot{\gamma}_3$ on peanihete kiirused.

Esimene «voolutüüpi» plastilisuseteooria esitati jäik-plastilise materjali jaoks B. de Saint-Venant'i ja M. Levy poolt juba 1871. a. Hiljem on seda korduvalt täiendanud R. Mises (1913), L. Prandtl (1924), A. Reuss (1930) jt. Hilisematest sellealastest uurimustest väärib tähelepanu W. Prageri töö 1953. aastast. Prager andis voolavusseadusele (7) geomeetrilise interpretatsiooni, näidates, et deformatsiooni kiiruse vektor on risti pinnaga, mis esitab plastilisusetingimust $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$-teljestikus. Seda nn. assotsieeritud voolamisseadust on plastilisuseteoorias viimase aastakümne vältel laialdaselt rakendatud.

Asudes deformatsiooni- ja voolutüüpi teooriate hindamisele märgime eelkõige, et deformatsiooniteooria sisaldab eneses erijuhuna ka elastsuseteooriast tuntud valemid (üldistatud Hooke'i seaduse); vooluteooriaid seevastu võib aga vaadelda kui hüdrodünaamika valemite üldistamist plastilise voolamise juhule.

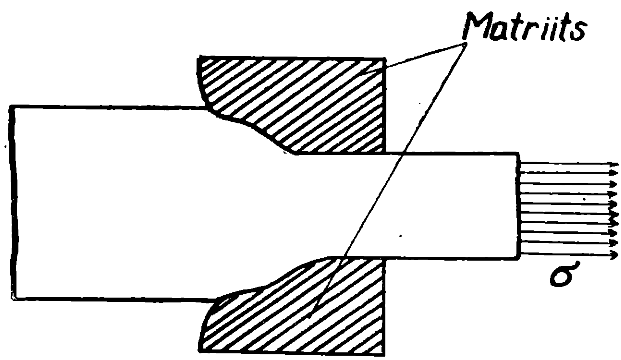
Plastilisuseteoorias tuleb eristada nn. liht- ja liitkoormamist. Esimese all mõistame niisugust koormamisviisi, mille puhul kõik välistungid kasvavad võrdeliselt ühe parameetriga (näiteks ajaga). Liitkoormamise juures võib muutuda koormamise iseloom (näit. paindele võib lisanduda vääne), osa väliskoormusi võib kasvada, teised aga samaaegselt väheneda jne. A. A. Iljušinil õnnestus näidata, et lihtkoormuse korral kõik deformatsiooni- ja voolutüüpi plastilisuseteooriad annavad ühtelangevad tulemused. Et aga deformatsiooniteooria on vooluteooriatest matemaatiliselt tunduvalt lihtsam (viimasel juhul saadud diferentsiaalvõrrandite järk on ühe võrra kõrgem), siis on loomulik lihtkoormuse juhul kasutada deformatsiooniteooriat. Deformatsiooniteooria kasutamine on lubatav ka juhul, kus koormus vähe erineb lihtsast. Üldiselt aga tuleb märkida, et liitkoormuse korral deformatsiooniteooria võib anda tulemusi, mis tunduvalt kalduvad kõrvale eksperimentaalsetest. Teiselt poolt ei saa täielikult rahulduda ka tulemustega, mille annab vooluteooria lihtsaim variant (7). Keerulisemate voolutüüpi teooriate rakendamisel õnnestub küll parandada kooskõla teoreetiliste ja eksperimentaalsete andmete vahel liitkoormamisel, kuid saadud diferentsiaalvõrrandid on sedavõrd keerulised, et konkreetsete ülesannete lahendamine põrkub sageli ületamatutele matemaatilistele raskustele. Ilmselt on siin tarvis välja töötada mingi vahepealne lihtsustatud lahendusvariant, mis garanteerib siiski praktikas vajaliku täpsuse. See on probleem, millele tänapäeva plastilisuseteooria pole veel suutnud anda lõplikku vastust.

Märgime, et kõrvuti deformatsiooni- ja voolutüüpi plastilisuseteooriatega eksisteerib ka kolmas rühm — nn. liugumisteooriad. Sellele rühmale panid aluse S. Batdorf ja B. Budiansky (1949. a.), lähtudes kristallide mikrostruktuurist. NSV Liidus on seda laadi teooriate propageerijaks olnud Läti NSV akadeemik A. Malmeister.

5. **Mõningaid plastilisuseteooria rakendusi.** Plastilisuseteooria rakenduslik osa on viimase 15—20 aasta jooksul eriti ulatuslikult kasvanud, kusjuures suur osa lahendatud ülesannetest on võetud kasutusele inseneripraktikas. Et käesoleva artikli napp ruum ei võimalda anda kuigi ammendavat ülevaadet plastilisuseteooria rakendustest, siis piirdume järgnevas vaid mõne olulisema ülesannete rühma märkimisega.

Nagu juba eespool öeldud, teostades arvutused elastsusteooria valemitega, ei kasuta me materjali tugevusvaru küllaldaselt; teiste sõnadega — me kulutame materjali enam, kui see oleks vajalik. Siit tulenebki üks plastilisuseteooria põhiülesannetest: kui palju võib koormata mingit konstruktsiooni või selle osa (näit. varrast, plaati, koorikut) ilma, et oleks karta tema purunemist. Selle nn. kandevõime probleemi lahendamisel on olulist edu saavutatud eriti just viimasel ajal: on formuleeritud teoreemid, mis võimaldavad piirkoormusele leida alam- ja ülemtõkke; Saint-Venant'i plastilisusetingimuse ja assotsieeritud voolamisseaduse kasutamine lihtsustas suurel määral probleemi matemaatilist külge ja võimaldas lahendada rea praktikale olulisi ülesandeid. On huvitav märkida, et kandevõimeteoorias väljatöötatud meetodeid on hakatud rakendama ka matemaatilises planeerimises.

Ehkki plastilisuseteooriat võib vaadelda kui elastsusteooria üldistust jäävate deformatsioonide juhule, on tema probleemide ring tunduvalt laiem — plastilisuseteooria võimaldab formuleerida ja lahendada ka mitmeid niisuguseid ülesandeid, mis elastsusteooria kursuses ei esine. Siia kuuluvad näiteks tehnoloogilised ülesanded, nagu metallide valtsimine, stantsimine, tõmbamine. Illustratsioonina vaatleme siinkohal seadet, mida kasutatakse traadi tõmbamiseks. Seadme põhiosaks on eriti tugevast materjalist matriits, mille läbimõõt tema ühe otsa poole aheneb (joon. 6). Läbi matriitsi tõmmatakse traati. Tõmbepinge σ peab olema sealjuures niivõrd suur, et matriitsi vahel olevas traadi osas toimuks plastiline voolamine. Sellise seadme projekteerimisel tuleb lahendada rida probleeme, nagu kui suur peaks olema tõmbepinge σ, millise kujuga peaks olema matriitsi avaus, kui suured pinged ilmnevad matriitsis (kas pole näiteks nende tagajärjel karta matriitsi purunemist) jne. Kõikidele nendele küsimustele annabki vastuse plastilisuseteooria.



Joonis 6.

Intensiivselt areneb tänapäeval plastilisuseteooria osa, mida tuntakse **reoloogia** nime all. See on distsipliin, kus uuritakse keha deformatsiooni- ja pingeseisundi muutumist ajas. Kujutlegem näiteks tõmmatud varrast. Kui tõmbekatse katkestada ning jätta varda otsa konstantne koormus, siis võib täheldada täiendavat varda pikenemist aja funktsioonina. Seda lisadeformatsiooni tuntakse **elastse järelmõju** nimetuse all. Tavalistel tingimustel elastne järelmõju on suhteliselt väike ning seda ei pruugi arvestada. Erinev on olukord seadmetega, mis töötavad kõrges temperatuuris (gaasiturbiini labad, aatomireaktorid, kosmilised raketid jne.) Siin on deformatsiooni kasvamine ajas niivõrd intensiivne, et see teatud aja möödudes võib kutsuda esile isegi vastava konstruktsiooni purunemise. Niisugusel juhul kõneldakse materjalide **roomavusest**. On huvitav märkida, et mõningatel materjalidel (näit. betoon, pigi, seatina) ilmneb roomavus juba tavaliste temperatuuride juures. Roomavusnähtuste süstemaatiline uurimine algas alles käesoleva sajandi neljakümnendatel aastatel. Esialgsed tööd olid põhiliselt eksperimentaalsed (kõige pikema katse kestusega 100 000 tundi tegi E. Robinson; katse lõppes 1943. aastal). Eksperimentaalsetele tulemustele järgnesid teoreetilised üldistused ning tänapäeval on välja töötatud juba rida meetodeid roomavusdeformatsioonide arvestamiseks.

Viimase aja uurimused on näidanud, et ajast sõltuvaid nähtusi ei saa ignoreerida ka mitmete plastmassist konstruktsioonide juures. Arvestades plastmasside üha suurenevat osatähtsust meie rahvamajanduses ja tehnikas, on asutud uue teadusharu — plastmasside mehhaanika aluste väljatöötamisele.

6. Ajaloolisi märkmeid. Esimesed plastilisuseteooria-alased tööd on pärit Prantsusmaalt (B. de Saint-Venant ja M. Levy 1870—1871). Sellele järgneb neljakümneaastane vahemik, kus ei ilmu ühtki kaalukamat tööd. Käesoleva sajandi teisest aastakümnest alates kandub plastilisuseteooria-alane uurimistöö üle Saksamaale: T. Kàrmàni, R. Misese, L. Prandtli, H. Hencky, A. Nadai, A. Reussi ja mitmete teiste teadlaste töödel on suur tähtsus plastilisuseteooria teoreetiliste aluste väljakujundamisel. Konkreetsete probleemide osas tegeldi sel ajal põhiliselt plastilisuseteooria tasapinnalise ülesandega (lähtuti vooluteooriast ning jäik-plastilise materjali kontseptsioonist). Esimene plastilisuseteooria-alane uurimus Nõukogude Liidus ilmus 1935. a. praeguselt akadeemikult S. L. Sobolevilt. Käesoleva sajandi neljakümnendatest aastatest algab intensiivne plastilisuseteooria areng NSVL-is ja USA-s. Kui USA-s lähtutakse põhiliselt voolutüüpi plastilisuseteooriatest, siis NSVL-is pannakse pearõhk deformatsioonitüüpi plastilisuseteooriate väljatöötamisele ja rakendamisele; suuri teeneid selles osas on NSVL TA korrespondentliikmel A. A. Iljušinil. Olulist edu saavutatakse ka mitmete konkreetsete probleemide lahendamisel (tasapinnaline ülesanne — S. A. Hristianovitš ja V. V. Sokolovski, vääne ning paine — L. A. Galin, plaatide ning koorikute kandevõime ja stabiilsus — A. A. Iljušin, V. V. Sokolovski jne). Reoloogia ning roomavusteooria alal on meil suurimaks autoriteediks akadeemik J. N. Rabotnov (esimesed selle-alased tööd 1948. aastast). Ameerika Ühendriikide teadlastest on suurima panuse plastilisuseteooriasse andnud W. Prager. Plastilisuseteooria matemaatiliste aluste väljatöötamise osas on suured teened inglasel R. Hillil.

Tänapäeval on plastilisuseteooria ülesannete lahendamisele suunatud juba üsna suurearvulised uurijate kollektiivid. Tartu Riiklikus Ülikoolis on plastilisuseteooriaga tegeldud 1950. a. alates; on uuritud varraste, plaatide ja koorikute stabiilsust ja läbipaindeid.

ALGORITMIDE BLOKK-SKEEMID

Ü. Kaasik

Ülesande ettevalmistamine elektronarvutil lahendamiseks seisneb tavaliselt selle ülesande lahendusalgoritmi blokk-skeemi koostamises [1]. Tegeliku programmi väljakirjutamine niisuguse skeemi järgi jääb siis juba kutselise programmeerija hooleks.

Kuigi algoritmide blokk-skeeme on praktikas tarvis peamiselt just vastavate programmide koostamiseks, ei tule siiski unustada blokk-skeemide teisi võimalikke rakendussuundi ja eeskätt nende üldhariduslikku ja tunnetuslikku väärtust. Nimelt on blokk-skeemid kasutatavad väga mitmesuguste protsesside kulgemise täpseks ja ülevaatlikuks kirjeldamiseks ning nende koostamine osutub seetõttu heaks vahendiks keeruliste nähtuste struktuuri süstemaatilisel tundmaõppimisel ja üldse loogiliselt järjekindla mõtlemise harjutamisel. Seega võivad blokk-skeemid abistada ka õpetajat ja õpilast kõige erinevamate distsipliinide esitamisel ja aine omandamisel.

Käesoleva artikli eesmärgiks on kirjeldada mõningaid üldisi põhimõtteid, mida blokk-skeemide koostamisel on kasulik silmas pidada. Peamine tähelepanu on sealjuures pööratud matemaatilist laadi algoritmide blokk-skeemide koostamisega seotud küsimustele.

Kogu järgnevas on eeldatud, et vaadeldavaid algoritme realiseeritakse seadmel, mis saab operatsioone sooritada vaid ükshaaval.

Mingi ülesande lahendusalgoritmi (või protsessi kulgemist) kirjeldava blokk-skeemi saamiseks tuleb vaadeldav algoritm (protsess) jaotada teatavateks elementaaroperatsioonideks ning määrata nende sooritamise järjekord. Elementaaroperatsiooni

[1] Paar lihtsat blokk-skeemi koostamise näidet, samuti ülevaade elektronarvuti töötamispõhimõtteist ja programmeerimise alustest on toodud autori eelmises artiklis; vt. Kaasik, Ü., Elektronarvutid ja programmeerimine. — Matemaatika ja kaasaeg, IV, lk. 18—30. Mitmeid seal defineeritud mõisteid kasutatakse käesolevas artiklis.

mõiste täpsemat määratlust ei saa siin anda, sest see sõltub oluliselt seadmest, millel vaadeldavat algoritmi realiseerida kavatsetakse, ja samuti sellest eesmärgist, milleks blokk-skeemi koostatakse. Kõige üksikasjalikumalt välja kirjutatud blokk-skeemis moodustabki iga elementaaroperatsioon ühe b l o k i. Paberil on blokki otstarbekohane kujutada näiteks ristkülikuna, mille sisse on märgitud vastava operatsiooni kirjeldus.

Operatsioonide sooritamise järjekorda on sellise kirjutusviisi korral mugav märkida nooltega. Ühest blokist teise suunduv n o o l tähistab seda, et vahetult pärast esimesele blokile vastava operatsiooni lõpetamist tuleb hakata sooritama teisele blokile vastavat operatsiooni. Kui mingisse konkreetsesse blokki ühtki noolt ei suubu, siis tähendab see, et vastavat operatsiooni ei tule kunagi sooritada — ta on blokk-skeemis liigne. Kui mingist blokist ühtki noolt ei välju, siis peaks see olema skeemi viimane blokk, millega algoritmi töö lõpeb. Ühtluse mõttes lepime kokku, et kirjutame ka skeemi viimase bloki juurde väljuva noole ning varustame selle sõnaga «lõpp». Samuti kirjutame skeemi esimese bloki juurde sinna suubuva noole koos sõnaga «algus». (Olgu märgitud, et skeemil võib olla mitu viimast blokki, kuid üksainus esimene blokk.) Neid kokkuleppeid arvestades näeme, et *korrektselt koostatud skeemis peab igasse blokki suubuma vähemalt üks nool ja igast blokist väljuma vähemalt üks nool.*

Kui ühte blokki suubub mitu noolt (s. t. mitmest teisest blokist), siis tähendab see, et vastav korduvalt sooritatav operatsioon võib otseselt järgneda mitmele erinevale operatsioonile. Niisuguse olukorra võimalikkus on arusaadav ning ei nõua täiendavaid seletusi. Küllalt sageli esineb aga ka vastupidine olukord: ühest blokist väljub enam kui üks nool. Esimesel pilgul näib see olevat vastuolus eespool tehtud eeldusega, et algoritmi realiseeriv seade ei saa mitut operatsiooni korraga sooritada. Tegelikult osutuvad niisugused blokid aga vältimatuks igas hargnevat või tsüklilist algoritmi (protsessi) kirjeldavas blokk-skeemis.

Blokk-skeemide koostamisel tuleb sooritatavate operatsioonide iseloomust sõltuvalt teha vahet kaht liiki blokkide vahel. T ä i d e s a a t v a k s b l o k i k s nimetame niisugust, millest väljub üksainus nool, s. t. millele vastava operatsiooni lõpetamise järel tuleb alati asuda ühes ja samas kindlas blokis paikneva operatsiooni sooritamisele. Oma iseloomult on täidesaatvale blokile vastav operatsioon alati niisugune, et selle sooritamine annab vähemalt ühe tulemuse, mis on kas vaadeldava protsessi lõppresultaadiks, või mida kasutatakse algoritmi edasises töös. Kui täidesaatvale blokile vastav operatsioon niisugust tulemust ei anna, siis on see blokk skeemis liigne.

Kontrollivaks blokiks nimetame sellist, millest väljub enam kui üks nool ja millele vastava operatsiooni ainsaks ülesandeks on otsustada, missugust nendest nooltest valida. Ühtki hiljem vajalikku tulemust seda tüüpi blokile vastav operatsioon välja ei anna. Isegi kui mingi tulemus leitakse, siis kasutatakse seda ainult sellessamas blokis ettenähtud valiku teostamiseks.

Valikut mitme võimaluse vahel saab alati jaotada niisugusteks etappideks, et igal etapil on tegemist vaid kahe võimalusega [2]. Seda arvestades saab blokk-skeemid alati koostada nii, et kõik nende kontrollivad blokid teostavad valikut vaid kahe väljuva noole vahel. Niisuguseid kontrollivaid blokke tuleb eelistada eeskätt sellepärast, et valik kahe võimaluse vahel on tehniliselt lihtsamini realiseeritav (näiteks elektronarvutis). Kuid ka blokk-skeemi ennast on niisugusel juhul tavaliselt lihtsam kirja panna. Sellepärast lepimegi kokku, et *igast kontrollivast blokist peab blokk-skeemis väljuma täpselt kaks noolt.*

Kui kontrolliv blokk peab valima kahe võimaliku väljuva noole vahel, siis tehakse seda praktikas alati nii, et kontrollitakse mingi tingimuse täidetust. Juhul kui see tingimus osutub täidetuks, siis valitakse üks olemasolevatest nooltest, vastasel korral teine. Nende noolte eristamiseks kirjutatakse blokk-skeemis selle noole juurde, mida mööda toimub edasiminek tingimuse täidetuse korral, näiteks sõna «ja» või märk «+». Teise noole juurde kirjutatakse siis vastavalt «ei» või «—».[3]

Kontrolliv blokk sisaldab alati üheainsa elementaaroperatsiooni, mille sisuks on vastava tingimuse täidetuse kontrollimine ja valiku teostamine selle kontrolli tulemuse põhjal. Täidesaatev blokk võib aga sisaldada ka mitut sõltumatut operatsiooni. Blokk-skeemi lihtsustamiseks on isegi soovitav koondada ühte täidesaatvasse blokki kõik operatsioonid, mis kuuluvad algoritmis alati järjest sooritamisele. Selle põhimõtte järjekindel rakendamine võimaldab blokk-skeemis alati vältida niisuguseid nooltega ühendatud täidesaatvate blokkide paare, milles teise blokki

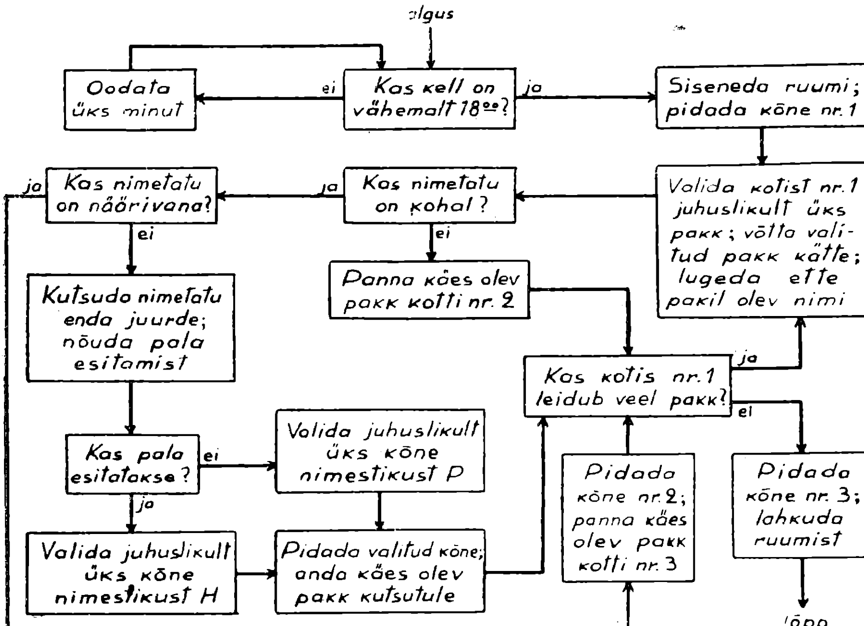
---

[2] Soovitame lugejal kontrollida, et valik m erineva võimaluse vahel on samaväärne $m-1$ niisuguse valikuga, kus iga kord on tegemist vaid kahe erineva võimalusega. Taandades aga sama probleemi näiteks valikutele kolme võimaluse vahel, tuleks m erineva võimaluse olemasolu korral teostada kokku $\left[\frac{m}{2}\right]$ valikut $\left(\left[\frac{m}{2}\right]\text{ tähendab arvu } \frac{m}{2} \text{ täisosa}\right)$.

[3] Tähistusviisi valikul soovitab autor kasutada järgmist põhimõtet: kui kontrollitav tingimus on sõnaliselt kirja pandud, siis tähistada väljuvaid nooli sõnadega «ja» ning «ei»; kui tingimus on antud matemaatilises sümboolikas, siis kasutada märke «+» ja «—». Olgu muide märgitud, et kui kontrollitava tingimuse esitame sõnaliselt, siis on ta küsimus, mis algab tavaliselt sõnaga «kas» ja lõpeb küsimärgiga. Täidesaatvasse blokki kuuluva operatsiooni sõnaline üleskirjutus on alati käsk midagi teha ja algab tavaliselt da-tegevusnimega.

suubub ainult üks nool. Segaduste vältimiseks tuleb sel juhul aga kokku leppida, et *täidesaatvas blokis kirjeldatud operatsioone teostatakse alati selles järjekorras, nagu nad blokki on kirjutatud.*

Vaatleme kirjeldatud üldiste põhimõtete realiseerimist kõigepealt ühe hästi lihtsa näite varal. Olgu meie ülesandeks konstrueerida mehhaaniline näärivana. Ülesande lahendamisele asumisel tuleb kõigepealt selgitada, mida üks näärivana üldse teeb, milline on tema tegevuse algoritm. Niisuguse algoritmi ühe võimaliku variandi blokk-skeem ongi esitatud joonisel 1. Selle blokk-



Joonis 1.

skeemi koostamisel on eeldatud, et näärivana peab saabuma kohale kell 18.00 (üheminutilise täpsusega). Tal peab olema kaasas: kingituste kott (kott nr. 1), tühi kott ülejäävate kingituste mahutamiseks (kott nr. 2), panipaik näärivanale määratud kingituse jaoks (kott nr. 3) ja peetavate kõnede tekstid (kõne nr. 1 — algtervitus; kõne nr. 2 — tänu saadud paki eest; kõne nr. 3 — lahkumissõnavõtt; kõnede nimestik H — paki kätteandmist saatvad sõnad neile, kes oma pala hästi esitasid; kõnede nimestik P — enne paki kätteandmist öeldavad manitsussõnad neile, kes pala esitamisega toime ei tulnud). Peale selle on eeldatud, et kotis nr. 1 kaasatoodud kingituspakid on kõik varustatud nimedega. Nime puudumisega kaasnevad komplikatsioonid on vaadeldava näite puhul lihtsuse huvides ära jäetud. Samuti on ära jäetud näiteks traditsioonilise vitsakimbuga seotud operatsioonid. Kõnede juhuslik valik nimestikest H ja P on sisse toodud selleks, et vältida monotoonsust näärivana tegevuses.

Joonisel 1 esitatud blokk-skeemi tähelepanelikult vaadeldes võib veenduda, et seal on arvestatud kõiki ülalsõnastatud põhimõtteid (jätame selle kontrollimise lugeja hooleks). Skeemist saab ühtlasi välja lugeda, milliseid operatsioone peab konstrueeritav «näärivana» olema võimeline sooritama (ka selle loetelu koostamise jätame lugejale).

Üldtuntud protsesse kirjeldavate algoritmide üksikasjalik lahtimõtestamine ja vastavate blokk-skeemide koostamine on loogiliselt järjekindla mõtlemisviisi omandamisel väga sobivateks harjutusülesanneteks. Nendel pikemalt peatumata soovitame lugejal iseseisvalt koostada näiteks blokk-skeem, mis kirjeldab liiklusvahendi juhi tegevust ristteele lähenemisel ja selle läbimisel [4].

Blokk-skeemide põhiliseks rakendusalaks on siiski arvutusalgoritmide üleskirjutamine programmeerimiseks sobival kujul. Arvutusalgoritmide blokk-skeemide koostamisel tuleb muidugi silmas pidada kõiki ülalesitatud põhimõtteid Niisugustes algoritmides esinevate operatsioonide standardset iseloomu ja nende kasutamise viisi arvesse võttes saab siin aga anda veel rea täiendavaid reegleid ning näpunäiteid.

Arvutusalgoritmide blokk-skeemide koostamiseks sobiva sümboolika valikul on otstarbekohane arvestada, et neid skeeme on praktikas vaja eeskätt just programmeerimisel. Sellepärast võibki soovitada tähistusviisi, mis elektronarvuteid käsitlevas kirjanduses on üsna laialdaselt kasutusel.

Algoritmi realiseerimisel elektronarvutis tuleb kõik tööks vajalikud arvud salvestada mälu pesadesse. Seetõttu kaasneb iga algoritmis endas esineva arvulise suurusega alati veel teine arv — selle suuruse salvestamiseks määratud pesa aadress. Arvestades sellise arvupaari komponentide täiesti erinevaid tähendusi algoritmi realiseerimisel, võtame nende jaoks tarvitusele ka eraldi nimetused ning sümboolika. Nimelt tuleb blokkskeemide (samuti ka programmide) koostamisel teha selget vahet nn. a r v u l i s t e s u u r u s t e ja a a d r e s s i d e vahel. Muidugi on ka kõik aadressid arvud ning arvulisi suurusi võib kasutada aadressidena, kuid iga konkreetse arvu puhul peab siiski olema võimalik otsustada, millises tähenduses ta parajasti esineb.

---

[4] Selle ülesande lahendamisel on (peale liiklusmäärustiku) kasulik tutvuda artikliga: З а л и з н я к, А. А., Опыт анализа одной относительно простой знаковой системы. — Структурно-типологические исследования. М., 1962, lk. 172—187.

Algoritmis esinevaid arvulisi suurusi tähistame edaspidi üldiselt väikeste tähtedega $(a, b, c, \ldots)$, arvuti pesade aadresse aga suurte tähtedega $(A, B, C, \ldots)$. Lisaks sellele lepime kokku, et kui mingi arvuline suurus on tähistatud näiteks tähega a, siis tema salvestamiseks määratud pesa aadressi tähistame sümboliga $<a>$. Analoogiliselt, kui mingi pesa aadressi tähiseks on A, siis selles pesas salvestatud arvu tähistame sümboliga (A). Eriti ettevaatlik tuleb blokk-skeemide koostamisel olla just viimase sümboli kasutamisega. Näiteks kirjutis $(A+1)$ tähendab pesasse $A+1$ salvestatud arvu, kirjutis $((A)+1)$ aga pesasse A salvestatud arvust ühe võrra suurema aadressiga pesasse salvestatud arvu. Eristada tuleb samuti kirjutisi (A) ja $((A))$.

Arvutusalgoritmides esinevate operatsioonide (ning vastavate blokkide) jagunemine täidesaatvateks ja kontrollivateks (ehk kontrollimisoperatsioonideks) on eriti selgelt piiritletav. Nimelt saab arvutusalgoritmi täidesaatvaid operatsioone alati rühmitada nii, et iga rühma sisuks on mingi aritmeetilise või loogilise avaldise arvulise väärtuse leidmine ja selle väärtuse omistamine teatavale muutujale (aritmeetilisteks avaldisteks tuleb siinjuures lugeda ka näiteks konstandid ja ühestainsast muutujast koosnevad avaldised). Niimoodi ühendatud operatsioonide rühmi nimetame edaspidi omistamisoperaatoriteks.

Tähistagu

$$f[a, b, c, \ldots, g]$$

niisugust muutuvatest või konstantsetest suurustest $a, b, c, \ldots, g$ moodustatud avaldist, mille arvuline väärtus tuleb omistada pesasse H salvestatavale muutujale. Kasutades nn. omistamise sümbolit[5] $\rightarrow$ võib vastava omistamisoperaatori üles kirjutada kujul

$$f[a, b, c, \ldots, g] \rightarrow H.$$

Paneme tähele, et omistamisoperaatori niisuguses üleskirjutuses *peab omistamise sümbolist vasakul seisma arvuline suurus, paremal aga aadress*. Seega iga omistamisoperaator ütleb, mida arvutada ja kuhu see salvestada.

Eriti peab rõhutama, et omistamisoperaatori üldkujus võib muutuja (H) kokku langeda ühega muutujaist $a, b, c, \ldots, g$. Sellist operaatorit tõlgendatakse nii, et avaldise f arvutamisel tuleb kasutada muutuja (H) senist väärtust ja alles lõpuks omistada talle saadud uus väärtus. Üsna tüüpiliseks omistamisoperaatoriks arvutusalgoritmide blokk-skeemides on näiteks $(X)+1 \rightarrow X$, mis tähendab, et muutuja (X) väärtust tuleb suurendada ühe võrra.

---

[5] Omistamine sümbolina on kasutusel veel märk «$:=$». Samuti kirjutatakse omistamisoperaatorit vahel ka vastupidises järjekorras: $H \leftarrow f[a, b, c, \ldots, g]$ (teise sümboli kasutamise korral $H := f[a, b, c, \ldots, g]$).

Toome veel mõned omistamisoperaatorite näited:

$A \to R$ tähendab, et muutuja (R) väärtuseks tuleb võtta arv A, mida kasutatakse aadressina:

$(B+1) \to (C)$ tähendab, et muutujale, millele vastava pesa aadress on (C), tuleb anda muutuja $(B+1)$ väärtus;

$(C) \to (F)+(E)$ tähendab, et muutuja (C) väärtus tuleb anda muutujale, millele vastava pesa aadress on arvu (E) võrra suurem kui pesas F olev arv;

$((F)+(E)) \to C$ tähendab eelmise näitega võrreldes vastassuunalist omistamist;

$[(A)+(Y)]\cdot(P) \to U+2$ tähendab, et vasakul kirjutatud avaldise väärtus tuleb anda muutujale $(U+2)$.

Ka kontrollimisoperatsioonid on arvutusalgoritmides tegelikult kõik ühte tüüpi. Nimelt kontrollib iga selline operatsioon, kas kahe antud aritmeetilise (või loogilise) avaldise väärtuste vahel leiab aset üks fikseeritud seos järgmistest:

$$>,\ \geqslant,\ =,\ \leqslant,\ <\ \text{või}\ \neq.$$

Tähistagu sümbol $\gtreqless$ ajutiselt ükskõik millist nende kuue seosemärgi hulgast ning olgu

$$f[a, b, c, \ldots, g] \quad \text{ja} \quad h[i, j, k, \ldots, m]$$

võrreldavad avaldised. Kontrollimisoperatsiooni üldkuju on siis

$$f[a, b, c, \ldots, g] \gtreqless h[i, j, k, \ldots, m]?$$

mida loetakse küsimusena: kas avaldiste f ja h väärtuste vahel leiab aset seos $\gtreqless$?. Paneme tähele, et *kontrollimisoperatsioonis peavad mõlemal pool seosemärki olema arvulised suurused.* Üks nendest arvulistest suurustest võib olla konstant (tavaliselt kirjutatakse see seosemärgist paremale), kuid vähemalt üks peab olema muutuv suurus. Tõepoolest, kahe konstandi vahelise seose kontrollimisel (näiteks operatsioonil: $5 \leqslant 3$?) pole ju mingit mõtet, sest kontrollimise tulemus on juba ette üheselt ära määratud ning vastava kontrolliva bloki võib skeemis asendada lihtsalt ühe noolega.

Toome mõned näited arvutusalgoritmides sagedamini esinevatest kontrollimisoperatsioonidest.

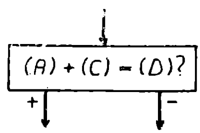
$(P)=7$? tähendab: kas suuruse (P) väärtus on seitse?;

$[(S)-(T)]\cdot[(U)-(V)]>0$? tähendab: kas kirjutatud avaldise väärtus on positiivne?;

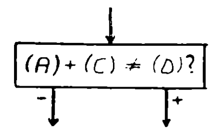
$[(X)-1]^2 \neq (Y)+(Z)$? tähendab: kas kirjutatud avaldiste väärtused on erinevad?;

$(B) \geqslant (F)$? tähendab: kas muutuja (B) väärtus on suuremvõrdne muutuja (F) väärtusest?.

Blokk-skeemi koostamisel peab jälgima, et igas kontrollivas blokis oleks täpselt üks kontrollimisoperatsioon ja et sellest blokist väljuks täpselt kaks noolt (vt. näiteks joonis 2). Noolt, mida mööda tuleb edasi minna kontrollitava tingimuse täidetuse korral, tähistame märgiga «+», teist noolt märgiga «—».



Joonis 2.



Joonis 3.

Ülaltoodud loetelus on küll kokku kuus kontrollimisoperatsioonides esineda võivat seosemärki, kuid praktikas pole vaja neid kõiki korraga kasutusele võtta. Näiteks joonistel 2 ja 3 kujutatud kontrollivad blokid on oma sisult täiesti identsed ning ilma skeemi muutmata võib ühe neist alati teisega asendada. Üldse võib loetletud seosemärke rühmitada paarideks nii, et iga paari üks märk kujutab teise suhtes vastupidist seost. Niisugusteks paarideks on

$$= \text{ ja } \neq,\quad \geqslant \text{ ja } <,\quad > \text{ ja } \leqslant.$$

Neid paare arvestades võib kõik algoritmis esinevad kontrollimisoperatsioonid esitada näiteks seosemärkidega $=$ $\geqslant$ ja $>$. Kontrollimisoperatsioonis esinevate avaldiste järjekorda tarbe korral muutes võiks loobuda ka seosemärgi $>$ kasutamisest (kirjutades näiteks operatsiooni $(A)>(B)$? asemele vastupidist tingimust kontrolliva operatsiooni $(B)\geqslant(A)$?). Seda enamasti siiski ei tehta, sest soovitakse vältida ühestainsast konstandist koosnevat avaldist seosemärgist vasakul.

Suhteliselt lihtne on veenduda, et iga arvutusalgoritm koosneb tegelikult ainult äsja kirjeldatud kontrollimisoperatsioonidest ja omistamisoperaatoritest. Seega nende algoritmide blokkskeemides on iga täidesaatva bloki sisuks üks või enam omistamisoperaatorit ja iga kontrolliva bloki sisuks üks ülaltoodud kujuga kontrollimisoperatsioon. Kui blokk-skeemi järgi soovitakse koostada vastavat algoritmi realiseeriv programm, siis tuleb täidesaatvates blokkides lisaks omistamisoperaatoritele kasutada veel mõningaid spetsiaalseid operatsioone. Põhilisemad nende hulgast on järgmised: «viia üks arv perfokaardilt pesasse A», «trükkida arv (A)» ja «jätta trükkimisel reavahe». Spetsiaalseid operatsioone omistamisoperaatoritega ühte blokki tavaliselt ei kirjutata.

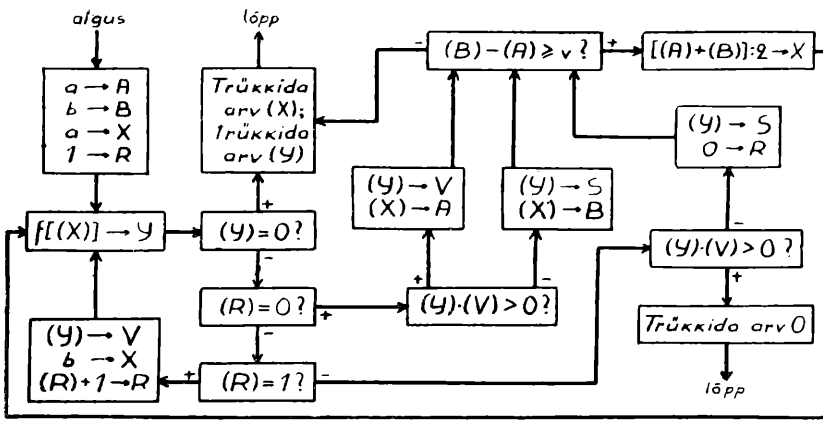
Vaatleme nüüd paari näite varal arvutusalgoritmide blokkskeemide tegelikku koostamist.

Võrrandite ligikaudse lahendamise üheks põhimõtteliselt lihtsaimaks võtteks on nn. «vahemiku poolitamise meetod». Nimelt, kui õnnestub leida argumendi x väärtused a ja b ($b \geqslant a$) nii, et $f(a)$ ja $f(b)$ on erimärgilised (ehk $f(a) \cdot f(b) < 0$), siis on võrrandil

$$f(x) = 0$$

vahemikus (a, b) vähemalt üks lahend ning selle leidmiseks võib kasutada järgmist lihtsat algoritmi.

Arvutame oma funktsiooni väärtuse vahemiku keskpunktis $c = (a + b) : 2$. Kui osutub, et $f(c) = 0$, siis on võrrandi lahend leitud. Vastasel juhul kontrollime, kas $f(c)$ ja $f(a)$ on samamärgilised. Kui ja, siis peab otsitav lahend paiknema vahemikus (c, b); kui mitte, siis vahemikus (a, c). Vastavalt selle kontrolli tulemusele asendamegi kas arvu a või b arvuga c ning kordame vahemiku poolitamist. Protsessi kordame seni, kuni kas funktsiooni väärtus vahemiku keskpunktis osutub nulliks või poolitatava vahemiku pikkus muutub väiksemaks teatud etteantud arvust v (nõutud täpsusest).



Joonis 4.

Koostame selle algoritmi blokk-skeemi nii, et funktsiooni $f(x)$ täpne kuju jääb fikseerimata (skeem on siis kasutatav mistahes võrrandi korral), kirjutades vastavates blokkides esinevate aritmeetiliste avaldiste kohale lihtsalt $f(x)$. Selleks, et saadava skeemi tegelikku kasutamist lihtsustada, püüame sümbolit $f(x)$ kasutada vaid ühes blokis. Konkreetse võrrandi korral tarvitseb siis vaid vastav blokk asendada funktsiooni $f(x)$ väärtust arvutava skeemiga.

Joonisel 4 ongi toodud vaadeldava algoritmi üks võimalik blokk-skeem. Lähtudes etteantud arvudest a, b ja v (tarbe korral võivad ka need teatud pesadesse salvestatud olla) trükitakse toodud skeemi kohaselt välja võrrandi lahend ja funktsiooni väärtus sellel kohal. Skeemis on ette nähtud ka võimalus, et $f(a)$ ja $f(b)$ osutuvad samamärgilisteks. Sel juhul trükitakse välja arv null, mis on selle asjaolu tunnuseks, et antud a ja b korral pole meetod vaadeldava võrrandi lahendamiseks kasutatav. Pesa R on skeemis tarvis selleks, et teha vahet $f(a)$, $f(b)$ ja $f(x)$ teiste väärtuste arvutamise juhtude vahel. Selle pesa kasutamise ja üldse kogu skeemi üksikasjalikuma analüüsimise jätame lugeja enda hooleks.

Teise näitena koostame blokk-skeemi lineaarsete planeerimisülesannete lahendamise nn. simpleksmeetodi jaoks[6]. Olgu nimelt tarvis lahendada lineaarne planeerimisülesanne: leida võrrandisüsteemi

$$\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} \qquad\qquad\qquad = a_{10} \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \qquad + x_{n+2} \qquad\quad = a_{20} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \qquad\qquad + x_{n+m} = a_{m0}
\end{array}$$

mittenegatiivsete lahendite hulgast see, mis muudab maksimaalseks funktsiooni

$$x_0 = a_{00} - a_{01}x_1 - a_{02}x_2 - \ldots - a_{0n}x_n.$$

Eeldades, et selle võrrandisüsteemi vabaliikmed a_{i0} $(i = 1, 2, \ldots, m)$ on kõik mittenegatiivsed, võib kohe välja kirjutada nn. alglahendi

$$x_0 = a_{00}, \; x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0,$$
$$x_{n+1} = a_{10}, \; x_{n+2} = a_{20}, \ldots, x_{n+m} = a_{m0}.$$

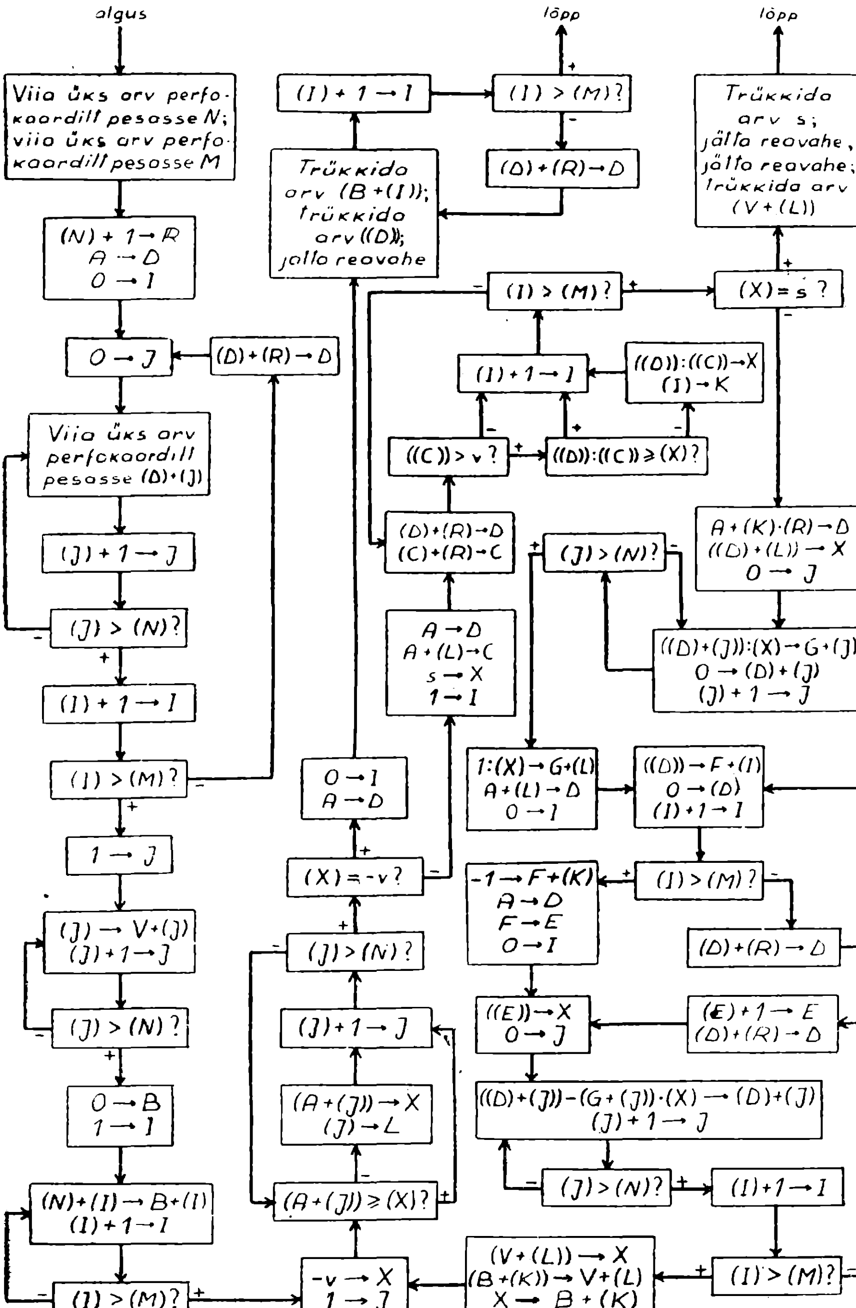
Lahendusalgoritm seisneb nüüd lühidalt selles, et otsitakse maatriksi

$$\begin{pmatrix}
a_{00} & a_{01} & a_{02} & \ldots & a_{0n} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
a_{10} & a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\
a_{20} & a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & 0 & 1 & \ldots & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m0} & a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & 0 & 0 & \ldots & 1
\end{pmatrix}$$

esimesest reast negatiivne element a_{0l} $(1 \leqslant l \leqslant n)$, määratakse indeks k seosest

$$\frac{a_{k0}}{a_{kl}} = \min_{a_{il} > 0} \frac{a_{i0}}{a_{il}}$$

[6] Simpleksmeetodi üksikasjalik kirjeldus on toodud artiklis: Kaasik, Ü., Lineaarsed planeerimisülesanded. — Matemaatika ja kaasaeg, II, lk. 31—46. Nimetatud artiklis kasutatud tähistus on siinesitatavast küll veidi erinev, kuid mitte oluliselt.


algus
lõpp
lõpp
Viia üks arv perfokaardilt pesasse N; viia üks arv perfokaardilt pesasse M
(N) + 1 → R
A → D
0 → I
0 → J
(D)+(R) → D
Viia üks arv perfokaardilt pesasse (D)+(J)
(J) + 1 → J
(J) > (N)?
(I) + 1 → I
(I) > (M)?
1 → J
(J) → V+(J)
(J)+1 → J
(J) > (N)?
0 → B
1 → I
(N)+(I) → B+(I)
(I) + 1 → I
(I) > (M)?
(I) + 1 → I
(I) > (M)?
(D)+(R) → D
Trükkida arv (B+(I)); trükkida arv ((D)); jätta reavahe
Trükkida arv s; jätta reavahe, jätta reavahe; trükkida arv (V+(L))
(I) > (M)?
(X) = s ?
(I) + 1 → I
((D)):((C)) → X
(I) → K
((C)) > v ?
((D)):((C)) ≥ (X)?
(D)+(R) → D
(C)+(R) → C
(J) > (N)?
A+(K)·(R) → D
((D)+(L)) → X
0 → J
A → D
A+(L) → C
s → X
1 → I
((D)+(J)):(X) → G+(J)
0 → (D)+(J)
(J) + 1 → J
0 → I
A → D
1:(X) → G+(L)
A+(L) → D
0 → I
((D)) → F+(I)
0 → (D)
(I)+1 → I
(X) = -v ?
-1 → F+(K)
A → D
F → E
0 → I
(I) > (M)?
(D)+(R) → D
(J) > (N)?
(J)+1 → J
((E)) → X
0 → J
(E)+1 → E
(D)+(R) → D
(A+(J)) → X
(J) → L
((D)+(J))-(G+(J))·(X) → (D)+(J)
(J) + 1 → J
(A+(J)) ≥ (X)?
(J) > (N)?
(I)+1 → I
-v → X
1 → J
(V+(L)) → X
(B+(K)) → V+(L)
X → B+(K)
(I) > (M)?

ja teostatakse maatriksi teisendamine valemitega

$$a'_{ij} = \begin{cases} \dfrac{a_{kj}}{a_{kl}}, & \text{kui } i = k \\ a_{ij} - \dfrac{a_{kj}}{a_{kl}} a_{il}, & \text{kui } i \neq k. \end{cases}$$

Kui esimeses reas negatiivset elementi a_{0l} ei leidu, siis on olemasolev lahend optimaalne; kui toodud reeglist ei saa leida indeksit k (kõik $a_{il} \leqslant 0$), siis pole ülesanne üldse lahenduv. Algoritmi korratakse seni, kuni jõutakse üheni nendest juhtudest.

Leheküljel 34 on toodud selle algoritmi blokk-skeem programmeerimiseks sobival kujul.

Skeem algab lähteandmete salvestamisega arvuti mälusse (skeemi vasakpoolne serv). Sealjuures eeldatakse, et need andmed on perforeeritud järgmises järjekorras:

$$n, m, a_{00}, a_{01}, a_{02}, \ldots, a_{0n}, a_{10}, a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, a_{20},$$
$$a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}, a_{30}, \ldots, a_{m-1,n}, a_{m0}, a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn}.$$

Mälus salvestatakse n pesasse N, m pesasse M ja üldiselt a_{ij} pesasse $A + i(n+1) + j$ $(i = 0, 1, \ldots, m; j = 0, 1, \ldots, n)$. Peale selle salvestatakse pesadesse $V+1$, $V+2, \ldots, V+n$ alglahendis nulliga võrduvate vabade tundmatute indeksid ning pesadesse $B, B+1, \ldots, B+m$ nullist erineda võivate baasitundmatute indeksid (indeksite lähteväärtused moodustab skeem ise, neid pole tarvis perforeerida).

Salvestatavad indeksid on vajalikud selleks, et võiks loobuda maatriksi ühikvektoritest koosneva osa salvestamisest. Vabade tundmatute indeksid näitavad lihtsalt, missugused veerud ja mis järjekorras on maatriksis säilitatud. Baasitundmatute indeksid aga näitavad, milliste tundmatute väärtused (ja mis järjekorras) paiknevad maatriksi esimeses veerus. Algoritmi iga sammu puhul tuleb ühe baasitundmatu (esimesel sammul x_{n+k}) ja ühe vaba tundmatu (esimesel sammul x_l) indeksid omavahel vahetada.

Skeemi koostamisel on silmas peetud, et arvuti sooritab tehteid ligikaudselt (seetõttu on võimalik, et arvutuste tulemusel saadud arv, mis peaks näiteks võrduma nulliga, on sellest pisut erinev). Näiteks negatiivse a_{0l} otsimise asemel otsitakse esitatud skeemis selline, mis on väiksem kui $-v$, kus v on mingi etteantud väike arv (sest $-v$ ja nulli vahel paiknev arv võib tegelikult null olla).

Maatriksi teisendamise valemeid on skeemis kasutatud ülaltoodust veidi erineval kujul, kuid selle erinevuse põhjuste kindlakstegemine ei tohiks tähelepanelikule lugejale raskusi valmistada.

Algoritmi töö lõpeb optimaalse lahendi väljatrükkimisega. See lahend koosneb arvupaaridest, millest esimene on baasitundmatu indeks ja teine selle tundmatu väärtus. Juhul kui ülesanne pole lahenduv, trükitakse välja suurim arv, mida arvutis üldse saab salvestada (seda arvu s kasutatakse ka skeemis endas) ja selle tundmatu indeks, mis on piiramatult suurendatav.

Kõiki algoritmide blokk-skeemide koostamisega seotud küsimusi pole võimalik lühikeses artiklis valgustada. Pealegi ei saa skeemide koostamist ainult vastava kirjelduse lugemisega selgeks õppida. Sellepärast lõpetamegi näidete esitamise ja soovitame lugejal endal asuda blokk-skeemide koostamisele.

Algoritmide blokk-skeemide koostamist selgitavat kirjandust on seni ilmunud väga napilt. Rohkem on siiski kirjutatud algoritmidest üldse. Täienduseks käesolevale artiklile võiks neist soovitada järgmisi.

1. Трахтенброт, Б. А. Алгоритмы и машинное решение задач. — Популярные лекции по математике, вып. 26. М., 1957.

2. Ляпунов А. А. и Шестопал Г. А., Об алгоритмическом описании процессов управления. — Математическое просвещение, 1957, № 2.

* *
*

MATEMAATIK LOEB MIKROJUTUSTUST

Hiljuti ilmus eesti keeles (vt. «Sirp ja Vasar» nr. 50) tšehhi kirjaniku Gabriel Laubi järgmine mikrojutustus.

Ühel maal kuulutati välja võistlus kõige targema inimese tiitlile ja määrati preemiaks kolm tuhat kuldnat. Erandittult kõik täiskasvanud inimesed registreerisid end võistlusest osa võtma.

Päev hiljem kuulutati välja võistlus selle maa kõige suurema idioodi tiitlile ja määrati preemiaks kümme tuhat kuldnat. Kõik registreerisid end otsekohe ümber sellest võistlusest osa võtma.

Välja arvatud kolm meest.

Igaüks neist kolmest sai kümme tuhat.

Kui seda mikrojutustust lugeda matemaatiku pilguga, siis kerkib terve rida küsimusi, näiteks:

— kas preemiad anti välja õiglaselt (s. t. loogiliselt järjekindlalt)?
— kas preemia saanud mehed olid idioodid või targad?
— kas selleks, et tõestada oma idiootsust, peab olema tark?
— kuidas on lugu võistluste korraldajate tarkusega?
— miks ei antud võitjatele preemiaks kolmteist tuhat kuldnat igaühele?
— kas preemia saanud mehed võtsid raha vastu?

Küsimuste rida jätkamata juhime ainult tähelepanu veel ühele olulisele küsimusele:

— kas käesoleva kirjutise lugejat saab pidada targaks, kui ta kõike loetut võtab naljana?

DÜNAAMILINE PLANEERIMINE

I. Kull

Tänapäeva ühiskonnas puutume peaaegu igal sammul kokku planeerimisega. See on ka arusaadav, sest ilma plaanita pole mõeldav ükski vähegi ulatuslikum, sihipärane ja koordineeritud tegevus. Kuni viimase ajani koostati plaane põhiliselt planeerijate isiklikele kogemustele tuginedes — puudus planeerimise üldine teooria. Alles käesoleva sajandi 30-ndatel aastatel selgitati, et paljud planeerimisülesanded taanduvad lisatingimustega ekstreemumülesannetele ja anti ka efektiivsed meetodid nende ülesannete lahendamiseks. Planeerimise matemaatilise teooria intensiivsem uurimine ja rakendamine algas aga 50-ndatel aastatel, sest suuremate planeerimisülesannete matemaatiline lahendamine nõuab ulatuslikku arvutustööd ning on teostatav vaid kaasaegsete elektronarvutite kasutamise korral.

Planeerimise matemaatilist teooriat võib jaotada kolme suurde ossa:

1) l i n e a a r n e p l a n e e r i m i n e, kus nii lisatingimused kui ka ekstremaliseeritav avaldis (nn. sihifunktsioon) on kõik lineaarsed;

2) m i t t e l i n e a a r n e p l a n e e r i m i n e, kus kas vähemalt üks lisatingimustest või sihifunktsioon pole lineaarne;

3) d ü n a a m i l i n e p l a n e e r i m i n e, milles käsitletakse mitmeetapilisi planeerimisülesandeid, kus eelnevate etappide tulemused muudavad järgnevate etappide lähteandmeid. Etapid ei tarvitse sealjuures tingimata olla just ajalised.

Dünaamilise planeerimise selle lühikese iseloomustuse põhjal võib juba mõista tema suurt rakenduslikku väärtust. Tõepoolest, sügavamal analüüsimisel märkame, et enamik planeerimisülesandeid on just mitmeetapilised. Ainult ülesande teatava lihtsustamisega saab sellest mitmeetapilisusest mõnikord loobuda.

Käesolevas artiklis vaatlemegi mõningaid näiteid dünaamilise planeerimise ülesannetest ning esitame ka meetodid niisuguste ülesannete lahendamiseks — nn. tabelmeetodi ja rekurrentsete funktsioonide meetodi.

N ä i d e 1. Olgu mingi tammi ehitamisel kruusaveoks kasutada 10 isekallutajat. Kruusa võib vedada kolmest karjäärist *A*, *B* ja *C*. Tekib küsimus, mitu isekallutajat suunata karjääridesse *A*, *B* ja *C*, nii et tööpäevas veetavate koormate arv oleks kõige suurem. Ilmselt ei saa küsimust lahendada lihtsalt sel teel, et suunata kõik isekallutajad kõige lähemasse karjääri. See jaotus ei tarvitse olla kaugeltki optimaalne vastava karjääri ülekoormatusest tekkivate tööseisakute tõttu. Andmed karjääridest veetavate koormate arvu kohta sõltuvalt karjääridesse suunatud isekallutajate arvust on toodud tabelis 1.

T a b e l 1

Karjäär	Isekallutajate arv										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	0	8	15	22	26	32	39	43	46	48	50
B	0	5	11	18	26	35	43	50	55	60	63
C	0	6	13	21	30	34	37	40	45	50	55

Kõigepealt selgitame, kuidas sõltub veetavate koormate arv isekallutajate arvust, kui veaksime kruusa ainult karjääridest *A* ja *B*. Vastavad arvutused on esitatud tabelis 2.

T a b e l 2

B	*A*										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0*	8*	15*	22*	26	32	39	43	46	48	50
1	5	13	20	27*	31	37	44	48	51	53	
2	11	19	26	33	37	43	50	54	57		
3	18	26	33	**40**	44	50	57	61			
4	26	34	41	48	52	58	65				
5	35*	43*	50	57	61	67					
6	43*	51*	58*	65*	69						
7	50	58*	65*	72*							
8	55	63	70								
9	60	68									
10	63										

Tabeli 2 igale diagonaalile vastab kindel isekallutajate arv. Nii näiteks vastab diagonaalile elementidega 8 ja 5 isekallutajate arv 1, järgmisele diagonaalile isekallutajate arv 2 jne., viimasele diagonaalile (elementidega 50, 53, 57 jne.) isekallutajate arv 10. Peale selle vastab tabeli igale ruudule veel kindel isekallutajate jaotus karjääridele *A* ja *B* vahel. Nii vastab elemendile 40 (tabelis trükitud poolpaksult) isekallutajate arv 6, kusjuures 3 isekallutajat on suunatud karjääri *A* ja 3 isekallutajat karjääri *B*. Arv 40 tähendab sellele isekallutajate jaotusele vastavat veetavate koormate arvu. See arv on saadud tabeli 1 karjäärile *A* ja *B* ridades veeru «3» all olevate koormate arvude 22 ja 18 liitmisel. Et tabeli 1 kaks esimest rida on toodud ka tabelis 2 (esimene rida ja esimene veerg), siis saame arvu 40 äärmise vasakpoolse ja ülemise arvu liitmisel. Samal viisil leitakse ka tabelis 2 kõik teised arvud (peale esimese rea ja esimese veeru arvude).

Mingi kindla isekallutajate arvu puhul huvitab meid isekallutajate optimaalne jaotus karjääride *A* ja *B* vahel, kus optimaalsus tähendab veetud koormate suurimat arvu. Et kindlale isekallutajate arvule vastab tabelis 2 kindel diagonaal, siis tuleb igas diagonaalis välja otsida suurim element (või suurimad elemendid). Tabelis 2 on need elemendid tähistatud tärnikesega (*). Tabeli 2 tärniga tähistatud elemendid on koondatud üherealisse tabelisse 3:

Tabel 3

Isekallutajate koguarv	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Karjääridest *A* ja *B* veetavate koormate maksimaalne arv	0	8	15	22	27	35	43	51	58	65	72

Analoogiliselt tabeliga 2 koostame nüüd tabeli 4, kus algandmetena kasutame tabelit 3 ja tabeli 1 rida *C*.

Tabelis 4 tähistame jälle tärniga iga diagonaali suurima elemendi, millega kõik ülalesitatud ülesande lahendamiseks vajalikud arvutused ongi sooritatud.

Lahenduse saame sel teel, et otsime tabeli 4 viimase diagonaali (see vastab isekallutajate arvule 10) suurima elemendi. See element 73 näitab maksimaalset koormate arvu, mida saab vedada isekallutajate optimaalse jaotuse korral karjääride *A*, *B* ja *C* vahel. Ühtlasi annab ta ka isekallutajate jaotuse: karjääri *C* tuleb suunata 4 isekallutajat, karjääridesse *A* ja *B* aga 6 isekallutajat. Edasi leiame juba tabelist 2, kuidas tuleb need 6 isekallutajat optimaalselt jaotada karjääride *A* ja *B* vahel. Selle määrab 6-nda diagonaali maksimaalne element. Niisuguseid elemente 43 leidub kaks ning nendele vastavad jaotused on: 0 isekallutajat karjääri *A* ja 6 isekallutajat karjääri *B* või 1 isekallutaja karjääri *A* ja 5 isekallutajat karjääri *B*.

Tabel 4

C	*A* ja *B*										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0*	8*	15*	22*	27	35	43	51	58*	65*	72
1	6	14	21	28	33	41	49	57	64	71	
2	13	21	28	35	40	48	56	64	71		
3	21	29	36	43	48	56	64	72			
4	30*	38*	45*	52*	57	65*	73*				
5	34	42	49	56	61	69					
6	37	45	52	59	64						
7	40	48	55	62							
8	45	53	60								
9	50	58									
10	55										

Näide 2. Vaatleme ühte energiasüsteemi kuuluvate soojuselektrijaamade optimaalse koormuse määramise ülesannet. Optimaalse koormuse all mõistame siinkohal nende elektrijaamade sellist koormust, mis võimaldab saada elektrienergia nõutava koguhulga kõige väiksemate kulutustega.

Olgu meil tegemist kolme soojuselektrijaamaga *A*, *B* ja *C*, kus andmed koormuse (toodetav elektrienergia hulk ühes ajaühikus) ja vastava elektrienergia hulga omahinna kohta on toodud tabelis 5.

Tabel 5

Elektrijaamad	Koormused					
	2	3	4	5	6	7
A	3	5	8	11	13	16
B	4	5	6	7	8	
C		6	7	10	12	14

Nii näiteks tähendab ülemises vasakpoolses ruudus olev arv 3 seda, et 2 ühiku elektrienergia tootmine (ajaühikus) läheb jaamas A maksma 3 väärtusühikut. Tabelist 5 nähtub, et jaamad A, B ja C võivad töötada järgmiste koormustega: $2 \leqslant A \leqslant 7$, $2 \leqslant B \leqslant 6$, $3 \leqslant C \leqslant 7$ (tühi ruut tabelis tähendab, et sellise koormusega ei saa vastav elektrijaam üldse töötada). Neid koormuste piire arvestades on selge, et püstitatud ülesannet saab lahendada vaid siis, kui kogukoormus K rahuldab tingimust $7 \leqslant K \leqslant 20$.

Ülesande lahendamisel vaatleme taas kõigepealt koormuse jaotamise võimalusi kahe jaama A ja B vahel. Jaotatav koormus võib sealjuures muutuda 4 ja 13 vahel. Vastavad kogukulud esitame tabelis 6, kus igale kogukoormusele vastab jälle oma diagonaal (tabeli mingile elemendile vastava kogukoormuse saame esimeses veerus ja esimeses reas olevate arvude liitmisel). Tabeli 6 koostamine toimub täpselt samuti nagu tabelite 2 ja 4 puhul kirjeldatud, ainsaks erinevuseks on nüüd tabeli ristkülikukujulisus.

Tabel 6

	A koormus	2	3	4	5	6	7
B koormus	kulud	3	5	8	11	13	16
2	4	7*	9	12	15	17	20
3	5	8*	10	13	16	18	21
4	6	9*	11	14	17	19	22
5	7	10*	12	15	18	20	23
6	8	11*	13*	16*	19*	21*	24*

Leiame tabeli 6 igal diagonaalil minimaalse elemendi ja märgime selle tärnikesega. Märgitud elementidest moodustame omakorda tabeli 7.

Tabel 7

A ja B	koormus	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
	kulud	7	8	9	10	11	13	16	19	21	24

Tabeli 5 viimase rea ja tabeli 7 abil koostame nüüd kogukulude tabeli 8.

Tabelis 8 leiame jälle igal diagonaalil (mis vastab teatavale kindlale kogukoormusele) minimaalse elemendi, märkides selle tärnikesega.

Tabel 8

A ja *B* koormus		4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
C koormus	kulud	7	8	9	10	11	13	16	19	21	24
3	6	13*	14*	15*	16*	17*	19	22	25	27	30
4	7	14*	15*	16*	17*	18*	20*	23*	26	28	31
5	10	17	18	19	20	21	23*	26	29	31	34
6	12	19	20	21	22	23*	25*	28	31	33*	36
7	14	21	22	23	24	25*	27*	30*	33*	35*	38*

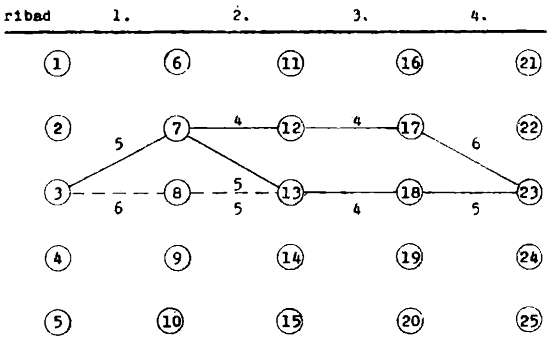
Sellest tabelist on lihtne leida koormuse optimaalset jaotust: näiteks tuleb kogukoormus 16 jaotada sel teel, et 7 ühikut võetakse jaamast *C* ning 9 ühikut jaamadest *A* ja *B*. Tabelist 6 saame nüüd koormuse 9 optimaalse jaotuse: 3 jaamast *A* ja 6 jaamast *B*. Mõne kogukoormuse korral on optimaalseid jaotusi mitu. Tabelis 9 ongi (lisaks äsjaleitule) toodud kaks sellist lahendit.

Tabel 9

Kogukoormus	Optimaalne jaotus			Kogukulud
	A	B	C	
10	2	5	3	16
10	2	4	4	16
14	4	6	4	23
14	3	6	5	23
14	2	6	6	23
16	3	6	7	27

Näide 3. Vaatleme tee-ehituse ülesannet, kus tuleb määrata, missuguseid geograafilisi punkte peab tee läbima. Üldiselt on olukord muidugi selline, et kahe geograafilise punkti vaheline tee püütakse teha võimalikult sirgjooneline, kuid kaugeltki alati pole see võimalik ja otstarbekohane (veekogud, sood, mäed jne.). Kõige otstarbekohasem on tee optimaalne kuju välja arvutada. See toimub järgmiselt. Kõigepealt eraldame vaadeldava geograafilise piirkonna punktid, mida ehitatav tee võiks läbida

(vt. joonis). Tee tuleb ehitada punktide 3 ja 23 vahel, kusjuures ta peab läbima kõik 4 riba.



Olgu andmed tee ehitamise maksumuse kohta ribades 1.—4. järgmised:

1. ribas

	3.
6.	7
7.	5
8.	6
9.	8
10.	9

2. ribas

	11.	12.	13.	14.	15.
6.	3	4	8	9	10
7.	4	4	5	8	9
8.	7	6	5	8	9
9.	9	8	7	6	7
10.	10	9	8	7	5

3. ribas

	16.	17.	18.	19.	20.
11.	4	6	10	10	12
12.	6	4	6	8	10
13.	8	6	4	6	8
14.	10	8	6	4	6
15.	12	10	10	6	4

4. ribas

	23.
16.	8
17.	6
18.	5
19.	4
20.	6

Leiame nüüd kõige odavama kaheribalise tee ehitamise maksumused punktist 3 punkti 11, punktist 3 punkti 12 jne. kuni punktist 3 punkti 15. Need saame leida 1. ja 2. riba tabelite põhjal. Näiteks punktist 3 punkti 11 saab minna kas läbi punkti 6, 7, 8, 9 või 10. Vastavalt nendele võimalustele leiame punktide 3 ja 11 vahelise kaheribalise tee ehitamise maksumused:

Läbi missuguse punkti	Maksumus
6.	$7+3=10$
7.	$5+4=9$
8.	$6+7=13$
9.	$8+9=17$
10.	$9+10=19$

Seega punktist 3 punktini 11 ehitatav optimaalne tee läbib punkti 7 ja selle ehitamine maksab 9 ühikut. Tähistame selle sümboliga $F_2(3, 11; 7) = 9$. Analoogiliselt leiame, et $F_2(3, 12; 7) = 9$, $F_2(3, 13; 7) = 10$, $F_2(3, 14; 7) = 13$ ja $F_2(3, 15; 7) = F_2(3, 15; 10) = 14$.

Edasi leiame kõige odavamad kolmeribalised teed punktist 3 vastavalt punktidesse 16, 17, 18, 19 ja 20. Nende leidmisel eeldame, et kui meil on tegemist kõige odavama kolmeribalise teega näiteks punktist 3 punkti 16, siis selle tee kaheribaline osa eraldi võttes peab olema ka optimaalne.

Läbi missuguse punkti	Maksumus
11.	$9 + 4 = 13$
12.	$9 + 6 = 15$
13.	$10 + 8 = 18$
14.	$13 + 10 = 23$
15.	$14 + 12 = 26$

Seega saame, et $F_3(3, 16; 11) = 13$. Analoogiliselt leiame

$$F_3(3, 17; 12) = 13,$$
$$F_3(3, 18; 13) = 14,$$
$$F_3(3, 19; 13) = 16,$$
$$F_3(3, 20; 13) = F_3(3, 20; 15) = 18.$$

Et jõuda punkti 23 (lõpp-punkti) tuleb läbida üks punktidest 16, 17, 18, 19 või 20. Vastavad maksumused on:

Läbi missuguse punkti	Maksumus
16.	$13 + 8 = 21$
17.	$13 + 6 = 19$
18.	$14 + 5 = 19$
19.	$16 + 4 = 20$
20.	$18 + 6 = 24$

Seega läbib optimaalne tee kas punkti 17 või 18. Edasi leiame, et optimaalne 3-lüliline tee punktide 3 ja 17 vahel läbib punkti 12 (sest $F_3(3, 17; 12) = 13$); $F_2(3, 12; 7) = 9$ ütleb, et optimaalne 2-lüliline tee punktide 3 ja 12 vahel läbib punkti 7. Seega saame ühe optimaalse tee $3 \to 7 \to 12 \to 17 \to 23$ ja analoogilisel viisil teise tee $3 \to 7 \to 13 \to 18 \to 23$. Mõlemate maksumus on 19 ühikut.

N ä i d e 4. Olgu mingis ettevõttes iga aasta algul vaja muretseda teatava summa ulatuses toormaterjali. Toormaterjali on kolme liiki (A, B ja C) ning nad asendavad lõpptoodangu suhtes üksteist täielikult. Kuid nende omadused on erinevad: kui materjali A ostuks kulutada x rbl., saame sellest materjalist toodangut $f_1(x)$ rbl. eest, materjali B ja C ostmisel vastavalt y ja z rbl. eest saame aga toodangut vastavalt $f_2(y)$ ja $f_3(z)$ rbl. eest. Erinevad on ka materjali jääkide realiseerimisel saadavad summad: kui materjali A osta x rbl. eest, siis saame selle materjali jääkide realiseerimisel ax rbl., materjalide B ja C puhul on vastavad arvud by ja cz. Materjali jääkide realiseerimisest saadav summa läheb järgmise aasta lähtematerjalide muretsemiseks, millele lisandub teatud osa p $(0 < p < 1)$ antud aasta toodangu väärtusest. Seega saame järgmise aasta materjalide ostuks summa

$$ax + by + cz + p[f_1(x) + f_2(y) + f_3(z)]. \tag{1}$$

Ülesandeks on määrata aasta alguses materjalide A, B ja C ostusumma nii, et toodangu koguväärtus N-aastase perioodi jaoks oleks maksimaalne, arvestades seda, et materjalide ostusumma algväärtus vaadeldava N-aastase perioodi algul on u.

Selgitame ülesande lahendust tähelisel kujul. Kõigepealt leiame toodangu maksimaalse väärtuse üheaastase perioodi jaoks. See tuleb ilmselt järgmine:

$$F_1(v) = \max_{x+y+z=v} [f_1(x) + f_2(y) + f_3(z)]. \tag{2}$$

Vastav toodangu maksimaalne väärtus $F_1(v)$ sõltub ilmselt v väärtusest. Peale $F_1(v)$ on meil oluline teada ka maksimumpunkti (x, y, z), mis üldiselt sõltub samuti v väärtusest. Maksimumpunkt määrabki materjalide ostusumma optimaalse jaotuse.

Edasi vaatleme 2-aastast perioodi algsummaga v. Pärast esimese aasta toodangut väärtusega $f_1(x) + f_2(y) + f_3(z)$ avaldub teise aasta materjalide ostusumma kujul (1), mis maksimaalse toodanguhulga saamiseks tuleb jaotada optimaalselt. Maksimaalne toodanguhulk üheaastase perioodi jaoks etteantud algsummaga on aga leitav võrdusest (2), kus v tuleb asendada avaldisega (1). Seega avaldub kaheaastase perioodi toodangu maksimaalne väärtus algsummaga v kujul

$$F_2(v) = \max_{x+y+z=v} \{f_1(x) + f_2(y) + f_3(z) + F_1(ax + by + cz + p[f_1(x) + f_2(y) + f_3(z)])\}, \tag{3}$$

kus $F_2(v)$ sõltub suurusest v. Peale $F_2(v)$ väärtuste on jälle oluline teada ka maksimumpunkti (x, y, z).

Edasine arvutuskäik kulgeb analoogiliselt, kuni lõpuks saame

$$F_N(u) = \max_{x+y+z=u} \{f_1(x) + f_2(y) + f_3(z) + F_{N-1}(ax + by + cz + p[f_1(x) + f_2(y) + f_3(z)])\}. \tag{4}$$

Avaldis (4) annab kindla u korral kindla maksimumpunkti (x, y, z). Sellest lähtudes saame avaldisest (1) arvutada materjali ostusumma järgmiseks aastaks, mille asetame $F_{N-1}(v)$ argumentavaldisse. Edasi leiame vastava maksimumpunkti, arvutame avaldise (1) jne. kuni leiame viimase maksimumpunkti avaldisest (2). Sellega ongi leitud materjali ostusumma optimaalne jaotus iga aasta algul (maksimumpunktid (x, y, z)). Toodangu koguväärtus N-aastase perioodi ja algsumma u puhul tuleb lihtsalt $F_N(u)$.

Märgime, et funktsioonide $F_i(v)$ konstrueerimise meetod on näidetes 1 ja 2 kasutatud tabelimeetodi üldistus. Meetodite põhimõte on aga seesama: n-etapilise protsessi optimaalse tulemuse saamiseks kasutatakse $(n-1)$-etapilise protsessi optimaalseid tulemusi.

Selguse mõttes lahendame esitatud näite läbi veel konkreetsete arvuliste andmete korral. Olgu näiteks

$$f_1(x) = 5x, \quad f_2(y) = 4y, \quad f_3(z) = 3z, \quad a = 0{,}3, \quad b = 0{,}6, \quad c = 0{,}8,$$
$$p = 0{,}1, \quad u = 100, \quad N = 5.$$

Avaldis (1) tuleb siis

$$0{,}3x + 0{,}6y + 0{,}8z + 0{,}1[5x + 4y + 3z] = 0{,}8x + y + 1{,}1z \tag{5}$$

ja valemist (2) saame

$$F_1(v) = \max_{x+y+z=v} [5x + 4y + 3z] = 5v, \tag{6}$$

kus maksimum realiseerub $x = v$, $y = z = 0$ korral.

Kasutades avaldist (6) saame jätkata:

$$\begin{aligned} F_2(v) &= \max_{x+y+z=v} [5x + 4y + 3z + F_1(0{,}8x + y + 1{,}1z)] = \\ &= \max_{x+y+z=v} [5x + 4y + 3z + 5(0{,}8x + y + 1{,}1z)] = \\ &= \max_{x+y+z=v} [9x + 9y + 8{,}5z] = 9v, \end{aligned} \tag{7}$$

kus maksimum realiseeritakse $x + y = v$ (suvalises vahekorras) ja $z = 0$ korral;

$$\begin{aligned} F_3(v) &= \max_{x+y+z=v} [5x + 4y + 3z + F_2(0{,}8x + y + 1{,}1z)] = \\ &= \max_{x+y+z=v} [5x + 4y + 3z + 9(0{,}8x + y + 1{,}1z)] = \\ &= \max_{x+y+z=v} [12{,}2x + 13y + 12{,}9z] = 13v, \end{aligned} \tag{8}$$

kus maksimum realiseeritakse $x=0$, $y=v$ ja $z=0$ korral;

$$\begin{aligned} F_4(v) &= \max_{x+y+z=v} [5x+4y+3z+F_3(0{,}8x+y+1{,}1z)] = \\ &= \max_{x+y+z=v} [5x+4y+3z+13(0{,}8x+y+1{,}1z)] = \\ &= \max_{x+y+z=v} [15{,}4x+17y+17{,}3z] = 17{,}3v, \end{aligned} \tag{9}$$

kus maksimum realiseeritakse $x=y=0$ ja $z=v$ korral;

$$\begin{aligned} F_5(100) &= \max_{x+y+z=100} [5x+4y+3z+F_4(0{,}8x+y+1{,}1z)] = \\ &= \max_{x+y+z=100} [5x+4y+3z+17{,}3(0{,}8x+y+1{,}1z)] = \\ &= \max_{x+y+z=100} [18{,}84x+21{,}3y+22{,}03z] = 2203, \end{aligned}$$

kus maksimum realiseeritakse $x=y=0$ ja $z=100$ korral.

Viimane maksimumpunkt $x=y=0$, $z=100$ annab materjali ostusumma optimaalse jaotuse 5-aastase perioodi esimese aasta algul, ühtlasi ka toodangu maksimaalse koguväärtuse

Tabel 10

	Aastad	1.	2.	3.	4.	5.
Optimaalne jaotus	Materjali ostusumma aasta alguses	100	110	121	121	109
	Materjali ostusumma jaotus	$x=y=0$ $z=100$	$x=y=0$ $z=110$	$x=0$ $y=121$ $z=0$	$x=60$ $y=61$ $z=0$	$x=109$ $y=z=0$
	Toodangu suurus antud aastal	300	330	484	544	545
	Toodangu suurus perioodi algusest kuni antud aastani (incl.)	300	630	1114	1658	2203
Juhuslik jaotus	Materjali ostusumma aasta alguses	100	100	100	80	64
	Materjali ostusumma jaotus	$x=0$ $y=100$ $z=0$	$x=0$ $y=100$ $z=0$	$x=100$ $y=z=0$	$x=80$ $y=z=0$	$x=64$ $y=z=0$
	Toodangu suurus antud aastal	400	400	500	400	320
	Toodangu suurus perioodi algusest kuni antud aastani (incl.)	400	800	1300	1700	2020

5-aastase perioodi jooksul. Edasi leiame avaldistest $5x + 4y + 3z$ ja (5) vastavalt esimese aasta toodangu suuruse ja järgmise aasta materjalide ostusumma. Need arvud tulevad 300 ja 110. Viimase summa optimaalsel jaotamisel tuleb kasutada $F_4(v)$ avaldist (9), kus $v = 110$. Järgmistel etappidel kasutame järjekorras võrdusi (8), (7) ja (6), millega ülesanne ongi lahendatud. Arvutuste tulemused esitame kokkuvõtliku tabelina 10, kus paralleelselt on toodud ka üks juhuslik materjali ostusummade jaotus.

Dünaamilise planeerimise teooriat on arendatud väga paljudes suundades: vaadeldakse mittedetermineeritud (stohhastilisi) protsesse, loenduvaetapilisi protsesse, pidevaid protsesse jne. Samuti on selle teooria rakendusvõimalused väga ulatuslikud: ressursside optimaalne jaotamine, kapitalimahutus, metsamajandus, karjakasvatus, optimaalsete trajektooride leidmine, skeemide stabiilsuse teooria jne. Teatava ülevaate nendest rakendustest võib leida R. Bellmanni raamatust [3]. Populaarse ülevaate dünaamilisest planeerimisest annab A. Vazsonyi raamat [1], põhjalikumaks uurimiseks võib aga soovitada töid [2] ja [3]. Märgime, et 1965. a. algul ilmub venekeelses tõlkes R. Bellmani ja S. Dreyfusi äärmiselt huvitav ja sisukas raamat [4].

Kirjandus

1. Важоньи, А. Научное программирование в промышленности и торговле. М., 1963.
2. Беллман, Р. Теория динамического программирования. Сб. Современная математика для инженеров. М., 1958, lk. 237—274.
3. Беллман, Р. Динамическое программирование. М., 1960.
4. Bellman, R. Dreyfus, S. Applied Dynamic Programming. Princeton, 1962.

RÄNDKAUPMEHE ÜLESANNE

Tänapäeva matemaatikas tuleb tegelda väga mitmesuguste praktikast kerkinud ülesannetega. Oma sõnastuse lihtsusele vaatamata osutuvad nad sageli üsna rasketeks. Selliseks on ka nn. «rändkaupmehe ülesanne» (vene k. *задача о коммивояжере*, ingl. k. *travelling salesman problem*), mille üks võimalikest sõnastustest on järgmine: on antud n punkti (asulad, linnad jne.) ja kaugused nende vahel; tuleb leida «rändkaupmehe» selline teekond, mis 1) läbiks kõiki neid punkte, 2) oleks ühise algus- ja lõpp-punktiga, 3) oleks niisuguste teekondade hulgas kõige lühem.

Seda ülesannet on võimalik lahendada näiteks dünaamilise planeerimise meetodi abil, kuid punktide suure arvu korral osutub arvutustöö maht äärmiselt suureks. Ülesande näilisest lihtsusest hoolimata pole efektiivset algoritmi tema lahendamiseks seni veel õnnestunud leida.

OPERATSIOONIANALÜÜSI KASUTAMISEST LINNA GENERAALPLAANI KOOSTAMISEL

H. Aben, J. Kajari

1. Ülesande seade

Suure linna generaalplaani koostamine on keerukas kompleksne ülesanne, mille lahendamisel peab arvestama nii sotsioloogilisi ja arhitektuurilisi kui ka tehnilisi ning majanduslikke faktoreid. Seejuures iseloomustab märgitud ülesannet võimalike lahendite, s. t. generaalplaani võimalike variantide suur arv.

Kuivõrd sotsioloogiliste ning arhitektuuriliste nõuete täitmine on suures osas määratud linnaehituse normidega, siis kujuneb linna generaalplaani optimaalsuse peamiseks kriteeriumiks tema majanduslikkus. Seega võib generaalplaani koostamise ülesande lühidalt formuleerida järgnevalt: *tagada elamuehituse programmi täitmine teatud perioodi jooksul minimaalsete kuludega*[1], *jälgides seejuures linnaehituse norme ning täiendavaid lisatingimusi.*

Peatugem lühidalt ühel linna planeerimise iseloomulikul joonel. Linna generaalplaan[2] peab määrama kindlaks linna arengu üldsuunad teatud perioodi jooksul (tavaliselt umbes 25 aastaks) ning täpse ehitamise programmi lähemaks perioodiks (tavaliselt 5 aastaks). Sisuliselt on pikema perioodi vaatlemine vajalik selleks, et õigesti määrata esimese perioodi ehitusi. Kuivõrd linna arengu prognoosimine pikemaks perioodiks ette on mõningal määral ligikaudne, siis tuleb pärast esimese perioodi ehitusprogrammi realiseerimist linna generaalplaani korrigeerida, et täpsemini määrata järgmise perioodi ehituste programm. Seega on meil linna planeerimise puhul tegemist nn. liikuva integraalse planeerimisega[3], kus esimese perioodi ehituste õigeks

---

[1] Elamuehituse planeerimine on arusaadavalt tihedalt seotud tööstuse ning ühiskondlike asutuste planeerimisega. Käsitluse lihtsustamiseks vaatleme käesolevas artiklis elamuehituse planeerimist isoleeritult.

[2] Suurte linnade planeerimisel eelneb generaalplaani koostamisele generaalplaani tehnilis-ökonoomiliste aluste väljatöötamine. Just viimase probleemi lahendamist peetaksegi silmas käesolevas artiklis.

[3] Vt. Пугачев, В. Ф., О критерии оптимальности экономики. — Экономико-математические методы, вып. I, М., 1963, lk. 63—106.

planeerimiseks on vajalik vaadelda linna arengut integraalselt pikema perioodi jooksul. Samal ajal linna väljaehitamise käigus liigub edasi ka generaalplaani perioodi lõpp.

Tekib küsimus: *millised kulud peaksid optimaalse generaalplaani puhul olema minimaalsed*? Nähtavasti on otstarbekas nõuda, et generaalplaani perioodi jooksul oleks minimaalne kapitaalmahutuste ja ekspluatatsioonikulude summa. Generaalplaani perioodiga piirdumine on põhjendatud sellega, et reeglina ei ole olemas andmeid elamuehituse programmi kohta pärast generaalplaani perioodi lõppu.

Kuivõrd linnaehituses kokkuhoitud summad investeeritutena teistesse rahvamajandusharudesse võivad anda täiendavat akumulatsiooni, siis on esimestel aastatel tehtud kulutustel suurem kaal kui hilisematel kulutustel. Seega on vajalik tuua ülesande sihifunktsiooni sisse ajast sõltuv kaalufunktsioon $f(t)$, millega tuleb korrutada erinevatel perioodidel tehtavad kulutused.

Kuna erinevatel ajamomentidel tehtavate kulutuste võrdlemine mittetootlike objektide ehitamisel on majandusteaduses lahendamata probleem, siis peame funktsiooni $f(t)$ täpsema kuju jätma esialgu lahtiseks. Selleks, et soodsamad ehitusrajoonid tuleksid kasutusele esimeses järjekorras, piisab, kui $f(t)$ on aeglaselt monotoonselt kahanev funktsioon. Lisame veel, et kapitaalmahutuste efektiivsuse koefitsiendi abil määratud ajateguri kasutamine ei näi vaadeldava probleemi puhul olevat õigustatud.

Eeltoodu põhjal võime käsitletava ülesande optimaalsuse kriteeriumi sümboolselt kirjutada kujul

$$\int_0^T Q(\mathbf{x}, t) f(t)\,dt = \min, \qquad (1)$$

kus $Q(\mathbf{x}, t)$ tähendab kulutusi ajaühikus momendil t, olenevalt lahendusvektorist $\mathbf{x}$ ja T — generaalplaani perioodi pikkust.

Märgime, et vaadeldava ülesande sihifunktsioonil võib olla ka teistsugune majanduslik tähendus.

2. Generaalplaani lineaarne matemaatiline mudel

Kirjeldame lühidalt kirjandusest tuntud [4] generaalplaani lineaarset matemaatilist mudelit.

Olgu g_{ij} ühe m^2 elamispinna ehitamise maksumus rajoonis i hoonestustüübi j puhul ($i = 1,2, \ldots, l$; $j = 1,2, \ldots, m$). Võimalike ehitusrajoonide all mõtleme nii vabu territooriume linna lähemas ümbruses kui ka vanade hoonetega kaetud territooriume, mille rekonstrueerimine generaalplaani perioodi jooksul

[4] Vt. Терехин, В., Елькина, В., Севостьянов, Л., Выбор этажности застройки при реконструкции городских жилых районов. — Архитектура СССР, № 6, 1964, lk. 9—13.

tuleb kõne alla. Viimasel juhul peab g_{ij} arvutamisel arvestama ka lammutamiskulusid, lammutatavate hoonete jääkväärtuse kompenseerimist jne. Hoonestustüüpide arv m on tavaliselt väike — näiteks 5-, 9- ja 14-korruselised hooned. Võib aga osutuda vajalikuks arvestada hoonestustüüpide puhul ka konstruktsiooni — näiteks paneel-, suurplokk- ja telliselamud.

Olgu s_j ehitusrajooni pindala, mis on vajalik ühe m² elamispinna jaoks j-nda hoonestustüübi puhul; h_{ij} — uue elamispinna ruutmeetrite hulk, mis saadakse i-ndas rajoonis ühe m² elamispinna ehitamisel hoonestustüübi j puhul (h_{ij} erineb ühest vaid rekonstrueeritavates rajoonides); S_i — i-nda rajooni pindala; H — summaarne vajalik elamispind; x_{ij} — elamispinna ruutmeetrite hulk, mis ehitatakse i-ndasse rajooni, kasutades selleks j tüüpi hooneid.

Linna planeerimise ülesanne on nüüd formuleeritav järgnevalt: leida suuruste x_{ij} sellised väärtused, mis rahuldavad tingimusi:

$$x_{ij} \geqslant 0, \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} s_j \leqslant S_i, \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} x_{ij} h_{ij} = H, \tag{4}$$

ning mille puhul funktsioon

$$z = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} g_{ij} x_{ij} \tag{5}$$

saavutab minimaalse väärtuse. Olgu märgitud, et tingimus (3) arvestab üksikute ehitusrajoonide suuruse piiratust, tingimus (4) aga tagab elamuehituse vajaliku mahu täitmise.

Praktikas võib esineda ka järgmine ülesande seade: *tagada etteantud kulutuste z juures elamispinna maksimaalne juurdekasv.* Seda ülesannet kirjeldab matemaatiline mudel:

$$x_{ij} \geqslant 0, \tag{6}$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} s_j \leqslant S_i, \tag{7}$$

$$\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} g_{ij} x_{ij} = z = \text{const.}, \tag{8}$$

$$\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} x_{ij} h_{ij} = \max. \tag{9}$$

Toodud matemaatiliste mudelite puuduseks on, et nad ei arvesta ekspluatatsioonikulusid. Sellest puudusest saaks osaliselt üle, interpreteerides suurusi g_{ij} taandatud kuludena[5]. Olulisemaks puuduseks on aga mudelite staatilisus, mis ei luba küllalt detailselt käsitleda rekonstrueerimise efektiivsust. Nimelt on vanade elamurajoonide rekonstrueerimine kapitaalmahutuste seisukohalt seda efektiivsem, mida hiljem me rekonstrueerimist teostame, kuivõrd hoonete jääkväärtus väheneb monotoonselt. Et aga vanades hoonetes on kapitaalremondi ning ekspluatatsioonikulud reeglina kõrgemad, siis sellelt seisukohalt on rekonstrueerimine seda efektiivsem, mida varem ta toimub. Need kaks vastukäivat aspekti ülaltoodud mudelites ei kajastu.

3. Täiustatud lineaarne mudel

Mõnevõrra adekvaatsemaks võib lugeda järgmist generaalplaani matemaatilist mudelit.

Linna väljaehitamise dünaamika paremaks kirjeldamiseks jagame generaalplaani teostamise aja T perioodideks t ($t = 1, 2, \ldots, n$). Kasutame järgnevaid tähistusi:

S_t — t-ndal perioodil vajalik elamispinna juurdekasv (m^2-tes);
Q_{jt} — hoonestustüübi j detaile tootvate tehaste maksimaalne võimsus perioodil t (m^2-tes);
l_{it} — olemasolev m^2-te hulk i-ndas rajoonis, mis ei lange välja kuni perioodi t lõpuni;
k_{ij} — elamispinna m^2-te hulk, mis saadakse i-nda rajooni väljaehitamisel j-nda hoonestustüübi puhul;
e_{it} — olemasoleva elamispinna ekspluatatsiooni- ja kapitaalremondikulud (rbl/m^2) aastas rajoonis i perioodil t;
g_{ijt} — summaarsed kulud rajoonis i ühe m^2 väljaehitamiseks ja ekspluatatsiooniks alates ehitamise momendist t kuni generaalplaani teostamise aja lõpuni, kasutades hoonestüüpi j;
f_t — kaalufunktsiooni $f(t)$ (vt. p. 1) väärtus perioodil t;
x_{ijt} — tegur, mis näitab, milline osa i-ndast rajoonist tuleb hoonestada perioodil t hoonestustüübiga j.

Ülesanne on nüüd formuleeritav järgnevalt: leida sellised x_{ijt} väärtused, mis rahuldavad tingimusi

$$x_{ijt} \geqslant 0, \tag{10}$$

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{t=1}^{n} x_{ijt} \leqslant 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, l), \tag{11}$$

$$\sum_{i=1}^{l} k_{ij} x_{ijt} \leqslant Q_{jt} \qquad (j = 1, 2, \ldots, m; \ t = 1, 2, \ldots, n), \tag{12}$$

[5] Taandatud kulude N all mõtleme avaldist $N = e + E_n \cdot K$, kus e = aastased ekspluatatsioonikulud rbl/m^2, K = erikapitaalmahutused rbl/m^2, E_n = normatiivne kapitaalmahutuste efektiivsuse koefitsient (linnaehituses soovitatakse võtta $E_n = 0{,}1$).

$$\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}(k_{ij}-l_{it})x_{ijt}=S_t \qquad (t=1, 2, \ldots, n) \tag{13}$$

ning mille puhul saavutab oma minimaalse väärtuse funktsioon

$$z=\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=1}^{n} f_t[k_{ij}x_{ijt}g_{ijt}+(1-\sum_{k=1}^{t}x_{ijk})l_{it}e_{it}]. \tag{14}$$

Tingimus (11) arvestab siin üksikute rajoonide maksimaalset võimalikku hoonestamise mahtu, tingimus (12) — ehitusmaterjalide tehaste maksimaalseid tootmisvõimsusi. Tingimuse (13) täitmine tagab aga vajaliku elamispinna juurdekasvu üksikutel perioodidel.

Sihifunktsiooni (14) esimene osa sisaldab kulud, mis on seotud uute hoonete ehitamise ning ekspluatatsiooniga. Teine osa võtab arvesse vana elamispinna säilitamisega seotud ekspluatatsiooni- ja kapitaalremondikulud.

On võimalik, et kirjeldatud ülesande lahendiga määratud ökonoomseimad hoonestustüübid üksikutes rajoonides ei taga vajalikku arhitektuurilist mitmekesisust. Sellisel juhul saab lahendit muuta vastuvõetavamaks, asendades üksikutes rajoonides ühetüübilise hoonestuse segahoonestusega, lähtudes arhitektuurilistest kaalutlustest. Seejuures peab arvestama ka vastavat elamispinna suuruse muutust üksikutes rajoonides. Arhitektuurilistest kaalutlustest tingitud lisakulutusi on lihtne välja arvutada. Teiseks ja mõnevõrra korrektsemaks võimaluseks on juba ülesande püstitamisel opereerida arhitektuuriliselt vastuvõetavate segahoonestustüüpidega.

Kirjeldatud matemaatilistes mudelites on eeldatud, et suurused g_{ijt} on konstandid ja üksikute rajoonide kohta küllaldase täpsusega määratavad. Tänu sellele kuuluvad toodud planeerimisülesanded lineaarsete planeerimisülesannete klassi ning on lahendatavad vastavate hästi tuntud meetoditega [6].

Praktikas sõltuvad aga suurused g_{ijt} osaliselt sellest, millisel määral hoonestatakse teisi rajoone, s. t. linna generaalplaanist tervikuna. See põhjustab vaadeldava ülesande mittelineaarsuse. Märgitud raskusest ülesaamiseks on mõeldav kasutada järkjärgulise lähenemise meetodit. Eelkõige tuleb püstitada hüpotees linna optimaalse generaalplaani kohta ning sellest lähtudes arvutada suurused g_{ijt}. Juhul kui ülesande lahendamisel määratav nn. tinglikult optimaalne generaalplaan oluliselt erineb lähtehüpoteesist, tuleks arvutada uued g_{ijt} väärtused ja protseduuri korrata, kuni kaks järjestikust plaani on teineteisele küllalt lähedased.

---

[6] Vt. Kaasik, Ü., Lineaarsed planeerimisülesanded. — Matemaatika ja kaasaeg II, lk. 31—46.

4. Generaalplaani mittelineaarne mudel

Generaalplaani ülalkirjeldatud matemaatiliste mudelite puhul oli eeldatud, et ühe m^2 ehitusmaksumus ja ekspluatatsioonikulud ei sõltu sellest, millises ulatuses antud rajooni hoonestatakse. Planeeritava territooriumi jagamisel küllalt väikesteks rajoonideks on selle eelduse kasutamine põhjendatud. Olenevalt linna planeerimise konkreetsest ülesandest võib ehitusmaksumuse sõltuvus hoonestusmahust mõnikord siiski osutuda oluliseks. Näiteks võib selline olukord esineda juhul, kui ehitusmaht tuleb jaotada mitme suure rajooni vahel, millest kõigi väljaehitamine täies ulatuses ei ole ilmselt otstarbekas.

Seega on vaadeldav ülesanne n.-ö. kahekordselt mittelineaarne — summaarsed kulud ühele m^2-le üksikutes rajoonides sõltuvad ehitusmahust nii antud rajoonis kui ka teistes rajoonides.

Vaatleme ülesande seadet kujul, mis võimaldab arvestada esimest märgitud mittelineaarsustest. Kasutame järgnevaid tähistusi:

x_i — ehitusmaht rajoonis i (m^2-tes);
p_i — maksimaalne võimalik ehitusmaht rajoonis i (m^2-tes);
$g_i(x_i)$ — ühe m^2 ehitamise kulud rajoonis i ehitusmahul x_i;
H — vajalik summaarne uus elamispind (m^2-tes).

Ülesanne on nüüd sõnastatav järgmise mittelineaarse planeerimisülesandena:

$$0 \leqslant x_i \leqslant p_i, \tag{15}$$

$$\sum_{i=1}^{l} x_i = H, \tag{16}$$

$$z = \sum_{i=1}^{l} g_i(x_i) x_i = \min. \tag{17}$$

Olgu märgitud, et selle ülesande lahendamisel saab kasutada dünaamilise planeerimise [7] meetodeid.

Kuivõrd adekvaatselt esitatud mudel kirjeldab generaalplaani koostamisega seotud problemaatikat, sõltub sellest, kuidas on määratud suurused x_i ja $g_i(x_i)$. Rekonstrueeritavates rajoonides tuleb suuruse x_i all mõelda elamispinna juurdekasvu. Suuruse $g_i(x_i)$ arvutamisel tuleb iga x_i puhul valida ökonoomseim hoonestustüüp. Vajaduse korral võib $g_i(x_i)$ arvutamisel arhitektuurilistel kaalutlustel opereerida ka segahoonestusega. Lisaks peab suuruses $g_i(x_i)$ avalduma lammutatava elamispinna jääkväärtus. Nähtavasti on seetõttu otstarbekas mõelda $g_i(x_i)$ all taandatud kulusid.

Esitatud mudelis pole arvesse võetud rajoonide väljaehita-

---

[7] Vt. eelmine artikkel.

mise alustamise aegu, mis on aga küllalt olulised generaalplaani realiseerimise ning summaarsete kulude määramise seisukohast. Mudeli mõningase komplitseerimisega on aga kirjeldatud puudusest võimalik vabaneda. Selleks anname ette rajoonide väljaehitamise järjekorra ja lahendame eelmisega analoogilise ülesande. Lahendis on ehituse alustamise ajad üksikutes rajoonides juba lihtsalt määratavad. Et aga valitud ehitusjärjekord ei tarvitse olla parim, siis tuleb ülesanne lahendada mitmete mõeldavate ehitusjärjekordade puhul ja valida nendest soodsaim.

5. Musta kasti meetod

Linna generaalplaani koostamisel on üksikute kulukomponentide arvutamisel peamiseks raskuseks mitmete rajoonidega üheaegselt seotud kulude õige jaotamine rajoonide vahel. See probleem kerkib näiteks insener-tehniliste kommunikatsioonide ja teede rajamisega seotud kulude arvutamisel. Teiselt poolt on viimati märgitud kulude leidmine üksikutele rajoonidele aga väga vajalik, et õigesti määrata ökonoomset elamuehituse mahtude jaotust.

Märgitud raskuse tõttu piirdutakse praktikas sageli linna väljaehitamisega seotud summaarsete kulude arvutamisega vaid mõnede (peamiselt intuitsioonile tuginedes koostatud) generaalplaani variantide puhul. Kuigi see meetod vähegi tõsisema ülesande puhul ei taga soodsaima lahenduseni jõudmist, võib tema kasutamine metoodilise võttena siiski olla põhjendatud.
tud.

Käsitleme linna generaalplaani maksumuse kujunemist kui ühtset süsteemi, mille seaduspärasusi me optimaalse generaalplaani määramiseks püüame avastada. See süsteem kujutab endast sisuliselt küberneetikast tuntud «musta kasti». Tema sisenditeks on generaalplaani üksikud variandid ning väljunditeks nende variantide realiseerimise maksumused. Koostades teatud arvu generaalplaani variante (varieerides seejuures elamuehituse mahte üksikutes rajoonides) ning määrates iga variandi maksumuse, saame informatsiooni vaadeldava süsteemi käitumise kohta. Selle informatsiooni matemaatiline töötlemine võimaldab teatud usaldusväärsusega selgitada generaalplaani maksumuse sõltuvust üksikute rajoonide hoonestusmahtudest ning seega anda aluse generaalplaani optimaalse variandi koostamiseks.

Kõik eespool kirjeldatud matemaatiliste mudelite sihifunktsioonid (5), (14), (17) sisaldasid kordajatena üksikutes rajoonides ehitatava elamispinna m^2 maksumuse. Nende suuruste leidmine on aga ülalmainitu tõttu küllaltki keeruline ja osaliselt meelevaldne. Musta kasti meetod võimaldabki ligikaudselt määrata ülesande sihifunktsiooni, minnes mööda iga rajooni elamispinna m^2 maksumuse leidmisest.

Olgu eelnevalt koostatud m generaalplaani varianti ($j = 1, 2, \ldots, m$). Tähistagu x_{ij} generaalplaani variandis j ettenähtud ehitusmahtu rajoonis i ja z_j — generaalplaani realiseerimise summaarseid kulusid variandi j puhul.

Oletame, et summaarsed kulud z sõltuvad üksikute rajoonide ehitusmahtudest x_i lineaarselt:

$$z = a_0 + \sum_{i=1}^{l} a_i x_i. \tag{18}$$

Juhul $m > 1$ saame siit vähimruutude meetodil määrata koefitsiendid $a_0, a_1, \ldots, a_l$. Generaalplaani optimaalse variandi leidmiseks võib nüüd sihifunktsioonina kasutada lineaarset avaldist (18).

6. Kokkuvõte

Nagu ülaltoodust selgub, on linna generaalplaani matemaatiliseks modelleerimiseks mitmeid võimalusi, millest igal on oma puudused ja eelised. Millist nendest praktikas kasutada, sõltub konkreetsest ülesandest.

Nende ridade autoritele tundub praegusel momendil kõige vastuvõetavam punktis 3 kirjeldatud täiustatud lineaarne mudel. Koostöös ENSV TA Majanduse Instituudi ja RPI «Eesti Projektiga» tehakse Teaduste Akadeemia Küberneetika Instituudis praegu ettevalmistusi selle mudeli kasutamiseks Tallinna generaalplaani koostamisel. Mõningate probleemide lahendamisel on arvatavasti otstarbekas kasutada ka punktis 4 kirjeldatud mittelineaarset mudelit.

Musta kasti meetodil on analüüsitud RPI «Eesti Projektis» koostatud Tallinna generaalplaani 12 varianti, mis võimaldas saada mõningaid hinnanguid korruste optimaalse arvu kohta üksikutes rajoonides. Algandmete ebatäpsuse tõttu ei olnud selle meetodi kasutamine generaalplaani lõpliku variandi koostamiseks õigustatud.

Lõpuks märkigem, et operatsioonianalüüsi meetodite kasutamine linnade generaalplaanide koostamisel astub alles oma esimesi samme. Seetõttu on ka esitatud tulemused esialgsed. Arvestades linnade väljaehitamisega seotud kapitaalmahutuste suurust, on siin operatsioonianalüüsi spetsialiste ootamas väga tänuväärne tööpõld.

Täiendusi koolimatemaatikale

VEIDI KOLMNURGA ARITMEETIKAT

Jakob Gabovitš

Olgu antud kolmnurk külgedega a, b ja c. Juba keskkoolikursuses tuletatakse suurem osa valemeist, mille abil antud küljepikkuste järgi saab arvutada kolmnurga mitmesuguseid teisi elemente. Toome need valemid siin ilma tõestusteta.

Pindala S arvutamiseks kasutatakse nn. Heroni valemit

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \tag{1}$$

kus p-ga on tähistatud kolmnurga pool ümbermõõtu:

$$p = \frac{a+b+c}{2}.$$

Kolmnurga sise- ning ümberringjoone raadiused r ja R saab arvutada valemitest

$$r = \frac{S}{p}, \qquad R = \frac{abc}{4S}.$$

Tähistame külgede a, b ja c vastasnurgad vastavalt α, β ja γ. Nende nurkade siinused võib arvutada valemitest

$$\sin\alpha = \frac{a}{2R}, \qquad \sin\beta = \frac{b}{2R}, \qquad \sin\gamma = \frac{c}{2R}.$$

Mõnikord on kolmnurga nurki aga kasulikum leida poolnurkade tangensite kaudu:

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{p-a}, \qquad \tan\frac{\beta}{2} = \frac{r}{p-b}, \qquad \tan\frac{\gamma}{2} = \frac{r}{p-c}.$$

Tähistame küljele a (või külgedele b, c) tõmmatud kõrguse sümboliga h_a (või vastavalt h_b, h_c). Siis teatavasti

$$h_a = \frac{2S}{a}, \qquad h_b = \frac{2S}{b}, \qquad h_c = \frac{2S}{c}.$$

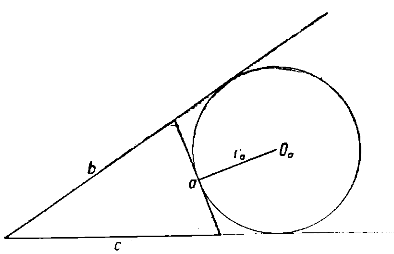
Sageli on kolmnurgas tarvis leida ka nn. küljejoonestatud ringjoonte raadiusi r_a, r_b ja r_c (näiteks r_a on külje a ning külgede b ja c pikendusi puutuva ringjoone raadius; vt. joonis 1). Nende arvutamine toimub järgmiste valemite abil:

$$r_a = \frac{S}{p-a}, \quad r_b = \frac{S}{p-b}, \quad r_c = \frac{S}{p-c}.$$

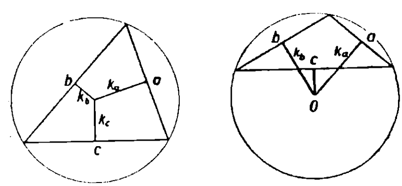
Olgu veel k_a, k_b ja k_c ümberringjoone keskpunkti O kaugused kolmnurga vastavatest külgedest (joonis 2). Ka need suurused võib leida lihtsatest valemitest:

$$k_a = R\cos\alpha, \quad k_b = R\cos\beta, \quad k_c = R\cos\gamma$$

(märgime, et nende valemite järgi arvutamisel saame negatiivse kauguse siis, kui tegemist on kaugusega nürinurga vastasküljest).



Joonis 1.



Joonis 2.

Kolmnurga vaadeldud elementide vahel kehtib mitmeid huvitavaid seoseid. Toome neist siinkohal järgmised:

$$h_a h_b h_c = \frac{2S^2}{R}, \quad \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r},$$

$$r_a r_b r_c = pS, \quad \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r},$$

$$r_a + r_b + r_c = r + 4R, \quad k_a + k_b + k_c = r + R.$$

Järgnevas piirdume vaid niisuguste kolmnurkade vaatlemisega, mille külgede pikkused a, b ja c on täisarvud. Sellist kolmnurka tähistame edaspidi sümboliga (a, b, c).

Kui a, b ja c on ühisjagajata täisarvud, siis kolmnurka (a, b, c) nimetatakse primitiivseks. Sellised kolmnurgad meid aga peamiselt huvitavadki, sest iga mitteprimitiivne kolmnurk[1] (ma, mb, mc) on ju sarnane primitiivse kolmnurgaga (a, b, c). Seega kolmnurga (ma, mb, mc) elementide saamiseks võime leida lihtsalt kolmnurga (a, b, c) vajalikud lineaarsed elemendid ja korrutada need teguriga m, pindala aga teguriga m^2 (vastavad nurgad on mõlemas kolmnurgas muidugi võrdsed).

Tabelis 1 on arvutatud mõnede vähimate mõõtmetega primi-

[1] S. t. kolmnurk, mille külgede pikkused on täisarvud, kuid ühest suurema ühisjagajaga m.

Tabel 1.

a	1	1	2	2	3	4
b	1	2	2	3	4	5
c	1	2	3	4	5	6
p	1,5	2,5	3,5	4,5	6	7,5
S	$\sqrt{3}/4$	$\sqrt{15}/4$	$3\sqrt{7}/4$	$3\sqrt{15}/4$	6	$15\sqrt{7}/4$
r	$0{,}5/\sqrt{3}$	$\sqrt{0{,}15}$	$1{,}5/\sqrt{7}$	$1/\sqrt{2{,}4}$	1	$0{,}5\sqrt{7}$
R	$1/\sqrt{3}$	$4/\sqrt{15}$	$4/\sqrt{7}$	$8/\sqrt{15}$	2,5	$8/\sqrt{7}$
$\sin\alpha$	$0{,}5\sqrt{3}$	$\sqrt{15}/8$	$\sqrt{7}/4$	$\sqrt{15}/8$	0,6	$\sqrt{7}/4$
$\sin\beta$	$0{,}5\sqrt{3}$	$\sqrt{15}/4$	$\sqrt{7}/4$	$3\sqrt{15}/16$	0,8	$\sqrt{7}/3{,}2$
$\sin\gamma$	$0{,}5\sqrt{3}$	$\sqrt{15}/4$	$3\sqrt{7}/8$	$\sqrt{15}/4$	1	$3\sqrt{7}/8$
$\tan\frac{\alpha}{2}$	$1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{15}$	$1/\sqrt{7}$	$1/\sqrt{15}$	1/3	$1/\sqrt{7}$
$\tan\frac{\beta}{2}$	$1/\sqrt{3}$	$\sqrt{0{,}6}$	$1/\sqrt{7}$	$1/\sqrt{5{,}4}$	0,5	$0{,}2\sqrt{7}$
$\tan\frac{\gamma}{2}$	$1/\sqrt{3}$	$\sqrt{0{,}6}$	$3/\sqrt{7}$	$1/\sqrt{0{,}6}$	1	$\sqrt{7}/3$
h_a	$0{,}5\sqrt{3}$	$0{,}5\sqrt{15}$	$3\sqrt{7}/4$	$3\sqrt{15}/4$	4	$15\sqrt{7}/8$
h_b	$0{,}5\sqrt{3}$	$\sqrt{15}/4$	$3\sqrt{7}/4$	$0{,}5\sqrt{15}$	3	$1{,}5\sqrt{7}$
h_c	$0{,}5\sqrt{3}$	$\sqrt{15}/4$	$0{,}5\sqrt{7}$	$3\sqrt{15}/8$	2,4	$\sqrt{7}/0{,}8$
r_a	$0{,}5\sqrt{3}$	$1/\sqrt{2{,}4}$	$0{,}5\sqrt{7}$	$0{,}3\sqrt{15}$	2	$7{,}5/\sqrt{7}$
r_b	$0{,}5\sqrt{3}$	$0{,}5\sqrt{15}$	$0{,}5\sqrt{7}$	$0{,}5\sqrt{15}$	3	$1{,}5\sqrt{7}$
r_c	$0{,}5\sqrt{3}$	$0{,}5\sqrt{15}$	$1{,}5\sqrt{7}$	$1{,}5\sqrt{15}$	6	$2{,}5\sqrt{7}$
k_a	$0{,}5\sqrt{3}$	$3{,}5/\sqrt{15}$	$3/\sqrt{7}$	$7/\sqrt{15}$	2	$6/\sqrt{7}$
k_b	$0{,}5\sqrt{3}$	$1/\sqrt{15}$	$3/\sqrt{7}$	$5{,}5/\sqrt{15}$	1,5	$4{,}5/\sqrt{7}$
k_c	$0{,}5\sqrt{3}$	$1/\sqrt{15}$	$-0{,}5/\sqrt{7}$	$-2/\sqrt{15}$	0	$1/\sqrt{7}$

tiivsete kolmnurkade elemendid. Tabeli esimeses veerus paiknevad ainsa *võrdkülgse* primitiivse kolmnurga elemendid. Teine veerg vastab minimaalsele teravnurksele ja kolmas veerg minimaalsele nürinurksele *võrdhaarsele* primitiivsele kolmnurgale. Järgnevas kolmes veerus on toodud minimaalsete *iseküIgsete* primitiivsete kolmnurkade (vastavalt nürinurkse, täisnurkse ja teravnurkse) elemendid.

Tabelist näeme, et suuremal osal esitatud kolmnurkadest on kõik arvutatavad elemendid (peale p) irratsionaalsed. Erandiks on vaid täisnurkne kolmnurk (3, 4, 5), mille kõik elemendid avalduvad just ratsionaalarvudena.

Jätkates järjest kasvavate mõõtmetega primitiivsete kolmnurkade, näiteks kolmnurkade (2, 3, 3), (3, 4, 4), (3, 4, 6) jne. vaatlemist, veendume kergesti, et nende elemendid on reeglina jälle kõik irratsionaalsed, kuid vahetevahel leiame selles kolmnurkade reas ka uuesti mõne ratsionaalsete elementidega kolmnurga. Viimaste hulka kuuluvad näiteks kolmnurgad (5, 5, 6), (5, 12, 13), (4, 13, 15) jne. Asja lähemal vaatlemisel tekib veendumus, et irratsionaalsete elementidega kolmnurgad esinevad primitiivsete kolmnurkade hulgas palju sagedamini kui ratsionaalsete elementidega kolmnurgad. Viimased moodustavad seega teatud mõttes erandliku nähtuse.

Sageli huvitavad meid aga just ratsionaalsete elementidega kolmnurgad. Nende tundmine on tähtis mitte ainult «mugavate» ülesannete koostamiseks, vaid ka mitmesuguste konstruktsioonülesannete lahendamisel, mudelite ehitamisel ja paljude teiste rakenduslike probleemide puhul. Seetõttu ongi mõtet võtta vaatlusele ratsionaalsete elementidega primitiivsete kolmnurkade leidmise ülesanne.[2]

Ülaltoodud valemitest nähtub vahetult, et vaadeldavate elementide ratsionaalsuse piisavaks tingimuseks on primitiivse kolmnurga üheainsa elemendi — pindala S — ratsionaalsus (suuruste k_a, k_b ja k_c arvutamise puhul meenutagem, et koosinuslausest järeldub iga primitiivse kolmnurga sisenurkade koosinuste ratsionaalsus). Sellega ongi seletatav, et tabelis 1 kõik arvutatud elemendid osutusid iga kolmnurga korral kas irratsionaalseteks või ratsionaalseteks.

Ratsionaalsete külgede ja ratsionaalse pindalaga kolmnurka nimetatakse ratsionaalseks kolmnurgaks. Eristatakse kolme liiki ratsionaalseid kolmnurki: 1) täisnurksed (nn. Pythagorase kolmnurgad), 2) võrdhaarsed ja 3) iseküIgsed, mis kannavad Heroni kolmnurkade nimetust.

Pythagorase kolmnurkade leidmisega tegelesid juba kuulsad antiikaja matemaatikud Pythagoras, Eukleides ja eriti 3. sajandil (m. a. j.) Aleksandrias elanud Diophantos. Viimane andis reegli Pythagorase kolmnurkade arvutamiseks. Selle reegli võib üles kirjutada valemitena

$$a = 2mn, \quad b = m^2 - n^2, \quad c = m^2 + n^2, \tag{2}$$

kus a ja b on kolmnurga kaatetid ning c hüpotenuus.

Nendest valemitest (nagu seda hiljem tõestati) saame kõik primitiivsed Pythagorase kolmnurgad, kui positiivsed täisarvud m ja n ($m > n$) on ühisjagajata ning üks nendest paarisarv. Leidub vaid 16 niisugust primitiivset Pythagorase kolmnurka, mille kõik küljed on väiksemad kui 100. Need kolmnurgad on loetletud tabelis 2; samas on näidatud ka m ja n väärtused, mille korral vastavad a, b ja c valemitest (2) saadakse.

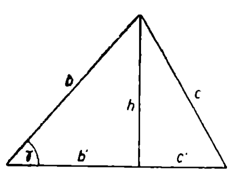
---

[2] Juhime lugeja tähelepanu asjaolule, et juttu on mitte kolmnurga kõikidest elementidest, vaid ainult nendest, mis on toodud tabelis 1. Kolmnurga ülejäänud elemendid (nagu näiteks mediaanid, nurgapoolitajad jne.) võivad sealjuures osutuda irratsionaalseteks, kuid neid me siin vaatlusele ei võta.

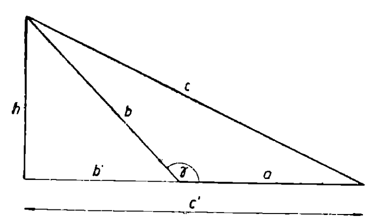
Tabel 2.

m	n	a	b	c	m	n	a	b	c
2	1	4	3	5	6	5	60	11	61
3	2	12	5	13	7	4	56	33	65
4	1	8	15	17	8	1	16	63	65
4	3	24	7	25	8	3	48	55	73
5	2	20	21	29	9	2	36	77	85
6	1	12	35	37	7	6	84	13	85
5	4	40	9	41	8	5	80	39	89
7	2	28	45	53	9	4	72	65	97

Võrdhaarsete ratsionaalsete kolmnurkade moodustamine on hoopis lihtne: kõiki neid võib saada kahe võrdse Pythagorase kolmnurga «liitmise» teel (kolmnurkade liitmise all mõistame nende niisugust kõrvutiasetamist, et tekkinud kujund on jälle kolmnurk; viimase pindala võrdub «liidetavate» kolmnurkade pindalade summaga; joon. 3). Igast Pythagorase kolmnurgast võib sealjuures moodustada kaks võrdhaarset ratsionaalset kolmnurka. Näiteks lähtudes tabeli 2 esimesest kolmnurgast (4, 3, 5) saame võrdhaarsed kolmnurgad (5, 5, 6) ja (5, 5, 8), tabeli teise kolmnurga (12, 5, 13) liitmine iseendaga annab tulemuseks (10, 13, 13) ja (13, 13, 24) jne.



Joonis 3.



Joonis 4.

Asume nüüd Heroni kolmnurkade leidmise juurde. Nimelt näitame, et iga Heroni kolmnurga võib saada kas kahe Pythagorase kolmnurga liitmise või «lahutamise» teel (kolmnurkade lahutamiseks nimetame nende niisugust ülestikku asetamist, mille korral ühekordselt kaetud kujund on kolmnurk; viimase pindala võrdub «lahutatavate» kolmnurkade pindalade vahega; joon. 4).

Olgu antud iseküIgne ratsionaalne kolmnurk külgedega a, b ja c (kusjuures $a < b < c$) ning pindalaga S. Et a ja S on ratsionaalsed, siis alusele a tõmmatud kõrgus h_a on samuti ratsionaalne, sest $h_a = 2S/a$. Vaatleme eraldi teravnurkse ($\gamma < 90°$) ja nürinurkse ($\gamma > 90°$) kolmnurga juhtu.

Esimesel juhul (joonis 3) avalduvad haarade b ja c projektsioonid alusele a (tähistame neid b' ja c') teatavasti kujul

$$b' = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}, \quad c' = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$$

ning on järelikult samuti ratsionaalsed. Seega vaadeldav kolmnurk on moodustatud Pythagorase kolmnurkade (h_a, b', b) ja (h_a, c', c) liitmise teel.

Teisel juhul (joonis 4) on samad projektsioonid

$$b' = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{2a} \quad \text{ja} \quad c' = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$$

jälle ratsionaalsed ning kolmnurk (a, b, c) on moodustatav Pythagorase kolmnurkade (h_a, c', c) ja (h_a, b', b) lahutamise teel.

Äsja tõestatud teoreem annab meile praktilise võtte Heroni kolmnurkade leidmiseks. Selleks valime kaks suvalist Pythagorase kolmnurka (a_1, b_1, c_1) ja (a_2, b_2, c_2), laiendame neid nii, et üks paar kaateteid muutuks võrdseks (sellest saab konstrueeritava Heroni kolmnurga kõrgus) ning teostame laiendatud kolmnurkade liitmise või lahutamise. Et kaatetite võrdsustamiseks on neli võimalust (me võime selleks valida neli paari: (a_1, a_2), (a_1, b_2), (a_2, b_1) ja (b_1, b_2)), siis igast Pythagorase kolmnurkade paarist võib moodustada kaheksa Heroni kolmnurka.

Tabelis 3 on näitena antud lähtekolmnurkade (3, 4, 5) ja (5, 12, 13) abil moodustatud Heroni kolmnurgad (a, b, c). Arvud m_1 ja m_2 on vastavad laiendustegurid; paaride valik on teostatud ülal märgitud järjekorras, kusjuures kolmnurkade liitmine eelneb iga kord nende lahutamisele.

Tabel 3.

m_1	m_2	m_1a_1	m_1b_1	m_1c_1	m_2a_2	m_2b_2	m_2c_2	a	b	c
5	3	15	20	25	15	36	39	25	39	56
								16	25	39
4	1	12	16	20	5	12	13	13	20	21
								11	13	20
5	4	15	20	25	20	48	52	25	52	63
								25	33	52
3	1	9	12	15	5	12	13	13	14	15
								4	13	15

Ei tule arvata, nagu saaks Heroni kolmnurki moodustada ainult erinevate Pythagorase kolmnurkade abil. Võib nimelt lähtuda ka võrdsetest Pythagorase kolmnurkadest, kuid nende kaatetid peavad siis olema paigutatud erinevas järjekorras.

Olgu tegemist niisuguse paariga, mis koosneb võrdsetest Pythagorase kolmnurkadest (a, b, c) ja (b, a, c). Laiendamise tulemusena saame kolmnurgad (ab, b^2, bc) ja (ab, a^2, ac). Viimaste liitmine annab ratsionaalse kolmnurga

$$(ac,\ bc,\ a^2+b^2)=(ac,\ bc,\ c^2).$$

See ei ole aga Heroni kolmnurk, vaid lähtekolmnurgaga sarnane Pythagorase kolmnurk. Laiendatud kolmnurkade lahutamine seevastu annab Heroni kolmnurga (ac, bc, b^2-a^2). Olgu märgitud, et niiviisi saadud Heroni kolmnurk on alati nürinurkne. Näiteks kolmnurgast (3, 4, 5) lähtudes saame laiendamise ja lahutamise teel Heroni kolmnurga (7, 15, 20); kolmnurgast (5, 12, 13) lähtudes kolmnurga (65, 119, 156) jne.

Kuigi kirjeldatud meetodiga võib moodustada kõik primitiivsed Heroni kolmnurgad, mille mõõtmed ei ületa teatud piiri, osutub nende t a b u l e e r i m i n e (järjestamine kindla tunnuse järgi) siiski üsna raskeks ülesandeks. Peamiseks raskuseks on siin asjaolu, et Pythagorase kolmnurkade liitmisel või lahutamisel võime saada m i t t e p r i m i t i i v s e Heroni kolmnurga. See aga tähendab, et k õ i k i d e teatud piiri mitte ületavate külgedega Heroni kolmnurkade leidmiseks peame selle piiri arvutustes kaugelt ületama: saadava mitteprimitiivse Heroni kolmnurga külgede taandamisel võime jõuda nõutud piirkonda kuuluva primitiivse kolmnurgani.

Toome vastava näite. Lähtudes Pythagorase kolmnurkadest (33, 56, 65) ja (13, 84, 85) ning valides laiendusteguriteks $m_1=3$, $m_2=2$, saame kolmnurgad (99, 168, 195) ja (26, 168, 170). Viimaste liitmine annab mitteprimitiivse Heroni kolmnurga (125, 170, 195). Kui eesmärgiks on koostada niisuguste primitiivsete Heroni kolmnurkade tabel, millede küljed ei ole pikemad kui 40, siis peaksime äsjatoodud arvutused siiski teostama, vaatamata sellele, et lähtekolmnurkade külgede pikkused ületavad nõutud piiri. Saame ju pärast taandamist ühe otsitavatest kolmnurkadest: (25, 34, 39).

Teiseks «liitmis-lahutamismeetodi» paheks on saadavate kolmnurkade kordumine (iga primitiivne Heroni kolmnurk saadakse kolm korda, vastavalt erinevate kõrguste arvule). Nii näiteks kolmnurkade (33, 56, 65) ja (42, 56, 70) liitmisel saame kolmnurga (65, 70, 75), ehk pärast taandamist (13, 14, 15). See kolmnurk aga juba esines tabelis 3.

Mainitud raskusi arvestades ongi otsitud teisi meetodeid Heroni kolmnurkade tabuleerimiseks. Ühe märkimisväärseima meetodi esitas näiteks nõukogude matemaatik I. Tšistjakov[3], kuid siiski ei saa probleemi veel lõplikult lahendatuks lugeda (huvitav näide sellest, et ka elementaarmatemaatikas leidub tänapäevani lahendamata probleeme!).

---

[3] Ч и с т я к о в И. И., О рациональных треугольниках. Математическое просвещение (старая серия), вып. 1, 1934, lk. 10—16.

Tabelis 4 on antud kõik (arvult 127) primitiivsed Heroni kolmnurgad, millede küljed rahuldavad tingimust $a < b < c < 100$. Tabuleerimise printsiibiks on valitud suurima külje c kasvamise järjekord. Kui suurimad küljed on võrdsed, siis kolmnurgad on järjestatud keskmiste külgede järgi ja kui ka need on võrdsed, siis lühimate külgede kasvamise järjekorras.

Tabeli andmeid jälgides paneme tähele, et üks kolmnurga külgedest on alati paarisarvuline, kaks ülejäänut aga paaritu-arvulised. See pole muidugi juhuslik. Juba möödunud sajandil

Tabel 4.

a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c
4	13	15	21	41	50	29	65	68	38	65	87
13	14	15	39	41	50	57	65	68	44	65	87
9	10	17	26	35	51	29	52	69	31	68	87
11	13	20	20	37	51	9	65	70	61	74	87
7	15	20	25	38	51	41	50	73	65	76	87
10	17	21	13	40	51	26	51	73	53	75	88
13	20	21	27	29	52	35	52	73	65	87	88
12	17	25	25	33	52	19	60	73	41	50	89
3	25	26	37	39	52	50	69	73	28	65	89
17	25	26	15	41	52	25	51	74	21	82	89
17	25	28	5	51	52	25	63	74	57	82	89
6	25	29	25	51	52	35	44	75	17	89	90
11	25	30	24	35	53	29	52	75	37	72	91
5	29	30	4	51	53	32	53	75	60	73	91
8	29	35	51	52	53	34	61	75	26	75	91
15	34	35	26	51	55	56	61	75	22	85	91
25	29	36	20	53	55	13	68	75	48	85	91
19	20	37	25	39	56	52	73	75	29	75	92
15	26	37	33	41	58	40	51	77	39	85	92
13	30	37	41	51	58	25	74	77	34	65	93
16	25	39	17	55	60	68	75	77	39	58	95
17	28	39	15	52	61	17	65	80	41	60	95
25	34	39	25	52	63	9	73	80	68	87	95
10	35	39	33	34	65	39	55	82	37	91	96
13	37	40	20	51	65	35	65	82	51	52	97
25	39	40	12	55	65	33	58	85	26	73	97
15	28	41	14	61	65	29	60	85	44	75	97
17	40	41	36	61	65	39	62	85	35	78	97
15	37	44	35	53	66	41	66	85	75	86	97
17	39	44	21	61	68	41	84	85	11	90	97
13	40	45	43	61	68	34	55	87	78	95	97
29	35	48	7	65	68	52	61	87			

tõestas tšehhi matemaatik W. Šimerka[4] järgmise teoreemi: *igal primitiivsel Heroni kolmnurgal on üks külg paarisarvuline ja kaks külge paaritu-arvulised.* Selle teoreemi järeldusena saab kergesti tões-

[4] Archiv für Mathematik und Physik, Bd. 51, 1870, lk. 503.

tada, et **iga primitiivse Heroni kolmnurga pindala avaldub 6-ga jaguva täisarvuna.**

Omaette ülesandena pakub veel huvi küsimus niisuguste primitiivsete Heroni kolmnurkade leidmisest, millede külgede pikkused avalduvad kolme järjestikuse täisarvuna. Tabelist 4 näeme, et vähemalt kaks niisugust kolmnurka eksisteerib: (13, 14, 15) ja (51, 52, 53). Sellega seoses tekib kohe rida küsimusi. Kas sääraseid kolmnurki on veel olemas? Kas nende arv on lõplik või on neid lõpmata palju? Millise meetodiga võib neid saada? Püüame anda nendele küsimustele vastused.

Kolm järjestikust täisarvu saab alati kirjutada kujul $(b-1, b, b+1)$. Šimerka teoreemi põhjal võib ainult üks nendest olla paarisarv; see aga tähendab, et paarisarv peab olema just keskmine arv b. Seega võime kirjutada $b=2x$, kus x on täisarv, ning saame kolmnurga külgedega

$$a=2x-1,\quad b=2x,\quad c=2x+1.$$

Edasi leiame

$$p=3x,\quad p-a=x+1,\quad p-b=x,\quad p-c=x-1$$

ja arvutame valemi (1) järgi kolmnurga pindala:

$$S=x\sqrt{3(x^2-1)}.$$

Et me otsime Heroni kolmnurki, siis juuritav avaldis peab olema täisruut. Selleks aga on tarvilik ja piisav, et kehtiks võrdus

$$x^2-1=3y^2,$$

kus y on samuti täisarv. Kolmnurga pindala avaldub siis kujul $S=3xy$ (siit muide selgub suuruse y geomeetriline tähendus: $y=S/3x=pr/p=r$).

Selgus, et püstitatud probleemi täielikuks lahendamiseks tuleb leida määramata (ehk nn. diofantilise) võrrandi

$$x^2-3y^2=1 \tag{3}$$

kõik positiivsed täisarvulised lahendid.

Võrrandi (3) vähim lahend (tähistame seda x_0, y_0) torkab otsekohe silma: $x_0=2$, $y_0=1$. Sellele lahendile vastav kolmnurk (3, 4, 5) on täisnurkne. Kuid on kerge veenduda, et võrrandi (3) kõik teised lahendid annavad meile Heroni kolmnurgad: võrrandi

$$(b-1)^2+b^2=(b+1)^2$$

ainsaks positiivseks lahendiks on $b=4$.

Näitame, et võrrandil (3) on lõpmata palju täisarvulisi lahendeid ning need võib saada irratsionaalarvu $2+\sqrt{3}$ astendamise teel. Kõigepealt paneme tähele, et selle irratsionaalarvu ruut ja kuup

$$(2+\sqrt{3})^2=7+4\sqrt{3}\quad \text{ja}\quad (2+\sqrt{3})^3=26+15\sqrt{3}$$

annavad meile kaks arvude paari (7,4) ja (26,15), mis osutuvad võrrandi (3) lahenditeks (sest $7^2 - 3 \cdot 4^2 = 1$ ja $26^2 - 3 \cdot 15^2 = 1$). Tähistame neid lahendeid $x_1 = 7$, $y_1 = 4$ ja $x_2 = 26$, $y_2 = 15$. Vastavad Heroni kolmnurgad on (13, 14, 15) ja (51, 52, 53), s. t. just tabelis 4 esinenud kolmnurgad.

Olgu üldiselt

$$(2 + \sqrt{3})^{n+1} = x_n + y_n\sqrt{3}. \tag{4}$$

Kaasirratsionaalsuse sama astme arvutamine annab siis

$$(2 - \sqrt{3})^{n+1} = x_n - y_n\sqrt{3}.$$

Nende võrduste korrutamisel saame

$$x_n^2 - 3y_n^2 = (2^2 - 3)^{n+1} = 1,$$

millega ongi tõestatud, et arvude paar (x_n, y_n) annab iga naturaalarvulise n puhul võrrandi (3) ühe lahendi.[5]

Suurte n väärtuste puhul läheb binoomi $2 + \sqrt{3}$ astendamine tülikaks. Seepärast leiame rekurrentsed valemid lahendite järkjärguliseks arvutamiseks. Võrdusest (4) järeldub:

$$x_{n+1} + y_{n+1}\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^{n+2} = (2 + \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})^{n+1} =$$
$$= (2 + \sqrt{3})(x_n + y_n\sqrt{3}) = (2x_n + 3y_n) + (x_n + 2y_n)\sqrt{3}.$$

Siit saamegi

$$x_{n+1} = 2x_n + 3y_n, \quad y_{n+1} = x_n + 2y_n. \tag{5}$$

Teades juba, et $x_2 = 26$, $y_2 = 15$, võime arvutada ($n = 2$ puhul) $x_3 = 97$, $y_3 = 56$; nüüd saame ($n = 3$ puhul) $x_4 = 362$, $y_4 = 209$ jne.

Tähistame lahendile (x_n, y_n) vastavat Heroni kolmnurka (a_n, b_n, c_n), nii et

$$a_n = 2x_n - 1, \quad b_n = 2x_n, \quad c_n = 2x_n + 1.$$

Nagu näeme on külgede arvutamiseks vaja teada vaid suurusi x_n (y_n esineb pindala arvutamisel: $S_n = 3x_ny_n$). Seetõttu leiame rekurrentse valemi ainult suuruste x_n arvutamiseks. Süsteemi (5) esimesest võrrandist järeldub, et

$$y_n = \frac{x_{n+1} - 2x_n}{3} \text{ ja seega } y_{n+1} = \frac{x_{n+2} - 2x_{n+1}}{3}.$$

Asendades need avaldised süsteemi (5) teise võrrandisse, saame otsitud valemi

$$x_{n+2} = 4x_{n+1} - x_n \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots).$$

---

[5] Et võrrandil (3) peale arvude (x_n, y_n) teisi lahendeid ei ole, tõestatakse arvuteooria õpikutes. Vt. näiteks Арнольд И. В., Теория чисел. М., 1939, lk. 209.

Arvutuste teostamiseks selle valemi järgi tuleb lähtuda varem leitud alglahendeist $x_0 = 2$ ja $x_1 = 7$. Tabelis 5 ongi toodud esimesed kümme x_n väärtust ja nendele vastavad Heroni kolmnurgad.

Tabel 5.

n	x_n	a_n	b_n	c_n
1	7	13	14	15
2	26	51	52	53
3	97	193	194	195
4	362	723	724	725
5	1351	2701	2702	2703
6	5042	10083	10084	10085
7	18817	37633	37634	37635
8	70226	140451	140452	140453
9	262087	524173	524174	524175
10	978122	1956243	1956244	1956245

Palju huvitavat materjali nii äsja lahendatud ülesande kui ka üldse Pythagorase ja Heroni kolmnurkade kohta võib lugeja leida raamatus: Серпинский В., Пифагоровы треугольники. М., 1959.

KAHE ARVU KESKMISE OMADUSI

Arvude a ja b α-järku keskmiseks nimetatakse arvu

$$c_\alpha(a, b) = \left(\frac{a^\alpha + b^\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Lihtne on veenduda, et näiteks $c_1(a, b) = \frac{1}{2}(a + b)$ (aritmeetiline keskmine), $c_{-1}(a, b) = \frac{2ab}{a+b} = c_1^{-1}\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)$ (harmooniline keskmine), $c_2(a, b) = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ (ruutkeskmine).

Toodud definitsiooni võib laiendada ka juhule $c_0(a, b) = \lim_{\alpha\to 0} c_\alpha(a, b) = \sqrt{ab}$ (geomeetriline keskmine).

Definitsiooni niisuguse laienduse otstarbekohasusele viitavad kasvõi järgmised huvitavad omadused:

$$c_0(c_\alpha(a, b),\ c_{-\alpha}(a, b)) = c_0(a, b),$$

$$c_0\left(c_\alpha(a, b),\ c_\alpha^{-1}\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)\right) = c_0(a, b).$$

Nende omaduste tõestused võib leida artiklis: Гельфанд М. С., Два свойства среднего степенного двух чисел. «Математика в школе», № 6, 1964, lk. 60.

AUTOMEDIAANSED KOLMNURGAD

S. I. Zetel[1]

Kolmnurga külgedele a, b ja c tõmmatud mediaanid (ehk küljepoolitajad) tähistatakse tavaliselt sümbolitega m_a, m_b ja m_c. Teatavasti avalduvad nad kolmnurga külgede kaudu järgmiselt:

$$\left.\begin{aligned} m_a &= \frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}, \\ m_b &= \frac{1}{2}\sqrt{2c^2+2a^2-b^2}, \\ m_c &= \frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Valemid (1) võib kirjutada kujul

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{q-3a^2}, \quad m_b = \frac{1}{2}\sqrt{q-3b^2}, \quad m_c = \frac{1}{2}\sqrt{q-3c^2},$$

kus $q = 2(a^2+b^2+c^2)$. Siit järeldub vahetult, et kolmnurga mediaanide suuruste järjekord on vastupidine külgede suuruste järjekorrale. Teiste sõnadega:

kui

$$\left.\begin{aligned} a \leqslant b \leqslant c, \\ m_a \geqslant m_b \geqslant m_c. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

siis

Edaspidi eeldamegi, et kolmnurga küljed on tähistatud niisuguses järjekorras.

Esitame nüüd küsimuse: *kas mistahes kolmnurga mediaanidest saab konstrueerida kolmnurga?* Küsimus ei ole sugugi triviaalne, sest leidub selliseid kolmnurgaga seotud samatüübilisi lõikude kolmikuid (nagu kõrgused, külgejoonestatud ringjoonte raadiused jne.), mille korral analoogilise küsimuse vastus on eitav. Näiteks võib lugeja iseseisvalt kergesti veenduda, et kolmnurga[2] (2, 4, 5) kõrgustest kolmnurka konstrueerida ei saa.

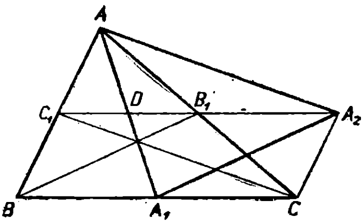
---

[1] Dots. S. Zetel (Moskva) on elementaargeomeetria silmapaistvaim spetsialist NSV Liidus. Käesolev artikkel moodustab esimese osa ulatuslikumast käsikirjast, mille ta saatis kogumiku «Matemaatika ja kaasaeg» toimetusele. Artikli on tõlkinud ja mõne täiendusega varustanud J. Gabovitš.

[2] Siin kasutatakse eelmise artikli tähistusi (vt. lk. 58).

Niisugust olukorda arvestades pakubki huvi järgmine teoreem, mis annab vastuse esitatud küsimusele: *mistahes kolmnurga mediaanidest saab alati konstrueerida kolmnurga.*

Tõestus. Olgu AA_1, BB_1 ja CC_1 kolmnurga ABC mediaanid (vt. joonis 1). Pikendame kolmnurga keskjoont C_1B_1 tema pikkuse võrra ja ühendame saadud punkti A_2 punktidega A ning A_1. Näitame, et tekkinud kolmnurga AA_1A_2 küljed võrduvadki lähtekolmnurga ABC mediaanidega (külje AA_1 puhul on see iseenesest mõistetav).



Joonis 1.

Et $B_1A_2 = BA_1$ ja $B_1A_2 \parallel BA_1$, siis nelinurk $A_1A_2B_1B$ on rööpkülik ning seega $A_1A_2 = BB_1$, s. t. A_1A_2 võrdub lähtekolmnurga teise mediaaniga. Et $BC = C_1A_2$ ja $BC \parallel C_1A_2$, siis nelinurk BCA_2C_1 on samuti rööpkülik. Järelikult $CA_2 = BC_1 = C_1A$ ja $CA_2 \parallel C_1A$ tõttu osutub ka nelinurk AA_2CC_1 rööpkülikuks. Seega $AA_2 = C_1C$, s. t. AA_2 võrdub lähtekolmnurga kolmanda mediaaniga.

Antud kolmnurga mediaanidest konstrueeritud kolmnurgal (edaspidi nimetame seda mediaankolmnurgaks) on rida huvitavaid omadusi. Vaatleme mõningaid neist.

Tähistame mediaani AA_1 ja keskjoone C_1B_1 lõikepunkti tähega D (vt. joonis 1). Teatavasti poolitab see punkt nii mediaani kui ka keskjoone. Järelikult on lõik A_2D mediaankolmnurga mediaaniks ja tema pikkus avaldub järgmiselt:

$$A_2D = A_2B_1 + B_1D = \frac{a}{2} + \frac{a}{4} = \frac{3}{4}a.$$

Analoogiliselt võime tõestada, et mediaankolmnurga külgedele m_a, m_b ja m_c toetuvate mediaanide pikkused on vastavalt $\frac{3}{4}a$, $\frac{3}{4}b$ ja $\frac{3}{4}c$. Siit saame huvitava järelduse: kui konstrueerida kolmnurk, mille mediaanideks on lähtekolmnurga küljed a, b ja c, siis konstrueeritud kolmnurga küljed on vastavalt $\frac{4}{3}m_a$, $\frac{4}{3}m_b$ ja $\frac{4}{3}m_c$, kus m_a, m_b ja m_c on lähtekolmnurga mediaanid.

Edasi vaatleme mediaankolmnurga pindala S_m. Et $AD = DA_1$, siis kolmnurga ADA_2 pindala on pool mediaankolmnurga AA_1A_2 pindalast S_m. Kolmnurga ADA_2 kõrgus on sealjuures kaks korda väiksem lähtekolmnurga kõrgusest h_a ja ta alus $A_2D = \frac{3}{4}a$. Seega

$$S_m = \frac{3}{4}S, \tag{3}$$

s. t. mediaankolmnurga pindala võrdub kolme neljandikuga lähtekolmnurga pindalast.

Rakendades mediaankolmnurga pindala arvutamiseks Heroni valemit saame

$$S_m = \sqrt{m(m - m_a)(m - m_b)(m - m_c)}, \tag{4}$$

kus $2m$ tähendab mediaankolmnurga ümbermõõtu. Valemitest (3) ja (4) järeldub nüüd, et

$$S = \frac{4}{3}\sqrt{m(m - m_a)(m - m_b)(m - m_c)}.$$

Saadud valem annab vastuse küsimusele: *kuidas avaldub kolmnurga pindala tema mediaanide kaudu?*

Kolmnurka, mis on sarnane oma mediaankolmnurgaga, nimetatakse automediaanseks kolmnurgaks. Tingimustest (2) järeldub, et automediaanses kolmnurgas peavad kehtima võrded

$$\frac{m_a}{c} = \frac{m_b}{b} = \frac{m_c}{a}. \tag{5}$$

Et sarnaste kolmnurkade pindalad suhtuvad nagu vastavate külgede ruudud, siis seostest (3) ja (5) saame

$$\frac{m_a^2}{c^2} = \frac{m_b^2}{b^2} = \frac{m_c^2}{a^2} = \frac{3}{4}. \tag{6}$$

Kui siia asendada mediaanide väärtused valemitest (1), siis võib kergesti veenduda, et kolm tingimust (6) annavad tegelikult üheainsa tingimuse, mille kehtivus on lähtekolmnurga automediaansuseks tarvilik:

$$a^2 + c^2 = 2b^2. \tag{7}$$

Näitame, et võrdus (7) osutub ka piisavaks tingimuseks, s. t. et tingimuse (7) kehtivusest järeldub lähtekolmnurga automediaansus.

Olgu antud kolmnurk külgedega a, b ja c, mis rahuldavad tingimust (7). Viimast arvestades leiame valemitest (1) kolmnurga mediaanid:

$$m_a = 0{,}5c\sqrt{3},\quad m_b = 0{,}5b\sqrt{3},\quad m_c = 0{,}5a\sqrt{3}.$$

Siit saamegi võrdused (5) ja järeldame, et mediaankolmnurk on lähtekolmnurgaga sarnane, s. t. tegemist on automediaanse kolmnurgaga.

Moodustagu kolmnurga külgede ruudud a^2, b^2 ja c^2 aritmeetilise progressiooni. Viimase põhiomadusele toetudes võime siis väita, et

$$b^2 - a^2 = c^2 - b^2.$$

See aga langeb ühte võrdusega (7). Järelikult *selleks, et antud kolmnurk oleks automediaanne, on tarvilik ja piisav, et tema* *külgede ruudud moodustaksid aritmeetilise progressiooni.* Siit järeldub otsekohe, et võrdhaarne kolmnurk ei saa olla automediaanne[3], sest tema külgede ruudud ei moodusta aritmeetilist progressiooni. Automediaanne kolmnurk saab seega olla kas võrdkülgne, mis on muidugi triviaalne, või isekülgne.

Kolmnurga automediaansus tähendab tema ühe elemendi etteandmist: kui üldiselt kolmnurk on määratud oma kolme elemendiga, siis automediaanse kolmnurga määramiseks piisab vaid kahe elemendi etteandmisest.

Lahendame näitena järgmise ülesande: *avaldada automediaanse kolmnurga pindala S tema keskmise külje b ja selle vastasnurga β kaudu.* Koosinuslause kohaselt on

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta.$$

Valemit (7) arvestades on aga $a^2 + c^2 = 2b^2$ ja asendades saame

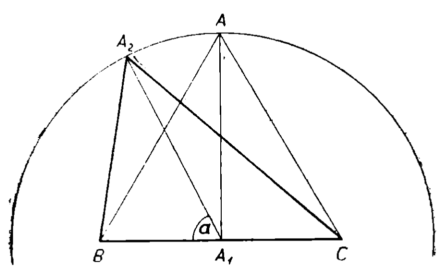
$$ac = \frac{b^2}{2 \cos \beta}.$$

Selle valemi abil leiamegi

$$S = \frac{1}{2} ac \sin \beta = \frac{1}{4} b^2 \tan \beta.$$

Iseseisvaks lahendamiseks pakume lugejale järgmise ülesande. *On antud automediaanse kolmnurga lühim külg $a = 1$ ning selle vastasnurk $\alpha = 30°$. Leida küljed b ja c ning pindala S.*

Eriti lihtne on automediaanse kolmnurga kolmanda külje leidmine kahe antud külje järgi. See toimub valemi (7) abil, kusjuures vastus ei ole muidugi ühene ja oleneb külgede järjestusest. Näiteks leidub kolm automediaanset kolmnurka külgedega 6 ja 8. Need on kolmnurgad $(6, 8, 2\sqrt{23})$, $(6, 5\sqrt{2}, 8)$ ja $(2\sqrt{2}, 6, 8)$. Kuid automediaanseid kolmnurki külgedega 2 ja 3 leidub vaid kaks: $(2, 3, \sqrt{14})$ ja $(2, \sqrt{6{,}5}, 3)$.



Joonis 2.

Automediaanse kolmnurga keskmise külje b etteandmisega ei ole see kolmnurk küll veel määratud, kuid võib näidata lihtsa võtte kõikide niisuguste kolmnurkade konstrueerimiseks. Selleks konstrueerime kõigepealt võrdkülgse kolmnurga ABC küljepikkusega b (vt. joonis 2). Olgu A_1 külje BC keskpunkt. Selle punkti ümber tõmbame ringjoone raadiusega $A_1A = 0{,}5b\sqrt{3}$. Va-

[3] Selles on lihtne veenduda ka valemi (7) abil. Niipea kui kolmnurga kaks külge on võrdsed, on ka kolmas külg nendega võrdne ja tegemist on võrdkülgse kolmnurgaga.

lides ringjoonel suvalise punkti A_2 saamegi automediaanse kolmnurga A_2BC. Automediaansuse tõestamiseks rakendame kolmnurkade A_1A_2B ja A_1A_2C puhul koosinuslauset:

$$A_2B^2=\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{b\sqrt{3}}{2}\right)^2-\frac{1}{2}b^2\sqrt{3}\cos\alpha,$$

$$A_2C^2=\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{b\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}b^2\sqrt{3}\cos\alpha.$$

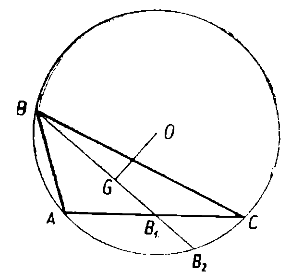
Nende võrduste liitmisel saame

$$A_2B^2+A_2C^2=2b^2,$$

s. t. tingimus (7) on täidetud ja seega on kolmnurk A_2BC automediaanne.

Kolmnurga geomeetrias tõestatakse [4], et mistahes kolmnurga ortotsenter (kõrguste lõikepunkt), raskuskese, mis teatavasti langeb ühte mediaanide lõikepunktiga, ja ümberringjoone keskpunkt asuvad ühel sirgel, mis kannab Euleri sirge nimetust.

Tõestame, et *igas automediaanses kolmnurgas on Euleri sirge risti pikkuse poolest keskmise mediaaniga.* Olgu O automediaanse kolmnurga ABC ümberringjoone keskpunkt ja G selle kolmnurga mediaanide lõikepunkt (vt. joonis 3). Pikendame keskmist mediaani $BB_1=m_b$ kuni lõikumiseni ümberringjoonega punktis B_2. Ühes punktis lõikuvate kõõlude tuntud omaduse põhjal



Joonis 3.

$$m_b\cdot B_1B_2=BB_1\cdot B_1B_2=AB_1\cdot B_1C=\frac{b^2}{4},$$

sest B_1 on külje $AC=b$ keskpunkt. Asendades siin b^2 väärtuse valemist (6) saame $B_1B_2=m_b/3$. Kui seda tulemust võrrelda tuntud seostega $BG=2m_b/3$ ja $B_1G=m_b/3$, siis selgub, et $BG=B_2G$. Et kõõlu poolitav raadius on temaga risti, siis ongi Euleri sirge OG risti kõõluga BB_2 ja seega ka mediaaniga m_b.

Osutub, et kehtib ka äsja tõestatud teoreemi pöördteoreem (see on lihtsalt tõestatav): *kolmnurk, mille Euleri sirge on risti keskmise mediaaniga, on automediaanne.*

Vaatleme lõpuks täisnurkset automediaanset kolmnurka kaatetitega a ja b ning hüpotenuusiga c. Selle kolmnurga külgede vahel kehtib juba kaks seost:

$$a^2+b^2=c^2,\qquad a^2+c^2=2b^2.$$

Siit saame, et $b=a\sqrt{2}, c=a\sqrt{3}$. Kuid kolmnurk $(a, a\sqrt{2}, a\sqrt{3})$

---

[4] Vt. С. И. Зетель. Новая геометрия треугольника. М., 1962.

on sarnane kolmnurgaga $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$. Seega *iga täisnurkne automediaanne kolmnurk on sarnane täisnurkse kolmnurgaga, mille kaatetid on 1 ja $\sqrt{2}$ ning hüpotenuus $\sqrt{3}$.*

Täisnurkse automediaanse kolmnurgaga on muide seotud üks ülesanne, mis esineb peaaegu igas diferentsiaalarvutuse õpikus: «On antud silindrikujuline palk diameetriga c, millest tuleb tahuda risttahukakujuline tala. Millised peavad olema tala mõõtmed, et tema tugevus oleks maksimaalne (tala tugevus on võrdeline tema laiusega ja kõrguse ruuduga)?»

Selle ülesande lahendamiseks tuleb leida täisnurkne kolmnurk, mille hüpotenuus on c ja ühe kaateti korrutis teise ruuduga maksimaalne. Tähistades selle korrutise z ning kaatetid x ja y võime välja kirjutada seosed $x^2 + y^2 = c^2$, $z = xy^2$. Asendades y^2 väärtuse esimesest seosest teise saame ühe muutuja funktsiooni $z = c^2x - x^3$. Maksimumi korral peab selle funktsiooni tuletis võrduma nulliga. See annab võrrandi $c^2 - 3x^2 = 0$, kust $x = c/\sqrt{3}$ ja järelikult $y = c\sqrt{2}/\sqrt{3}$. Seega ülesande nõuet rahuldab täisnurkne kolmnurk $(c/\sqrt{3}, c\sqrt{2}/\sqrt{3}, c)$ mis on sarnane kolmnurgaga $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ ja seega automediaanne.

Siin me leidsime funktsiooni z maksimumi tuletise mõistet kasutades, kuid vaadeldud ülesanne on lahendatav ka elementaarselt (vt. С. И. Зетель. Задачи на максимум и минимум).

JUHTUB KA NII...

Üks üliagar aspirant tüütas oma juhendaja niivõrd ära, et see ütles: «Minge ja töötage välja korrapärase 65 537-nurga konstruktsioon». Aspirant läks ja tuli 20 aasta pärast tagasi vastava konstruktsiooniga (seda säilitatakse Göttingeni ülikooli arhiivis).

* *

J. E. Littlewood kirjutab oma mälestustes, et 1917. aastal ta koostas Ballistika Valitsusele ettekande, mis lõppes lausega: «Siin tuleb σ muuta nii väikeseks kui võimalik». Ettekande trükitud tekstis see viimane lause puudus. Selle asemel oli lõppu trükitud punktikene, mis tähelepanelikumal vaatlemisel osutus üliväikeseks sigmaks.

(Võetud raamatust: Дж. Литлвуд. Математическая смесь. М., 1962)

Matemaatika ajaloost

PIERRE FERMAT JA XVII SAJANDI MATEMAATIKA

E. Tamme

12. jaanuaril 1965. a. möödub 300 aastat geniaalse prantsuse matemaatiku Pierre de Fermat' surmast. P. Fermat' elukäigust teame me üsna vähe. Ta sündis 17. augustil 1601. a. Lõuna-Prantsusmaal Beaumont de Lomagne'is (väikses asulas Toulouse'i lähedal) kaupmehe perekonnas, õppis Toulouse'i ülikoolis õigusteadust, töötas seejärel advokaadina ning oli alates 1631. aastast kuni surmani — 12. jaanuarini 1665. a. — Toulouse'i parlamendi nõunik. Seega oli P. Fermat elukutselt mitte matemaatik, vaid jurist. Kuid teenistus jättis talle vaba aega, mille ta pühendas matemaatikale ja loodusteadustele, saavutades erakordset edu. Sellele vaatamata möödus P. Fermat' elu väga tagasihoidlikult.

P. Fermat' loominguline pärand paneb meid hämmastama oma mitmekülgsuse ja sügavuse poolest. Tema tööd on etendanud tähtsat osa esimeste kõrgema matemaatika distsipliinide — analüütilise geomeetria ja matemaatilise analüüsi —, aga ka arvuteooria ja tõenäosuseteooria kujunemisel. P. Fermat oli sügava eruditsiooniga, ta valdas mitmeid Euroopa keeli, samuti ladina ja kreeka keelt, tundis suurepäraselt nii vana-kreeka kui ka oma kaasaja õpetlaste töid ning oli paljudega viimastest elavas kirjavahetuses. Reale uutele suundirajavatele tulemustele jõudis Fermat just vana-kreeka matemaatikute tööde uurimise ja nende varjatud juhtmõtete lahtimõtestamise käigus.

Kahjuks ei armastanud P. Fermat oma töid trükkida. Temalt pärineb üle 3000 matemaatilise käsikirja, milledest ainult üks on tema elu ajal ilmunud (ja seegi anonüümne). Enamiku Pierre Fermat' töid avaldas trükis tema poeg Samuel Fermat alles 1679. a. pealkirja all *Varia opera mathematica.* Suur osa Fermat' tulemustest said aga tuntuks nii prantsuse kui ka välismaa matemaatikute seas juba hoopis varem tänu tema laialdasele kirjavahetusele, mida ta eriti innukalt pidas selle aja teadusliku keskuse Pariisi matemaatikutega. Oma arvukatest suurepärastest teaduslikest saavutustest teatas ta neile osalt kirjade, osalt väikeste käsikirjaliste artiklite vormis. Just kirjavahetus võimaldas Fermat'l provintsilinnas Toulouse'is olla kursis sellel ajal kiirelt arenevate loodusteaduste, eriti matemaatika saavutustega. Perioodika täieliku puudumise tõttu etendasid kirjad Fermat' ajal üldse küllaltki suurt osa teaduslike tulemuste levitamisel. Alles 1665. a. (P. Fermat' surma-aastal) hakkasid ilmuma esimesed teaduslikud ajakirjad — *Journal des Savants* Pariisis ja *Philosophical Transactions* Londonis. Seetõttu pidid õpetlased oma saavutuste levitamisel kasutama kas isiklikku kontakti, kirjavahetust või raamatute väljaandmist. Kirjastajate vähesuse tõttu oli aga matemaatiliste teoste avaldamine seotud üsna suurte raskustega.

XVII sajand pakub väga suurt huvi loodusteaduste ajaloos. Käsikäes tööstusliku tootmise, transpordi ja tehnika suurte edusammudega arenesid sellel sajandil jõudsalt ka loodusteadused, eeskätt astronoomia ja matemaatika. Erilist tähtsust omas matemaatiliste meetodite rakendamine loodusnähtuste kirjeldamisel ja uurimisel, mis sai võimalikuks tänu rea loodusseaduste matemaatilisele formuleerimisele. Ulatuslikum matemaatilise aparatuuri rakendamine õnnestus esialgu peamiselt mehhaanikas ja optikas, millega kaasneski nende hoogne areng.

Kuid loodusteaduste probleemid seavad uusi nõudeid ka matemaatikale. Kui varem olid matemaatikute uurimisobjektideks peamiselt konstantsete arvude ja geomeetriliste kujunditega seotud küsimused, siis seoses vajadusega uurida looduses toimuvaid protsesse, liikumist ja arengut hakkab matemaatikute huvi järjest rohkem köitma vastav matemaatiline abstraktsioon — muutuv suurus. Eriti tähtis on vaadelda ühe muutuva suuruse sõltuvust teisest, mida matemaatiliselt kirjeldab funktsioon. Seoses funktsioonide abil kirjeldatavate nähtuste uurimisega kujunes XVII sajandil terve rida uusi matemaatilisi distsipliine eesotsas analüütilise geomeetria ja matemaatilise analüüsiga, mida hiljem hakati nimetama kõrgemaks matemaatikaks. Uute matemaatiliste mõistete ja meetodite loomisel on oma panuse andnud peaaegu kõik XVII sajandi matemaatikud.

Kõrgema matemaatika kujunemine on kõige tihedamalt seotud täppisteaduste ja tehnika probleemide lahendamisega. Viimane asjaolu väljendub kasvõi selles, et enamik XVII sajandi matemaatikutest olid ühtlasi loodusteadlased ja vastupidi. Toome selle kohta paar näidet. Silmapaistev saksa astronoom Johannes Kepler (1571—1630) on tuntud planeetide liikumise seaduste avastajana. J. Keplerile kuuluvad aga ka tulemused seoses pindalade ja ruumalade arvutamisega, mis on peale Archimedest (III saj. e. m. a.) esimeseks tõsisemaks sammuks teel integraalarvutuse loomisele. Inglise õpetlane Isaac Newton (1643—1729) on nii klassikalise mehhaanika kui ka diferentsiaal- ja integraalarvutuse rajajaks. Ka Fermat on sõnastanud tema nime kandva geomeetrilise optika põhiprintsiibi (umbes 1660. a.), mis väidab, et mittehomogeenses keskkonnas liigub valguskiir ühest punktist teise mööda sellist teed, mille läbimiseks kulub kõige vähem (või rohkem) aega, võrreldes ükskõik millise teise geomeetriliselt võimaliku naaberteega. Fermat' printsiibist järelduvad geomeetrilise optika põhiseadused — murdumis- ja peegeldumisseadused.

Peatume järgnevas mõningatel Pierre Fermat' tähtsamatel matemaatilistel saavutustel.

Analüütilise geomeetria loomine

Analüütilises geomeetrias uuritakse geomeetrilisi objekte (punkte, jooni jne.) algebra vahenditega tuginedes koordinaatide meetodile. Esimeseks nurgakiviks selle matemaatilise distsipliini alusmüüris on Fermat väike töö «Sissejuhatus tasaste ja kehaliste kohtade teooriasse» (*Ad locos planos et solidos isagoge*), mis Pariisi matemaatikute teatavates ringkondades sai tuntuks juba 1636. a., kuid trükis ilmus alles peale autori surma 1679. a. *Varia operas*. Selle töö sissejuhatuses iseloomustab Fermat koordinaatide meetodit ja analüütilise geomeetria põhilisi uurimisobjekte — sirgeid ja koonilisi lõikeid järgmiselt.[1]

Pole kahtlust, et vanaaja õpetlased on väga palju kirjutanud kohtadest. Selle tunnistajaks on Pappos, kes 7. raamatu algul kinnitab, et Apollonios on kirjutanud tasastest, Aristaios kehalistest kohtadest.[2] *Kuid kohtade uurimine polnud neil ausalt öelda sugugi lihtne.*

Seetõttu rakendame ka selles teadusharus erilist ja talle eriti sobivat analüüsi, millega on avatud tulevikus üldine lähenemisviis kohtadele.

Kui lõppvõrrandis esineb kaks tundmatut suurust, siis on tegemist kohaga ning ühe suuruse lõpp-punkt kirjeldab sirget või kõverat joont. On olemas ainult üks lihtne sirgjoon, seevastu lõpmatult palju kõverate liike: ringjoon, parabool, hüperbool, ellips jne.

Kui kohta kirjeldava tundmatu suuruse lõpp-punkt jookseb sirgel või ringjoonel, siis tekib tasane koht, kui aga kulgeb paraboolil, hüperboolil või ellipsil, siis on tegemist kehalise kohaga, kui teistel kõveratel, siis kohta nimetatakse lineaarseks.[3] *Viimast juhtu me siin ei vaatle, sest sobival taandamisel saab tulemusi lineaarsete kohtade kohta üsna kergesti tuletada tasaste ja kehaliste kohtade uurimisest.*

---

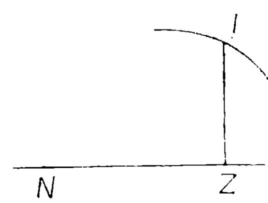
[1] See ja järgnevad katkendid on tõlgitud saksakeelsest väljaandest Fermat, P., Einführung in die ebenen und körperlichen Örter. Leipzig, 1923, lk. 22.

[2] Vana-kreeka matemaatiku Pappose Aleksandriast (IV saj.) kaheksast raamatust koosnev «Matemaatiline kogu» sisaldab väärtuslikku materjali paljude tema eelkäijate, sealhulgas ka Aristaiose ja Apolloniose kadumaläinud matemaatiliste tööde kohta. Aristaioselt (IV saj. e. m. a.) pole midagi säilinud. Apolloniose Pergest (III s. e. m. a.) säilinud peatöö «Koonuselõiked» kujutab vana maailma kõige silmapaistvamat tööd koonuselõigetest. Pappose kommentaaride põhjal on Fermat teatava määrani taastanud Apolloniose kaks kadumaläinud tööd tasastest kohtadest.

[3] P. Fermat esitab siin joonte iganenud liigitelu, mis pärineb Vana-Kreekast.

Võrrandit saab mõnusalt tõlgendada, kui mõlemad tundmatud suurused asetada antud nurga (mille me tavaliselt võtame täisnurgaks) all kokku ja anda ühe suuruse asend ja teise lõpp-punkt. Kui siis kummagi suuruse aste ei ületa kahte, on koht tasane või kehaline, nagu järgnevast selgelt nähtub.

Näeme, et Fermat toob koordinaadid sisse järgmiselt (joon. 1). Võrrandiga määratud joone punkti I ühe koordinaadi NZ mõõdab ta fikseeritud sirgel, lähtudes kindlast punktist N. Teise koordinaadi ZI asetab ta lõigu lõpppunkti Z kindla nurga (tavaliselt täisnurga) all. Seos suuruste[4] $NZ = x$ ja $ZI = y$ vahel määrab geomeetrilise koha (joone), mille kirjeldab lõigu ZI lõpp-punkt I.



Joonis 1.

Töös «Sissejuhatus» esitab Fermat sirge ja kõigi koonuselõigete võrrandid. Need osutuvad tundmatute x ja y suhtes vastavalt esimese ja teise astme võrranditeks. Fermat' töö üheks eesmärgiks on näidata, et kehtib ka vastupidine: *lineaarne võrrand*

$$ax + by = c$$

määrab sirge, teise astme võrrand

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey = f$$

sirgete paari, parabooli, hüperbooli, ringjoone või ellipsi. Tõsi, viimast väidet ei põhjenda ta päris üldjuhul, vaid real enam või vähem konkreetsetel erijuhtudel. Kõvera liigi uurimise hõlbustamiseks rakendab Fermat koordinaatide teisendusi (rööplüket ja pööret) võrrandi viimiseks lihtsamasse kujju.

Fermat' kirjavahetusest nähtub, et ta valdas koordinaatide meetodit juba aastaid enne mainitud töö ilmumist. Seda, kuidas Fermat järk-järgult jõudis nende tulemusteni aitab mõista ka tema varasem töö «Apolloniose Pergest kaks taastatud raamatut tasastest kohtadest» (*Apollonii Pergaei libri duo de locis planis restituti*). Ta nimelt veendus, et koordinaatide kasutuselevõtmisega on algebra abil hoopis lihtsam jõuda Apolloniose tulemusteni. P. Fermat kirjutab «Sissejuhatuse» lõpul:

Kui see avastus (s. t. koordinaatide meetod. *E. T.*) *oleks saadud enne, kui koostati kaks tasaseid kohti käsitlevat raamatut, mis me hiljuti taastasime, siis oleksid kohti puudutavad laused tulnud kindlasti elegantsemad. Kuid ometi ei kahetse me tänaseni neid olgugi enneaegseid ja mitte päris küpseid tulemusi. Tõepoolest, on ju mõnel määral teaduse enda huvides mitte varjata järeltulevate põlvede ees inimmõistuse mitte päris valminud vilju, sest tänu*

[4] Fermat kasutab nii selles kui ka kõigis teistes töödes oma kaasmaalaselt François Vietalt (1540—1603) pärinevat algebralist sümboolikat, milles suurused tähistatakse suurte ladina tähtedega — tundmatud täishäälikutele ja tuntud kaashäälikutele vastavatega. Näiteks x ja y asemel esinevad Fermat'l A ja E.

uutele avastustele teaduses tugevneb ja kasvab see, mis on esialgu toores ja lihtne. Ka õppijate huvides on enesele mõistuse varjatud edusammudest täieliku ettekujutuse loomine.

Analüütilise geomeetria üks peamisi koostisosi — koonuselõigete teooria — oli vana-kreeka matemaatikute, eriti Apolloniose töödes juba sedavõrd välja arendatud, et sellesse olulisi uusi tulemusi polnud võimalik tuua ei Fermat'l ega tema järglastel. Õieti sellepärast nimetabki Fermat oma kokkuvõtlikku tööd «Sissejuhatuseks tasaste ja kehaliste kohtade teooriasse» ning seab selles peaeesmärgiks uue lähenemismetoodika andmise. Isegi siin ta suurelt osalt ainult kirjutab Apolloniose tulemusi ümber algebralise sümboolika abil. Peale koonuselõigete võrrandite esitamist Fermat märgib:

Me oleme lühidalt ja selgelt jagu saanud sellest, mis vanaaja õpetlastel jäi ebaselgeks tasaste ja ruumiliste kohtade puhul. Nüüdsest peale on ilmne, milliseid kohti annavad Apolloniose I raamatu viimase lause kõik juhud, ning kõik, mis üldse selle juurde kuulub, on leitav ilma igasuguse vaevata.

Koordinaatide sissetoomise idee tundub meile väga lihtsana ja loomulikuna. Seetõttu võib kerkida küsimus, miks vana-kreeka õpetlased veel ei rakendanud koordinaate joonte uurimisel ning miks toimus see just XVII sajandil. Peapõhjus seisneb asjaolus, et Vana-Kreekas polnud arenenud algebraline aparatuur, polnud algebralist sümboolikat. Seevastu saavutas tollal otse hämmastava õitsengu geomeetria, mille vahenditega uuriti koonuselõikeid ning lahendati väga mitmesuguseid ülesandeid, mille korral tänapäeval kasutatakse algebralist aparatuuri. Olulised nihked algebra arengus toimusid Euroopas XVI sajandil, mil itaalia matemaatikud N. Tartaglia, G. Cardano ja L. Ferrari leidsid eeskirjad 3. ja 4. astme võrrandite lahendamiseks ning F. Vieta võttis kasutusele tähed arvude sümbolitena ja rajas sümboolse algebra alused. Algebra hoogne areng viis üsna loomulikul teel selle kasutamiseni geomeetriliste kujundite uurimisel koordinaatide meetodi vahendusel.

Et need ideed n.-ö. rippusid õhus, nähtub kasvõi sellestki, et peaaegu samaaegselt jõudis nendeni ka prantsuse filosoof, matemaatik ja füüsik René Descartes (1596—1650). Descartes'i «Geomeetria» (1637) on esimeseks trükis ilmunud tööks, milles tasandil võetakse kasutusele analüütilise geomeetria vahendid. Pole kahjuks teada, kas R. Descartes tutvus enne selle töö ilmumist Fermat' «Sissejuhatusega» või mitte. Igal juhul erineb Descartes'i käsitlus suurel määral Fermat' omast. Tal pole niivõrd süstemaatilist teist järku joonte käsitlust nagu Fermat'l, kuid seevastu on ta rohkem tähelepanu pühendanud põhimõttelistele küsimustele, on vaadelnud joonel liikuva punkti koordinaate muutuvate suurustena ning on tunduvalt täiustanud algebralist sümboolikat ja aparatuuri võrreldes Vieta omaga, viies selle väga lähedale tänapäeval kasutatavale. Descartes'i «Geomeetria» avaldas matemaatika edasisele arengule hoopis suuremat mõju kui Fermat' «Sissejuhatus», sest viimane ilmus trükis alles 1679. a. ning oli raskemini loetav, kuna kasutas mõnevõrra kohmakat Vieta algebrat. Analüütilise geomeetria loojateks loetakse täie õigusega nii Fermat'd kui ka Descartes'i.

Näiliselt lihtne koordinaatide sissetoomise samm nõudis sügavat matemaatika meetodite ja probleemide tundmist. See tähistas kõrgema matemaatika sündi. Uus metoodika lihtsustas temale alluvate ülesannete lahendamist ja avardas matemaatika rakendusala. F. Engels kirjutab:

Pöördepunktiks oli matemaatikas Descartes'i muutuv suurus. Seetõttu pääsesid matemaatikasse liikumine ja dialektika ning sai otsekohe paratamatult vajalikuks diferentsiaal- ja integraalarvutus, mis tekkis viibimata ja mille viisid üldjoontes lõpule — mitte aga ei leiutanud — Newton ja Leibniz. («Looduse dialektika», Tln., 1962, lk. 197).

Edasine analüütilise geomeetria areng toimus üsna aegamööda. Kolm koordinaati ruumis võtab kasutusele alles järgmisel sajandil prantsuse matemaatik A. C. Clairaut (1713—1765) (kuigi juba Fermat ja Descartes kasutasid uut metoodikat mõningal määral ka ruumiliste objektide uurimisel, näiteks uuris P. Fermat pindu ruumis nende tasandiliste lõigete järgi). Enam-vähem lõpliku struktuuri, mis vastab tänapäeval loetavate lühikursuste sisule ja ülesehitusele, andis uuele distsipliinile Leonhard Euler (1707—1783) oma 1748. a. ilmunud «Sissejuhatuses lõpmata väikeste analüüsi». Nimetus «analüütiline geomeetria» aga pärineb alles XVIII sajandi lõpust prantsuse matemaatikult S. F. Lacroix'lt (1765—1843).

Diferentsiaal- ja integraalarvutuse kujunemine

XVII sajandi matemaatika suurimaks saavutuseks oli kahtlemata matemaatilise analüüsi (diferentsiaal- ja integraalarvutuse) loomine. See kõrgema matemaatika keskne distsipliin, mida vaadeldaval sajandil nimetati lõpmata väikeste analüüsiks, annab vahendeid muutuvate suuruste uurimiseks ning on seega baasiks matemaatika rakendustele loodusteadustes. Diferentsiaal- ja integraalarvutuse mõisted ja meetodid kujunesid välja arvukate loodusteaduses ja matemaatikas kerkinud probleemide lahendamise käigus paljude matemaatikute poolt. N. Bourbaki tuntud traktaadist loeme:

Avastus toimus peaaegu märkamatute muutuste tulemusena ning vaidlus sel puhul prioriteedi üle oleks samaväärne viiuli ja trombooni vaidlusega teatava meloodia sümfooniasse ilmumise täpse momendi üle. Tõepoolest, samal ajal, kui teised avastused matemaatikas nagu näiteks Fermat' arvuteooria ja Newtoni dünaamika kannavad individuaalsuse pitserit, meenutab lõpmata väikeste arvutuse areng XVII sajandil sümfoonia järkjärgulist ja väärama-

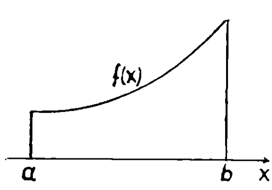
tut arendamist, milles «Zeitgeist» (ajavaim), *olles samaaegselt heliloojaks ja dirigendiks, juhib muusikalist rütmi. Igaüks täidab iseseisvat osa vastavalt oma muusikalisele tämbrile, kuid mitte keegi pole selle teema loojaks, mis on peaaegu lootusetult sassi aetud keerulise kontrapunkti sissetoomisega.* (Н. Бурбаки, Очерки по истории математики. М., 1963, lk. 176).

Esialgu arenesid integraal- ja diferentsiaalarvutusega seotud meetodid üksteisest lahus. Kummaski suunas on vägagi silmapaistval kohal Fermat' sügavad uurimused.

Integraalarvutuse meetodid kujunesid välja seoses pindalade, ruumalade, raskuskeskmete ja kaarepikkuste leidmise ülesannete lahendamisega. Selles suunas on suurepäraseid tulemusi saavutanud juba III saj. e. m. a. vana-kreeka suurim matemaatik ja mehhaanik Archimedes, kes leidis rea kõverjoonega piiratud kujundite pindalade ja pöördkehade ruumalade arvutamise eeskirjad, jaotades need kujundid vastavalt kitsasteks ribadeks või õhukesteks kihtideks. Kuid Archimedese meetodid ei leidnud edasiarendamist ligi 19 sajandi jooksul.

Sammuks edasi Archimedese meetodi olemuse mõistmisel ja temale uute rakendusvõimaluste leidmisel on J. Kepleri 1615. a. ilmunud töö «Veinivaatide uus ruumalaarvutus» (*Nova stereometria doliorum vinariorum*). Peale Archimedese tulemuste tutvustamist leiab Kepler selles õhukesteks kihtideks jaotamise meetodil terve hulga (umbes 90-ne) uue, peamiselt kooniliste lõigete pöörlemisel ümber mitmeti asetatud telgede saadud pöördkeha ruumala. Vastavalt välisele kujule nimetab ta neid pöördkehi sidruniteks, õunteks, türgi turbaniteks jne. Mainitud töö üheks eesmärgiks oli muuseas ka nõuannete andmine veinikaupmeestele: millise kujuga veinivaatide valmistamiseks läheb sama mahtuvuse korral kõige vähem materjali.

Kui Archimedese ja Kepleri töödes lahendati peamiselt konkreetseid ülesandeid, siis itaalia matemaatiku Bonaventura Cavalieri (1598—1647) ning prantsuse matemaatikute Blaise Pascali (1623—1662) ja Pierre Fermat' töödes hakkavad välja kujunema ühtsed integraalarvutuse meetodid, kuigi geomeetrilises vormis. Järjest enam köidab matemaatikute tähelepanu määratud integraali

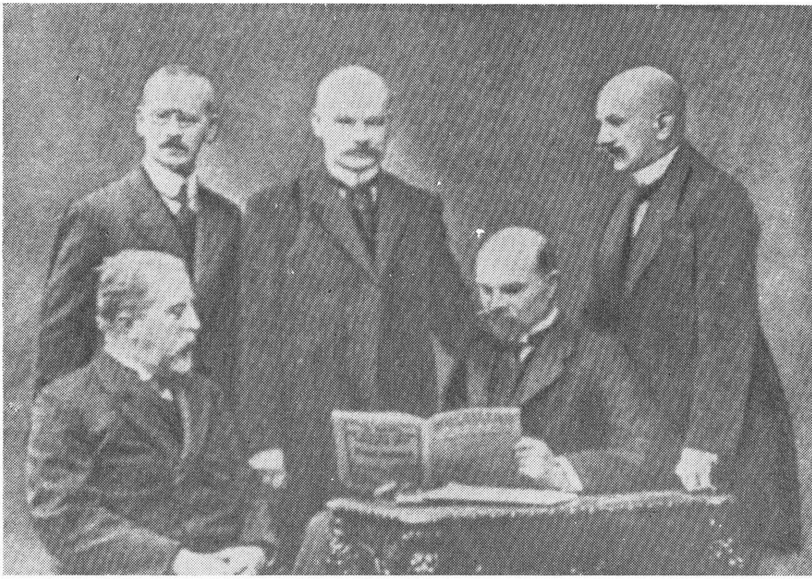


Joonis 2.

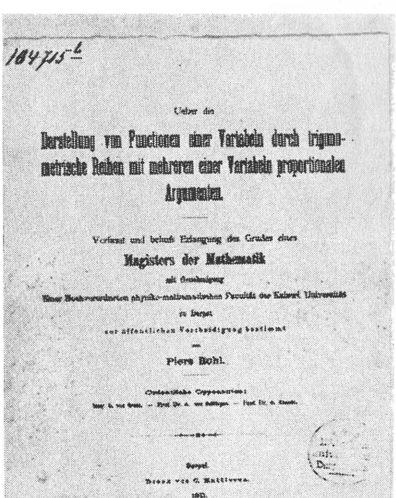
$$\int_a^b f(x)\,dx$$

arvutamisele vastav ülesanne: leida joontega $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$ ja $x = b$ piiratud kõverjoonse trapetsi (joon. 2) pindala. Selleks jaotatakse kõverjoonne trapets paralleelsete ordinaatide abil ülikitsasteks (lõpmata väikesteks) ribadeks. Viimaste pindalad arvutatakse kui ristkülikute pindalad ning tulemused

Fermat



Ainus seni teadaolev foto Piers Bohliga. Sellelt on kopeeritud mitmes väljaandes (seehulgas ka Matemaatika ja kaasaeg, II, lk. 73) avaldatud P. Bohli portreed. Fotol, mille leidis A. Bunga ühest Riia vähetuntud nädalalehest, on P. Bohl Moskva—Riia telegraafimale matšist (1900. a.) osa võtnud võiduka Riia meeskonna koosseisus (ees vasakul).



164715 b

Ueber die

Darstellung von Functionen einer Variabeln durch trigonometrische Reihen mit mehreren einer Variabeln proportionalen Argumenten.

Verfasst und behufs Erlangung des Grades eines

Magisters der Mathematik

mit Genehmigung

Einer Hochverordneten physiko-mathematischen Facultät der Kaiserl. Universität zu Dorpat

zur öffentlichen Vertheidigung bestimmt

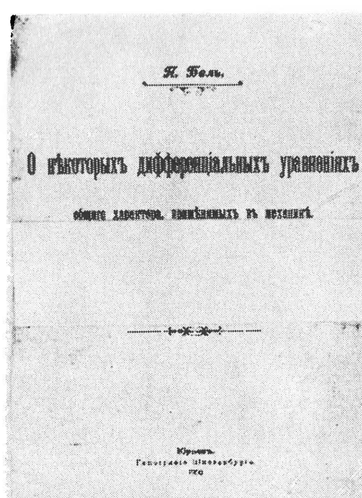
von

Piers Bohl.

Ordentliche Opponenten:

Dorpat.

Druck von C. Mattiesen.



П. Боль.

О нѣкоторыхъ дифференціальныхъ уравненіяхъ

общаго характера, примѣнимыхъ въ механикѣ.

Юрьевъ.

Piers Bohli Tartus kaitstud väitekirjade tiitellehed.

summeeritakse. Poolintuitiivselt jõutakse niiviisi otsitava pindalani.

Üksteise järel leiavad XVII sajandi matemaatikud terve hulga kõverjoonsete trapetsite pindalade (tänapäeva seisukohalt: määratud integraalide) valemeid. Näiteks Cavalieri leidis valemid pindalade jaoks, mis vastavad integraalidele

$$\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1} \quad (a > 0)$$

naturaalarvulise n korral. Samale tulemusele jõudis iseseisvalt ka Fermat. Hiljem (vähemalt 1644. a.) üldistab ta tulemuse ka murruliste ja negatiivsete astendajate juhule. Viimasel juhul leiab ta lõpmatusse ulatuvad pindalad, mis vastavad integraalidele

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^n} = \frac{1}{(n-1)a^{n-1}} \quad (a > 0,\ n > 1).$$

Tõsi, Fermat jõuab nende tulemusteni küll ainult n mõningate konkreetsete väärtuste korral, kuid tema meetod on kergesti rakendatav ka üldjuhul. Tähtsaks uuenduseks Fermat' mõttekäikudes on kõverjoonse trapetsi jaotamine ebavõrdse laiusega ribadeks. Seejuures valib ta ribade laiused nii, et summeerimine oleks teostatav geomeetrilise progressiooni valemi abil.

Keerulisema struktuuriga kõverate poolt piiratud pindalade leidmisel kasutab Fermat teisenduseeskirju, mis vastavad näiteks summa integreerimise valemile ja ositi integreerimise valemile. Nende geomeetrilises vormis väljendatud integreerimiseeskirjade abil arvutab Fermat mitmesuguste kujundite pindalasid, ruumalasid ja raskuskeskmeid.

Paralleelselt integraalarvutuse metoodikaga arenevad ka d i f e r e n t s i a a l a r v u t u s e meetodid seoses eeskätt maksimumide ja miinimumide, kõvera puutujate ja mitteühtlase liikumise kiiruse leidmise ülesannetega. Nende ülesannete lahendamisel ei kujune välja niivõrd ühtset metoodikat nagu integraalarvutuses.

Ka selles suunas kuuluvad ühed varasemad ja küllalt sisukad tulemused Fermat'le. Ta töötas välja ühtse meetodi nii maksimumide ja miinimumide kui ka puutujate leidmiseks. Kirjavahetusest selgub, et ta on vastava meetodini jõudnud juba 1629. a. Kirja on see pandud 1638. a. väikeses töös «Meetod suurimate ja vähimate väärtuste leidmiseks» (*Methodus ad disquirendam maximam et minimam*), mis ilmus trükist aga alles 1679. a. *Varia operas*. Laialdaselt tuntuks sai Fermat' meetod siiski juba varem P. H é r i g o n e'i raamatu «Täiendusi matemaatika kursusele» (1642) kaudu.

Mainitud töö algul näitab Fermat, et funktsiooni[5] $f(x)$ ekstremaalseks muutuva väärtuse x leidmiseks saame võrrandi, kui moodustame võrduse

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=0$$

ja võtame selles $h=0$. Tuletise sümboli abil võime viimase võrrandi kirjutada kujul $f'(x)=0$.

Näitena lahendab Fermat järgmise maksimumülesande. Jaotada lõik $AC=a$ kaheks osaks pikkustega x ja $a-x$, nii et nendest osadest moodustatud ristküliku pindala $f(x)=x(a-x)$ oleks maksimaalne.

Lugedes avaldise

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{(x+h)(a-x-h)-x(a-x)}{h}=a-2x-h$$

võrdseks nulliga ning võttes $h=0$, saame

$$a-2x=0, \quad x=\frac{a}{2},$$

s. t. maksimaalse pindalaga vaadeldavate ristkülikute seas on ruut.

Puutuja kõverale määras Fermat kui sirge, mis lõikab kõverat kahes «lõpmata lähedases» punktis. Osutub, et ka puutuja leidmisel etendab põhilist osa sama suhe, mis ekstreemumülesandeski. See suhe — praegune tuletis — ongi keskseks mõisteks diferentsiaalarvutuses. Oma meetodit rakendas Fermat mitmete taoliste ülesannete lahendamisel.

Näeme, et Fermat jõudis väga lähedale nii integraal- kui ka diferentsiaalarvutuse loomisele. Jäi astuda näiliselt üsna väike samm — tuua sisse integraali ja diferentsiaali mõisted, anda sümbolid nende jaoks ning selgitada nende omadused. Selle erakordselt tähtsa sammu sooritasid XVII sajandi 70-ndatel aastatel üksteisest sõltumatult ja mõnevõrra erinevas vormis kaks suurt õpetlast: inglane Isaac Newton ja sakslane Gottfried Wilhelm Leibniz (1646—1716). Mõlemat loetakse õigusega matemaatilise analüüsi loojateks.

Arvuteooria probleemidest

Arvuteooria on matemaatiline distsipliin, mis uurib eeskätt täisarvude mitmesuguseid omadusi. Juba vana-kreeka õpetlased jõudsid mitmete arvuteooriasse kuuluvate tulemusteni, näiteks seoses naturaalarvude jaguvuse, algarvude ja täiuslike

[5] Järgnevas kasutame tänapäeva sümboolikat. Fermat' töös esineb vaid Vieta algebraline sümboolika.

arvude[6] kohta käivate probleemide uurimisega. Eriti väärib märkimist töö «Aritmeetika», mille autoriks on Diophantos Aleksandriast (III saj.) ja milles kõrvuti tavaliste võrranditega lahendatakse ka nn. määramata ehk, nagu neid praegu tihti nimetatakse, diofantilisi võrrandeid. Need on võrrandid ja võrrandisüsteemid, milles tundmatuid on rohkem kui võrrandeid, kuid mille lahendeid otsitakse ainult kas täis- või ratsionaalarvude hulgast. Kui diofantilisel võrrandil üldse leidub täisarvulisi (või ratsionaalarvulisi) lahendeid, siis on neid tavaliselt palju.

Fermat' tööd avavad uue epohhi arvuteooria arengus, panevad aluse kaasaegsele arvuteooriale. Kahjuks pole ta aga ka neid töid publitseerinud. Fermat' suurepärased arvuteooriasse kuuluvad tulemused sisalduvad tema kirjades, paljud neist on märgitud Diophantose «Aritmeetika» temale kuuluva eksemplari lehekülgede äärtele. Viimased kirjutas peale Pierre Fermat' surma välja tema poeg Samuel ning avaldas uues Diophantose «Aritmeetika» väljaandes 1670. a. Suure osa Fermat' sõnastatud arvuteooria teoreemide jaoks pole aga säilinud tema tõestuskäike. Fermat' tulemused on pälvinud paljude silmapaistvate matemaatikute tähelepanu, nende uurimise käigus on välja kujunenud kaasaegse arvuteooria probleemistik. Enamikule Fermat' sügavatest teoreemidest on leitud tõestused XVIII ja XIX sajandil. Üldse on paljudele arvuteooria tulemustele omane lihtne sõnastatavus, aga raske tõestatavus, mistõttu neid on väga palju uuritud, sealhulgas ka suurimate matemaatikute poolt. Ka tänapäeval on veel lahendamata rida ammugi püstitatud arvuteooria probleeme.

Fermat' «ääremärkustest» on kõige tuntum järgmine.[7]

Pole siiski võimalik jaotada kuupi 2-ks kuubiks, biruutu 2-ks biruuduks ja üldse ühte astet, mis on kõrgem kahest, 2-ks astmeks sama astmenäitajatega. Ma leidsin selle jaoks tõepoolest imeteldava tõestuse, kuid see äär on tema jaoks liiga kitsas.

Selle märkuse on Fermat kirjutanud ülesande kõrvale, milles Diophantos vaatleb ruudu esitamist kahe ruudu summana, s. t. diofantilise võrrandi

$$x^2 + y^2 = z^2$$

lahendi leidmist. Viimasel võrrandil on lõpmata palju naturaalarvulisi lahendeid (näit. $x = 3$, $y = 4$, $z = 5$). Nende nn. Pythagorase arvude küllaltki ulatuslik tabel leidub juba ühel muistsel babüloonia savitahvlil. Pythagorase arvud on parajasti sellised naturaalarvud, mis võivad olla täisnurkse kolmnurga külgedeks.

---

[6] Täiuslikeks arvudeks nimetatakse naturaalarve, mis võrduvad oma pärisjagajate summaga, näit. $6 = 1 + 2 + 3$, $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$.

[7] Tõlge on tehtud saksakeelsest väljaandest Fermat, P., Bemerkungen zu Diophant. Leipzig, 1932, lk. 3.

Fermat' väite sisuks on, et *diofantilisel võrrandil*

$$x^n + y^n = z^n$$

pole $n > 2$ korral naturaalarvulisi lahendeid. Seda tulemust, mida nimetatakse ka **Fermat' suureks teoreemiks**, pole tänaseni õnnestunud üldjuhul ei tõestada ega ka ümber lükata.

Fermat' suure teoreemi õigsus on aga tõestatud väga paljudel erijuhtudel. Selle kehtivust $n = 3$ korral teadsid araablased juba X sajandil. Võrrandi $x^4 + y^4 = z^4$ naturaalarvuliste lahendite puudumine järeldub Fermat' tulemusest, et ei leidu täisnurkset kolmnurka, mille küljed on täisarvud ja pindala täisruut. Viimase väite jaoks esitab Fermat ka tõestuse. Fermat' suure teoreemi tõestuskatseid on teinud paljud matemaatikud. Möödunud sajandil õnnestus saksa matemaatikul E. **Kummeril** (1801—1893) tõestada selle teoreemi kehtivus paljude astendajate n korral, sealhulgas kõigi $3 \leqslant n \leqslant 100$ korral. Need uurimused viisid tähtsatele tulemustele algebraliste arvude teoorias. Kummer rakendas aga matemaatilist aparatuuri, mida tõenäoliselt ei suutnud kasutada Fermat. Viimasel ajal tõestasid D. H. ja E. **Lehmer** ning H. S. **Vandiver** Fermat' suure teoreemi kehtivuse kõigi naturaalarvude $2 < n < 4002$ korral, seega ka kõigi n korral, millel on vähemalt üks ühekordne 4002-st väiksem paaritu jagaja. Selle teoreemi õigsus on näidatud ka mõningate teiste naturaalarvude n korral. Arvatavasti Fermat' suure teoreemi lõplik tõestus nõuab uusi sügavaid uurimusi diofantiliste võrrandite teoorias. Kõik see sunnib meid arvama, et Fermat' leitud tõestuses oli mingi loogiline lünk.

Fermat' suurele teoreemile on esitatud ka palju vigaseid tõestusi, enamikus mitte eriti sügavalt matemaatika meetodeid valdavate inimeste poolt, kes püüdsid toime tulla elementaarsete vahenditega. Seda ebatervet huvi Fermat' teoreemi tõestamise vastu suurendas 1909. a. Saksamaal väljakuulutatud suur rahaline preemia (100 000 marka) sellele, kes tõestab teoreemi või näitab selle mittekehtivust vähemalt ühe näite varal. Nimetatud preemia tühistati peale Esimest maailmasõda.

Toome veel paar näidet tulemustest, mis Fermat on kirja pannud Diophantose «Aritmeetika» äärtele.

Iga algarvu kujul $4n + 1$ ja tema ruudu saab esitada ainult ühel viisil kahe ruudu summana, selliste arvude kuubid ja neljandad astmed on esitatavad kahel viisil kahe ruudu summana, viiendad ja kuuendad kolmel viisil jne. Näiteks

$$5 = 1^2 + 2^2, \quad 25 = 3^2 + 4^2,$$

$$125 = 2^2 + 11^2 = 5^2 + 10^2, \quad 625 = 7^2 + 24^2 = 15^2 + 20^2,$$

$$3125 = 10^2 + 55^2 = 25^2 + 50^2 = 38^2 + 41^2.$$

Iga naturaalarvu, mis ise pole ruut saab esitada 2, 3 *või* 4 *ruudu summana.* Näiteks

$$2 = 1 + 1, \quad 3 = 1 + 1 + 1, \quad 5 = 4 + 1, \quad 6 = 4 + 1 + 1,$$
$$7 = 4 + 1 + 1 + 1, \quad 8 = 4 + 4, \quad 10 = 9 + 1.$$

Üheks tähtsaks diofantiliseks võrrandiks on nn. Pelli võrrand

$$ax^2 + 1 = y^2$$

(a on antud naturaalarv, mis pole täisruut), millele täisarvuliste lahendite leidmise probleemi esitas Fermat avalikus kirjas kõigile matemaatikutele. P. Fermat nähtavasti oskas leida selle üldlahendi ning arvatavasti ka tõestada lahendi olemasolu iga mittetäisruudu a korral. Inglise matemaatiku J. Pelli (1610—1685) nime andis sellele võrrandile L. Euler mingi arusaamatuse tõttu, sest Pell pole selle uurimisega üldse tegelnud. Hiljem selgus, et juba india õpetlaselt Bhaskaralt (1114—1185) pärineb algoritm Pelli võrrandi lahendamiseks.

Kirjas B. Frenicle'ile 1640. a. esitas Fermat järgmise tulemuse *Iga arv kujul* $n^{p-1} - 1$ *jagub arvuga* p, *kui* p *on algarv ning naturaalarv* $n \geqslant 2$ *ei jagu* p*-ga.* Näiteks

$$2^2 - 1 = 3, \quad 2^4 - 1 = 5 \cdot 3, \quad 2^6 - 1 = 7 \cdot 9, \quad 3^4 - 1 = 5 \cdot 16,$$
$$3^6 - 1 = 7 \cdot 104, \quad 4^2 - 1 = 3 \cdot 5 = 15.$$

Sel tulemusel, nn. Fermat väikesel teoreemil, on rida tähtsaid rakendusi. Ta on üheks keskseks teoreemiks arvuteoorias. Tõestuse Fermat' väikesele teoreemile andis XVIII saj. Leonhard Euler, kes esitas ka selle teatava üldistuse.

Viimase teoreemi avastamine on arvatavasti seotud Fermat' otsingutega leida naturaalarvust n sõltuv avaldis, mille väärtused on algarvud. Selleks uuris ta arve kujul $2^m + 1$ ning püstitas väited, et *need on kordarvud, kui naturaalarv* m *pole kahe aste* ja *algarvud, kui* $m = 2^n$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$). Esimene väide on kergesti põhjendatav. Teisele väitele ei õnnestunud Fermat'l anda lõplikku tõestust, kuigi ta oli veendunud selle kehtivuses. Veendumus põhines mitte ainult tõsiasjal, et nn. Fermat' arvudest

$$F_n = 2^{2^n} + 1$$

esimesed viis

$$F_0 = 3, \quad F_1 = 5, \quad F_2 = 17, \quad F_3 = 257 \text{ ja } F_4 = 65\,537$$

on algarvud, vaid Fermat näitas ka, et paljud algarvud ei saa olla arvude F_n jagajateks. Fermat püüdis korduvalt tõestust leida sellele «teoreemile» ning esitas selleks üleskutse ka teistele matemaatikutele.

Kuid Euler näitas 1732. a., et juba järgmine Fermat' arv $F_5 = 4\,294\,967\,297$ pole algarv, vaid jagub 641-ga. XIX sajandi lõpul ja XX sajandi algul tõestati, et Fermat' arvud on kordarvud ka $n = 6, 7, 8, 9, 11, 12, 15, 18, 23, 36, 38$ ja 73 korral. 1957. a. teatati, et ameerika matemaatik J. L. Selfridge leidis elektronarvuti abil veel 14 uut Fermat' kordarvu, mis vastavad väärtustele[8] $n = 39, 55, 63, 117, 125, 144, 150, 207, 226, 228, 268, 284, 316$ ja 452. Neist suurim $F_{452} = 2^{2^{452}}$ sisaldab vähemalt 10^{135} numbrit,[9] üks tema jagaja $27 \cdot 2^{455} + 1$ koosneb 139-st numbrist. Vastupidiselt P. Fermat' väitele pole $n \geqslant 5$ korral seni leitud ühtki algarvu. Tänapäevani on lahtine küsimus, kas nende hulgas üldse algarve leidub, ja kui leidub, kas siis lõplikul või lõpmatul hulgal. Möödunud sajandil püstitas saksa matemaatik G. Eisenstein (1823—1852) hüpoteesi, et Fermat' arvude hulgas on lõpmatu palju algarve.

Osutub, et algarvuliste Fermat' arvudega on tihedalt seotud küsimus, milliseid korrapäraseid hulknurki on võimalik konstrueerida sirkli ja joonlaua abil. Juba antiikajal tunti korrapärase 3-, 4- ja 5-nurga konstruktsioone. Kasutades nurga poolitamist ja nurkade lahutamist saab nende baasil konstrueerida ka näiteks korrapärased 6-, 12-, 24, 8-, 16-, 10- ja 20-nurgad aga ka 15-nurga. Kuid sirkli ja joonlaua abil teostatavate konstruktsioonide otsingud näiteks 7-ja 11-nurga jaoks lõppesid edutult. Nii ei õnnestunud ligi 2000 aasta jooksul leida seda tüüpi konstruktsioone ühegi uue korrapärase hulknurga jaoks.

1796. a. hämmastas kogu maailma matemaatikuid 19-aastane Göttingeni üliõpilane Carl Friedrich Gauss (1777—1855) teatega, et korrapärane 17-nurk on konstrueeritav sirkli ja joonlaua abil. Viis aastat hiljem avaldas ta üldise tulemuse: *sirkli ja joonlaua abil on konstrueeritavad need ja ainult need algarvuliste tippude arvuga korrapärased hulknurgad, mille tippude arv on Fermat' algarv.* Oma meetodi abil leidis Gauss ka korrapärase 257-nurga konstrueerimise võtte, kuid ei avaldanud seda.[10] Korrapärase 65 537-nurga konstruktsiooni andis O. Hermes (1826—1909), seda säilitatakse mahuka käsikirjana Göttingenis (vt. ka lk. 73).

Gaussi tulemusest järeldub, et sirkli ja joonlaua abil on konstrueeritavad need ja ainult need korrapärased hulknurgad, mille tippude arv $n = 2^m F_{n_1} \cdot F_{n_2} \cdot \ldots \cdot F_{n_k}$, kus $m = 0, 1, 2, \ldots$ ja $F_{n_1}, F_{n_2}, \ldots, F_{n_k}$ on erinevad Fermat' algarvud. Seega on sirkli ja joonlaua abil konstrueeritavad näiteks korrapärased 3-, 4-, 5-, 6-, 8-, 10-, 12-, 15-, 16-, 17- ja 20-nurgad, aga pole konstrueeritavad näiteks korrapärased 7-, 9-, 11-, 13-, 14-, 18- ja 19-nurgad.

* *
*

---

[8] Viimastel aastatel on tõestatud, et kordarvud on ka F_{10}, F_{13}, F_{14}, F_{16}, F_{58}, F_{77}, F_{81}, F_{260}, F_{267} ja F_{1945}.

[9] Märgime võrdluseks, et kaugus Maalt Andromeeda udukoguni on umbes 1,5 miljonit valgusaastat ehk $1{,}5 \cdot 10^{25}$ mm. Seega arvu F_{452} trükkimisel 1 mm laiuste numbritega oleks tema pikkus võrdne ligikaudu 10^{110}-kordse Andromeeda udukogu kaugusega.

[10] Kuni viimase ajani loeti selle konstruktsiooni autoriks F. J. Richelot'd (1808—1875). Hiljuti aga selgitas I. M. Rabinovitš (vt. Изв. АН Лат ССР, 1960, № 11, 153—156), kasutades Jelgava matemaatikaprofessori, Tartu ülikooli kasvandiku G. Pauckeri poolt sama konstruktsiooni käsitleva artikli lisana avaldatud Gaussi kirja, et konstruktsiooni andis siiski juba Gauss ise 1796. aastal.

Me ei suutnud puudutada kaugeltki kõiki olulisi tulemusi Fermat' matemaatilisest loomingust. Tänu oma aja matemaatika sügavale mõistmisele suutis ta jõuda tähtsatele tulemustele peaaegu kõigis selle aja matemaatika arengusuundades.

Mainime lühidalt veel mõnda Fermat' saavutust. Fermat esitas võtte tundmatute elimineerimiseks algebralistest võrrandisüsteemidest ning vaatles meetodeid kõrgema astme algebraliste võrrandite graafiliseks lahendamiseks. Uurides hasartmängudega seotud küsimusi määratlesid P. Fermat ja B. Pascal sündmuse tõenäosuse kui sündmuste esinemiseks soodsate juhtude arvu suhte kõikvõimalike juhtude arvusse, astudes sellega esimesi samme tõenäosusteooria loomisel. Tõenäosusteooria probleemide uurimisega on seotud ka mainitud matemaatikute kombinatoorikasse kuuluvad tulemused.

Kuid Pierre Fermat' huvide ring ei piirdunud mitte ainult matemaatika ja loodusteadustega. Ta tundis hästi klassikalist kirjandust ja kirjutas ise ladinakeelseid luuletusi ning poeemi *Cede Deo.* Fermat'lt pärineb ka uurimusi vana-kreeka õpetlaste kohta.

BACHET DE MÉZIRIACI ÜLESANDEID

C. G. Bachet de Méziriac (1587—1638) on prantsuse matemaatik, kes 1621. a. andis välja Diophantose tööd kreeka keeles koos ladinakeelsete tõlgete ja kommentaaridega. Selle väljaande Fermat' eksemplarist pärinevadki Fermat' «ääremärkused». Bachet de Méziriac arendas välja lineaarse diofantilise võrrandi $ax+by=1$ (a ja b on ühistegurita täisarvud) üldise teooria.

Esitame järgnevas mõned ülesanded tema raamatust «Lõbusad ja meeldivad ülesanded» (1612).

1. *Vaene naine kandis turule korvi munadega. Keegi tõukas teda kogemata, korv kukkus ja munad purunesid. Süüdlane tahtis hüvitada kahju ja küsis, palju mune oli korvis. Seda aga naine ei teadnud, kuid ütles, et munade jaotamisel 2-, 3-, 4-, 5- ja 6-kaupa oli alati üks muna üle jäänud, aga 7-kaupa jaotamisel polnud ühtegi üle jäänud.*

2. *Seltskond, mis koosnes 41 inimesest, tellis lõuna ja tasus selle eest 40 soud, iga mehe eest 4 soud, iga naise eest 3 soud ja iga lapse eest $^1/_3$ soud. Kuipalju oli mehi, naisi ja lapsi?*

3. *Kahel sõbral on 8 liitrit veini anumas, mille mahtuvus on 8 liitrit. Nad tahavad veini jaotada omavahel võrdselt, kuid selleks on neil kasutada veel ainult kaks anumat, millest ühe mahtuvus on 5 ja teise 3 liitrit. Kuidas jaotada vein?*

4. *15 kristlast ja 15 türklast asuvad merel laeval. Tõuseb kohutav torm. Kapten teatab, et 15 inimest tuleb heita üle parda selleks, et päästa 15 ülejäänut. Vastavalt kokkuleppele asuvad kõik reisijad ringi ning iga üheksas heidetakse üle parda seni, kuni jääb järele 15 inimest. Kuidas tuleb paigutada kristlased ja türklased, et päästa kõiki kristlasi?*

EESTIST VÕRSUNUD MATEMAATIKAKLASSIK

(100 aastat Piers Bohli sünnist)

I. Rabinovitš [1]

Tartut külastava teadusesõbra silma rõõmustab alati tartlaste hool ülikooliga seotud tuntud teadlaste mälestuse jäädvustamise eest. Sellest annavad tunnistust õpetlaste arvukad skulptuurportreed, mis köidavad ka teadusest kaugemal seisvate isikute tähelepanu. Seejuures ei jää märkamata, et eelistatud on seni kirjanduse, arstiteaduse ja bioloogia esindajaid, täppisteadlased, seehulgas matemaatikud, on aga varju jäänud. Põhjus on siin arvatavasti üpris lihtne — mitteküllaldane informeeritus. Tartu elanikud lihtsalt ei tea, missugune osa matemaatika arengus on olnud nende kodulinnas õppinud ja töötanud teadlastel. Ühele neist — silmapaistvale matemaatikule Piers Bohlile — ongi pühendatud alljärgnevad read.

Spetsialistide kitsas ringis teati P. Bohli juba käesoleva sajandi algusest peale esmajoones kui kvaasiperioodiliste funktsioonide esimest uurijat ja rakendajat. Laiemalt tuntuks sai P. Bohli nimi aga alles kümnekonna aasta eest. Tõukeks kujunes Moskva Matemaatikaseltsis 1955. aastal toimunud ettekanne, milles me prof. A. Mõškisega näitasime, et esimene tõestus analüüsi ühele kesksele teoreemile püsipunkti olemasolust kera pideval kujutamisel iseendaks kuulub Piers Bohlile. Pärast ettekannet märkis seltsi president akadeemik P. S. Aleksandrov: «Niisiis on meil nüüd uus matemaatika klassik».

Käesoleva artikli autori ette kerkis ülesanne: koguda ja korraldada andmeid selle silmapaistva matemaatiku elust ja tegevusest. Tuli tuhnida arhiivides, lugeda vanu ajakirju, uurida P. Bohli töid, otsides neis biograafilisi andmeid, ja pikapeale põimuski kogutud materjalidest tema elutee ja teadlasepale.

Piers Bohl sündis 28. oktoobril 1865. aastal Valgas kaupmehe perekonnas. Peale alghariduse omandamist Valga linnakoolis astus ta 1878. aastal Viljandi klassikalisse gümnaasiumi ehk «rüütlikooli» (põhikirja järgi oli kool «Liivimaa rüütelkonna eestkoste ja järelvalve all»). Esimestel aastatel oli P. Bohl klas-

---

[1] Autoriks on Läti NSV TA Astrofüüsika laboratooriumi teaduslik töötaja. Artikli on venekeelsest käsikirjast tõlkinud Ü. Lumiste.

sis õppeedukuselt üks viimaseid. Pööre tuli eelviimasel kooliaastal ning gümnaasiumi lõpetas P. Bohl juba esimese õpilasena. On alust arvata, et nii selle pöörde toimumist kui ka huvi ärkamist matemaatika vastu mõjutas gümnaasiumi selleaegne matemaatika- ja füüsikaõpetaja, Tartu ülikooli kasvandik Hugo Weidemann.

Gümnaasiumi lõpetamise järel astus P. Bohl 1884. aastal Tartu ülikooli füüsika-matemaatikateaduskonda. Sellal õpetasid siin juba eakas professor P. Helmling ja Rootsist tulnud noor astronoom-teoreetik A. Lindstedt. Viimane oli silmapaistva saksa matemaatiku K. Weierstrassi ideede tuline propageerija. Kuid juba 1886. aastal läks A. Lindstedt tagasi kodumaale ja tema asemele kutsuti Tartusse teise kuulsa saksa matemaatiku F. Kleini õpilane ja järelkäija E. Staude. Nagu teada, olid Weierstrass ja Klein möödunud sajandi lõpul matemaatikas valitsenud kahe suuna tuntuimateks esindajateks. Esimene viljeles abstraktset teoreetilist suunda, omistades erilise tähenduse matemaatiliste tõestuste rangusele, F. Klein aga orienteerus enam rakenduslike ülesannete lahendamisele. Niiviisi oli noorel Bohlil juba üliõpilasaastail võimalik tutvuda nii ühe kui teise suuna esindajatega.

Õpingud ülikoolis kulgesid P. Bohlil edukalt. Juba 1887. aasta augustis andis ta viimased kursuseeksamid. Tema uurimus «Lineaarsete diferentsiaalvõrrandite invariantide teooria ja rakendused», mille ta kirjutas prof. Helmlingi tööde vaimus, tunnistati kuldmedali vääriliseks ja arvestati kandidaaditööna. Seda käsikirjalist tööd, mida ei ole senini veel väärikalt uuritud, säilitatakse praegu Tartus Ajaloo Keskarhiivis. P. Bohli ülikooliaastatest on üldse vähe teada, vahest ainult seda, et ta üsna rohkesti aega veetis Werneri kohvikus, kus pidas edukalt lahinguid ruudulisel laual ja oli tuntud tugeva maletajana.

Lõpetanud ülikooli kandidaadidiplomiga ning keskkooli matemaatika- ja füüsikaõpetaja kutsega, sai P. Bohl esialgu koduõpetaja koha Leevi mõisas, hiljem aga õpetaja koha Irlavi õpetajate instituudis Kuramaal. Sellest ajajärgust pärinevad tema esimesed teaduslikud publikatsioonid. Ajakirjas «Annalen der Physik und Chemie» ilmus 1889. aastal Bohli artikkel «Molekulaarse tõmbejõu seadus». Aasta pärast järgnes Schlömilchi ajakirjas «Zeitschrift für Mathematik und Physik» artikkel «Kepleri kolmanda seaduse üldistus». Viimane töö äratas veel 50 aasta pärast ameerika astronoomi A. Wintneri tähelepanu, kes valgustas artikli originaalseid ideid oma tuntud monograafias. Esimest publikatsiooni aga tabas ebaedu — peatselt said tuntuks hollandi füüsiku Van der Waalsi tulemused, millede valguses selgus Bohli järelduste paikapidamatus. See ebaõnnestumine jättis sügava jälje noore teadlase loomingusse. Tal tuli loobuda mehhanistliku filosoofia naiivsetest ettekujutustest, mille mõju on ilmselt tajutav tema esimeses avaldatud töös. Siitpeale sai Bohli edasiste uurimuste üheks erijooneks kriitiline suhtumine üldtunnustatud kujutlustesse ja meetodeisse.

Õpetajatöö Irlavis ei kestnud kaua. Peatselt pöördus Bohl tagasi Valka, kus asus lõpule viima väitekirja ja ette valmistuma magistrieksameiks.

Tema tähelepanu oli köitnud järgmine probleem. Teoreetilises füüsikas ja astronoomias vaadeldakse mitmeid nähtusi kui perioodilisi ja uuritakse neid vastavate matemaatiliste meetodite abil. Alati ei või aga olla veendunud selles, et nähtus, mis esimesel pilgul näib perioodiline, on seda tõepoolest. Kui esineb teatav, olgu kasvõi väga väike kõrvalekaldumine perioodilisusest, siis põhimõtteliselt kõneldes ei saa enam olla kindel, et kasutatavad meetodid viivad rangelt tõepärasele tulemusele. Bohl seab oma ülesandeks täiustada olemasolevaid matemaatilisi vahendeid selliselt, et nendele võib kindel olla ka siis, kui nähtus ei ole rangelt perioodiline. Nii jõudis ta suurusteni, mida nimetas «perioodilisteks laiemas mõttes».

Siit sai alguse P. Bohli magistriväitekiri, mille ta kaitses edukalt Tartu ülikoolis 1893. aastal, pannes sellega aluse matemaatilise analüüsi ühele uuele harule. Mõnevõrra hiljem andis prantsuse astronoom Esclangon Bohli poolt uuritud suurustele nimetuse «kvaasiperioodilised funktsioonid». Bohli ja Esclangoni töödest lähtudes arendas taani matemaatik H. Bohr 1920-ndatel aastatel välja peaaegu perioodiliste funktsioonide teooria, millel on tähtis koht matemaatilises analüüsis ja selle rakendustes.

Kuigi magistriväitekiri andis tunnistust noore teadlase silmapaistvatest võimetest, ei leidnud Tartu ülikooli reaktsiooniline juhtkond talle kohta ülikoolis. Üheks põhjuseks olid nähtavasti P. Bohli progressiivsed vaated, mida ta küllalt selgelt ilmutas oma vene keele eksamitöös, väljendades sümpaatiat Turgenevi romaanis «Uudismaa» kirjeldatud noortele revolutsionääridele.

Raske öelda, milliseks oleks kujunenud noore matemaatikamagistri edasine saatus, kui Riia Polütehnilise Instituudi direktor poleks teda Tartu professori A. Kneseri tungival soovitusel kutsunud oma õppeasutuse kõrgema matemaatika kateedri juhatajaks. Peale kaheaastast viibimist kodulinnas Valgas siirduski P. Bohl 1895. aastal Riiga, kus võttis vastu talle pakutava koha. Siin möödus kogu tema järgnev teaduslik ja pedagoogiline tegevus. 25 aasta kestel oli ta püsivalt instituudi professor ja kateedri juhataja. Tema metoodilisi vaateid kajastavad analüütilise geomeetria ning diferentsiaal- ja integraalarvutuse litograafilisel teel paljundatud kursused, mis ilmusid 1921. aastal. Isiklikus elus oli P. Bohl üksik ja endassetõmbunud, pühendudes jäägitult teaduslikule ja pedagoogilisele tööle. Harvaks vahelduseks ja puhkuseks oli talle male, maletajate seast olid ka tema vähesed sõbrad. Teda peeti Riia üheks esimaletajaks, hispaania avangu tema poolt arendatud varianti nimetatakse malekirjanduses tänaseni Riia variandiks.

P. Bohli edasised teaduslikud uurimused Riias olid seotud kvaasiperioodiliste funktsioonide rakendustega teoreetilises mehhaanikas. Lühikese ajaga sai ta tähtsaid tulemusi: ta üldistas prantsuse matemaatiku H. Poincare mõningaid teoreeme, avastas vaieldavaid kohti tuntud matemaatiku ja astronoomi P. Lapace'i uurimustes, osutas defektidele saksa füüsiku H. Helmholzi kombineeritud toonide teoorias. Kõik need saavutused tulenesid P. Bohli poolt arendatud meetodist mittelineaarsete diferentsiaalvõrrandite — matemaatilise analüüsi äärmiselt raske valdkonna uurimiseks. Bohl esitas oma tööd Tartu ülikoolile doktoridissertatsioonina, mida ta kaitses siin 1900. aastal. Peale A. Kneseri, kellega tal olid ühised huvialad ja tihe kontakt, oponeerisid talle noor T. Molien ja P. Grave. Kümne aasta pärast tõlgiti tema väitekiri vene keelest prantsuse keelde ja avaldati Prantsuse Matemaatika Seltsi ajakirjas — au, mis on osaks saanud vähestele välismaalastele.

Oma doktoriväitekirja, mis oli, samuti nagu magistritöö, trükitud Tartus Mathieseni juures, lülitas P. Bohl kolm ülejäänud peatükkidega vähe seotud paragrahvi. Prantsuskeelses tõlkes olid need paragrahvid ära jäetud. Kuid just need väärivad erilist tähelepanu. Nad sisaldavad algkujul niinimetatud «püsipunkti printsiibi», mis hiljem sai diferentsiaalvõrrandite kaasaegse teooria üheks põhiliseks meetodiks.

Püüame järgnevalt selgitada selle printsiibi ideed, eeldamata lugejalt erilisi eelteadmisi. Kujutleme, et me venitame kummipaela üht otsapidi paremale, teist otsapidi vasakule. Osa punkte paelal liiguvad seejuures paremale, osa vasakule. On üsna ilmne, et leidub ka punkt, mis jääb paigale — selleks on paremale ja vasakule nihkuvaid punkte lahutav punkt.

Kujutleme nüüd kummipaela asemel kummikelmet, mida samuti äärtest teatud viisil venitatakse. Siin ei ole enam sugugi ilmne, et tingimata leidub punkt, mis jääb paigale. Ülalmärgitud paragrahvid Bohli väitekirjast annavadki muu hulgas matemaatiliselt range tõestuse sellise punkti olemasolule. See ei ole muide aga Bohli peamine teene nimetatud küsimuses, sest paigale jääva punkti leidumine niisugusel puhul, ehk matemaatiliselt väljendudes, püsipunkti olemasolu kahemõõtmelise muutkonna teatavat laadi topoloogilisel kujutamisel on järeldatav juba H. Poincare ja L. Kroneckeri töödest. Bohli põhimine saavutus seisneb selles, et ta esimesena taipas püsipunkti olemasolu teoreemi tähtsust diferentsiaalvõrrandite teoorias. Talle kuulub ka prioriteet püsipunkti printsiibi kasutamise alal mehhaanikas.

Doktoriväitekirjas andis Bohl püsipunkti olemasolu teoreemi tõestuse ainult tasandilise juhu jaoks. Mõne aasta pärast õnnestus tal aga tõestada teoreem täiesti üldisel kujul. Vastava tõestuse lülitas ta artiklisse, mille avaldas 1904. aastal Crelle poolt väljaantavas saksa tuntud matemaatilises ajakirjas. Artikkel oli pühendatud tähtsale, kuid üsna spetsiaalsele teoreetilise mehhaanika küsimusele, ning seetõttu pöörasid matemaatikud talle vähe tähelepanu. Juhtuski nii, et hollandi matemaatik L. Brouwer, mitte teades Bohli tõestust, avaldas nelja aasta pärast uuesti sama teoreemi tõestuse. Pikka aega kandis see teoreem «Brouweri teoreemi» nime. Alles kümnekonna aasta eest, nagu juba märgitud, taastati Bohli prioriteet ja nüüd nimetatakse teoreemi nõukogude ja üha enam ka välismaa matemaatikute poolt «Bohli-Brouweri teoreemiks».

Enne kui asuda P. Bohli järgnevate teaduslike saavutuste tutvustamisele püüame mõne sõnaga iseloomustada teadusala, millele on pühendatud tema peamised tööd — taevamehhaanikast.

Taevamehhaanika üheks põhiprobleemiseks on «sekulaarsete häirete» arvestamine. Probleemi mõnevõrra lihtsustades võib asja kujutada järgmiselt. On teada, et kõik taevakehad tõmbuvad üksteise poole ülemaailmse gravitatsiooniseaduse põhjal. Näiteks Päikese ja Maa puhul kutsub see esile Maa pöörlemise Päikese ümber elliptilist orbiiti mööda. Kuid planeete tõmbab enda poole mitte ainult Päike. Nad tõmbavad ka üksteist. Päikese tõmbejõuga võrreldes on planeetide mõju üksteisele muidugi äärmiselt väike, kuid pika aja jooksul annab ta end siiski tunda — planeedid kirjeldavad Päikese ümber mitte ellipseid, vaid mõnevõrra keerulisemaid kõveraid. Neid trajektooride kõrvalekaldumisi elliptilisest kujust nimetataksegi «sekulaarseteks häireteks». Nende ettearvutamine mitme aasta peale osutus teoreetiliselt ja praktiliselt üpris keerukaks ülesandeks. P. Laplace ja J. Lagrange tuletasid küll kõik selleks vajalikud diferentsiaalvõrrandid, kuid neid ei ole kaugeltki lihtne lahendada. Sekulaarsete häirete diferentsiaalvõrrandite lahendamisega seotud probleemidele ongi pühendatud Bohli põhilised uurimused.

1906. aastal avaldas ta Crelle ajakirjas memuaari «Ühest sekulaarsete häirete teooria diferentsiaalvõrrandist». Selles ta arendas tunduvalt kvaasiperioodiliste funktsioonide teooriat, millele ta oli aluse pannud oma magistriväitekirjas. P. Bohl näitas, et Lindstedti leitud meetod ühe olulise diferentsiaalvõrrandi lahendamiseks ei ole laitmatu.

Sekulaarsete häirete teooria probleemide hulka kuulub ka küsimus planeediorbiitide muutuste iseloomust. Taevamehhaanika termineis sai see küsimus nimeks «keskmise liikumise probleem». Tuntud astronoomid-teoreetikud — Cavallin, Stockwell, Tisserand, Hilden — püüdsid mitmeti läheneda selle raske probleemi lahendamisele, kuid ei saanud rahuldavaid tulemusi. Viimaks võttis probleemi käsile Bohl. Crelle ajakirjas 1909. aastal avaldatud memuaaris näitas ta oma eelkäijate ebatäpsused, arendades välja oma meetodi ja näitas, et Laplace'i-Lagrange'i klassikaliste meetoditega on probleemi võimatu lahendada. Oma uurimuses tugines Bohl enda leitud «teoreemile murdjääkide ühtlasest jaotumisest». Hiljem andis šveitsi matemaatik H. Weyl üldisema teoreemi, mida loetakse praegu kaasaja matemaatilise analüüsi üheks põhiteoreemiks.

Bohli tulemused keskmise liikumise probleemi alal pakkusid suurt huvi Berliini matemaatikule F. Bernsteinile. Bohli töödele tuginedes jõudis Bernstein tähtsatele metoodilist laadi põhimõttelistele järeldustele matemaatika ja reaalse maailma vahekorra kohta. Kuid Bohl ei nõustunud Bernsteini filosoofiliste põhimõtetega; nende vahel tekkis diskussioon, mis kajastus ajakirja «Mathematische Annalen» veergudel.

Selle diskussiooni otsese järeldusena ilmus 1913. aastal Crelle ajakirjas Bohli töö «Diferentsiaalvõrratustest», milles ta uuris äärmiselt tähtsat küsimust diferentsiaalvõrrandite lahendite stabiilsusest. Lihtsustatult seisneb probleemi sisu järgnevas. On teada, et üheks põhiliseks, võib-olla koguni peamiseks matemaatilise uurimise vahendiks on diferentsiaalvõrrandid, mis peegeldavad loodusnähtustevahelisi seoseid. Selliste võrrandite koostamisel eeldab uurija, et mitmete suuruste väärtused ja mõningate lihtsate seaduste iseloom on täpselt teada. Kuid tegelikult see ei ole nii. Eksperimendist saadud andmed ja lihtsad seaduspärasused on meile üldreeglina teada vaid teatava veaga. Tekib küsimus: missugune mõju on nendel vigadel diferentsiaalvõrrandite lahendamisel saadud tulemustele?

Oma tähelepanuväärses uurimuses eraldas Bohl välja ühe erilise klassi diferentsiaalvõrrandeid, mille lahendid on vähe tundlikud lähteandmete vigadele.

Esimene maailmasõda katkestas Bohli viljakad uurimused. Riia Polütehniline Instituut evakueeriti Moskvasse, seejärel Ivanovosse. Moskvasse sõitis ka P. Bohl.

1919. aastal pärast Nõukogude Läti valitsuse moodustamist P. Stučkasega eesotsas tuli Bohl Riiga tagasi ja asus uuesti loenguid pidama tollal organiseeritud Läti Ülikoolis. Kuid sõjaaastate raskused olid murdnud tema tervise. P. Bohl suri 25. detsembril 1921. aastal verevalumist ajju.

Tema kolleeg Riia Polütehnilises Instituudis keemiaprofessor M. Zentnerschwer andis kord teravmeelse võrdluse fundamentaalsete teaduslike tööde ja ehituskunsti loomingu vahel: «Taolised tööd on võrreldavad suurepärase ehituse vundamendiga: kõndija möödub, pöörates tähelepanu tornidele ja väliskaunistustele. Uudishimulikum vaatab ka sisse. Vundament jääb aga inimsilmale nägematuks. Alles aastakümnete pärast, ümberehitamiste käigus jõutakse vundamendini. Ja siis saavad nähtavaks temasse peidetud töö ja talendi väärtused». Neid sõnu võime õigustatult kasutada Tartu ülikooli kasvandiku Piers Bohli puhul.

15 AASTAT AKADEEMIK N. N. LUZINI SURMAST

A. Palge

28. veebruaril 1965. a. möödub 15 aastat väljapaistva nõukogude matemaatiku, funktsiooniteooria Moskva koolkonna rajaja Nikolai Nikolajevitš Luzini surmast.

N. Luzin sündis 9. dets. 1883. a. Tomskis. Alghariduse sai ta Tomski linna ühes erakoolis, keskhariduse Tomski ja Irkutski gümnaasiumis. Kooliaastail luges N. Luzin palju kõige erinevamat kirjandust, kusjuures eriti huvitasid teda mitmesugused filosoofilised küsimused. Matemaatikat ta kuni gümnaasiumi viimaste klassideni ei armastanud, vaid pidas seda koguni ebameeldivaks. Seda põhjustas asjaolu, et matemaatikat õpetati tollal kui ainet, milles tuli täpselt, raamatu tekstist kõrvale kaldumata pähe õppida teoreemide sõnastusi ja tõestusi. Luzinile oli see väljakannatamatuks piinaks, sest tal puudus täielikult mehhaaniline mälu. Samal põhjusel olid talle rasked ka ajalugu, geograafia ja keeled. Asjad matemaatikaga läksid üha halvemini ja nii võttis isa talle «järeleaitaja». Õnneks sai selleks andekas üliõpilane Tomski Polütehnilisest Instituudist. Ta näitas N. Luzinile, et matemaatika pole mitte mehhaanilise päheõppimise, vaid arutluste süsteem, mida suunab elav kujutlus. Tänu temale kadus Luzinil vaen matemaatika vastu.

1901. a. lõpetas Luzin gümnaasiumi ja astus Moskva Ülikooli Füüsika-Matemaatikateaduskonna matemaatikaosakonda: ta soovis saada inseneriks ja selleks eelnevalt omandada küllaldaselt matemaatilisi teadmisi.

Hiilgavad matemaatikaloengud ülikoolis avaldasid N. Luzinile tohutut mõju. Ta avastas, et matemaatika ei seisne mitte ainult keerukate tõdede äraõppimises ja ammu teadaolevate vastustega ülesannete lahendamises, vaid on ääretu väli loovaks tööks. N. Luzin võrdles hiljem teadlase olukorda alati Kolumbuse omaga, kes suundub otsima uusi maid ja võib igal momendil teha tähtsa avastuse. Tema ees avanes matemaatika kui loominguline teadus, täis veetlevaid saladusi.

1905. a. revolutsiooniliste sündmuste ajal oli ülikool suletud. Professor D. F. Jegorov, kelle juhendamisel N. Luzin töötas, soovitas tal sõita õppima mõnda välismaa ülikooli. Jegorovil õnnestuski leida üliõpilane, kes kõneles prantsuse ja saksa keelt ning detsembris sõitsid Luzin ja tema kaaslane Pariisi.

Kogu välismaal viibimise aeg möödus N. Luzinil visa ja süstemaatilise töö tähe all. Loenguid kuulas ta vähe, põhiliselt töötas raamatukogudes. Venemaale pöördus ta tagasi 1906. a. suvel, sooritas sama aasta lõpul riigieksami ja jäeti ülikooli juurde «professori nimetuse saamiseks». Nüüd hakkas N. Luzin kuulama loenguid arstiteaduskonnas, kuhu ta kavatses astuda, et siis minna rahva sekka. Sellest pidi ta peagi loobuma, sest töötamine anatoomikumis polnud talle nõrga tervise tõttu jõukohane. Seejärel kuulas N. Luzin loenguid filosoofiaosakonnas, mille samuti aasta pärast lõpetas. Alles pärast kõike seda pöördus ta matemaatika juurde tagasi, sooritas 1909. a. nn. magistrieksamid, kuid ülikoolis loenguid pidama hakata ei jõudnud — talle otsustati anda teaduslik komandeering Göttingeni ja Pariisi.

Göttingeni sõitis Luzin 1910. a. sügisel. Eriti hindas ta seal isiklikke kokkupuuteid professoritega, sest siis oli selgesti näha ühe või teise professori lähenemisviis mingile probleemile, nende suhtumine sellese. Göttingenis uuris Luzin trigonomeetriliste ridade teooriat ja avaldas (1911. a.) oma esimese iseseisva töö.

1912. a. sõitis N. Luzin Göttingenist Pariisi, kus võttis osa J. Hadamard'i seminari tööst, tutvus isiklikult veel E. Picard'i, E. Boreli, H. Lebesgue'i jt. väljapaistvate matemaatikutega. Et Luzini komandeeringut pikendati aasta võrra, siis oli ta Pariisis ka veel 1913/14. õ.-a., kuulates muu hulgas M. Bôcheri loenguid uutest tulemustest harilike lineaarsete teist järku diferentsiaalvõrrandite teooriast ja Picard'i loenguid kompleksmuutuja funktsioonide teooriast. Endiselt võttis ta osa Hadamard'i seminari tööst. Peale kõike seda jätkas Luzin ka iseseisvat uurimistööd reaalmuutuja funktsioonide teooria vallas. Neil aastail avaldas ta 10 teaduslikku tööd vene ja välismaa matemaatilistes keskajakirjades.

1914. a. sügisel pöördus Luzin tagasi Venemaale ja asus tööle Moskva Ülikoolis. Ajavahemik 1914—1924. a. oli Luzinile hiilgava teadusliku ja pedagoogilise tegevuse perioodiks. Ta luges ülikoolis analüütilise geomeetria ja kõrgema algebra kursust, reaalmuutuja funktsioonide teooria fakultatiivkursust ja juhendas spetsiaalset uurimisseminari. Vaatamata sellele, et Luzini loengud ei järginud didaktika üldtunnustatud printsiipe, olid nad kõige enam hinnatud. Ja seda ajal, mil Moskva ülikoolis oli terve rida väljapaistvaid lektoreid. Luzini loengute edu oli tingitud sellest, et nendes näidati teadusliku mõtte tekkimise protsessi ning anti kuulajaile karastust nendest raskustest ülesaamiseks, mille poolest teaduslikud otsingud nii rikkad on. Just see aastast aastasse tema poolt loetav fakultatiivsursus ja seminar olidki tsentrumiks, kust kasvas välja funktsiooniteooria Moskva koolkond.

1915. a. viis Luzin lõpule fundamentaalse töö «Integraal ja trigonomeetriline rida», mida ta 27. aprillil 1916. a. kaitses Moskva Ülikooli Füüsika-Matemaatikateaduskonna Õpetatud Nõukogu ees magistri kraadi saamiseks. Õpetatud Nõukogu otsustas anda Luzinile matemaatikadoktori kraadi, jättes vahele magistri kraadi. See oli väga harv juhtum vene ülikoolide praktikas.

Aastad 1916—1930 tõid uut kuulsust Luzini koolkonnale. Tema enda tööde kõrval ilmusid üha sagedamini ka ta õpilaste tööd. Neil aastail olid tema õpilasteks hilisemad väljapaistvad nõukogude teadlased akad. P. Aleksandrov, prof. N. Bari, prof. A. Hintšin, akad. M. Keldõš (NSVL TA praegune president), akad. A. Kolmogorov, akad. M. Lavrentjev (praegune NSVL TA Siberi osakonna juhataja, NSVL TA viitsepresident), akad. A. Ljapunov, prof. L. Ljusternik, prof. D. Menšov, akad. P. Novikov jt.

1927. a. kevadel toimus Moskvas Ülevenemaaline Matemaatikute Kongress. Mitmed Luzini õpilased esinesid juba kui väljapaistvad teadlased. Luzin ise tegi ühe kongressi põhiettekannetest: «Reaalmuutuja funktsioonide teooria kaasaegsetest ülesannetest». 1927. a. oktoobris võttis Luzin osa Poola Matemaatikute Kongressist Lvovis, 1928. a. augustis aga Rahvusvahelisest Matemaatikute Kongressist Bolognas.

Neil aastail olid Luzini ja tema poolt juhendatava koolkonna teaduslikud tulemused saanud juba ülemaailmse tunnustuse. Kui varem oli reaalmuutuja funktsioonide teooria põhiliseks uurimiskeskuseks Pariis, siis nendest aastatest alates kujunes teiseks tähtsaks tsentrumiks Moskva. Luzinile omistati Krakovi Teaduste Akadeemia tegevliikme austav nimetus, Kalkuta ning Belgia Matemaatika Ühingute auliikme nimetus, Rahvusvahelisel Matemaatikute Kongressil Bolognas 1927. a. oli ta viitsepresidendiks, samal aastal valiti N. N. Luzin NSVL Teaduste Akadeemia korrespondentliikmeks, 1929. a. aga juba tegevliikmeks.

1930. a. hakkas Luzin juhatama NSVL TA juures oleva V. A. Steklovi nimelise Füüsika-Matemaatika Instituudi funktsiooniteooria osakonda ja oli sellel kohal kuni oma elu lõpuni. Luzini teaduslikud huvid olid sel ajal mitmekesised. Ta uuris diferentsiaalvõrrandite teooriat ning diferentsiaalgeomeetriat, kus sai mitmeid olulisi tulemusi. Ka matemaatika ajalugu huvitas Luzinit: ta avaldas mitmeid artikleid Newtoni, Euleri jt. matemaatikute kohta.

Luzin ei olnud oma eriala kitsas spetsialist. Lisaks matemaatikale tundis ta hästi füüsikat, loodusteadusi, ajalugu, huvitus elavalt vene kirjandusest, arhitektuurist, maalikunstist.

Elu viimastel aastatel segasid N. N. Luzini teaduslikku tööd südametegevusehäired. Siiski jätkas ta uuringuid, iseäranis diferentsiaalgeomeetria vallas. N. Luzin suri 28. veebruaril 1950. a.

Sügava mõtlejana, silmapaistva teadlasena ja pedagoogina, kes kasvatas üles terve plejaadi ülemaailmselt tunnustatud matemaatikuid, on Luzin jätnud kustumatu jälje nõukogude matemaatikasse.

75 AASTAT PROF. ALBERT BORKVELLI SÜNNIST

A. Vihman

Eesti silmapaistev matemaatikapedagoog professor Albert Aleksandri p. Borkvell sündis 19. jaanuaril 1890. a. Võsul meremehe pojana. Lapsepõlve veetis ta Võsul ja Loksal.

A. Borkvelli haridustee oli tüüpiline sajandite vahetuse eesti haritlase võitlustee kooliharidusele konarlikul ja aegaviitval rajal, kus peamisteks tõketeks olid ühtluskooli puudumine, koolide vähesus ja sageli ka majanduslik kitsikus. Ta õppis Loksa ministeeriumikoolis (1899—1904) ja Tartus Hugo Treffneri eragümnaasiumis (1906—1909). Et viimasel polnud «kroonukooli» õigusi, siis õiendas ta küpsuseksamid 1915. a. Tallinna Aleksandri gümnaasiumis. Samal aastal astus A. Borkvell Petrogradi ülikooli füüsika-matemaatikateaduskonda. Aastatel 1916 ja 1917 õppis ta ka Petrogradi sõjakoolides.

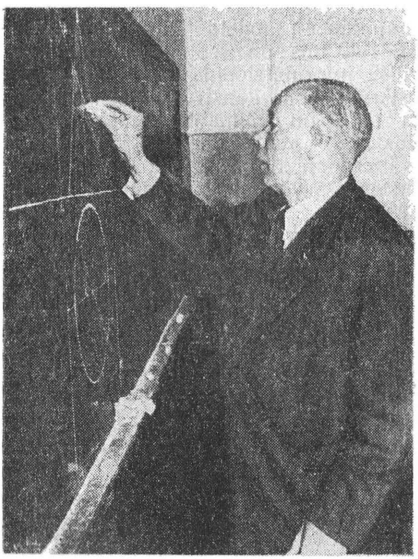
Esimese maailmasõja tõttu Petrogradi ülikoolis katkestatud matemaatika õppimist jätkas A. Borkvell 1920—1922. a. Tartu ülikooli matemaatika-loodusteaduskonnas, mille lõpeatamisel omistati talle 1922. a. töö «Binoomvõrrandi $z^n = 1$ algebraline lahendamine» eest magistri kraad. Aastatel 1924—1929 õppis A. Borkvell töö kõrval Tartu ülikooli õigusteaduskonnas, mille ka lõpetas.

Albert Borkvelli panuseks matemaatika alal oli ta töö pedagoogina ja õpikute autorina.

Aastatel 1909—1914 töötas ta koduõpetajana Tallinnas ja Petrogradis ja 1914—1917 lektorina meremehhaanikute kursusel Peterburis. Eestis on ta olnud lektoriks kõrgemas sõjakoolis (1922—1927), Narva I ühisgümnaasiumi inspektoriks (1927—1928) ja selle direktoriks (1928—1931), haridusministeeriumi koolivalitsuse abidirektoriks (1931—1936). 1923—1937 võttis ta osa Matemaatika Õpetamise Komisjoni tööst.

1936. a. asus A. Borkvell tööle sellal avatud Tallinna tehnikainstituudis matemaatika- ja mehhaanikalaboratooriumi dotsendi ametikohal.

1939. a. valiti ta erakorraliseks professoriks. Aastatel 1940—1941 oli A. Borkvell Tallinna Polütehnilise Instituudi matemaatka ja teoreetilise mehhaanika kateedri professoriks, hiljem ka selle juhatajaks. Peale Suurt Isamaasõda jätkas prof. A. Borkvell pedagoogilist tööd sama kateedri juures. 1946. a. atesteeriti A. Borkvelli magistrikraadi ümber füüsika-matemaatikakandidaadi kraadiks ning kinnitati professori kutse. Aastatel 1947—1952 töötas prof. A. Borkvell TPI statistika ja raamatupidamise kateedri juhataja kohustetäitjana.



1947. a. loodi Tallinna Õpetajate Instituut ning 1952. a. selle baasil Tallinna Pedagoogiline Instituut. Selle õppeasutuse matemaatika kateedri juhatajaks sai prof. A. Borkvell. Alates 1952. a. kuni pensionile siirdumiseni 1960. a. pühendas ta end täielikult tööle viimasel ametikohal. Prof. Albert Borkvell suri Tallinnas 14. juulil 1963. a.

Pärandina on prof. A. Borkvell meile jätnud mitukümmend üldhariduslike koolide, kutsekoolide ja kõrgemate koolide jaoks kirjutatud õpikut ja käsiraamatut.

A. Borkvelli õpikud keskkoolidele:

1. Matemaatilise analüüsi põhimõisted ja rakendused. Õpperaamat kesk- ja kutsekoolidele. Trt., 1927, 216 lk.;

2. Stereomeetria. Õpperaamat kesk- ja kutsekoolidele. Trt., 1927, 52 lk.;

3. Matemaatika, füüsika ja kosmograafia tabelid ja valemid keskkoolidele. Trt., 1927, 116 lk.;

4. Trigonomeetria. Õpperaamat kesk- ja kutsekoolidele. Trt., 1929, 128 lk.;

5. Analüütiline geomeetria. Õpperaamat keskkoolidele. Trt., 1931, 150 lk.;

kaasautorina (koos A. Kasvandi, F. Laarensi, K. Maasiku, O. Paasi ja A. Vihmaniga):

6. Keskkooli geomeetria. I—III. Trt., 1936; 2. tr. (I) Trt.—Tln. 1940; 3. tr. (I), Tln. 1940;

7. Keskkooli algebra. I—II. Trt., 1936—1937;

8. Keskkooli aritmeetika. Trt. 1936;

9. Kontrolltöid keskkoolidele. I—IV. Trt., 1936—1937;

kõrgematele koolidele:

1. Logaritmiline liineal. Trt., 1929, 64 lk.;

2. Tasapinnalise ja ruumilise analüütilise geomeetria põhijooni. Trt., 1937, 357 lk.;

3. Matemaatilise analüüsi põhijooni. Trt., 1939, 492 lk.;

4. Sfääriline trigonomeetria. Trt., 1940, 76 lk.;

5. Harilikud diferentsiaalvõrrandid. Trt., 1941, 263 lk.;

6. Analüütiline geomeetria. Trt., 1949, 573 lk.;

7. Arvutuslükati teooria ja käsitsemine. Tln., 1. tr. 1950, 136 lk.; 2. ümbertööt. ja täiend. tr. 1956, 159 lk.; 3. tr. 1963, 160 lk.;

8. Tõenäosusteooria põhijooni. Tln., 1958, 132 lk.;

9. Matemaatilise analüüsi kursus. I. Tln., 1958, 456 lk.; II. Tln., 1960, 480 lk.

«MINSK-2» — ESIMENE POOLJUHTIDEL ELEKTRONARVUTI VABARIIGIS

J. Pukk

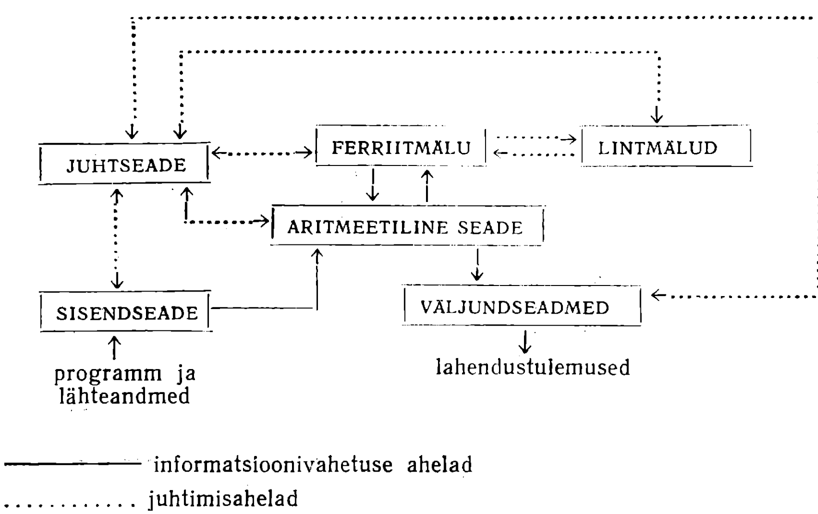
Üha suurenev arvutustööde maht teaduslike, tehniliste ja majandusprobleemide lahendamisel nõuab järjest täiuslikumat ja töökindlamat elektronarvutite parki. Käesoleva ajani töötas meie vabariigis kolm elektronarvutit — «Ural-1» ja «Ural-4» TRÜ arvutuskeskuses ja «M-3» TA Küberneetika Instituudis. Kõik need arvutid on ehitatud aga elektronlampidel, millel on piiratud töötamisaeg ja mis tarvitavad palju elektrienergiat. Seetõttu on nende arvutite ekspluateerimine tülikas ning ebakindel. Lamparvutid nõuavad igapäevast profülaktikat, mistõttu nende keskmine kasulik aeg (s. o. aeg, mille vältel arvutit saab kasutada arvutustöödeks) on umbes 18 tundi ööpäevas ehk 75%.

Viimastel aastatel on kogu maailmas suurt tähelepanu pööratud töökindlate pooljuhtelektronarvutite konstrueerimisele. Nõukogude Liidus toodetakse tööstuslikult mitut tüüpi pooljuhtarvuteid. Käesoleva aasta augustis sai ka TA Küberneetika Instituut pooljuhtarvuti, mis kannab nimetust «Minsk-2».

Suhteliselt suur tootlikkus, kõrge töökindlus, suur mäluseadmete maht, paindlik ja kiire andmete sisseviimine ja väljatoomine, liikuva koma režiim, arvuti väike gabariit ja eriliste nõuete puudumine ruumi suhtes, kuhu arvuti üles monteeritakse, teevad arvuti «Minsk-2» kasutamise mugavaks ja ökonoomseks. Kuna arvutis on ette nähtud alfabeetilise informatsiooni sisseviimine ja väljatoomine, siis on arvutil «Minsk-2» hea lahendada ka majandusülesandeid ning muid ülesandeid, mis on seotud tähelis-numbrilise informatsiooni töötlemisega.

Arvuti on konstrueeritud selliselt, et seda on võimalik komplekteerida vastavalt konkreetsetele vajadustele. Näiteks on küllaltki väikeste lisakulutustega võimalik muuta arvuti «Minsk-2» suureks informatsiooni ümbertöötlevaks süsteemiks, millel oleks võimalik rahuldada rahvamajandusnõukogu vajadused arvestus-, planeerimis- ja tootmise juhtimise tööde osas.

«Minsk-2» põhiseadmete koostööd võib kujutada järgmise lihtsustatud blokk-skeemiga:



Arvuti on 37-järguline, kasutab kahendsüsteemi. Arvusid võib esitada kas fikseeritud või liikuva komaga, kusjuures käske täidetakse loomulikus järjekorras. «Minsk-2» sooritab sekundis 5000—6000 tehet teaduslikel ja insenertehnilistel arvutustel (liikuv koma) ning umbes 10 000 tehet majandus- või loogikaülesannete (põhiliselt fikseeritud koma) lahendamisel. Seega on «Minsk-2» oma töökiiruselt võrdne arvutiga «Ural-4». Maha aga jääb ta viimasest sisend-väljundseadmete poolest.

Informatsiooni salvestamiseks kasutatakse ferriitmälu ja magnetlinte. Ferriitmälu võib salvestada 4096 37-kohalist kahendarvu, kusjuures mälu poole pöördumise kiirus on 24 μsek. On võimalik teise sama suure ferriitmälu juurdelülitamine. Lintmälusse on võimalik salvestada 400 000 37-kohalist arvu, kusjuures informatsiooni vahetamise kiirus arvutiga on 2000 arvu sekundis. Vastavalt vajadusele on võimalik juurde lülitada veel kuni 3 blokki lintmäluseadmeid ja saavutada seega lintmälu mahuks 1,6 miljonit arvu.

Sisendiks on fotoelektriline seade, mis kasutab nii spetsiaalses kui ka rahvusvahelises koodis perforeeritud linte. Sisendseadme töökiiruseks on 60—80 arvu sekundis.

Väljundseadmetena töötavad:

1) trükkimisseade, mille abil on võimalik trükkida vastuseid nii kaheksand- kui kümnendsüsteemis kiirusega 20 arvu sekundis;
2) perforaator nr. 1, mis perforeerib informatsiooni kümned-kahendsüsteemis, kaheksand-kahendsüsteemis ja telegraafikoodis;
3) perforaator nr. 2, mis annab informatsiooni välja telegraafikoodis.

Perforaatoritelt saadud lintide edasiseks töötlemiseks võib kasutada telegraafiaparaate, mis trükivad välja informatsiooni tabelite või muul etteantud kujul. Perforaatorid töötavad kiirusega 20 tähte või numbrit sekundis.

Üheaegselt võivad töötada kas trükkimisseade ja perforaator nr. 2 või mõlemad perforaatorid. Väljundseadmete töötamisel arvuti töö ei lakka. Näiteks on üheaegselt võimalik lahendada üht ülesannet ja trükkida varem lahendatud ülesande vastuseid.

Arvuti kõigi seadmete valmistamiseks on kasutatud pooljuhtdioode ja -trioode, sealjuures trioode on arvutis 7200 tk., dioode 17500 tk.

Arvuti tarvitab tunnis kuni 4 kVA elektrienergiat, töötades 220 V võrgupingel. Normaalseks ekspluatatsiooniks vajaliku ruumi pindala on 40—50 m².

Nagu eespool mainitud on arvutit võimalik täiustada, lisades juurde ühe ferriitmälu ja 3 lintmälu blokki. Peale selle on võimalik arvutiga ühendada perfokaart-sisend ja 128-järguline laitrükkimisseade.

Arvuti ülesseadmiseks ja häälestamiseks kulus TA Küberneetika Instituudis kaks nädalat ja alates 24. aug. on arvuti ekspluatatsioonis. Esimese kahe kuu andmete järgi on arvuti kasulik tööaeg 95—98%, kusjuures põhilisteks seniavastatud vigadeks on kontaktivead.

Uue töökindla pooljuhtarvuti ekspluatatsiooniandmine võimaldab meie vabariigi teadlastel, inseneridel ja majandusmeestel teostada suuremahulisi arvutustöid. Asjast huvitatud võivad pöörduda TA Küberneetika Instituudi poole, kus alati hea meelega tutvustatakse nii arvutit kui tema kasutamisvõimalusi.

MULJEID TEADUSLIKELT KONVERENTSIDELT

Ü. Lumiste

Mitmes meie maa ülikoolis algas 1964. aasta sügissemester matemaatikaalase teadusliku konverentsiga. Kahest neist võtsid osa ka Tartu matemaatikud.

Tomski ülikool korraldas 8.—13. septembrini III Siberi kõrgemate koolide vahelise matemaatika ja mehhaanika konverentsi. Osavõtjaid oli mitte ainult Siberi, vaid ka NSVL Euroopa-osa linnadest — äärmisteks olid ühelt poolt Vladivostok, teiselt poolt Vilnius ja Tartu. Eesti matemaatikuid esindas allakirjutanu, kes esines kahe ettekandega geomeetria sektsioonis ning tutvus õppe- ja teadusliku töö korraldusega matemaatika alal Tomski ülikoolis. Suurepäraselt organiseeritud konverents haaras oma 9 sektsiooniga kõiki Siberi kõrgemates koolides viljeldavaid matemaatika- ja mehhaanikaharusid (funktsiooniteooria, diferentsiaalvõrrandid, geomeetria, algebra, arvutusmatemaatika ja küberneetika, teoreetiline mehhaanika, elastsuse ja plastilisuse teooria, teoreetiline astronoomia ja geodeesia, matemaatika õpetamise metoodika).

Huvipakkuv oli tutvumine linnaga ja selle ümbrusega. Tomsk on tüüpiline ülikoolilinn, vahest suuremalgi määral kui Tartu. Umbkaudu 250 tuhande elanikuga linnas töötab 7 kõrgemat õppeasutust, peale selle mitmeid uurimisinstituute, iga viies elanik on üliõpilane. Ülikool, üks vanemaid NSV Liidus ja esimene Siberis, on asutatud 1888. aastal. Suure austusega meenutatakse seal Tartu ülikooli kasvandikku T. Molieni, kes 1900. aastal siirdus Tomskisse ja pani seal aluse Siberi matemaatikute kollektiivi kujunemisele. Tema portree ripub aukohal ülikooli algebra kateedris.

Meeldejääv oli kõndida ühtse massiivina tundrateni ulatuva taiga serval, korjata maitsvaid seemneid sisaldavaid käbisid põlises seedrimetsas, ujuda karges Siberi jões.

Tagasiteel oli võimalus tutvuda NSVL Teaduste Akadeemia Siberi osakonna Novosibirski teadusliku keskusega («akadeemilise linnakesega»). Ehitatud viimase seitsme aasta jooksul Obi mere kalda männimetsa, moodustab praegu meie maal ainulaadse teaduslike instituutide kompleksi, milles üheks keskseks on Matemaatika Instituut oma arvukate sektoritega.

17.—23. septembrini toimus Harkovi ülikoolis **II Üleliiduline** geomeetria konverents. Tartu matemaatikuist võtsid sellest osa allakirjutanu, värsked füüsika-matemaatikakandidaadid R. Mullari ja M. Rahula ning üliõpilased R. Kolde ja A. Parring (viimased ühendasid osavõtu konverentsist turismiga, kasutades Harkovisse jõudmiseks «Autostoppi»).

Konverentsil toimunud ettekanded andsid täieliku ülevaate geomeetria arengust NSV Liidus viimase kahe aasta jooksul, mis on möödunud eelmisest konverentsist Kiievis 1962. a. suvel. Suurt edu on saavutanud mitteregulaarsete pindade teooria uurijad eesotsas akad. A. D. Aleksandrovi, prof. A. V. Pogorelovi ja prof. N. V. Jefimoviga. Meie silmade all on sündimas üldiste (mitteregulaarsete) sadulpindade teooria. (Üldiseks sadulpinnaks nimetatakse pinda, millest ei saa tasandiga ära lõigata ühtegi kumerat «mütsi»; nad on vastandiks kumeratele pindadele, millede teooria on juba üsna kaugele arenenud). Viljakalt on diferentsiaalgeomeetria ja Lie' rühmade teooria meetodeid kasutatud aeg-ruumi ja gravitatsiooni teooria probleemide uurimisel. Nii on näiteks Kaasanis prof. A. Z. Petrovi juhendamisel lõpule viidud Einsteini ruumide klassifitseerimine liikumiste rühmade järgi, mis täiendab laia tunnustuse võitnud Petrovi klassifikatsiooni. Edukalt on arenenud Riemanni ja üldistatud ruumide teooria, seostuste, diferentsiaalvõrrandisüsteemide geomeetrilise teooria jms. uurimine Moskva koolkonnas, mida juhivad prof. P. K. Raševski ja prof. G. F. Laptev. Mainitu kõrval oli konverentsil juttu geomeetria rakendustest variatsioonarvutuses, mehhaanikas, tehnikas (kujutav geomeetria ja nomograafia) jm. Konverentsi programmi olid lülitatud ka allakirjutanu ning R. Mullari, M. Rahula ja L. Tuulmetsa ettekanded.

Vaba aega kasutasid konverentsi külalised tutvumiseks Harkovi vaatamisväärsustega, jalutuskäikudeks linna avarates parkides ning, mis kõige tähtsam, erialalisteks vestlusteks ja isiklike kontaktide süvendamiseks. Uuesti otsustati koguneda 1967. a. Kaasanis.

Kroonika

VABARIIGI NOORIM

Käesoleval õppeaastal avati arvutus-matemaatikute-programmeerijate ettevalmistuseks vastav klass Nõo keskkooli juures, mis on vabariigis noorimaks selletaoliseks. Varem töötas selliseid klasse kaks: üks Tartus ja teine Tallinnas. Kui mõnigi skeptik arvas, et uue klassi komplekteerimine maakeskkooli juurde ei anna tulemusi, siis on ta eksinud. Soovijaid oli palju rohkem, kui oli võimalik vastu võtta. See on ka täiesti arusaadav, sest Tallinnas ja Tartus puuduvad koolidel internaadid, kuid matemaatikahuvilisi õpilasi leidub üle vabariigi kõigis koolides.

24. juuni hommikuks kogunes Nõo keskkooli 62 õpilast vabariigi 44 kesk- ja kaheksaklassilisest koolist, kaasas vajalikud dokumendid ja hea tahe. 8 tundi kuulas komisjon õpilaste vastuseid ja otsustas vastu võtta 36 õpilast vabariigi 28 eri koolist. Õpilaste teadmised olid enamuses head, oli näha, et nad olid tõsiselt ette valmistunud. Ainult paaril juhul jäi mulje, et oli tuldud õnne katsuma ja sedagi klassikaaslaste õhutusel. Rajoonidest domineeris Pärnu, koolidest Türi keskkool. Vastuvõetud õpilaste dokumente sirvides ilmnes, et ka sissesaajate hulgas oli kõige rohkem Pärnu rajoonist — 10, Türi keskkoolist 3, Viljandi IV 8-kl. koolist 3 ja Virula 8-kl. koolist 3, mujalt juba vähem. Nimetatud koolide matemaatikaõpetajatele tuleb öelda suur tänu selle eest, et nad on suutnud õpilastes kasvatada armastust matemaatika vastu ja andnud neile kindlaid teadmisi.

Mingisuguste kokkuvõtete tegemine paarikuuse tööaja järgi on loomulikult veel varavõitu; ühte aga võib kindlalt öelda: töötahe on kõigil suur.

O. Karu

METOODIKA-ALANE SEMINAR TARTU RIIKLIKUS ÜLIKOOLIS.

Käesoleval õppeaastal jätkab oma tööd Tartu Riikliku Ülikooli teoreetilise mehhaanika kateedri juures olev matemaatika metoodika seminar. See on juba seminari viies tööaasta. Alljärgnevas püüame anda lühikese ülevaate seminari tööst.

Seminari töökoosolekutest osavõtjateks on enamasti vabariigi matemaatikaõpetajad, ja just neile ongi see seminar eeskätt määratud. Seega seminari üheks eesmärgiks on õpetajate silmaringi laiendamine ning teadmiste taseme tõstmine oma erialal. Kuid see pole kõik. Teise tähtsa osa seminari tööst moodustab kogemuste vahetamine ning vabariigi koolides matemaatika õpetamisega seoses olevate küsimuste läbiarutamine. Nimetatud seminari kaudu saab ka haridusministeeriumi matemaatika ainekomisjon, mille esimeheks on seminari juhataja teoreetilise mehhaanika kateedri dotsent O. Prinits, pidada paremat kontakti vabariigi matemaatikaõpetajatega. Metoodika-alane seminar nagu jätkaks, kuigi väiksemas ulatuses, matemaatikute ja füüsikute teaduslik-pedagoogilise konverentsi tööd matemaatika alal konverentside vaheaegadel.

Parema ülevaate saamiseks nimetatud töölõikudest toome ära mõnede eelmise aasta seminaride ettekannete teemad:

B. Henrichson, Eksponentfunktsiooni graafik arvutusvahendina (1959).

G. Rägo, Tähtsamaid probleeme matemaatika õpetamise alalt uues töökeskkoolis (1959).

E. Etverk, Keskkooli II astme matemaatika programmist (1960).

J. Depman, Klassivälisest tööst ja ateistlikust kasvatusest matemaatika õpetamisel (1960).

Ü. Lumiste, Geomeetria aksiomaatilise käsitlemise võimalustest keskkoolis (1960).

L. Tanimäe, Matemaatika ja füüsika õpetamise lähendamisest (1960).

O. Prinits, Tuletise ja integraali mõistete käsitlemise tulemustest keskkoolis (1961).

M. Ross, Propedeutilise geomeetria kursuse koht koolimatemaatikas (1961).

A. Telgmaa, Arvutuslükati käsitlemisest 8-klassilises koolis (1961).

O. Prinits, Matemaatika-alasest klassi- ja koolivälisest tööst (1962).

E. Tamme, Vastuvõtueksamite tulemustest Eesti NSV kõrgemates koolides 1962. a. (1962).

O. Kärner, Ratsionaalarvude käsitlemisest VI klassis (1963).

E. Noor, Fusioonist matemaatika õpetamisel (1963).

Käesoleval õppeaastal on peetud juba kaks ettekannet:

J. Reimand, Transpordiülesannete lahendamise võimalusest keskkoolis,

I. Unt, Õppetöö individualiseerimise probleemist.

Peale selle on käsitletud ENSV kõrgemate koolide 1964. a. vastuvõtueksamite tulemusi (J. Reimand, A. Kass ja L. Meijel).

Järgnevates seminarides kavatsetakse vahetada mõtteid küsimuste üle, mis on seotud jätkuva koolireformiga. Iga seminarist osavõtja on teretulnud, olgu siis kas aktiivse kuulajana või ettekande esitajana.

Teated seminari aja, koha ja päevakorra kohta saadetakse kohalikesse haridusosakondadesse koolidele teatamiseks.

K. Velsker

TOIMUB JÄRJEKORDNE TÄPPISTEADUSTEALANE KONVERENTS

ENSV TA Loodusuurijate Selts, Tartu Riiklik Ülikool ja ENSV Haridusministeerium korraldavad 7.—9. maini 1965. a. Tartus III teaduslik-pedagoogilise konverentsi «**Täppisteaduste arengu ja metoodika põhiküsimusi Eesti NSV-s**», mis on pühendatud ENSV 25. aastapäevale. Konverentsi ettekannetes käsitletakse esmajoones järgmisi küsimusi:

1) ülevaated ulatuslikumatest töödest ja uurimissuundadest täppisteaduste alal ENSV-s;
2) perspektiivsetest töödest ja suundadest täppisteaduste alal ENSV-s;
3) mittetäppisteadlaste füüsika- ja matemaatika-alasest ettevalmistusest;
4) kaadri ettevalmistusest täppisteaduste alal;
5) õppetööst täppisteaduste alal alg- ja keskkoolides ning kesk-eriõppeasutustes;
6) programmeeritud õpetamine.

Organiseerimiskomitee loodab, et konverentsil toimub ulatuslik mõttevahetus täppisteaduste arengu probleemide üle meie vabariigis. Peale nimetatud probleemide on konverentsil otstarbekohane avaldada arvamusi veel teisteski olulistes küsimustes, nagu näiteks teaduslike uurimistööde koordineerimine, vastava-alase kirjanduse väljaandmine, ENSV füüsikute ja matemaatikute organisatsiooni loomine jne.

Konverentsi ettekannete lühikokkuvõtted antakse välja omaette kogumikuna.

Konverentsi ajal korraldatakse ka ekskursioone: Tõravere observatooriumi, TRÜ arvutuskeskusesse ja mujale.

Konverentsiga seotud küsimustes pöörduda organiseerimiskomitee poole aadressil: TRÜ, V. Kingissepa 16, arvutusmatemaatika kateeder.

Bibliograafia

Eesti NSV-s ilmunud matemaatika-alase kirjanduse nimestik

September—oktoober 1964

(Koostanud E. Annus)

RAAMATUD

Allik, K. ja Teeäär, M. **Programm, metoodilised juhendid ja kontrolltööde ülesanded kõrgemas matemaatikas kaugõppeteaduskonna II kursuse üliõpilastele.** Tln., 1964. 48. lk. (Tallinna Polütehniline Instituut.) — Trükitud rotaprindil 1000 eks.

Kujutav geomeetria. Harjutusülesanded. Tln., 1964. 59 lk. (Tallinna Polütehniline Instituut.) — Pealk. ees autorid: M. Kraaving, N. Paluveer, O. Rünk, E. Vallas. — Trükitud rotaprindil 2500 eks.

Liin, L., Tammi, J. ja Loonde, J. **Kõrgem matemaatika.** Programm, metoodilised juhendid ja kontrolltööde ülesanded kaugõppeteaduskonna I kursuse üliõpilastele. Tln., 1964. 72 lk. (Tallinna Polütehniline Instituut.) — Trükitud rotaprindil 1200 eks.

Metoodilised juhendid kujutava geomeetria alal TPI kaugõppeteaduskonna kõikide erialade üliõpilastele. Tln., 1964. 11 lk. (Tallinna Polütehniline Instituut.) — Trükitud rotaprindil 500 eks. — Sama ka vene keeles.

Vihman, A. **Arvutuslükatil arvutamise õpetus algajatele.** Tln., ERK, 1964. 68 lk.

Matemaatika ja kaasaeg. Abimaterjale matemaatika õpetajatele ja õppijatele. III. Trt., 1964. 96 lk. (Tartu Riiklik Ülikool.)

Sisu: J. Gabovitš. Opereerimine hulkadega. — A. Tauts. Matemaatilise loogika rakendusi. — J. M. Gaiduk. Kui matemaatik teid ninapidi veab... — E. Tamme. Norbert Wiener (1894—1964). — A. A. Ljapunov ja E. V. Jablonski. Küberneetika teoreetilisi probleeme. — Ü. Ennuste. Maatriksite teooria majandusteaduses. — I. Kull. Transport ja matemaatika. — H. Espenberg. Pythagorase teoreemist. — O. Prinits. Matemaatika õpetamise reformitaotlusi Ameerika Ühendriikides. — Üleliidulise matemaatikaolümpiaadi ülesanded. — L. Võhandu. Vanemast eestikeelsest matemaatilisest kirjandusest. — H. Epler. Prof. Jaan Sarve elust ja tegevusest. — Ü. Kaasik. V. M. Gluškov — Lenini preemia laureaat. — J. Gabovitš. A. J. Maltsev — Lenini preemia laureaat. — K. Ariva ja M. Rahula. Esimene eestikeelne diferentsiaalgeomeetria õpik. (Lumiste, Ü. Diferentsiaalgeomeetria, 1963.) — Ü. Kaasik. Mõtteid ühe artikli lugemisel. (Rünk, O. Arutlusi pöördteoreemi mõiste ümber.) — S. Ulm. Ülevaade Tallinna matemaatikaseminari tööst aastail 1958 — 1964. — Ü. Kaasik. Dotsent J. Gabovitš 50-aastane. Õpetaja A. Lehis 65-aastane. — Uusi teaduste kandidaate (G. Vainikko ja M. Rahula). — K. Velsker. Üleliiduline matemaatikaolümpiaad. — E. Annus. Eesti NSV-s ilmunud matemaatika-alase kirjanduse nimestik Jaanuar—aprill 1964. — Ülesandeid.

PERIOODIKAS ILMUNUD ARTIKLID

Eesti NSV Teaduste Akadeemia Toimetised. Füüsika-matemaatika ja tehnikateaduste seeria. Tln., 1964.

Nr. 3. Matemaatika-alased artiklid (vene k., resümeed eesti ja inglise k.):

Ü. Lumiste. Vahelseisu mudelitest. — L. Tuulmets. Minimaalkongruentsi V_3 painutamine ruumis R_4 — S. Ulm. Majorantide printsiip ja kõõlude meetod.

* *

Eero, A. Aritmeetika ülesannete lahendamisest 1. ja 2. klassis. — «Nõukogude Kool», 1964, nr. 9, lk. 705—711.

Undusk, A. Matemaatika õpetamise seostamisest eluga. — «Nõukogude Kool», 1964, nr. 10, lk. 761—766.

Ülesandeid

A. Ülesandeid elementaarmatemaatikast

1. Võrdhaarse kolmnurga alus on a ja kõrgus h. Leida ringjoone raadius r, mis puutub kolmnurga haarasid ning mille keskpunkt on kolmnurga aluse keskpunktis.

2. Tõestada: kui $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$, siis

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma + \cos 2\delta =$$
$$= 4(\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos\delta - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\sin\delta).$$

3. Asendage alljärgnevas liitmistehtes tähed numbritega (erinevatele tähtedele vastavad erinevad numbrid):

$$\begin{array}{r} N\,E\,W\,T\,O\,N \\ +\quad K\,L\,E\,I\,N \\ \hline K\,E\,P\,L\,E\,R \end{array}$$

4. Tõestada, et $n > 4$ puhul $n^2 - 3n$ ei ole täisruut.

B. Ülesandeid kõrgemast matemaatikast

1. Võrdkülgsed kolmnurgad külje pikkusega 1, 3, 5, 7, . . . on paigutatud nii, et nende alused asuvad järjestikku (ilma vahedeta) antud sirgel ning tipud asuvad sellest sirgest ühel ja samal pool. Tõestada, et kolmnurkade tipud asuvad paraboolil, kusjuures nende kaugused parabooli fookusest väljenduvad täisarvudena.

2. Lahendada diferentsiaalvõrrand

$$x^2(1-x)y'' + 2x(2-x)y' + 2(1+x)y = x^2.$$

KOGUMIKU KOLMANDA VIHIKU ÜLESANNETE LAHENDUSED

A. Elementaarmatemaatika

Ülesande nr. 1 lahendus. Kümnest suurem algarv on kas kujuga $6n+1$ või $6n-1$. Kui progressiooni liikmed on $a_1 = 6n_1 \pm 1$, $a_2 = 6n_2 \pm 1$, $a_3 = 6n_3 \pm 1$, siis progressiooni vahe d jagub kuuega, sest

$$d = 6(n_2 - n_1).$$

Juht $a_1 = 6a - 1$, $a_2 = 6b + 1$ ei saa esineda, sest siis

$$d = 6b - 6a + 2 \text{ ning}$$
$$a_3 = a_2 + d = 3(4b - 2a + 1)$$

pole algarv. Samuti saame veenduda, et ka $a_1 = 6a + 1$; $a_2 = 6b - 1$ puhul on a_3 kordarv.

Ülesande nr. 2 lahendus. Olgu võrrandi $x^2+Ax+B=0$ lahendid a ja b ning võrrandi $x^2+Cx+D=0$ lahendid c ja d. Vieta teoreemi põhjal saame võrrandile

$$x^2+\frac{A+C}{2}x+\frac{B+D}{2}=0$$

anda kuju

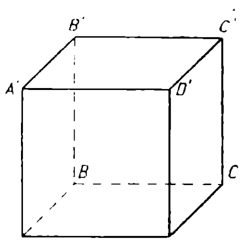
$$2x^2-(a+b+c+d)x+ab+cd=0$$

ehk

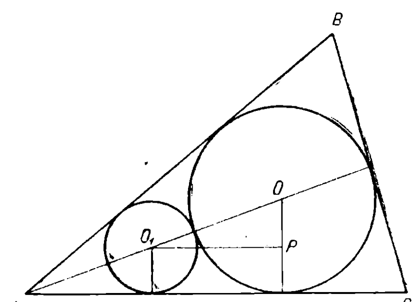
$$(x-a)(x-b)+(x-c)(x-d)=0.$$

Nüüd on kerge veenduda, et selle võrrandi lahendid ei saa olla suuremad kui 1 ja väiksemad kui -1. Kui $x>1$ või $x<-1$, siis on viimase võrrandi vasak pool positiivne.

Ülesande nr. 3 lahendus. Kuubi $ABCDA'B'C'D'$ lõikamisel tasandiga $AB'D'$ saame lõikeks võrdkülgse kolmnurga. Lõigates kuupi põhjaga paralleelse tasandiga saame lõikeks ruudu ning lõigates kuupi tasandiga $AB'D'$ paralleelse tasandiga, mis läbib serva $B'C'$ keskpunkti, saame lõikeks korrapärase kuusnurga. Korrapärast viisnurka pole võimalik lõikena saada, kuna igal viisnurgal, mis tekib kuubi lõikamisel tasandiga, on kaks paari paralleelseid külgi.



Joonis ülesande nr. 3 juurde



Joonis ülesande nr. 4 juurde

Ülesande nr. 4 lahendus. Olgu siseringjoone raadius r. Kolmnurgast O_1OP saame

$$r-r_1=(r+r_1)\sin\frac{\alpha}{2},$$

millest

$$r_1=r\frac{1-\sin\frac{\alpha}{2}}{1+\sin\frac{\alpha}{2}}=r\frac{1-\cos\frac{\pi-\alpha}{2}}{1+\cos\frac{\pi-\alpha}{2}}=r\tan^2\frac{\pi-\alpha}{4}.$$

Analoogiliselt leiame, et

$$r_2=r\tan^2\frac{\pi-\beta}{4},\qquad r_3=r\tan^2\frac{\pi-\gamma}{4}.$$

Seega

$$\sqrt{r_1r_2}+\sqrt{r_1r_3}+\sqrt{r_2r_3}=r\left(\tan\frac{\pi-\alpha}{4}\cdot\tan\frac{\pi-\beta}{4}+\tan\frac{\pi-\alpha}{4}\cdot\tan\frac{\pi-\gamma}{4}+\right.$$
$$\left.+\tan\frac{\pi-\beta}{4}\cdot\tan\frac{\pi-\gamma}{4}\right).$$

Tuginedes teoreemile, et

$$\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3=\frac{\pi}{2}\text{ puhul }\tan\varphi_1\tan\varphi_2+\tan\varphi_1\tan\varphi_3+\tan\varphi_2\tan\varphi_3=1,$$

saame

$$r=\sqrt{r_1r_2}+\sqrt{r_1r_3}+\sqrt{r_2r_3}.$$

B. Kõrgem matemaatika

Ülesande nr. 1 lahendus. Kompleksarvud $99-5i$, $21+i$ ja $239-i$ saab lahutada teguriteks järgmiselt:

$$\left.\begin{aligned}99-5i&=(1-i)(4+i)^3,\\21+i&=(1-i)(4+i)(3+2i),\\239-i&=(-1-i)(3+2i)^4.\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

Kompleksarvude $4+i$ ja $3+2i$ argumendid on vastavalt $\alpha=\operatorname{arc}\tan\frac{1}{4}$, $\beta=\operatorname{arc}\tan\frac{2}{3}$. Kompleksarvude $1-i$ ja $-1-i$ argumendid on vastavalt $-\frac{\pi}{4}$ ja $-\frac{3\pi}{4}$. Et võrduste (1) mõlemate poolte argumendid on võrdsed, siis saame

$$3\alpha-\frac{\pi}{4}=-\operatorname{arc}\tan\frac{5}{99}=-\operatorname{arc}\cot 19{,}8,$$

$$\alpha+\beta-\frac{\pi}{4}=\operatorname{arc}\tan\frac{1}{21}=\operatorname{arc}\cot 21,$$

$$4\beta-\frac{3\pi}{5}=-\operatorname{arc}\tan\frac{1}{239}=-\operatorname{arc}\cot 239.$$

Avaldades esimesest ja kolmandast võrdusest α ja β ning asendades nad teise võrrandisse, saamegi

$$16\operatorname{arc}\cot 19{,}8+48\operatorname{arc}\cot 21+12\operatorname{arc}\cot 239=\pi.$$

Ülesande nr. 2 lahendus. Antud fokaalkõõlud asuvad sirgetel

$$y=k_1(x+c)\text{ ja }y=k_2(x-c).$$

Määrates nende fokaalkõõlude otspunktid, leiame nendele fokaalkõõludele vastavad vektorid $\bar{a}$ ja $\bar{b}$. Saame

$$\bar{a}=\left(\frac{2ab^2\sqrt{1+k_1^2}}{a^2k_1^2+b^2},\ \frac{2ab^2k_1\sqrt{1+k_1^2}}{a^2k_1^2+b^2}\right),$$

$$\bar{b}=\left(\frac{2ab^2\sqrt{1+k_2^2}}{a^2k_2^2+b^2},\ \frac{2ab^2k_2\sqrt{1+k_2^2}}{a^2k_2^2+b^2}\right).$$

Seega otsitav pindala

$$S = \frac{1}{2} |\bar{a} \times \bar{b}| = 2a^2b^4 \sqrt{(1 + k_1^2)(1 + k_2^2)} \frac{|k_1 - k_2|}{(a^2k_1^2 + b^2)(a^2k_2^2 + b^2)}.$$

Ülesande nr. 3 lahendus. Olgu ruudukujulise papitüki külje pikkus a ja temast valmistatava karbi külgtahu kõrgus x. Siis on karbi kõrgus

$$h = x \sin 60^\circ = \frac{x\sqrt{3}}{2},$$

alumise serva pikkus $a - 2x$ ning ülemise serva pikkus

$$a - 2x + 2x \cos 60^\circ = a - x.$$

Karbi ruumala on

$$V = \frac{1}{3} \frac{x\sqrt{3}}{2} (3a^2 - 9ax + 7x^2).$$

V' võrrutamisel nulliga saame

$$7x^2 - 6ax + a^2 = 0,$$

millest

$$x = \frac{a}{3 \pm \sqrt{2}}.$$

Ülesande tingimusi rahuldab

$$x = \frac{a}{3 + \sqrt{2}}.$$

Ülesande nr. 4 lahendus. Arvu täisosa sümbolit [ ] kasutades võib lihtsalt üles kirjutada esinevate jadade üldliikmed (n-ndad liikmed):

jada $H_3(N)$ üldliige on $n + \left[\frac{n-1}{2}\right]$,

jada $S(H_3(N))$ üldliige on $n^2 - \left[\frac{n}{2}\right] \cdot \left[\frac{n+1}{2}\right]$,

jada $H_2(S(H_3(N)))$ üldliige on $3n^2 - 3n + 1$,

jada $S(H_2(S(H_3(N))))$ üldliige on n^3.

Analoogiliselt saame teisel juhul:

jada $H_4(N)$ üldliige on $n + \left[\frac{n-1}{3}\right]$,

jada $S(H_4(N))$ üldliige on $n^2 - \left[\frac{n}{3}\right] \cdot \left[\frac{n+1}{3}\right] - \left[\frac{n}{3}\right] \cdot \left[\frac{n+2}{3}\right] -$

$$- \left[\frac{n+1}{3}\right] \cdot \left[\frac{n+2}{3}\right],$$

jada $H_3(S(H_4(N)))$ üldliige on $n^2 - n + 1 + 2\left[\frac{n-1}{2}\right] \cdot \left[\frac{n+1}{2}\right]$,

jada $S(H_3(S(H_4(N))))$ üldliige on $n^3 - 2n\left[\frac{n}{2}\right] \cdot \left[\frac{n+1}{2}\right]$,

jada $H_2(S(H_3(S(H_4(N)))))$ üldliige on $4n^3 - 6n^2 + 4n - 1$,

jada $S(H_2(S(H_3(S(H_4(N))))))$ üldliige on n^4.

RAHVUSVAHELISTE MATEMAATIKAOLÜMPIAADIDE ÜLESANNETE LAHENDUSI.

Kogumiku «Matemaatika ja Kaasaeg» teises vihikus avaldati rahvusvahelistel koolinoorte matemaatikaolümpiaadidel lahendamiseks antud ülesanded. Lugejaskonna soove arvestades alustame käesolevaga ka nende ülesannete lahenduste avaldamist.

I olümpiaad.

Ülesanne nr. 1. Tõestada, et murdu $\frac{21n+4}{14n+3}$ ei saa taandada ühegi naturaalarvu n korral.

Lahendus. Kasutades teisendusi

$$\frac{21n+4}{14n+3}=1+\frac{7n+1}{14n+3}=1\frac{1}{2}-\frac{1}{2(14n+3)}$$

saame murru, mille lugejal ja nimetajal pole ühiseid tegureid. Ülesannet võib lahendada ka Eukleidese algoritmi abil.

Ülesanne nr. 2. Leida, milliste x-i reaalarvuliste väärtuste korral kehtivad võrdused

$$\text{a) } \sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=\sqrt{2},$$

$$\text{b) } \sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=1,$$

$$\text{c) } \sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=2,$$

kusjuures juurtele omistatakse ainult positiivne tähendus.

Lahendus. Ülesandes esinevate võrduste vasak pool on reaalarvulise väärtusega, kui $x\geqslant\frac{1}{2}$, sest siis $2x-1\geqslant 0$ ning $x\pm\sqrt{2x-1}\geqslant 0$. Võrdusi rahuldavate x-i väärtuste leidmiseks tõstame nende mõlemad pooled ruutu. Kuna

$$\left(\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}\right)^2=x+\sqrt{2x-1}+$$
$$+2\sqrt{(x+\sqrt{2x-1})(x-\sqrt{2x-1})}+x-\sqrt{2x-1}=$$
$$=2x+2\sqrt{x^2-2x+1}=2x+2|x-1|,$$

siis taandub ülesanne järgnevale:
milliste x-i väärtuste korral

a) $x+|x-1|=1,$

b) $x+|x-1|=\frac{1}{2},$

c) $x+|x-1|=2.$

Kuna $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$ puhul $x+|x-1|=x+1-x=1$ ja $1<x<\infty$ puhul $x+|x-1|=x+x-1=2x-1$, siis

a) kehtib, kui $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$, b) ei kehti ühegi x-i väärtuse korral, c) kehtib, kui $x=\frac{3}{2}$.

Ülesanne nr. 3. On antud võrrand $\cos x$ suhtes:

$$a \cdot \cos^2 x + b \cdot \cos x + c = 0,$$

kus a, b ja c on mingid reaalarvud. Koostada a, b ja c abil ruutvõrrand, mille lahenditeks on $\cos 2x$ vastavad väärtused.

Võrrelda antud ja koostatud võrrandit juhul, kui $a = 4$, $b = 2$ ja $c = -1$.

Lahendus. Antud võrrandi teisendame kujule

$$a \cdot \cos^2 x + c = -b \cos x.$$

Tõstame nüüd võrrandi mõlemad pooled ruutu, korrutame 4-ga ja kanname kõik liikmed ühele poole:

$$4a^2 \cos^4 x + (4ac - 2b^2) 2 \cos^2 x + 4c^2 = 0.$$

Kasutades seost $2\cos^2 x = \cos 2x + 1$ teiseneb võrrand nõutud kujule

$$a^2 \cos^2 2x + (2a^2 + 4ac - 2b^2) \cos 2x + (a^2 + 4ac - 2b^2 + 4c^2) = 0.$$

Juhul, kui $a = 4$, $b = 2$ ja $c = -1$, saame võrrandiks

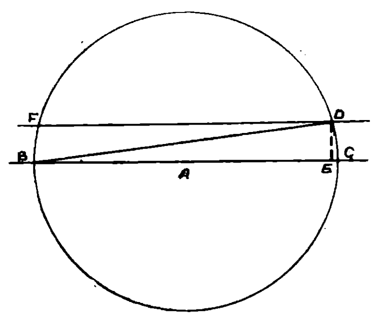
$$4 \cos^2 2x + 2 \cos 2x - 1 = 0,$$

mille kordajad on võrdsed antud võrrandi kordajatega, kui ka seal võtta $a = 4$, $b = 2$ ja $c = -1$.

Ülesanne nr. 4. Konstrueerida täisnurkne kolmnurk, kui on antud hüpotenuus c ja kui on teada, et hüpotenuusile tõmmatud mediaan on kaatetite geomeetriline keskmine.

Lahendus. a) Konstruktsioon. Punkti A ümber joonestame ringjoone raadiusega $\frac{c}{2}$ (joon. 1). Edasi joonestame diameetri, mille lõikepunkte ringjoonega tähistame B ja C ning paralleeli BC-le kaugusel $\frac{c}{4}$. See lõikab ringjoont punktides F ja D. Punkti D ühendame B ja C-ga ja ongi saadud nõutud kolmnurk BCD.

b) Tõestus. Kolmnurga BDC pindala $S = \frac{1}{2} BC \cdot DE = \frac{1}{2} \cdot c \cdot \frac{c}{4} = \frac{1}{8} c^2$.



Joonis 1.

Seega ka $\frac{BD \cdot DC}{2} = \frac{1}{8} c^2$. Kuna $AD^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} c^2$, siis $BD \cdot DC = AD^2$, m.o.t.t.

Ülesanne nr. 5. Tasandil on antud lõik AB ja sellel üks seesmine suvaline punkt M. Lõikudele AM ja BM kui külgedele on konstrueeritud ruudud $AMCD$ ja $MBEF$ sirgest AB ühele ja samale poole. Nende ruutude ümber joonestatud ringjooned, mille keskpunktideks on vastavalt P ja Q, lõikuvad peale punkti M veel mingis punktis N. Niisuguse konstruktsiooni puhul:

a) tõestada, et sirged AF ja BC läbivad punkti N;

b) tõestada, et sirge MN läbib tasandil üht kindlat punkti S, mis ei sõltu M asendist lõigul AB;

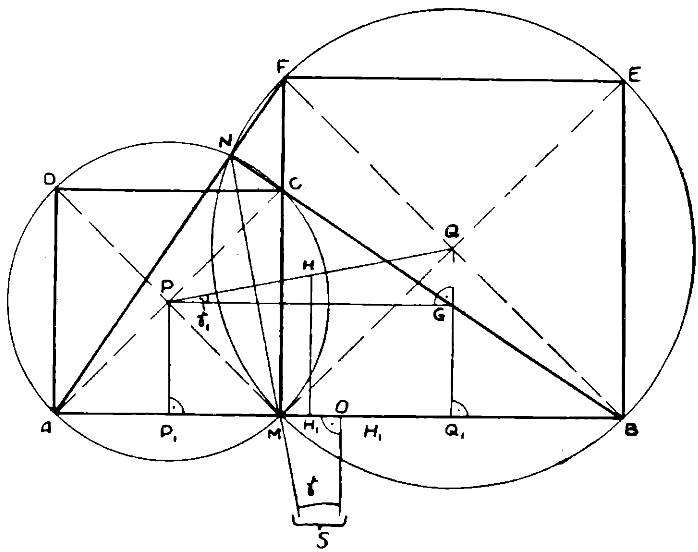
c) leida ruutude keskpunkte ühendava lõigu PQ keskpunkti geomeetriline koht, kui M asukoht lõigul AB muutub.

Lahendus. a) Sirge AF läbib punkti N, kui $\angle ANF = 180°$. Tõepoolest, $\angle ANF = \angle ANM + \angle MNF = \angle ADM + (180° - \angle MEF) = 45° + 135° = 180°$, sest $\angle ANM = \angle ADM$ (kui samale kaarele toetuvad piirdenurgad) ning $\angle MNF = 180° - \angle MEF$ (kuna ringjoone sisse joonestatud nelinurga vastasnurkade summa on 180°).

Sirge BC läbib punkti N, kui $\angle BNC = 0°$. Tõepoolest,

$$\angle BNC = \angle BNM - \angle CNM = \angle BFM - \angle CDM = 45° - 45° = 0°.$$

b) Olgu O lõigu AB keskpunkt. Kui punkt S leidub, siis peab ta asetsema



Joonis 2.

punkti O läbival ristsirgel. Näitame, et $OS = \frac{AB}{2}$, s. t. ei ole sõltuv punkti M asukohast.

$\triangle PGQ = \triangle SOM$, sest nad on mõlemad täisnurksed, $\gamma = \gamma_1$ kui ristuvate haaradega nurgad ja

$$MO = AO - AM = \frac{AB}{2} - AM = \frac{AM}{2} + \frac{MB}{2} - AM = \frac{MB}{2} + \frac{AM}{2} = QG.$$

Kolmnurkade kongruentsusest järeldub aga, et

$$OS = PG = \frac{AM}{2} + \frac{BM}{2} = \frac{AB}{2}.$$

c) Olgu lõigu PQ keskpunkt H. Tõmmates lõigule AB ristlõigud PP_1 ja QQ_1, tekib trapets PQQ_1P_1, mille kesklõik

$$HH_1 = \frac{1}{2}(PP_1 + QQ_1) = \frac{1}{2}\left(\frac{AM}{2} + \frac{MB}{2}\right) = \frac{AB}{4}.$$

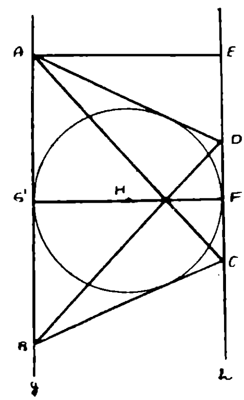
Seega punkt H asub lõigust AB kaugusel $\frac{AB}{4}$ võetud paralleelsel sirgel.

Ülesanne nr. 6. Tasandid P ja Q lõikuvad mööda sirget p. Tasandil P on antud punkt A ja tasandil Q punkt C. Kumbki neist punktidest ei asetse sirgel p. Joonestada võrdhaarne trapets $ABCD$ alustega AB ja CD nii, et temasse saab joonestada ringjoone ja et punkt B asetseks tasandil P ja punkt D tasandil Q.

Lahendus. Trapets ja selle siseringjoon asuvad ühel tasandil, tähistame selle R-ga. Et AB peab olema CD-ga paralleelne, siis peavad nad ka sirgega p paralleelsed olema, samuti on siis $R \parallel p$. Tasandil R asetsev mingi p-ga paralleelne sirge p' määrab siis külgede AB ja CD sihi. Kui võtame p' läbi punkti A, siis peab ka punkt B sellel sihil asetsema. Läbi punkti C p'-ga paralleelsel sirgel peab asetsema ka punkt D.

Ülesande lahenduseni jõuame järgmise konstruktsiooni abil (vt. joonis 3). On antud sirge g ja sellel asetsev punkt A. Sirgest g kaugusel AE on võetud sellega paralleelne sirge h, millel on antud punkt C. Tuleb konstrueerida trapets $ABCD$, millesse saab joonistada ringjoone, nii et punkt B asetseks sirgel g ja D asetseks sirgel h.

a) Konstruktsioon. Tõmbame punktist A ristlõigu AE sirgele h. Joonestades ringjoone raadiusega EC keskpunktiga A saame sirgel h punkti D. Poolitame lõigu DC ja poolituspunktist F tõmbame ristlõigu FG' sirgele g. Lõigu $G'F$ lõikepunktiks AC-ga on G. Punktidega D ja G määratud sirgel asetseb punkt B. Lõpuks konstrueerime lõigu $G'F$ poolituspunkti ja joonestame ringjoone raadiusega $\frac{AE}{2}$



Joonis 3.

b) Tõestus. Puutujanelinurga omaduse põhjal tuleb tõestada, et vastasküljede summad on võrdsed:

$$2AD = 2EC = 2EF + 2FC = 2AG' + 2DF = AB + DC.$$

Järelikult on trapets ühele ringjoonele puutujanelinurgaks. Et trapetsi kaks vastaskülge on kujutatud ringjoonte puutujaiks, siis on konstrueeritud trapets puutujanelinurgaks just sellele ringjoonele. Ringjoon on konstrueeritav ainult juhul, kui $\alpha \leqslant 45°$.

* *

*

Nuputamiseks

Järgmistes ülesannetes on igas tehtes samad numbrid asendatud samade tähtedega, erinevad numbrid aga erinevate tähtedega. Leida igale tähele vastav number (kõikides ülesannetes eraldi)

a)
$$\begin{array}{r} \times\; A\;B\;C \\ B\;D \\ \hline C\;E\;E\;B \\ +\; B\;C\;D\; \\ \hline G\;C\;G\;B \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{l|l} R\;S\;T\;U\;N & L\;M\;N \\ \underline{R\;T\;Y\;X} & \overline{\;\;U\;X} \\ \quad T\;Y\;Y\;N & \\ \quad \underline{T\;Y\;Y\;V} & \\ \qquad\qquad Y \;(\text{jääk}) & \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{r} \times\; Ü\;K\;S \\ O\;N\;U \\ \hline P\;U\;I\;S \\ O\;S\;A\;V\; \\ Ü\;K\;S\; \\ \hline S\;A\;V\;I\;S \end{array}$$

SISUKORD