Matemaatika ja kaasaeg

TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

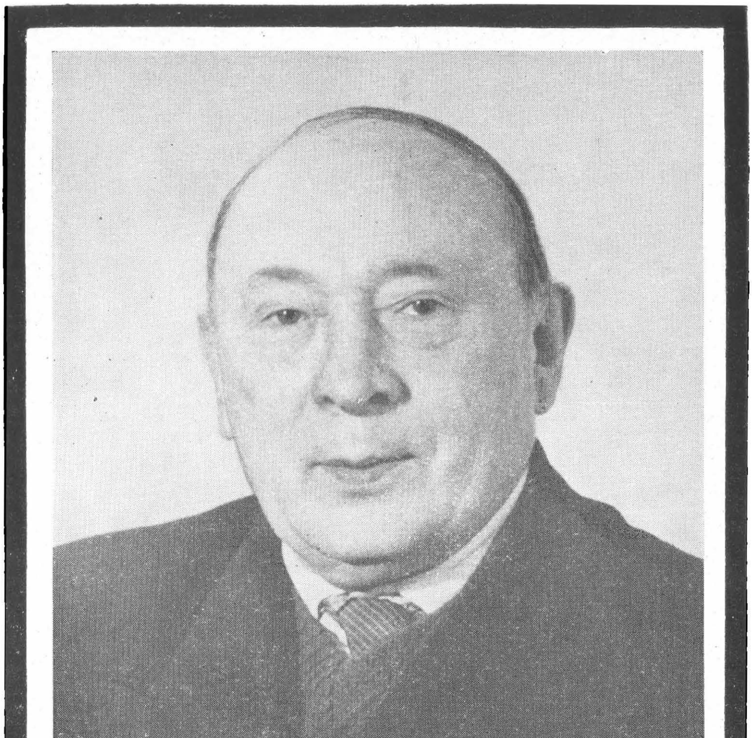
MATEMAATIKA JA KAASAEG

IV

ABIMATERJALE MATEMAATIKA ÕPETAJATELE JA ÕPPIJATELE

TARTU 1964

Käesolev kogumik on pühendatud
prof. Hermann Jaaksoni,
esimese eesti matemaatikadoktori mälestuseks.



PROFESSOR HERMANN JAAKSON

28. augustil 1964. a. suri Kiidjärvel eesti vanema põlvkonna üks silmapaistvamaid matemaatikuid, Tartu ülikooli kauaaegne professor Hermann Jaakson.

Hermann Jaani p. Jaakson sündis 25. jaanuaril 1891. a. Viljandi lähedal endises Uue-Võidu vallas. Alghariduse sai ta oma sünnikoha naabruses asuvas Saarepeedi vallakoolis, keskhariduse aga Riias, kus elas tema onu. Riia Aleksandri gümnaasiumis õppides tärkas Hermann Jaaksonis üha kasvav huvi matemaatika vastu. Siinjuures peab aga märkima, et Hermann Jaaksoni sügav kohusetunne sundis teda suure põhjalikkusega omandama ka neid aineid, mis pakkusid talle vähemat huvi. Pärast gümnaasiumi lõpetamist 1909. a. astus Hermann Jaakson Tartu ülikooli füüsika-matemaatikateaduskonda, mille ta lõpetas 1913. a. kandidaadi kraadiga. Esimese maailmasõja mõjul puudusid Hermann Jaaksonil võimalused asuda teaduslikule tööle, mistõttu ta täiendas ennast algul iseseisvalt; alates 1915. aastast aga töötas matemaatikaõpetajana Tartu Kommertsgümnaasiumis. Seoses eestikeelse ülikooli organiseerimisega Tartus määrati Hermann Jaakson 1919. a. Tartu ülikooli juurde dotsendi kohale. Alates 1921. aastast täitis Hermann Jaakson ülikooli sekretäri ülesandeid. 1923/24. õppeaastal õnnestus tal vabaneda administratiivsest tööst ja saada teadusliku komandeeringu Pariisi. 1925. a. kaitses Hermann Jaakson esimese eesti matemaatikuna doktoriväitekirja «Lõpmata paljude tundmatutega lineaarsete võrrandisüsteemide mõningatest tüüpidest. Interpolatsioonist».

Alates 1926. aastast töötas Hermann Jaakson professorina matemaatilise analüüsi alal. Juba kolm nädalat enne doktoriväitekirja kaitsmist valiti ta matemaatika-loodusteaduskonna dekaaniks, 1927. aastast alates aga kolm korda järjest — kuni 1936. aastani — ülikooli majandusprorektoriks, hiljem üliõpilaskonna kuraatoriks. Pärast Tartu vabastamist 1944. a. töötas prof. H. Jaakson kuni 1959. aastani matemaatilise analüüsi kateedri juhatajana, hiljem aga — kuni 1961. aastani — sama kateedri professorina. Aastail 1944—1947 täitis prof. Jaakson ühtlasi matemaatika-loodusteaduskonna prodekaani kohuseid.

Prof. H. Jaaksoni pedagoogiline tegevus Tartu ülikoolis oli väga ulatuslik. Ta on lugenud üle 15 põhi- ja erikursuse, peamiselt matemaatilise analüüsi mitmesugustes distsipliinides, nagu diferentsiaal- ja integraalarvutus, diferentsiaalvõrrandid, integraalvõrrandid, matemaatilise füüsika võrrandid, kompleksmuutuja funktsioonide teooria jne. Erikursustest on ta lugenud diferentsiaalvõrrandite analüütilist teooriat, valitud peatükke matemaatilisest analüüsist, elliptiliste funktsioonide teooriat, kompleksmuutuja funktsioonide teooria täiendavaid peatükke jt.

Prof. H. Jaakson 1960. a. maikuul

Prof. H. Jaaksoni lihtne ja selge esitusviis, tema rangelt süsteemikindel ja sügavalt teaduslik käsitlus on jäänud püsivalt meelde kogu tema arvukale õpilasperele. Rööbiti loengutega on ta juhendanud paljusid eriseminare, siinhulgas ka ridade teoorias, mis on hiljem saanud TRÜ matemaatilise analüüsi kateedri põhiliseks teadusliku töö suunaks. Samuti on prof. H. Jaakson juhendanud diplomande ja aspirante. Tema juhendamisel on lõpetanud aspirantuuri dotsent J. Gabovitš.

Pedagoogilisest ja administratiivsest tööst ülejäänud aja pühendas prof. H. Jaakson täielikult teaduslikule tööle. Oma seisukoha teadusele on Hermann Jaakson väga ilmekalt avaldanud juba 1915. a. artikli «Teadus, tema arenemine ja ülesanded» [1] lõpus: [1]

---

[1] Tsiteerimisel on arvestatud tänapäeva ortograafiat.

Nähtuste vallas on teadus täielik peremees, ja sääl temale ette kirjutada piire või ääri on mõttetu, asjatu tegu: ta sammub neist ükskord üle!

Niisama on võimatu enesele kujutada ette seda aega, millal ükskord lõppema peaksid teaduse edu ja täiusele tormaja tung... Temas leiame suursuguseid jooni, temas helgivad jumalikud kiired ja peegelduvad vastu inimese vaimne suurus, ta mõtete põhjatu sügavus, ja nagu meie mõtted ise on igavesti värsked ja noored, taltsutamatud ja tormilised, äravõitmatud ja alati tõe poole püüdvad, nii on ka nende kehastus — teadus!

Prof. H. Jaaksoni uurimused kulgesid kolmes peasuunas — matemaatilise analüüsi, arvuteooria ja topoloogia valdkonnas.

1. Matemaatilises analüüsis olid prof. H. Jaaksoni uurimisobjektiks lõpmatud lineaarsed võrrandisüsteemid

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + \dots = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + \dots = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + \dots = b_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{array} \quad (1)$$

lõpmata paljude tundmatutega $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$.

Vajadus lõpmatute lineaarsete võrrandisüsteemide uurimiseks tekkis diferentsiaal- ja integraalvõrrandite teoorias, eriti aga matemaatilise füüsika rajaülesannete lahendamisel. Süsteemi (1) lahendamiseks on Fourier' poolt antud järgmine meetod: lahendatakse lõplik võrrandisüsteem (nn. taandatud süsteem)

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \quad (2)$$

ja leitakse piirväärtused

$$\lim_{n\to\infty} x_k^{(n)} = \xi_k \ (k = 1,2, \dots),$$

kus $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}$ on süsteemi (2) lahend. Teatavatel tingimustel moodustavad piirväärtused ξ_k $(k = 1,2, \dots)$ lõpmatu süsteemi (1) lahendi. Osutub aga, et paljudel praktikas esinevatel juhtudel, kus süsteem (1) on lahenduv, pole siiski võimalik leida selle süsteemi lahendit Fourier' meetodiga (näiteks piirväärtused ξ_k ei eksisteeri). Seepärast üldistas prof. H. Jaakson oma doktoridissertatsioonis [3] Fouriér' meetodit, moodustades taandatud süsteemi (2) asemel nn. üldistatud taandatud süsteemide jada

$$S_1, S_2, \dots, S_n, \dots, \quad (3)$$

kus iga süsteem S_n on lahendatav Fourier' meetodiga. Lahendades süsteemid (3), konstrueeris prof. H. Jaakson nende lahenditest süsteemi (1) lahendi.

Oma meetodit rakendas prof. Jaakson kaheksat tüüpi lõpmatutele lineaarsetele võrrandisüsteemidele. Neist kuus esimest tüüpi määravad teatavaid diferentsiaaltingimusi rahuldava Dirichlet' rea $\sum_{k=1}^{\infty} x_k e^{-\lambda_k z}$ (üldisemalt $\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{-\lambda_k z}$), kusjuures nelja esimese tüübi puhul $a_{nk} = \lambda_k^n$. Kaks viimast lõpmatu võrrandisüsteemi tüüpi määravad interpolatsiooniprobleemi tingimusi rahuldava täisfunktsiooni $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^k$ kordajad x_k. Seejuures eelviimase tüübi korral $a_{nk} = a_n^k$, kus a_n tähendab kohta, milles funktsioonil $F(z)$ on etteantud väärtus b_n. Rakendades oma meetodit viimase võrrandisüsteemi tüübi jaoks, on prof. H. Jaakson saanud eriti tähtsa tulemuse, mille järgi juhul $\lim_{n \to \infty} |a_n| = \infty$ leidub täisfunktsioon $F(x)$, nii et

$$F(a_n) = b_n,\ F'(a_n) = b_n^{(1)},\ F''(a_n) = b_n^{(2)}, \ldots,$$
$$F^{(p_n)}(a_n) = b_n^{(p_n)} \quad (n = 1,2, \ldots),$$

kus suurused p_n võivad olla mistahes naturaalarvud või nullid, $b_n^{(k)}$ aga suvalised kompleksarvud. Erijuhul $b_n^{(k)} = 0$ saame siit Weierstrassi tuntud teoreemi.

Lõpmatute lineaarsete võrrandisüsteemide uurimisele innustas Hermann Jaaksonit ungari tuntud matemaatiku F. Rieszi suurepärane monograafia «*Leçons sur les systèmes d'équations lineaires à une infinité d'inconnues*», mis ilmus 1913. a., kui Hermann Jaakson lõpetas Tartu ülikooli. F. Riesz tutvus Hermann Jaaksoni dissertatsiooniga ja andis sellele tunnustava retsensiooni. Ühtlasi tõstis F. Riesz üles küsimuse, kuidas kindlaks teha, kas Fourier' meetoditega süsteemi (1) jaoks leitud suurused ξ_k $(k = 1,2, \ldots)$ moodustavad selle süsteemi lahendi, kui read

$$a_{n1}\xi_1 + a_{n2}\xi_2 + \ldots + a_{nk}\xi_k + \ldots \quad (n = 1,2, \ldots)$$

absoluutselt koonduvad. Selle küsimuse lahendamiseks tuletas Hermann Jaakson tarviliku ja piisava tingimuse, mis meenutab Cauchy kriteeriumit rea koonduvuse jaoks. Ühtlasi näitas ta, et see tingimus on rahuldatud kõigi tema dissertatsioonis esinevate üldistatud taandatud süsteemide (3) puhul. Oma suure tagasihoidlikkuse tõttu avaldas prof. H. Jaakson vastavad tulemused alles 20 aastat hiljem [4, 5].

2. Prof. H. Jaaksoni uurimused arvuteooria alal on pühendatud teatavatele diofantilistele võranditele, s. t. täisarvuliste kordajatega algebralistele võrranditele, mille puhul otsitakse täisarvulisi lahendeid. Prof. H. Jaakson näitas [6], et diofantilisel võrrandil

$$Cz = By + Ax \quad (C > B > A)$$

on olemas sümmeetrilised lahendid (s. t. tingimust $z > y > x$ rahuldavad lahendid) parajasti siis, kui $C < B + A$. Ühtlasi andis ta meetodi nende sümmeetriliste lahendite leidmiseks. Prof. H. Jaaksoni tähelepanu on köitnud eriti diofantiline võrrand

$$z^n = y^n + x^n \quad (n \text{ — naturaalarv}), \tag{4}$$

mis on etendanud tähtsat osa algebraliste arvude teoorias. Võrrandil (4) on juhul $n = 2$ ilmselt täisarvulisi lahendeid, näiteks $x = 3$, $y = 4$, $z = 5$. Juba 17. sajandil väitis kuulus prantsuse matemaatik P. Fermat, et võrrandil (4) pole juhul $n \geqslant 3$ täisarvulisi lahendeid. See väide on osutunud tõeseks väga paljude n väärtuste korral, tema üldist kehtivust iga $n \geqslant 3$ puhul pole aga senini suudetud tõestada. Prof. H. Jaakson vaatles võrrandi (4) asemel võrrandit

$$z^n = y^n + x^m u \quad (m < n), \tag{5}$$

kus $u < y^{n-m}$, mille lahendeid ta nimetas kvaasi-Fermat' lahendeiks ehk lühemalt $F_n^{(m)}$-lahendeiks. Nõuded, mis on seatud kvaasi-Fermat' lahendite kohta, on nõrgemad kui vastavate Fermat' lahendite (s. t. võrrandi (4) lahendite) kohta, kusjuures kvaasi-Fermat' lahenditele seatud tingimused on seda rangemad, mida suurem on m. Seepärast on loomulik küsida, kas on olemas kvaasi-Fermat' lahendeid, kuigi vastavad Fermat' lahendid peaksid puuduma. Prof. H. Jaakson tõestas [6], et on olemas lõpmatu hulk $F_3^{(2)}$-lahendeid, kuigi vastavaid Fermat' lahendeid, nagu näitas juba Euler, pole olemas. Ühtlasi andis prof H. Jaakson Euleri väitele tõestuse, mis erineb Euleri tõestusest.

3. Eriti suurt tähelepanu on prof. H. Jaakson pööranud t o p o l o o g i l i s e l e n e l j a v ä r v i p r o b l e e m i l e, mille kallal on töötanud paljud tuntud matemaatikud enam kui saja aasta vältel. On hästi teada, et iga topoloogilist kaarti kerapinnal saab värvida viie värviga nii, et iga kaks riiki, millel on ühine piir, oleksid värvitud eri värvidega. Samuti on teada, et suvalise topoloogilise kaardi niisuguseks värvimiseks on vajalik vähemalt neli värvi. Siit tulenebki topoloogiline nelja värvi probleem[1]: kas piisab neljast värvist mistahes topoloogilise kaardi värvimiseks nii, et kaks ühise piirjoonega riiki oleksid värvitud eri värvidega? Selle probleemiga tutvus prof. H. Jaakson 1928. aastal tolleaegse dotsendi Jüri Nuudi avaloengul Tartu ülikoolis.

---

[1] Vt. G a b o v i t š, Jevgeni, Nelja värvi probleem. — Käesolev kogumik lk. 9—17.

Prof. H. Jaaksoni suureks teeneks on nn. kahe värvi probleemi püstitamine, lahendamine ja seostamine nelja värvi probleemiga. Kahe värvi probleemi võib sõnastada järgmiselt: kas piisab kahest värvist mistahes topoloogilise kaardi värvimiseks nii, et riigid, mille piirid jooksevad kokku ühisesse sõlmpunkti, poleks värvitud kõik ühe värviga? Kaarti, mille igas sõlmpunktis kohtub ainult kolm piirjoont, nimetatakse normaalkaardiks. On hästi teada, et nelja värvi probleemi uurimisel võib üldsust kitsendamata piirduda normaalkaartidega. Prof. H. Jaakson näitas [7], et iga normaalkaardi puhul on kahe värvi probleem lahendatav. Samuti näitas prof. H. Jaakson, kuidas nelja värvi probleemi lahendit teades, saab leida kahe värvi probleemi lahendi ja ümberpöördult, kuidas teatavat spetsiaalset kahe värvi probleemi lahendit teades saab selle abil konstrueerida nelja värvi probleemi lahendi. Prof. H. Jaaksoni viimane trükis avaldatud töö [8] ongi pühendatud kahe värvi probleemi spetsiaalsete lahendite uurimisele, mis on samaväärsed nelja värvi probleemi lahenditega. Selles töös andis prof. H. Jaakson piisavad tingimused niisuguste spetsiaalsete lahendite olemasoluks, kuid nende tingimuste täidetus mistahes normaalkaardi puhul jäi lahtiseks. Prof. H. Jaaksoni töö nelja värvi probleemi kallal lõpetas ootamatu surm.

Prof. H. Jaaksoni kiindumus teadusesse, tema suur ausus ja humaansus, vankumatu kohusetruudus ja tagasihoidlikkus on äratanud sügava lugupidamise kõigis, kellel on olnud temaga kokkupuutumist. Prof. H. Jaaksoni siiras isiksus, tema kindel eeskuju jääb alatiseks meelde kõigile tema kaastöötajaile ja arvukale õpilasperele.

G. Kangro

Prof. H. Jaaksoni trükitud tööde nimestik

1. Teadus, tema arenemine ja ülesanded. — «Ilukirjandus ja Teadus», 1915, 12, lk. 46—48, 13, lk. 51—52, 14, lk. 55—58, 15, lk. 59—60.
2. Lõpmatuse mõiste matemaatikas. — «Loodus», 1923, nr. 3, lk. 149—164.
3. Sur certains types de systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues. Sur l'interpolation. — Tartu Ülikooli Toimetised, A VIII : 1, 1925, 181 lk.
4. Fourier' meetodi rakendavusest. TRÜ teaduslik sessioon 14.—16. VII 1945. a. Ettekannete kokkuvõtted. Tartu, 1945, lk. 14—15.
5. Sur la légitimité d'une méthode de Fourier. — TRÜ Toimetised, Matem. teadused, nr. 2, 1946, 14 lk.
6. О симметрических решениях одного диофантова уравнения. — TRÜ Toimetised, vihik 46, 1957, lk. 63—84.
7. О решениях топологической проблемы о двух красках. — TRÜ Toimetised, vihik 46, 1957, lk. 43—62.
8. О решениях топологической задачи о четырех красках. — TRÜ Toimetised, vihik 102, 1961, lk. 263—274.

NELJA VÄRVI PROBLEEM

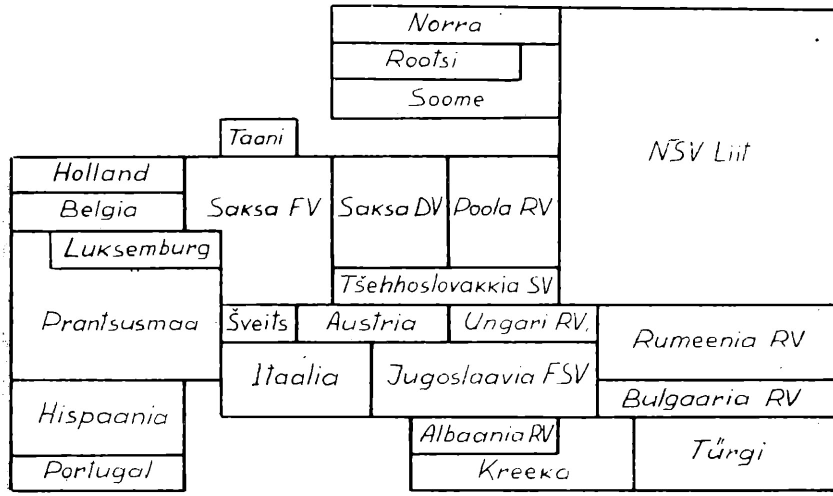
Jevgeni Gabovitš

Võib kujutleda järgmist olukorda. Meie kosmonaudid kavatsevad lennata näiteks Marsile ning lähtudes oletusest, et ka seal on olemas riigid, soovivad endale kohapeal koostada Marsi poliitilise kaardi. Kerkib küsimus: mitu erinevat värvi peavad kosmonaudid kaasa võtma, kui neil pole Marsi poliitilise kaardi kohta midagi teada.

On selge, et ülesande lahendamiseks võib kaardil iga riigi territooriumi katta erineva värviga. Vaevalt aga selline lahendus meie kosmonaute rahuldab, sest võib osutuda, et Marsil on väga palju riike. Ilmselt püüavad kaardi valmistajad niisuguses olukorras toime tulla võimalikult väikese arvu värvidega. Riike, millel on kas ainult mõni üksik ühine punkt või pole sedagi, võib ju värvida ka ühe ja sama värviga. Kui veel lihtsuseks eeldada, et iga riik koosneb ainult ühest osast, siis saab erinevaid riike niimoodi üksteisest täielikult eraldada. Seega võime küsimuse täpsustada: kui suur on kaardi selliseks värvimiseks vajalike erinevate värvide minimaalne arv?

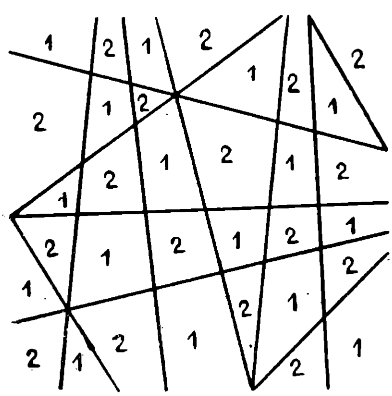
Üldsust kitsendamata võib lugeda, et vaadeldav kaart on joonistatud tasandile, sest kogu Marsi pind on mingi suvalise riigi sisepunktist projekteeritav diametraalselt vastaspunktis võetud Marsi puutujatasandile. Seejuures riik, milles me fikseerisime projektsiooni tsentri, projekteerub tasandile «ookeanina», mis ümbritseb tekkinud kaardi ülejäänud osa. Kuid ka «ookeani» võib vaadelda riigina ning värvida näiteks helesiniseks. Seega on arusaadav, et Marsi pinnale ja tasandile joonistatud kaartide värvimiseks on vaja ühepalju värve.

Niiviisi tasandile joonistatud kaarti nimetatakse t o p o l o o g i l i s e k s k a a r d i k s, rõhutades sellega, et värvimise juures pole oluline üksikute riikide geomeetriline kuju (suurus, piirjoonte sirg- või kõverjoonelisus jms.), vaid üksnes asjaolu, mitu naaberriiki on igal vaadeldaval riigil ja milliseid servi (piirjooni) mööda ta nendega kokku puutub. Seepärast võime kaarti pidevalt deformeerida, pidades vaid silmas, et kuskil ei toimuks servade katkemist ega kokkukleepumist. Seda me edaspidi teemegi, püüdes anda kaardile niisuguse kuju, et seal kõik servad (piirjooned) koosneksid sirglõikudest ja ringjoonte kaartest. Näiteks Euroopa mandri kõigile hästi tuntud poliitilist kaarti võib pärast pidevaid deformatsioone esitada nii, nagu on näidatud joonisel 1 (mõned riigid on sellelt kaardilt ära jäetud).

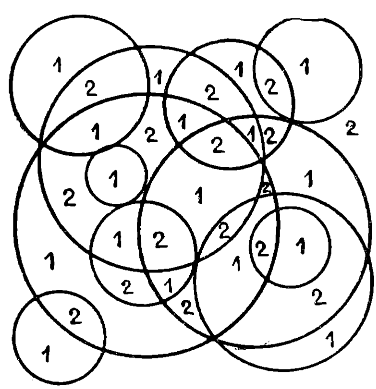


Joonis 1.

Et käesoleva artikli trükkimisel pole tehniliselt võimalik kasutada värve, siis me «värvime» riike numbritega või väikeste ladina tähtedega. Seejuures riike, mida tuleb värvida sama värviga, märgime muidugi ühe ja sama numbri või tähega.

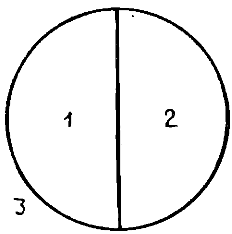


Joonis 2.

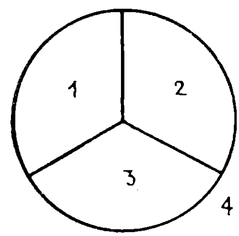


Joonis 3.

Pärast neid märkusi võtame jälle käsile oma kosmonautide ülesande. Kui kaardil, millega neil tuleb tegemist teha, riikide kõik piirid on tekkinud lõpliku arvu sirgete või ringjoonte lõikumisel (vt. joonised 2 ja 3) siis piisab kaardi värvimiseks kahest värvist. Kui aga kaart näeb välja nii, nagu on kujutatud joonisel 4, siis kulub värvimiseks juba kolm värvi. Joonisel 5 on

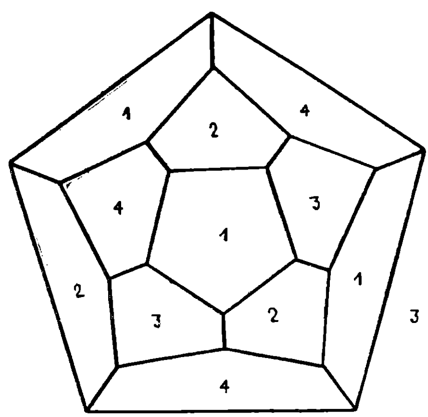


Joonis 4.



Joonis 5.

seevastu esitatud lihtne kaart, mille värvimiseks läheb tarvis koguni nelja erinevat värvi. Sama värvide arvuga saab läbi ka joonisel 6 toodud palju keerulisema kaardi korral (see kaart on saadud dodekaeedri projekteerimisel tasandile). Neljast värvist piisab samuti Euroopa poliitilise kaardi värvimiseks (vt. joon. 7).

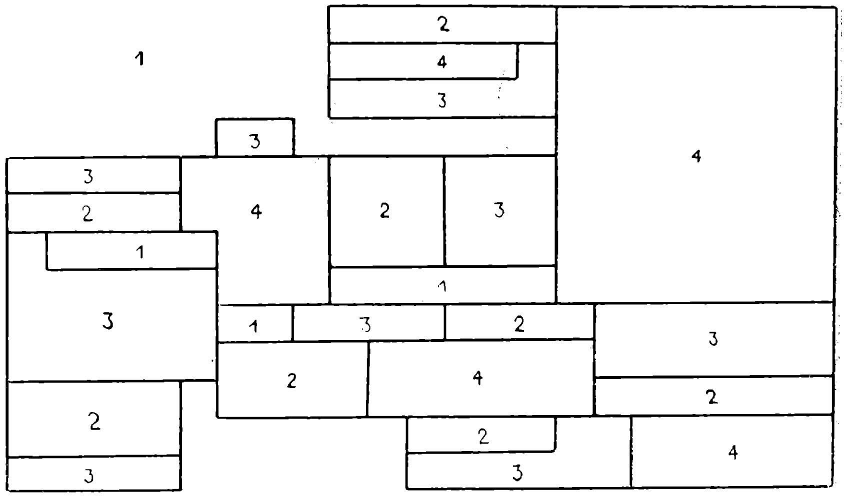


Joonis 6.

Toodud näidetest selgub tõsiasi: kui keeruliste kaardite puhul tahetakse võimalikult väikese arvu värvidega toime tulla, siis peab mitmed erinevad riigid värvima ühe ning sama värviga. Näiteks Euroopa poliitilisel kaardil olime sunnitud värvima Luksemburgi «värviga» 1 (helesinine), sest neli riiki — Prantsusmaa, Saksa FV, Belgia ja Luksemburg — paiknevad nii, et igaüks neist puudutab kolme ülejäänut, kusjuures kolm esimest asetsevad mere (helesinisega «värvitud») ääres.

Joonistage mõni topoloogiline kaart ning püüdke teda värvida ainult nelja värviga. On üsna kindel, et see teil õnnestub, sest keegi pole seni suutnud konstrueerida kaarti, mille värvimiseks ei piisaks neljast värvist. Kahjuks pole aga ka kellelgi õnnestunud t õ e s t a d a, et tõepoolest piisab igasuguse kaardi värvimiseks neljast värvist. Küll on aga tõestatud, et alati piisab viiest värvist. Kui kosmonaudid varustada viie värviga, siis võime kindlad olla, et nad tulevad Marsi kaardi koostamisega toime. Et neil piisaks ka neljast värvist, selles me esialgu päris kindlad olla ei saa.

Tuntud nelja värvi probleem seisnebki küsimuses: *kas piisab neljast erinevast värvist igasuguse topoloogilise kaardi värvimiseks?*



Joonis 7.

On andmeid, mille kohaselt tuntud saksa geomeeter A. F. Möbius (1790—1868) olevat juba 1840. aastal väitnud, et tasandit pole võimalik jagada viide ossa nii, et igaühel neist oleks iga ülejäänud nelja osaga ühine piirjoon. Kahjuks selle väite tõestamisest aga veel ei järeldu, et iga topoloogilise kaardi värvimisel võib läbi saada nelja värviga. Mõni aasta hiljem kirjutas inglise matemaatik A. Cayley (1821—1895), et A. Morgan (1806—1871) olevat tõestanud nelja värvi lause (s. t. et probleemi vastus on jaatav).

Nelja värvi lause esimene kirjanduses ilmunud tõestuskatse kuulub saksa matemaatikule Kempele (1879. a.). Järgmisel aastal teatas Frederic Guthrie, et tema vend Francis olevat juba 1850. aastal lause tõestanud ja teatanud sellest Morganile.

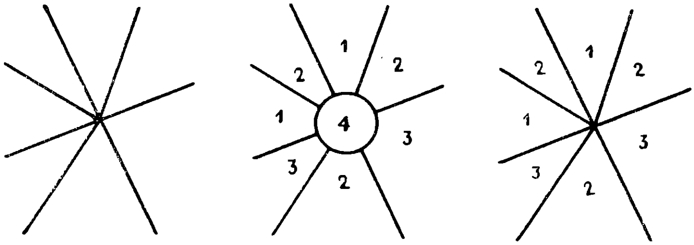
Nelja värvi probleem sai kuulsaks pärast 1879. aastat, kui Cayley tegi sellest ettekande Inglise Kartograafia Seltsis. Tänapäevani on ilmunud hulgaliselt probleemi «lahendusi», kuid kõik need on osutunud vigasteks [1].

[1] Artikli autor tunneb üht professorit, kes noorena on ise seda lauset tõestada püüdnud. Kui hiljem mõni üliõpilane esitas talle «tõestuse», milles esineva vea leidmiseks kulus mitu päeva, siis sai see üliõpilane professori suure lugupidamise osaliseks.

Ka Tartu Riikliku Ülikooli professor J. S a r v (1877—1954) püüdis seda probleemi lahendada ning pühendas sellele 1927. aastal Tartu Ülikooli Toimetistes ilmunud artikli *«Zum Beweis des Vierfarbensatzes»*. Hiljem, kui ta veendus oma tõestuse vigasuses, hoiatas ta üliõpilasi, et nad ei kulutaks nelja värvi probleemi lahendamisele liiga palju jõudu ega aega. Umbes samasuguste soovitustega pöördub oma nooremate lugejate poole ka Saksa professor Gerhard R i n g e l, kellelt on pärit tänapäeva parim nelja värvi probleemile ja selle üldistustele pühendatud monograafia *«Färbungsprobleme auf Flächen und Graphen»*.

Eesti matemaatikaprofessoritest on nelja värvi probleemiga tegelnud veel J. N u u t (1892—1952). J. Nuudi 1929. aastal ilmunud töös *«Über die Anzahl der Lösungen der Vierfarbenaufgabe»* on antud üksikasjalik ülevaade selle probleemi lahendite arvu kohta.

Punkti, milles kohtuvad topoloogilise kaardi servad, nimetatakse kaardi s õ l m p u n k t i k s. Kui igast sõlmpunktist väljub ainult kolm serva, siis kaarti nimetatakse n o r m a a l s e k s. Mistahes topoloogilist kaarti võib aga normaliseerida, ümbritsedes iga sõlmpunkti, millest väljub enam kui kolm serva, uue «riigiga» (nagu on tehtud joonisel 8). Kui normaliseeritud kaardi jaoks on leitud nelja värvi probleemi lahend, siis sellest lähtudes saab otsekohe konstrueerida nelja värvi probleemi lahendi ka lähtekaardi jaoks (vt. joon. 8). Seepärast võibki nelja värvi probleemi käsitlemisel piirduda ainult normaalkaartidega. J. Nuudi ülalmainitud töös leidub muuseas väide, et ükski normaalkaart ei saa koosneda ainult kuusnurkadest, ning et ei leidu



Joonis 8.

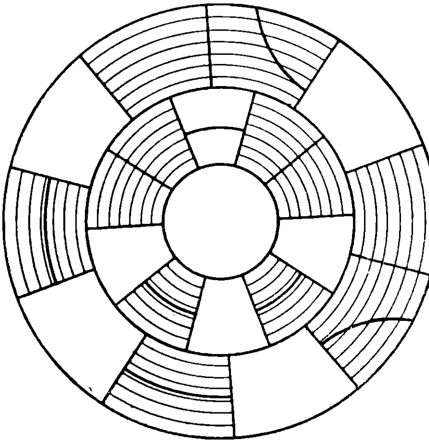
normaalkaarti, mis ei sisalda ühtegi kolm-, neli- või viisnurka.

Suure osa oma elust pühendas nelja värvi probleemile ka prof. H. J a a k s o n (1891—1964). Ta tõestas oma 1961. aastal ilmunud töös «О решениях топологической задачи о четырех красках», et ainult kolm-, neli- ja viisnurkadest saab koostada vaid lõpliku arvu erinevaid normaalkaarte. Samuti tõestas ta, et igal normaalkaardil, mis koosneb ainult viis- ja kuusnurkadest, on alati täpselt 12 viisnurka (vt. joon. 6).

Juba 1880. aastal näitas matemaatik P. C. Tait, et topoloogilise kaardi nelja värvi probleem on samaväärne järgmise kolme värvi probleemiga: *kas on võimalik värvida normaalkaardil riikide servad kolme värviga nii, et igast sõlmpunktist lähtuvad servad oleksid värvitud igaüks eri värviga*?

On olemas ka kahe värvi probleeme, mis osutuvad nelja värvi probleemiga samaväärseteks. Üks neist formuleeritakse järgmiselt: *kas saab värvida normaalkaardi sõlmpunktid «värvidega» +1 ja —1 nii, et iga riigi juurde kuuluvate sõlmpunktide «värvide summa» jaguks kolmega*?

Prof. H. Jaakson sõnastas oma 1957. aastal ilmunud töös «О решениях топологической проблемы о двух красках» järgmise kahe värvi probleemi: *kas saab värvida topoloogilise kaardi kahe värviga nii, et ükski sõlmpunkt ei oleks täielikult ümbritsetud ühe ja sama värviga värvitud riikidest*? Sama probleemi võib püstitada väliselt erineval, kuid sisuliselt eelmisega samaväärsel kujul: *kas saab värvida normaalkaardi servad kahe «värviga» 1 ja 2 nii, et iga serv oleks värvitud ühe ja ainult ühe värviga ning kaardi mistahes sõlmpunktist väljuvast kolmest servast oleks üks värvitud «värviga» 1 ja mõlemad ülejäänud «värviga» 2*? Prof. H. Jaakson tõestas, et iga normaalkaardi korral eksisteerib selle probleemi lahend, kusjuures võib veel ette nõuda, et mingi konkreetne serv oleks värvitud «värviga» 1. Esitatud tõestus on konstruktiivne, s. t. annab võimaluse probleemi konkreetse lahendi tegelikuks konstrueerimiseks.



Joonis 9.

Joonisel 9 on toodud prof. H. Jaaksoni kahe värvi probleemi lahend ühe konkreetse normaalkaardi jaoks (esimese värviga värvitud riigid on viirutatud). Joonisel on hästi näha, kuidas tuleb värvida kaardi servad probleemi teise sõnastuse korral: «värviga» 1 tuleb värvida need ja ainult need servad, mis lahutavad sama värviga värvitud riike.

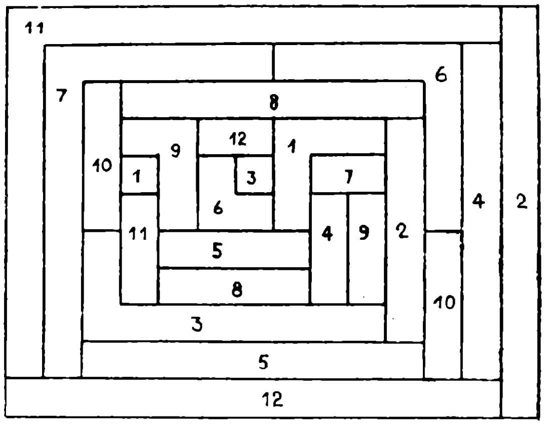
Kaardil kõik servad, mis on värvitud «värviga» 2, moodustavad üldjuhul vähemalt ühe iseendaga mitte lõikuva kinnise kõvera. Need kõverad annavad võimaluse jaotada normaalkaardi kahte vööndisse (joonisel 9 näiteks on ühte vööndisse kuuluvad riigid viirutatud). Vööndid tekivad siis, kui lugeda «värviga» 2 värvitud ühise servaga riigid eri vööndeisse ja «värviga» 1 värvitud ühise servaga riigid ühte vööndisse kuuluvateks.

Kahe värvi probleemi lahendit nimetatakse h e a k s l a h e n d i k s, kui vöönditevahelise joone iga kinnine osa läbib paarisarvu sõlmpunkte. Selline on näiteks joonisel 9 esitatud lahend. Siin koosneb vöönditevaheline joon kahest kinnisest kõverast, milledest üks läbib 12 ja teine 42 sõlmpunkti. Kui on tegemist kahe värvi probleemi hea lahendiga, siis saab esimesse vööndisse kuuluvad riigid värvida vaheldumisi «värvidega» *a* ja *b*, teise vööndisse kuuluvad riigid aga «värvidega» *c* ja *d*. Nii saame nelja värvi probleemi lahendi kogu kaardi jaoks. Vastupidi, kui kaardil on leitud nelja värvi probleemi lahend, siis, ühendades mingi kahe värviga värvitud riigid ühte ja kahe ülejäänud värviga värvitud riigid teise vööndisse, saame kahe värvi probleemi hea lahendi. Seega nelja värvi probleem on vaadeldav kui heade lahenditega kahe värvi probleem.

Nelja värvi probleemiga samaväärsete probleemide püstitamine ei ole aga küsimust ennast kahjuks otsustavalt edasi viinud, sest ükski neist pole seni veel lõpuni lahendatud.

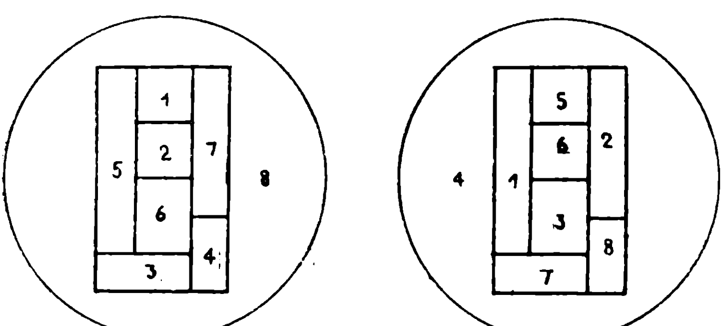
Prof. H. Jaakson on palju ära teinud nelja värvi probleemi populariseerimiseks Eesti NSV matemaatikute seas. Aastail 1957—1960 kirjutati tema juhendamisel Tartu Riiklikus Ülikoolis rida diplomitöid nii nelja kui ka kahe värvi probleemi kohta.

Kaardi värvimisel nelja värvi abil pole alati võimalik rahuldada kõiki lisanõudmisi. Sellisteks võivad olla näiteks: värvida meri ja järv sama värviga; värvida kahest osast koosneva riigi (näiteks Pakistani) mõlemad osad sama värviga. Selleks, et neid lisanõudmisi rahuldada, tuleb nähtavasti suurendada vajalikkude värvide arvu. Seega võib sõnastada n e l j a v ä r v i p r o b l e e m i järgmise ü l d i s t u s e: *milline on värvide minimaalne arv niisuguse normaalkaardi värvimiseks, kus iga riik koosneb ülimalt kahest osast (sealjuures peavad ühe riigi osad olema värvitud sama värviga ja erinevad naaberriigid erinevate värvidega)?* Võiks oodata, et see probleem on nelja värvi probleemist veelgi raskem, kuid tegelikult osutus võrdlemisi lihtsaks ning on täielikult lahendatud. Vastus nimetatud küsimusele on: 12 värvi. Et väiksema värvide arvuga tõepoolest läbi ei saa, seda näitab joonisel 10 toodud normaalkaart. See kaart koosneb kaheteistkümnest kaheosalisest riigist, millel igaühel on ülejäänud üheteistkümne riigiga ühised servad. Seega iga riik tuleb värvida eri värviga.



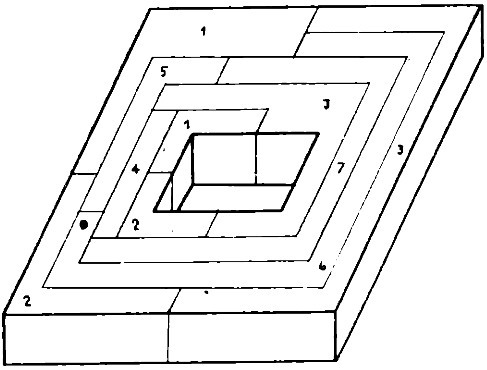
Joonis 10.

Nelja värvi probleemi t e i n e ü l d i s t u s seisneb järgmises. *Oletame, et normaalkaart paikneb kahel tasandil, kusjuures iga riik koosneb ülimalt kahest osast — üks ühel ja teine teisel tasandil* (selline probleem võib kerkida näiteks Marsi asustamisel, kui Maa riigid ei suuda omavahel kokku leppida ning Marsi territoorium tuleb nende vahel ära jaotada); *milline on minimaalne värvide arv niisuguse kaardi värvimiseks?* Joonisel 11 on näha, et see arv ei saa olla väiksem kui kaheksa, sest



Joonis 11.

kaheksast sellel joonisel esitatud riigist on igaühel ühine serv ülejäänud seitsmega. Sõnastatud probleemi kohta on küll tõestatud, et kaheteistkümnest värvist alati piisab, kuid tänapäeval pole sellest rohkem midagi teada. Prof. Ringeli arvates sobib arvudest 8, 9, 10, 11 ja 12, mis võivad praeguste andmete kohaselt olla selle probleemi lahendiks, kõige suuremal määral arv kaheksa.



Joonis 12.

Topoloogias vaadeldakse peale kerapinna veel selliseid pindu nagu toor ehk rõngaspind, «kringel» ning enam kui kahe auguga «kringlid». Nende kõigi korral võib samuti püstitada nelja värvi probleemiga analoogilise probleemi. Selgub, et kõikidel nendel pindadel on olukord teatud mõttes lihtsam kui kerapinnal. Nimelt, kui antud pinnal leidub n riiki, milledest igaüks on iga ülejäänud $n - 1$ riigi naabriks, siis otsitav värvide arv võrdub sellise n (s. o. riikide arvu) maksimaalse võimaliku väärtusega. Selline maksimaalne n on välja arvutatud järgmiste «kringlite» jaoks (k on «kringli» aukude arv):

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n	7	8	9	10	11	12	12	13	13

Ühe auguga «kringel» on toor. Joonisel 12 ongi esitatud näide kaardist toori pinnal. Sellel kaardil oleva seitsme riigi värvimiseks on vaja seitse erinevat värvi.

Küberneetika

ELEKTRONARVUTID JA PROGRAMMEERIMINE

Ü. Kaasik

Elektronarvutite kasutamine muutub tänapäeval sedavõrd laialdaseks, et peaaegu iga eriala töötajatel tuleb nendega nii või teisiti kokku puutuda. Eriti kiiresti on kasvamas selliste erialade arv, mille esindajail tuleb arvuteid kasutada mitte vahetult, vaid «kaudselt»: vormistada vastavaid ülesandeid ning valmistada neid ette arvutil lahendamiseks.

Ülesannete vormistamise ja ettevalmistamise käigus pole elektronarvutite konstruktsiooni ega isegi nendel töötamise üksikasjade põhjalik tundmine tavaliselt üldse vajalik — reeglina piisab vaid põgusast ülevaatest. Märksa paremini on vaja tunda elektronarvutite rakendamise võimalusi, aga eriti hästi peab teadma, kuidas ülesandeid elektronarvutil lahendamiseks sobival viisil esitada.

Küsimusi niisugusest küljest käsitlevat kirjandust seni eesti keeles kahjuks ilmunud ei ole. Sellepärast alustamegi käesolevaga artiklite sarja, mis on kirjutatud just elektronarvuti «kaudsete» kasutajate vajadusi silmas pidades. Sarja esimeses artiklis antakse sissejuhatav lühiülevaade elektronarvuti töötamispõhimõtteist ja nn. vahetust programmeerimisest. Kuigi arvuti «kaudsel» kasutajal tegelikke programme kunagi koostada ei tule, on selles valdkonnas vähemalt mõningate põhimõistete tundmine talle siiski oluline. Sarja teises artiklis on kavas juba põhjalikumalt kirjeldada ülesande lahendamise algoritmi esitamist programmeerimiseks sobival kujul, nn. blokk-skeemina, ning kolmandas — automaatse programmeerimise ühe konkreetse keele kasutamist lahendusalgoritmide üleskirjutamisel.

Sarja artiklite eesmärki arvestades on neis mitmed üksikasjad esitatud meelega lihtsustatud kujul, paljust pole aga hoopiski räägitud. Põhjalikuma ülevaate saamiseks võib soovitada artiklite lõpus loetletud kirjandust.

* *
*

Põhimõtteline skeem, mille järgi toimub ülesande lahendamine elektronarvutis, meenutab teatud määral inimese tegevust «käsitsi» arvutamisel. Kui inimene asub mingit ulatuslikumat ülesannet lahendama, siis peab tal kõigepealt kas kirjas või peas valmis olema tööplaan — programm, mis määrab ülesande lahendamiseks vajalikkude operatsioonide järjekorra. Selle programmi kohaselt teostabki arvutaja ettenähtud aritmeetilisi tehteid, peab meeles või kirjutab üles tulemusi, otsustab, millist võimalikku valemit kasutada, jne.

Sama töö tegemiseks peab elektronarvuti järelikult suutma vajalikke tehteid sooritada ja algandmeid ning arvutustulemusi «meeles pidada», kuid ühtlasi peab ta ka «oskama» pärast iga sammu otsustada, mida teha edasi. Nende kolme peamise funktsiooni täitmiseks ongi määratud elektronarvuti põhiseadmed — aritmeetiline seade, mäluseade ja juhtimisseade.

Aritmeetilise seadme otstarve on iseenesestmõistetav — vajalike tehete sooritamine sellesse seadmesse elektriliste signaalide näol antud arvudega. Peale tavaliste aritmeetiliste tehete sooritab see seade enamasti ka mitmesuguseid nn. *loogilisi tehteid*: arvu mingi numbrikoha väljaeraldamine, uue arvu moodustamine väljaeraldatud numbritest, arvu numbrite nihutamine vasakule või paremale, arvude võrdlemine jms.

Suuremas osas olemasolevatest elektronarvutitest kasutatakse arvude kujutamiseks ja muidugi siis ka teheteks nendega kahendsüsteemi [1], kuid ülesannete püstitamise ning lahendamiseks ettevalmistamise käigus pole kahendsüsteemi aritmeetika tundmine tavaliselt vajalik. Sageli pole sealjuures üldsegi oluline teada, millist arvusüsteemi antud arvutis kasutatakse. Sellepärast võime rahulikult eeldada, et arvuti töötab kümnendsüsteemis (muide, niisuguseid arvuteid ehitataksegi viimasel ajal üha enam).

Mäluseadme (ehk lihtsalt *mälu*) ülesandeks on säilitada nii ülesande algandmeid ja arvutustulemusi kui ka ülesande lahendamise programmi. Tehnilistel põhjustel jaguneb mäluseade enamasti kiirelt töötavaks *operatiiv-* ehk *sisemiseks mäluks* ja tunduvalt aeglasemalt töötavaks *väliseks mäluks*. Viimast kasutatakse vaid siis, kui ülesande lahendamisel vajalik informatsioon ei mahu operatiivmällu ära ja tuleb välisesse mällu (nagu lattu!) ajutiselt hoiule saata. Ülesannete püstitamise ja ettevalmistamise käigus peab niisuguse tagavaramälu olemasolu muidugi silmas pidama, kuid põhiline on ikkagi see, et arvuti kogu töö toimub erandituit operatiivmälu baasil. Seetõttu võib välise mäluga seotud küsimused esimesel tutvumisel kõrvale jätta.

[1] Vt. Tamme, E., Positsioonilised arvusüsteemid. — Käesolev kogumik, lk. 43—50.

Kuigi arvutite mäluseadmete ehitamisel kasutatakse väga mitmesuguseid füüsikalisi põhimõtteid, on nende funktsioneerimine peaaegu kõikides tänapäeva arvutites tegelikult ühesugune.

Mälu põhiliseks koostisosaks on *pesa* — seade ühe arvu salvestamiseks. Arvuti tüübist ja otstarbest sõltuvalt võib operatiivmälu pesade arv olla mõnest sajast kuni mitme tuhandeni (välise mälu pesade arv ulatub paljudel arvutitel miljonitesse). Samuti on arvuti konstruktsiooniga määratud pesade pikkus, s. t. ühte pesasse salvestatavate numbrikohtade maksimaalne arv (erinevates arvutites kuuest kuni neljateistkümneni).

Mälu igale pesale on omistatud kindel järjekorranumber — selle pesa *aadress*. Igal pesal on erinev aadress (nendeks on järjestikused naturaalarvud, alates 000-st kuni näiteks 999-ni), mis võimaldabki pesasid üksteisest eristada. Aadresside järgi toimub ka pesade nimetamine. Näiteks öeldes «pesa A» mõeldakse sellega pesa, mille aadressiks on arv A.

Seega iga pesa puhul on meil tegemist kahe arvuga: üks on sellele pesale alatiseks omistatud aadress ja teine selles pesas salvestatud arv, mida tavaliselt nimetatakse ka vastava *pesa sisuks*. Viimast on arvuti töö käigus võimalik tarbe korral muuta, esimest aga mitte. Nende kahe arvu vahel vahe tegemiseks kasutatakse elektronarvuteid käsitlevas kirjanduses isegi erilist sümboolikat. Nimelt kui mingi pesa aadress on tähistatud näiteks tähega A, siis selle pesa sisu tähistatakse sümboliga (A). Vastupidi, kui mingi arv on tähistatud tähega a, siis arvu a salvestamiseks kasutatud pesa aadressi märgitakse sümboliga $<a>$. Näiteks kirjutis

$$<315>$$

tähendab selle pesa aadressi, kus salvestatakse arvu 315.

Selleks, et mingit salvestatud arvu mäluseadmest kätte saada, tuleb arvutile teatada vastava pesa aadress, s. t. peab olema teada, millisesse pesasse see arv on salvestatud. Samuti tuleb muidugi ka arvu salvestamisel kindlaks määrata selle pesa aadress, kuhu arvu soovitakse salvestada.

Juhtimisseadme ülesandeks on arvuti üksikute seadmete koostöö koordineerimine ja juhtimine vastavalt ülesande lahendamise programmile. *Programm* on järjestikku teostamisele tulevate elementaaroperatsioonide loetelu. Selle loetelu elementideks on käsud. *Käsk* on programmi selline osa, mis salvestatakse mälu ühte pesasse ja mille täitmine tähendab ühe arvutis ette nähtud elementaaroperatsiooni teostamist. Nendeks operatsioonideks on kõik aritmeetilises seadmes sooritatavad tehted, aga samuti mitmesuguste abiseadmete poole pöördumised (näiteks arvu trükkimine, arvu lugemine perfokaardilt jms.) ja nn. juhtimisoperatsioonid.

Enamikus tänapäeva arvutites täidetakse programmi käsud nende salvestamiseks kasutatud pesade aadresside järjekorras. Tarbe korral saab seda järjekorda aga muuta eriliste juhtimiskäskude abil. Lihtsaim juhtimiskäsk annab pesa aadressi, milles paiknevast käsust alates tuleb jätkata programmi täitmist (juhtimise nn. tingimusteta suunamine). Enamik juhtimiskäske muudavad aga programmi käskude täitmise järjekorda sõltuvalt mingi tingimuse täidetusest (selliseid käske nimetatakse tingimuslikeks suunamisteks). Niisuguseks tingimuseks võib mõnes arvutis olla eelmise käsu täitmise tulemusena saadud arvu märk: kui see arv on positiivne, siis jätkatakse programmi käskude täitmist endises järjekorras, vastupidisel juhul aga alates teatud etteantud aadressiga pesas paiknevast käsust. Teine sageli kasutatav võimalus tingimuse saamiseks on kirjeldatud järgmisel leheküljel.

Iga käsk kujutab endast arvu (ainult arve saabki mälu pesasse salvestada!). Selle arvu paar esimest numbrikohta määravad ära sooritatava operatsiooni (need numbrikohad moodustavad nn. operatsiooni koodi), ülejäänud määravad aga operatsioonist osavõtvate arvude salvestamiseks ettenähtud pesade aadressid (see on käsu aadressiosa). Et aritmeetilistes tehetes on enamasti tegemist kolme arvuga (näiteks kaks liidetavat ja summa), siis peab käsk oma kõige loomulikumal kujul sisaldama kolm aadressi. Seega jaguneb käsku kujutav arv neljaks osaks: operatsiooni koodiks ja kolmeks aadressiks. Kuigi mälu pesasse salvestamisel nende osade vahel mingit eraldajat ei ole, on käsu üleskirjutamisel parema loetavuse huvides siiski kasulik jätta väikesed vahed. Üleskirjutatult näeb käsk seega välja näiteks

$$03\ 743\ 500\ 273,$$

mälus tuleb ta aga salvestamisele arvuna

$$03743500273.$$

Kui operatsiooni kood ja aadressid pole konkretiseeritud, vaid on tähtedega asendatud, siis kirjutatakse (nn. täheliste aadressidega) käsk üles näiteks kujul

$$\alpha ABC,$$

kus α tähistab operatsiooni koodi ja A, B, C aadresse (viimases näites oli $\alpha = 03$, $A = 743$, $B = 500$ ja $C = 273$).

Elektronarvutis teostatavate elementaaroperatsioonide loetelu on iga arvutitüübi puhul erinev. Enamasti pole aga ülesannete püstitamiseks tingimata tarviski seda loetelu kõikides üksikasjades tundma õppida, — piisab vaid põhiliste operatsioonide tundmisest. Tabelis 1 ongi näitena toodud elektronarvuti mõned kõige olulisemad operatsioonid ja neile vastavad käsud. Tabeli viimases veerus on ühtlasi antud operatsiooni tulemus. Näiteks liitmise tulemusel saadakse pesasse C pesades A ja B salvestamisel olevate arvude summa (viimaste pesade sisu operatsiooni käigus ei muutu).

Tabelis 1 toodud tingimuslikes suunamistes võetakse tingimuse täidetuse puhul järgmiseks täitmisele pesas C paiknev käsk (sel korral öeldakse ka, et juhtimine antakse pesasse C), vastasel juhul aga jätkatakse programmi käskude täitmist endises järjekorras. Olgu märgitud, et tingimusteta suunamisena võiks kasutada ka näiteks käsku 22 AAC, kuid eelistada tuleb operatsiooni koodiga 20, sest selle teostab arvuti kiiremini (jääb ära tingimuse kontrollimine).

Tabel 1

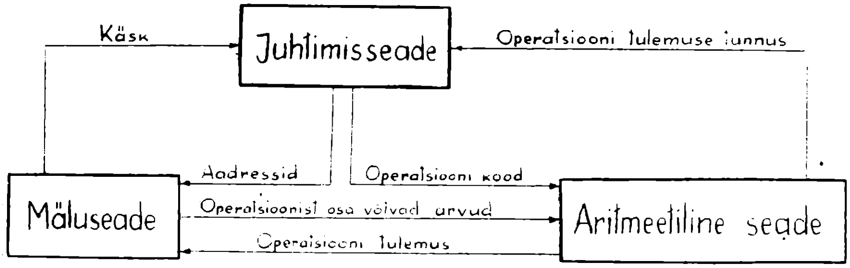
Operatsiooni kood	Operatsiooni nimi	Käsu kuju	Operatsiooni tulemus
01	liitmine	01 ABC	$(C) = (A) + (B)$
02	lahutamine	02 ABC	$(C) = (A) - (B)$
03	korrutamine	03 ABC	$(C) = (A) \cdot (B)$
04	jagamine	04 ABC	$(C) = (A) : (B)$
05	arvu üleviimine	05 $A0C$	$(C) = (A)$
20	tingimusteta suunamine	20 $00C$	järgmisena täidetakse käsk (C)
21	tingimuslik suunamine I	21 ABC	kui $(A) > (B)$, siis järgmisena täidetakse käsk (C)
22	tingimuslik suunamine II	22 ABC	kui $(A) = (B)$, siis järgmisena täidetakse käsk (C)
30	trükkimine	30 $A00$	trükitakse arv (A)
31	perfokaardilt lugemine	31 $00C$	loetakse perfokaardilt üks arv ja viiakse pesasse C
40	peatus	40 000	arvuti peatub

Märkus. Mõningates käskudes ei kasutata kõiki aadresse: tabelis on nende aadresside kohale kirjutatud nullid.

Pöördume nüüd juhtimisseadme funktsioneerimise juurde tagasi. Juhtimisseade alustab oma töötakti sellega, et võtab mälu teatavast pesast (selle pesa aadress on salvestatud juhtimisseadme spetsiaalses ühepesalises mälus, nn. **käskude loendajas**) käsu ning jaotab selle operatsiooni koodiks ja aadressideks. Vastavalt operatsiooni koodile annab ta aritmeetilisele seadmele signaali valmistuda selle operatsiooni sooritamiseks. Edasi kutsub juhtimisseade vastavalt käsu aadressidele mälust välja vajalikud arvud, laseb aritmeetilisel seadmel sooritada ettenähtud tehte ning saadab tulemuse käsu kolmanda aadressiga määratud pesasse. Seejärel suurendab juhtimisseade käskude loendaja sisu ühe võrra, võtab mälust järgmise käsu ja seega alustab uut takti.

Juhul kui järjekordne käsk osutub juhtimiskäsuks, jääb tulemuse salvestamine muidugi ära. Selle asemel väljastab aritmeetiline seade operatsiooni tulemuse mingi tunnuse (tingimusliku suunamise I korral näiteks vahe $(A) - (B)$ märgi), mille järgi juhtimisseade tarbe korral lihtsalt muudab käskude loendaja sisu arvuks C.

Skemaatiliselt võib arvuti põhiseadmete koostööd kujutada nii, nagu on tehtud joonisel 1.



Joonis 1.

Ülesande lahendamine elektronarvuti abil algab tavaliselt sellega, et vastav programm ning algandmed viiakse nende jaoks ettenähtud pesadesse. Seejärel antakse käskude loendajasse (käsitsi) selle pesa aadress, milles paiknevast käsust alates tuleb programmi täitma hakata, ning arvuti käivitatakse. Edasi toimub kogu ülesande lahendamine juba automaatselt, ilma inimese vahelesegamiseta.

Seega ainsaks põhiliseks tööks, mis ülesande lahendamisel jääb inimese teha, on p r o g r a m m e e r i m i n e, s. t. käskude jada moodustamine, mille täitmise tulemusena arvuti lahendab seatud ülesande. Järgnevalt selgitamegi programmeerimise kõige lihtsamaid võtteid paari elementaarse näite varal. Sealjuures eeldame, et ülesande lahendamise käik on juba esitatud arvutamiseks sobiva algoritmi (lahendamiseeskirja) kujul.

Programmi koostamisele asumisel tuleb kõigepealt leida tehete sooritamise kõige otstarbekohasem järjekord. Selle järjekorra selgitamise käigus jaotatakse ülesande lahendamine tavaliselt võimalikult iseseisvateks osadeks — b l o k k i d e k s. Need blokid kujutatakse näiteks ristkülikutena ja ühendatakse nooltega, mis näitavad blokkide täitmise järjekorda. Nii saame programmi jaoks nn. b l o k k - s k e e m i. Edasi koostatakse käsud juba iga bloki jaoks eraldi ja ühendatakse nad siis programmiks nooltega määratud järjekorras.

Enne üksikute blokkide programmeerimist tuleb veel kindlaks määrata ülesande lahendamiseks vajaliku informatsiooni (programmi, algandmete, vahepealsete tulemuste) paigutus arvuti mälus. Sellega seoses kerkib üles järgmine raskus: enne käskude koostamist ei ole võimalik mälu otstarbekohaselt jaotada, sest me ei tea programmi käskude ega ka vahepealsete arvutustulemuste salvestamiseks vajalike pesade arvu; kui me aga ei tea, millistes pesades salvestatakse algandmeid, käske ning vahepealseid tulemusi, siis me ei saa välja kirjutada ka programmi käskude aadresse.

Sellest raskusest ülesaamiseks kasutatakse programmeerimisel pesade aadresside asemel esialgu tähelisi sümboleid (näiteks suuri tähti A, B, C, ...), mis alles lõpuks asendatakse konkreetsete arvudega. Niisugune tähistusviis hõlbustab ühtlasi saadava programmi muutmist ning parandamist.

Elektronarvutit on otstarbekohane kasutada vaid siis, kui ülesande lahendamine osutub väga töömahukaks — nõuab kümnete või sadade tuhandete tehete sooritamist. Et arvuti sooritaks ühe tehte, selleks peab programmis leiduma vastav käsk. Siit võib jääda mulje, nagu peaks ülesande lahendamise programm sisaldama vähemalt samapalju käske, kuipalju tehteid on tarvis sooritada selle ülesande lahendamisel. Oleks see tõepoolest nii, siis kaotaksid elektronarvutid üldse mõtte: ühe käsu väljakirjutamine võtab ju peaaegu sama palju aega kui vastava tehte sooritamine käsitsi või aritmomeetriga. Milleks siis veel tuhandeid tehteid sekundis teostav arvuti!

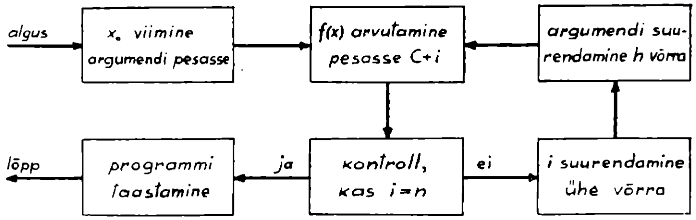
Programmi käskude arvu tunduvalt vähendada võimaldab asjaolu, et ülesannete lahendamise algoritmid on praktiliselt kõik **tsüklilised**, s. t. seisnevad korduvas arvutamises ühtede ning samade valemite järgi, kusjuures igakordsel arvutamisel kasutatakse küll üldiselt uusi lähteandmeid. Tsüklilise algoritmi programmeerimisel koostatakse ka programm tsüklilisena — sellisena, milles käskude teatud rühma tuleb täita korduvalt. Selleks, et arvutustest võtaksid osa iga kord uued lähteandmed, tuleb enne kordamist tavaliselt muuta mõnede käskude aadresse. Käskude aadresside muutmine on aga arvutis lihtsalt realiseeritav: käsud on mälu pesades salvestatud ju täpselt samuti nagu arvud ja nendega võib teostada kõiki aritmeetilisi ning loogilisi tehteid.

Vaatleme tsüklilise programmi koostamise käiku ühe konkreetse näite varal. Olgu meil edasiste arvutuste jaoks tarvis koostada funktsiooni $f(x)$ tabel argumendi väärtustel x_0, $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_0 + 2h$, ..., $x_n = x_0 + nh$. Et saadavat tabelit oleks hiljem lihtsam kasutada, paigutame ta järjestikustesse pesadesse C, $C+1$, $C+2$, ..., $C+n$ nii, et kehtiks seos

$$(C+i) = f(x_i) \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Kõigepealt koostame programmi blokk-skeemi. Põhiliseks blokiks on muidugi see, mis vastavalt mingis pesas salvestatud argumendile x arvutab suuruse $f(x)$. Kui $f(x)$ arvutamise programm on üheks blokiks kokku võetud, siis pole selle funktsiooni tegeliku avaldise teadmine oluline. See tähendab, et saadav blokk-skeem kõlbab igasuguse funktsiooni tabeli arvutamiseks.

Programmi töö peab algama nähtavasti sellega, et x_0 viiakse argumendi jaoks ettenähtud pesasse. Seejärel arvutatakse $f(x_0)$ ning salvestatakse see pesasse C. Nüüd tuleb argumenti h võrra suurendada ja hoolitseda, et funktsiooni järgmise väärtuse salvestamine toimuks juba ühe võrra suurema aadressiga pesasse (selleks peame ühe võrra suurendama vastava käsu kolmandat aadressi). Edasi võib lasta jälle töötada $f(x)$ arvutamise blokil ning korrata seda seni, kuni funktsiooni viimane väärtus $f(x_n)$ on salvestatud pesasse $C+n$. Selleks et arvuti «teaks», millal on paras aeg töö lõpetada, võib kasutada järgmist võtet. Iga kord pärast funktsiooni järjekordse väärtuse salvestamist kontrollitakse, kas see salvestamine toimus pesasse $C+n$. Eitaval juhul jätkatakse tsükli kordamist, jaatava vastuse korral aga lõpetatakse töö.



Joonis 2.

Seega oleme saanud oma programmi blokk-skeemi joonisel 2 näidatud kujul. Sellel joonisel on tehtud ainult veel üks täiendus — blokk «programmi taastamine». Nimelt tuleb vaadeldava programmi töötamise käigus pidevalt muuta ühe käsu üht aadressi. Järelikult pärast töö lõppu paikneb arvutis juba programm, mis pole enam identne esialgsega. Juhul kui sama programmi on aga hiljem vaja veel kord kasutada (näiteks kontrolliks), tuleb ta enne t a a s t a d a, s. t. anda kõikidele käskudele nende esialgne kuju.

Saadud blokk-skeemist lähtudes võibki alustada programmi enda koostamist. Enne tuleb vaid konkretiseerida funktsioon $f(x)$ (saadava programmi järgi arvutamiseks peavad muidugi olema konkretiseeritud ka veel arvud x_0, h ja n). Selleks, et esimest näidet mitte tarbetult keeruliseks ajada, valime lihtsalt

$$f(x)=\frac{3x^3+4}{x^2+7}.$$

Programmi koostamisele asumiseks lepime kokku kõigepealt informatsiooni paigutamise suhtes. Paigutame saadava programmi näiteks pesadesse A, $A+1$, ..., algandmed pesadesse B, $B+1$, ... ning arvutuste käigus tekkivad vahetulemused pesadesse D, $D+1$, ... (vastuste pesade aadressid C, $C+1$, ..., $C+n$ tähistasime juba ülesande püstitamise käigus). Mõnede pesade sisu võime kohe täpsemalt ära määrata. Pesa D olgu nimelt määratud argumendi x salvestamiseks, põhilised algandmed aga paigutame pesadesse järgmiselt (arvu n paigutuse jätame esialgu lahtiseks, sest alles hiljem selgub, millisel kujul on seda kasulik salvestada):

$$(B)=x_0,\quad (B+1)=h,\quad (B+2)=3,\quad (B+3)=4,\quad (B+4)=7.$$

Pärast neid kokkuleppeid võime asuda käskude väljakirjutamisele, kasutades tabelis 1 toodud operatsioonide koode.

Esimene blokk — «x_0 viimine argumendi pesasse» — on realiseeritav üheainsa käsuga

$$(A)=05\,B0D,$$

kus käsu ette kirjutatud aadress tähendab, et see käsk ise tuleb salvestada pesasse A.

Järgmine blokk — «$f(x)$ arvutamine pesasse $C+i$» — peab esimesel korral salvestama vastuse pesasse C. Seda võib sooritada järgmise kuue käsu abil:

$(A+1)=03$	D	D	$D+1$	(x^2 pesasse $D+1$),
$(A+2)=01$	$D+1$	$B+4$	$D+2$	(x^2+7 pesasse $D+2$),
$(A+3)=03$	D	$D+1$	$D+1$	(x^3 pesasse $D+1$),
$(A+4)=03$	$D+1$	$B+2$	$D+1$	($3x^3$ pesasse $D+1$),
$(A+5)=01$	$D+1$	$B+3$	$D+1$	($3x^3+4$ pesasse $D+1$),
$(A+6)=04$	$D+1$	$D+2$	C	($f(x)$ pesasse C).

Iga käsu taha on siin kirjutatud selgitav märkus, mille vilunud programmeerija enamasti tegemata jätab, kuid mis alguses on üpris kasulik. Paneme veel tähele, et vahetulemuste salvestamiseks on antud juhul kasutatud kaht pesa $D+1$ ja $D+2$, kusjuures pesasse $D+1$ võis viia uue arvu, niipea kui sinna salvestatud x^2 enam vajalikuks ei osutunud (pesasse uue arvu viimisel vana kustub).

Viimase programmiosa sõltuvus järjekorranumbrist i pole üleskirjutatust küll vahetult nähtav, kuid nagu juba öeldud, seisab i suurendamine siin lihtsalt selles, et suurendatakse viimase käsu viimast aadressi ühekaupa seni, kuni see käsk omandab kuju 04 $D+1$ $D+2$ $C+n$. Seega järjekordse bloki — «kontroll, kas $i=n$» — võib realiseerida sel teel, et kontrollitakse, kas pesas $A+6$ paiknev käsk on juba omandanud niisuguse kuju. Selle kontrolli teostamiseks tuleb koos algandmetega salvestada ka arv

$$(B+5)=04\quad D+1\quad D+2\quad C+n.$$

Seda arvu kasutades võib vaadeldava bloki programmeerida üheainsa käsuga:

$$(A+7)=22 \quad A+6 \quad B+5 \quad ? \quad .$$

Selle käsu viimane aadress tuleb esialgu jätta lahtiseks, sest me ei tea veel, millistes pesades paiknevad programmi viimast blokki realiseerivad käsud.

Järgmine blokk — «i suurendamine ühe võrra» — seisneb käsu $(A+6)$ viimase aadressi suurendamises ühe võrra. Selleks peab jälle koos algandmetega salvestama arvu

$$(B+6)=00\,0\,0\,1,$$

mille abil i suurendamine on teostatav järgmiselt:

$$(A+8)=01 \quad A+6 \quad B+6 \quad A+6.$$

Bloki «argumendi suurendamine h võrra» saaks muidu realiseerida ühe käsuga, kuid peab arvestama, et pärast tuleb juhtimine anda jälle $f(x)$ arvutamise blokile. Seega saame kokku kaks käsku:

$$(A+9)=01 \quad D \quad B+1 \quad D,$$
$$(A+10)=20 \quad 0 \quad 0 \quad A+1.$$

Programmi viimases blokis — «programmi taastamine» — tuleb anda käsule $(A+6)$ selle esialgne kuju tagasi. Kui see esialgne kuju salvestada koos algandmetega:

$$(B+7)=04 \quad D+1 \quad D+2 \quad C,$$

siis vaadeldav blokk on realiseeritav üheainsa käsuga

$$(A+11)=05 \quad B+7 \quad 0 \quad A+6.$$

Alles nüüd saame välja kirjutada käsu $(A+7)$ viimase aadressi — selleks on $A+11$.

Saadud täheliste aadressidega programmi ümberkirjutamine nn. tõelistes aadressides ei valmista enam raskust. Valides näiteks $A=100$, $B=200$, $D=250$ ja $C=300$ saame selle programmi tabelis 2 näidatud kujul. Tabeli esimeses veerus on kirjutatud käsu asukoht mälus — see ei kuulu käsu koosseisu ning on vajalik vaid programmi õigeks sisseviimiseks arvutisse. Tabeli viimases veerus toodud selgitused on enamasti kasulik programmi juurde märkida: need abistavad programmi lugemist ja selle võrdlemist blokk-skeemiga. Et vaadeldud näites x_0, h ja n polnud fikseeritud, siis on ka tabelis 2 nende kohale jäetud tähelised sümbolid.

Tsüklilise programmi koostamise otstarbekohasus on toodud näitest selgesti näha. Selle asemel, et argumendi suurendamiseks ja funktsiooni ühe väärtuse arvutamiseks vajalikku seitset käsku n korda välja kirjutada (n võib olla üsna suur!), saime me programmi, mis koos nn. ümberadresseerimiskonstantidega võtab enda alla vaid 15 pesa.

Tabel 2

Pesa	Pesas salvestatav käsk				Selgitused
100	05	200	000	250	x_0 viimine argumendi pesasse
101	03	250	250	251	
102	01	251	204	252	
103	03	250	251	251	
104	03	251	202	251	$f(x)$ arvutamine pesasse $C+i$
105	01	251	203	251	
106	04	251	252	300	
107	22	106	205	111	kontroll, kas $i=n$
108	01	106	206	106	i suurendamine ühe võrra
109	01	250	201	250	argumendi suurendamine
110	20	000	000	101	h võrra
111	05	207	000	106	programmi taastamine
200			x_0		
201			h		
202			3		
203			4		
204			7		algandmed
205	04	251	252	$300+n$	
206	00	000	000	001	
207	04	251	252	300	

Toome veel ühe näite tsüklilise programmi koostamisest. Olgu meil tarvis arvutada polünoomi

$$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

väärtus kohal x_0 (suurused $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ ja x_0 on antud). Eriti ökonoomse tsüklilise arvutusprotsessi saame polünoomi väärtuse leidmiseks siis, kui kasutame nn. H o r n e r i s k e e m i[2], mille kohaselt

$$p(x) = (\ldots(((a_0x + a_1)x + a_2)x + a_3)x + \ldots + a_{n-1})x + a_n.$$

Horneri skeemi aluseks võttes võib polünoomi väärtuse $p(x_0)$ arvutamiseks kasutada valemeid

$$\begin{aligned} p_1 &= a_0x_0 + a_1, \\ p_2 &= p_1x_0 + a_2, \\ p_3 &= p_2x_0 + a_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_{n-1} &= p_{n-2}x_0 + a_{n-1}, \\ p(x_0) = p_n &= p_{n-1}x_0 + a_n. \end{aligned}$$

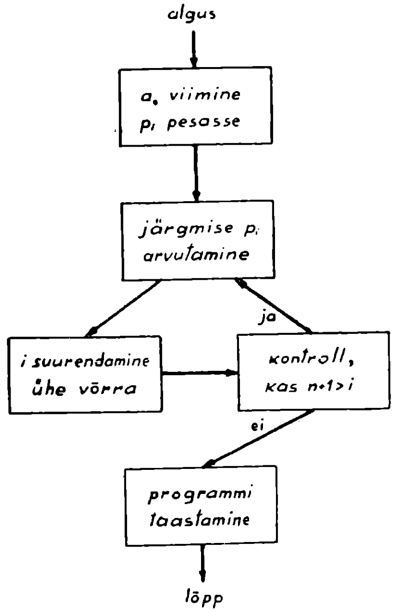
Kui veel tähistada $p_0 = a_0$, siis omandavad kõik need valemid kuju $p_i = p_{i-1}x_0 + a_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ning arvutamine taandub selle valemi n-kordsele rakendamisele. Et iga p_i läheb tarvis

[2] Vt. näiteks G a b o v i t š, J., Horneri skeem. — Matemaatika metoodiliste artiklite kogumik, I. Tln., 1963, lk. 31—47.

ainult järgmise arvutamiseks, siis võime nende kõikide salvestamiseks kasutada ühtainsat pesa. Seega, kuigi vastav valem sisaldab indeksit i kolmes kohas, peame me igal sammul muutma vaid üht aadressi: kordaja a_i tuleb igal kordamisel võtta uuest pesast. Selle ümberadresseerimise lihtsustamiseks on soovitav salvestada kordajad a_i järjestikustesse pesadesse, näiteks

$$(B+i) = a_i \quad (i = 0,1,2,\ldots,n).$$

Polünoomi väärtuse arvutamise programmi üks võimalik blokk-skeem on toodud joonisel 3, tähelistes aadressides koostatud programm on aga järgmine (siin on eeldatud, et x_0 paikneb pesas C, pesa $C+1$ kasutatakse nii suuruste p_i kui ka vahetulemuste salvestamiseks, samasse saame lõpptulemuse):



Joonis 3.

$(A) = 05$	B	0	$C+1$		(a_0 viimine p_i pesasse),
$(A+1) = 03$	C	$C+1$	$C+1$	$\Big\}$	(järgmise p_i arvutamine),
$(A+2) = 01$	$C+1$	$B+1$	$C+1$		
$(A+3) = 01$	$A+2$	D	$A+2$		(i suurendamine ühe võrra),
$(A+4) = 21$	$D+1$	$A+2$	$A+1$		(kontroll, kas $n+1>i$),
$(A+5) = 05$	$D+2$	0	$A+2$		(programmi taastamine).

Selles programmis on kasutatud abisuurusi

$$\begin{array}{llll} (D) = 00 & 0 & 1 & 0, \\ (D+1) = 01 & C+1 & B+n+1 & C+1, \\ (D+2) = 01 & C+1 & B+1 & C+1, \end{array}$$

mis peavad koos algandmetega olema salvestatud ettenähtud kohtadele.

Tsükli kordamiste arvu kontrollitakse siin sel teel, et võrreldakse muudetavat käsku sellise käsuga, kus teine aadress on maksimaalsest lubatavast ühe võrra suurem. See on vajalik selleks, et aadressi $B+n$ korral toimuks veel tagasipöördumine.

Toodud näidetest muidugi ei piisa programmeerimise kõikide üksikasjadega tutvumiseks, kuid suuremal osal elektronarvuti tegelikest kasutajaist, nagu juba öeldud, pole tarviski koostada programme nende lõplikul kujul. Tavaliselt piisab vaid blokkskeemide koostamisest. Sellega seotud küsimused võtame aga lähema vaatluse alla oma järgmises artiklis.

Elektronarvuti töötamispõhimõtete ja programmeerimise üksikasjadega veidi lähemaks tutvumiseks võib soovitada järgmist kirjandust:

1. Kaasik, Ü., Salum, H. ja Sinisoo, M. Elektron-arvutusmasinad. Tln., 1960.

2. Ляпунов, А. А. и Шестопал, Г. А. Начальные сведения о решении задач на электронных вычислительных машинах. — Математическое просвещение, вып. 1. М., 1957, lk. 57—74.

3. Архангельский, Н. А. и Зайцев, Б. И. Автоматические цифровые машины. (Популярные лекции по математике, вып. 28). М., 1958.

4. Криницкий, Н. А., Миронов, Г. А. и Фролов, Г. Д. Программирование. (Справочная математическая библиотека). М., 1963.

5. Жоголев, Е. А. и Трифонов, Н. П. Курс программирования. М., 1964.

AUTOMAADID JA ELU[1]

1. Elu määratlemine «valguskehakeste eksisteerimise erilise vormina» (Engels) oli progressiivne ja õige seni, kuni meil oli tegemist ainult Maal arenenud elu konkreetsete vormidega. Kosmonautika sajandil tekib reaalne võimalus kohata teisiti organiseeritud «mateeria liikumise vorme», millel on elusolendite ja isegi mõtlevate olendite põhilised meie jaoks tähtsad omadused. Seetõttu on elu mõiste üldisema määratlemise probleemil päris oluline tähtsus.

2. Kaasaegne elektrontehnika avab üsna avarad võimalused elu ja mõtlemise modelleerimiseks. Tänapäeva elektronarvutite diskreetne (aritmeetiline) iseloom ei tekita selles suhtes olulisi kitsendusi. Nimelt väga suurest arvust «puhtaritmeetiliselt» töötavatest elementidest koosnevatel süsteemidel võivad olla kvalitatiivselt uued omadused.

3. Kui mingi materiaalse süsteemi omadust «olla elus» või omada võimet «mõelda» määratleda puhtfunktsionaalselt (näiteks tunnistada mõtlevaks iga materiaalne süsteem, millega saab mõistlikult arutleda tänapäeva teaduse ja kirjanduse probleemidest), siis tuleb tunnistada täiesti teostatavaks elus- ja mõtlevate olendite kunstlik loomine.

4. Seejuures tuleb siiski meeles pidada, et küberneetika ja automaatika tegelikud edusammud sellel teel on tunduvalt tagasihoidlikumad kui seda populaarteaduslikes raamatutes ja artiklites mõnikord kujutatakse. Näiteks «iseõppivate», muusikat «loovate» või luuletavate automaatide kirjeldamisel lähtutakse vahel inimese kõrgema närvitegevuse ja eriti loomingulise tegevuse tegeliku iseloomu äärmiselt lihtsustatud ettekujutusest.

5. Tõelised edusammud kõrgema närvitegevuse — sealhulgas ka inimloomingu kõrgeimate avalduste — mehhanismi mõistmisel ei saa loomulikult mingil määral vähendada inimese loominguliste saavutuste väärtust ja ilu.

A. Kolmogorov

[1] Akadeemik A. Kolmogorovi ettekande «Automaadid ja elu» siin esitatud teesid on tõlgitud kogumikust «Возможное и невозможное в кибернетике». М., 1963.

OPERATSIOONIANALÜÜS

A. Jägel

Populaarteaduslikus kirjanduses on sageli räägitud küberneetikast, küberneetilistest süsteemidest, küberneetika uurimisobjektidest ja rakendusaladest. Peaaegu üldse pole aga juttu olnud ühest olulisest küberneetika suunast — opratsioonianalüüsist, milleta ei ole mõeldav küberneetika paljude tulemuste ratsionaalne ja süstemaatiline rakendamine praktikas. Alljärgnevas püüamegi lühidalt iseloomustada opratsioonianalüüsi ja tema spetsiifikat. Ühtlasi valgustame ka mõningaid põhimõttelist laadi küsimusi ja vaatleme operatsioonianalüüsi seost küberneetikaga [1]. Nimelt on mõlemate rakendusobjektiks juhtimissüsteemid; seetõttu tuleb operatsioonianalüüsi meetodite rakendamisel alati silmas pidada ka teoreetilise küberneetika valdkonda kuuluvaid küsimusi.

Alustame kõige olulisemast — operatsiooni mõistest. Operatsiooni all mõistame mistahes konkreetset protsessi või nähtust, mille korral võib täheldada teatavat eesmärgipära ja mille kulgemist saab vähemalt osaliselt mõjustada nii, et muutub selle eesmärgi saavutatavuse aste. Operatsioonianalüüsi ülesandeks ongi selliste juhtimis- ehk mõjustamiseeskirjade leidmine, mille rakendamisel eesmärgi saavutatavus meie poolt soovitud suunas võimalikult rohkem muutub.

Operatsiooni saab tavaliselt vaadelda koosnevana kahest osast: juhtivast objektist ja juhitavast objektist, kusjuures juhtimise all mõistame juhitava objekti igasugust mõjustamist juhtiva objekti poolt. Uuritava protsessi jaotamine juhtivaks ja juhitavaks objektiks sõltub suurel määral sellest, missuguseid protsessi külgede vastastikuseid mõjustusi me uurime. Enamasti polegi selline jaotamine üldse mitte operatsioonianalüüsi, vaid hoopis küberneetika ülesanne. Operat-

[1] Käesoleva artikli lugemiseks on soovitav mõningane ettekujutus küberneetikast. Selle saamiseks võib kasutada näiteks brošüüri Kaasik, Ü. ja Oja, A. Küberneetika põhisuundadest. Tln., 1963. Vt. samuti Ljapunov A. A. ja Jablonski, S. V. Küberneetika teoreetilisi probleeme. — Matemaatika ja kaasaeg, I, lk. 14—20, II, lk. 11—21, III, lk. 27—32.

sioonianalüüsi ülesannetes on juhtiv ja juhitav objekt reeglina juba eelnevalt selgelt piiritletud või vähemalt osutub nende objektide piiritlemise moment operatsiooni uurimisel tunduvalt vähem tähtsaks kui püstitatud eesmärgi saavutamine.

Rõhuv enamus operatsioonianalüüsi uurimisobjektiks olevatest protsessidest pärineb inimeste majandusliku tegevuse valdkonnast. Näiteks võib operatsioonianalüüsi ülesandeks olla põllumajandusliku ettevõtte niisuguste juhtimiseeskirjade leidmine, mis võimaldavad kõige täielikumal määral saavutada püstitatud eesmärke. Analüüsitavaks operatsiooniks on siis ettevõtte kogu tegevus, juhitavaks objektiks tema toodang, juhtivaks objektiks aga kõik tegurid, millest toodang sõltub (ilmastik, ettevõtte juhtkonna ja töötajate võimalikud aktsioonid, avariide sagedused, kultuuride saagikused antud mullastikutingimustes jne.). Ilmselt pole selle operatsiooni puhul küsimus mitte niivõrd selles, mis on juhtiv ja mis juhitav objekt, küll aga selles, kuidas kõiki tingimusi arvesse võttes tagada näiteks võimalikult suur toodang.

Operatsioonianalüüsi sisuks ongi operatsioonide uurimine eeskätt matemaatiliste meetoditega, kusjuures eesmärgiks on välja töötada varem olemasolevatest efektiivsemad juhtimiseeskirjad (juhtimisviis). Efektiivsema juhtimisviisi all mõistetakse siin sellist, mis annab teatavale kollektiivile *mingis mõttes* suuremat kasu.

Juhtimiseeskirjade väljatöötamisel tuleb vahet teha juhtimisviisi täiustamise ja juhtimisviisi korrigeerimise vahel. Esimese all mõistetakse juhtimisviisi muutmist uue kvaliteedi tekkimise arvel, teise all aga selle parandamist kvantitatiivsete muutuste näol. Viimase küsimusega tegelebki peamiselt operatsioonianalüüs, esimene langeb aga tavaliselt kogu küberneetika osaks. Näiteks arvutustehnika (elektronarvutite) laialdane kasutuselevõtmine juhtimistegevuses on kvalitatiivselt erinev möödunud sajandi juhtimisviisidest. Kuidas aga olemasolevat arvutustehnikat rakendada nii, et kõik arvutuslikud vajadused oleksid rahuldatud minimaalsete kulutustega ja õigeaegselt — see on tüüpiline operatsioonianalüüsi ülesanne. Võib üldse ütelda, et operatsioonianalüüsi ülesannetes seisneb küsimus just olemasolevate vahendite ja võimaluste *teatud mõttes parimas* ärakasutamises. Märgime siinkohal, et operatsioonianalüüsi üks ülesandeid seisneb veel juhtimisviisi kvaliteedi muutmise vajaduse ja suuna kättenäitamises.

Nähtuste uurimisel küberneetika seisukohalt ei ole tavaliselt oluline, kas juhtiv objekt (või selle teatav osa) on võimeline käituma eesmärgipäraselt ja vastu võtma teadlikke otsuseid. Kui aga kerkib küsimus juhtimisviisi korrigeerimisest, siis on tarvilik (kuid mitte piisav), et vähemalt üks osa juhtivast objektist ja selle käitumisest oleks juhtimine tavalises mõttes. Juhtimine tavalises mõttes on juhitava objekti eesmärgipärane ja teadlik mõjustamine antud eeskirjade piirides. Sellisteks eeskirjadeks võivad olla näiteks valitsuse määrused, ministeeriumide korraldused, juhtkonna otsused, iga liiki normatiivid, tehnilist ja looduslikku laadi tingimused, ressursside piiratus jne. Torkab kohe silma, et niisugustel kvalitatiivset laadi eeskirjadel on omadus, et nad ei määra tegelikult toimuvat juhtimist (s. t. juhtimise kvantitatiivset külge) üheselt iga konkreetse olukorra jaoks, vaid piiritlevad ainult võimalike otsuste klassi, millest sobiva valimine sõltub vaid nn. juhtimiskeskuse suvast.

Juhtivast objektist tuleb nimelt eristada juhtimiskeskust, sest need ei lange alati kokku. Operatsioonianalüüsi eesmärgiks ongi korrigeerida ühe või teise konkreetse juhtimiskeskuse, mitte aga kogu juhtiva objekti tegevust. Paljude operatsioonide puhul ei ole kogu juhtiva objekti tegevuse korrigeerimisel üldse mingit mõtet. Niisuguse olukorraga puutume kokku näiteks kahe vaenuliku leeri vahelises lahingus, kus juhtivaks objektiks on mõlema poole kõikvõimalikke aktsioone läbiviivad kollektiivid ja mitmed juhusest sõltuvad tegurid, juhtimiskeskusteks aga kummagi võitleva poole aktsioonide juhtijad eraldi võetuna. Ilmselt ei ole sellise operatsiooni puhul mõtet rääkida lahingutegevuse parandamisest mõlema võitleva poole jaoks samaaegselt, sest ühe poole edukas tegutsemine tähendab teisele poolele lüüasaamist. Samuti pole eespool põllumajandusliku ettevõtte tegevuse uurimise kohta toodud näites võimalik korrigeerida ilmastiku, avariide sageduste ja teiste juhusest sõltuvate tegurite mõju. Juhtimiskeskuse tegevuse moodustavad selles näites seega vaid ettevõtte juhtkonna ja töötajate võimalikud aktsioonid.

Üldiselt koosneb juhtiv objekt kaht liiki keskustest: juhtimiskeskustest ja statistilistest keskustest. Statistiline keskus on niisugune, mille käitumises puudub eesmärgipärasus, mille aktsioonid on juhuslikku laadi ja esinevad vaid teatud sagedustega. Tõenäosusteooria kohaselt võib erinevaid juhuslike väärtustega sündmusi alati kokku võtta üheks juhuslikuks sündmuseks, seetõttu võib eeldada, et statistilisi keskusi on ülimalt üks. Seega operatsiooni juhtiva objekti struktuur peab olema järgmine: vähemalt üks juhtimiskeskus ning ülimalt üks statistiline keskus.

Teatavasti rajaneb suurem osa küberneetikast kujutlusel juhtimisprotsesside ja juhtimissüsteemide ehituse diskreetsusest. Vastavalt sellele toimub ka operatsioonianalüüsis juhtiva ja juhitava objekti käitumise iseloomustamine enamasti nn. seisundite abil. Seisund on juhtiva objekti (või juhitava objekti) käitumisviis kindla pikkusega ajavahemikus, kusjuures kahte seisundit loetakse erinevaks juba siis, kui neile vastavad käitumisviisid selle ajavahemiku vältel erinevad kas või mõneski üksikasjas. Seisundit vaatleme alati ühtse tervikuna ning eeldame, et üleminek ühelt seisundilt teisele toimub diskreetselt. Seisunditeks jaotamine ei saa muidugi toimuda päris suvaliselt, vaid tuleb silmas pidada seda, et juhtiva objekti igale seisundile vastav juhitava objekti seisundite hulk koosneks terviklikest seisunditest, mitte aga seisundite mingitest osadest. Teiselt poolt peavad juhitava objekti seisundid olema niisugused, et nende kaudu oleks võimalik operatsiooni tulemust meid huvitava eesmärgi suhtes hinnata. Et juhtimiskeskuse tegevust piiravad eeskirjad määravad ära juhtimiskeskuse võimalikud käitumisviisid, siis nendega on sisuliselt määratud ka juhtimiskeskuse võimalikud seisundid. Seega juhtiva objekti seisund on juhtimiskeskuste ja statistilise keskuse samaaegselt esineda võivate seisundite kompleks.

Mis puutub juhtiva objekti ja juhitava objekti seisundite arvusse, siis tuleb kohe märkida, et rõhuva enamiku praktilise väärtusega operatsioonide puhul on see väga suur. Seetõttu on ka loomulik, et operatsioonide uurimisega seotud arvutuslikke töid saab sooritada ainult elektronarvutite kaasabil. Matemaatiliste meetodite rakendamisel operatsiooni uurimiseks on seisundi mõistel põhiline tähtsus, sest uurimistöö järgmine etapp algabki tavaliselt sellega, et nii juhtimiskeskuse kui ka juhitava objekti igale seisundile seatakse vastavusse matemaatilist laadi suurused. Operatsiooni edasise uurimise oluliseks osaks on nende matemaatiliste suuruste vaheliste seoste leidmine.

Enne operatsiooni tegeliku uurimise kirjeldamisele asumist tuleb veidi peatuda veel ühel juhtimisviisi korrigeerimisega seoses oleval küsimusel. Nagu juba öeldud, mõistetakse antud operatsiooni juhtimisviisi korrigeerimise all olemasolevatest efektiivsema käitumiseeskirja väljatöötamist mingi konkreetse juhtimiskeskuse jaoks, s. t. juhtimiskeskuse *teatud mõttes parima* seisundi leidmist. Juhtimisviisi korrigeeritakse enamasti nn. efektiivsuse kriteeriumi kaudu. Efektiivsuse kriteerium on sisuliselt eeskiri, mis defineerib juhtimiskeskuse seisundite hulgas teatava osalise järjestuse, s. t. võimaldab vähemalt teatud osa seisundite korral otsustada, missuguseid nendest tuleb eelistada.

Juhtimisviisi parandamise põhjalikkuse seisukohalt tuleb eristada kolme korrigeerimise astet: juhtimisviisi lihtne korrigeerimine, juhtimisviisi optimiseerimine ja prognooside koostamine ühe või teise juhtimisviisi arengu kohta. Esimest tüüpi operatsioonide puhul väljendatakse efektiivsuse kriteerium juhitava objekti seisundeid piiravate kitsenduste näol, s. t. vaatluse alla võetakse kõik teatud mõttes head seisundid. Ülesande lahendiks peetakse siin juhtimiskeskuse mistahes seisundit, millele vastavad juhitava objekti seisundid rahuldavad püstitatud kitsendusi. Matemaatiliselt tähendab see paljulahendilise ülesande esimese ettejuhtuva lahendi valimist. Optimiseerimise korral juhitava objekti seisundeid ei kitsendata, vaid püütakse efektiivsuse kriteerium avaldada niisuguse funktsioonina, mille argumentideks on juhtimiskeskuse seisundid ja väärtusteks reaalarvud, kusjuures suuremale reaalarvule vastab juhitava objekti parem seisund. Optimiseerimine tähendab seega matemaatiliselt teatava ekstreemumülesande lahendamist (kui sama operatsiooni puhul püstitame mõlemad ülesanded, siis optimaalne lahend peab olema ka korrigeerimisülesande lahendiks, vastupidine olukord aga peaaegu kunagi aset ei leia).

Tunduvalt keerulisemad on prognoosimise ülesanded, kus eelnevatele probleemidele lisandub veel juhtimisviisi arengujoone õige ennustamise vajadus. Seetõttu ei tegelda prognoosimise korral mitte ainult ühe tegelikkuses esineva operatsiooniga, vaid vaatluse all on terve rida põhiliselt hüpoteetilist laadi operatsioone. Efektiivseks lahendiks loetakse siin operatsiooni, mis on ennustatud arengujoonega kõige paremini kooskõlas.

Vaatleme näitena põlevkivi transportimist põlevkivikaevandustest Eesti NSV linnadesse. Kui eesmärgiks seada vedude niisugune ümberkorraldamine, et kõikide linnade aastased põlevkivivajadused saaksid rahuldatud senisest 10% võrra madalamate veokuludega, siis on tegemist lihtkorrigeerimisülesandega. Kui aga nõuda, et põlevkivi veokulud oleksid minimaalsed, siis saame optimiseerimise ülesande. Prognoosimise ülesanne võib toodud näite korral kujuneda järgmiste kaalutluste tulemusel. Põlevkivi transportimine tähendab sisuliselt linnadele teatud kalorite hulga andmist. Seda arvestades võib aga osutuda hoopis otstarbekamaks minna osa põlevkivi gaasistamise teed ja ehitada suuremate linnadeni gaasijuhtmed. Siit kerkib aga kohe uus küsimus: kuivõrd perspektiivne on põlevkivi gaasistamine, sest sama põlevkivi varudele võib ju ehitada elektrijaama ja vedada või parandada elektrijuhtmeid mistahes linnani.

Märgime kohe, et mitte kaugeltki kõikide analüüsitavate operatsioonide korral ei ole selge, mida tuleb seal muuta efektiivsemaks. Praktikast võetud operatsioonides peab nimelt juhtimiskeskus oma põhieesmärkide kõrval sageli silmas pidama ka teisi eesmärke, mis on esimestele kas enam või vähem vastandlikud. Seetõttu ei ole efektiivne juhtimisviis tavaliselt igas suhtes parim juhtimisviis, vaid on mingis mõttes parim kompromiss vastuoluliste eesmärkide saavutamisel. Seega efektiivsuse kriteerium on nagu mõõt, mis näitab, kui palju võib mõningaid eesmärke teiste eesmärkide saavutamiseks ignoreerida.

Vaatleme nüüd operatsioonianalüüsi ülesande püstitamise ja lahendamise põhimõttelist käiku.

Sageli esitatakse operatsioonianalüüsi ülesanne umbes järgmises sõnastuses: *«Kas — ja kui, siis kuidas — on võimalik parandada nii-ja-niisuguse operatsiooni juhtimist?»* Niisuguses sõnastuses pole viidetki näiteks sellele, kas tegemist on lihtsa korrigeerimise, optimiseerimise või isegi prognoosimise ülesandega. Samuti ei sisalda see sõnastus enamasti ka lähemalt määratletud efektiivsuse kriteeriumi (pole täpsustatud, mida tähendab termin «parandada»). Kõik need küsimused tuleb selgitada juba operatsiooni analüüsimise käigus.

Analüüs algab tavaliselt operatsiooni kvalitatiivse uurimisega — eraldatakse juhitav objekt, juhtiv objekt ja viimases juhtimiskeskused ning statistiline keskus. Edasi toimub juba kvantitatiivne analüüs, mille esimese etapina püütakse koostada operatsiooni põhimõtteline kvantitatiivne kirjeldus. Selle kirjelduse peamised koostisosad on järgmised.

1. Juhitava objekti, juhtiva objekti (sealhulgas ka juhtimiskeskuste ja statistilise keskuse) seisundid.

2. Seosed juhtimiskeskuste, statistilise keskuse ja juhitava objekti seisundite vahel.

3. Meid huvitava juhtimiskeskuse tegevuse efektiivsuse kriteerium.

Kõige suuremat raskust valmistab siinjuures teisena nimetatud seoste leidmine. See on ka arusaadav, sest nende seoste süsteem moodustab ju vaadeldava operatsiooni nn. loogilis-matemaatilise mudeli. Vähegi keerulisema struktuuriga nähtuse kulgemist rahuldavalt kirjeldava mudeli konstrueerimine on aga peaaegu alati raske ülesanne: sobiva mudeli leidmine moodustab tegelikult kõikide täppisteaduslike uurimuste põhiprobleemi.

Operatsiooni mudeli niisugust olulist osa arvestades peatume selle mõiste juures veidi lähemalt. Pealegi on mudeli struktuur operatsioonianalüüsi ülesannete klassifitseerimise ja seega ka nende edasise uurimise aluseks.

Operatsioonianalüüsis lähtutakse mudelite klassifitseerimisel kahest seisukohast: juhtiva objekti sisesest konfliktist ja mudelit moodustavate matemaatiliste seoste iseloomust (konfliktiliseks olukorraks nimetame niisugust, milles esineb mitu vastandlike või osaliselt vastandlike huvidega poolt, kusjuures olukorra lõpptulemus sõltub kõikide poolte tegevusest). Konfliktilisus juhtivas objektis määrab ära juhtimisviisi kvalitatiivse külje põhilised iseärasused, mudeli matemaatilised seosed aga määravad kvantitatiivse külje olulised omadused. Operatsioonide klassifitseerimisel peetakse neid kahte põhimõtet silmas alati samaaegselt. Pealegi pole praktikast võetud operatsioonidele n.-ö. «otsa ette kirjutatud», missuguseid matemaatilisi seoseid nad endas kannavad, küll aga on tavaliselt paremini nähtav selles operatsioonis esineva konflikti tüüp ja iseloom.

Konfliktiliste olukordade matemaatiline analüüs näitab, et konflikti kvalitatiivsete iseärasustega piiritletakse küllalt selgesti ka teatud hulk juhtiva objekti struktuuri ja käitumist määravaid loogilis-matemaatilist laadi suhteid. Konflikti tüübist sõltub see, kas juhtiva objekti kui terviku jaoks eksisteerib eesmärki (seega ka efektiivsuse kriteeriumi) või mitte. Just juhtiva objekti käitumise eesmärgipärasuse aste aga annabki suunitluse operatsioonide matemaatilisele käsitlusele.

Sõltuvalt statistilise keskuse olemasolust jagunevad operatsioonide mudelid (seega ka operatsioonid) veel kahte põhimõtteliselt erinevasse klassi: stohhastilisteks ja deterministlikeks. Seos juhitava objekti ja juhtimiskeskuste seisundite vahel on d e t e r m i n i s t l i k siis, kui statistiline keskus puudub, sest sel korral vastab juhtimiskeskuste mistahes fikseeritud seisundeile juhitava objekti kindel seisund või seisundite järjekord. Niipea kui aga juhtivas objektis esineb statistiline keskus, ei määra juhtimiskeskuste fikseeritud seisundid veel üheselt ära juhitava objekti seisundeid. Sel korral öeldakse, et seos juhitava objekti ja juhtimiskeskuste vahel on s t o h h a s t i l i n e.

Vastavalt operatsioonide mudelite niisugusele klassifitseerimisele on välja kujunenud ka operatsioonianalüüsi põhilised suunad koos neile omaste uurimismeetoditega. Omaette matemaatilisteks distsipliinideks on kujunenud sellised suunad nagu mänguteooria, massilise teenindamise teooria ja matemaatiline planeerimine.

M ä n g u t e o o r i a valdkonna tüüpilisemad operatsioonid on niisugused, milles juhtiva objekti tegevus on juhtimiskeskuste vaheline võitlus, kusjuures statistilise keskuse osatähtsus võib olla väike (s. t. suhete ja seoste iseloom võib olla ka põhiliselt deterministlikku laadi). Mänguteooria mudelite puhul on juhtiva objekti kui terviku käitumine reeglina väikese eesmärgipärasusega. Mänguteooria probleemid pärinevad enamasti sõjaasjandusest. Majanduslikest ülesannetest kuuluvad siia eeskätt need, mis on seotud ettevõtete või riikide vahelise konkurentsiga.

M a s s i l i s e t e e n i n d a m i s e t e o o r i a hõlmab niisuguste nähtuste klassi, mille puhul on teatud mõttes tegemist järjekorraga (vastavalt sellele kasutatakse mõnikord ka nimetust j ä r j e k o r r a t e o o r i a). Seisunditevahelised seosed on siin põhiliselt stohhastilist laadi, samuti ka seisundite eneste struktuur. Konflikt teenindajate ja teenindatavate vahel ei kujune eriti teravaks, sest kummagi poole ühiseks eesmärgiks on tavaliselt tellimuse täitmine võimalikult kiiresti ja hästi. Kuigi kiirest ja paremast teenindamisest saavad kasu mõlemad pooled, avaldub konflikt siiski selles, et kummagi poole kasude kvalitatiivse erinevuse tõttu on vastavad efektiivsuse kriteeriumid osaliselt vastuolulised. Seoste stohhastilisus tuleneb siin sellest, et ei ole võimalik kindlaks määrata, kui palju ja kui suuri tellimusi saabub ning mis ajal tellimused saabuvad, samuti ei saa alati ette öelda, kui pikaks võib kujuneda tellimuse täitmise aeg. Juhtiva objekti käitumine on selle teooria mudelites tunduvalt eesmärgipärasem kui mänguteoorias.

Matemaatiline planeerimine haarab operatsioone, kus juhtiv objekt on põhiosas ühtsete taotluste ja eesmärkidega kollektiiv, mistõttu ka operatsioonil kui tervikul on enamvähem kindel eesmärk. Matemaatilise planeerimise mudelid on nii stohhastilised kui ka deterministlikud, vastavalt sellele räägitakse ka stohhastilisest ja deterministlikust planeerimisest. Mudelit moodustavate seoste iseloomu (eeskätt nende matemaatilise struktuuri) ja püstitatud eesmärgi järgi jaotatakse vaadeldava suuna probleeme lineaarse planeerimise, mittelineaarse planeerimise, dünaamilise planeerimise ja majandusliku tasakaalu mudelite teooria ülesanneteks.

Üksikasjalikult kõigil nendel teooriatel peatuda pole siin võimalust, märgime vaid, et enamasti pole nad üksteisest sugugi isoleeritud, vaid on isegi üsna tihedasti seotud. Näiteks statistiliste mängude teooriat (ehk «mängu loodusega») tuleb lugeda pigem stohhastilise planeerimise kui mänguteooria valdkonda kuuluvaks, sest sisuliselt on siin tegemist küllaltki ühtse käitumisviisi planeerimisega.

Operatsioonianalüüsi ülesannete niisugune klassifitseerimine pole muidugi täielik. Toodud klassifikatsioonis on loetletud vaid sellised probleemide tüübid, mille korral on välja töötatud enam või vähem üldised lahendusmeetodid. Seega, kui õnnestub kindlaks teha analüüsimisele võetava operatsiooni kuuluvus mingi tuntud tüübi alla, siis on raskem osa ülesandest sellega lahendatud. Kahjuks ei hõlma olemasolevad teooriad aga kaugeltki kõiki praktikas kerkivate ülesannete tüüpe. Sellepärast tuleb pärast mudelit moodustavate seoste selgitamist sageli asuda spetsiaalse lahendusmeetodi väljatöötamisele.

Kui mudeli puhtmatemaatiline uurimine osutub seoste keerulisuse tõttu võimatuks, siis kasutatakse operatsioonianalüüsis tihti nn. *küberneetilist eksperimenti*. See seisneb analüüsitava operatsiooni (täpsemalt tema mudeli) käitumise imiteerimises elektronarvuti jaoks koostatud programmi abil. Niisugust imiteerivat programmi (küberneetilist mudelit) mitmesuguste algandmetega töötada lastes kogutakse «katseandmeid» vaadeldava operatsiooni kohta, võrreldakse mitmesuguste juhtimisviiside tagajärgi jne.

Sõltumata mudeli uurimiseks kasutatavatest meetoditest võib operatsiooni analüüsimise käiku kokkuvõtlikult vaadelda järgmise kolmeetapilise protsessina.

I. *Püstitatud ülesande selgitamise staadium.*

1. Operatsiooni tüübi ja iseloomu kindlakstegemine.
2. Operatsiooni eesmärkide ja võimalike tulemuste selgitamine.
3. Efektiivsuse kriteeriumi määratlemine.
4. Ülesande formuleerimine vastavalt püstitatud eesmärkidele.

II. Uurimise staadium.

1. Vaatlemine ja andmete kogumine püstitatud ülesande analüüsimiseks.
2. Hüpoteeside ja matemaatiliste mudelite koostamine.
3. Hüpoteeside õigsuse kontroll lisavaatluste ja katsete teel.
4. Kogu olemasoleva informatsiooni ning operatsiooni mudeli matemaatiline uurimine ja analüüs (sealhulgas efektiivsuse kriteeriumi käitumise analüüs).
5. Operatsiooni võimalike tulemuste ennustamine, soovituste ja ettepanekute formuleerimine, ülesande täiendavate lahendusmeetodite läbivaatamine.

III. Uurimistulemuste rakendamise staadium.

1. Ettepanekute ja soovituste esitamine tehtud uurimuste põhjal.
2. Otsuste tegemine operatsiooni vahetuks juhtimiseks (enamasti nende poolt, kes ülesande esitasid).

Kuigi operatsioonianalüüs on rakendatav väga laiale nähtuste klassile, asuvad tema põhilised rakendusobjektid kaasajal siiski just ühiskonna majandusliku tegevuse sfääris. Selle põhjuseks on ühelt poolt tootmise arengu vajadused (tööviljakuse revolutsiooniliselt kiire kasv nõuab ka juhtimismeetodite radikaalset parandamist) ja teiselt poolt matemaatiliste meetodite suhteliselt hea rakendatavus majanduslike eesmärkide enam-vähem selge piiritletuse tõttu. Üksikasjalikel näidetel peatumata nimetame mõningaid majandusalasid, kus operatsioonianalüüs on leidnud eriti laialdast kasutamist. Siia kuuluvad: tootmise juhtimine ja majanduselu planeerimine suurtes mastaapides, tööstusettevõtetesisese tootmise organiseerimine, põllumajanduslike ettevõtete tegevuse planeerimine ja juhtimine, ehitustegevuse juhtimine, mitmesuguste transpordiliikide organiseerimine ja operatiivne juhtimine, kaubanduse ja varustuse organiseerimine.
Nagu sellest loetelust nähtub, on operatsioonianalüüsi meetodid kasutatavad ühiskondliku tootmise peaaegu kõikidel olulisematel aladel. Seetõttu on nende meetodite laialdane rakendamine ja praktikasse juurutamine perspektiivikas ülesanne, mida saab aga edukalt lahendada vaid suurte ja hästi organiseeritud kollektiivide ühiste pingutuste tulemusena.

TEENINDUSOBJEKTI OPTIMAALSEST PAIGUTUSEST ELAMUKVARTALIS

M. Levin

Majanduslike ülesannete matemaatiliseks uurimiseks on viimasel ajal välja töötatud terve rida spetsiaalselt selleks määratud meetodeid. Kõrvuti nendega saab aga sageli edukalt kasutada ka klassikalisi võtteid. Järgnevas ongi demonstreeritud üht sellist võimalust.

A. Feinsilber[1] vaatles teenindusobjekti võimalikult otstarbekat paigutamist elamukvartalisse, valides selle objekti asukoha optimaalsuse kriteeriumiks kvartali elanike minimaalse summaarse kauguse objektist. Olgu AB kvartal pikkusega l, kusjuures piki kvartalit on tõmmatud t-telg algusega punktis A. Kui elanikkonna tiheduse jaotus kvartalis on $p(t)>0$, siis osutub, et objekti optimaalse paigutuse koordinaadiks x tuleks võtta võrrandi

$$\int_0^x p(t)\,dt = \int_x^l p(t)\,dt$$

lahend.

Vaatleme seda ülesannet veidi üldisemal kujul. Olgu C kvartalis juba funktsioneeriv objekt, mis asub punktist A kaugusel h. Sellesse kvartalisse ehitatakse uus teenindusobjekt D, millel ei ole objektiga C ühiseid ülesandeid. Tähistame $p_1(t)$ selle tõenäosuse, et kvartali elanik punktist t külastab objekti C ajavahemikul, mille jooksul ta peab külastama objekti D. Ülesanne seisneb järgnevas: *arvestades objekti C olemasolu, leida objektile D kõige kasulikum paigutus (tema koordinaat x).*

Arutlused selle ülesande lahendamisel põhinevad järgmisel faktil: kui eeldada, et objekt D on juba ehitatud ning kvartali elanik teel objekti C juurde möödub objektist D, siis elaniku teed objektini D võib lugeda võrdseks nulliga, sest see teeosa tuleb niikuinii läbida teel objektini C.

Leiame kõigepealt objekti D parima asendi lõigul AC. Tehtud märkust arvestades moodustame elanike summaarse kauguse objektini D:

---

[1] Файнзильбер, А. М., Экстремальные методы в экономических исследованиях по наивыгоднейшему расположению объектов. — Математические методы в планировании и эксплуатации на транспорте. М., 1961, lk. 86—92.

$$S_1(x) = \int_0^x p(t)(1 - p_1(t))(x - t)\,dt + \int_x^h p(t)(t - x)\,dt +$$

$$+ \int_h^l p(t)[p_1(t)(h - x) + (1 - p_1(t))(t - x)]\,dt.$$

Suurust $S_1(x)$ minimiseeriva väärtuse $x = x_1$ leidmiseks saame võrrandi

$$\frac{\partial S_1(x)}{\partial x} = 0,$$

ehk

$$\int_0^x p(t)(1 - p_1(t))\,dt = \int_x^l p(t)\,dt.$$

Selle võrrandi lahend muudab suuruse $S_1(x)$ tõesti minimaalseks, sest

$$\frac{\partial^2 S_1(x)}{\partial x^2} = p(x)(1 - p_1(x)) + p(x) > 0.$$

Kui saadud lahend x_1 asub lõigul AC, s. t. $x_1 \in [0, h]$, siis peame ta meeles.

Edasi otsime objekti D parimat asendit lõigul CB. Selleks moodustame summaarse kauguse avaldise

$$S_2(x) = \int_0^h p(t)[(x - t) - p_1(t)(h - t)]\,dt +$$

$$+ \int_h^x p(t)(x - t)\,dt + \int_x^l p(t)(1 - p_1(t))(t - x)\,dt.$$

Suurust $S_2(x)$ minimiseeriva väärtuse $x = x_2$ leidmiseks lahendame võrrandi

$$\frac{\partial S_2(x)}{\partial x} = 0,$$

ehk

$$\int_0^x p(t)\,dt = \int_x^l p(t)(1 - p_1(t))\,dt.$$

Miinimum tõepoolest jällegi eksisteerib, sest

$$\frac{\partial^2 S_2(x)}{\partial x^2} = p(x) + p(x)(1 - p_1(x)) > 0.$$

Kui saadud lahend x_2 asub lõigul CB, s. t. $x_2 \in [h, l]$, siis fikseerime ka selle ning arvutame summaarsed kaugused $S_1 = S_1(x_1)$ ja $S_2 = S_2(x_2)$.

Nüüd arvutame summaarsed kaugused objektini D eeldusel, et D asub vastavalt punktides A, C, B:

$$S_3 = S(0) = \int_0^h p(t)\,t\,dt + \int_h^l p(t)\,(t - p_1(t)\,(t-h))\,dt,$$

$$S_4 = S(h) = \int_0^h p(t)\,(1-p_1(t))\,(h-t)\,dt + \int_h^l p(t)\,(1-p_1(t))\,(t-h)\,dt,$$

$$S_5 = S(l) = \int_0^h p(t)\,(l - t - p_1(t)\,(h-t))\,dt + \int_h^l p(t)\,(l-t)\,dt.$$

Saadud võimalike koordinaatide x_1, x_2, $x_3 = 0$, $x_4 = h$ ja $x_5 = l$ hulgast valime sellise, millele vastab vähim suurustest S_1, S_2, S_3, S_4 ja S_5. Valitud väärtus ongi objekti D optimaalse asendi koordinaat.

Kui on tarvis arvestada enam kui ühe funktsioneeriva objekti olemasolu kvartalis, siis võib talitada analoogiliselt; sel puhul tuleb vaid lahendada rohkem võrrandeid.

Kui esitatud probleemis mitte arvestada objekti C olemasolu, s. t. lugeda, et $p_1(t) \equiv 0$, siis saame A. Feinsilberi poolt käsitletud juhu.

Märgime veel, et kõik eespool vaadeldud võrrandid kujul

$$\int_0^x f(x)\,dx = \int_x^l g(x)\,dx$$

osutuvad üheselt lahenduvateks.

TUHMUNUD KÄSIKIRJAD

Järgmistes tehetes on osa numbreid kustunud (asendatud tärnikestega). Taastada kustunud numbrid.

a)

```
      * 7 *
    × * 6 *
   ---------
    * * 3 *
  * * 6 *
3 * * *
-----------
* 1 * * 1 *
```

b)

```
* * * * * * | * * *
* * * *     |------
---------   | * 8 *
  * * *
  * * *
  -------
    * * * *
    * * * *
    =======
```

c)

```
      * * *
    ×   * *
   ---------
      * * *
    * * 4
   ---------
  * * * 0 1
```

d)

```
* * * * * | * *
* * 1     |------
-------   | * * 8
  * *
  * *
  -----
  * 8 *
  * * *
  -----
    4 2 (jääk)
```

POSITSIOONILISED ARVUSÜSTEEMID

E. Tamme

Arvude märkimiseks kasutame peamiselt nn. k ü m n e n d s ü s t e e m i, mis võimaldab ainult kümne erineva numbrimärgi abil kirja panna kõiki meie igapäevases elus vaja minevaid arve, ükskõik kui suured või väikesed nad on: väljendagu need kaugust vaevunähtavate tähtedeni või pisimate elementaarosakeste kaalu. Kümnendsüsteemi nimetatakse p o s i t s i o o n i l i s e k s[1], sest sõltuvalt numbri asukohast (positsioonist) arvus võib ta tähistada ühelisi, kümnelisi, sajalisi jne. Näiteks kirjutis 3807 tähendab kümnendsüsteemis arvu

$$3 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10 + 7.$$

Arvul 10 on selles süsteemis eriline koht, teda nimetatakse süsteemi a l u s e k s. Arvusüsteeme saab aga konstrueerida ka kümnest erineval alusel.

Vaatleme näitena positsioonilist arvusüsteemi alusel 8. Arvu

$$2 \cdot 8^2 + 7 \cdot 8 + 5 = 189$$

kirjutame selles nn. k a h e k s a n d s ü s t e e m i s[2] kujul **275**. Arvude märkimiseks kaheksandsüsteemis on ilmselt vaja ainult kaheksat numbrimärki, milleks kasutame sümboleid **0**, **1**, **2**, **3**, **4**, **5**, **6** ja **7**. Arvud 8 ja 9 avalduvad vaadeldavas süsteemis aga juba vastavalt kujul **10** ja **11**.

Kümnendsüsteemis kirjutatud arvude (lühidalt kümnendarvude) teisendamisel kaheksandarvudeks võib kasutada järk-järgulist jagamist süsteemi alusega 8. Teisendame näitena kümnendarvu 797 kaheksandarvuks. Jagamine

$$\begin{array}{r l}
797 & : 8 = 99 \\
\underline{72} & \\
77 & \\
\underline{72} & \\
5 &
\end{array}$$

[1] Mittepositsioonilise numeratsioonisüsteemi näiteks on rooma numbrid, milles igal numbrimärgil on kindel arvuline väärtus.

[2] Käesolevas artiklis kirjutame kümnest erineva alusega süsteemides numbrid poolpaksus kirjas. Seejuures tuleb muidugi alati näidata, milline on süsteemi alus.

näitab, et

$$797 = 99 \cdot 8 + 5,$$

s. t. otsitava kaheksandarvu viimaseks numbriks on 5. Kaheksandarvu ülejäänud numbrite leidmiseks jagame jagatist uuesti kaheksaga, korrates seda operatsiooni seni, kuni viimane jagatis on kaheksast väiksem:

$$\begin{array}{l} 99 : 8 = 12 \\ \underline{8} \\ 19 \\ \underline{16} \\ 3 \end{array} \qquad \qquad \begin{array}{l} 12 : 8 = 1 \\ \underline{8} \\ 4 \end{array}$$

Seega

$$797 = (12 \cdot 8 + 3) \cdot 8 + 5 = ((1 \cdot 8 + 4) \cdot 8 + 3) \cdot 8 + 5 =$$
$$= 1 \cdot 8^3 + 4 \cdot 8^2 + 3 \cdot 8 + 5,$$

s. t. arv 797 avaldub kaheksandsüsteemis kujul **1435**. Mõninga vilumuse korral suudame kaheksaga jagamist teostada peast, mis võimaldab teisendamisel kasutada järgmist ülevaatlikku arvutusskeemi:

$$\begin{array}{r|l} 797 & 5 \\ 99 & 3 \\ 12 & 4 \\ 1 & 1 \end{array}$$

Selles skeemis on vasaku tulba igast arvust paremale (joone taha) kirjutatud jääk, mis tekib tema jagamisel kaheksaga, arvu alla aga jagatise täisosa.

Analoogiliselt kümnendmurdudega võib kasutusele võtta ka k a h e k s a n d m u r r u d. Kümnendmurd 0,2056 tähendab teatavasti arvu

$$2 \cdot 10^{-1} + 0 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-3} + 6 \cdot 10^{-4}.$$

Kaheksandmurru **0,2056** all mõistame aga arvu

$$2 \cdot 8^{-1} + 0 \cdot 8^{-2} + 5 \cdot 8^{-3} + 6 \cdot 8^{-4} = \frac{2}{8} + \frac{5}{512} + \frac{6}{4096} = 0{,}2612.$$

Kümnendmurru saab teisendada kaheksandmurruks tema murdosa järk-järgulise kaheksakordistamise teel. Näiteks kümnendmurru 0,2612 teisendamisel kaheksandmurruks korrutame ta kõigepealt kaheksaga:

$$0{,}2612 \cdot 8 = 2{,}0896.$$

Seega

$$0{,}2612 = 2 \cdot 8^{-1} + 0{,}0896 \cdot 8^{-1}.$$

Järelikult kaheksandmurru esimeseks kaheksandkohaks peale koma on **2**. Järgmise kaheksandkoha leidmiseks korrutame murru

0,0896 uuesti kaheksaga jne. Arvutused on sobiv koondada tulpa

0,2612
2,0896
0,7168
5,7344
5,8752
7,0016,

kus iga järgmine arv on saadud eelmise murdosa kaheksakordistamise teel. Arvude täisosad kujutavad otsitava kaheksandmurru järjestikuseid numbrikohti. Seega 0,2612 avaldub kaheksandmurruna **0,20557**.

Kui soovime teisendada kaheksandarvuks kümnendarvu, millel on nii täis- kui ka murdosa, siis tuleb neid osi eraldi teisendada.

A r i t m e e t i l i s e d t e h t e d kaheksandarvudega on teostatavad samasuguste algoritmide abil nagu kümnendarvudegagi. Tuleb vaid kasutada selle süsteemi jaoks koostatud liitmis- ja korrutamistabeleid, mis sisaldavad ühekohaliste arvude summad ja korrutised (arvutuste kiireks teostamiseks peab need tabelid pähe õppima).

+	1	2	3	4	5	6	7
1	2	3	4	5	6	7	10
2	3	4	5	6	7	10	11
3	4	5	6	7	10	11	12
4	5	6	7	10	11	12	13
5	6	7	10	11	12	13	14
6	7	10	11	12	13	14	15
7	10	11	12	13	14	15	16

×	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7
2	2	4	6	10	12	14	16
3	3	6	11	14	17	22	25
4	4	10	14	20	24	30	34
5	5	12	17	24	31	36	43
6	6	14	22	30	36	44	52
7	7	16	25	34	43	52	61

Toodud tabelitest on välja jäetud liitmine ja korrutamine nulliga, sest igas arvusüsteemis

$$0 + a = a + 0 = a, \qquad 0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$$

Toome näidetena mõned arvutused kaheksandsüsteemis:

$$\begin{array}{r} 173 \\ +\ 56 \\ \hline 251 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 731{,}6 \\ -\ 145{,}31 \\ \hline 564{,}27 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 436 \cdot 23 \\ \hline 1532 \\ 1074 \\ \hline 12472 \end{array}$$

Samaväärselt kümnend- ja kaheksandsüsteemiga võib kasutada arvusüsteeme mistahes ühest suuremal täisarvulisel alusel k. Niimoodi saadavas k-n d s ü s t e e m i s mõistame kirjutise

$$abcd,\ ef$$

all arvu

$$ak^3 + bk^2 + ck + d + ek^{-1} + fk^{-2},$$

kusjuures a, b, c, d, e ja f on numbrid, mis tähistavad arve 0, 1, 2, . . . , $k - 1$. Ilmselt läheb k-ndsüsteemis vaja parajasti k

erinevat numbrimärki. Süsteemi alus *k* aga avaldub igas arvusüsteemis kujul **10**. Arvude teisendamine ühest arvusüsteemist teise toimub tegelikult täpselt samasuguste algoritmide abil, nagu me kaheksandsüsteemi puhul kirjeldasime[3].

* * *

Kerkib küsimus, miks on arvutuspraktikas eluõiguse võitnud just kümnendsüsteem. Sellel süsteemil pole sisuliselt erilisi eeliseid, võrreldes näiteks kaheksand- või kaheteistkümnendsüsteemiga. Lihtsamana tundub arvutamine kümnendsüsteemis vaid seetõttu, et selles süsteemis arvutamist oleme juba maast madalast õppinud. Kümnendsüsteemi kujunemise ja leviku üheks põhjuseks on nähtavasti asjaolu, et inimese primitiivseimal arvutusmasinal — kahel käel — on kokku kümme sõrme. Seetõttu ongi meie esivanemad väga laialdaselt kasutanud esemete rühmitamist just kümnekaupa. Kümne ja temaga lähedased alused on eelistatavad ka seetõttu, et väikeste aluste korral on arvude kirjutised pikad ja ebaülevaatlikud, suurte aluste korral aga läheb vaja palju erinevaid numbrimärke ning vajalikud liitmis- ja korrutamistabelid on suured. Alus kümme on seega ühtlasi kompromisslahenduseks, mille korral praktikas esinevate arvude kirjutised pole eriti pikad ning liitmis- ja korrutamistabelid on kergesti meelespeetavad.

Positsiooniline kümnendsüsteem kujunes välja Hiinas ja Indias vastavalt umbes 2200 ja 1500 aastat tagasi, kusjuures kummalgi maal kasutati hoopis erinevaid sümboleid numbrite tähistamiseks. Indiast levis kümnendsüsteem araabia matemaatikute tööde kaudu X sajandil Euroopasse, mistõttu tegelikult Indiast pärinevaid numbreid hakati ekslikult nimetama araabia numbriteks. Kümnendmurrud võeti Euroopas kasutusele aga alles XVI sajandil.

Kümnendsüsteem pole aga sugugi mitte ainus kasutatav ja isegi mitte ajalooliselt vanim positsiooniline arvusüsteem. Vanimaks positsiooniliseks arvusüsteemiks on nimelt kuuekümnendsüsteem, mis võeti Babüloonias kasutusele juba ligi 4000 aastat tagasi. Seda süsteemi ja temale tuginevaid kuuekümnendmurde on inimkond kasutanud väga pika aja vältel Eriti suur on kuuekümnendsüsteemi tähtsus olnud astronoomias. Veel tänapäevalgi kasutatavad nurga- ja ajamõõduühikud vastavad ju kuuekümnendsüsteemile (kraadi või tunni jaotamine 60-neks minutiks, minuti jaotamine 60-neks sekundiks). Kümnendsüsteemis on nende ühikutega opereerimine üsna tülikas.

Seoses elektronarvutite kasutuselevõtmisega on viimasel ajal leidnud rakendamist üsna mitmed kümnest erineva alusega arvusüsteemid nagu kahend-, kolmend-, kaheksand-, üheksand- ja

---

[3] Vt. näiteks K a a s i k, Ü. jt., Elektronarvutusmasinad. Tln., 1960, lk. 18—23.

kuuteistkümnendsüsteem. Kõigi nende süsteemide lähemal käsitlemisel pole aga nähtavasti vajadust peatuda. Mõningate iseärasustega tutvumiseks peaks piisama järgmiste ülesannete lahendamisest.

Ülesandeid.

1. Teisendada arvud 37, 0,1, 0,345 ja 468,31 kaheksand- ning kolmendsüsteemi.

2. Teisendada kaheksandarvud **21**, **16370**, **0,4** ja **11,27** kümnendsüsteemi.

3. Teostada kaheksandsüsteemis arvutused

$$\mathbf{4365 + 707 + 1262}; \qquad \mathbf{3{,}702 - 1{,}655};$$
$$\mathbf{372 \cdot 163}; \qquad \mathbf{623 : 37}.$$

4. Teostada kolmendsüsteemis arvutused

$$\mathbf{1202 + 20121 - 1020}; \qquad \mathbf{2102 \cdot 121};$$
$$\mathbf{22211 : 21}; \qquad \mathbf{2{,}121 : 1{,}012}.$$

Kontrollida tulemusi arvutustest osa võtvate arvude ja tulemuste teisendamise teel kümnendsüsteemi.

5. Millistes arvusüsteemides kehtivad võrdused

$$\mathbf{2 \cdot 2 = 11}, \qquad \mathbf{1 : 2 = 0{,}2}, \qquad \mathbf{10 + 10 = 100}?$$

6. Millises arvusüsteemis on teostatud järgmine korrutamine?

$$\begin{array}{r} 3\,*\,*\cdot 3\,* \\ \hline *\,3\,*\,* \\ *\,3\,*\,* \\ \hline 3\,*\,*\,*\,3 \end{array}$$

Taastada tärnikestega asendatud numbrid.

7. Näidata, et arv **12321** on täisruut igas arvusüsteemis, mille alus on suurem kolmest.

Positsioonilisest arvusüsteemidest on eriti huvipakkuv kahendsüsteem[4], mistõttu peatume sellel eraldi. Selles süsteemis tähendab näiteks kirjutis **1 101 001** arvu

$$1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1 =$$
$$= 64 + 32 + 8 + 1 = 105.$$

Kirjutised **0,1** ja **101,011** aga tähendavad vastavalt arve

$$2^{-1} = \tfrac{1}{2} \text{ ja } 2^2 + 1 + 2^{-2} + 2^{-3} = 5 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} = 5{,}375.$$

797	1
398	0
199	1
99	1
49	1
24	0
12	0
6	0
3	1
1	1

Kümnendarve saab teisendada kahendarvudeks eespool kirjeldatud algoritmide abil. Näitena on kõrvalolevas tulbas kümnendarv 797 teisendatud kahendarvuks **1 100 011 101.**

Toodud näidetest ilmneb kahendsüsteemi kõige olulisem puudus: arvude kirjutised on selles süsteemis pikad ja ebaülevaatlikud. Kuid kahendsüsteemil on teiste arvusüsteemidega võrreldes ka tähtsaid eeliseid, mis avavad talle mitmesuguseid rakendusvõimalusi. Eriti leiab kahendsüsteem rakendamist elektronarvutites, sest

[4] Märgime, et kahendsüsteemis on antud ka käesoleva väljaande vihikute järjekorranumbrid kaanel (tavalises kirjaviisis ja peegeldatult).

kahendkohti saab kujutada lihtsate elektronskeemide abil, millel on ainult kaks erinevat seisundit, näiteks: juhib ja ei juhi elektrivoolu. Kirjutiste lühiduse saavutamiseks esitatakse niisugusesse elektronarvutisse viidavad kahendarvud tavaliselt kaheksandsüsteemis, millest üleminek kahendsüsteemi toimub väga lihtsalt. Nimelt kaheksandarvu teisendamisel kahendarvuks tuleb lihtsalt iga kaheksandnumber asendada temaga võrdse kolmekohalise kahendarvuga. Näiteks kaheksandarvu **6373** niisugusel teisendamisel saame temaga võrdse kahendarvu **110 011 111 011**. Vastupidine teisendamine toimub analoogiliselt, näiteks kahendarvus **1 100 011 101** jaotame kolmenumbrilisteks rühmadeks ja nende asendamisel saamegi lähtearvuga võrdse kaheksandarvu **1435**.

Väga lihtne ja šabloonne on aritmeetiliste tehete sooritamine kahendsüsteemis (see on muide peamine põhjus, miks enamik elektronarvuteid töötab just selles arvusüsteemis). Arvutusteks vajalikud liitmis- ja korrutamistabelid on äärmuseni lihtsad:

$$0+0=0, \qquad 0+1=1+0=1, \qquad 1+1=10,$$
$$0\cdot 0=0, \qquad 0\cdot 1=1\cdot 0=0, \qquad 1\cdot 1=1.$$

Liitmine ja lahutamine teostuvad peaaegu automaatselt[5]:

$$\begin{array}{r} 1\,111\,011 \\ +\quad 101\,110 \\ \hline 10\,101\,001 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 111\,011\,001,11 \\ -\quad 1\,100\,101,011\,001 \\ \hline 101\,110\,100,010\,111 \end{array}$$

Mitmekohaliste kahendarvude korrutamine taandub peamiselt liitmisele, sest korrutamine nulliga annab nulli ja korrutamine ühega arvu enese:

$$\begin{array}{r} 100\,011\,110\cdot 10\,011 \\ \hline 100\,011\,110 \\ 1\,000\,111\,10 \\ 1\,000\,111\,10 \\ \hline 1\,010\,100\,111\,010 \end{array}$$

Ülesandeid.

8. Teisendada arvud 3471, 0,25 ja 61,379 kahend- ja kaheksandsüsteemi.

9. Teostada kahendsüsteemis arvutused

$$10\,110\,110+11\,010\,011; \qquad 111\,001-10\,010;$$
$$110\,010\cdot 10\,001\cdot 11\,100; \qquad 1\,010\,111:110\,001.$$

Teisendada kõik esitatud arvud ja saadud tulemused kaheksandsüsteemi.

Korrutamise lihtsus kahendsüsteemis viib mõttele, kas ka kümnendarvude korrutise leidmiseks pole otstarbekohane kõigepealt teisendada tegurid kahendsüsteemi, korrutada nad selles

[5] Arvud näidetes on samad, mis eespool kaheksandsüsteemi korralgi.

süsteemis ning teisendada tulemus tagasi kümnendsüsteemi. Seda ideed ongi osaliselt kasutatud korrutamisvõttes, mida kirjanduses nimetatakse «vene talupoja korrutamismeetodiks». Selle abil korrutise leidmiseks tuleb ainult osata liita ja kahega korrutada ning jagada, millega tulid toime ka vähese arvutamisoskusega talupojad. Märgime, et sisuliselt samal teel teostasid korrutamist egiptlased juba umbes 4000 a. tagasi.

Tutvume vene talupoja korrutamismeetodiga näite

$$163 \cdot 275$$

varal. Korrutise leidmiseks kirjutame tegurid kõrvuti. Jagame nüüd esimese teguri kahega (jättes arvestamata jäägi), teise aga korrutame kahega. Sama operatsiooni kordame seni, kuni vasakus tulbas jõuame arvuni 1. Edasi tõmbame parempoolsest tulbast maha need arvud, millele vasakus tulbas vastavad paarisarvud (s. t. mille jagamisel kahega tekkis jääk 0). Paremas tulbas alles jäänud arvude summa annabki otsitava korrutise.

163	275
81	550
40	~~1100~~
20	~~2200~~
10	~~4400~~
5	8800
2	~~17600~~
1	35200
	44825

Võtte põhjendamiseks paneme tähele, et 163 avaldub kahendsüsteemis kujul **10 100 011**. Seega

$$163 = 2^7 + 2^5 + 2 + 1$$

ning

$$163 \cdot 275 = 2^7 \cdot 275 + 2^5 \cdot 275 + 2 \cdot 275 + 275 =$$
$$= 35\,200 + 8\,800 + 550 + 275 = 44\,825.$$

Kahendsüsteemi omadustele toginevad ka mitmed matemaatilised trikid ja mängud[6]. Kirjeldame neist kahte.

Mõeldud arvu mõistatamine. Seltskonnas mõeldakse arv, mille enne toast lahkunud isik *A* lubab mõistatada tingimusel, et kaasmängijal *B* lubatakse teda üksteise kõrvale asetatud metallrahade abil «juhtida õigetele jälgedele». Seejuures *A* ja *B* mainivad saladuslikult, et informatsioon sõltub rahade paiknemisest.

Tegelikult esitab mängija *B* mõeldud arvu rahade abil kahendsüsteemis, olles mängijaga *A* enne kokku leppinud, et vapp tähendab näiteks numbrit **1** ja kiri numbrit **0**.

[6] Vt. näiteks Берман, Г. Н., Число и наука о нем. М.,1954. Samuti ka Литцман, В., Веселое и занимательное о числах и фигурах. М., 1963.

Tabeli meelespidamine. Üks mängija *A* palub teisel joonistada näiteks 5×5 ruudust koosneva tabeli ning täita osa ruute ükskõik millisel viisil ristikestega. Seejärel vaatab *A* poole minuti vältel tabelit ning annab selle tagasi. Umbes 5 minuti pärast, kui kõigil kohalolijatel on tabel ununenud, taastab *A* mälu järgi esialgse tabeli.

«Fenomenaalse mälu» saladus peitub selles, et mängija *A* tõlgitseb tabeli iga rida kahendarvuna, lugedes näiteks iga ristikest üheks ja selle puudumise nulliks. Meeles tuleb pidada vaid viis kahekohalist arvu, mis mõninga harjutamise järel üsna kergesti õnnestub.

Olgu näiteks esitatud tabel:

		×	×	
×		×		×
×			×	×
	×		×	
		×	×	×

Tõlgitseme selle ridu kahendarvudena **110**, **10 101**, **10 011**, **1 010** ja **111**, mis kümnendsüsteemis tähendavad 6, 21, 19, 10 ja 7. Meeles võime neid pidada kahe telefoninumbri kujul: 6—21—19 ja 10—7.

ARVUDEST JA ARVUTAMISEST

Mõte väljendada kõik arvud mõne üksiku tähise abil, andes neile peale kujust oleneva väärtuse veel kohast oleneva väärtuse, on niivõrd lihtne, et just selle lihtsuse tõttu on raske hinnata, kui imetlemisväärne ta on. Kuivõrd raske oli selleni jõuda, seda näeme kreeka teaduse suurimate geeniuste Archimedese ja Apolloniose näidetest, kellele see mõte jäi suletuks.

P. S. Laplace.

* * *

Kõige tähtsam number on null. See oli geniaalne idee teha midagi mittemillestki, anda sellele mittemillelegi nimi ja leiutada tema jaoks sümbol.

B. L. van der Waerden

* * *

Arvude hulgas valitseb selline täiuslikkus ja kooskõla, et võime ööd ja päevad mõtiskleda nende imepärasest süsteemist.

S. Stevin.

* * *

Juhtusin ühel päeval nägema, kuidas keegi auväärt teadlane asus keset akadeemia koosolekut kaht juhuslikult võetud tohutupikka arvurida korrutama, ja avaldasin talle oma imestust. «Te unustate», vastas ta kõhkluseta, «te unustate selle suure mõnu, mida ma varsti tunda saan, kui ma hakkan korrutise õigsust jagamise teel kontrollima!»

D. F. Arago.

ALGARVUD

L. Kivistik

Algarvudeks nimetatakse teatavasti niisuguseid naturaalarve, mis jaguvad vaid arvuga 1 ja iseendaga (kusjuures arvu 1 algarvuks ei loeta). Tänu nendega seotud huvitavatele probleemidele on algarvud paelunud matemaatikute tähelepanu juba antiikajast alates. Ka esimesed tähtsad tulemused algarvude kohta on saadud antiikajal. Nii tõestas vana-kreeka matemaatik Eukleides juba III saj. algul e. m. a., et algarve on lõpmata palju (tema tõestuse esitame allpool), Eratosthenes (samuti vana-kreeka õpetlane III sajandist e. m. a.) andis aga lihtsa ja veel praegugi kasutatava meetodi algarvude tabeli koostamiseks. Algarvudega seotud probleemidest on nii mõnedki alles lahendamata ja seepärast pole huvi nende vastu kadunud ka tänapäeval. Käesolevas kirjutises puudutame mõningaid algarvudega seotud küsimusi, mis võiksid huvi pakkuda keskkooliõpilastele, üliõpilastele, aga võib-olla ka teistele lugejatele.

1. Algarvude hulga lõpmatus. Tõestame (Eukleidese järgi), et algarve on lõpmata palju. Selleks oletame väitevastaselt, et algarve on lõplik hulk ja kirjutame nad kõik kasvatavas järjekorras välja:

$$p_1,\ p_2,\ p_3,\ \ldots,\ p_n \tag{1}$$

(siin $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$, jne.). Moodustame naturaalarvu

$$a = p_1 p_2 \ldots p_n + 1 \tag{2}$$

Et $a > p_n$ ja p_n on oletuse kohaselt suurim algarv, siis a ei saa olla algarv. Järelikult on a kordarv, mistõttu ta jagub vähemalt ühe algarvuga p_i lõplikust jadast (1). Et ka korrutis $p_1 p_2 p_3 \ldots p_n$ jagub arvuga p_i, siis seosest (2) järeldub, et

$$1 = a - p_1 p_2 \ldots p_n$$

jagub[1] algarvuga p_i. Kuid naturaalarv 1 on väiksem kõigist algarvudest ja ei saa seepärast jaguda ühegagi nendest. Saadud vastuolu tuli oletusest, et algarve on lõplik hulk. Järelikult on algarve lõpmata palju.

[1] Kasutame asjaolu, et kui summas või vahes kõik komponendid jaguvad mingi arvuga, siis jagub selle arvuga ka summa või vastavalt vahe.

2. Kordarvu vähim tegur. Juba aritmeetika kursusest on teada, et iga naturaalarv lahutub algarvude korrutiseks. Samuti on teada, et iga naturaalarvu algtegureid (s. o. algarvulisi tegureid) võib leida lõpliku arvu proovimiste teel, kusjuures asja lihtsustamiseks võib kasutada teadaolevaid jaguvustunnuseid. Niisugune meetod on aga praktiliselt kasutatav vaid suhteliselt väikeste naturaalarvude korral. Senini polegi leitud efektiivset meetodit, mis lubaks iga antud arvu kohta öelda, kas ta on algarv või kordarv, ja viimasel juhul teda teguriteks lahutada. Naturaalarvu teguriteks lahutamise ülesanne on arvuteooria üks raskemaid lahendamata probleeme.

Tõestame järgmise teoreemi.

Teoreem. *Kordarvu a vähim ühest erinev tegur ei ületa arvu $\sqrt{a}$.*

Tõestus. Olgu p arvu a vähim ühest erinev tegur; siis $a = pb$, kus $b \geqslant p$. Korrutades viimase võrratuse mõlemat poolt arvuga $a = pb$, saame

$$ab \geqslant p^2 b,$$

millest järeldubki teoreemi väide

$$p \leqslant \sqrt{a}.$$

Niisiis selleks, et teha kindlaks, kas antud arv N on algarv või kordarv, ja selleks, et viimasel juhul leida tema algtegureid, tuleb kontrollida, kas N jagub mõnega algarvudest $p_1, p_2, \ldots, p_n$, kus p_n on suurim algarv, mis ei ületa $\sqrt{N}$ (p_i tähendagu siin ja edaspidi i-ndat arvu kõigi algarvude kasvavas jadas). Kui osutub, et N ei jagu ühegagi nendest, siis on ta algarv. Nii on näiteks arv 223 algarv, sest $14 < \sqrt{223} < 15$ ja 223 ei jagu ühegagi algarvudest 2, 3, 5, 7, 11, 13. Kui aga N ei jagu algarvudega p_1 $p_2, \ldots, p_{k-1}$, kuid jagub algarvuga p_k (kus $k \leqslant n$), siis on vähim algtegur leitud. Edasi võib sellega arvu N läbi jagada ja otsida juba arvu $N_1 = \frac{N}{p_k}$ vähimat algtegurit p, mis juhul, kui N_1 on kordarv, peab ilmselt rahuldama tingimust $p_k \leqslant p \leqslant \sqrt{N_1}$. Kui osutub, et $\sqrt{N_1} < p_k$, siis N_1 on juba algtegur ja $N = p_k N_1$ enam edasi ei lahutu. Vastupidisel juhul võime mõttekäiku korrata. Nii näiteks tuleb arvu 1853 puhul võimalike algteguritena võtta vaatluse alla vaid algarvud 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41 ja 43, sest $43 < \sqrt{1853} < 44$. Järjestikuse proovimise teel leiame, et 1853 jagub 17-ga, kusjuures $1853 = 17 \cdot 109$. Et $\sqrt{109} < 17$, siis on tegur 109 juba algarv. Jaguvust ülejäänud algarvudega 19, 23, ..., 43 ei tule muidugi enam proovida.

3. Algarvude tabelid ja nende koostamine. Selleks et arvu N eelmises punktis kirjeldatud meetodil teguriteks lahutada, on tarvis teada kõiki algarve, mis ei ületa $\sqrt{N}$. Siin tulevad appi algarvude tabelid. Vanimaks ning ühtlasi lihtsaimaks meetodiks sedalaadi tabeli koostamiseks on Eratosthenese meetod, mis seisneb järgnevas[2]. Olgu tarvis leida kõik algarvud, mis ei ületa naturaalarvu N. Kirjutame kõigepealt välja naturaalarvud

$$2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ \ 9,\ 10,\ \ldots, N-1,\ N. \qquad (3)$$

Selle jada esimene arv on 2, mis jagub ainult arvuga 1 ja iseendaga. Järelikult on 2 algarv. Kriipsutame nüüd jadas (3) läbi kõik arvu 2 kordsed peale tema enda. Pärast arvu 2 on esimene läbikriipsutamata arv 3. Ta ei jagu algarvuga 2, sest muidu oleks ta läbi kriipsutatud. Järelikult 3 jagub vaid arvuga 1 ja iseendaga ning on seega algarv. Kriipsutame jadas (3) läbi kõik arvu 3 kordsed peale arvu 3 enda. Järgmine läbikriipsutamata arv on 5. Ta ei jagu arvudega 2 ja 3 (muidu oleks ta läbi kriipsutatud). Järelikult jagub 5 vaid arvuga 1 ja iseendaga ning on seega algarv. Nüüd kriipsutame läbi kõik arvu 5 kordsed jne.

Jadas (3) läbikriipsutamata jäänud arvud annavadki kõik algarvud vahemikus 1 kuni N. Eelmises punktis tõestatud teoreemist järeldub, et kui kõigi algarvust p väiksemate algarvude kordsed on juba läbi kriipsutatud, siis kõik allesjäänud arvud, mis on väiksemad kui p^2, osutuvad algarvudeks. Tõepoolest, iga kordarv $a < p^2$ on juba läbi kriipsutatud kui tema vähima algarvulise jagaja kordne, sest see jagaja pole suurem kui $\sqrt{a} < p$. Siit järeldub, et

1) *järjekordse algarvu p kordsete läbikriipsutamist võib alustada arvust p^2* ja

2) *arvu N mitte ületavate algarvude tabeli koostamine on lõpetatud, kui on läbi kriipsutatud arvu $\sqrt{N}$ mitte ületavate algarvude kõik kordsed.*

Näiteks algarvude tabeli koostamiseks saja piires tuleb välja kirjutada kõik naturaalarvud 2, 3, ..., 99, 100 ning nende hulgast läbi kriipsutada algarvude 2, 3, 5 ja 7 kordsed, s. o. kõik paarisarvud alates arvust 4, iga kolmas arv alates arvust 9 (loendada tuleb sealjuures ka juba läbikriipsutatud arve), iga viies arv alates arvust 25 ja iga seitsmes arv alates arvust 49.

Lugeja võib endale ise hõlpsasti koostada algarvude tabeli näiteks 1000 piires. Selleks ei tarvitse isegi kõiki naturaalarve 2-st kuni 1000-ni välja kirjutada, piisab, kui joonestame ruudu-

[2] Ühest teisest huvitavast meetodist algarvude leidmiseks võib lugeda raamatust K o r d e m s k i, B., Matemaatilisi pähkleid. Tln., 1960, lk. 336.

lisele vihikulehele järgmise tabeli (tabelit võib jätkata mitmel lehel):

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
00	—	—			×		×		×	×
10	×		×		×	×	×		×	
20	×	×	×		×	×	×	×	×	
30	×		×	×	×	×	×		×	×
...										
...										
980	×	×	×		×	×	×	×	×	×
990	×		×	×	×	×	×		×	×

Igale ruudule vastab tabelis parajasti üks 1000-st väiksem naturaalarv. Arvu läbikriipsutamist võib märkida ristikesega vastavas ruudus. Tühjaksjäänud ruutudele vastavad nüüd algarvud (nendesse ruutudesse võib hiljem joonestada näiteks punased rõngakesed).

Käesolevaks ajaks on algarvude tabelid viidud võrdlemisi suurte arvudeni. Juba 1909. a. andis ameeriklane D. H. Lehmer välja tabeli, kus on toodud vähimad jagajad kõikide kordarvude jaoks, mis ei ületa 10 700 000 ning ei jagu ühegagi algarvudest, 2, 3, 5, 7. Muuhulgas sisaldab see tabel ka kõiki algarve, mis ei ületa nimetatud arvu. Juba varem koostas J. F. Kulik (1793—1863) tabelid, mis sisaldasid kõiki 100 000 000-st väiksemaid algarve, kuid need tabelid jäid trükis avaldamata (ja nagu hiljem selgus, on neis ka mõningaid vigu). Praegu säilitatakse seda käsikirja Viinis Austria Teaduste Akadeemias. 1959. a. koostasid C. L. Baker ja F. J. Gruenberger mikrofilmi, mis sisaldab kõik algarvud kuni arvuni $p_{6\,000\,000} = 104\,395\,301$. Niisiis võiks praegu proovimise teel teguriteks lahutada kindlasti kõiki naturaalarve, mis ei ületa viimati nimetatud algarvu ruutu[3]. Märgime, et on teada ka üksikuid algarve, mis on palju suuremad kui $p_{6\,000\,000}$, kuid sealjuures pole teada nende algarvude järjekorranumbreid. Kolmveerand sajandit oli suurimaks teadaolevaks algarvuks

$$2^{127} - 1 = 170\,141\,183\,460\,469\,231\,731\,687\,303\,715\,884\,105\,727.$$

Alates 1952. aastast, millal algarvude kindlakstegemiseks hakati kasutama elektronarvuteid, on leitud palju suuremaid erikujulisi algarve. Näiteks 1952. a. tõestati Kalifornia Ülikooli elektronarvuti abil, et $2^{521} - 1$ ja $2^{607} - 1$ on algarvud, seejärel

[3] Praktiliselt on selline teguriteks lahutamine teostatav vaid elektronarvuti abil, sest kõige halvemal juhul võib ühe naturaalarvu $N \leqslant p^2_{6\,000\,000}$ teguriteks lahutamine nõuda suurima algarvude tabeliga ja isegi elektrilise klaviatuurarvutiga varustatud isikult mitu aastat.

sama arvuti abil, et ka $2^{1279}-1$ ja $2^{2281}-1$ on algarvud. 1957. a. näidati Rootsis, et $2^{3217}-1$ on algarv. Käesolevate ridade autori käsutuses olevatel andmetel on praegu suurimaks teadaolevaks algarvuks $2^{4423}-1$, mis kümnendsüsteemis esitatuna koosneb 1332-st numbrist (käesoleva kogumiku trükikirjas ühte ritta trükituna võtaks see arv enda alla üle 2 meetri)[4].

4. Algarvude paiknemine naturaalarvude jadas. Algarvud paiknevad naturaalarvude jadas ilma igasuguse nähtava seaduspärasuseta. Kuigi see seaduspärasus on tegelikult olemas, pole veel kellelgi õnnestunud leida valemit, mis võimaldaks n-ndat algarvu p_n lihtsalt arvutada.

Algarvude tabeli vahetu uurimine näitab, et leidub väga suuri algarve, mis erinevad üksteisest vaid kahe võrra. Selliste algarvude paare nimetatakse «kaksikuteks». Niisugusteks «kaksikuteks» on näiteks 3 ja 5, 5 ja 7, 71 ja 73, 3929 ja 3931, 10 016 957 ja 10 016 959. Algarvude seas, mis ei ületa 30 000 000, leidub 152 892 paari «kaksikuid». On teada ka «kaksikuid», mis asuvad kaugel väljaspool olemasolevate tabelite piire. Arvatakse, et leidub lõpmata palju «kaksikuid», seda tõestada pole aga seni õnnestunud. Oletatakse isegi, et ka nn. «nelikuid», s. o. algarve kujul p, $p+2$, $p+6$ ja $p+8$ leidub lõpmata palju[5]. «Nelikud» on näiteks 5, 7, 11 ja 13; 101, 103, 107 ja 109; 299 471, 299 473, 299 477 ja 299 479. Esimese 10 miljoni naturaalarvu seas leidub 899 «nelikut», esimese 15 miljoni seas 1209. Kõige kaugema teadaoleva neliku esimeks liikmeks on $p=2\,863\,308\,731$.

Teiselt poolt leidub aga naturaalarvude jadas ka kuitahes pikki vahemikke, milles pole ühtki algarvu. Tõepoolest, arvud

$$\begin{gathered}(n+1)!+2,\ (n+1)!+3,\ \ldots,\ (n+1)!+n,\\ (n+1)!+(n+1)\end{gathered} \tag{4}$$

on kõik kordarvud, sest esimene jagub 2-ga, teine 3-ga, ..., eelviimane n-ga ja viimane $(n+1)$-ga. Märgime, et jada (4) ei tarvitse anda esimest sellist vahemikku, mis sisaldab n järjestikust kordarvu: niisugune vahemik võib naturaalarvude jadas esineda ka tunduvalt eespool. Nii on näiteks algarvude 370 261 ja 370 373 vahel 111 järjestikust kordarvu, jada (4) annaks aga $n=111$ korral tohutult suuremad arvud.

Kuigi oleme nüüd algarvude paiknemises naturaalarvude jadas kindlaks teinud kaks äärmust (leidub väga suuri algarve, mis erinevad teineteisest vaid kahe võrra, ja leidub järjestikuseid algarve, mille vahe on suurem igast etteantud arvust n),

---

[4] Nagu näha, on kõik esitatud arvud kujuga 2^p-1. Selliseid arve nimetatakse Mersenne'i arvudeks prantsuse matemaatiku M. Mersenne'i (1588—1648) nime järgi, kes neid arve uuris. Mersenne'i arvudel on tähtis osa nn. täiuslike arvude teoorias.

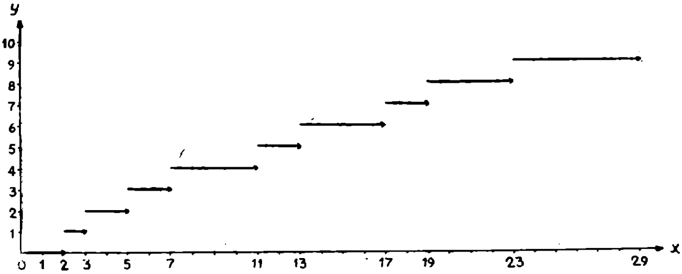
[5] Arvudest p, $p+2$, $p+4$, kus $p>3$, ei saa kõik olla algarvud, sest üks neist jagub 3-ga.

viib algarvude tabeli vaatlemine meid järeldusele, et mida kaugemale naturaalarvude jadas minna, seda «harvemini» kohtame seal algarve (niisugust järeldust kinnitavad ka teoreetilised uurimused, millest tuleb mõningal määral juttu allpool). Arusaadavalt ei leidu aga naturaalarvude jadas sellist kohta, millest edasi enam ühtki algarvu ei esine, sest nagu me tõestasime, on algarve lõpmata palju.

5. Funktsioon $\pi(x)$. Tähistame sümboliga $\pi(x)$ arvu x mitte ületavate algarvude arvu. Nii on $\pi(1)=0$, $\pi(2)=1$, $\pi(3)=2$, $\pi(4)=2$, $\pi(10)=4$ jne. Sümbolit $\pi(x)$ võib vaadelda funktsioonina, mille väärtusteks on täisarvud. Arusaadavalt ei tarvitse argument x olla tingimata naturaalarv, vaid ta võib omandada suvalisi reaalarvulisi väärtusi; seega $\pi(3{,}1)=2$, $\pi(\sqrt{50})=4$, $\pi(12{,}5)=5$ jne. Märgime, et $\pi(x)$ definitsiooni kohaselt $\pi(p_n)=n$, seda aga, et algarve on lõpmata palju, võib üles märkida järgmiselt:

$$\lim_{x\to\infty}\pi(x)=\infty.$$

Funktsiooni $y=\pi(x)$ graafik on kujutatud juuresoleval joonisel. Nooled graafiku katkevuspunktides tähendavad seda, et funktsiooni väärtusi kohtadel 2, 3, 5, 7, 11 jne. tuleb lugeda mitte noole otsalt, vaid graafiku järgmiselt lõigult (s. t. noole otsal asuv punkt ei kuulu graafikule).



Funktsiooni $\pi(x)$ jaoks on saadud mitmeid valemeid. Päris lihtne on näiteks kontrollida, et

$$\pi(x)=1+\sum_{n=3}^{[x]}\left(1-\left[1-\prod_{k=2}^{n-1}\sin^2\frac{n\pi}{k}\right]\right).$$

Lugejale, kes pole veel kõikide valemis esinevate tähistustega tuttav, ütleme, et sümboliga $\sum\limits_{n=i}^{m} a_n$ märgitakse summat

$$a_i+a_{i+1}+\ldots+a_{m-1}+a_m,$$

sümboliga $\prod_{k=i}^{m} b_k$ korrutist[6] $b_i b_{i+1} \ldots b_{m-1} b_m$, sümboliga $[x]$ aga reaalarvu x täisosa, s. o. suurimat täisarvu, mis ei ületa reaalarvu x (nii on näiteks $[1{,}7]=1$, $[2]=2$, $[\sqrt{10}]=3$ jne.). Paneme tähele, et viimases valemis esinev täisosa

$$\left[1-\prod_{k=2}^{n-1}\sin^2\frac{n\pi}{k}\right]$$

võrdub nulliga siis, kui n on algarv, ja ühega siis, kui n on kordarv.

Esitatud valemist pole $\pi(x)$ väärtuste praktiliseks arvutamiseks siiski suuremat kasu. Teatud määral praktilise valemi annab Eratosthenese meetod. Nimelt kui reaalarvu x mitte ületavate naturaalarvude jadas maha kriipsutada kõik algarvud $p_i \leqslant \sqrt{x}$ koos nende kordsetega, siis jääb jadas esitatud naturaalarvudest järele vaid $\pi(x)-\pi(\sqrt{x})$ algarvu (need, mis on suuremad kui $\sqrt{x}$) ja arv 1. See protsess viib valemini[7]

$$\pi(x)-\pi(\sqrt{x})+1=[x]-\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{x}{p_i}\right]+$$
$$+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\left[\frac{x}{p_i p_j}\right]-\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}\left[\frac{x}{p_i p_j p_k}\right]+\ldots, \qquad (5)$$

kus n on suurim järjekorranumber, mille korral $p_n \leqslant \sqrt{x}$ (teisiti öeldes $n=\pi(\sqrt{x})$).

Tõepoolest, naturaalarve on jadas kokku $[x]$. Algarvu p_i kordsete mahakustutamise tõttu tuleb sellest jadast ära jätta iga i

[6] Sümbolitest Σ ja Π võib lugeda artiklist Kaasik, Ü., Sümbolid Σ ja Π ning nende omadusi. — Matemaatika metoodiliste artiklite kogumik, II. Tln , 1964, lk. 21—40.

[7] Sümboliga $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{ij}$ tähistame kõikide liidetavate a_{ij} summat, kus i ja j omandavad väärtusi 1, 2, ..., n, nii et sealjuures $i<j$. Seega

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\left[\frac{x}{p_i p_j}\right]=\left[\frac{x}{p_1p_2}\right]+\left[\frac{x}{p_1p_3}\right]+\ldots+\left[\frac{x}{p_1p_n}\right]+\left[\frac{x}{p_2p_3}\right]+\ldots+\left[\frac{x}{p_{n-1}p_n}\right].$$

Analoogiliselt tuleb mõista valemis esinevaid ülejäänud summasid. Viimane summa koosneb vaid ühest liikmest $\left[\frac{x}{p_1p_2\ldots p_n}\right]$.

korral $\left[\frac{x}{p_i}\right]$ arvu (vaatluse all olevas jadas on p_i kordseteks $p_i, 2p_i, 3p_i, \ldots, \left[\frac{x}{p_i}\right] p_i$, mida on arvult $\left[\frac{x}{p_i}\right]$). Seejuures p_i ja p_j ühiskordsed, mida on arvult $\left[\frac{x}{p_i p_j}\right]$, arvatakse maha kahekordselt. Seepärast tuleb lisada $\left[\frac{x}{p_i p_j}\right]$ arvu. Sealjuures $\left[\frac{x}{p_i p_j p_k}\right]$ arvu, mis on arvu $p_i p_j p_k$ kordsed, lisatakse juurde kahekordselt ja seepärast tuleb nad uuesti ära jätta jne. Summa (5) on lõplik, sest alates teatud kohast on kõik liidetavad või lahutatavad nullid.

Selleks, et arvutada valemi (5) järgi $\pi(x)$ väärtust, on tarvis teada kõiki algarve, mis ei ületa arvu $\sqrt{x}$. Leiame näiteks $\pi(100)$. Et $\sqrt{100} = 10$, siis $\pi(100)$ arvutamiseks tuleb teada algarve $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$ ja $p_4 = 7$. Seega $n = 4$, $\pi(\sqrt{100}) = 4$ ja valem (5) annab

$$\pi(100) - 4 + 1 = 100 - \sum_{i=1}^{4}\left[\frac{100}{p_i}\right] + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 4}\left[\frac{100}{p_i p_j}\right] - \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant 4}\left[\frac{100}{p_i p_j p_k}\right] +$$

$$+ \left[\frac{100}{p_1 p_2 p_3 p_4}\right] = 100 - (50 + 33 + 20 + 14) +$$

$$+ (16 + 10 + 7 + 6 + 4 + 2) - (3 + 2 + 1 + 0) + 0 =$$

$$= 100 - 117 + 45 - 6 = 22,$$

millest $\pi(100) = 25$.

1870. a. tõestas saksa matemaatik D. F. E. Meissel teoreemi, mis võimaldab $\pi(x)$ arvutamist tunduvalt lihtsustada:

Teoreem. *Olgu $\varphi(x, r)$ reaalarvu x mitte ületavate ja algarvudega $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $\ldots$, p_r mitte jaguvate naturaalarvude arv. Kui tähistada $\pi(\sqrt[3]{x}) = m$, $\pi(\sqrt{x}) = n$ ja $n - m = s$, siis*

$$\pi(x) = \varphi(x, m) + m(s + 1) + \frac{s(s-1)}{2} - 1 - \sum_{k=1}^{s} \pi\left(\frac{x}{p_{m+k}}\right) \quad (6)$$

Huvitav on märkida, et Meissel leidis selle teoreemi abil $\pi(10^6) = 78\,498$, $\pi(10^8) = 5\,761\,455$ ja $\pi(10^9) = 50\,847\,478$. Valemis (6) esineva suuruse $\varphi(x, m)$ arvutamiseks on tuletatud teatud seosed, mida me aga siin ei esita, sest see nõuaks eelnevalt uute abitulemuste tutvustamist.

6. Funktsiooni $\pi(x)$ ligikaudne avaldis. Funktsiooni $\pi(x)$ täpsete väärtuste leidmine suurte x väärtuste korral on seotud mahuka arvutustööga. Sealjuures tuleb teada kõiki algarve, mis ei ületa $\sqrt{x}$. See aga tähendab, et argumendi küllalt suurte väärtuste puhul ei saa $\pi(x)$ väärtusi isegi põhimõtteliselt leida enne, kui algarvude tabel on viidud vajalike arvudeni.

Hea ülevaate funktsiooni $\pi(x)$ käitumisest annavad mitmed teadaolevad ligikaudsed, nn. asümptootilised valemid, millest ühte (kuigi mitte kõige täpsemat) vaatleme allpool. Märgime, et mistahes antud funktsiooni $f(x)$ asümptootiliseks avaldiseks nimetatakse iga funktsiooni $g(x)$, mis rahuldab tingimust

$$\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 1. \tag{7}$$

Kui võrdus (7) on rahuldatud, siis kirjutatakse $f(x) \sim g(x)$. Viimast seost võib tõlgendada kui ligikaudset võrdust, mille relatiivse vea absoluutväärtus $\left|\frac{f(x)-g(x)}{f(x)}\right|$ on seda väiksem, mida suurem on x (absoluutne viga $|f(x)-g(x)|$ võib aga x kasvades kasvada) [8].

1896. a. tõestasid prantsuse matemaatik J. Hadamard ja belgia matemaatik de la Vallée Poussin teineteisest sõltumatult, et eksisteerib piirväärtus $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{\ln x} : \pi(x)\right)$, mis võrdub ühega [9]. Seega kehtib asümptootiline valem

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}. \tag{8}$$

Valemi (8) kehtivust oletati mitmete matemaatikute poolt juba palju varem ja näidati isegi, et kui piirväärtus $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{\ln x} : \pi(x)\right)$ eksisteerib, siis ta võrdub ühega; piirväärtuse olemasolu ei õnnestunud aga varem tõestada.

---

[8] Tõepoolest, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)-g(x)}{f(x)} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{g(x)}{f(x)}\right) = 0$ ja seega ka $\lim\limits_{x\to\infty}\left|\frac{f(x)-g(x)}{f(x)}\right| = 0$.

[9] Sümbol $\ln x$ tähendab naturaallogaritmi arvust x, s. o. arvu x logaritmi alusel $e = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2{,}7182818\ldots$ (arv e, mis on transtsendentne samuti nagu koolimatemaatikast tuntud arv π, leiab kõrgemas matemaatikas laialdast rakendamist). Seega $\ln x = \log_e x$. Kasutades uuele alusele ülemineku valemit, võib kirjutada, et $\ln x = \frac{\log x}{\log e} = (\log x)\cdot 2{,}3025850\ldots$

Ülevaade funktsioonide $\pi(x)$ ja $\frac{x}{\ln x}$ kasvamisest ning valemi (8) täpsusest annab järgmine tabel.

x	$\pi(x)$	$\frac{x}{\ln x}$	Suhe $\frac{x}{\ln x} : \pi(x)$	Valemi (8) relatiivse vea absoluutväärtus %-des
10	4	4,34	1,086	8,6
100	25	21,7	0,868	13,2
1 000	168	145	0,863	13,7
10 000	1 229	1 086	0,884	11,6
100 000	9 592	8 686	0,906	9,4
1 000 000	78 498	72 382	0,922	7,8
10 000 000	664 579	620 421	0,934	6,6
100 000 000	5 761 455	5 428 681	0,942	5,8
1 000 000 000	50 847 478	48 254 942	0,949	5,1
10 000 000 000	455 052 512	434 294 482	0,954	4,6
∞	∞	∞	1	0

Tabeli viimast rida tuleb mõista nii, et x piiramatul kasvamisel kasvavad piiramatult ka $\pi(x)$ ja $\frac{x}{\ln x}$, suhe $\frac{x}{\ln x} : \pi(x)$ saab võrdseks ühega, relatiivne viga võrdseks nulliga.

Tabeli kahe esimese veeru võrdlemisel paneme tähele, et esimese 10 naturaalarvu hulgas on 40% algarve, esimese 100 naturaalarvu hulgas 25%, esimese 1000 naturaalarvu hulgas 16,8% jne. Suhet $\frac{\pi(x)}{x}$, kus x on naturaalarv, nimetatakse algarvude keskmiseks tiheduseks naturaalarvude 1, 2, ..., x hulgas. Tabelist näeme, et x kasvades algarvude keskmine tihedus kahaneb[10]. Teeme kindlaks, mida võib selle suhte kohta öelda x piiramatul kasvamisel. Valemist (8), mis on samaväärne võrdustega

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{\pi(x) \ln x} = 1 \text{ ja } \lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x) \ln x}{x} = 1,$$

järeldub, et

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\ln x} = 0.$$

[10] See kahanemine ei ole monotoonne. Nimelt on $\frac{\pi(x-1)}{x-1} < \frac{\pi(x)}{x}$, kui x on algarv, ja $\frac{\pi(x-1)}{x-1} > \frac{\pi(x)}{x}$, kui x on kordarv. Lugeja võib seda lihtsalt kontrollida, arvestades, et esimesel juhul $\pi(x-1) = \pi(x) - 1$ ja teisel juhul $\pi(x-1) = \pi(x)$.

Seega *kõigi naturaalarvude hulgas on algarvude keskmine tihedus null*, teisiti öeldes, *«peaaegu kõik» naturaalarvud on kordarvud*.

Valemist (8) järeldub ka asümptootiline valem n-nda algarvu p_n jaoks:

$$p_n \sim n \ln n. \tag{9}$$

Lugeja, kes on tutvunud matemaatilise analüüsiga ülikooli esimese semestri ulatuses, võib järgneva mõttekäigu kaasa teha. Lähtume võrdusest

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x) \ln x}{x} = 1,$$

mis on samaväärne seosega

$$\frac{\pi(x) \ln x}{x} = 1 + \alpha(x), \tag{10}$$

kus $\alpha(x)$ on lõpmata väike suurus (s. t. $\lim \alpha(x) = 0$). Logaritmides võrdust (10) saame

$$\ln \pi(x) + \ln \ln x - \ln x = \ln(1 + \alpha(x)),$$

millest

$$\frac{\ln \pi(x)}{\ln x} = 1 + \frac{\ln(1 + \alpha(x))}{\ln x} - \frac{\ln \ln x}{\ln x}$$

ja

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln \pi(x)}{\ln x} = 1$$

(selles, et $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln \ln x}{\ln x} = 0$, võib veenduda L'Hospitali võtte abil). Nüüd leiame

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{\pi(x) \ln \pi(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{\pi(x) \ln x} \cdot \lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{\ln \pi(x)} = 1.$$

Kui võtame siin $x = p_n$, siis viimane võrdus omandab kuju

$$\lim_{n \to \infty} \frac{p_n}{n \ln n} = 1,$$

mis ongi samaväärne valemiga (9).

Arvutame näiteks valemist (9) algarvu $p_{6\,000\,000}$ ligikaudse väärtuse. Naturaallogaritmide tabelitest leiame

$$\ln 6 = 1{,}791\,759\,47,$$

$$\ln 10^6 = 6 \ln 10 = 13{,}815\,510\,56.$$

Seega $\ln\ 6\,000\,000 = \ln 6 + \ln 10^6 = 15{,}607\,270\,03$ ja

$$n \ln n = 93\,643\,620.$$

Võrreldes saadud tulemust eespool toodud $p_{6\,000\,000}$ täpse väärtusega näeme, et relatiivne viga on ligikaudu 10%.

TÄISARVUDE JAGUVUSTUNNUSEID

E. Sarv

Koolides tutvutakse tavaliselt vaid kõige lihtsamate jaguvustunnustega (jaguvus 2-ga, 4-ga, 8-ga, 3-ga, 9-ga jne.). Et aga elementaarsete meetoditega on tuletatavad kõik praktiliselt olulised täisarvude jaguvustunnused, siis on nende süvendatud käsitlemine täiesti mõeldav juba algkooli matemaatikakursuse baasil. See pakuks ühtlasi ka materjali iseseisvaks järelemõtlemiseks õpilastele, kellel esimesed matemaatilised probleemid kerkivad enamasti just aritmeetika ja arvuteooria valdkonnas. Käesolevas vaatlemegi näidete varal kaht põhilist meetodit jaguvustunnuste tuletamiseks ja meenutame üht jaguvustunnuste praktilist kasutamisvõimalust.

Kõigepealt meenutame, kuidas on saadud üldiselt tuttav ristsummareegel 9-ga jaguvuse määramiseks. Märkame, et kümnendarvu kõigi järkude ühikud (ühelised, kümnelised, sajalised jne.) annavad jagamisel 9-ga jäägi 1. Seega tekib suvalise arvu 9-ga jagamisel maksimaalselt jääk, mis võrdub arvu kõigi numbrite väärtuste summaga ehk arvu ristsummaga. Järelikult jagub arv 9-ga, kui 9-ga jagub tema ristsumma.

Seda mõttekäiku üldistades saame elementaarsel viisil kätte jaguvustunnused 7, 11 ja 13 jaoks. Eelkõige veendume selles, et kümnendarvude iga järgu ühikud annavad jagamisel 7-ga, 11-ga ja 13-ga järgmised jäägid (vt. tabel).

Jagatav	Jääk jagamisel		
	7-ga	11-ga	13-ga
1	1	1	1
10	3	—1	—3
100	2	1	—4
1 000	—1	—1	—1
10 000	—3	1	3
100 000	—2	—1	4
1 000 000	1	1	1
10 000 000	3	—1	—3
	jne. (perioodiline kordumine)		

Tabeli põhjal on lihtsalt tuletatav jaguvustunnus 11 jaoks. Et kümnendarvu iga järgu ühiku jagamisel 11-ga on jääk +1 või —1, siis saame iga järgu arvel jäägi, mille absoluutväärtus võrdub sellele järgule vastava numbri väärtusega. Seega on ilmne, et suvalise arvu jagamisel 11-ga võrdub maksimaalne jääk jagatava üheliste, sajaliste ja teiste (paremalt lugedes) paaritutel kohtadel asuvate numbrite väärtuste summaga, millest on lahutatud paariskohtadel asuvate numbrite väärtused. Kui selliselt leitud arv ehk nn. a l t e r n e e r u v r i s t s u m m a on null või jagub 11-ga (s. t. kui jääki tegelikult ei ole), siis jagub 11-ga ka esialgne arv. Oluline on silmas pidada, et alterneeruva ristsumma arvutamise protsessi saab tunduvalt lihtsustada. Et iga kahe kõrvuti asuva numbri väärtused tulevad võtta erinevate märkidega, siis võime enne liitmiste-lahutamiste sooritamist kõiki naaberarve paarikaupa koondada. Teiseks võime arvutusprotsessi igal sammul meelevaldselt liita ja lahutada arvu 11 või selle kordseid.

N ä i d e. Veendume arvu 1 359 457 jaguvuses 11-ga, kasutades alterneeruva ristsumma arvutamisel eraldi kumbagi lihtsustusviisi.

I viis:	II viis:
1 359 457,	Paaritud: $(7+4-11)+5+1=6$.
1 300 057,	Paaris: $(5+9-11)+3=6$.
0 200 002,	$6-6=0$.
$2-2=0$.	

Analoogiliselt on tuletatav ühine algoritm 7-ga, 11-ga ja 13-ga jaguvuse määramiseks. Eespool toodud tabelit uurides märkame, et kümnendarvus saab numbrikohti jaotada kolmekaupa rühmadeks, milledes igaühes vastavalt esimesele, teisele või kolmandale kohale sattunud kümnendjärgu ühikud annavad absoluutväärtuselt võrdsed jäägid niihästi 7, 11 kui ka 13 järgi. Sealjuures on naaberrühmades vastavad jäägid märgilt erinevad. Iga järgu ühiku jagamisjääki võib iseloomustada vastaval kümnendkohal asuva numbri «kaaluna». 9-ga jagamisel on kõigi numbrite «kaalud» võrdsed ja saime lihtsa ristsumma, 11 puhul lisandus märgivaheldus, mistõttu saime alterneeruva ristsumma. Nüüd võime ühesuguse «kaaluga» numbrid jälle kokku võtta, arvestades muidugi veel märgivaheldust, ja seega kuitahes pikka uuritavat arvu iseloomustada teatava lihtsa arvukolmikuga. Pärast kolmiku iga arvu korrutamist jagajale vastava «kaaluga» ja korrutiste liitmist saame jälle n.-ö. «ristsumma», mille jaguvus vastavalt 7-ga, 11-ga või 13-ga määrab esialgse arvu jaguvuse.

Eelnenud mõttekäigust järeldubki eeskiri jaguvuse kontrollimiseks:

1) Jaotada arv paremalt vasakule 3 numbri kaupa rühmadeks, täiendades viimast (kõige vasakpoolsemat) kolmikut vajaduse korral eestpoolt nullidega.

2) Muuta arvus võimalikult rohkem numbrikohti nullideks sel teel, et igas kahes naaberrühmas viiakse läbi sama järjekorranumbriga arvude koondamine (s. o. võrdsete arvude paarikaupa kustutamine ning iga vastava paari suuremast arvust vähema lahutamine koos vähema arvu kustutamisega).

3) Ühendada kõik rühmad üheks arvukolmikuks; selleks liita rühmades järjestikku kõik sama järjekorranumbriga arvud, lugedes rühmasid paremalt vasakule kordamööda positiivseteks ja negatiivseteks.

4) Esialgse arvu jaguvuse määravad nüüd järgmised reeglid.

a) Jaguvus 7-ga: liita saadud arvukolmiku (paremalt) esimesele arvule teise arvu 3-kordne ja kolmanda arvu 2-kordne; kui tulemus on 0 või jagub 7-ga, siis jagub ka esialgne arv.

b) Jaguvus 11-ga: lahutada esimese ja kolmanda arvu summast teine arv ning kontrollida tulemuse jaguvust 11-ga.

c) Jaguvus 13-ga: lahutada paremalt lugedes esimesest arvust teise arvu 3-kordne ja kolmanda arvu 4-kordne; kontrollida tulemuse jaguvust 13-ga.

Arvutuste lihtsustamiseks ja soovi korral ka negatiivsustest vabanemiseks võib punktis 4) kirjeldatud reeglite rakendamisel pärast iga tehte sooritamist muidugi suvaliselt liita või lahutada vastavalt arvude 7, 11 või 13 kordseid.

N ä i d e. Kontrollida arvu 14 619 642 128 jaguvust 7-ga, 11-ga ja 13-ga.

1. samm: 014 619 642 128,

2 samm: 004 609 622 108,

000 603 620 108,

000 003 020 108,

3. samm:

$-0 \ +3 \ -0 \ +8 = \ 11,$

$-0 \ +0 \ -2 \ +0 = -2,$

$-0 \ +0 \ -0 \ +1 = \ 1,$

4. samm: $11 + 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 = 7$; arv jagub 7-ga.

$11 + 1 + 2 = 14$; arv ei jagu 11-ga.

$11 - 3 \cdot (-2) - 4 \cdot 1 = 13$; arv jagub 13-ga.

Algoritmi tegelikul rakendamisel teostatakse 2. samm endastmõistetavalt arvude vastava mahakriipsutamisega ja enamik tehteid sooritatakse peast.

Mõnevõrra kergemini meelespeetav, kuid üldiselt võib-olla pisut rohkem tööd nõudev on eelmise algoritmi modifikatsioon, milles sammud 1 ja 2 on samasugused, kuid sammud 3 ja 4 asenduvad järgmistega:

3) Liita paremalt lugedes paaritud rühmad ning lahutada neist paarisrühmad, vaadeldes iga rühma kolmekohalise arvuna.

4) Korrata samme 1 kuni 3, kuni tulemuseks on ülimalt kolmekohaline arv. Kui tulemus jagub 7-ga, 11-ga või 13-ga, siis jagub ka esialgne arv.

Näide. Kasutades eelmist näidet saame modifitseeritud meetodil

3. samm: $-000+003-020+108=91$

4. samm: 91 jagub 7-ga, 13-ga, ei jagu 11-ga; samuti ka esialgne arv.

Modifitseeritud algoritmi tuletamisel on silmas peetud asjaolu, et arvudel 1, 10^3, 10^6, 10^9, ... tekivad jagamisel 7-ga, 11-ga ja 13-ga jäägid 1, -1, 1, -1, ... ning et suvalise kümnendarvu jaotamisel kolmikuteks väljendavad kolmikud paremalt vasakule üheliste, tuhandete, miljonite jne. arvu.

Samal põhimõttel on muide leitav ka 37-ga jaguvuse tunnus. Arvude 1, 10^3, 10^6, ... jagamisel 37-ga on nimelt igakordne jääk 1; seetõttu jaguvuse kindlakstegemiseks tuleb kümnendarv jaotada kolmikuteks, liita omavahel kõik kolmikud ning korrata seda protsessi, kuni on saadud kolmekohaline arv; selle jaguvus 37-ga määrab ka esialgse arvu jaguvuse.

Kõiki eespool kirjeldatud algoritme saab üldistada mitte üksnes igasugustele täisarvulistele jagajatele, vaid ka kõikvõimalike alustega arvusüsteemidele. Vastava meetodi näitas kätte juba XVII sajandi prantsuse matemaatik Blaise Pascal. Pascali tunnuse tõestus pole enam elementaarne[1], mistõttu jätame selle siinkohal kõrvale. Pealegi muutuvad eelmistega analoogilised eeskirjad enamiku puudutamata jäetud algarvude jaoks niivõrd keeruliseks, et tavaliselt on kasulikum kontrollida jaguvust otsese läbijagamisega.

Paljude kahekohaliste ja mõnede suuremate algarvude puhul nõuavad tihti vähem töökulu pisut erinevat tüüpi meetodid, mida asume edasises käsitlema.

Alustame jälle üldtuntud juhust, nimelt jaguvusest 8-ga. Sageli öeldakse, et arvu jaguvuse 8-ga määrab kolmest viimasest numbrikohast moodustatud arvu jaguvus, kuid tegelikult piisab teatava kahekohalise arvu vaatlemisest. Tähistades sajaliste arvu a ning kahest viimasest numbrikohast moodustatud arvu b, võime iga kolmekohalist arvu esitada kujul $100a+b$. Kui see arv jagub 8-ga, siis ja ainult siis jagub 8-ga ka vahe $(100a+ +b)-96a=4a+b$ (lahutatav jagub siin 8-ga oma kordaja tõttu). Kui nüüd a on paarisarv, siis jagub alati 8-ga ka $4a$ ning me võime selle liidetava arvestamata jätta ja uurida üksnes arvu b jaguvust. Kui aga a on paaritu, siis tekib $4a$ jagamisel 8-ga jääk 4; kasutades veel kord asjaolu, et võime siin arvu 8 kordseid suvaliselt lahutada, saame tulemuse, et niisugusel juhul piisab arvu $b-4$ jaguvuse uurimisest.

Näide. 1732 ei jagu 8-ga, sest $32-4=28$ ei jagu; 37 688 jagub 8-ga, sest 88 jagub.

[1] Vt. näiteks Бухштаб, А. А., Теория чисел. М., 1960, lk. 198.

Samu tähistusi kasutades võib analoogilisel viisil tõestada, et $100a+b$ jagub 7-ga parajasti siis, kui sama omadus on arvul $2a+b$; kui jagaja on 13, siis tuleb kontrollida arvu $b-4a$ jaguvust; kui 37, siis kontrollime arvu $b-11a$. Need jaguvustunnused on kasutatavad eespool kirjeldatud üldiste algoritmide täienduseks.

Näide. 547 ei jagu 13-ga, sest $47-4\cdot5=27$ ei jagu.

Äsjatoodud jaguvustunnuste kasutamine on vähegi suurema (näiteks kahekohalise) a korral tülikas. Seetõttu anname lõpuks veel üldise jaguvuse kontrollimise algoritmi paaritute jagajate jaoks, mis ei lõpe arvuga 5. Selleks tähistame edaspidi arvu viimase koha väärtust m ja pärast viimase koha kustutamist tekkivat arvu M. Sellistes tähistustes avaldub iga kümnendarv kujul $10M+m$.

Esialgu vaatleme jaguvust 19-ga. Kui $10M+m$ jagub 19-ga, siis (ja ainult siis) on sama omadus ka arvul $20M+2m$. Lahutades siit 19-ga jaguva arvu $19M$ saame tarviliku ja piisava tingimuse, et arvu $10M+m$ jaguvuseks 19-ga peab jaguma ka arv $M+2m$, mis on lähtearvust ühe numbrikoha võrra lühem. Kirjeldatud protsessi võime jätkata, kuni saame kahekohalise arvu, mille jaguvus 19-ga on juba silmaga kontrollitav.

Näide. Arvu 3 086 379 jaguvust 19-ga uurides saame esmalt $308\,637+2\cdot9=308\,655$, seejärel $30\,865+2\cdot5=30\,875$ jne., kuni lõpuks jõuame arvuni 38, mille jaguvus 19-ga garanteerib ka esialgse arvu jaguvuse.

Kui jagaja on näiteks 31, siis analoogilist mõttekäiku kasutades taandame arvu $10M+m$ jaguvuse probleemi ühe koha võrra lühema arvu $31M-(30M+3m)=M-3m$ uurimisele.

Näide. Et määrata 47 396 jaguvust 31-ga, moodustame kõigepealt arvu $4\,739-3\cdot6=4\,721$, seejärel saame 469 ja lõpuks 19, s. t. esialgne arv ei jagu 31-ga. Jaguvuse korral oleksime siin saanud lõpptulemuseks nulli.

I. N. Sapgir on selle meetodi üldistanud suvalisele paaritule jagajale, mis ei lõpe 5-ga[2]. Uuritav arv $10M-m$ muudetakse alati ühe koha võrra lühemaks arvuks $M+nm$, kus kordaja n sõltub jagaja kümneliste ja üheliste arvust. Kõige lihtsama kuju omandab n siis, kui jagada on tüüpi $10k+1$ või $10k+9$ (k tähistab siin jagaja kümneliste arvu). Nimelt $10k+1$ korral $n=-k$ ja $10k+9$ korral $n=k+1$.

Kui jagaja üheliste arv on 3 või 7, siis on Sapgiri poolt pakutud valemid n arvutamiseks raskemini meelespeetavad. Neil juhtudel on hõlpsam uurida arvu jaguvust jagaja kolmekordsega, millel on nüüd kuju $10k+9$ või $10k+1$. Alles viimasel sammul, kui oleme saanud väikese jagatava, kontrollime selle jaguvust meid tegelikult huvitava jagajaga. Tõepoolest, kui $10M+m$ jagub arvuga p, siis (ja ainult siis) jagub $30M+3m$

---

[2] Vt. Сапгир, И. Н., Два признака делимости на любое нечетное число, не оканчивающееся на 5. — Математическое просвещение, вып. 4. M., 1959, lk. 209.

arvudega p ja $3p$, samuti jagub ka $3M + 3nm$, kus n on jagajale $3p$ vastav kordaja; siis aga $M + nm$ jagub arvuga p (kuid ei tarvitse jaguda arvuga $3p$).

Näide. Kontrollime 2 278 jaguvust 17-ga. Kasutades 51-le vastavat $n = -5$ saame esimesel sammul $227 - 5 \cdot 8 = 187$, edasi $18 - 5 \cdot 7 = -17$, mis jagub 17-ga.

Näites kasutasime tegelikult ühte Sapgiri poolt jagaja 17 jaoks antud valemit, ainult et meil polnud seda tarvis otseselt teada. Seega Sapgiri tabelis[2] toodud 8-st valemist osutuvad praktiliselt vajalikuks ainult kaks eespooltoodut.

Hinnates kõiki kirjeldatud jaguvuskriteeriume on oluline veel silmas pidada, et mitmesugust tüüpi ristsummade moodustamisele tuginevad algoritmid annavad mittejaguvuse korral lõpptulemuseks jäägi, mis tekib arvu jagamisel vastava jagajaga. Teised käsitletud meetodid võimaldavad määrata ainult arvu jaguvust.

Arvude jagamisel tekkivaid jääke kasutatakse praktikas eelkõige mitmesuguste arvutuste kiireks kontrollimiseks, sest korrutamisel, liitmisel ja lahutamisel saadud tulemuste jäägid mingi arvu järgi peavad teatavasti võrduma vastavalt tegurite jääkide korrutise või liidetavate jääkide summa või vähendatava ja lahutatava jääkide vahe jäägiga sama arvu järgi. Jagamise tehte puhul analoogiline reegel üldjuhul ei kehti, kuid jagamistulemuse kontrollimiseks võib korrutada jagatise jääki jagaja jäägiga, kusjuures peame saama jagatava jäägi, mis on võetud sama arvu järgi.

Kui kontrollitava tulemuse jääk kirjeldatud nõuet ei rahulda, siis on kohe selge, et arvutustes oli viga. Vastasel korral on aga kaks võimalust: 1) tulemus on õige, 2) tulemuse viga võrdub mingi kordsega sellest arvust, mille järgi jäägid leiti. Tulemuse õigsus muutub tõenäolisemaks, kui kontrolli korratakse mingi teise arvu järgi võetud jääkidega.

Näide. Kontrollime jagatise $26\,629\,788 : 5\,476 = 4\,863$ õigsust 9- ja 11-jääkide abil. Jagatise jääk 9 järgi on $(4 + 8 - 9) + (6 + 3 - 9) = 3$, jagajal $(5 + 4 - 9) + (7 + 6 - 9) = 4$ ja jagataval $(2 + 6 + 6 - 9) + (2 + 9 + 7 - 2 \cdot 9) + (8 + 8 - 9) - 9 = 3$. Et tõepoolest ka $3 \cdot 4 - 9 = 3$, siis kas tulemus on õige või viga võrdub arvu 9 mingi kordsega. Lisakontroll 11-jääkidega annab jagatise jäägiks $(3 + 8) - (4 + 6) = 1$, jagajal $(6 + 4) - (7 + 5 - 11) = 9$ ja jagataval 9. Et $1 \cdot 9 = 9$, siis saime ka 11-jääkide kontrolli abil positiivse tulemuse ning seega on jagatis kas õige või tema viga võrdub arvu 99 mingi kordsega. Soovi korral on äärmiselt lihtne teostada veel 4-jääkide kontrolli: $3 \cdot 0 = 0$, mis näitab, et viga (kui seda üldse on!) võib olla ainult mingi kordne arvust 396.

KUUES RAHVUSVAHELINE MATEMAATIKA OLÜMPIAAD[1]

Jevgeni Gabovitš

Käesoleva aasta 4. ja 5. juulil toimus Moskva Riikliku Ülikooli peahoones järjekordne rahvusvaheline koolinoorte matemaatika olümpiaad, millest võtsid osa üheksa sotsialistliku riigi — Bulgaaria, Jugoslaavia, Mongoolia, NSV Liidu, Poola, Rumeenia, Saksa DV, Tšehhoslovakkia ja Ungari võistkonnad. Iga võistkonna koosseisus oli kaheksa noort matemaatikut. Olümpiaadist osavõtjatel tuli lahendada kokku kuus ülesannet, neist kolm esimesel ja kolm teisel päeval. Lahendamiseks oli kummalgi päeval aega neli tundi.

Järgnevalt toome ära kõigi kuue ülesande tekstid selles järjekorras, nagu nad olümpiaadil lahendamiseks esitati.

Ülesanne 1. 1) Milliste naturaalarvude n korral jagub arv $2^n - 1$ seitsmega?

2) Tõestada, et arv $2^n + 1$ ei jagu ühegi naturaalarvu n korral seitsmega.

Ülesanne 2. Tõestada võrratus

$$a^2(b + c - a) + b^2(c + a - b) + c^2(a + b - c) \leq 3abc,$$

kus a, b ja c on mingi kolmnurga külgede pikkused. Millal on siin tegemist võrdusega?

Ülesanne 3. Kolmnurga külgede pikkused on a, b ja c. Selle sisse joonestatud ringjoone puutujad, mis on paralleelsed kolmnurga külgedega, eraldavad lähtekolmnurgast kolm väiksemat kolmnurka. Nende sisse on jällegi joonestatud ringjooned. Leida kõigi nelja ringi pindalade summa.

Ülesanne 4. Igaühel 17-st teadlasest on kirjavahetus kõigi ülejäänud 16-ga. Kirjavahetuses käsitletakse kokku kolme erinevat teaduslikku teemat, kusjuures iga teadlaste paar käsitleb omavahelises kirjavahetuses vaid ühte nendest teemadest.

Tõestada, et leidub vähemalt kolm teadlast, kes käsitlevad omavahelises kirjavahetuses üht ja sama teemat.

Ülesanne 5. Tasandil on antud viis punkti. Iga punktide paar on ühendatud sirgega, kusjuures ükski paar nendest sirgetest ei lange kokku, ei ole teineteisega risti ega paralleelsed. Igast antud punktist on tõmmatud ristsirged kõikidele seda punkti mitte läbivatele sirgetele.

Kui suur on nende ristsirgete lõikumisel tekkivate ja antud viiest punktist erinevate lõikepunktide maksimaalne arv?

---

[1] Ülevaade eelmisest viiest olümpiaadist on toodud artiklis: P r i n i t s, O., Rahvusvahelised koolinoorte matemaatika olümpiaadid. — Matemaatika ja kaasaeg, II. Trt., 1964, lk. 51—58.

Ülesanne 6. Olgu D_1 tetraeedri $ABCD$ tahu ABC raskuskese. Läbi punktide A, B ja C on tõmmatud sirgega DD_1 paralleelsed sirged, mis lõikavad tetraeedri tahkude jätke vastavalt punktides A_1, B_1 ja C_1.

Tõestada, et tetraeedri $A_1B_1C_1D_1$ ruumala on võrdne kolmekordse $ABCD$ ruumalaga.

Kas ruumalade suhe jääb endiseks, kui D_1 on kolmnurga ABC suvaline sisepunkt?

Üheksandal juulil tehti teatavaks olümpiaadi tulemused. Absoluutseks võitjaks osutus Moskva koolinoor D. Bernštein maksimaalse punktide arvuga (42). Žürii poolt väljaantud seitsmest esimesest preemiast langes veel kaks Nõukogude Liidule (G. Arhipov ja J. Matijasevitš), üks Poolale (T. Figel) ja kolm Ungarile (J. Pelikan, L. Gerentšir ja L. Levas).

NSV Liidu Kõrgema ja Kesk-erihariduse ministri käskkirja kohaselt võetakse kõik Nõukogude võistkonna liikmed eksamiteta vastu NSV Liidu ükskõik missuguse ülikooli matemaatikaosakonda.

VANAAEGSEID ÜLESANDEID[1]

1. «Ütle mulle, kuulus Pythagoras, kuipalju õpilasi käib sinu koolis ja kuulab sinu vestlusi?» — «Arva ise,» vastas filosoof, «pooled õpivad matemaatikat, neljandik muusikat, seitsmendik vaikib, aga peale selle on veel kolm naisterahvast».

(Kreeka)

2. Müüdi 2 pühvlit, 5 oinast, osteti 13 siga, jäi üle 1000 juani. Müüdi 3 pühvlit, 3 siga, osteti 9 oinast, jätkus täpselt. Müüdi 6 oinast, 8 siga, osteti 5 pühvlit, tuli puudus 600 juani. Küsitakse, kui palju maksab pühvel, lammas ja siga.

(Hiina)

3. Ütle mulle, kuipalju ahve oli karjas, kui nendest viiendik vähendatuna 3 võrra ruudus puges peitu koopasse ning nähtavale jäi ainult üks, kes oli roninud puu otsa.

(India)

4. Zaidile lubati autasuks suurem kahest osast, mille summa on 20, aga korrutis 96. Kui suur oli autasu?

(Araabia)

5. Sõdurile anti autasuks esimese haava eest 1 kop., teise eest 2 kop., kolmanda eest 4 kop. jne. Peale teenistuse lõppemist selgus, et sõdur oli üldse saanud autasu 655 rubla 35 kopikat. Küsitakse tema haavade arvu.

(Vene)

[1] Ülesanded on võetud raamatust Чистяков, В. Д., Сборник старинных задач по элементарной математике с историческими экскурсами и подробными решениями. Минск, 1962.

Matemaatika ajaloost

LEHEKÜLGI MATEMAATIKA AJALOOST EESTIS

Ü. Lumiste

Käesolev kirjutis on järg ülevaate varasematele osadele[1]. Viimased heitsid valgust matemaatika arengule Eestis aegadel, mil vähegi tõhusam haridus oli siin muukeelne ja kättesaadav üksnes valitsevate klasside esindajatele ja nende ideoloogidele. Põlatud maarahvas oli aastasadadeks surutud mõisa majandusliku rõhumise ja kiriku vaimse ikke alla.

Tõsisemad nihked rahvahariduse alal toimusid XIX sajandil, kui hakkas aegamööda tekkima eestikeelne koolikirjandus. Teadusliku töö rinne avanes eesti haritlaste ees aga alles pärast Suure Sotsialistliku Oktoobrirevolutsiooni murrangulisi sündmusi. Määrava tähendusega oli üleminek eestikeelsele õppetööle kõikides koolitüüpides, kaasa arvatud ülikool. Siit sai muu hulgas alguse ka eesti matemaatikute kollektiivi kujunemine, mis tõelise hoo saavutas pärast Suurt Isamaasõda ja jätkub praegu üha kasvava tempoga. Sellest kõigest püüame alljärgnevate ridadega anda põgusa ülevaate.

Esimesed sammud matemaatika emakeelses õpetamises

Talurahva lastele määratud eestikeelsetel koolidel oli esialgu üksainus kindel ülesanne — süvendada kiriku mõju rahva hulgas. Sel eesmärgil asutasid üksikud pastorid XVII sajandi algul kirikukoole, selle ülesande teenistuses olid ka sama sajandi lõpul tekkinud köstrikoolid. Viimastes õpetati «pühakirja» ettelugemise kõrval lastele ka lugemist, aruharva isegi kirjutamist. Nagu nähtub esimestest köstrikoolide jaoks trükitud aabitsaist (säilinuist vanim 1694. a-st, esitrükk tõenäoliselt 1686. a.), mille autoriks arvatakse noort B. G. Forseliust (1660—1688), piirdus aritmeetika põhitõdede õpetamine köstrikoolides heal juhul vaid araabia ja rooma numbrite tutvustamisega ning loendamisega. Võib arvata, et mõnevõrra ulatuslikumaid teadmis-

[1] Matemaatika ja kaasaeg, I. Trt., 1963, lk. 47—61. Matemaatika ja kaasaeg, II. Trt., 1964, lk. 64—76.

aritmeetikast said need 160 eesti noormeest, kes õppisid Forseliuse poolt 1684. a. Tartu lähedale Piiskopi mõisa (praeguse Tartu 8. keskkooli vastu) asutatud köstrite-koolmeistrite seminaris. Numbrimärgid ilma ühegi kasutamisjuhiseta on toodud ka esimestes XVIII sajandist säilinud aabitsais. Alles. O. W. Masingu (1763—1832) «*ABD ehk Luggemise-Ramat Lastele*...» (Tartu, 1795) sisaldab esmakordselt selgitusi numeratsiooni ja nulli tarvitamise kohta ning ükskordühe tabeli.

Laastavast Põhjasõjast tingitud mõõnaajale järgnenud aastakümned tõid endaga kaasa mõningaid nihkeid rahva hariduslikus seisundis. Seni eranditult vaimulik «maakeelne» lugemisvara täienes üksikute ilmalike jutukestega ja kiiresti populaarseks saanud kalendriga (vanim säilinuist pärineb 1731. aastast), milles ilmusid esimesed eestikeelsed loodusnähtusi, taime- ja loomariiki ning maailma maid ja rahvaid tutvustavad kirjutised[2]. Laiemalt hakkas levima laste kodune lugema õpetamine küla ärksamate meeste poolt. Nii tekkisid külakoolid, mis said eluõiguse 1765. a. Liivimaa maapäeval vastuvõetud koolikorralduses. Vaatamata sellele, et neis oli lubatud ainult lugemise õpetamine, tutvustati üksikutes kohtades (Vastseliina, Nõo, Nigula jt.) talurahva lastele ka kirjutamis- ja rehkendamisoskust. Vastseliina pastori, Saksamaalt Tüüringist pärit G. G. Marpurgi (1755—1835), sellesuunalistest katsetest saigi alguse tema «*Weikenne oppetusse nink luggemisse Ramat*...», mis ilmus Tartus 1805. a. ja milles esmakordselt eesti keeles õpetatakse nelja tehet 10 000 piires. Iseloomulikud on lõigud raamatu eessõnast, milles võimalikke süüdistusi ette nägev autor püüab kujukalt õigustada nende osade sissevõtmist raamatusse[3].

Juba järgmisel aastal ilmus Püha koguduse pastori P. Frey (1757—1833) koostatud «*Arropiddamisse ehk Arwamisse-Kunst*...» (Tartu, 1806), milles numeratsioon on viidud miljonini ning tutvustatakse arvutamist ka murdudega ja võrdeliste suurustega. P. Frey raamat on esimeseks täies ulatuses matemaatilise sisuga trükiseks eesti keeles.

Peale paarikümneaastast vaheaega ilmusid 1816—1819. a. talurahvaseadustega ametliku aluse saanud vallakoolide tarvis O. W. Masingu «*Arwamise-Ramat*...» (Tartu, 1823) ja Sauga «kirjutuse kooli» õpetaja, talurahva seast võrsunud A. Holteri (1798—1851) koostatud «*Arwo ehk Rehkendamise eksemplid*»

---

[2] Võhandu, L., Märkmeid loodusteadusi populariseeriva eestikeelse kirjanduse algpäevist. — «Eesti Loodus», 1958, nr. 3, lk. 166—168.

[3] Depman, J., Jutustusi matemaatikast. Tln., 1956. Lisa: Eestikeelse matemaatilise kirjanduse tekkimisest, lk. 132—135. Võhandu, L., Vanemast eestikeelsest matemaatilisest kirjandusest. — Matemaatika ja kaasaeg, III. Trt., 1964, lk. 62—67.

(Tallinn, 1823), mis jäid jällegi kolmeks aastakümneks ainukäibivaiks.

XIX sajandi 40-ndail aastail puhkesid uue jõuga talurahva rahutused, millega kaasnes massiline vene õigeusku üleminek. Agaralt kihelkonnakoole rajavate vene vaimulike mõju tasakaalustamiseks olid ka balti mõisnikud ja pastorid sunnitud senisest rohkem tähelepanu pühendama rahvakoolile. Avati esimesed seminarid õpetajate ettevalmistamiseks valla- ja kihelkonnakoolidele, mis 1849. a. talurahvaseaduse näol olid saanud mõnevõrra kindlama aluse. Põlva pastori J. G. Schwarzi toimetusel ilmus kaheksast raamatust koosnev kihelkonnakoolidele mõeldud «*Koli-ramat*». Teisena selles sarjas trükiti 1852. a. Tartus F. Meyeri «*Arwamisse ehk rehkendamisse ramat*...», mida võib pidada juba täielikuks aritmeetika õpikuks. Meyeri õpiku lisaks on maamõõtja Braschi abiga koostatud 23-leheküljeline «*Wälja-moödust ehk Ma-moötmissest ja Ma-arwust*», milles esmakordselt eesti keeles tutvustatakse ka lihtsamaid geomeetrilisi mõisteid.

Vallakoolide jaoks ilmus Tallinnas 1854. a. neljast väiksema ulatusega raamatust koosnev sari «*Koliramat*» ja selles viimasena Gebhardti koostatud «*Arwamisse ehk rehkendamisse ramat*...»

Järgnevad edusammud matemaatika õpetamise alal eesti koolis on tihedalt seotud rahvusliku liikumisega 1860—1880-ndail aastail. Haridustaotluste elluviimiseks alustas 1872. aastal tegevust Eesti Kirjameeste Selts, mille liikmeskonnast üle poole moodustasid koolmeistrid. Üheks oma tähtsamaks ülesandeks seadis selts eestikeelse koolikirjanduse soetamise ja kirjastamise. Järgneva aastakümne jooksul ilmuski suur hulk ajakohaseid õpikuid eesti koolidele. Esimesteks neist olid R. G. Kallase aritmeetika õpik «*Mõistlik rehkendaja*» (1874), ning tema «*Ülesannete kogu*» I, II, III (1875) koos «*Wäljarehkenduste koguga*» (1875) ja «*12½ toopi pähklid wirgemaile rehkendajatele meelejahutuseks ära närida*» (1878). Järgnevalt ilmusid J. Kapi «*Geometria kihelkonnakoolidele ja iseõpetuseks*» (1878), edasi J. Tülgi «*Kerged ja lühikesed Geometria õpetused*» (1879) ja «*Maamõetmise juhatus*» (1879) ning viimastega samaaegselt J. Kurriku aritmeetika õpikud «*Laste arwuwald*» I, II, III (1879, 1880, 1884) ja algebra õpikud «*Arwuwald*» I (1879), «*Arwuwald*» II (1880). Need eelnevaist hoopis kõrgema tasemega matemaatika õpikud koos C. R. Jakobsoni «*Kooli lugemise raamatuga*» I, II, III (1867, 1875, 1876), J. Kunderi «*Looduse õpetusega*» I, II (1877, 1885), J. Bergmanni «*Üleüldise ajalooga*» (1878), J. Tülgi «*Wiisika õpetusega*» (1881) jt. seadsid kindla aluse eestikeelse koolikirjanduse kujunemisele. Autoreiks olid teenekad koolimehed, kes lõid innukalt kaasa rahvusliku liikumise aja üritustes ning kelle tegevus on väärt, et seda siinkohal kasvõi põgusalt valgustada [4].

Noorimaks nende seas oli Rudolf Gottfried Kallas (1851—1913), Kaarma köstri poeg Saaremaalt, kes peale Kuressaare gümnaasiumi ja Tartu elementaarkooli õpetajate seminari lõpetamist 1871. aastal töötas järgneval neljal aastal algkooliõpetajana Tartus. Sellal ta avaldaski 23-aastase noormehena

Rudolf Kallas

Juhan Kurrik

oma esimese ja ühtlasi parima õpiku. Selle ulatuslikust eessõnast, mis on esimeseks matemaatika õpetamise metoodika eestikeelseks käsitluseks, leiame üllatavalt värskeid ja lopsakalt esitatud mõtteid õppetöö näitlikustamisest ja seostamisest igapäevase eluga, samuti väärtuslikke metoodilisi märkusi. Aritmeetika ülesannete kõrval pakub R. Kallas ka algebralise iseloomuga «keerd-ülesandeid», tutvustades nende lahendamist aritmeetiliselt ilma võrranditeta. Rohkesti selliseid ülesandeid koondab tema *«12½ toopi pähklid...»*

R. Kallase eakaaslane Juhan Kurrik (1849—1922) pärines Viljandimaalt talupidaja perekonnast, lõpetas Viljandi kihelkonnakooli ja töötas seejärel vallakoolmeistrina Tarvastus ja Rõuges. 1873. aastal kutsuti J. Kurrik Tartusse õpetajaks

---

[4] Üksikasjalikuma ülevaate on andnud S. Suuroja oma diplomitöös (TRÜ geomeetria kat., 1961). Märgime siinkohal ka V. Pälli diplomitööd (TRÜ geom. kat., 1961), milles on toodud eestikeelse matemaatilise kirjanduse bibliograafia kuni 1917. a-ni.

vastavatud vallakooli õpetajate (Hollmanni) seminari. Tööle selles eelnes aastane enesetäiendamine matemaatika alal Preisimaal Kalleni seminaris. Tartus kirjutaski J. Kurrik aritmeetika ja esimesed eestikeelsed algebra õpikud. Viimase neist lõpetab ta ruutvõrrandite lahendamisega ning aritmeetilise ja geomeetrilise progressiooni käsitlemisega.

Mõlemad noored matemaatikaõpetajad lülitusid agaralt Eesti Kirjameeste Seltsi tegevusse, olid valitud seltsi peakomiteesse, kus tegutsesid kirjatoimetajatena, Kurrik ajuti koguni aseesimehena. Esialgu toetasid mõlemad C. R. Jakobsoni suunda, tervitades «Sakala» ilmumist, kuid 1881. aastal, kui seoses Jakobsoni valimisega seltsi esimeheks tekkis lõhe tema ja J. Hurda poolehoidjate vahel, lahkus R. Kallas, kes oli vahepeal alustanud teoloogiaõpinguid, nii eestseisusest kui ka seltsist ja kaldus hiljem pastorina tegutsedes täielikult kodanlik-klerikaalsesse leeri. J. Kurrik jäi truuks kodanlik-demokraatlikule suunale. Seltsi kirjatoimetajana tekkis tal huvi kiirkirja vastu ja 1882. a. ilmuski tema sulest «*Stenografia õpetus*» — esimene omalaadne eesti keeles. Veel varem oli J. Kurrik avaldanud «*Turnimise raamatu*» (1879), milles ta andis esimesed eestikeelsed võimlemise oskussõnad. Tema huvid ulatusid isegi keele- ja kirjanduspõllule. Rahvusliku liikumise allakäigu ajal läks aga Kurrik, kaotanud 1887. a. õppejõu koha seoses seminari sulgemisega venestuspoliitika tagajärjel, samuti kiriku teenistusse köstrina.

Mõnevõrra tagasihoidlikum, eriti matemaatika õpetamise alal, on olnud Joosep Kapi (1833—1894) tegevus. Pärit on ta Põltsamaa lähedalt koolmeistri perekonnast. Pärast Tartu kreiskooli lõpetamist ja lühiajalisi õpinguid Tartu gümnaasiumis siirdus J. Kapp Valka, kus astus J. Cimze kihelkonnakooli õpetajate seminari. Samaaegselt õppis seal C. R. Jakobson, kellega J. Kapil kujunes sõprus, mis kestis aastaid ja katkes alles peale Eesti Kirjameeste Seltsi lõhenemist 1881. aastal. Seminari lõpetamise järel sai J. Kapp 1853. aastal Suure-Jaani köstriks ja kihelkonnakooli õpetajaks ning peatselt ka kohaliku seltskondliku elu hingeks. Siin koostaski ta esimese eestikeelse geomeetria õpiku, milles läbimõeldult esitas kogu planimeetria kursuse olulise osa ja mõningaid andmeid ka stereomeetriast.

J. Kapp võttis algul innukalt osa üldrahvalikest üritustest, kuuludes Aleksandri-kooli peakomiteesse ja kassapidajana Eesti Kirjameeste Seltsi eestseisusse. Kuid seltsi lõhenemisel ilmnes J. Kapi kui kirikuga seotud isiku piiratus — ta jäi J. Hurda pooldajate hulka ja astus seltsist välja. Siitpeale piirdus ta oma tegevuses Suure-Jaaniga, asutades seal haridusseltsi, laulu- ja pasunakoore.[5]

[5] Märkigem, et J. Kapi perest võrsus kolm eesti tuntud heliloojat. Tema nooremaks pojaks on Artur Kapp, kes on Eugen Kapi isa, tema pojapojaks on ka Villem Kapp.

Joosep Kapp

Jakob Tülk

Kõige tõhusamad teadmised õpikute koostamisel olid kasutada vanimal mainitud autoreist — Jakob Tülgil (1830—1918). Sündinud Pärnumaal Uulu mõisas aidamehe pojana, siirdus ta Tartusse maalriõpilaseks ja seejärel Lätimaale maamõõtja abiliseks. 1867. aastal sooritas ta maamõõtja eksami, olles enne seda kuulanud loenguid Tartu ülikoolis. Maamõõtja ametit pidas J. Tülk elu lõpuni. Esialgu andis see talle ainelise kindlustatuse, mis võimaldas mõelda haridustee jätkamisele ja teadusejanu kustutamisele. Nii siirdubki J. Tülk 1873. aastal üle 40-aastase mehena välismaale peaasjalikult matemaatilisi teadusi õppima. Kolme aasta jooksul külastas ta Strassburgi, Genfi ja Pariisi ülikoole, kuulates neis loenguid kõrgema matemaatika mitmetest valdkondadest. Tartusse tagasi jõudnud, lülitus J. Tülk aktiivselt Eesti Kirjameeste Seltsi tegevusse ja avaldas seltsi kirjastusel oma eespool loetletud õpikud. Neis kajastub J. Tülgi suhteliselt lai silmaring ja teadmiste ulatus. Nii on tema geomeetria õpik paljuski põhjalikum Kapi omast, kõrgema matemaatika tundmist ilmutab ta oma füüsika ja maamõõdu õpikuis. Kuid teiselt poolt ei jäta mõju avaldamata koolitöö kogemuste puudumine, millele juhib tähelepanu ka J. Kapp nende vahel arenenud kohati üsna teravas poleemikas. Tähelepanu väärib J. Tülgi poolt Eesti Kirjameeste Seltsi koosolekul 1878. aastal peetud ja seltsi aastaraamatus avaldatud eestikeelne kõne. Sellesse on ta populaarses vormis põiminud mitmeid kõrgema matemaatika mõisteid, sealhulgas isegi integraalarvutusse kuuluvaid. Hiljem on J. Tülk põhitöö kõrval tegutsenud Treffneri eragümnaasiumis matemaatikaõpetajana, ajalehe «Eesti Postimees» toimetajana ja Eesti Põllumeeste Seltsi kauaaegse esimehena.

Nagu näeme, kajastuvad rahvusliku liikumise aja juhtivate matemaatikute-koolimeeste elus ja tegevuses ilmekalt selle murrangulise perioodi püüdlused ja vastuolud. Töö ajakohaste õpikute koostamisel seostus neil üldrahvaliku liikumisega hariduse ja kultuuri poole, võitlusega mõisnike ja pastorite ikkest vabanemiseks. On iseloomulik, et rahvusliku liikumise allakäiguga kaob ka 1870-ndail aastail ilmnenud hoog eestikeelse koolikirjanduse soetamisel.

Esimesed Eesti teadlased-matemaatikud

Esimeseks eestlaseks, kes läbi raskuste on omandanud ülikoolides matemaatikaalaseid teadmisi ja püüdnud neid emakeelses trükisõnas viia ka laiema lugejaskonna ette, on nähtavasti J. Tülk. Tolleaegseis oludes ei leidnud ta aga võimalusi ulatuslikumaks tegutsemiseks oma huvialal. Eestikeelsele kõrgemale matemaatilisele haridusele panid aluse 1920-ndail aastail J. Sarv, H. Jaakson, G. Rägo ja J. Nuut[6].

Vanim eesti matemaatikaprofessor Jaan Sarv[7] (1877—1954) pärineb Võrumaalt talurentniku perekonnast. Lõpetanud 1907. aastal Tartu ülikooli, millesse astumise õiguse ta sai küpsuseksamite sooritamisega Treffneri gümnaasiumis 1899. aastal, töötas J. Sarv seejärel püsivamalt Eesti Noorsoo Kasvatusseltsi tütarlastegümnaasiumi matemaatika- ja füüsikaõpetajana. Samal ajal avaldas ta füüsika õpikuid, populaarteaduslikke brošüüre ja hariduselu käsitlevaid kirjutisi 1907. aastal rajatud Eesti Kirjanduse Seltsi väljaannetes. Tema agaral eestvõttel sai teoks esimene eesti matemaatika- ja füüsikaõpetajate kongress, mis toimus 1917. aasta augustikuul Tartus.

Üheaegselt 1913. a. lõpetasid Tartu ülikooli Hermann Jaakson (1891—1964) ja Gerhard Rägo (sünd. 1892. a.). Viljandimaalt Uue-Võidu vallast pärit H. Jaakson, kes oli enne ülikooli astumist 1909. a. lõpetanud Riia Aleksandri gümnaasiumi, jäi Tartusse kommertsgümnaasiumi matemaatikaõpetajaks. Räpinast Tartusse reaalkooli tulnud G. Rägo aga siirdus peale ülikooli lõpetamist aastaks end täiendama Göttingeni, oli seejärel mõnda aega Tartus kommertsgümnaasiumi õpetaja ning asus 1915. aastal tööle Novotšerkasskisse Doni Polütehnilise Instituudi õppejõuna, hiljem professorina.

---

[6] Тамме, Э. Э., Математика в Тартуском университете в 1920—1940 годах. — Материалы V конференции по истории науки в Прибалтике. Тарту, 1964, lk. 26—28. E. Tamme andis autori käsutusse ka üksikuid teisi tema kogutud andmeid, mida näidatud kirjutis veel ei sisalda.

[7] Epler, H., Jaan Sarve elust ja tegevusest. — Matemaatika ja kaasaeg, III. Trt., 1964, lk. 68—72.

Kui Suure Sotsialistliku Oktoobrirevolutsiooni murrangulised sündmused Eestis avasid tee eestikeelsele kõrgemale haridusele, siis kavandatud plaanide peamiseks elluviijaks matemaatika osas kujunes J. Sarv, kes hiljem, pärast saksa okupatsioonivägede väljakihutamist Tartust tööliste võitlussalkade ja Punaarmee väeosade poolt 1918. a. detsembris, tegutses ühtlasi nõukogude ülikooli esimese kuraatorina. Kodanluse võimuletuleku järel nimetati 1919. aastal J. Sarv professori kohusetäitjaks, ning H. Jaakson dotsendiks. Kolmandaks matemaatikalektoriks kutsuti J. Sarve initsiatiivil Soomest K. Väisälä (sünd. 1893. a.), kes oli 1914. aastal lõpetanud Helsingi ülikooli ja 1916. a. omandanud doktorikraadi. K. Väisälä ei töötanud siin kaua — 1922. aastal pöördus ta tagasi kodumaale Turus sellal avatud soome ülikooli matemaatikaprofessori kohale. 1920. aastal opteerus Eestisse G. Rägo, kes kinnitati Tartusse professori kohusetäitjaks. Peatselt ilmusid esimesed eestikeelsed kõrgema matemaatika õpikud: G. Rägo «Tasapinnalise analüütilise geomeetria põhijooni» (1921) ja «Matemaatilise analüüsi elemendid» (1922) ning J. Sarve «Analüütilise geomeetria algkursus» (1924), milledest eriti viimane väärib veel praegugi tähelepanu sisuka ainekäsitluse poolest.

Teadusliku enesetäiendamise eesmärgil lähetati 1923/24 õppeaastaks Pariisi H. Jaakson, kellel aasta pärast valmis prantsuskeelne doktoriväitekiri «Lõpmata paljude tundmatutega lineaarsete võrrandisüsteemide mõningatest tüüpidest. Interpolatsioonist», mida ta edukalt kaitses Tartus 1925. aastal. See oli esimene tähelepanuväärne teaduslik uurimus eesti matemaatikult. Selles käsitletakse Dirichlet' ridadega ja interpoleerimisülesandega seotud lõpmatute süsteemide lahendamist reduktsioonimeetodiga. H. Jaaksonist sai 1926. aastal ühtlasi esimene eesti korraline matemaatikaprofessor. Sellesse ametisse kinnitati ka J. Sarv 1928. a. ja G. Rägo 1931. a.

Välismaal (Göttingenis) käis end täiendamas Tartu ülikooli 1917. aastal lõpetanud Edgar Krahn (sünd. 1894. a.). Ta omandas seal R. Couranti mõjutusel kirjutatud töö eest «Kolme- ja mitmemõõtmelise kera minimaalsuseomadustest» 1926. a. doktorikraadi ning asus 1928. aastal tööle Tartu ülikooli eradotsendina. E. Krahn on avaldanud Tartu Ülikooli Toimetistes ja saksa ühes keskses ajakirjas «*Mathematische Annalen*» mõningaid artikleid, mis on pälvinud viimasel ajal mitmete uurijate tähelepanu. 1941. aastal lahkus E. Krahn Eestist, siirdudes Saksamaale.

Tartu ülikoolis kaitses 1926. aastal doktoriväitekirja «Lineaarruum kui arvu mõiste topoloogiline alus» tolleaegne gümnaasiumiõpetaja Jüri Nuut (1892—1952). Peterburi malmivalamismeistri pojana lõpetas J. Nuut 1914. a. Peterburi ülikooli füüsika-matemaatikateaduskonna ning töötas peale sõjaväest vabanemist aastatel 1921—1928 õpetajana Narva reaalgümnaasiumis ja Tartu ENKS Tütarlastegümnaasiumis. 1928. a. valiti ta Tartu ülikooli dotsendiks ning 1936. a. sellal avatud Tallinna Tehnikainstituudi matemaatikaprofessoriks. Tema kolleegiks Tallinnas sai Petrogradi ülikooli 1917. a. lõpetanud ja Tartus 1922. a. magistritööd kaitsnud Albert Borkvell (1890—1963), kes koostas hiljem mitmed kõrgema matemaatika õpikud.

1931. aastal omandas Tartus doktorikraadi J. Sarv töö eest «Geomeetria alused». Sellega alustas ta üht vähestest eesti matemaatikute poolt arendamist leidnud uurimissuundadest. Peale teda avaldasid seejärel uurimusi geomeetria järjestusaksioomidest J. Nuut ja Tartu ülikooli 1930. a. lõpetanud Arnold Tudeberg (1936. a-st. Humal; sünd. 1908. a.). Teadusliku stipendiaadina Göttingenis ja Viinis valmistas A. Tudeberg ette ja kaitses 1934. a. Tartus oma doktoriväitekirja «Kvadratuur-ridade teooriast ja rakendusmeetoditest», ning asus peale J. Nuudi Tartust lahkumist vabanenud dotsendi kohale.

30-ndate aastate lõpul ilmus Gunnar Kangro (sünd. 1913. a.) näol võimekas jätkaja H. Jaaksoni poolt alustatud suunale matemaatilise analüüsi valdkonnas. Pärast ülikooli lõpetamist 1935. aastal töötas Tartu ehitusinseneri perekonnast pärinev G. Kangro Tallinna Tehnikainstituudis (1938. aastast Tehnikaülikool) assistendina. 1938. a. kaitses ta Tartus magistri-(kandidaadi-)väitekirja «Polünoomide ridadest ja nende rakendusvõimalustest», millega pani aluse oma hilisematele viljakatele uurimistele hajutavate ridade teoorias.

Üldse publitseerisid eesti matemaatikud aastatel 1920—1940 ümmarguselt 25 matemaatika-alast teaduslikku uurimust[8]. Eespool mainitud töödes esinevate teemade kõrval köitis nende tähelepanu tänaseni lahendamata topoloogiline nelja värvi probleem, mida uurisid J. Sarv, J. Nuut, E. Krahn ja H. Jaakson.

Tõsisemast uurimissuunast neil aastail võib vahest kõnelda aritmeetika ja geomeetria aluste valdkonnas, kus töötasid J. Nuut, J. Sarv ja A. Humal. Siit lähtusid J. Nuudi esimesed tööd (1935) Lobatševski geomeetria ja selle rakenduste alal ruumi ja aja teoorias, mis koos tema hilisemate sellealaste uurimustega[9] on silmapaistval kohal eesti matemaatikute teaduslikus loomingus.

Teadusliku töö arengut matemaatika alal Eestis kodanluse võimu aastail pidurdasid tunduvalt selleaegsed kitsad tingimused. Puudusid võimalused noorte teadlaste ulatuslikumaks ettevalmistamiseks ja töölerakendamiseks, mistõttu uurijate arv kasvas väga aeglaselt. On üsna iseloomulik, et matemaatika

---

[8] Хумал, А. К., Работы эстонских математиков за тридцать лет. — Математика в СССР за тридцать лет 1917—1947. М., 1948, lk. 1031—1034.

[9] Нут, Ю. Ю., Геометрия Лобачевского в аналитическом изложении. М., Изд. АН СССР, 1961.

korraliste õppejõudude arv Tartu ülikoolis jäi muutumatuks kogu kodanliku perioodi vältel, piirdudes kolme professori ja ühe dotsendi kohaga. Rohkesti tähelepanu nõudis ülikooli õppejõududelt tollal matemaatilise hariduse korraldamine. Sellealaste ürituste eesotsas seisid G. Rägo ja J. Nuut, kes on tuntud ka heatasemeliste kooliõpikute autoritena [10]. Mitmeid administratiivseid kohustusi tuli ülikoolis täita H. Jaaksonil. Teaduslik uurimistöö pidi pahatihti jääma tagaplaanile.

1940. aasta murrangulised sündmused tõid kaasa mitmeid muudatusi ka eesti matemaatikute ellu. J. Nuut sai Tallinna Polütehnilise Instituudi esimeseks nõukogudeaegseks rektoriks. TPI matemaatika kateedrisse asusid tööle Tartu ülikooli kasvandikud A. Garšnek (sünd. 1911. a.) ja A. Särev (sünd. 1902. a.). Tartu ülikooli juures asutati Teadusliku Uurimise Instituut, moodustati kateedrid, rajati aspirantuur. Kujunesid eeltingimused teadusliku uurimistöö kiireks kasvuks. Kõige selle katkestas järsult fašistliku Saksamaa reeturlik kallaletung Nõukogude Liidule.

Matemaatika sõjajärgses Nõukogude Eestis

Avarad arenguperspektiivid kõrgema hariduse ja teaduse ees vabariigis avanesid pärast Eesti NSV territooriumi vabastamist Saksa okupatsioonist, kui osutus võimalikuks täies ulatuses ellu viia juba varem nõukogude võimu poolt kavandatud samme. Tartu ülikoolis asutati noore teadusliku kaadri ettevalmistamiseks aspirantuur, kujunesid võimalused vahetuks kontaktiks Nõukogude Liidus kiiresti areneva teaduse saavutustega. Rahvamajandus ja haridusvõrk vajasid üha rohkem kõrgema haridusega spetsialiste.

Teiste teadusharude kõrval hakkas ENSV-s kiiresti arenema ka matemaatika. Pärast Tartu vabastamist 1944. a. augustis alustasid taastatud ülikoolis uuesti tööd juba kõrgeealised professorid G. Rägo, J. Sarv ja H. Jaakson. Kuu aega hiljem vabastati pealinn, kus Tallinna Polütehnilises Instituudis asusid õppetööle selle varasemad õppejõud A. Borkvell ja A. Särev ning matemaatika kateedri juhatajana A. Humal, kellele 1945. a. omistati professori kutse. Nõukogude Liidu tagalast pöördusid tagasi J. Nuut, G. Kangro ja A. Garšnek. Neist asus J. Nuut ENSV haridusministrina juhtima vabariigi hariduselu, G. Kangro ja A. Garšnek aga siirdusid õppetööle, esimene Tartu Riikliku Ülikooli, teine tagasi Tallinna Polütehnilisse Instituuti.

---

[10] Prinits, O., Kõrgema matemaatika algmete käsitlemisest eestikeelseis matemaatika õpperaamatuis aastatel 1920—1940. — Loodus ja matemaatika, I. Trt., 1959, lk. 142—158. Prinits, O., Matemaatika õpetamise reformimistaotlusi möödunud sajandi lõpul ja käesoleval sajandil. — Loodus ja matemaatika, III. Trt., 1963, lk. 125—136.

Senine kaader osutus väheseks õppetöö korraldamisel uues avaramas olukorras. Nii kutsuti TPI juurde tööle lisaks senistele õppejõududele K. Ratassepp (1898—1960), O. Silde (sünd. 1900. a.), H. Roos (sünd. 1906. a.), B. Tiikma (sünd. 1908. a.), O. Rünk (sünd. 1914. a.) ning mõnevõrra hiljem N. Paluver (sünd. 1910), kes kõik on Tartu ülikooli varasemad kasvandikud. TRÜ juures jätkas tööd A. Ruubel (sünd. 1899. a.), esialgu assistendina, 1949. aastast dotsendina. Esimesel sõjajärgsel õppeaastal lõpetasid TRÜ S. Riives (sünd. 1919. a.) ja J. Gabovitš (sünd. 1914 a.), kes jäid mõlemad ülikooli juurde, S. Riives assistendina ja J. Gabovitš esimese aspirandina.

Tähtsaks sündmuseks vabariigi teaduslikus elus oli Eesti NSV Teaduste Akadeemia asutamine 1946. aastal. Esimeseks akadeemikuks matemaatika alal valiti J. Nuut. 1951. aastal sai akadeemikuks ka A. Humal.

Tartu ülikoolis kujunes matemaatika-alase teadusliku töö juhtijaks G. Kangro, kes 1948. a. omandas doktori kraadi tööde eest hajuvate ridade summeerimismenetluste teooria alal ning kinnitati 1951. a. professoriks. 1961. aastal valiti prof. G. Kangro ENSV Teaduste Akadeemia korrespondentliikmeks.

Alates 1950-ndaist aastaist hakkas eesti matemaatikute kollektiiv kiiresti täienema noorte TRÜ lõpetanud pedagoogide ja teadlastega, keda ootas avar tööpõld. Üha laienevate TRÜ ja TPI kateedrite kõrval vajasid matemaatikuid 1951. a. asutatud Eesti Põllumajanduse Akadeemia, teaduste akadeemia süsteemis 1960. a. loodud Küberneetika Instituut ning muidugi vabariigi koolivõrk. Uusi kaadreid nõudis elektronarvutitega varustatud arvutuskeskuste rajamine TRÜ juurde 1959. aastal ja Küberneetika Instituudi juurde 1960. aastal.

Ainsaks matemaatikute kaadri sepikojaks ja ka matemaatikaalase teadusliku töö juhtivamaks keskuseks vabariigis on käesoleva ajani endiselt jäänud Tartu ülikool. Manalasse varisenud teenekate professorite J. Sarve, H. Jaaksoni ja pensionile siirdunud G. Rägo asemel korraldavad siin nüüd õppetööd prof. G. Kangro kõrval teoreetilise mehaanika professor Ü. Lepik ning arvukalt noori matemaatikuid eesotsas dots. Ü. Kaasiku, dots. Ü. Lumiste, dots. O. Prinitsa, dots. E. Tamme, dots. L. Võhandu, dots. I. Kulli, dots. E. Reimersi, dots. S. Baroni ja teistega. Tunduvalt on laienenud TPI matemaatika-alased kateedrid, kus vanemate õppejõudude prof. A. Humala, dots. A. Särevi, dots. A. Garšneki, dots. O. Rünga, dots. N. Paluveri, dots. k. t. O. Silde jt. kõrval töötab arvukalt nende noori kolleege. Eesti Põllumajanduse Akadeemiasse on tööle siirdunud dots. A. Ruubel, dots. J. Gabovitš, S. Riives jt. TA Küberneetika Instituudi kollektiivis töötavad füüsika-mate-

Jaan Sarv

Hermann Jaakson

Gerhard Rägo

Jüri Nuut

Albert Borkvell

Edgar Krahn

Arnold Humal

Gunnar Kangro

maatikakandidaadid I. P e t e r s e n, M. T a m m ja terve rida veelgi nooremaid matemaatikuid.

Ulatuslikult on kasvanud matemaatika-alase teadusliku töö maht vabariigis. Eesti NSV matemaatikud on aastatel 1944—1963 avaldanud ümmarguselt 320 uurimust[11]. Juhtivamateks suundadeks on olnud[12] prof. G. Kangro ja tema õpilaste I. Kulli, E. Reimersi, S. Baroni, E. Jürimäe, T. Sõrmuse, F. Vichmanni, E. Tiidu jt. töödes arendatud ridade teooria, samuti prof. G. Kangro suunamisel tema õpilaste L. Võhandu, Ü. Kaasiku, E. Tamme poolt viljeldud arvutusmeetodite suund, milles on teinud uurimusi ka Tallinna matemaatikud A. Humal, N. Paluver, I. Petersen, S. Ulm, M. Levin jt. ning Tartus J. Gabovitš, L. Kivistik, R. Jürgenson, G. Vainikko jt.

Sõjajärgseil aastail on Nõukogude Eestis edukalt arenenud ka kujutav geomeetria, mille teoreetilisi probleeme on uuritud nii Tallinnas (A. Humal, O. Rünk, N. Paluver jt.) kui ka Tartus (A. Ruubel, S. Riives). Viimastel aastatel on laienenud uurimused mitmemõõtmeliste ruumide diferentsiaalgeomeetria (Ü. Lumiste, R. Mullari, M. Rahula, L. Tuulmets) ja selle rakenduste (O. Silde, B. Tiikma jt.) alal, samuti algebras (varem M. Tamm, I. Petersen, viimasel ajal J. Hion, Jevg. Gabovitš jt.).

Kõige nooremaks uurimissuunaks vabariigis on küberneetika. Automaatse tõlkimise probleeme on uuritud TRÜ arvutuskeskuses (Ü. Kaasik, A. Korjus jt.) ning TA Keele ja Kirjanduse Instituudis (R. Palm, T. Tobias). Programmeerimise meetodite alal töötatakse nii Tallinnas kui Tartus. Üsna noor on majandusmatemaatika suund, milles on uuritud transpordi probleemide lahendamist (I. Kull jt.), optimaalsete külviplaanide koostamist (Ü. Kaasik, T. Akkel) ning tehase töö planeerimist (Ü. Kaasik, R. Mullari jt.).

Eeltoodust nähtub käesolevale ajale kõikjal iseloomulik matemaatika kiire areng nii sügavuti kui laiuti, mis Eesti NSV-s paistab varasema perioodiga võrreldes eriti silma. On minevikku vajunud need ajad, mil ülikooli lõpetanud matemaatikut ootas kitsas tööpõld, heal juhul koolis või kindlustusseltsis. Matemaatiku elukutse on meie vabariigis tõusnud ausse, eesti matemaatikute ees on rida olulisi ülesandeid, mille lahendusi ootavad nii teadus kui rahvamajandus.

---

[11] Vt. Математика в Советской Эстонии за последние двадцать лет. — TRÜ Toimetised, vihik 150, 1964, lk. 12—52 (sisaldab biobibliograafia aastate 1944—1963 kohta).

[12] Vt. eelmine allviide; samuti K a n g r o, G., Matemaatika arengust Tartus aastail 1917—1957. — Täppisteaduste sektsiooni esimene konverents. Trt., ENSV TA Loodusuurijate Selts, 1959, lk. 5—14.

ARVUD EESTI RAHVALUULES

E. Laugaste

Eriline koht rahvaluule poeetikas on arvudel. Arv märgib seda, mis on ühist kõigil juhtudel, kus on tegemist mitme või hulgaga. Arvud baseeruvad inimest ümbritsenud esemete, olendite ja nähtuste arvestamisel ja loetlemisel (ka need, mis on seotud maagiaga, sest seegi on välja kasvanud omaaegse inimese arusaamisest ja oma ümbruse tõlgitsemisest, tasemest, millel inimene vastaval momendil asus). Arvudega võidakse väljendada nii nähtuste konkreetsust kui suhtelisust, viimase hulka kuulub ka rahvaluules nii sagedane hüperbool.

Enamasti on arvud rahvaluules ikka seotud mingite konkreetse esemetega, sest inimene mõtleb konkreetselt. Järgmine rahvalaul kinnitabki, kuidas arvud realiteedist välja kasvavad:

Üks ei ole ühtegi,
kaks silma kassil peas,
kolm jalga vokil all,
neli nisa lehmal,
viis sõrme mehe peos,
kuus naela hobuse rauas,
seitse tähte taeva sõelas.

Arve kasutati, nagu öeldud, suhteliste olukordade (näiteks: suurem, väiksem, palju jms.) iseloomustamiseks. Eri funktsioon oli sealjuures suurtel ja väikestel arvudel. Kui väikesed arvud enamasti lähtuvad inimest ümbritsevatest konkreetsetest olukordadest, siis suurematel arvudel on suhtelisuse osa üldiselt palju suurem. Järgnevalt vaatlemegi üksikute arvude kasutamist rahvaluules veidi lähemalt.

Üks on rahvaluules sagedasti kasutatav arv. Kui aga tegemist on selgesti ühe esemega, või kui üht pole eriti rõhutatud, jäetakse ta sõnalises väljenduses ära, eriti lauludes: *Korra* (kuu) *tõuseb, teise lõpeb, / korra kasvab, kaks kahaneb.*

Arvu üks mainimine rõhulises asendis on paratamatu: *Meil üks, teil üks, igas peres üks.* (Ahjuroop.)

Arvu üks võidakse kasutada terviku ja osa suhete märkimiseks: *Tüdruk ühe silmaga.* (Nõel.) — *Must lehm, üts kõrv, üts nisa.* (Teekann.) — *Üks kala, kaks saba.* (Põll.)

Arvul üks on ka vastandav sisu: *Üks kuusk kullamäel, teised kuused kummardavad.* (Pastor ja kirikulised.) Samuti kasutatakse teda loeteludes: *Üks auk, kolm vööd, kaks kõrva.* (Pang.)

Kaks on tavaliselt seostatud kooskäivate esemetega. Inimesel või loomal on kaks silma, kõrva, jalga, kätt: *Kaks rebast, teine teisel pool mäge.* (Silmad.) Esemetel on ikka kaks poolt (külge, kanti), kaks otsa. Kiigele asetuti: *Teene teese otsa peale.* Kiige katsumisel küsiti: *Kas see kannab kahte noorta*? Ema hauale astuvad kaks vaeslast. Mõne muinasjutu peategelaseks on kaksik, kaks vastastega võrreldes nõrka last, kes täidavad ühesugust osa. Seesugust tegelaste paigutust nimetab taani uurija A. Olrik kaksikute seaduseks. Ka mees ja naine võivad koos moodustada peategelase, neist üks on siis formaalne peategelane, nagu muinasjutus «Kalamehest ja kalakesest». Klassikaline muinasjutu seadus on tegelaste asetumine dialoogivahekorda ainult kahekaupa (A. Olriki poolt nimetatud lavalise kaksuse seaduseks). Kaks on ühtlasi vastandav arv. Eepilistes teostes on tegelasel vastane. Ka kontrasti seadus baseerub ju arvul kaks.

Arv kaks esineb vahel veel maagilistes vormelites (näiteks jäära taltsutamise sõnu saadab 2 lööki jäärale) ja mõningates teistes olukordades: sünnitav emis sööb ära kaks põrsast. Mõistatus: *Kaks kord sünnib, üks kord sureb.* (Lind.)

Rohkemat kui kaks väljendatakse sõnadega «kaks ja peale ka»: *Haudus kuu, haudus kaksi, / peale kuu päeva kaksi.*

Kolm esineb rahvaluule kõigis liikides (A. Olrik formuleeris isegi muinasjuttude kolmarvu seaduse). Arv kolm tähendab tavaliselt kolme kokkukuuluvust, eseme või nähtuse vaatamist eri aspektidest, loetlemist ja gradatsiooni. Kolm on hulk, mida inimene suudab eksimatult meeles pidada. Kolme eseme kombinatsioone tunneme ka etnograafias: naistel on kolme topiga müts, hang on kolmeharuline jne.

Lauludes, mõistatustes ja muinasjuttudes esineb kolm venda, tegelast, tegevust, katset, neidu, kosilast, härga, lehma, metsa, järve, aita: *Kolm neitsit seisavad ühes riides suvel kui ka talvel.* (Kuusk, mänd, kadakas.) — *Meri kolme tulba otsas.* (Kaljaastja.) Kolm võib olla vahel ka vastandavas tähenduses. Muinasjuttude kolmest vennast kaks vanemat on kõigiti ühesugused, neile vastandiks on noorim, kes on eepilise tegevuse seisukohalt kõige tähtsam ja kujunebki jutu peategelaseks, ühtlasi vanemate vendade vastandiks ning konkurendiks.

Mitmesugustes taigades on kolm erakordselt sagedane: kolm lööki vastu ahjunurka, vastu maad, vastu mõnd kehaosa; kästakse kolm korda sülitada, aevastada, issameiet lugeda, liigutakse kolm korda ümber eseme, tehakse kolm piiramisringi pärivõi vastupäeva, kolm risti, loetakse kolm teksti; lehmale, kes pulliga ei lepi, antakse kolm lööki jahukotiga jpm.

Kolm võib olla kombineeritud kolmega, nagu järgmises mõistatuses: *Teil kolm, meil kolm, igas peres kolm.* (Ahjuroop, luud, labidas.) Samuti võib ta kombineeruda teistegi arvudega, näit. ütlemises: «*3 × 9 penikoormat*», või terviku ja osa suhetes: *Üks härg, kolm sarve.* (Kolmeharuline hang.)

Kolm esineb tihti ka kõnekäändudes: *Ei oska kolmeni lugeda* (= rumal). *Ei oska kolme kah lugeda* (= kohkunud, üllatunud). *Ei ole aru kolme kopika eest.*

Nelja eseme kombinatsioone pakub inimese ümbrus palju: toal on neli nurka ja neli seina, lehmal neli nisa ja neli jalga, voodil ning toolil on neli jalga, laud on neljakandiline, naistel nelja sopiga müts, toaaknal on enamasti neli ruutu, kuus on neli nädalat jne. Sellele vastavalt neli märgibki eseme või organi üksikosi: *Liha tantsib nelja raudtaldriku peal.* (Hobune.) — *Ait nelja tulba pääl.* (Loom.) — *Enne mind sündis, aga alles neljanädalane.* (Kuu.) — *Neli toas, kaheksa õues.* (Maja nurgad.) — *Neli jalga, kaks jälge.* (Regi.) — *Neli neidu, kümme peigu.* (Labakindad.) — *Üks ait, neli nurka, iga nurga all nael rauda.* (Hobune.) — *Neljajalgne kasvatab, kahejalgne katkestab.* (Kasukas.) — Müüdud tütar neab laulus oma ema lehma: *Nisa verda, teine vetta, / kolmas piimada punasta, / neljas võida ruugeeta.*

Mõnikord kasutatakse arvu neli ka teistes kombinatsioonides: laps käib neljakäpukil, joomar neljatöllakil; maagilist toimingut tehakse vahel neli pühapäeva järjest.

Viis on pool kümnest. Inimesel on viis sõrme ja varvast, reherehal viis pulka: *Valge härg, viis pääd.* (Jalg ja varbad.) — *Vabadiku saun, viis meest sees.* (Kinnas.) — *Üks uks, viis tuba.* (Sõrmkinnas.)

Muistendeis nõuab kodukäija oma eluaegselt võlgnikult tagasi viit kopikat (vrd. kõnekäänd: *Tagasi nagu viis kopikat*). Algriimi tõttu kõneldakse viiest vennast. Õues on viis aita, mis märgib rikkust. Viie kombinatsioonidest märgitagu viis korda viit: *Mul on kodo viisi vendä, / igäl vennäl viisi kirvest.*

Kuus kodarat on reel (kelgul), kuus naela hobuse rauas: *Kuus jalga, kaks jälge.* (Kelk.) — *Vana hobune, kuus küljeluud.* (Lootsik.)

Arvu kuus esineb rahvaluules siiski üsna vähe, vahel veel rahvajuttudes.

Seitse on päevade arv nädalas, seitsmesilmakiri on kindakiri, vikerkaares on seitse värvi, seitse tähte taeva Sõelas: *Seitse linti üle ilma seatud.* (Vikerkaar.) — *Ühel emal seitse last.* (Nädal.) — *Siidikeral seitse auku sees.* (Pea.) — *Must koer, valge kurgualune; kuus päeva magab, seitsmendal haugub.* (Pastor.) Kui umbkaudselt väidetakse, et näiteks vesi kusagil tõusis seitse jalga, siis lähtub see vist küll süllast.

Mida suuremaks muutuvad arvud, seda suuremat relatiivsust nad väljendavad. Nii ka seitse vastab juba mõistele «mitu»: *Seitse päeva kannatust ja kolm tosinat taskurätikuid.* (Nohu.) — *Üks seljali maas, seitse segavad sees.* (Leemekauss ja lusikad.) Nendes näidetes on võimalik liikumine seitsme piirides, ei oletata aga täpselt seitset (päeva, lusikat). Suurema hulga korral võib seitse mõnikord tähendada ka «palju».

Laenuline näib olevat kõnekäänd: *võta oma seitse asja ja mine* (= võta oma asjad). Pilkealusest üteldakse: *Suu oli seitsmesopiline.* Kui kellegi kohta üteldakse, et *tema jutt on seitsmetahuline*, siis tähendab see: mitmest kohast kokku lapitud, segane. Samuti esineb seitse maagilistes vormelites: kästakse lugeda mingit teksti *seitse korda eespidi, seitse taaspidi.* Tuntud on muinasjutu seitse venda või kalendri seitsme venna ja seitsme magaja päev. Seitse venda võib reflekteeruda ka mõistatustes, tähenduses «palju» või «mitu»: *Seitse venda ühes kindas.* (Hernekaun.)

Kaheksa on rahvaluules vähe esinev arv. Teda kasutatakse üldiselt koos teiste arvudega: *Üks kass, kaheksa jalga.* (Regi.) — *Kaheksa jalga, kaks jälge.* (Regi.)

Üheksa esineb väga harva konkreetses tähenduses: *Üheksakeeleline köis. Üheksast lapsest saab kolm poissi ja kolmest poisist üks tugev mees.* Tõrjemaagia tunneb üheksat sõlme.

Peamiselt esineb üheksa tähenduses «palju, mitu»: *Härg magab üks aasta, ase seisab üheksa aastat.* (Heinakuhi.) — *Ühel mehel üheksa silma.* (Pajakook.) — *Ühe mehe mõistus, üheksa mehe jõud.* (Karu.) — *Üks ema, üheksa last.* (Kartul.)

Kümme esineb konkreetses tähenduses seetõttu, et inimesel on kümme sõrme, varvast. Kõneldakse inimese kümnest küünest, mille varal ta on enese üles töötanud. *Kümme meest kiigutavad, mida rohkem kiigutad, seda rohkem laps nutab.* (Lõõtspill.) — *Kaks valda, kümme teopoissi.* (Käed.) Ka on mõningail esemeil kümme osa, näiteks rattal kümme kodarat.

Rohkem kasutatakse kümmet aga suhtelises mõttes, näiteks kõnekäänus: *Kümme korda lubab, aga kordagi ei täida.* Sama tüüpi on ka mõistatus: *Kümme kurge küürutavad ühe vaagna veere peal.* (Lusikad kausi serval.) Kiireks peastlahendamiseks on tuntud ülesanne kahe küsimusega: *Üks inimene, mitu sõrme*? Vastus 10. *Kümme kätt, mitu sõrme*? Eksivastus 100.

Tegelikus rahvapärases arvutuses esineb kümnelist grupeerimist: suitsusilke müüdi kümnekaupa, samuti kapsataimi.

Kaksteist kuud on aastas: *Mees 12 näoga.* (Aasta.) Kaksteist moodustab tosina, aga tosinakaupa osteti poest nööpe, haake, õmblusnõelu jm.

Suhtelise tähendusega on 12 järgmises mõistatuses: *Üits tamm, kaitstõist ossa, egäh ossah kaitstõist muna.* (Lääts.)

Kolmteist kuud olnud vanasti eestlaste aastas (vt. *Abriss der estnischen Volkskunde*. Tallinn 1964, lk. 236.) [1]. Usk kolmeteistkümnesse kui õnnetusearvusse on rahvusvaheliselt laialt levinud, eriti nn. suurlinna-rahvausundis. Eesti rahvauskumustes on seda vähe kasutatud.

Suured arvud leiavad kasutamist oluliselt ikka relatiivses mõttes, nad väljendavad suurt defineerimata hulka. Selles funktsioonis on arvud juba umbes kahekümnest alates. Siitpeale tabame peaaegu ainult kümneid. Erinevaist kombinatsioonidest toome järgnevalt vaid mõned olulisemad.

Seitsekümmend *ülikonda, kõik ilma haakideta.* (Kapsas.) Ebamäärase ajaloolise tagasivaate korral üteldakse — *see oli 70 aasta eest* (võib-olla on selle arvu kasutamist mõjutanud traditsioonis oletatav inimese eluiga).

Üheksakümmend üheksa esineb vaid tähenduses «palju»: *99 istuvad laudas, isi tulijad, isi minijad.* (Raibe ja kaarnad.)

Sada esineb nii konkreetses kui suhtelises tähenduses. Sajakaupa loeti kalapüügiartellis kalu, linakitkujad ja -raatsijad lugesid linapeosid ja sajaga arvestati vist muudki (kapsataimi). Huvitavaid andmeid on Saaremaalt kalade arvestamise ja lugemise kohta. Toome vastava üleskirjutuse tervelt.

«Sõrulased müüsid vanasti ning müüvad praegugi veel kalu (räimid) ikka s a d a d e   k a u p a. Tulgu müüdav arv mitme tuhande peale, kuid siiski kestab sadade lugemine ikka edasi, näiteks: 10 sada, 15, 20, 30 sada ja nõnda edasi, kuna tuhandeid arvesse ei vööta. Mitte üksi müümise korral ei arvesta kalurid kalu sadade kaupa, vaid ka rannas oma keskel. Näiteks kui keegi tuttav kalurilt küsib: «Noh, kudas täna ööse kalapüük õnnistas kah?» vastab see, kui kalasaak keskmine: «Ei või nuriseda, saime oma paarkümmend sada mehe päält.» Kaladeks kutsutakse ainult räimed, kuna teised äärkalad kala nime ei kanna, nagu tursad, lestad, haavid jne.; neid kutsutakse ikka nimepidi.

Kalu loeti müügi ajal vanasti järgmiselt: vööti kaks kala korraga pihku ja alustati peale: ühest kuni kahekümneni loeti harilikul viisil, kuid siis algas: üks kolmat, kaks kolmat, kolm kolmat, neli kolmat, viis kolmat, kuus kolmat, seitse kolmat, kaheksa kolmat, üheksa kolmat, kolmkümmend, üks neljat jne. — kuni neljakümneni, üks viiet — kuni viiekümneni. Nüüd oli üks sada juba loetud, ja kui kalu suuremal arvul sai vöötud, siis pandi üks kala eraldi kõrvale ja alustati uut sada lugema, mis niisama ka toimetati, ning jällegi üks kala kõrvale pandi, esimese juure. See kordus seni, kuni nõutav kalade arv täis sai, kusjuures eraldi pandud kalade järgi sai loetud kalade arvu kontrollitud.» (E 66874/6 (13) < Jämaja, Torgu — A. Kuldsaar 1930).

---

[1] See arvamus on vaieldav. L. E. M a i s t r o v kirjutab oma veel avaldamata uurimuses «Puukalendritest Eestis» (käsikirja säilitatakse ENSV TA Loodusuurijate Seltsis): *«Ma kuulsin Eestis korduvalt, et muistne eesti kalender oli kuukalender ja sisaldas 13 kuud. Kuid ühtki kalendrit 13 kuuga mul ei õnnestunud leida. Minu arvates see eksiarvamus võib tekkida seoses asjaoluga, et ruunikirjas kalendreid oli sageli sobiv valmistada 13 lauakesel märkides igale küljele kaks nädalat. Kuid me nägime, et ruunikirjas kalendreid valmistati ka teistsugusel arvul lauakestel (6, 7 jne.). See ei tähenda aga sugugi, et aasta jagunes 6 või 7 perioodiks. Samuti ei jagunenud ta ka 13 kuuks.»* (Toim.).

Rohkem esineb sada küll suhtelises arvestuses. Näiteks rahvalaulus «Laisk kalamees» on värsipaar: *Sain ma sada siiakesta, / viiskümmend vimmakesta.* Kui tahetakse väita «palju aastaid tagasi», üteldakse tihti: *saja aasta eest.* Esemeist, millel on palju eraldatavaid osi, kuid nende arvuline tabamine väga raske, antakse ainult iseloomustav üldmulje ümmarguste arvudega: *Keha ümar, sada silma peas.* (Sõel.) — *Üks sant, sada mantlit.* (Kapsapea.) — *Üks saun, sada akent.* (Puuriit.) Siia kuulub ka kõnekäänd: *Olen sulle seda sada korda* (= palju kordi) *ütelnud*!

Tuhat esineb peaaegu ainult suhtelises mõttes, harilikult mitmesugustes kombinatsioonides, nagu tänuavaldus: *Ole sa tuhandest* (= tuhat korda) *terve!* Suure kiiruse arendamise puhul üteldakse: *tuhat ja nelja kihutama.* Kirumissõnana kasutatakse: *tuhat ja tuline* ~ *tuline tuhat.* Kui mingi asi (raha) on lõpukorrale jõudmas, üteldakse: *see on viimase tuhande peal.* Siia kuuluvad ka mitmed mõistatused: *Tuhat toomelehte, sada saarelehte, kaks kaanelauakest.* (Raamat.) — *Üks linn, tuhat akent.* (Sõrmkübar.)

Ebamääraste arvuliste mõistete väljendamiseks on rahvaluules rohkesti võimalusi.

Paar tähendab üldiselt kahte. On paarisrahvas ehk abielupaar; loomi või linde võib olla paar jne. Paar on ka künnihärgi: *Sealt saab paari ikkehärgi, / teise paari karjahärgi, / kümme paari künnihärgi.* Samuti on paar käibel kaubanduses: paar mune, paar kingi, pastlaid; paar kääre, lambaraudu jm.

Kui aga üteldakse: *ootasin paar tundi, käisin paar korda, mul on paar rubla raha,* siis ei ole kindel, et tegemist on kahega.

Rahvaluule tunneb ka paaris- ja umbarvu (paarituarvu). Kombestikus (näit. pulmakommetes) on mõnes situatsioonis nõutud paaris-, mõnes paarituarvu.

Palju tähenduses kasutatakse enamasti suuri arve. Samas tähenduses võib olla aga ka arvude alanev rida: *Hunt sõi 1000 tutanit, 100 sarvikut, 50 vibunina, 60 kompajalga* (= lambad, lehmad, sead, hobused).

Lugematult suure hulga tähenduses leiavad kasutamist mõisted *must tuhat, must miljon.* Eriti suure arvu märkimiseks kasutatakse veel sama arvu kordamist (nagu rahvaluules üldse sel teel väljendatakse superlatiivsust): *Tuhat-tuhat, sada-sada, ühe korraga lööb maha.* (Heinaniitmine.) Sama tulemus saavutatakse loetlemisega: *Üks tuhat, kaks tuhat, jumal teab mitu tuhat sõitvad siidi silda mööda raudsesse linna.* (Herneid valatakse patta.)

Järgarvude reastamine on rahvaluules sagedane, seda kasutatakse väga mitmesugustes kombinatsioonides (eriti laulудes).

Suhteliselt harva aga leidub reastamist ühest kümneni välja: *Mullu jõin murekarika, / tänavu joon teese täie, / kolmat täita täidetässe, / nelläs laanib laua peäle, / viies pilgub piekerissa, / kuues kuormale säetud, / seitsmes liigub linnassisse, / kahessamat kallatasse, / ühessämät ürjätässe, / kümnemät maha külvätässe.*

Enamkasutatavaid reakombinatsioone on palju, kõige sagedamini esinevad siiski järgmised: 1—3; 1—4; 1—5; 1—6; 1—7; 5—10; 6—10; 10—9, 2; 10—5.

Murdarvudega tegeleb rahvas vähe. Nendest esinevad vaid **pool** (*pool muna; teeme pooleks! Poolkuu. Parem pool muna kui tühi koor. Kolm tuhat ja üks pool*) ja **veerand** (*veerandtoopi* = kortel, veel käib kortel pikkusemõõduna = veerand küünart; *kuuveerand* (Kreutzwaldi «Kalevipojas» kortel)), vahel ka **osa** (tähenduses: terviku jagatis selle arvuga, mitu jagajat osa võtab; näiteks *kolmas osa*).

Tuleb silmas pidada, et arvude kasutamist tingib paljudel juhtudel algriim (peaaegu kõigis liikides) ja arvud omakorda tingivad mõningaid sõnu kontekstis. Vanasõnas *«Parem kaks kargamas kui viis vingumas»* on arvsõnad tingitud sõnadeks, sest tähtis oli ütelda, et paremad on rõõmsad kui virisejad.

Laulus, mis kõneleb mõisapõllust, on üteldud: *Viis on vaimu välja pealla, / kuus on kubjasta järella, / kümme küljemõõtijada.* Ka siin on primaarsed just vaim ja kubjas. Samuti tuleb algriimi mõju otsida tekstides, kus kõneldakse kolmest küünrast, viiest vaksast jms.

Peale arvude leiavad ka kõik aritmeetilised tehted rahvaluules selle- või teistsuguse väljenduse.

Liitmise näiteid võib kohata mõistatustes: *Kolm jalga, kaks kõrva, kuues on kõht.* (Astja.) Samuti liitmisega seotud naljandites: *Mulgi peremehel on laisk poeg. Kord peidab poiss end aida alla, kust isa ta lõpuks kätte leiab ning küsib: «Mis sa seal teed?» — «Ma püüan hiiri!» — «Palju kätte said?» — «Kui ma selle kätte saan, keda ma püüan, ja veel kaks, on kolm käes.»*

Lahutamist esineb arvmõistatustes, mis aga näivad hilist algupära olevat. Näiteks järgmine: *Tits seisab püsti, seitse jalga kõrge. Seatigu ronib iga päev kolm jalga ülespoole, öösi vajub kaks tagasi. Mitmendal päeval saab tigu tiku otsa?*

Korrutamist on eriti palju lauludes ja vanasõnades. Toome siin näite jätkuvärssidest: *Põld on kolmenurgeline, / igas nurgas kolmi napra, / igas nabras kolmi vihku, / igas vihus kolmi kõrta, / igas kõrres kolmi peada, / igas peas kolmi ivada.* Järgnev vanasõna asjade ja olendite eluea kohta on samuti üles ehitatud kolmekordsusele: *Aed seisab kolm aastat, koer kolme aia iga, hobune kolme koera iga, inimene kolme hobuse iga.*

Jagamiseks võib lugeda rahvaluules esinevat arvude reastamist vähenemise suunas (antikliimaks), nagu näiteks «Suure härja laulus» kasutatav rida 1000 — 100 — 10: *Tuhat vaksa turja paksu, / sada sülda sarved pikad, / kümme küünart küljekonti*[2]. Rohkelt näiteid on saja jagamisest kahega: *Sada sülda panin sangaleppa, / viiskümmend visa pädakat.* Sama esineb ka naljandeis: *Hirmunud poiss on näinud metsas sada hunti, teised ei usu, käsivad vähendada. Poiss vähendabki järjekorras 100 — — 50 — 25 — 10 — 5 — 1 — 0.* (Algul jagatakse kahega, 25 kahega ei jagu, küll aga 10, lõpuks jagatakse juba viiega.)

Rahvasuus leidub ka mõningaid päris keerukaid mitme tehtega ülesandeid, mis osalt küll võivad pärineda kirjandusest, aga nad on rahva hulka üsna tugevasti juurdunud. Toome järgnevalt mõned näited.

Isa, ema ja kaks poega pidid minema üle jõe. Paat võttis peale 70 kilo, isa ja ema kaalusid kumbki 70 kilo, pojad kokku 70. Kuidas saadi üle?

Üks hani oli maas, suur kari lendas ülal. Hani küsis lendavate hanede käest: «Kuhu te lähete, sada hane?» Ülalt vastati: «Meid ei ole sada. Kui meid oleks üks kord rohkem ja pool kord rohkem ja veerand kord rohkem, sa ise hulka ka, siis saab sada.» Mitu hane oli?

Arvusüsteemidest üldtuntud ja vana on **kümnendsüsteem.** Selle algeid tabame vist küll möödunud aastatuhandesse küündivas, eespool tsiteeritud «Suure härja laulus» (mõõdud on küll hiljem substitueeritud). Vanas «Müüdud neiu laulus» on juttu neiu eest saadud naturaalhinnast: *Kümme matti köömenida, / sada salve rukki'ida, / tuhat tünderit nisuda.* Soome-ugrilastel üldse on muinasajast peale valitsenud kümnendsüsteem. Selle süsteemi suure vanuse toeks võib olla ka iidne sõnaühend *lugu täis* tähenduses kümme täis, sest *lugu* tähendas juba *ca* 3000 a. tagasi kümmet. Tüvest *lugu* tuletub ka *lugema.*

Arvudest eesti rahvaluules võiks veel paljugi rääkida. Käesolev kirjutis on aga mõeldud vaid selle huvitava teema uurimisele virgutamiseks ja kõigepealt täiendavate andmete kogumisele juhtimiseks, mis kõik on alles eelduseks adekvaatsele käsitlusele.

[2] Süld on igivana pikkusemõõt, mida kasutati nööri jm. mõõtmiseks ning saadi laialisirutatud käte vahest üle rinna. Vana mõõt on ka küünar: pöidla ümbert kuni küünarnukini ja tagasi. Ametlikus mõõdustikus Tsaari-Venemaal olid kasutusel mõlemad kindlas pikkuses, esimene 2,1336 m, teine 0,5334 m. Laulus võisid moodud aegade jooksul muidugi asenduda.

UUS TÄIENDUS ÜLIKOOLI PERELE

E. Tiit

Igal suvel ja sügisel huvitab kõiki matemaatikuid järelkasvu küsimus. Heidamegi pilgu tänavusele matemaatikutepere täiendusele.

Avaldusi matemaatikaosakonna viiekümnele kohale astumiseks laekus 80 ümber, sealhulgas ligi paarkümmend (neist 8 medaliomanikku!) väljastpoolt meie vabariiki. Erinevalt eelmistest aastatest ei tehtud tänavu vastuvõtul vahet arvutusmatemaatikute ja küberneetikute vahel. Spetsialiseerumine algab III kursusel, kui üliõpilastel on juba tekkinud ettekujutus ainetest, millega neil tuleb tegelda. Tõepoolest, väga paljud üliõpilaskandidaadid ei osanud ka seekord täpsemalt määratleda, milline matemaatikavaldkond neid eriti huvitab (keskkoolimatemaatika põhjal on seda ka küllaltki raske teha). Siiski oli mõningatel noortel kindel huvisuund välja kujunenud: suhteliselt palju leidus «arvutihuvilisi», oli ka neid, kes soovisid õppida biofüüsikat, küberneetikat, teoreetilist mehhaanikat, algebrat ja geomeetriat. Jääb vaid loota, et need huvid jäävad püsima ning süvenevad, sest individuaalplaani alusel on võimalik spetsialiseeruda kõigile nimetatud aladele, aga ka reale teistele (majandusmatemaatika, matemaatiline loogika, matemaatiline statistika jne.).

Umbes veerand üliõpilaskandidaatidest tuli tootvalt töölt, omades vähemalt kaheaastast tööstaaži, kuid ainult üksikutel vastas see erialale. Noored, kes tulid ülikooli otse koolipingist, olid peaaegu eranditult saanud koolidest soovituse matemaatika (üldiselt matemaatiliste ainete) õppimiseks; matemaatiliste ainete hinded nende küpsustunnistusel olid neljadviied, 30% vastuvõetud üliõpilastest olid medaliomanikud. Kahju on sellest, et osakonda ei tulnud seekord edasi õppima tugevaimad noored matemaatikud — vabariiklikul olümpiaadil esikohti saavutanud kooliõpilased.

Sisseastumiseksamid toimusid kahes profileerivas aines — matemaatikas (suuline ja kirjalik) ning füüsikas (suuline) ja täiendavalt veel eesti keeles (kirjand). Iga eksamiga vähenes kandidaatide arv 1—3 võrra; õnneks polnud aga kadu suurem ka küllaltki keerulise kirjaliku eksami puhul (vt. käesolev kogumik, lk. 105, variandid I—IV). Olgu märgitud, et hinde «5» saavutamiseks oli tarvis lahendada täiesti korrektselt ja kõigi seletustega neli ülesannet, kusjuures viies (järjestus ei ole oluline) võis olla lahendatud poolikult. Sellega said hakkama 13 üliõpilaskandidaati, hindele «4» sooritas kirjaliku eksami 17 tulevast matemaatikut. Profileerivate ainete kõigil eksamitel said hinde «5» Kaarel Allik, Sirje Kirsimäe, Mihhail Lanin, Peeter Mälk, Silvi Noomen, Olavi Pihkva ja Ants Riesen.

Halvem oli aga kahjuks lugu eesti keele kirjandiga. Ei tohi nimelt unustada, et ka matemaatikutel on kirjaoskust päris hädapärast tarvis: ei saa ju matemaatilisi tõdesid kirja panna ainult sümbolites. Veelgi enam: sümbolite kasutamisel on eriti tarvis oskust mõtteid tabavalt, loogiliselt ja ökonoomselt väljendada — need on aga samad põhinõuded, mis on vajalikud ka hea kirjandi kirjutamisel! Üks matemaatikukandidaat pidi kehva kirjaoskuse pärast koguni ülikooli ukse taha jääma, õige lähedal oli see saatus veel paarile teiselegi, kellel matemaatilistes ainetes hinded olid päris head. Parimad «kirjamehed» pärinesid aga saartelt: Viivi Ojasaar Kingissepast ja Toivo Leiger Kärdlast.

Paralleelselt arvutusmatemaatikutega valmistatakse ülikoolis ette ka matemaatika ja füüsika pedagooge. Millegipärast on see ala aga noorte hulgas vähem populaarne: 75-le kohale laekus esialgu kõigest 50 sooviavalduse ümber. Tõsi, täiendava konkursi ajaks oli terve rida noori ümber mõelnud ning võistlus osutus siis juba üsna tõsiseks. Olukorda ei saa siiski heaks lugeda, sest niiviisi võib pedagoogilise haru üliõpilaste ja hiljem matemaatikaõpetajate hulka sattuda ka selliseid noori, kellel pole tegelikku huvi või isegi eeldusi oma elukutseks. Tulemuseks oleksid edaspidi keskkooli lõpetajad, kellesse pole osatud sisendada huvi ja armastust niisuguste kaasajal vajalike ning paeluvate teadusharude vastu nagu matemaatika ja füüsika.

Pedagoogika osakonda astuvatel üliõpilastel tulid sooritada samad eksamid (matemaatika kirjalikul eksamil variandid V—VIII, järelkonkursil IX variant, vt. lk. 106—108. Edukamad sisseastujad olid U. Kütt ja U. Fels. Lisaks nimetatud kahte osakonda astujaile võeti vastu veel matemaatikat õppima tootmistööd katkestamata mittestatsionaarses osakonnas 20 noort. Nende hulgas oli terve rida Tartu I Keskkooli matemaatikaklassi lõpetanuid, kes ühtlasi asusid tööle TRÜ arvutuskeskuses.

Seega kasvas tulevaste matemaatikute pere käesoleval aastal 145 noore võrra. Loodame, et kõigist neist ka tõepoolest matemaatikud saavad.

TEADUSE AJALOOLASTE KOKKUTULEK

Jakob Gabovitš

Alates 1958. aastast toimuvad vaheldumisi Riias, Tartus ja Vilniuses Baltimaade teaduse ajaloo konverentsid. Sealjuures on kujunenud traditsiooniks, et nende konverentside tööst võtavad aktiivselt osa ka Moskva, Leningradi, Valgevene ning Ukraina teadlased.

Ajavahemikus 18.—21. juunini 1964. a. toimus Tartus Baltimaade teaduse ajaloo V konverents, kus peale plenaaristungite töötati järgmistes sektsioonides: 1) füüsika ja matemaatika, 2) keemia ja tehnika, 3) meditsiin ja tervishoid, 4) bioloogia ja geograafia.

Anname lühikese ülevaate füüsika-matemaatika sektsiooni tööst. Suurim arv ettekandeid (9) oli pühendatud täppisteaduste ajaloole meie vabariigis. Oma sisukas ettekandes «Matemaatika õpetamine ja matemaatika õpikud Eestis XVII sajandil» tutvustas Ü. Lumiste esimeste matemaatikaprofessorite G. Himseli, H. J. Woltemate, J. Scheleni jt. tegevust Tallinna gümnaasiumis ja 1632. a. Tartus avatud rootsi ülikooli *Academia Gustaviana* juures.

Õnnestunud «dueti» moodustasid E. Tamme ettekanne «Matemaatika Tartu Ülikoolis aastatel 1920—1940» ning Ü. Lumiste ja E. Tamme ettekanne «Matemaatika areng Nõukogude Eestis». Need ettekanded näitasid ilmekalt matemaatiliste teaduste virelemist kodanlikus Eestis (vaatamata üksikute matemaatikute jõupingutustele) ja nende teaduste tormilist arengut Nõukogude Eestis. Õigustatult rõhutati meie vabariigi ühe juhtiva matemaatiku — professor G. Kangro tähtsat osa matemaatika igakülgses arengus Eesti NSV-s.

Üksikute matemaatikute teaduslikule tegevusele olid pühendatud järgmised ettekanded: P. Müürsepp ja H. Epler «Professor Jaan Sarve elust ja tööst», G. Želnin «W. Struwe ja Tartu Tähetorn», S. Sokolovskaja (Moskva) «Vega parallaksi määramisest W. Struwe poolt», E. Straut (Moskva) «J. Mädleri töödest selenograafia alal», H. Eelsalu «Professor T. Rootsmäe teaduslikust tegevusest».

P. Müürsepp rõhutas oma ettekandes «Astronoomiline muuseum vanas Tartu tähetornis» meie tähetornis asuva muuseumi suurt ajaloolist tähtsust ning selle osa astronoomia propageerimisel ja populariseerimisel. Muuseumis on eksponeeritud unikaalsed astronoomilised instrumendid, milledest on eriti hinnatavad W. Herscheli väike peegelteleskoop ja kuulus J. Fraunhoferi 9-tolliline omaaegne maailma suurim refraktor.

Läti ja Leedu täppisteaduste ajaloole olid pühendatud V. Ivanovski, I. Rabinovitši N. Bespamjatnõhhi, P. Slavenase ning J. Kubiliuse ettekanded. Erilist tähelepanu äratas viimati nimetatud teadlase esinemine teemal «Matemaatika Nõukogude Leedus». Vilniuse ülikooli rektor akadeemik J. Kubilius on silmapaistev eriteadlane arvuteooria alal. Tema sügavad uurimused analüütilise arvuteooria valdkonnas on äratanud tähelepanu nii Nõukogude Liidus kui ka välismaal. Kuulsa leedu matemaatiku huvi teaduse ajaloo probleemide vastu on muidugi väga teretulnud.

Rida konverentsil peetud ettekandeid käsitlesid Baltimaade täppisteaduste ajaloo üldküsimusi ning tihedat kontakti Baltimaade ja teiste Venemaa keskuste teadlaste vahel. Mainime siinkohal O.Ležnevi (Moskva) ettekannet «Baltimaade teadlaste osatähtsus füüsika arengus Venemaal XIX sajandi esimesel poolel», L. Maistrovi (Moskva) ettekannet «Sälkkalendrid ja pügalpulgad Baltimaade muuseumides astronoomiliste ning aritmeetiliste teadmiste mälestusmärkidena», J. Gaiduki ja S. Dahhia (Harkov) huvitavat ettekannet «Matemaatilised seosed Ukraina ja Baltimaade vahel ajaloolises minevikus». Suurt huvi äratas ka Kaasani professori B. Laptevi esinemine (väljaspool konverentsi programmi). Ettekandja kõneles suure vene matemaatiku N. Lobatševski ja Tartu professori F. Mindingu panusest mitteeukleidilise geomeetria arengusse ning selgitas põhjusi, miks Lobatševski ise ei avastanud tema poolt loodud uue geomeetria matemaatilist mudelit (selle mudeli leidis palju hiljem itaallane Beltrami ja andis niiviisi lõpliku tõuke Lobatševski suure avastuse tunnustamiseks matemaatikute poolt).

Võib öelda, et Baltimaade teaduse ajaloo V konverents täitis täiel määral oma ülesande. Meie külalised jäid rahule nii konverentsi hea organiseerimisega kui ka mitme ekskursiooniga mööda Tartut ja tema ümbrust.

Järgmine, VI konverents on otsustatud korraldada Vilniuses 1966. a. kevadel.

LOODUSUURIJATE PÄEV KÄÄRIKUL

E. Tiit

Loodusuurijate päevi on seni ikka Tartus peetud. Ega olegi nii lihtne sellist suurt teaduslik-populaarset üritust organiseerida: asjahuvilisi koguneb mitusada, esindatud on kõikvõimalikud loodusteadused, istungid toimuvad kümneskonnas eri sektsioonis... Omapäraseks on siinjuures veel «kirju» auditoorium — teaduste doktoritest ja akadeemikutest kooliõpilaste, koduperenaiste ja pensionärideni. Ettekanded on tõeliselt teaduslikud, kuid küsimusi võivad esitada kõik. Nii toimubki pärast ettekandeid teaduse aabitsatõdede selgitamine paralleelselt kõige kirglikumate ja printsipaalsemate diskussioonidega uusimate teaduslike tulemuste põhjal (nagu näiteks käesoleval aastal biokeemia sektsioonis vaidlus elu kunstliku loomise ümber). Iseloomulik on ka see, et siin võib näha geoloogi ornitoloogia sektsioonis või matemaatikut mikrobioloogia-alaseid ettekandeid kuulamas ning vaidlustes kaasa löömas.

Järjekordne, VII Loodusuurijate päev aga toimus Käärikul 18.—20. juulini. Hotellitoad asusid seekord suurelt osalt heinaküünis, auditooriumid — mäenõlvakutel. Ettekannete vaheaegadel supeldi ja korjati marju. Kõik muu oli aga nii, nagu varemgi loodusuurijate päevadel on olnud:

osavõtjate ning ettekannete arvu poolest oli käesolev aasta isegi rekordiline.

Ka täppisteaduste sektsioon tundis end vabas õhus mugavasti. Esimesel päeval toimusid füüsika-astronoomiateemalised ettekanded: Ü. Mullamaa kõneles optilistest nähtustest merel (nähtusi demonstreeriti «auditooriumist» hästi nähtaval Kääriku järvel) ja V. Põldmaa hämarikunähtustest (samuti olid olemas demonstratsioonivõimalused). Edasi rääkisid Ü. Uus hiigelplahvatustest kosmoses ja U. Veismann kaasaegsetest astronoomilistest teleskoopidest (sealhulgas ka Tõraveres asuvatest). V. Rossi ettekande «Äikesevaatlused Eesti NSV-s» pidas autori asemel sektsiooni juhataja H. Tooming kaugeneva äikesemürina saatel veel vihmast märjal rohul.

Järgmisel päeval esinesid matemaatikud. Prof. G. Kangro kõneles diferentsiaalide väliskorrutise kasutamisest matemaatilises analüüsis, A. Laumets jõusööda optimaalsete retseptide arvutamisest ja A. Korjus automaatsest programmeerimisest.

Eraldi tuleks märkida veel sisukaid ettekandeid plenaaristungitel (Ch. Villmanni «Kaasaegse loodusteaduse üldine arengutendents», prof. E. Kumari «Rahvastiku kasv, tehniline progress ja looduskaitse» jt.) ning lõpp-plenaaristungil vastuvõetud resolutsiooni, milles muuhulgas rõhutati populaarteaduslike trükiste (ka «Matemaatika ja kaasaja») tähtsust. Kõigil osavõtjail jäid meeldivad muljed ka meeleolukast lõkkeõhtust ja huvitavatest matkadest.

Seekordsel loodusuurijate päeval oli kahjuks suhteliselt vähe matemaatikuid. Täppisteaduste sektsiooni tööst võttis osa umbes 50 inimest, kuid matemaatikute päeval oli kõigest 20 kuulaja ümber. Piinlikkust valmistas ka kahe ettekandja-matemaatiku tulematajäämine.

EKSTRALINGVISTILISTE MODELLEERIVATE SÜSTEEMIDE ALANE SUVEKOOL KÄÄRIKUL

I. Kull

Teatavasti võib kõiki teadusalasid jaotada kahte suurde rühma: täppisteadusteks ja mittetäppisteadusteks (ehk nn. humanitaarteadusteks). Täppisteaduste, näiteks füüsika puhul kasutatakse mingi nähtuse uurimisel järgmist meetodit: eraldatakse ning fikseeritakse selle nähtuse olulised küljed ja momendid, mitteolulised jäetakse aga vaatlusest täiesti välja. Seejärel esitatakse oluliste momentide vahekord mingi matemaatilise valemi, võrrandi vms. abil. Nii näiteks võib vertikaalselt üles visatud keha kõrgust maapinnast (ajamomendil t) iseloomustada järgmise valemiga

$$s = s_0 + vt - \frac{gt^2}{2},$$

kus s_0 on keha algkõrgus maapinnast, v — üleviskamise algkiirus ja g — raskuskiirendus. Arvestamata on siin jäetud näiteks keha kuju ja sellest olenev õhkkonna takistus.

Uuritava nähtuse käiku kirjeldavat matemaatilist valemit, võrrandit vms. nimetatakse selle nähtuse matemaatiliseks mudeliks, mis analoogiliselt materiaalse mudeliga imiteerib tõelist objekti või looduses kulgevat protsessi.

Eeskätt just sellist käsitlusviisi rakendades ongi täppisteadused saavutanud otse hämmastamapanevaid tulemusi. Humanitaarteaduste saavutused on seevastu märksa tagasihoidlikumad. Nendes teadustes kasutatakse põhimeetodina siiani peamiselt faktide kirjeldamist ja nende kõrvutamist, matemaatilisi meetodeid aga suhteliselt vähe. Et aga sel viisil pole sügavamate üldistuste loomine võimalik, siis on ka humanitaarteadlaste hulgas tekkinud veendumus matemaatilis-modelleeriva uurimisviisi vajalikkuses. Muide, humanitaarteadustes nimetatakse sellist uurimisviisi veel strukturaalseks või semiootiliseks.

Humanitaarteaduste teiste aladega võrreldes on sellesuunalist tööd kõige rohkem tehtud keeleteaduse valdkonnas. Seda arvestades otsustati Kääriku suvekoolis peatähelepanu pöörata just teistele humanitaarteaduse aladele, eeskätt kunsti- ja kirjanduse probleemidele.

Vastavatele küsimustele pühendatud suvekool toimus TRÜ õppebaasis Käärikul 19.—29. augustini TRÜ vene kirjanduse kateedri organiseerimisel. Suvekooli tööst võttis osa üle 40 inimese Moskvast, Leningradist, Sverdlovskist, Lvovist, Tartust ja mujalt. Osavõtjad olid peamiselt keele- ja kirjandusteadlased. Kuid oli ka teiste alade esindajaid, näiteks matemaatikuid, kellest võiks esmajoones nimetada Moskva Riikliku Ülikooli õppejõudu V. U s p e n s k i t.

Et suvekoolis peeti üle 30 ettekande, siis on raske kõigist neist ülevaadet anda. Alljärgnevas nimetame peamiselt neid ettekandeid, mis pakuvad rohkem huvi matemaatilis-semiootilisest seisukohast.

Probleeme seadvateks tuleb lugeda prof. J. L o t m a n i (TRÜ) ettekandeid, kus ta analüüsis mängu (laias mõttes), kunsti ja elu vahekordi ning mudelite loomise võimalusi kirjandusteaduses.

I. R e v z i n selgitas oma ettekandes keele ja mõtlemise vahekorda ning struktuuri. Ta avaldas arvamust, et nende küsimuste selgitamisel on võimalik kasutada ka telepaatiakatseid. Mõningatest sellealastest katsetest võib nimelt järeldada, et telepaatilisel teel antakse edasi esemete diferentsiaalseid tunnuseid. Muide, mõningates katsetes anti telepaatilisel teel korraldusi inimesele, kes informatsiooniandja keelt üldse ei osanud. Muidugi nõuavad vastavad katsed veel hoolikat kontrollimist, enne kui nende põhjal oleks võimalik teha mingisuguseid kindlapiirilisi järeldusi.

G. L e s s k i s kõneles teadusliku ja ilukirjandusliku teksti grammatilistest erinevustest. Ettekandja oli statistiliste meetoditega läbi töötanud suure hulga tekste ja tõi huvitavaid andmeid lausepikkuse, liht- ja liitlausete vahekorra, sõnaliikide vahekorra ja käänete sageduse kohta vastavates tekstides.

E. P a d u t š e v a selgitas tekstilõigu (teksti osa ühest taandreast teiseni) struktuuri, kasutades algmaterjaliks A. Tšehhovi jutustusi. Probleem on huvipakkuv just seetõttu, et tekstilõigu analüüs on nähtavasti ühenduslüliks üleminekul keele grammatikalt kirjanduse (või mõtlemise?) «grammatikale».

A. P j a t i g o r s k i esitas ja analüüsis mütoloogiliste elementide süsteeme erinevate rahvaste ja rahvagruppide mütoloogias. Mütoloogiliste elementide aluseks on ettekandja arvates teatavad äärmuslikud vastandid, nagu täielik õnn või selle puudumine, nauding või kannatus jne. Ettekandja uudne vaatenurk kutsus esile elava diskussiooni.

I. T š e r n o v (TRÜ) analüüsis vene folkloori ühe alaliigi — armuloitsu — struktuuri. Ta selgitas vastavate palade põhiosad ning elemendid ja nendevahelised seosed.

I. L e v i n analüüsis luuletustes esinevaid asjaolusid, mis tekitavad nn. poeetilise efekti. Analüüsi aluseł sõnastas ta rea formaalseid reegleid, mida võib lugeda teatud mõttes luuletuse «monteerimise» võteteks.

S. G e n k i n püüdis iseloomustada kino väljendusvahendeid (nn. kinokeelt) matemaatiliste meetodite abil. Ettekanne tekitas huvitavaid mõtteid eriti veel seetõttu, et S. Genkin kõneles ka matemaatiliste mõistete (punkt, lõpmatus) esitamise võimalustest kinokeele abil.

Käesolevate ridade autor esitas mõningaid mõtteid sellest, kuidas semiootikast lähtudes on võimalik analüüsida õppimis- ja õpetamisprotsessi struktuuri.

Huvipakkuvad olid V. T o p o r o v i ettekanded mitmesuguste Aasia rahvaste kommete, pärimuste ja kunsti kohta, aga ka A. Z a l i z n j a k i, T. J e l i z a r e n k o v a, L. M ä l l i, Z. M i n t s i, B. J e g o r o v i, B. U s p e n s k i, A. S õ r k i n i ja mitmete teiste esinemised.

Suvekoolist osavõtjate arvates tuleb suvekooli tööd lugeda täiel määral kordaläinuks. Avaldati soovi, et ka edaspidi võiks Käärikul korraldada selliseid kokkutulekuid.

PROFESSOR HERMANN JAAKSONI VIIMNE TEEKOND

2. septembril toimusid Tartu Riiklikus Ülikoolis 1964/65. õppeaasta esimesed loengud, mis matemaatikaosakonnas olid seekord pühendatud eesti esimese matemaatikadoktori professor H. Jaaksoni mälestusele.

Samal ajal sõitis õppejõudude delegatsioon kadunu kodukohta Kiidjärvele, et tuua tema põrm Tartusse, kus see jumalagajätuks paigutati ülikooli aulasse. Professor Jaaksoni puusärgi juures seisid auvalves tema

eakaaslased — Tartu Riikliku Ülikooli vanimad professorid, tema õpilased — kõik matemaatikaosakonna õppejõud ning matemaatikud vabariigi teistest õppeasutustest, tema õpilaste õpilased — üliõpilased ja keskkooliõpilased matemaatika klassidest. Lahkunule ütlesid hüvastijätusõnu teadusala prorektor dots. J. Tammeorg, professor G. Kangro, dekaan A. Mitt, professorid H. Keres, A. Linkberg, J. Kaarde ja üliõpilaste esindajad. Leinamuusika saatel kanti puusärk välja; üliõpilased ning õppejõud saatsid oma armastatud õpetajat tema viimsel teekonnal Raadi kalmistule.

Lahtise haua juures lausus viimased lahkumissõnad professor Jaaksoni vanim kolleeg-matemaatik professor G. Rägo, endised kateedrikaaslased heitsid hauda punaseid roose ning peagi kattus värske kalmuküngas lillede ja pärgadega, millede asetajad meenutasid lahkunu sügavat humaansust, õiglust ning töökust, mis on eeskujuks kõigile tema arvukatele õpilastele.

E. Tiit

DOTSENT ALMA RUUBEL 65-AASTANE

28. septembril s. a. tähistas EPA matemaatika kateedri kollektiiv oma õppejõu dotsent Alma Ruubeli 65. sünnipäeva ja 45-aastast pedagoogilist ja teaduslikku tegevust.

Alma Johannese t. Ruubel sündis 28. septembril 1899. a. Paistu vallas Viljandi rajoonis. Juba lapsena oli Alma Ruubelil suur huvi teadmiste omandamise vastu. Ta lõpetas Viljandi tütarlaste gümnaasiumi 1919. a., omades seejuures aga ka juba teatavaid pedagoogilisi kogemusi ja tööstaaži oma nooremate koolikaaslaste õpetamise kaudu samas koolis. Gümnaasiumi lõpetamise järel töötas ta ühe aasta matemaatikaõpetajana Pärnu kaubanduskoolis, siis aga kuue aasta jooksul sama aine õpetajana Viljandi tütarlaste gümnaasiumis.

1926. a. astub A. Ruubel oma haridust täiendama Tartu ülikooli matemaatika-loodusteaduskonna matemaatikaosakonda. Peatselt ilmneb uue üliõpilase andekus ja 1929. a. pakutakse talle, kuigi kolmanda kursuse üliõpilasele, assistendi asetäitja kohta tolleaegses Matemaatika ja Mehhaanika Instituudis. Alates ülikooli lõpetamisest (1937. a.) kuni tänaseni täidab A. Ruubel mitmesuguseid õppejõu kohti kõrgemates õppeasutustes, esialgu TRÜ-s, hiljem EPA-s. 1936. a. kaitseb ta edukalt magistri väitekirja «J. C. Adamsi meetod harilikkude diferentsioonivõrrandite numbriliseks integreerimiseks», mille alusel 1946. a. TRÜ Õpetatud Nõukogu omistab A. Ruubelile ka füüsika-matemaatikakandidaadi teadusliku kraadi ja 1949. a. dotsendi kutse.

Pedagoogina on juubilar alati silma paistnud parimast küljest. Loenguteks ettevalmisamisel on dots. A. Ruubelile iseloomulik otsida ja leida uusi metoodilisi võtteid selleks, et loengud oleksid alati huvitavad ja uudsed.

Suure koormuse kõrval õppetöö alal on dots. A. Ruubel intensiivselt rakendunud ka teaduslikku töösse, mis on peamiselt kulgenud kahe probleemi käsitlemisel: numbriliste ja graafiliste meetodite rakendamine ning arendamine, viimasel ajal aga projektsioonimeetodite üldistamisviisid ning nende analüütiline käsitlus.

Teadusliku töö tulemuste teatavaks

möödupuuks on kindlasti avaldatud artiklite arv ja juubilaril pole see kaugeltki tagasihoidlik: eriti viimaseil aastail on ilmunud rida artikleid, mille vastu tuntakse huvi mitte ainult meie vabariigis, vaid ka üleliidulises ulatuses. Kõverjoonse projekteerimise uurijate kollektiiv hakkab aasta-aastalt kasvama — see on meeldiv hinnang probleemi püstitajale ja esmasele uurijale.

Dots. A. Ruubel teab oma kogemuste põhjal, et hea tahtmise juures leidub üliõpilasel alati aega mõningate väiksemate probleemide iseseisvaks uurimiseks ja lahendamiseks, seepärast on ta püüdnud nii TRÜ kui ka EPA üliõpilasi juba esimesest kursusest peale ÜTÜ ringide töösse kaasa tõmmata.

EPA matemaatika kateeder hindab oma elurõõmsa kolleegi aktiivset tööd pedagoogina, teadusliku töötajana ja inimesena, kes elab siiralt kaasa kollektiivi mitmekülgset elu. Sm. A. Ruubel on palju aega pühendanud ühiskondlikule tööle, olles aastaid TRÜ-s naiskomisjoni juhtijaks ning mitmesuguste muude ülesannete täitjaks ametiühingu liinis. Ta on ühtlasi ühingu «Teadus» tegevliige ja Eesti Loodusuurijate Seltsi täppisteaduste sektsiooni liige.

Soovime juubilarile jätkuvat indu kõigis tema ettevõtmistes, palju, palju edu teaduslikus tegevuses ja rõõmustavaid tulemusi pedagoogilises ja metoodilises töös.

S. Riives

DOTSENT O. RÜNK 50-AASTANE

Meie vabariigi inseneride pere tunneb hästi Tallinna Polütehnilise Instituudi joonestamise ja kujutava geomeetria kateedri dotsenti **Ott Jaani p. Rünka**, kes 23. juulil k. a. sai 50-aastaseks. Joonestamisalaste õpikute autorina või kaasautorina on ta tuntud ka joonestamisõpetajate peres. 25 aastat oma elust, sellest 20 aastat TPI õppejõuna, on ta pühendatud pedagoogilisele ja teaduslikule tööle.

Juubilar sündis 23. juulil 1914. aastal Tallinnas, kus möödusid ka tema noorusaastad. Pärast Tallinna I reaalkooli lõpetamist asus ta õpinguid jätkama Tartu ülikooli, mille matemaatika-loodusteaduskonna matemaatikaosakonna lõpetas ta 1938. aastal, omandades keskkooliõpetaja kutse matemaatika, füüsika ja astronoomia alal. Pärast ülikooli lõpetamist töötas O. Rünk kuni 1944. aastani õpetajana Tallinna keskkoolides. 1944. aastal asus ta tööle TPI-sse, kus oli esialgu assistendiks, seejärel aga graafika kateedri vanemõpetajaks. 1947. a. määrati ta graafika kateedri juhataja kohustetäitjaks. Raske haigus sundis teda aga 1952. aastal sellest ametikohast loobuma.

Vaatamata raskele tervislikule seisukorrale ei katkestanud dots. O. Rünk siiski teaduslikku tööd ja 1956. aastal valmis tal tsentraalaksonomeetria alal väitekiri, mille kaitsmine andis talle tehnikateaduste kandidaadi kraadi. Seejärel omistati talle ka dotsendi kutse.

Dotsent O. Rünk on pidanud loenguid peaasjalikult kujutava geomeetria alal. Ta on nelja geomeetria- ja joonestamisalase õpiku autor või kaasautor. Peale selle on tema sulest ilmunud terve rida teaduslikke uurimusi, mis käsitlevad kujutava geomeetria probleeme. Hinnatavat tööd on ta teinud ka kujutava geomeetria alase eestikeelse terminoloogia täiustamisel.

Dots. O. Rünka tuntakse suurepärase pedagoogina, kes on nõudlik mitte ainult üliõpilaste, vaid ka enese vastu. Tema väsimatu energia ja andumus oma erialale on olnud eeskujuks paljudele noortele.

Soovime juubilarile õnne edaspidises elus ja häid kordaminekuid armastatud tööpõllul.

N. Paluver

DOTSENT O. PRINITS 40-AASTANE

3. sept. 1964 sai 40-aastaseks TRÜ teoreetilise mehhaanika kateedri dotsent pedagoogikakandidaat Olaf Prinits.

O. Prinits sündis Türi linnas. Hariduse omandas Türi keskkoolis ja Tallinna õpetajate seminaris. Peale kooli lõpetamist töötas mõnda aega matemaatikaõpetajana Padise mittetäielikus keskkoolis ja Tallinna II keskkoolis. Pärast matemaatikaalaseid õpinguid TRÜ-s aastatel 1947—1952 asub ta tööle TRÜ teoreetilise mehhaanika kateedrisse, algul assistendi ja vanemõpetajana ning alates 1960. aastast dotsendina.

Juba ülikoolipäevil ilmutas sm. Prinits elavat huvi matemaatika õpetamise metoodika vastu. Eriti on teda paelunud kõrgema matemaatika elementide käsitlemise probleem keskkoolis. Sellelt alalt kaitses ta 1959. a. kandidaadiväitekirja. Töö põhilised tulemused on võetud kokku monograafias «Funktsionaalne sõltuvus, tuletis ja integraal keskkoolis», mis ilmus trükist 1963. a.

O. Prinits on võtnud osa peaaegu kõikide keskkooliõpilaste matemaatika olümpiaadide organiseerimisest ja läbiviimisest. Tema initsiatiivil alustasid meie vabariigis tööd nn. matemaatika klassid. Alates 1958. a. kuulub ta ENSV Haridusministeeriumi matemaatika komisjoni, olles 1961. aastast selle komisjoni esimeheks. Arvestades sm. Prinitsa teeneid matemaatika õpetamise paremustamisel meie vabariigis, on teda autasustatud ENSV Ülemnõukogu ja Tartu linna TSN aukirjadega ning rinnamärgiga «Haridustöö eesrindlane».

Ü. Lepik

UUSI ÜLIKOOLI LÕPETANUD MATEMAATIKUID

23. juunil lõpetas Tartu Riikliku Ülikooli järjekordne lend matemaatikuid. Lõpetanute, eriti aga arvutusmatemaatikute arv jäi sedapuhku suhteliselt väikeseks, sest õppeaja pikendamise tõttu tuleb matemaatika teoreetilise osakonna viimasel kursusel ülikoolis viibida veel pool aastat. Enamik lõpetanuid õppis füüsikamatemaatikateaduskonna pedagoogilises osakonnas. Vastavalt uuele lõpetamise korrale võisid nad diplomi saamiseks valida riigieksamite sooritamise ja — kui nende õppetulemused seda õigustasid — diplomitöö kaitsmise vahel.

Arvutusmatemaatika erialal kaitsti TRÜ matemaatikaosakonnas järgmised diplomitööd.

1. L a a n e, Luule. Programmide süsteem tehaste optimaalse paigutamise ülesande lahendamiseks. (Juhendaja ENSV TA Küberneetika Instituudi vanem teaduslik töötaja M. Tamm.)

2. R a h e n d i, Maie. Tuuma magnetilise resonantsi spektrite lahenda-

mine elektronarvutil M-3. (Juhendaja ENSV TA Küberneetika Instituudi noorem teaduslik töötaja M. Kotli.)

Matemaatika pedagoogilises osakonnas kaitsti järgmised diplomitööd.

3. K u k k, Astra. Geomeetria õpetamisest 6. ja 7. õppeaastal. (Juhendaja dots. O. Prinits.)

4. K u r e m a a, Kadri. Matemaatilise statistika elementide käsitlemine koolikursuses mõõtmisvigade aine baasil. (Juhendaja prof. G. Rägo.)

5. N i i d a s, Ellu. Keskkooli lõpetanute matemaatiliste teadmiste tasemest. (Juhendaja van.-õp. J. Reimand.)

6. P e e g e l, Ilda. Mõningaid probleeme 6. klassi matemaatikas. (Juhendaja dots. O. Prinits.)

7. R a u d p u u, Ene. Ligikaudse arvutamise küsimusi 8-klassilises koolis. (Juhendaja dots. O. Prinits.)

Riigieksamite sooritamisega omandasid matemaatiku ja matemaatikaõpetaja kutse järgmised pedagoogilise osakonna lõpetanud:

1. L i n d s a l u, Tõnu
2. M e t s, Malle
3. S a r a p u u, Marvi
4. T e i v a, Elvi

Kaugõppe Pedagoogilise Instituudi lõpetasid matemaatika erialal ja omandasid keskkooli matemaatikaõpetaja kutse:

5. K o r n e t, Õie
6. T e n n o, Minda
7. V a l k, Õilme

Lisaks eespool nimetatuile lõpetas füüsika-matemaatikateaduskonna pedagoogilise osakonna füüsikaharu ning omandas füüsikaõpetaja kutse veel 10 inimest.

MATEMAATIKALABORATOORIUM TÕRAVERES

1964. aastal täitus 100 aastat Tartu Tähetorni rajaja W. S t r u v e surmast ning 150 aastat astronoomiliste vaatluste algusest Tartus. Aastapäevale pühendatud teaduslik konverents toimus k. a. 14.—16. sept. Tõravere vastvalminud observatooriumis, mis ühtlasi ametlikult avati ja nimetati W. Struve nimeliseks Tartu Astrofüüsika Observatooriumiks.

Uues observatooriumis töötab ka ENSV TA Füüsika ja Astronoomia Instituudi Matemaatikalaboratoorium (loodud 1962. a.). Annamegi nüüd sõna selle laboratooriumi juhatajale **R. Jürgensonile.**

Nagu enamikus teadusharudes, nii kerkib ka astronoomias esile hulgaliselt matemaatilisi probleeme. Nende probleemide lahendamiseks ongi W. Struve nim. Tartu Astrofüüsika Observatooriumis loodud matemaatikalaboratoorium.

Kesksel kohal laboratooriumi töös on osavõtt astronoomiliste vaatluste ning vaatlusandmete matemaatilise töötlemise automatiseerimisest, samuti observatooriumi mitmete töörühmade uurimisobjektiks olevate füüsikaliste protsesside matemaatiliste mudelite loomine.

Matemaatikalaboratooriumi teiseks oluliseks ülesandeks on astronoomiliste, aktinomeetriliste jt. vaatlusandmete vormistamine perfokartoteekide kujul ja nende andmete matemaatiline töötlemine. Seda ülesannet võimaldab lahendada matemaatikalaboratooriumi käsutuses olev perfokaartarvutite komplekt (perforaatorid, reproduktor, sorteerimismasin, lugev perforaator, jaotusmasin, tabulaator). On juba loodud teatud liiki tähtede perfokartoteegid. Alustatud on rohkem kui kümne aasta jooksul Eesti NSV-s kogutud aktinomeetriliste andmete ja rahvusvahelise rahuliku päikese aasta raames helkivate ööpilvede vaatlemisel saadavate andmete kandmist perfokaartidele ja nende töötlemist. Helkivate ööpilvede uurimise osas on observatoorium muide nimetatud NSV Liidus koordineerivaks asutuseks.

Matemaatikalaboratooriumil on olemas ka väike elektronarvuti, mis võimaldab lahendada suhteliselt lihtsaid (eriti statistilisi) matemaatilisi ülesandeid.

Bibliograafia

Eesti NSV-s ilmunud matemaatikaalase kirjanduse nimestik

Mai—august 1964

(Koostanud E. Annus)

RAAMATUD

Eesti NSV entsüklopeedia märksõnastik. Matemaatika. Tln., ERK, 1964. 14 lk.

Elektronarvuti «Ural-4». Abiks programmeerijaile. Trt., 1964. 96 lk.; 1 eraldi leht. (Tartu Riikliku Ülikooli arvutuskeskus.) — Trükitud rotaprindil 500 eks.

E s p e n b e r g, H. **Integraalarvutus.** Trt., 1964. 52 lk. (Eesti Põllumajanduse Akadeemia.) — Trükitud rotaprindil 1500 eks.

K e r e s, H. **Matemaatilise füüsika meetodid I.** Kompleksmuutuja funktsioonid. Tln., ERK, 1964. 543 lk.

Tartu Riikliku Ülikooli Füüsika-Matemaatikateaduskond. Trt., 1964. 72 lk. (Tartu Riiklik Ülikool). — Trükitud rotaprindil 500 eks.

Õpik keskkooli matemaatikakursuse kordamiseks. Abimaterjal sisseastujale. II osa. Geomeetria ja trigonomeetria. Koostanud: E. E t v e r k, A. G a r š n e k, A. K a s s jt. Tln., 1964. 128 lk. (Tallinna Polütehniline Instituut.) — Trükitud rotaprindil 2000 eks.

Всесоюзное научно-техническое совещание по применению карт с перфорированными краями. Тезизы докладов. Таллин, Центр. бюро техн. информ. СНХ ЭССР, 1964. 34 стр.

Р о г о в с к а я, Л. **Применение перфокарт в поисковых фондах для создания специальных карточек по патентным вопросам.** Таллин, 1964. 11 стр. (I Прибалтийская метод. конференция... по вопросам патентной экспертизы.) — Trükitud rotaprindil 1050 eks.

KOGUMIKKUDES JA AJAKIRJADES ILMUNUD ARTIKLID

Matemaatika. Metoodiliste artiklite kogumik. II. Tln., 1964. 84 lk. (ENSV Ministrite Nõukogu Riiklik Kõrgema ja Kesk-Erihariduse Komitee. Teaduslik-metoodiline kabinet.)

Sisu: O. P r i n i t s. Õpetades kasvatame. — S. B a r o n. Mõningatest vigadest keskkooli matemaatika õpetamisel. — O. R ü n k. Arutlusi pöördteoreemi mõiste ümber. — Ü. K a a s i k. Sümbolid Σ ja Π ning nende omadusi. — A. R u u b e l. Pöördkeha ruumala graafilisest määramisest. — E. J ü r i m ä e. Kompleksarvud ja murdlineaarne teisendus. — J. G a b o v i t š. Hüperbooli konstrueerimisest. — H. E s p e n b e r g. Pöördvõrrandid.

Matemaatika ja kaasaeg. Abimaterjale matemaatika õpetajatele ja õppijatele. II. Trt. 1964. 94 lk. (Tartu Riiklik Ülikool.)

Sisu: A. T a u t s. Matemaatilise loogika põhimõisteid. — E. T a m m e. Numbrilisest integreerimisest. — Arvamusi matemaatikast. — A. A. L j a p u n o v, S. V. J a b l o n s k i. Küberneetika teoreetilisi probleeme. — H. T ü r n p u. Masin õpib mängima. — L. V õ h a n d u. Kauguse mõiste rakendusi. — Ü. K a a s i k. Lineaarsed planeerimisülesanded. — Ü. K a a s i k, R. M u l l a r i, E. S a a r e s t e. Majandusmatemaatika-alaseid töid Tartu Riikliku Ülikooli arvutuskeskuses. — O. P r i n i t s. Rahvusvahelised koolinoorte matemaatika olümpiaadid. — J. G a b o v i t š. Trigonomeetriliste funktsioonide täpsete väärtuste arvutamisest. — Ü. L u m i s t e. Lehekülgi matemaatika ajaloost Eestis. A. N. K o l m o g o r o v. Kuidas minust sai matemaatik. — E. J ü r i m ä e. Üks vajalik raamat («Matemaatika. Metoodiliste artiklite kogumik», I, 1963) — J. G a b o v i t š. Algebra suvekool Käärikul. — E. T i i t. Tartu matemaatikaseminar. — K. S o o n e t s. Noorte matemaatikute kool. — P.-E. R u m m o. Prof. Kangro juubel. — Uusi teaduste kandidaate (R. Mullari ja R. Jürgenson). — Esimene lend keskharidusega matemaatikuid. — E. A n n u s, Bibliograafia. — T. R o o s i n u p p. Uusi tulemusi arvuteoorias. — Suitsetajate loogika.

Tartu Riikliku Ülikooli Toimetised. 150. vihik. Matemaatika- ja mehhaanika-alaseid töid. IV. Trt., 1964. 240 lk. (Resümeed eesti ja inglise või saksa keeles.)

С. Барон, Э. Юримяэ, Э. Реймерс, Т. Сырмус. К пятидесятилетию со дня рождения проф. Г. Кангро. — Труды проф. Г. Кангро. — С. Барон, Я. Габович, Ю. Каазик и др. Математика в Советской Эстонии за последние двадцать лет. (Прил.:) Биобиблиография. (Труды, опубликованные в Эстонской ССР в 1944—1963 гг. по математике). — Х. Эплер. О связи локально выпуклых пространств с полунормированными пространствами. — Ю. Лумисте. К основаниям глобальной теории связности. — Л. Туулметс. Нормальные квазиконгруэнции V_3 в R_4 — М. Рахула. К дифференциальной геометрии высшего порядка. — Э. Юримяэ. Некоторые вопросы включения и совместности методов абсолютного суммирования. — Э. Юримяэ. Заметки о конулевых методах суммирования. — М. Тыннов. О связи между множителями суммируемости, коэффициентами Фурье и мультипликаторами. — С. Барон. О признаках типа Вейля для абсолютной суммируемости ортогональных рядов. — В. Ожегов. Интегральное представление последовательностей обобщенных полионов Аппеля класса $A(^2)$. — Г. Вайникко. Некоторые оценки погрешности метода Бубнова-Галеркина I—II. — Э. Тамме, И. Саарнийт. Об апостерпорной оценке погрешности приближенных решений линейных дифференциальных уравнений. — Э. Йыги. Симметричная деформация упругопластической пологой круговой арки.

Материалы V конференции по истории науки в Прибалтике. Тарту, 1964. 199 стр. (Тартуский гос. университет.) — Ротапринт 300 экз.

Резюме докладов по математике: Н. Д. Беспамятных. О творческой деятельности учителей математики Литвы и Белоруссии XIX в. — А. Н. Боголюбов. О подготовке издания «История отечественной математики». — Ю. М. Гайдук, С. А. Дахия. Из прошлого математических связей между Прибалтикой и Украиной. — И. Я. Депман. К истории преподавания математики на территории Эстонской ССР. — И. П. Кубилюс. Математика в Советской Литве. — Ю. Г. Лумисте. Преподавание математики и математические руководства в Эстонии в XVII веке — Ю. Г. Лумисте и Э. Э. Тамме. Развитие математики в Советской Эстонии. — П. В. Мюрсепп и Х. П. Эплер. О жизни и деятельности профессора Яана Сарва. — И. Б. Погребыский. Педагогическая и научная деятельность профессора математики Тартуского университета П. Хельмлинга. — Э. Э. Тамме. Математика Тартуском университете в 1920—1940 годах —

* *

Agur, U. Õpetamismasinad. — «Tehnika ja Tootmine», 1964, nr. 9, lk. 29—32.

Kaste, V. Arvude maailmas. (Aritmeetika ülesandeid.) — «Tehnika ja Tootmine», 1964, nr. 7, lk. 46—47.

Kosenkranius, H. Õpetavad masinad tänapäeval ja tulevikus. — «Nõukogude Kool», 1964, nr. 7., lk. 543—548.

Linnuse, H. Perfokaardid igasse kodusse. (Üleliidulisest teaduslik-tehnilisest nõupidamisest perfokaartide kasutamise küsimustes Tallinnas 1964. a. juunis.) — «Tehnika ja Tootmine», 1964, nr. 8, lk. 2—5.

Mereste, U. Suhtarvude tunnetuslikud funktsioonid ja klassifikatsioon. — Tartu Riikliku Ülikooli Toimetised, vihik 146, 1964, lk. 132—157. — Kokkuvõte vene keeles.

Prinits, O. Seostada koolimatemaatika eluga. — «Nõukogude Kool», 1964, nr. 5, lk. 356—360. — Lõpp, algus nr. 4.

Puistama, I. Elektronarvuti kasutamisest kaubanduslike keskladude arvestus- ja arveldustööde automatiseerimiseks. — «Uut Kaubanduses», 1964, nr. 2, lk. 17—19.

Telgmaa, A. Võrrandi ja võrrandisüsteemi ligikaudse lahendi graafiline parandamine — «Nõukogude Kool», 1964, nr. 6, lk. 456—459.

Täiuslikud arvud. (Otsingute ajaloost.) — «Tehnika ja Tootmine», 1964, nr. 6, lk. 45—46.

Usai, M. Algebraliste valemite õpetamise metoodika. — «Nõukogude Kool», 1964, nr. 8, lk. 621—628.

Ülesanded

Alljärgnevate ülesannete lahendused palume ära saata pooleteise kuu jooksul pärast ülesannete ilmumist aadressil: Tartu, Eesti Põllumajanduse Akadeemia, matemaatika kateeder, H. Espenberg. Seejuures varustage ümbrik märgusõnaga «Ülesanded». Lahenduste saatmisel pole nõutav, et oleksid lahendatud kõik ülesanded; võib piirduda ka üksikute väljavalitud ülesannete lahendamisega.

A. Ülesandeid elementaarmatemaatikast

1. Kas leidub kolmnurki, milles nii küljed kui ka nurgad moodustavad aritmeetilise progressiooni?

2. Leida seos kolmnurga külgede vahel, kui kolmnurga nurkade vahel kehtib seos

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta - \sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta + \frac{1}{4}\sin 2\alpha\sin 2\beta =$$

$$= \frac{\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta}{2\sin^2\alpha\sin^2\beta - \frac{1}{2}\sin 2\alpha\sin 2\beta}.$$

3. Kolmnurgas ABC leida nurgapoolitaja AD, kui $AC + CD = m$ ja $AB - BD = n$.

4. Leida kolmekohaline kümnendsüsteemi arv, mille kirjutamisel üheksandsüsteemis saame arvu, mis koosneb samadest numbritest vastupidises järjekorras.

5. Tõestada, et

$$\frac{2x-1}{2} - \frac{1}{\pi}\arctan\left(\tan\frac{2x-1}{2}\pi\right) = [x],$$

kus $[x]$ on arvu x täisosa.

B. Ülesandeid kõrgemast matemaatikast

1. Tõestada: kui arvud x, y, z, u, mis ei ole kõik nullid, rahuldavad tingimusi $x = by + cz + du$, $y = ax + cz + du$, $z = ax + by + du$, $u = ax + by + cz$ (kusjuures $a, b, c, d \neq -1$), siis

$$\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} + \frac{d}{1+d} = 1.$$

2. Näidata, et

$$2x\ln^2 x - x(x-1)(x+3) + (x-1)^2(3x-1) < 0, \quad \text{kui} \quad 1 < x < \infty.$$

KOGUMIKU TEISE VIHIKU ÜLESANNETE LAHENDUSED

A. Elementaarmatemaatika

Ülesande nr. 1 lahendus. Olgu minu ja mu venna vanus vastavalt x ja y. Ülesande tingimuste põhjal saame koostada võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x + y = 63 \\ x = 2[y - (x - y)], \end{cases}$$

millest leiame, et $x = 36$, $y = 27$.

Ülesande nr. 2 lahendus. Olgu otsitav arv x ja tema ristsumma y. Kuna $10^4 \leqslant x^2 < 10^6$, siis $7 \leqslant y \leqslant 15$ (sest sel juhul $10^4 < y^5 < 10^6$). Et aga täisruut lõpeb numbriga 0, 1, 4, 5, 6 või 9, siis y väärtuseks on kas 9, 10, 11, 14 või 15. Vahetu kontroll näitab, et nendest ainult 9^5 kujutab täisruutu: $9^5 = 243^2$. Seega otsitav arv on 243.

Ülesande nr. 3 lahendus. Olgu kolmnurga külgede pikkused $a, a + d$ ja $a + 2d$ ning küljele $a + d$ tõmmatud kõrgus h. Et siseringjoone raadius võrdub kolmnurga pindala S ja poole ümbermõõdu p jagatisega, siis

$$r = \frac{S}{p} = \frac{(a + d)h}{2p} = \frac{(a + d)h}{3a + 3d} = \frac{h}{3}.$$

Ülesande nr. 4 lahendus. Esimesest võrrandist

$$x^2 + y^2 + 2xy = 49 + 14z + z^2.$$

Arvestades, et teise võrrandi põhjal $x^2 + y^2 = z^2 + 37$, saame siit

$$xy = 6 + 7z. \tag{1}$$

Esimese ja teise võrrandi korrutamisel saame

$$x^3 + xy^2 + x^2y + y^3 = 259 + 37z + 7z^2 + z^3.$$

Arvestades kolmandat võrrandit, saame siit

$$xy(x + y) = 258 + 37z + 7z^2,$$

millele esimese võrrandi ja võrrandi (1) põhjal saab anda kuju

$$(6 + 7z)(7 + z) = 258 + 37z + 7z^2.$$

Siit leiame, et $z = 12$. Tundmatute x ja y leidmiseks saame nüüd esimese võrrandi ja võrrandi (1) põhjal süsteemi

$$\begin{cases} x + y = 19 \\ xy = 90, \end{cases}$$

millest $x_1 = 9$, $y_1 = 10$ ja $x_2 = 10$, $y_2 = 9$.
Seega süsteemil on 2 lahendit:

$$\begin{cases} x_1 = 9 \\ y_1 = 10 \\ z_1 = 12 \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{matrix} x_2 = 10 \\ y_2 = 9 \\ z_2 = 12. \end{matrix}$$

Ülesande nr. 5 lahendus. Olgu ringjoone raadius R, kolmnurga ABC küljed a, b, c ning tipust B tõmmatud kõrgus h. Täisnurksest kolmnurgast BCG leiame, et

$$a = \sqrt{2R \cdot BF} = \sqrt{2Rq}.$$

Analoogiliselt

$$c = \sqrt{2Rp}.$$

Kolmnurga pindala valemi

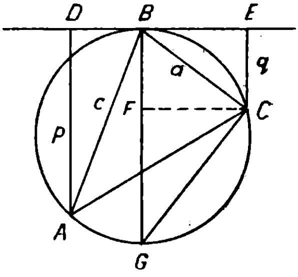
$$S = \frac{abc}{4R}$$

põhjal

$$\frac{abc}{4R} = \frac{hb}{2},$$

millest

$$h = \frac{ac}{2R} = \sqrt{pq}.$$



B. Kõrgem matemaatika

Ülesande nr. 1 lahendus. Tähistame

$$\frac{a^{2n+2}-1}{a(a^{2n}-1)} = u_n.$$

Tõestame võrratuse matemaatilise induktsiooni abil. On kerge kontrollida, et

$$u_1 = \frac{a^2+1}{a} > 2$$

ning et $u_k > \frac{k+1}{k}$ puhul

$$u_{k+1} = u_1 - \frac{1}{u_k} > 2 - \frac{k}{k+1} = \frac{k+2}{k+1}.$$

Ülesande nr. 2 lahendus. Vaadeldava murru lugejas ja nimetajas on 3. järku aritmeetilise jada (mõlema jada kolmandat järku vahed on võrdsed kuuega) n liikme summa. Teostades summeerimise saame

$$1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + \ldots + n(n+1)^2 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{7}{6}n^3 + \frac{7}{4}n^2 + \frac{5}{6}n$$

ja

$$1^2 \cdot 2 + 2^2 \cdot 3 + \ldots + n^2(n+1) = \frac{1}{4}n^4 + \frac{5}{6}n^3 + \frac{3}{4}n^2 + \frac{1}{6}n.$$

Järelikult otsitav piirväärtus on 1.

Ülesande nr. 3 lahendus. Võtame $a = 1$. Koosinusteoreemi põhjal $\alpha = \arccos \frac{b^2+c^2-1}{2bc}$. Seega suurima külje a vastasnurga α minimaalse väärtuse leidmine taandub funktsiooni $\frac{b^2+c^2-1}{2bc}$ relatiivse maksimumi leidmisele lisatingimusel $b^3 + c^3 = 1$. Lagrange'i meetodiga saame maksimumi leidmiseks süsteemi:

$$\begin{cases} b^2 - b^3 = c^2 - c^3 \\ b^3 + c^3 = 1. \end{cases}$$

Teisest võrrandist

$$c^3 = 1 - b^3, \quad 1 - b = \frac{c^3}{1 + b + b^2}$$

ja

$$b^3 = 1 - c^3, \quad 1 - c = \frac{b^3}{1 + c + c^2}.$$

Asendamisel esimesse võrrandisse saame

$$\frac{b^2c^3}{1 + b + b^2} = \frac{b^3c^2}{1 + c + c^2},$$

$$b + b^2 + b^3 = c + c^2 + c^3.$$

Liites selle võrrandi süsteemi esimese võrrandiga saame

$$b + 2b^2 = c + 2c^2,$$
$$2(c^2 - b^2) = b - c,$$

millest $b = c$ või $2(b + c) = -1$, mis on vastuolus ülesande eeldustega. Järelikult $b = c = \sqrt[3]{0,5}$. Seega

$$a = \arccos \frac{2\sqrt[3]{0,25} - 1}{2\sqrt[3]{0,25}} = \arccos(1 - \sqrt[3]{0,5}).$$

Ülesande nr. 4 lahendus. Et $\frac{1}{x} < \frac{1}{m}$, $\frac{1}{y} < \frac{1}{m}$, siis $x > m$, $y > m$. Lahendid on avaldatavad kujul $x = m + p$, $y = m + q$, kus p ja q on naturaalarvud. Antud võrrand taandub peale asendamist kujule $m^2 = pq$. Järelikult võrrandil on $\tau(m^2)$ naturaalarvulist lahendit (sümboliga $\tau(a)$ on tähistatud arvu a jagajate arv).

MATEMAATIKA KIRJALIKE VASTUVÕTUEKSAMITE ÜLESANDED TARTU RIIKLIKUS ÜLIKOOLIS 1964. a.

I variant

1. Ujuja läbis jões asuva 50 m pikkuse basseini edasi-tagasi 96 sekundi jooksul, kusjuures pärivoolu ujumiseks kulus aega 20 sekundi võrra vähem. Leida jõe voolu kiirus.

2. Lahendada võrrand

$$(1 + \cos 4x)\sin 4x = \cos^2 2x.$$

3. Kolmnurk, mille $60°$-lise nurga lähisküljed on 8 cm ja 15 cm, pöörleb selle nurga suurema lähiskülje ümber. Arvutada tekkiva pöördkeha ruumala ja pindala.

4. Leida aritmeetiline progressioon, kui ta n liikme summa on $2n^2 - 3n$ (iga n korral).

5. Leida ristküliku küljed, kui nende vahe on 1 ja kaugus tipust diagonaalini on 2,4.

II variant

1. Rong oli sunnitud jaamas peatuma t minutit. Kaotatud aja tagasivõitmiseks suurendati kiirust a km/t võrra ja hilinemine likvideeriti b km jooksul. Kui suur oli rongi kiirus enne jaamas peatumist?

2. Korrapärase kuusnurga tippudest lõigati ära kolmnurgad nii, et tekkis korrapärane kaksteistnurk. Mitu % kuusnurga pindalast lõigati ära?

3. Kolmnurk külgedega 10 cm, 17 cm ja 21 cm pöörleb oma suurima külje ümber. Arvutada pöördkeha ruumala ja pindala.

4. Lihtsustada avaldis

$$3(\sin^4 x + \cos^4 x) - 2(\sin^6 x + \cos^6 x).$$

5. Lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} \log_5 x + y = 7 \\ x^y = 5^{12}. \end{cases}$$

III variant

1. Paaki täidetakse kahe kraani kaudu. Ainult esimese kraani kaudu täites kulub selleks 22 minutit rohkem kui ainult teise kraani kaudu täites. Kahe kraani kaudu täitub paak ühe tunniga. Millise aja jooksul täidavad paagi kraanid üksikult?

2. Lahendada võrrand

$$\sqrt[x-1]{\sqrt[3]{2^{3x-1}}} = \sqrt[3x-1]{8^{x-3}}$$

3. Teisendada korrutiseks

$$1 + \sin x + \cos x + \tan x.$$

4. Püstkoonuse moodustaja on m ja põhja raadius r. Leida sissekujundatud kera raadius R.

5. Korrapärase kolmnurga külg on a; tema keskpunkti ümber joonestatakse ringjoon raadiusega $r = \frac{a}{3}$. Leida kolmnurga nende osade pindala, mis jäävad väljaspoole ringjoont.

IV variant

1. Kaks keha liiguvad täisnurga haaradel tipu poole kiirusega $3 \frac{\text{cm}}{\text{sek}}$ ja $4 \frac{\text{cm}}{\text{sek}}$. Mingil ajamomendil oli esimene keha tipust 21 cm ja teine keha tipust 28 cm kaugusel. Mitme sekundi pärast on kehad teineteisest 5 cm kaugusel?

2. Kaks samal tasandil asuvat võrdset ringjoont lõikuvad täisnurga all. Leida nende ühise osa pindala suhe ringi pindalasse.

3. Lahendada võrrand

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0.$$

4. Korrapärase nelinurkse tüvipüramiidi ülemise põhja diagonaalide iga otspunkti läbib tasand, mis on risti selle diagonaaliga. Leida tüvipüramiidist nende tasanditega eraldatud osa ruumala, kui tüvipüramiidi kõrgus on h, põhiservad a ja b tingimusel, et tasandite lõikejooned ei läbi tüvipüramiidi.

55. Lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} xy = 40 \\ x^{\log y} = 4. \end{cases}$$

V variant

1. Nooruk sõitis paadiga mööda jõge asulast A asulasse B ja tagasi, kulutades selleks 10 tundi. Asulatevaheline kaugus oli nii 20 km. Leida voolu kiirus, teades et paat sõitis 2 km vastuvoolu sama ajaga kui 3 km pärivoolu.

2. Lahendada võrratus

$$\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2} < 3.$$

3. Rööpküliku $ABCD$ küljel BC on võetud punkt E nii, et $BE : EC$ [illegible] Sirged DE ja AB lõikuvad punktis F. Leida lõigu BF pikkus, kui $AB = 14$ cm.

4. Tõestada sarnasus

$$\frac{\cos^2 2x - 4\cos^2 x + 3}{\cos^2 2x + 4\cos^2 x - 1} = \tan^4 x.$$

5. Leida korrapärase nelinurkse tüvipüramiidi ruumala, kui selle suurema põhja serv on a, väiksema põhja serv b ja külgtahu teravnurk α.

VI variant

1. Kaks erineva võimsusega traktorit kündsid 4 päevaga $^2/_3$ kolhoosi põllust. Mitu päeva kuluks kogu põllu kündmiseks kummalgi traktoril eraldi, kui esimesel traktoril kulub selleks 5 päeva vähem kui teisel.

2. Lahendada võrratus

$$\frac{4}{x+3} + \frac{2}{x-3} < \frac{5x-1}{x^2-9}.$$

3. Arvutada võrdhaarse trapetsi pindala, kui tema alused on 10 cm ja 26 cm ning diagonaalid on risti haaradega.

4. Korrapärase kuusnurkse prisma kõige pikem diagonaal d moodustab prisma külgservaga nurga α. Leida prisma ruumala.

5. Lahendada võrrand

$$\cos 2x + \tan^2 x = 1.$$

VII variant

1. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuus on $3\sqrt{5}$ m. Leida selle kolmnurga kaatetid, kui on teada, et ühe suurendamisel $133\frac{1}{3}\%$ võrra ja teise suurendamisel $16\frac{2}{3}\%$ võrra nende summa oleks 14 m.

2. Lahendada võrratus

$$2 - \frac{x-3}{x-2} > \frac{x-2}{x-1}.$$

3. Kolmnurga siseringjoone raadius on 4 cm. Üks kolmnurga külg on puutepunktiga jaotatud osadeks pikkusega 6 cm ja 8 cm. Leida teiste külgede pikkused.

4. Tõestada samasus

$$\tan 2x + \frac{1}{\cos 2x} = \tan(45^\circ + x).$$

5. Romb pindalaga S pöörleb teravusega tipust küljele tõmmatud ristsirge ümber, kusjuures rombi teine teravnurk asetseb sirgest kaugusel R. Leida tekkinud pöördkeha ruumala.

VIII variant

1. Veduri esiratas teeb 18 m pikkusel teelõigul 10 pööret rohkem kui tagaratas. Kui esiratta ümbermõõtu suurendada 6 dm võrra ja tagaratta ümbermõõtu vähendada samapalju, siis teeb esiratas samal teelõigul 4 pööret rohkem kui tagumine. Leida rataste ümbermõõdud.

2. Lahendada võrratus

$$3 - \frac{2x-17}{x-5} > \frac{x-5}{x+2}.$$

3. Kolmnurga alus on 60 cm, kõrgus 12 cm ja alusele joonestatud mediaan 13 cm. Leida kolmnurga küljed.

4. Lahendada võrrand

$$\sqrt{3}\sin 2x + 2\sin^2 x = 0.$$

5. Püramiidi põhjaks on võrdhaarne kolmnurk, mille alus on 6 cm ja kõrgus 9 cm. Püramiidi külgservad on igaüks 13 cm. Leida püramiidi ruumala.

IX variant

1. Kahe vastastikku sõitva veoauto kaugus teineteisest on 180 km. Esimene sõidab tunnis 6 km rohkem kui teine; teise tunnikiirust kilomeetrites väljendav arv on kaks korda suurem tundide arvust, mis kulub kohtumiseni. Mitu km tunnis sõidab kumbki auto?

2. Lahendada võrrand

$$4^{\sqrt{x+1}} = 64 \cdot 2^{\sqrt{x+1}}.$$

3. Lihtsustada avaldis

$$\frac{\cos(-150^\circ)}{\cos 330^\circ} - \frac{\tan 510^\circ \cdot \sin 300^\circ}{\cos \pi} + \tan 70^\circ \cdot \tan 20^\circ \cdot \sin 270^\circ.$$

4. Lihtsustada avaldis

$$\sin(x+y)\cos(x-y) + \cos(x+y)\sin(x-y).$$

5. Ringi raadiusega R on ehitatud võrdkülgne kolmnurk, sellesse omakorda ring jne. Leida kõigi ringide ja kolmnurkade pindalade summa.

6. Läbi võrdhaarse täisnurkse kolmnurga hüpotenuusi c on paigutatud tasapind P, mis moodustab kolmnurga tasapinnaga nurga α. Leida kolmnurga projekteerimisel tasapinnale P saadava kujundi pindala ja ümbermõõt.

RISTARVUD

Täita tühjad ruudud numbritega nii, et veergude summad võrduksid vastavates ridades saadud tulemustega. Seejuures ükski arv ei alga nulliga ning tehted tuleb sooritada nende esinemise järjekorras.

	4		+		1		:		3	×				=	5		
1		1	:			9	×			+		1	9	=			
		6	:				+		4	:			4	=			5
	3		+			2	×		3	−			2	=	1		4
			+				+			+				=		0	3

TEEDRAJAVAID AVASTUSI MATEMAATIKA ALUSTES

T. Roosinupp [1]

Kõik reaalarvud on võrdsed.

Tõestus: Lähtume integraalist

$$I = \int dx.$$

Et $e^{-x}e^{x} = 1$, siis

$$I = \int e^{-x}e^{x}dx.$$

Rakendame sellele integraalileositi integreerimise võtet, mille kohaselt

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Seejuures võtame $u = e^{-x}$, $dv = e^{x}dx$. Siis $du = -e^{-x}dx$, $v = e^{x}$ ja järelikult

$$I = e^{-x}e^{x} + \int e^{-x}e^{x}dx$$

ehk

$$I = 1 + I.$$

Lahutades viimase võrduse mõlemast poolest I, saame

$$0 = 1.$$

Et võrdus jääb õigeks tema mõlema poole korrutamisel ühe ning sama arvuga ja $0 \cdot r = 0$, siis

$$0 = r,$$

kus r on mistahes reaalarv. Seega võrduvad kõik reaalarvud arvuga 0 ja on järelikult omavahel võrdsed, **m.o.t.t.**

Järeldused: 1) Et kõik arvud on võrdsed, siis kaotab mõtte matemaatika ülesannete lahendamine — nagunii on iga ülesande vastuseks 0.

2) Võttes $r = 2$ ja $r = 5$, saame vastavalt $2 = 0$ ja $5 = 0$. Järelikult $2 = 5$.

Õpilased, kas teil on mõtet vaeva näha matemaatika eksamiks ettevalmistumisega?

Kõik sirged on paralleelsed.

Tõestus: 1) Iga sirget võib vaadelda lõpmata suure raadiusega ringjoonena;

2) kõik ringjooned läbivad lõpmata kauget tsüklilist [2] punkti;

3) seega kõik sirged läbivad üht ning sama lõpmata kauget punkti;

4) kõik sirged, mis läbivad üht ning sama lõpmata kauget punkti, on paralleelsed;

5) järelikult kõik sirged on paralleelsed, **m.o.t.t.**

---

[1] Matemaatika Reformimise Teadusliku Uurimise Instituudi aspirant Tõeleid Roosinupp, kelle pöörettekitavad tulemused arvuteoorias esitasime «Matemaatika ja kaasaja» teises numbris (lk. 92), on seekord jõudnud veelgi hämmastavamate resultaatideni.

[2] Lõpmata kaugeks tsükliliseks punktiks nimetatakse lõpmata kauget imaginaarset punkti, mida läbivad kõik ringjooned, s. t. punkti, mille homogeensed koordinaadid rahuldavad võrrandeid

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 = 0, \quad x^0 = 0$$

SISUKORD

Ühiskondlik toimetuskolleegium:
H. Espenberg, J. Gabovitš, Ü. Kaasik, Ü. Lumiste, E. Sarv, E. Tamme (vastutav toimetaja), E. Tiit.
Kunstiline kujundus: V. Allsalu

Общественная редакционная коллегия:
Я. Габович. Ю. Каазик, Ю. Лумисте, Э. Сарв, Э. Тамме (отв. редактор), Э. Тийт, Х. Эспенберг.
Художественное оформление: В. Аллсалу

Тартуский государственный университет
г. Тарту, ул. Юликооли, 18

МАТЕМАТИКА И СОВРЕМЕННОСТЬ. IV

Вспомогательные материалы для преподающих и изучающих математику

Toimetaja E. Tamme
Korrektor E. Võhandu

Ladumisele antud 25. IX 1964. Trükkimisele antud 20. XI 1964. Paber 60 × 90, 1/16. Trükipoognaid 7 + 2 kleebist. Arvestuspoognaid 8,3. Trükiarv 2000. MB-09288. Tellimise nr. 7462. Hans Heidemanni nim. trükikoda. Tartu, Ülikooli 17/19. II.

Hind 35 kop.

2—2