Matematika ja kaasaeg

TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

MATEMAATIKA JA KAASAEG

III

ABIMATERJALE MATEMAATIKA ÕPETAJATELE JA ÕPPIJATELE

TARTU 1964

Тартуский государственный университет
г. Тарту, ул. Юликооли, 18
МАТЕМАТИКА И СОВРЕМЕННОСТЬ. III.
Вспомогательные материалы для преподающих и изучающих математику
На эстонском языке
Toimetaja E. Tiit
Korrektor E. Võhandu

Ladumisele antud 4. VI 1964. Trükkimisele antud 22. VIII 1964. Paber 60 × 90, 1/16. Trükipoognaid 6 + 2 kleebist. Arvestuspoognaid 6,8. Trükiarv 1800. MB-07121. Tell. nr. 4748.
Hans Heidemanni nim. trükikoda. Tartu, Ülikooli 17/19. II

Hind 35 kop.
2—2

OPEREERIMINE HULKADEGA

Jevgeni Gabovitš

Hulgateooria loodi väljapaistva saksa matemaatiku Georg Cantori (1845—1918) poolt juba möödunud sajandi viimasel veerandil, kuid küllalt pika aja jooksul ei leidnud see teooria matemaatikute seas erilist tunnustust. Tänapäeval seevastu on hulgateooria muutunud matemaatika üheks kõige populaarsemaks suunaks. Ta avaldab üha suuremat mõju kogu matemaatika arengule, olles saanud üldise algebra, topoloogia, funktsionaalanalüüsi, reaalmuutuja funktsioonide teooria ja paljude teiste matemaatiliste distsipliinide teoreetiliseks aluseks. Hulgateooria sellist tähtsust arvestades on tehtud koguni katseid alustada tema põhimõistete tutvustamist juba algkoolis. Igal juhul võib ja tuleb seda teha aga keskkoolis [1]. Käesolevas kirjutises ongi antud lühike ülevaade nendest hulgateooria küsimustest, mille käsitlemine on täiesti teostatav keskkooli vanemates klassides.

Hulga mõiste selgitamiseks toome kõigepealt paar näidet. «Minul on neli kinopiletit», ütleb tavaline kodanik piletikassa juurest tulles. «Taskus olevate piletite hulk koosneb neljast piletist», ütleb samasuguses olukorras matemaatik. «Mul pole raha», ütleb kodanik, kui teeb kindlaks, et rahakotis ei ole ühtegi kopikat. «Müntide hulk rahakotis on tühi», ütleb sel korral matemaatik. Mida siis mõistab matemaatik sõna «hulk» all? G. Cantor selgitab seda mõistet järgmiselt: *«Hulk on meie kujutluse või mõtlemise kindlalt piiritletud ja erinevate objektide, mida nimetatakse hulga elementideks, kokkuvõte üheks tervikuks».*

Seega koosneb hulk mingitest objektidest, mida nimetatakse elementideks. Esimeses ülaltoodud näites olid hulga elementideks kinopiletid ja teises mündid. Toome veel näite. Käesolev raamat on vaadeldav kui hulk, mis koosneb 96-st leheküljest, iga lehekülge võib aga omakorda vaadelda hulgana, mille elementideks on üksikud tähed. Sellise lähenemisviisi puhul ei ole üksik täht raamatu kui hulga element, kuid muidugi võib vaadelda ka sellist hulka, mis koosneb raamatu kõikidest tähtedest.

[1] Vt. O. Prinitsa artiklit käesolevas kogumikus lk. 56—58.

Hulga elemendid peavad olema kindlalt piiritletud. Me ei või näiteks rääkida silmaga nähtavate tähtede hulgast taevas, sest erinevad inimesed näevad tähti erineval arvul ning isegi üks ja sama inimene võib neid näha rohkem või vähem olenevalt vaatlustingimustest.

Me ütleme, et hulk on antud, kui iga elemendi puhul on võimalik otsustada, kas ta kuulub sellesse hulka või mitte. Sealjuures pole oluline, kas hulga elemendid on lihtsalt loetletud, või on antud mingi muu eeskiri nende eraldamiseks teistest, hulka mittekuuluvatest elementidest. Näiteks hulga, mis koosneb Botvinnikust, Smõslovist, Talist ja Petrosjanist, võib defineerida hulgana, millesse kuuluvad kõik nõukogude maletajad, kes kannavad praegu või on kandnud kunagi varem malemaailmameistri tiitlit.

Mingi hulga defineerimisel ei ole meil üldiselt tarvis ette teada, kas see hulk sisaldab mõnda elementi või on ta tühi, s. t. ei sisalda ühtegi elementi. Hulgast kõneldes ei teki seetõttu ka vajadust täpsustavaks ütluseks: «kui selles hulgas leidub elemente». Nii võime julgelt rääkida näiteks võrrandi $x^2+2=0$ täisarvuliste lahendite hulgast, Valga linnas elavate neegrite hulgast või rahakotis olevate müntide hulgast. Tühja hulka tähistame sümboliga $\emptyset$.

Hulki tähistame edaspidi suurte ladina tähtedega A, B, C, ... ning nende elemente väikeste ladina tähtedega a, b, c, ... (indeksitega või ilma). Kirjutis $A=\{a_1, a_2, b, c\}$ tähendab, et hulk A koosneb neljast elemendist: a_1, a_2, b ja c. Hulk $B=\{a\}$ koosneb ainult ühest elemendist a (selline on näiteks mingi algarvu a ühest erinevate naturaalarvuliste jagajate hulk).

Hulk võib sisaldada ka lõpmata palju elemente, nagu näiteks kõikide täisarvude hulk või kõikide murdude $\frac{1}{2^k}$ hulk, kus k omandab kõiki naturaalarvulisi väärtusi. Sel juhul tähistame hulki vastavalt $A=\{0, \pm1, \pm2, \ldots\}=\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ ning $B=\left\{\frac{1}{2^k};\, k=1, 2, \ldots\right\}=\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\right\}$.

Seda, et a on hulga A element, ehk nagu öeldakse, et a k u u l u b hulka A, tähistatakse kirjutisega $a \in A$. Kirjutis $a \bar{\in} A$ tähendab siis, et a e i k u u l u hulka A.

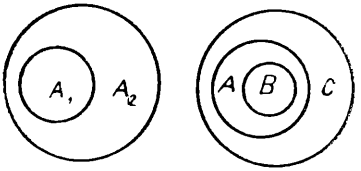
Kui hulga A_1 iga element on mingi teise hulga A_2 elemendiks, siis ütleme, et hulk A_1 s i s a l d u b hulgas A_2 (on hulga A_2 a l a m h u l k) ning tähistame seda kas kujul $A_1 \subset A_2$ või $A_2 \supset A_1$. Hulga A_2 kohta ütleme sel korral, et ta s i s a l d a b hulka A_1 (on tema ü l e m h u l k). Tühja hulga $\emptyset$ loeme kuuluvaks igasse hulka, s. t. iga hulga A korral $\emptyset \subset A$.

Olgu A antud ajamomendil Emajões suplevate inimeste hulk, B — samal ajamomendil Tartu ujulas suplevate inimeste hulk ning C — kogu maailmas sel momendil suplevate inimeste hulk. Ilmselt sisaldab hulk A hulka B (sest Tartu ujula asub Emajõe ääres) ja sisaldub ise hulgas C. Seega on hulk A hulga C alamhulk ja hulga B ülemhulk, hulk B aga on nii A kui C alamhulk ning C on A ja B ülemhulk.

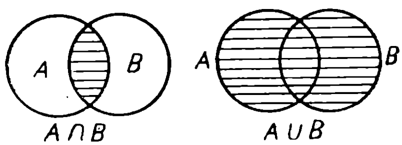
Skemaatiliselt kujutatakse hulki kinnise joonega piiratud aladena, näiteks ringidena. Seda asjaolu, et üks hulk A_1 on teise hulga A_2 alamhulk, märgitakse nii, et hulgale A_1 vastav ala joonistatakse hulgale A_2 vastava ala sisse, nagu seda on tehtud joonisel 1.

Ühtedest ja samadest elementidest koosnevaid hulki A ja B loetakse *võrdseteks* ning kirjutatakse $A = B$. Näiteks hulk A, mis koosneb oma ruuduga ühtivatest täisarvudest ning hulk $B = \{0, 1\}$ on võrdsed.

Hulkade A ja B võrduse tõestamiseks kasutatakse tihti järgmist võtet. Algul näidatakse, et $A \subset B$ (s. t. et A iga element on ühtlasi B elemendiks), siis aga, et $B \subset A$ (s. t. et ka B iga element kuulub hulka A). Sellest järeldub, et hulkadel A ja B pole erinevaid elemente ning järelikult peavad nad võrduma: $A = B$.



Joonis 1.



Joonis 2.

Illustreerime seda meetodit viimati toodud näite varal. Ilmselt $B \subset A$, sest $0^2 = 0$ ja $1^2 = 1$. Näitame, et ka $A \subset B$. Kui $a \in A$, siis tähendab see, et $a^2 = a$ ehk $a(a - 1) = 0$. See võrdus on võimalik vaid siis, kui kas $a = 0$ või $a = 1$. Seega hulga A suvaline element kuulub hulka B, s. o. $A \subset B$. Järelikult saamegi, et $A = B$.

Ülesandeid:

1. Mitu erinevat hulka võib koostada kolmest erinevast esemest? neljast erinevast esemest?

2. Joonistage ruut $ABCD$, mille diagonaalid lõikugu punktis O. Koostage punktidest A, B, C, D, O, tekkinud lõikudest ja kolmnurkadest 100 erinevat hulka.

Hulkadele rakendatavatest tehetest ehk *operatsioonidest* vaatleme siin ühisosa ja ühendi moodustamist ning hiljem veel täiendi võtmist.

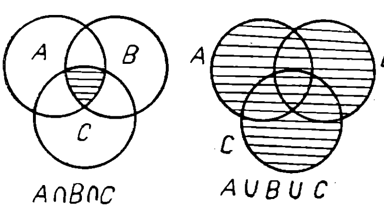
Hulkade A ja B *ühisosaks* nimetatakse hulka $A \cap B$, mis koosneb hulkade A ja B kõikidest ühistest, s. o. mõlemasse hulka kuuluvatest elementidest ja ainult nendest. Hulkade A ja B *ühendiks* nimetatakse hulka $A \cup B$, mis koosneb kõikidest hulga A ja kõikidest hulga B elementidest (kusjuures ühised elemendid võetakse arvesse ainult üks kord) ja ainult nendest. Skemaatiliselt on hulkade ühisosa ja ühend kujutatud joonisel 2 viirutatud aladena.

Olgu näiteks antud arvude hulgad $A=\{1, 3, 4, 6, 7\}$ ja $B=\{0, 1, 4, 7, 9\}$. Siis $A \cap B=\{1, 4, 7\}$ ja $A \cup B=\{0, 1, 3, 4, 6, 7, 9\}$. Kui hulk A koosneb vähemalt osaliselt Aasias, hulk B aga vähemalt osaliselt Euroopas asuvatest riikidest, siis $A \cap B$ koosneb NSV Liidust ja Türgist, $A \cup B$ aga kõikidest Euraasia mandri riikidest.

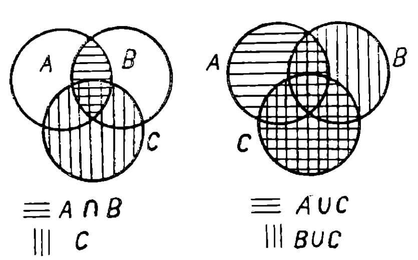
Kahel defineeritud operatsioonil on rida huvitavaid omadusi, mis osalt sarnanevad täisarvude liitmise ja korrutamise omadustega, osalt aga erinevad neist (analoogia otsimisel võrreldakse ühendi võtmist liitmisega ja ühisosa moodustamist korrutamisega).

Vahetult definitsioonist järeldub ühendi ja ühisosa nn. idempotentsus: $A \cup A=A$ ja $A \cap A=A$. Täisarvudest on vastav omadus liitmise suhtes vaid arvul 0 ning korrutamise suhtes arvudel 0 ja 1. Samuti otse definitsioonist järeldub ka hulkade ühendi ja ühisosa moodustamise operatsioonide kommutatiivsus: $A \cup B=B \cup A$, $A \cap B=B \cap A$. Meenutame, et kommutatiivsuse omadus on ka täisarvude liitmise ja korrutamise operatsioonidel.

Kui on antud kolm hulka A, B ja C, siis antud järjekorras saab nende ühendit (tänu kommutatiivsusele) moodustada ainult kahel erineval viisil: $(A \cup B) \cup C$ ja $A \cup (B \cup C)$. Need hulgad on võrdsed, sest mõlemad koosnevad kõikidest hulga A, kõikidest hulga B ning kõikidest hulga C elementidest ja ainult nendest, kusjuures elemente, mis on ühised vähemalt kahele kolmest vaadeldavast hulgast A, B ja C, võetakse arvesse ainult üks kord. Seost $(A \cup B) \cup C=A \cup (B \cup C)$ nimetatakse hulkade ühendi assotsiatiivsuse seaduseks. Seda arvestades võib rääkida lihtsalt kolme hulga ühendist $A \cup B \cup C$, mis on joonisel 3 skemaatiliselt kujutatud viirutatud alana.



Joonis 3.



Joonis 4.

Kehtib ka ühisosa assotsiatiivsuse seadus: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, mis võimaldab rääkida lihtsalt kolme hulga ühisosast (vt. joon. 3). Assotsiatiivsed on muide ka täisarvude liitmise ja korrutamise operatsioonid.

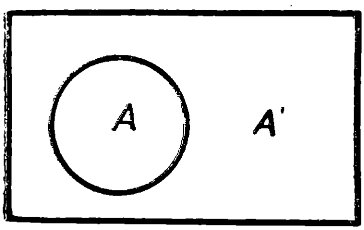
Täisarvude vallas kehtib veel nn. korrutamise **distributiivsuse** seadus liitmise suhtes: $(a+b)c = ac + bc$. Hulkade korral kehtib koguni kaks distributiivsuse seadust, nimelt on ühisosa distributiivne ühendi, ühend aga ühisosa suhtes:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$$
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

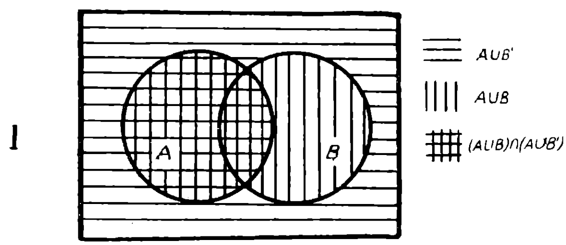
Teise seaduse skemaatiline kontroll on toodud joonisel 4. Vasakpoolsel kujundil kujutab hulka $(A \cap B) \cup C$ kogu viirutatud ala (niihästi horisontaal-, vertikaal-, kui ka kahesuunalise viirutisega), parempoolsel kujundil on aga hulk $(A \cup C) \cap (B \cup C)$ kaetud ruudustikuga. Nagu näha, on need kujundid ühtelangevad. Märgime, et täisarvude korral analoogiline seadus — liitmise distributiivsus korrutamise suhtes — üldiselt ei kehti. Näiteks, $(1 \cdot 2) + 3 = 5$, aga $(1+3) \cdot (2+3) = 4 \cdot 5 = 20$. Selleks, et arvude vallas kehtiks võrdus $a \cdot b + c = (a+c)(b+c)$, on tarvilik ja piisav, et $a + b + c = 1$.

Skemaatiline kontroll, mis on teostatud näiteks joonisel 4, ei asenda muidugi vastavate seaduste tõestust. Tõestamiseks võib kasutada ülalmainitud üldist meetodit hulkade võrdumise näitamiseks.

Alati võib vaatlusele võtta uuritava situatsiooni nn. **universaalse hulga** I, mis sisaldab kõiki antud arutelus kasutatavaid elemente. Kui me näiteks tegeleme täisarvudest koosnevate hulkadega, siis on I kõikide täisarvude hulk.



Joonis 5.



Joonis 6.

Hulga A **täiendiks** (universaalse hulga I suhtes) on hulk A', mis koosneb kõikidest hulka A mittekuuluvatest universaalse hulga elementidest ja ainult nendest. Näiteks kui A on kolmega jaguvate naturaalarvude hulk, siis A täiend kõikide naturaalarvude hulga I suhtes koosneb arvudest 1, 2, 4, 5, 7, 8, . . . , s. o. naturaalarvudest, mis ei jagu kolmega.

Hulga täiendi skemaatiliseks kujutamiseks kasutatakse järgmist võtet. Kogu antud olukorda illustreeriv skeem paigutatakse ristküliku (või suure ringi) sisse, mis kujutab kõiki vaadeldavaid elemente, s. o. universaalset hulka. Siis vastab hulga A täiendile ristküliku see osa, mida A ei kata (vt. joon. 5).

Hulga täiendi definitsioonist järelduvad otsekohe seosed:

$$A \cup A' = I,\ A \cap A' = \emptyset,\ I' = \emptyset,\ \emptyset' = I,\ (A')' = A.$$

Ei ole aga raske tõestada ka järgmiste seoste kehtivust:

$$(A \cup B)' = A' \cap B',\ (A \cap B)' = A' \cup B', \qquad (*)$$

$$(A \cap B) \cup (A' \cap B) = B, \quad (A \cup B) \cap (A \cup B') = A.$$

Viimane seostest (*) on illustreeritud joonisel 6, eelviimane — joonisel 7.

Ülesandeid:

3. Esitage skemaatiliselt hulgad $(A \cap B) \cup C$, $(A \cup B) \cap C$, $(A \cup B) \cap A$ ja $(A \cap B) \cup A$.

4. Tõestage, et kui $A \subset C$, $B \subset C$ ja D on suvaline hulk, siis $(A \cap B) \cap D \subset C$, ning $(A \cup B) \cap D \subset C$.

5. Tõestage seosed: $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cup I = I$, $A \cap I = A$. Millised neist sarnanevad arvude 0 ja 1 omadustega liitmise ja korrutamise suhtes?

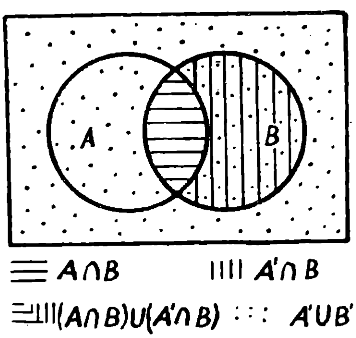
6. Kontrollige skeemil ning tõestage järgmised nn. neelamisseadused:

$$A \cup (B \cap A) = A, \quad A \cap (B \cup A) = A.$$

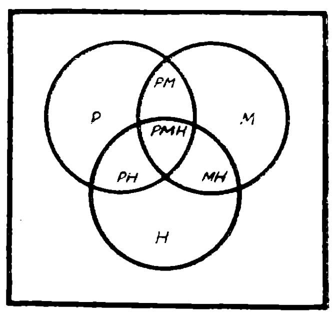
7. Kontrollige skeemil ning tõestage ühisosa distributiivsus ühendi suhtes ning tõestage ühendi distributiivsus ühisosa suhtes.

8. Tõestage seosed (*) ning nendest lähtudes seosed $(A' \cup B')' = A \cap B$ ja $(A' \cap B')' = A \cup B$.

Ehkki skeemide abil ei saa tõestada seoseid hulkade vahel, võib neid siiski kasutada ebaõigete väidete ümberlükkamiseks. Oletame näiteks, et kellegi arvates kehtib alati seos $(A \cap B) \cup (A' \cap B) = A' \cup B'$. Pöördumine skeemi poole aga näitab, et vähemalt sel korral, kui A ja B on need konkreetsed punktihulgad, mis on kuju-



Joonis 7.



Joonis 8.

tatud meie skeemil (joonis 7), ei saa siin olla tegemist võrdusega. Seega ei kehti see seos suvaliste hulkade A ja B korral. Muidugi, mõningatel erijuhtudel, näiteks kui $B = I$ ja $A = \emptyset$, võib see seos ka kehtida.

Skeemide abil võib lahendada ka mõningaid ülesandeid. Toome näite. Klassis on 40 õpilast, neist 28 õpivad hästi, 27 on pioneerid ja 31 matkajad. Matkajate seas on 22 õpilast, kes õpivad hästi ning 20 matkajat on pioneerid. Pioneeridest õpib hästi 23 õpilast, kusjuures viimastest tegeleb matkaspordiga 17 õpilast. Mitu õpilast ei ole pioneeriorganisatsiooni liikmeks, õpivad halvasti ning ei tegele matkaspordiga? Mitu matkajat-pioneeri õpib halvasti?

Ülesande lahendamiseks joonistame skeemi kolme hulga — pioneerid P, matkajad M ja head õpilased H jaoks (vt. joon. 8). Universaalse hulga elementideks on klassi kõik 40 õpilast. Joonistatud 3 hulka jaotavad universaalse hulga kaheksaks osaks. Igal nendest kaheksast osast märgime, mitu õpilast kuulub vastavasse kategooriasse. Andmeid võtame algul ülesande teksti lõpust ja liigume teksti alguse poole. Skeemi keskele, sinna, kus lõikuvad kõik kolm hulka, osasse PMH, märgime arvu 17 — nii palju on klassis õpilasi, kes õpivad hästi, on pioneerid ja matkajad. Pärast 17 matkaja eraldamist hästi õppivate pioneeride seast leiame, et kuus õpilast õpivad edukalt ning on pioneerid, kuid ei tegele matkaspordiga. Märgime arvu 6 sellele õpilaste kategooriale vastavale alale PH, ja jätkame analoogiliselt, kuni skeemi sisemised osad on varustatud igaüks mingi arvuga. Nüüd on lihtne näha, et pioneere, matkajaid ja häid õpilasi on kokku $0+1+3+6+6+5+17=$ $=38$. Seega vastus ülesande esimesele küsimusele on järgmine: 2 õpilast ei ole pioneerid, ei matka ning õpivad halvasti. Häid õpilasi, kes ei ole pioneerid ega tegele matkamisega, pole klassis üldse, pioneere ja matkajaid, kes õpivad halvasti, on aga kolm.

Ülesandeid:

9. Märkige, kuidas on saadud joonise 8 kaheksa ala lähtehulkadest P, M ja H ühendi, ühisosa ja täiendi moodustamise tehete abil.
10. Miks hästi õppivate ja matkaspordiga tegelevate pioneeride arv äsja vaadeldud ülesandes ei või olla 12 (ülesande teiste andmete säilitamise puhul)?
11. Esimese saja naturaalarvu abil on moodustatud kolm hulka. Hulk A koosnegu kolmega jaguvatest arvudest, hulk B koosnegu arvudest, mis erinevad täisruudust ülimalt ühe võrra ning hulk C koosnegu arvudest 1, 2, ..., 24. Moodustada joonisega 8 sarnane skeem. Mitu arvu on selle igas osas? Millised on need arvud?

Hulkadega opereerimisel tuleb sageli esitada küsimus: kumb antud hulkadest on suurem? Kui see küsimus on esitatud kahe lõpliku hulga korral, milledel on küllalt vähe elemente, siis ei valmista vastamine nähtavasti erilisi raskusi. Näiteks võib kohe ütelda, et kasutamata tikutoosis olevate tikkude hulk on suurem kui hapukurkide hulk liitrilises purgis ning väiksem kui loteriipiletite hulk ühes seerias. Kuidas jõuda sellistele «sügavatele» järeldustele? Tavaliselt toimub see nii, et loetakse ära, mitu elementi on vaadeldavates hulkades, ning võrreldakse neid arve omavahel. Toodud juhul oli purgis näiteks seitse kurki, tikutoosis kuuskümmend tikku ning ühes seerias sada loteriipiletit. Nendest arvudest lähtudes saimegi teha ülaltoodud järeldused hulkade suuruste kohta.

Kuid milline vastus tuleb anda küsimusele: kas müügil olevate teatripiletite hulk on suurem või väiksem kui nende teatrisõprade hulk, kes tahavad teatrisse minna?. Või küsimusele: keda on peol rohkem, kas mehi või naisi? Kas vastuse andmiseks tuleb hakata loendama teatripiletite, teatrisse minejate ja peost osavõtjate arvu? Kui arvatakse, et jah, siis lubatagu esitada veel paar küsimust: mida on rohkem, kas kahega või kolmega jaguvaid arve? Kas täisarve või reaalarve?

Kõikides nendes küsimustes esinevate hulkade elementide arvu selgitamine on kas praktiliselt raskesti teostatav või isegi võimatu (kui hulgad on lõpmatud). Sellele vaatamata ütleb teatrisõber, kes piletist ilma jäi, et pileteid oli vähem kui inimesi, kes soovisid etendusele minna, kuigi ta ei tea, mitu piletit oli müügil ja mitu inimest soovis teatrit külastada. Ka teisele küsimusele on lihtne vastust saada — tarvitseb vaid oodata tantsu algust. Niipea kui selgub, et näiteks kõik mehed juba tantsivad, mõned naised aga jäid istuma, võib kindlalt väita, et naisi on peol rohkem kui mehi. Muidugi pole ka siin tarvis teada peost osavõtvate meeste või naiste arvu.

Kuidas toimus siin hulkade võrdlemine? Kui piletita jäänud teatrisõber oleks matemaatik, siis arutleks ta nii: seame igale piletile vastavusse selle inimese, kes antud piletiga teatrisse läheb. Seega on piletite hulk sama suur kui teatrisõprade hulga niisugune osahulk, mis koosneb nendest inimestest, kellel õnnestus hankida teatripilet. Järelikult on esimene hulk väiksem. Teise näite puhul võib arutleda täpselt samuti: seame teineteisele vastavusse selle naise ja selle mehe, kes koos tantsivad. Et seejuures igale mehele vastab naine, kuid mitte vastupidi, siis on selge, et naiste hulk on suurem kui meeste hulk. Juhul kui pärast tantsu algust selguks, et saalis pole istuma jäänud ühtki inimest, siis ütleksime, et peol olevate naiste ja meeste hulgad on võrdsed. Faktiliselt arutlebki igaüks just nii, kuigi ta tavaliselt ei anna endale sellest selgelt aru.

Vahekordade «suurem», «väiksem» ja «suuruselt võrdne» range käsitlus hulkade korral on võimalik üksühese vastavuse mõiste abil. Me ütleme, et hulkade A ja B vahel on korraldatud üksühene vastavus, kui hulga A igale elemendile on seatud vastavusse üks ja ainult üks element hulgast B, kusjuures hulga B iga elemendi jaoks on olemas üks ja ainult üks hulga A element, millele ta on vastavusse seatud. Üksühest vastavust tähistatakse sümboliga $\leftrightarrow$. Näiteks, kui $a \in A$ on seatud vastavusse elemendiga $b \in B$, siis kirjutame $a \leftrightarrow b$.

Kui hulkade vahel saab korraldada üksühese vastavuse, siis on loomulik lugeda neid võrdse suurusega hulkadeks. Matemaatikas nimetatakse selliseid hulki ekvivalentseteks ja öeldakse, et neil hulkadel on sama võimsus. Et üksühest vastavust võib tavaliselt korraldada mitmel viisil (teatrikülastajad võivad vahetada pileteid, tantsijad partnereid), siis loeme hulki ekvivalentseiks niipea, kui nende vahel on vähemalt ühel viisil korraldatav üksühene vastavus.

Juhul kui hulkade A ja B vahel üksühest vastavust ühelgi viisil korraldada ei saa, küll aga saab korraldada üksühese vastavuse ühelt poolt hulga A ning teiselt poolt hulga B mingi alamhulga B' vahel, siis ütleme, et hulk B on s u u r e m a v õ i m s u s e g a kui A. Sellest definitsioonist lähtudes näeme, et kahega ja kolmega jaguvate täisarvude hulgad on ekvivalentsed, sest vastavus $2n \leftrightarrow 3n$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ nende hulkade vahel on üksühene. Veelgi enam, paarisarvude hulk on ekvivalentne kõikide täisarvude hulgaga, sest nende hulkade vahel saab korraldada üksühese vastavuse $2n \leftrightarrow n$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Seega võib lõpmatu hulga alamhulk olla ekvivalentne terve selle hulgaga.

Pöördume korraks veel tagasi lõplike hulkade võrdlemise juurde, mis võis toimuda nende hulkade elementide arvu määramise teel. Faktiliselt kasutame me ka siin üksühest vastavust. Ülaltoodud esimeses näites me seadsime kurkide, tikkude ja loteriipiletite hulkadele algul vastavusse teatud naturaalarvude hulgad, seejärel aga võrdlesime viimaseid omavahel. Muidugi oleks ka siin olnud võimalik korraldada vahetu üksühene vastavus vaadeldavate hulkade elementide vahel.

Hulki, mis on ekvivalentsed naturaalarvude hulgaga, on loomulik nimetada l o e n d u v a t e k s. Loenduv on näiteks kõikide täisarvude hulk, sest vajaliku vastavuse võib korraldada kas või nii: $n \leftrightarrow 2n$, $-n \leftrightarrow 2n+1$, $0 \leftrightarrow 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Samuti on positiivsete ratsionaalarvude hulk loenduv. Selle hulga seadmine üksühesesse vastavusse naturaalarvude hulgaga nõuab juba teatavat leidlikkust. Näiteks võib seda teostada järgmiselt: paigutame kõik positiivsed ratsionaalarvud ruuttabelisse, kus ühes reas on sama nimetajaga, ühes veerus aga sama lugejaga ratsionaalarvud. Kirjutame nüüd kõigepealt välja arvud, mille puhul lugeja ja nimetaja summa on kaks $(\frac{1}{1})$, siis arvud, mille puhul see summa on kolm $(\frac{1}{2}$ ja $\frac{2}{1})$ jne., jättes sealjuures kõrvale kõik taandamata murrud. Koostatud tabelis niimoodi sik-sakiliselt liikudes saame vastavuse

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1 & 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 3 & 4 & \frac{3}{2} & \frac{2}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & 5 & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & \cdots \end{array},$$

mis on üksühene ja hõlmab kõiki positiivseid ratsionaalarve, sest igal ratsionaalarvul on lugeja ja nimetaja summa lõplik ning leidub ainult lõplik hulk selliseid positiivseid ratsionaalarve, mille lugeja ja nimetaja summa võrdub antud arvuga.

Äsja tõestatud tulemus võib viia mõttele, et kõik lõpmatud hulgad on loenduvad. See pole aga sugugi nii. Võib nimelt tõestada, et näiteks sirge punktide hulk on suurema võimsusega kui naturaalarvude hulk.

Võimaluse konstrueerida üha suurema võimsusega hulki annab järgmine huvitav teoreem: *hulga kõikide alamhulkade hulk on lähtehulgast võimsam.* See teoreem on ilmne lõplike hulkade korral, sest n-elemendilisel hulgal on ju 2^n erinevat alamhulka, kuid ka lõpmatute hulkade korral saab teoreemi rangelt tõestada.

Nimetatud teoreemist järeldub, et kõikide naturaalarvudest koosnevate hulkade hulk ei ole loenduv. Selle hulga võimsust nimetatakse k o n t i n u a a l s e k s. Kontinuaalne võimsus on näiteks sirge kõikide punktide hulgal, tasandi kõikide punktide hulgal ja vahemikus (0, 1) paiknevate reaalarvude hulgal. Juba Cantor püstitas nn. k o n t i i n u u m i p r o b l e e m i: kas leidub hulki, mille võimsus on suurem kui loenduv, kuid väiksem kui kontinuaalne. Vastust sellele küsimusele ei suudetud anda peaaegu saja aasta jooksul. Niisuguse olukorra põhjuse selgitas hiljuti ameerika matemaatik C o h e n, kes näitas, et hulgateoorias endas ei saagi sellele küsimusele anda ei positiivset ega negatiivset vastust. Kahjuks ei saa siin sellest rohkem kirjutada, sest Coheni tulemuse üksikasjalisem refereerimine nõuaks tervet omaette artiklit.

Ülesandeid:

12. Tõestada, et lõplik hulk ei saa olla ekvivalentne oma alamhulgaga.

13. Kasutades funktsiooni $f(x) = \tan x$ graafikut näidata, et vahemiku $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ja kogu sirge punktide hulgad on ekvivalentsed.

14. Võõrastemajas on loenduv hulk voodikohti, mis kõik on juba olemasolevate külaliste poolt hõivatud. Millise ümbertõstmisega saaks ära paigutada ka saabunud külalised, kui

1° uusi külalisi on lõplik hulk?
2° uute külaliste hulk on loenduv?
3° uued külalised on saabunud rongiga, mis koosneb loenduvast hulgast vaguneist, kusjuures igas vagunis on lõplik hulk inimesi?
4° igas vagunis on loenduv hulk inimesi?

MATEMAATILISE LOOGIKA RAKENDUSI

A. Tauts

Tänapäeval on matemaatiline loogika [1] leidnud niivõrd rohkesti mitmesuguseid rakendusalasid, et kõigi nende tutvustamine pole lühikeses artiklis võimalik. Sellepärast tuleb käesolevas kirjutises piirduda vaid paari rakendusvõimaluse kirjeldamisega, ning isegi neist saab anda üksnes üpris napi ülevaate.

Matemaatiline loogika kasvas välja matemaatika sisemistest vajadustest, eeskätt matemaatika aluste rajamisel. Rida paradokse [2] sundis matemaatikuid kahtlema matemaatilise mõtlemise senitunnustatud põhiprintsiipides. Nende põhiprintsiipide revideerimisel tekkis rida suundi ja koolkondi. Vaatleme siin kõigepealt ühe näitena nn. formalistlikku suunda, mille rajajaks oli meie sajandi tuntuim matemaatik, Göttingeni ülikooli professor David Hilbert.

Formalistlik suund seadis endale eesmärgiks kõrvaldada matemaatilistes mõttekäikudes esinev ettekujutluslik moment, mis avaldus selles, et mõttekäigu jälgimisel tuli kirjeldatavat situatsiooni kas või abstraktselt kujutleda. Formalistid asendasid mõisted sümbolitega ja väited teatud reeglite järgi järjestatud sümboligruppidega. Seejuures tuli täielikult unustada mitte ainult sümbolite tähendus, vaid ka see, et need sümbolid üldse midagi tähendavad.

Teooria ülesehitamiseks valiti väidete hulgast välja teatav kindel osahulk, mida nimetati aksioomideks. Peale selle esitati veel täiesti formaalsed tuletusreeglid, mis mingitele väidetele kui argumentidele rakendamisel andsid tulemuseks uue väite. Tõestuseks nimetati väidete niisugust rida, milles iga väide oli kas aksioom või oli saadud mõne tuletusreegli abil selle väite suhtes eespool paiknevatest väidetest. Iga väidet, mis esines mingis tõestuses, nimetati teoreemiks, kõikide teoreemide hulka aga teooriaks.

---

1 Käesolev artikkel on teatavas mõttes järjeks autori eelmisele artiklile (vt. Matemaatika ja kaasaeg, II, lk. 3—7), kus tutvustati matemaatilise loogika mõningaid põhimõisteid. Matemaatilise loogikaga lähemalt tutvumiseks vt. Kull, I., Matemaatiline loogika. Tln., ERK, 1964.

2 Mõnede niisuguste paradoksidega tutvumiseks vt. E. Jürimäe, Hulgateoreetilistest paradoksidest. — Matemaatika ja kaasaeg, I, lk. 5—12.

Kuigi hiljem selgus, et kõiki matemaatilisi tõdesid ei ole sellisel formaalsel viisil võimalik tuletada, saavutati niisuguste formaalsete süsteemide ehk formalismide abil küllaltki tähtsaid tulemusi. Arvestades, et matemaatilise loogika valemid oma sisulises interpretatsioonis kujutavad endast teatavate väidete üleskirjutusi, võeti ka formalismides kasutusele põhiliselt matemaatilise loogika sümboolika.

Esitame siin näitena formalismi, mis annab kõik esimest järku predikaatarvutuse tautoloogilised valemid. Formalism on täielikult määratud järgmise nelja loeteluga.

I. Sümbolid. Sümbolite hulka kuuluvad:

1) suured ladina tähed ehk predikaadid, mis erikokkuleppega jaotatakse konstantseiks ja muutuvaiks;
2) väikesed ladina tähed ehk indiviidid, mis erikokkuleppega jaotatakse konstantseiks ja muutuvaiks;
3) loogilised tehted $^{-}$, &, $\vee$, $\rightarrow$, $\sim$ ja $\approx$;
4) kvantorid $\exists$ ja $\forall$;
5) sulud (ja).

II. Valemid (väited). Valemite loetelu antakse induktiivselt:

1) iga predikaat koos talle järgneva n ($=0, 1, 2, \ldots$) indiviidiga (n-kohaline predikaat) on valem;
2) kui $\mathfrak{A}$ on valem, siis ka $\overline{\mathfrak{A}}$ on valem;
3) kui $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ on sellised valemid, milles ühesuguste predikaatide järel on mõlemas sama arv indiviide, kusjuures ei leidu niisugust indiviidi x, mis ühes neist valemeist esineks koos sümbolite ühendiga $\forall x$ või $\exists x$, teises aga ilma (n.-ö. vabalt), siis $(\mathfrak{A} \& \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B})$ ja $(\mathfrak{A} \approx \mathfrak{B})$ on valemid;
4) Kui $\mathfrak{A}$ on valem, mis ei sisalda sümbolite ühendeid $\forall x$ ega $\exists x$, siis $\forall x \mathfrak{A}$ ja $\exists x \mathfrak{A}$ on valemid (viimastes x on nn. seotud indiviid [3]).

III. Aksioomid. Aksioomideks on järgmised valemid, kus kõik tähelised sümbolid tähendavad muutuvaid indiviide või predikaate:

1) $(A \rightarrow (B \rightarrow A))$,
2) $((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)))$,
3) $((A \& B) \rightarrow A)$,
4) $((A \& B) \rightarrow B)$,
5) $((A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \& C))))$,
6) $(A \rightarrow (A \vee B))$,
7) $(B \rightarrow (A \vee B))$,
8) $((A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C)))$,

[3] Vaba ja seotud indiviidi tähendus on siin sisuliselt sama, mis autori eelmises artiklis (vt. viide 1), ainult käsitlus on formaalne.

9) $((A \to B) \to (\bar{B} \to \bar{A}))$,

10) $(A \to \bar{\bar{A}})$,

11) $(\bar{\bar{A}} \to A)$,

12) $(\forall x Fx \to Fy)$,

13) $(Fy \to \exists x\, Fx)$.

IV. Tuletusreeglid. Iga reegli puhul antakse argumentide ning reegli rakendamisel saadava tulemuse kirjeldus.

1. reegel. Argumentideks on valemid $\mathfrak{A}$ ja $(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B})$. Tulemuseks on valem $\mathfrak{B}$.

2. reegel. Argumendiks on valem $\mathfrak{A}$, mis sisaldab n-kohalist muutuvat predikaati F. Teine valem $\mathfrak{B}$ sisaldab n vaba indiviidi $t_1, \ldots, t_n$, mida valemis $\mathfrak{A}$ ei esine. Peale selle eeldatakse, et valemi $\mathfrak{B}$ ülejäänud vabad indiviidid erinevad valemi $\mathfrak{A}$ seotud indiviididest ja $\mathfrak{B}$ seotud indiviidid erinevad $\mathfrak{A}$ vabadest indiviididest. Lõpuks ei tohi valem $\mathfrak{B}$ sisaldada sellist valemi $\mathfrak{A}$ seotud indiviidi, mille siduva kvantori mõjupiirkonda valemis $\mathfrak{A}$ kuulub predikaat F. Tulemuseks on valem $\overset{\mathfrak{B}}{S_F} \mathfrak{A}$, mis saadakse sel teel, et valemis $\mathfrak{A}$ asendatakse F kõikjal valemiga $\mathfrak{B}$, kusjuures valemis $\mathfrak{B}$ asendatakse indiviidid t_i igakord nende indiviididega, mis olid predikaadi F järel vastavatel kohtadel valemis $\mathfrak{A}$.

3. reegel. Argumendiks on valem $\mathfrak{A}(x)$, kus x on vaba muutuv indiviid. Tulemuseks on valem $\mathfrak{A}(y)$, kus y on samuti vaba muutuv indiviid.

4. reegel. Argumendiks on valem $\mathfrak{A}$, mis sisaldab enda osana valemit $\forall x \mathfrak{B}(x)$ (või $\exists x \mathfrak{B}(x)$). Tulemuseks on sama valem $\mathfrak{A}$, milles $\forall x \mathfrak{B}(x)$ (või $\exists x \mathfrak{B}(x)$) asemel seisab $\forall y \mathfrak{B}(y)$ (või $\exists y \mathfrak{B}(y)$). Siin on y mis tahes indiviid, mis ainult ei esine valemis $\mathfrak{A}$ vabalt ega sellise seotud indiviidina, mille siduva kvantori mõjupiirkonnas paikneb valem $\mathfrak{B}$ või vastupidi.

5. reegel. Argumendiks on valem $(\mathfrak{B} \to \mathfrak{A}(x))$, kus $\mathfrak{B}$ ei sisalda indiviidi x. Tulemuseks on valem $(\mathfrak{B} \to \forall x\, \mathfrak{A}(x))$.

6. reegel. Argumendiks on valem $(\mathfrak{A}(x) \to \mathfrak{B})$, kus $\mathfrak{B}$ ei sisalda indiviidi x. Tulemuseks on valem $(\exists x \mathfrak{A}(x) \to \mathfrak{B})$.

Kui toodud formalismi abil soovitakse uurida ka objektide samasuse küsimust, siis võetakse tarvitusele kahekohaline predikaatkonstant Vxy (sisulises interpretatsioonis tähendaks: «$x = y$») ja lisatakse ülaltooduile aksioomid (ainukeseks konstandiks on V):

14) Vxx;

15) $(Vxy \to (Px \to Py))$.

Naturaalarvude uurimisel lisatakse veel indiviidkonstant 0 (null), predikaatkonstandid Jxy (s. t. *x-le järgneb vahetult y*), $Sxyz$ (s. t. $x + y = z$) ja $Kxyz$ (s. t. $x \cdot y = z$) ning aksioomid:

16) $\forall x \exists y\, Jxy$;

17) $\overline{\exists x\, Jx0}$;

18) $((Jxy \& Jxz) \rightarrow Vyz)$;
19) $((Jxz \& Jyz) \rightarrow Vxy)$;
20) $((P0 \& \forall x \forall y((Px \& Jxy) \rightarrow Py)) \rightarrow \forall x Px)$;
21) $Sx0x$;
22) $(((Sxyz \& Jyu) \& Jzv) \rightarrow Sxuv)$;
23) $((Sxyz \& Sxyt) \rightarrow Vzt)$;
24) $Kx00$;
25) $(((Kxyz \& Jyu) \& Szxv) \rightarrow Kxuv)$;
26) $((Kxyz \& Kxyt) \rightarrow Vzt)$.

Sellist või analoogilist lähenemisviisi on kasutatud mitmete matemaatiliste distsipliinide aksiomaatilise teooria loomisel, näit. algebras, geomeetrias [4], hulgateoorias ja mujal.

Seni, kuni matemaatilist loogikat rakendati erandituilt vaid matemaatika sisemisteks vajadusteks, pakkus ta huvi ainult matemaatikuile. Seoses e l e k t r o n a r v u t i t e kasutuselevõtmisega laienes aga matemaatilise loogika rakendusala enamikule kaasaegseist teadustest. Et arvutile sai muuhulgas üle anda ka l o o g i l i s t e o t s u s t u s t e sooritamise, kerkis päevakorda vajadus formuleerida probleeme mingis kindlas sümboolikas, mida arvutil oleks võimalik vahetult vastu võtta. Eriti on see oluline näiteks automaatse programmeerimise korral. Osutus, et niisuguseks sümboolikaks sobib hästi matemaatilise loogika sümboolika.

Oletame, et meil on vaja kõikvõimalike olukordade hulgast välja eraldada meile soodsad olukorrad. Selleks valime indiviidide piirkonnaks objektid, mis probleemis esinevad, predikaatideks aga uuritavat olukorda määravad väited. Edasi saame juba loogilise sümboolika abil kirja panna tingimused, mis peavad soodsaks loetud olukorras olema täidetud.

Näiteks, kui on tegemist mingi tundmatu suuruse lähendite otsimisega teatava i t e r a t s i o o n i m e e t o d i abil, siis nõutakse, et iteratsioon koonduks. Selleks piisab, kui ta on fundamentaalne. Eeskirja, mis seab igale naturaalarvule n vastavusse tundmatu n-da lähendi a_n, võib vaadelda ühekohalise funktorina $\varrho(n)$. Lahutamist ja absoluutväärtuse võtmist tuleb samuti vaadelda vastavalt kahekohalise ja ühekohalise funktorina ning suhet *on suurem kui* kahekohalise predikaadina, kusjuures nende jaoks võib säilitada tavalise kirjutusviisi. Nimetatud sümboleid kasutades on fundamentaalsuse tingimus [5] kirjutatav järgmiselt:

$$\forall \varepsilon(\varepsilon > 0) \rightarrow \exists n \, \forall m_1 \, \forall m_2((m_1 > n) \& (m_2 > n) \rightarrow$$
$$\rightarrow (\varepsilon > |\varrho(m_1) - \varrho(m_2)|)).$$

Juhul, kui olukorda määravaid objekte ehk p a r a m e e t r e i d tuleb valida l o e n d u v a s t h u l g a s t, võib selle hulga elemen-

[4] Vt. näiteks L u m i s t e, Ü., Geomeetria alused, I. Trt., 1964. (Rotaprint.)

[5] Sõnastatuna kõlaks fundamentaalsuse tingimus selliselt: Vastavalt igale positiivsele arvule ε leidub naturaalarv n nii, et kõikide naturaalarvude m_1 ja m_2 korral, kui $m_1 > n$ ja $m_2 > n$, kehtib võrratus

$$|a_{m_1} - a_{m_2}| < \varepsilon.$$

did eelnevalt naturaalarvudega nummerdada. Väidet nende parameetrite kohta võib siis vaadelda väitena vastavate järjekorranumbrite kohta. Et elektronarvutid on kohandatud just numbrilisteks arvutusteks, siis pakub erilist huvi uurida, milliseid numbrilisi probleeme suudab arvuti lahendada.

Kui olukord on määratud n parameetriga, siis on meil numbrilisel juhul sisuliselt tegemist n arvu süsteemiga $x_1, \ldots, x_n$, milles iga x_i võib vabalt omandada naturaalarvulisi väärtusi. Osa nendest süsteemidest loetakse soodsaiks, osa ebasoodsaiks. Küsimus seisneb siis niisuguse eeskirja leidmises, mis eraldaks soodsad olukorrad ebasoodsaist. Selle eeskirja võib anda näiteks sellise n-kohalise funktsiooniga $f(x_1, \ldots, x_n)$, mille väärtus iga soodsa argumentidesüsteemi korral on null, iga ebasoodsa süsteemi korral aga nullist erinev. Soodsad juhud on siis antud funktsiooni nullkohtadeks. Arvutite kasutamise seisukohalt on oluline, et funktsioon $f(x_1, \ldots, x_n)$ oleks teatud mõttes lihtsa struktuuriga. Eriti sobivaiks osutuvad nn. lihtrekursiivsed funktsioonid.

F u n k t s i o o n i nimetatakse l i h t r e k u r s i i v s e k s, kui ta kuulub järgmisse, induktiivselt defineeritavasse klassi:

1° nullkohaline konstantne funktsioon 0 on lihtrekursiivne;

2° ühekohaline funktsioon $\lambda(x)$, mis seab igale naturaalarvule vastavusse talle vahetult järgneva naturaalarvu, on lihtrekursiivne;

3° argumendi väljaeraldamise funktsioonid kujul
$f_i^n(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = x_i$ on lihtrekursiivsed;

4° kui funktsioonid $f_0(x_1, \ldots, x_s)$, $f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \ldots$, $f_s(x_1, \ldots, x_n)$ on lihtrekursiivsed, siis funktsioon $f(x_1, \ldots, x_n) = f_0(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_s(x_1, \ldots, x_n))$ on lihtrekursiivne;

5° kui funktsioonid $f_1(x_1, \ldots, x_n)$ ja $f_2(x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$ on lihtrekursiivsed, siis funktsioon $f(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, mis rahuldab tingimusi $f(0, x_1, \ldots, x_n) = f_1(x_1, \ldots, x_n)$ ja $f(n+1, x_1, \ldots, x_n) = f_2(n, x_1, \ldots, x_n, f(n, x_1, \ldots, x_n))$, on lihtrekursiivne.

Lihtrekursiivsete funktsioonide struktuuri «lihtsus» seisneb selles, et niisuguse funktsiooni väärtuse leidmine on argumentide igasuguse valiku korral teostatav kindla lõpliku arvu operatsioonidega. Vastavate arvutuste realiseeritavuseks elektronarvutis on põhiline aga just see nõue.

P r e d i k a a t i nimetatakse l i h t r e k u r s i i v s e k s, kui ta on tõene mingi lihtrekursiivse funktsiooni nullkohtades ja ainult seal. Osutub, et l i h t r e k u r s i i v s e p r e d i k a a d i e i t u s on lihtrekursiivne. See aga tähendab, et nii lihtrekursiivse predikaadina sõnastatud väite kui ka tema eituse kontrollimiseks tuleb sooritada vaid lõplik arv tehteid. Nii üht kui teist saab järelikult teostada elektronarvutis.

Lihtrekursiivseid funktsioone sisaldavate mõttekäikude demonstreerimiseks tõestame äsja sõnastatud väite, nimelt et lihtrekursiivse predikaadi eitus on lihtrekursiivne. Selleks tuleb meil antud lihtrekursiivsest funktsioonist $f(x_1, \ldots, x_n)$ lähtudes konstrueerida teine lihtrekursiivne funktsioon $\overline{f}(x_1, \ldots, x_n)$, mille väärtus on null siis ja ainult siis, kui $f(x_1, \ldots, x_n)$ erineb nullist.

Konstrueerime kõigepealt konstantsed funktsioonid $0(x)$ ja $0(x, y)$, mille väärtus on alati null. Et nullkohaline konstantne funktsioon 0 on lihtrekursiivne, siis võime defineerida:

$$
\begin{aligned}
&0(0) = 0,\\
&0(n+1) = f_2^2(n, 0(n)),\\
&0(0, x) = 0(x),\\
&0(n+1, x) = f_3^3(n, x, 0(n, x)).
\end{aligned}
$$

Võttes reeglis 4° $s = 1$, $n = 0$ defineerime nüüd nullkohalise funktsiooni 1:

$$
\begin{aligned}
&f_0(x) = \lambda(x),\\
&f_1 = 0,\\
&1 = f_0(f_1).
\end{aligned}
$$

Edasi defineerime reeglit 5° kasutades funktsiooni $\overline{sg}(x)$:

$$
\begin{aligned}
&\overline{sg}(0) = 1,\\
&\overline{sg}(n+1) = 0(n, \overline{sg}(n))
\end{aligned}
$$

ja selle abil lõpuks otsitava funktsiooni

$$\overline{f}(x_1, \ldots, x_n) = \overline{sg}(f(x_1, \ldots, x_n)).$$

Analoogiliselt saab näidata, et ka *kahe lihtrekursiivse predikaadi disjunktsioon* on lihtrekursiivne.

Ülejäänud loogilised operatsioonid võib siis juba avaldada disjunktsiooni ja eituse kaudu, nimelt $A \& B$ on $\overline{\bar{A} \vee \bar{B}}$, $A \rightarrow B$ on $\bar{A} \vee B$, $A \sim B$ on $(A \rightarrow B) \& (B \rightarrow A)$ ning $A \rightleftharpoons B$ on $\overline{(A \sim B)}$. Järelikult ka kõik need tehted jätavad predikaadi lihtrekursiivseks. Seda tulemust arvestades näeme, et lihtrekursiivsete predikaatidega määratud olukordade uurimisel võime elektronarvutis kasutada kõiki loogilisi tehteid.

Tuleb aga märkida, et *kvantori rakendamine* viib predikaadi kahjuks lihtrekursiivsete predikaatide hulgast välja. Olgu näiteks Pxy lihtrekursiivne predikaat ja $f(x, y)$ talle vastav lihtrekursiivne funktsioon. Siis selline funktsioon $g(y)$, mis vastaks predikaadile $\exists x\, Pxy$, peaks omandama väärtuse 0 parajasti nendel y väärtustel, mille korral leidub selline x, et $f(x, y)$ omandab väärtuse 0. Iga y puhul tuleb järelikult teostada lõpmatu kontroll, mis aga ei mahu lihtrekursiivse funktsiooni definitsiooni alla. Kontroll on lõplik ainult jaataval juhul (s. o. nende y väärtuste korral, mille puhul leidub x nii, et $f(x, y) = 0$), kuid ka siis pole teostatavate operatsioonide arv ette teada. Sellist predikaati nimetatakse *osaliselt rekursiivseks*. Kui aga predikaat ja tema eitus on mõlemad osaliselt rekursiivsed, siis nimetatakse neid *üldrekursiivseteks*. Üldrekursiivse predikaadi puhul on nimelt probleem jälle alati lahenduv lõpliku arvu sammudega. Tõepoolest, teostades kontrolli kordamööda predikaadi ja tema eitusega peab ühe puhul neist lõpliku arvu sammude järel saabuma positiivne vastus. Lihtrekursiivseks selline predikaat siiski ei osutu, sest sooritatavate operatsioonide hulka ei ole võimalik eelnevalt hinnata.

Lõpuks toome veel näite hoopis teisest valdkonnast. Nimelt kirjeldame mängu, mis põhineb matemaatilisel loogikal. Seda mängu võiks nimetada näiteks l o g i s t i k a m ä n g u k s.

Mäng toimub kahe isiku vahel, keda nimetame t õ e m ä n g i j a k s ja v ä ä r a m ä n g i j a k s. Mängu alustamiseks tuleb ette anda mingi esimest järku predikaatarvutuse valem, milles võivad esineda predikaadid, vabad indiviidid, seotud indiviidid ja funktorid. Selliseks valemiks võib olla näiteks

$$\bar{P}x \sim \exists y\, P\mu(y).$$

Mäng seisneb selles, et valemis esinevaile sümboleile antakse konkreetsed tähendused. Vabaks indiviidiks tuleb võtta mingi reaalarv, seotud indiviidi puhul tuleb näidata reaalarvude klass, millel vastav kvantor on määratud. Iga predikaat tuleb konkretiseerida mingi väitena tema juures olevate indiviidide, s. o. arvude kohta (sealjuures on nõutav, et valitud väite tõeväärtus oleks alati määratav). Funktor konkretiseeritakse mingi kõikjal määratud reaalarvulise funktsioonina. Ühe sümboli konkretiseerimist nimetame tehinguks. Korraga saab sooritada ainult ühe tehingu. Tehinguid sooritatakse kordamööda, esimese tehingu teeb tõemängija. Sümbolite konkretiseerimise järjekord on vaba. Kui pärast kõikide sümbolite konkretiseerimist osutub valem tõeseks väiteks, siis on tõemängija võitnud, vastasel korral on võitjaks vääramängija.

Ülal näiteks toodud lähtevalemi korral võib partii kulgeda kas või järgmiselt:

1) tõemängija konkretiseerib predikaadi P, andes talle tähenduse *on positiivne* (s. t. P loetakse edaspidi tõeseks positiivsete indiviidide korral);

2) vääramängija konkretiseerib klassi, kuhu peab kuuluma seotud indiviid y, valides selleks kõikide täisarvude klassi;

3) tõemängija konkretiseerib vaba indiviidi x, võttes $x = 0$;

4) vääramängija konkretiseerib funktsiooni μ, valides selleks konstantse funktsiooni null.

Nende nelja tehinguga on kõik valemis esinenud sümbolid konkretiseeritud ja valemi tõeväärtus seega määratud. Seda tõeväärtust pole nüüd raske leida. Tõepoolest, Px tähendab pärast konkretiseerimist väidet «$0 > 0$» ja $\bar{P}x$ (s. t. «$0 \leqslant 0$») on seega tõene. Teiselt poolt aga $\exists y\, P\mu(y)$ omandas konkretiseerimisel tähenduse: *leidub täisarv y nii, et talle rakendatult annab konstantselt nulliga võrdne funktsioon positiivse tulemuse.* See väide on ilmselt väär. Järelikult on väär ka kogu valem ning vääramängija on partii võitnud.

KUI MATEMAATIK TEID NINAPIDI VEAB...
Matemaatilisi sofisme

J. M. Gaiduk [1]

Ära usu iga valemit!

Matemaatiliste sofismide — matemaatiliste tõestuste enam või vähem teravmeelsete paroodiate kasulikkus seisneb selles, et nendega tutvumine teritab matemaatika õppijatel ettevaatlikkust, õpetab kriitiliselt suhtuma matemaatilistesse arutlustesse ning näitab eriti kujukalt loogika osa matemaatiliste järelduste usaldatavuses.

Mõnd tüüpi matemaatilised sofismid on laialdaselt tuntud nii õpetajate kui ka õpilaste seas. Eeskätt kuuluvad siia kurikuulsa «nulliga jagamisega» seotud sofismid. Mitme põlvkonna metoodikute jõupingutustega on nimetatud tehe õpilaste teadvuses kahjuks sedavõrd diskrediteeritud, et niisugused sofismid ei avalda enam erilist muljet. Seetõttu tuleb hoolitseda sofismide assortimendi täiendamise ja värskendamise eest. Seda eesmärki peavad teenima ka järgnevad sofismid, mille aine on võetud elementaar- ja kõrgema matemaatika piirdealalt [2]. Iga sofismi vea avastamise lõbu jätame vana traditsiooni kohaselt lugejale [3].

Tasand, mis täidab kogu ruumi

Väga paljudes analüütilise geomeetria õpikutes väidetakse *ilma mingite selgitavate märkusteta*, et võrrand

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

[1] Artikli autor Juri Mihhailovitš Gaiduk on Harkovi Põllumajanduse Instituudi dotsent. Saanud kuulda kogumiku «Matemaatika ja kaasaeg» väljaandmisest, saatis ta toimetusele kirja, milles soovib väljaandele menu. Ühtlasi lisas ta käesoleva artikli käsikirja n.-ö. omapoolse panusena. Artikli on tõlkinud E. Tamme.

[2] Teine selline sofismide valik on toodud autori artiklis: Математические софизмы, «Математика в школе», № 6, 1952, lk. 83—87. Vt. samuti «Matemaatika ja kaasaeg» II, lk. 92.

[3] Asjast huvitatuil palume sofismide analüüsid saata toimetusele.

on kolme (erinevat) punkti $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ läbiva tasandi võrrandiks. Usume nende õpikute autoreid ja, võttes punktideks $M_1(0, 0, 0)$, $M_2(1, 1, 1)$, $M_3(2, 2, 2)$, koostame toodud valemi abil neid punkte läbiva tasandi võrrandi:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (1)$$

Kirjutatud determinant võrdub aga nulliga esimese rea mis tahes elementide korral, sest tema viimane rida on võrdne kahekordse eelviimasega. Seega rahuldavad võrrandit (1) ruumi suvalise punkti koordinaadid x, y, z. Järelikult on meil tegemist tasandiga, mis täidab kogu ruumi.

Algebraline Peano kõver

Teatavasti 1890. a. konstrueeris itaalia matemaatik Peano pideva kõvera, mis läbib kahemõõtmelise tasanditüki — ruudu — kõiki punkte [4]. Kuid Peano konstruktsioon on küllaltki keeruline. Sedasama tuleb öelda ka Hilberti ja teiste matemaatikute poolt hiljem esitatud taoliste kõverate konstruktsioonide kohta. Võib aga täiesti elementaarsel teel tõestada kõvera — ja seejuures algebralise! — olemasolu, mis läbib mitte ainult ruudu, vaid isegi koordinaattasandi kvadrandi kõiki punkte. Vaadake, kuidas me seda teeme.

Eeldades, et konstant $a > 0$, lähtume võrrandist

$$|x-a| + |y| = |x| + |y-a|, \qquad (2)$$

mis määrab xy-tasandil teatava punktide geomeetrilise koha $\{M\}$ — selle tasandi kõigi niisuguste punktide M hulga, mille koordinaadid x ja y rahuldavad võrrandit (2). Lihtne on näha, et hulk $\{M\}$ sisaldab muuhulgas kvadrandi $x \geqslant a$, $y \geqslant a$ kõiki punkte. Teiselt poolt aga mõned xy-tasandi punktid ei kuulu hulka $\{M\}$; sellised on näiteks punktid $(a, 0)$ ja $(0, a)$. Seega võrrand (2) pole sugugi samasus.

Tõstame võrrandi (2) mõlemad pooled ruutu:

$$(x-a)^2 + y^2 + 2|(x-a)y| = x^2 + (y-a)^2 + 2|x(y-a)|,$$

ja eraldame seejuures absoluutväärtuse märke sisaldavad liikmed:

$$(x-a)^2 + y^2 - x^2 - (y-a)^2 = 2[|x(y-a)| - |(x-a)y|].$$

Uuesti võrrandi mõlemaid pooli ruutu võttes saame:

$$[(x-a)^2 + y^2 - x^2 - (y-a)^2]^2 = 4[x^2(y-a)^2 + \\ + (x-a)^2y^2 - 2|x(x-a)y(y-a)|].$$

Eraldame saadud võrrandis jällegi liikme, milles säilib absoluutväärtuse märk:

$$[(x-a)^2 + y^2 - x^2 - (y-a)^2]^2 - 4[x^2(y-a)^2 + (x-a)^2y^2] = \\ = -8|x(x-a)y(y-a)|.$$

Uus ruutimine viib meid nüüd juba võrrandini, milles pole enam

[4] Lumiste, Ü. Diferentsiaalgeomeetria. Tln., ERK, 1963, lk. 25.

ühtki absoluutväärtuse märki alles jäänud:

$$\begin{gathered}\{[(x-a)^2+y^2-x^2-(y-a)^2]^2-4[x^2(y-a)^2+\\+(x-a)^2y^2]\}^2=64x^2(x-a)^2y^2(y-a)^2.\end{gathered}\tag{3}$$

Saadud võrrand (3) — meil pole vajadust tegelda tema tülika lihtsustamisega — on ilmselt teatava kaheksanda astme algebralise kõvera võrrandiks. Et see võrrand on saadud järeldusena võrrandist (2), siis rahuldavad hulga $\{M\}$ kõigi punktide koordinaadid ka võrrandit (3). Teiste sõnadega: kõver (3) läbib kvadrandi $x \geqslant a$, $y \geqslant a$ kõiki punkte.

Tähelepanuväärne piirväärtus

Kõrgemas matemaatikas tuntud kahele tähtsale piirväärtusele tuleks lisada veel järgmine:

$$\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b-a}}{\sqrt{cx+d}-\sqrt{d-c}},\quad (a<b,\ c<d).$$

Tõepoolest, see piirväärtus on huvitav selle poolest, et tema väärtus sõltub arvutamise viisist; sellega lükatakse ümber väide, et muutuval suurusel ei saavat olla kahte erinevat piirväärtust.

Kasutades traditsioonilist võtet saame:

$$\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b-a}}{\sqrt{cx+d}-\sqrt{d-c}}=$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{(\sqrt{ax+b}-\sqrt{b-a})(\sqrt{ax+b}+\sqrt{b-a})(\sqrt{cx+d}+\sqrt{d-c})}{(\sqrt{cx+d}-\sqrt{d-c})(\sqrt{cx+d}+\sqrt{d-c})(\sqrt{ax+b}+\sqrt{b-a})}=$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{a(x+1)(\sqrt{cx+d}+\sqrt{d-c})}{c(x+1)(\sqrt{ax+b}+\sqrt{b-a})}=\frac{a\sqrt{d-c}}{c\sqrt{b-a}}.$$

Teine arvutusviis annab:

$$\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b-a}}{\sqrt{cx+d}-\sqrt{d-c}}=\lim_{x\to-1}\frac{\frac{1}{x}\left(\sqrt{ax+b}-\sqrt{b-a}\right)}{\frac{1}{x}\left(\sqrt{cx+d}-\sqrt{d-c}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}}-\frac{\sqrt{b-a}}{x}}{\sqrt{\frac{c}{x}+\frac{d}{x^2}}-\frac{\sqrt{d-c}}{x}}=\frac{\sqrt{b-a}}{\sqrt{d-c}}.$$

Vastuoluline funktsioon

Vaatleme funktsiooni $y=x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$, kus $x>0$. Seda funktsiooni võib defineerida ka rekurrentselt, lugedes $y=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$, kus $y_1=x$ ja $y_n=x^{y_{n-1}}$, $n=2, 3, \ldots$

Vaadeldav funktsioon[5] on ilmselt ühene ja monotoonselt kasvav. Seetõttu on tal olemas ühene pöördfunktsioon, mis peab samuti olema monotoonselt kasvav. Seda pöördfunktsiooni on muide kerge algebraliselt esitada. Tõepoolest, lähtefunktsiooni definitsioonist järeldub, et $y = x^y$, millest $x = y^{\frac{1}{y}}$; see ongi pöördfunktsiooni avaldiseks.

Kuid ometi $2^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{4}}$, mis on vastuolus pöördfunktsiooni monotoonsuse omadusega!

Tõsi, vastuolu saaks kõrvaldada, kui lugeda, et ... $2 = 4$.

[5] Olgu märgitud, et ühel metsateaduse aspirandil tuli pähe kasutada seda funktsiooni oma uurimustes puutüvede kuju kohta. Sealjuures puutus ta kokku teda hämmastava vastuoluga, mis andiski autorile aine käesolevaks sofismiks.

* * *

Aritmeetikaülesandeid

Järgmises korrutamises on numbrite 0, 1, 2, 3 ja 4 asemele kõikjal kirjutatud täht A, numbrite 5, 6, 7, 8 ja 9 asemele aga B. Leida, missugused arvud siin on korrutatud:

$$\begin{array}{r}
A\,B\,A \\
\times\; A\,A\,B \\
\hline
A\,A\,A\,A \\
A\,A\,B\,B \\
B\,A\,A \\
\hline
B\,A\,B\,A\,A
\end{array}$$

Järgmises jagamises on paaritute numbrite asemele kirjutatud U ja paarisnumbrite asemele S. Leida kõik arvud:

```
S S U U S |U U S
S U S     |U U S
  U U U
  U S S
    S U S
    S U S
```

Leida arv A, kui järgmistes jagamistes iga x tähendab mis tahes numbrit (ainult ükski kirjutatud arv ei alga nulliga):

```
x x x x x x x x x |x x x
x x x             |x x x x x x = A
  x x x x
  x x x
    x x x
    x x x
    x x x x
    x x x x
```

```
A = x x x x x x x |x x
    x x           |x x x x x
      x x x
        x x
      x x x
      x x x
        x x x
        x x x
```

NORBERT WIENER (1894—1964)

E. Tamme

Käeoleva aasta 18. märtsil suri Rootsis küberneetika «isa» — tuntud ameerika matemaatik N o r b e r t W i e n e r. Euroopas viibis ta jaanuarikuust saadik ringreisil, esinedes pikema loengutsükliga Amsterdamis.

Norbert Wiener sündis 26. novembril 1894. a. Harvardi ülikooli slavistikaprofessori perekonnas. Juba väga varakult ilmnes tema suur anne. Seitsmeaastase poisikesena tutvus ta Dante ja Darwini töödega, neljateistkümneaastaselt lõpetas matemaatikuna ülikooli, kaheksateistkümneaastaselt sai Harvardi ülikooli filosoofiadoktoriks (matemaatilise loogika valdkonda kuuluva töö eest). Aastail 1913—1915 jätkas ta õpinguid Cambridge'is Inglismaal ja Göttingenis Saksamaal. Alates 1919. aastast oli Norbert Wiener Massachusettsis tehnoloogilise instituudi õppejõuks (1932. aastast matemaatikaprofessor).

Norbert Wieneri teaduslik pärand on ulatuslik. Matemaatilise analüüsi ja tõenäosusteooria valdkondades kuuluvad temale mitmed suundirajavad tööd. Näiteks lõi ta kolmekümnendatel aastatel Tauberi teoreemide üldise teooria, seostades selle Fourier' teisenduste teooriaga, ja arendas koos inglise teadlase A. Paleyga välja harmoonilise analüüsi komplekstasandil. Tõenäosusteooria alal uuris N. Wiener tähtsat juhuslike protsesside klassi, millele hiljem anti tema nimi.

Norbert Wieneri matemaatilist loomingut iseloomustab tähelepanu osutamine loodusteaduste ja tehnika vajadustele. Teise maailmasõja päevil tegeles ta elektrivõrkudega ja arvutustehnikaga.

Norbert Wiener kujunes innustajaks ja juhiks mitmesuguste erialade teadlastest (matemaatikutest, inseneridest, neurofüsioloogidest, psühholoogidest jt.) koosnevale rühmitusele, kes uuris erinevate teadusharude piirialadel olevaid probleeme ning nende lahendamise meetodeid. Eriti tähtsaks sai elektri- ning elektronseadmestikes ja elusolendites kulgevate juhtimisprotsesside sarnasuse avastamine ja uurimine. Selle teadlaste rühmituse palju aastaid väldanud uurimustest — nii rahuotstarbelistest kui ka sõjalistest — jutustab Norbert Wiener 1948. a. ilmunud raamatus «Küberneetika ehk juhtimine ja side loomas ning masinas»[1], mis saavutas kiiresti maailmakuulsuse ning avaldas sügavat mõju kogu maailma teaduse arengule. Raamatus piiritletakse tänapäeval kiiresti areneva teadusharu — küberneetika mõiste ja olemus, näidatakse tema rakendusalasid ning antakse talle ka nimi.

Küberneetika annab teoreetilised alused automaatikale, «mõtlevatele» masinatele, sidetehnikale jne., aga ka sõjatehnikale. Norbert Wiener kuulus küll ameerika kodanliku intelligentsi ridadesse, kuid ausa teadlasena on ta ajakirjanduses korduvalt tähelepanu juhtinud teadlaste vastutusele ühenduses uurimistulemuste kasutamisega massilise hävitamise relvade loomiseks. Viibides 1960. a. suvel Moskvas Automaatjuhtimise ja -reguleerimise Rahvusvahelise Föderatsiooni esimesel kongressil, ütles ta: «Ma olen veendunud, et erinevate maade õpetlaste koostöö viib veel suurematele saavutustele rahu ja vastastikuse mõistmise ürituses kogu inimkonna hüvanguks».

*

* *

Toome järgnevas mõned väljavõtted viimasest intervjuust, mille Norbert Wiener lühikest aega enne surma andis ajakirja «United States News and World Report» korrespondentidele[2].

Küsimus. Doktor Wiener, kas esineb tendents arvutusmasinate kasulikkuse ülehindamiseks?

Vastus. Esineb omapärane tehnika kultus. Inimesi võluvad mitmesugused tehnika uudised. Masinad on määratud selleks, et inimene neid kasutaks. Kui aga inimene, kas ülisuurest austusest masinate vastu või tahte puudumisest ise otsustusi teha (nimetage seda laiskuseks või arguseks — ükskõik), eelistab jätta masina otsustada, kuidas masinaid kasutada, siis me satume täbarasse olukorda.

Küsimus. Mõnikord on kuulda, et luuakse masinad, mis ületavad inimeste võimeid. Kas te olete nõus selliste arvamustega?

Vastus. Ma ütleksin, et kui inimene osutub vähem võimekaks masinast, siis on see väga halb. Kuid selles ei saa sugugi süüdistada masinaid. Seda tuleb hinnata kui inimese krahhi tema enese süü tõttu.

---

[1] On olemas ka eestikeelne tõlge: Wiener, N., Küberneetika. Tln., 1961.
[2] See intervjuu on trükitud ajakirjas «Неделя» 1964, Nr. 13.

K ü s i m u s. Mida Te võite öelda arvutusmasinate tuleviku kohta?

V a s t u s. Tähtsaks arvutusmasinatega seotud suunaks on nende miniatuurseks muutmine, s. t. mõõtmete järsk vähendamine. Seal, kus arvutustehnika arengu algul oli vaja Empire State Buildingi [3] suurust masinat, võib seda nüüd vähendada niivõrd, et ta mahub väikesesse tuppa. Üheks põhiteguriks masinate miniatuurseks muutmisel on uute mälutüüpide kasutuselevõtmine; need põhinevad tahke keha füüsikal — transistoritel ja nendega sarnastel asjadel.

Meile pakub üha enam huvi küsimus: «Milline on inimaju meelespidamise mehhanism?» Nüüd hakkasime sellest esmakordselt reaalset ettekujutust saama.

Lugu on nii, et geneetiline mälu — meie geenide mälu — on määratud oma olemuselt nukleiinhapete kompleksidega. Viimase aasta jooksul on tekkinud alused oletuseks, et närvisüsteemi mälu on sama iseloomuga. Sellele viitab nukleiinhapete komplekside avastamine ajus, kusjuures neil on omadusi, mis võiksid põhimõtteliselt olla heaks mälu aluseks. Ma arvan — ja mitte ainult mina —, et ehk järgmisel aastakümnel kasutatakse selliseid printsiipe juba tehnikas.

K ü s i m u s. Teiste sõnadega — magnetlindi asemele tulevad arvutusmasina mälu blokkidesse geenid?

V a s t u s. Tulevad ained, mis sarnanevad geenidega. See nõuab uusi põhjapanevaid avastusi. Kuidas teostada informatsiooni sisse- ja väljaviimist geneetilise mälu korral, kuidas kasutada seda mälu masinas — selliste ülesannete lahendamine on seotud ulatuslike uurimustega, mis praegu on vaevalt algusjärgus. Mõned meist arvavad, et informatsiooni sisse- ja väljaviimist võib teostada nukleiinhapete komplekside kiirgumis- ja neeldumisspektreid kasutades (kuid see ei ole veel kontrollitud).

K ü s i m u s. Kas Te arvate pärast oma viimast sõitu Venemaale, et Nõukogud pühendavad suurt tähelepanu arvutusmasinatele?

V a s t u s. Jah, nad pühendavad sellele väga suurt tähelepanu.

K ü s i m u s. Kas nad võrreldes meiega kasutavad täielikult seda teadusala?

V a s t u s. Üldine arvamus on — ja see on paljude erinevate inimeste arvamus —, et arvutusmasinate tootmine jääb neil maha meie tasemest. Kuid automatiseerimise teoreetiliste probleemide uurimise alal on nad meist ees.

---

[3] 102-korruseline hoone New Yorgis (kõrgus 381 m, koos televisioonimastiga 448,7 m).

KÜBERNEETIKA TEOREETILISI PROBLEEME [1]

A. A. Ljapunov, S. V. Jablonski

3. Küberneetika matemaatilisi küsimusi

Küberneetika matemaatiliste küsimuste kirjeldamisele asudes tuleb silmas pidada, et kaugeleminevate abstraktsioonide kasutamine küberneetikas nõuab matemaatilise aparatuuri laialdast rakendamist. Osalt luuakse see aparatuur spetsiaalselt, küberneetika enda vajadusi arvestades, osalt võetakse üle mitmetest matemaatika harudest. Tuleb märkida, et juba küberneetika arengu algstaadiumis tekkis vajadus ulatuslikult rakendada matemaatilist loogikat, tõenäosusteooriat, matemaatilist statistikat, reaalmuutuja funktsioonide teooriat, hulgateooriat, funktsionaalanalüüsi, topoloogiat, arvuteooriat, abstraktset algebrat jne.

Küberneetika matemaatiline probleemistik on seotud küberneetika põhiülesannetega, ning seetõttu on matemaatilisi ülesandeid sobiv loetleda vastavalt küberneetika ülesannetele.

1. Makroskoopiline uurimine

1. Informatsioonivoogude väljaselgitamine. Käesoleval momendil pole siin veel võimalik mingisuguseid matemaatilisi ülesandeid sõnastada.

2. Informatsiooni koodi selgitamine. Siia kuulub rida informatsiooniteooria küsimusi:
   a) mitmesuguste kodeerimisprintsiipide uurimine,
   b) kodeerimissüsteemide omaduste tundmaõppimine,
   c) kodeerimis- ja dekodeerimisalgoritmide uurimine.

3. Juhtimissüsteemi funktsiooni selgitamine. Siin tuleb tegemist juhtimissüsteemi funktsioneerimist kirjeldava matemaatilise aparatuuri uurimisega:
   a) lõplike ja lõpmatute loogikate väljatöötamine,
   b) tõkestatult määratud operaatorite uurimine,

[1] Käesolev artikkel on tõlgitud kogumikust Проблемы кибернетики, вып. 9. M., 1963. Tõlkinud E. Tiit. Artikli algus vt. Matemaatika ja kaasaeg, I, lk. 14—22, ning II, lk. 11—21.

c) algoritmide uurimine,
d) tõenäosusloogika ja juhuslike elementaaraktidega algoritmide teooria läbitöötamine.

4. Juhtimissüsteemide funktsioneerimise uurimine:
a) juhtimissüsteemi kui sidekanali uurimine («kanali» läbilaskevõime hindamine, mürakindluse küsimus jne.),
b) juhtimissüsteemi kui teenindamissüsteemi tundmaõppimine (ooteaja probleem, teenindamise efektiivsuse hindamine jne.),
c) juhtimissüsteemi funktsioneerimise uurimine eesmärgi saavutamise seisukohast (mänguteooria problemaatika),
d) juhtimissüsteemide funktsioneerimise uurimine nende «organiseerituse» seisukohast (võrdlemine, õpetatavuse määramine jne.),
e) juhtimissüsteemi struktuuri hinnang tema funktsioneerimise järgi, eriti tema sisemälu hindamine.

2. Mikroskoopiline uurimine

5. Juhtimissüsteemi elementide selgitamine. Matemaatilisi ülesandeid pole siin veel õnnestunud sõnastada.

6. Elementidevaheliste seoste selgitamine. Siin vaadeldakse juhtimissüsteemide topoloogiaga seotud ülesandeid:
a) graafide teooria arendamine,
b) võrkude teooria arendamine,
c) skeemide uurimine (sealhulgas mitmesuguste keelte väljatöötamine skeemide üleskirjutamiseks).

7. Juhtimissüsteemi algoritmeerimine:
a) juhtimissüsteemide mitmesuguste algoritmeerimismeetodite uurimine (elementide, topoloogia, informatsiooni arvessevõtmine),
b) ligikaudsete algoritmeerimisprintsiipide (taktikate), sealhulgas mänguteooria ja matemaatiliste mängumudelite teooria edasiarendamine.

8. Juhtimissüsteemide analüüs.

9. Juhtimissüsteemide süntees:
a) etteantud funktsioneerimisega juhtimissüsteemide (sealhulgas ka sünteesi automatiseerivate) sünteesimeetodite konstrueerimine,
b) asümptootiliste karakteristikute uurimine (sõltuvalt elementidest, topoloogiast, algoritmeerimise tüübist),
c) minimaalsete skeemide sünteesimisel esinevate raskuste loogiliste põhjuste selgitamine,
d) oluliselt lihtsama ehitusega juhtimissüsteemide klasside väljaeraldamine.

10. Juhtimissüsteemide ekvivalentsed teisendused:

a) mitmesugustesse klassidesse kuuluvate juhtimissüsteemide teisendamiseks vajalike ekvivalentsussüsteemide konstrueerimine,

b) nende juhtude väljaselgitamine, millal on lõpliku täieliku ekvivalentsussüsteemi konstrueerimine võimalik,

c) algoritmide väljatöötamine juhtimissüsteemide lihtsustamiseks ekvivalentsussüsteemi abil.

11. Juhtimissüsteemide evolutsioon:

a) ühelt juhtimissüsteemilt evolutsiooni teel teisele ülemineku meetodite väljatöötamine.

12. Juhtimissüsteemide töökindluse uurimine:

a) ebakindlate sisenditega juhtimissüsteemi töökindluse koodist sõltumise uurimine (mürakindlate koodide konstrueerimine),

b) töökindlate juhtimissüsteemide süntees ebakindlatest elementidest,

c) juhtimissüsteemi töö kontrollimismeetodite väljatöötamine.

4. Küberneetika meetodid

Küberneetika seostub tihedasti teaduse ja tehnika paljude harudega. Seetõttu rakendab ta laialdaselt nende meetodeid, eriti konkreetsete juhtimissüsteemide uurimisel. Samal ajal on küberneetika täppisteadus, ning kasutab täppisteadustele iseloomulikku metoodikat. Eriti tähtsat osa etendavad väga mitmekesised matemaatilised meetodid, mis on tunginud peaaegu kõigisse küberneetika harudesse.

Ühtlasi rakendatakse küberneetikas ka eksperimenti. Katsetamine on keerukate objektide uurimisel äärmiselt tähtis. Väga komplitseeritud juhtimissüsteemide vaatlemine on küberneetikale iseloomulik. See aga tähendab, et siin on tegemist suurte informatsioonivoogudega, üpris koguka ja keerulise funktsioneerimisega. Seetõttu ongi katse küberneetilistes uurimustes väga oluline. Katsed võivad esineda mitmel kujul: vaatlus, statistiline analüüs, loogiline analüüs ja küberneetiline eksperiment.

Vaatlust kasutatakse ulatuslikult konkreetsete süsteemide uurimisel. See meetod on eriti levinud sellistel aladel nagu näiteks bioloogia ja majandusteadus.

Statistilisele analüüsile kuulub küberneetikas tähtis koht. See meetod on siin seotud mitte üksnes tõenäosusteoreetilise lähenemisega nähtuste käsitlemisele, vaid ka uurimustega, mis on sisuliselt determineeritud iseloomuga. Muuhulgas on see mugav eriti keerukate juhtimissüsteemide tundmaõppimisel. Seetõttu rakendatakse statistilist analüüsi paljude küberneetiliste küsimuste lahendamisel. Temaga puutume kokku informatsiooni uurimisel, elementide analüüsimisel, funktsioneerimise vaatlemisel, algoritmeerimisel jne.

L o o g i l i n e a n a l ü ü s leiab küberneetikas rakendamist samadel põhjustel kui statistilinegi analüüs. Tema abil avastatakse loogilisi seaduspärasusi uuritavais objektides. Eriti sageli kasutatakse loogilist analüüsi juhtimissüsteemide tüüpide selgitamiseks ja juhtimissüsteemide klassifitseerimiseks. Juhtimissüsteemide tüpiseerimine on mitmete teoreetiliste tööde lähtepunktiks. Siinjuures tuleb silmas pidada, et klassifitseerimine iseendast ei ole omaette eesmärk, vaid seostub teatud kindlate uurimustega. Seepärast tuleb klassifitseerimisele asudes kõigepealt määrata kindlaks selle eesmärk. Seejärel tuleb lähtetüüpide jaoks valida mastaap, mis võimaldab vältida klassifikatsiooni enda liigset keerukust. Eriti tuleb tähelepanu pöörata sellele, et iga klassifikatsioon peab tuginema täpselt kindlaks määratud printsiipidele. Klassifitseerida võib näiteks elementide tüüpide, skeemide tüüpide, funktsioonide jms. järgi.

Juhtimissüsteemid on sageli niivõrd keerukad, et ülalloetletud meetodid, samuti aga ka puhtmatemaatilised vaatlused osutuvad nende ehituse uurimisel mittepiisavaiks. Seetõttu ongi küberneetika meetodite hulgas eriline koht k ü b e r n e e t i l i s e l e k s p e r i m e n d i l. Küberneetiline eksperiment seisneb selles, et lähtesüsteem asendatakse mudeliga, mida siis tundma õpitakse. Põhimõtteliselt seisneb modelleerimine antud juhtimissüsteemiga isomorfse või ligikaudu isomorfse juhtimissüsteemi konstrueerimises ning selle funktsioneerimise vaatlemises.

Seoses modelleerimisega kerkib terve rida küsimusi:

a) eksperimendi eesmärgi täpne formuleerimine,
b) uuritava nähtuse matemaatiline kirjeldamine (sealhulgas selle kirjeldamiseks vajalike keelte väljatöötamine),
c) algoritmeerimine,
d) eksperimendi tulemuste hindamise kriteeriumide väljatöötamine jne.

Modelleerimisele on iseloomulik see, et mudelil on uuritava juhtimissüsteemiga võrreldes olulisi eeliseid. Näiteks võimaldab modelleerimine tootmisprotsesside juhtimissüsteemide projekteerimisel kontrollida idee õigsust ning valida mitmete konstruktsiooniparameetrite ratsionaalsed väärtused odavamalt ja kiiremini, kui seda saaks teha katseobjekti enese konstrueerimise abil. Juhul kui juhtimissüsteemi on vähe uuritud, saab mudeli abil kontrollida, kuivõrd õiged on meie kujutlused (hüpoteesid) tema kohta. Selline olukord tekib näiteks teadvuse üksikute funktsioonide modelleerimisel. Oluline on siin see, et mudeli funktsioneerimisprintsiibid on uuritava juhtimissüsteemi omadest palju paremini tuntud.

Enamasti toimub juhtimissüsteemide modelleerimine kas tehnika abil või elektronarvutitele programmeerimise teel.

Tehnika abil modelleerimine on vajalik siis, kui tuleb säilitada mudeli lähedust uuritavale objektile ja kui tehniline realiseerimine annab paremaid võimalusi vaatlemiseks. Näiteks elektronarvutite konstrueerimisel ehitatakse tavaliselt kõigepealt makett, millel täpsustatakse projekti idee. See on võimalik maketi teatava läheduse tõttu projekteeritavale arvutile. Samuti on loomade käitumise uurimisel mugav kasutada tehnilisi mudeleid, sest nii on lihtne hinnata nende käitumise aluseks olevaid printsiipe.

Modelleerimine programmeerimise teel on võimsaim ning levinuim küberneetilise eksperimendi moodus. Selle meetodi teatava spetsiifika tõttu tekib siin aga rida lisaküsimusi. Nende hulka kuulub töödeldava informatsiooni sobivaima koodi valik algoritmi erinevatel tööetappidel, et tagada kohane töörežiim niihästi mälu koormatuse kui ka arvuti aja seisukohast.

Eriti oluline on võimalikult vähendada läbivaatamisele kuuluvate variantide arvu, mis tekivad antud ülesande lahendamisel. Real juhtudel, kui kogu algoritm ei mahu arvutisse, tekib küsimus algoritmi ratsionaalsest jaotamisest iseseisvateks osadeks nii, et arvutamist saaks teostada etappide kaupa. Siinjuures tuleb kindlustada üksikosade sobiv seostamine. Lõpuks on tarvis valida võimalikult efektiivne programmeerimisviis. Sageli tekib siis küsimus teatud ülesannete klassiga seotud algoritmide programmeerimise automatiseerimisest. Programmi abil modelleerimise näiteks elektronarvutil võiksid olla tõlkimine ja mõningaid mõtlemisakte modelleerivad programmeerivad programmid.

Kuigi küberneetiline eksperiment on võrdlemisi noor teaduslik meetod, on tal praegu palju rakendusi. See soodustab eelkõige täpsete mõistete väljatöötamist ning ülesannete selget formuleerimist. Küberneetilist eksperimenti kasutatakse paljude ülesannete puhul. Laialdaselt rakendatakse teda informatsiooni kodeerimissüsteemide avastamisel ning uurimisel, juhtimissüsteemide funktsioneerimise tundmaõppimisel, elementide ning nendevaheliste seoste leidmisel ning eriti juhtimissüsteemde algoritmeerimisel.

Toodud tabelis on tehtud katse küberneetika problemaatika süstematiseerimiseks. Horisontaalread iseloomustavad erisuguste juhtimissüsteemide (tabelis lühidalt JS) uurimisel kerkivate, kuid omavahel sarnaste ülesannete klasse; nad on jaotatud kahte rühma — makroskoopiline ja mikroskoopiline uurimine. Esimeses veerus on antud ülesannete üldine nimetus. Teises veerus detailiseeritakse neid ülesandeid teatud määral. Kolmandas veerus on esitatud kõige iseloomulikumad meetodid, mida rakendatakse vastavate ülesannete lahendamisel: matemaatika valdkond, küberneetika matemaatilised osad, eksperimentaalsed meetodid. Järgnevais veergudes on näidatud teadusharud, kus vastavaid konkreetseid juhtimissüsteeme uuritakse. See uurimine ning asjaolu, et kõige mitmesugusemates teadusharudes on tegemist ühetüübiliste süsteemidega, mis on käsiteldavad juhtimissüsteemidena, olidki küberneetika kui teaduse tekke põhjuseks.

Küberneetika enese meetodite tekkimist põhjustas see, et erinevais konkreetseis teadusharudes esilekerkinud ülesanded juhtimissüsteemide kohta lahenduvad ühiste meetoditega. Märgime, et paljudel juhtudel tekivad siinjuures uued meetodid.

Tuleb tähendada, et veergude loetelu ei pretendeeri kaugeltki täielikkusele, vaid on pigem illustratiivse iseloomuga. Üheski veerus ei peeta silmas ühtainsat konkreetset juhtimissüsteemi. Nii vaadeldakse näiteks närvisüsteemi füsioloogiat käsitlevas veerus nii organismi tervikuna, närvisüsteemi tervikuna kui ka mõningaid tema üksikosi. On võimalik, et küberneetika arenguprotsessis tekib vajadus selle tabeli detailiseerimiseks niihästi uute veergude juurdetoomise kui ka vanade jaotamise teel, samuti aga ka uute alade kaasahaaramise abil.

(*Lõpp*)

MATEMAATIKA KUI KUNST

Ka meie, matemaatikud, oleme tõelised kutsumusega luuletajad; ainult meil tuleb luuletatu ka veel tõestada!

L. Kronecker, 1890.

* *
*

Inimesed, kellel pole olnud juhust matemaatikaga sügavamat tutvust sõlmida, ajavad ta segamini rehkendamisega ja näevad temas mingit kuiva ja tuima teadust. Tegelikult nõuab matemaatika palju kujutlusvõimet ning üks meie sajandi suurimaid matemaatikuid võis õigusega öelda, et on võimatu olla hea matemaatik, kui ühtlasi ei olda pisut ka poeet...

Mis minusse isiklikult puutub, siis ma ei oskagi öelda, kumba ma rohkem armastan: kas matemaatikat või kirjandust.

S. Kovalevskaja, 1887.

* *
*

Rohkem kui teised teadused nõuab just matemaatika tugevat kujutlusvõimet... Mõtteselgus üksinda ei ole veel ilmaski avastusi teinud. Parim osa matemaatiku loomingust on kunst, ülev ja täiuslik kunst, julge nagu kujutluse salajasimad unistused, selge ja kirgas nagu abstraktne mõte. Matemaatiline geniaalsus ja kunstialane geniaalsus puutuvad kokku; peaks koguni selgitama, miks need kaks geniaalsuse liiki arenevad nii harva ühel ja samal inimesel.

G. Mittag-Leffler, 1892/93.

* *
*

Matemaatilises valdkonnas valitseb mingi omapärane ilu, mis vastab mitte niivõrd kunstiteose kui just looduse ilule ja mis mõjub täiesti samasugusel viisil igale meelelisele inimesele, kes on sellest aru saama õppinud.

E. E. Krummer, 1867.

Majandusmatemaatika

MAATRIKSITE TEOORIA MAJANDUSTEADUSES

Ü. Ennuste [1]

Matemaatika harudest on majandusteaduses seni kõige enam kasutatud maatriksalgebrat [2]. Seda on majandusliku tegevuse analüüsimisel ulatuslikult rakendatud eelkõige selliste kesksete probleemide uurimiseks, nagu tootmise tasakaalustamine (täiskulude ja tootmisharude vahelise bilansi meetodid) ja tootmise optimiseerimine (tootmise lineaarsete mudelite koostamine ja analüüs). Mõningal määral on maatriksite teooria majandusteaduses kasutust leidnud ka veel matemaatilise mänguteooria kaudu. Maatriksite teooria praktilist tähtsust ja elulisust majandusteaduses näitavad paljudes maades tehtud arvukad uurimused ning eksperimendid selle teooria rakendamiseks mitmesuguse suurusega majandussüsteemide käsitlemisel, alates tsehhidest ja lõpetades kogu rahvamajandusega. Võib oletada, et maatriksite teooria kujuneb ka üheks nurgakiviks ühiskonna tootlike jõudude arendamisel olulise tähtsusega majandusmehhanismi — majanduse optimaalse planeerimise ja juhtimise küberneetilise masina loomisel.

Majandusteaduses tärkas huvi maatriksite ja maatriksalgebra vastu pärast seda, kui USA teadlane V. Leontjev avaldas alates 1947. a. rea töid tootmisharude vahelise bilansi meetodi (*«input-output analysis»*) kohta [1].

Majandusteaduse seisukohast on maatriksalgebral järgmised hinnatavad omadused.

Maatrikstähistus võimaldab arvude kogusid «kokku suruda» ühte sümbolisse. See on majandusteaduses eriti väärtuslik, sest seal tuleb sageli opereerida arvude suurte kogudega (tabelitega).

Arvutusoperatsioonid maatriksitega on hästi realiseeritavad kaasaegsetes kiiretoimelistes arvutites. See omadus on andnud viimasel ajal erilise tõuke maatriksite teooria laialdasele juurutamisele majandusteaduses.

Maatriksalgebra rakendamine on kooskõlas majandusteaduse

---

[1] Artikli autor Ü. Ennuste on ENSV TA Majanduse Instituudi teaduslik töötaja.

[2] Maatriksalgebraga tutvumiseks vt. näiteks Kangro, G., Kõrgem algebra. Tln., ERK, 1962.

arengutasemega käesoleval ajal. Nimelt on majandusteaduses, eriti makroökonoomiliste majandussüsteemide uurimisel, enamasti võimalik välja tuua vaid ligikaudseid lineaarseid seoseid üksikute faktorite vahel. Maatriksalgebra aga ongi universaalne matemaatiline aparatuur lineaarsete seoste käsitlemiseks.

Praegusel etapil tuleb maatriksalgebra üheks praktiliseks eeliseks lugeda ka tema suhteliselt lihtsat mõistetavust majandusteadlastele. Seda soodustab mõningane sarnasus traditsiooniliste planeerimismeetoditega, kus maatrikstabelid ehk nn. malelaudtabelid olid juba varem kasutamisel.

Maatriksite teooria meetodite realiseerimine majandusteaduses ongi kujunenud esimeseks etapiks üleminekul senisest täielikumale planeerimistasemele. Sellepärast on ka arusaadav, et ilma maatriksalgebra põhimõistete tundmiseta ei saa sügavalt mõista ega seega ka juurutada täiuslikumaid planeerimismeetodeid.

Järgnevalt on püütud lühidalt selgitada maatriksalgebra kasutusvõimalusi majandusteaduses ja viidata ka nendele perspektiividele, mida vastavate meetodite edasine rakendamine võiks uurimises avada.

Maatriksalgerba kasutamine on eriti sobivaks osutunud eeskätt täiskulude määramise ja tootmisharude vaheliste bilansside koostamise ülesannete puhul. Nende ülesannete tutvustamist alustame järgmise lihtsa näitega.

N ä i d e 1. Kombinaat toodab ja turustab kolme toodet: kivisütt, terast ja masinaid. Seejuures iga tooteühiku valmistamiseks kasutatakse otseselt ka mõningat hulka kombinaadi teisi tooteid. Näiteks ühe ühiku söe tootmiseks kulutatakse otseselt 0,1 ühikut terast ja 0,1 ühikut masinaid. Kõik o t s e k u l u d on toodud tabelis 1. Selle otsekulude ehk malelaudtabeli veergude ja ridade pealkirjad on küll täpselt ühesugused, kuid kokkuleppeliselt loetakse tabeli iga element temale vastavas reas näidatud materjali kuluks vastava veeru toote valmistamisel. Näiteks kivisöe kulu ühe ühiku terase tootmiseks on 2,0 ühikut. Materjalide sisekäivet ei ole tabelis arvestatud: peadiagonaali elemendid on kõik nullid.

Tabel 1

	Kivisüsi	Teras	Masinad
Kivisüsi	0	2,0	0,2
Teras	0,1	0	0,5
Masinad	0,1	0,3	0

Ülesandeks on määrata söe, terase ja masinate kogutoodangud kombinaadis nii, et iga toote lõpptoodang (väljalase) oleks 1 ühik.

Kuigi toodud näites on tegemist ainult kolme omavahel seotud tootmisharuga, osutub ülesande lahendamine siiski üsna keerukaks. Lahendamist raskendab asjaolu, et iga toote valmistamisel on peale mitmesuguste materjalide otseste kulude tegemist veel nende kaudsete kuludega. Näiteks masinate valmistamiseks vajatakse otseselt terast ja kivisütt, kuid kivisöe tootmiseks vajatakse omakorda terast ning masinaid jne.

Kokkuvõttes kutsub iga tootmisprotsess peale otsekulude välja veel terve ahelreaktsiooni kaudseid kulusid. Otseste ja kaudsete kulude summat antud toote valmistamisel nimetamegi **täiskuludeks**. Alles täiskulude teadmine võimaldab püstitatud ülesannet lahendada.

Sellised ülesanded on eriti hõlpsalt lahendatavad maatriksarvutuse meetoditega. Lahendusmeetodi kirjeldamiseks formaliseerime eeltoodud ülesande üldkujul. Selleks tähistame:

i, j — vaadeldavate toodete järjekorranumbrid ($i, j = 1, \ldots, n$);
X_i — toote i kogutoodang;
Y_i — toote i lõpptoodang (väljalase);
X_{ij} — toote i kulu toote j kogutoodangu valmistamisel.

Vaadeldud ülesande võib nüüd sõnastada järgmiselt: leida kogutoodang X_i, kui lõpptoodang Y_i ja toote i kulu toodangu j valmistamiseks X_{ij} on teada.

Ülesande lahendamiseks paneme tähele, et iga toote i korral kehtib võrrand

$$Y_i = X_i - X_{i1} - X_{i2} - \ldots - X_{in}$$

ja kõigi toodete kohta saame seega koostada võrrandisüsteemi

$$\left.\begin{array}{l} Y_1 = X_1 - X_{11} - X_{12} - \ldots - X_{1n} \\ Y_2 = -X_{21} + X_2 - X_{22} \ldots - X_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Y_n = -X_{n1} - X_{n2} - \ldots + X_n - X_{nn} \end{array}\right\}. \qquad (1)$$

Kui defineerida

$$a_{ij} = \frac{X_{ij}}{X_j}, \qquad (2)$$

siis a_{ij} kujutab toote i kulu toote j ühe ühiku valmistamisel ja teda nimetatakse **otsekulu koefitsiendiks**.

Tähistust (2) kasutades võib süsteemi (1) esitada kujul

$$\left.\begin{array}{l} Y_1 = X_1 - a_{11}X_1 - a_{12}X_2 - \ldots - a_{1n}X_n \\ Y_2 = -a_{21}X_1 + X_2 - a_{22}X_2 - \ldots - a_{2n}X_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Y_n = -a_{n1}X_1 - a_{n2}X_2 - \ldots + X_n - a_{nn}X_n \end{array}\right\}. \qquad (3)$$

Võtame nüüd kasutusele maatrikssümboolika, tähistades

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots \\ a_{n1} \ldots a_{nn} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}.$$

Siis on (3) kirjutatav lihtsalt võrrandina

$$Y = (E - A)X, \qquad (4)$$

kus E tähendab ühikmaatriksit.

Võrrandi (4) mõlemaid pooli vasakult maatriksiga $(E-A)^{-1}$ korrutades saame

$$(E-A)^{-1}Y=EX,$$

ehk

$$X=(E-A)^{-1}Y. \tag{5}$$

Majanduslikult mõttelt võib maatriksi $E-A$ ehk nn. Leontjevi maatriksi pöördmaatriksit $(E-A)^{-1}=B$ nimetada täiskulude maatriksiks. Nimelt maatriksi B element b_{ij} näitab, kui palju tuleb suurendada toote i kogutoodangut, et toote j väljalase suureneks ühe ühiku võrra. Diferentsiaalarvutuse sümboolikat kasutades:

$$b_{ij}=\frac{\partial X_i}{\partial Y_j}.$$

Seega on tuletatud avaldis (5), mis annab funktsionaalse seose lõpptoodangu ja kogutoodangu vahel, ning me võime jätkata näite 1 lahendamist.

Näide 2. Arvutame tabelis 1 esitatud otsekulude maatriksi A alusel pöördmaatriksi $(E-A)^{-1}$. Tulemus, mis kujutab täiskulude maatriksit, on esitatud tabelis 2.

Tabel 2

	Kivisüsi	Teras	Masinad
Kivisüsi	1,622	3,931	2,290
Teras	0,286	1,870	0,992
Masinad	0,248	0,954	1,526

Tabelist selgub, et näiteks kivisöe täielik kulu terase lõpliku toodangu ühe ühiku saamiseks on 3,931 ühikut, ehk 1,96 korda rohkem kui vastav otsekulu. Täiskulude koefitsiendid tabeli peadiagonaalil näitavad, mitu ühikut tuleb mingit toodet valmistada, et lõplikult saada üks ühik sedasama toodet (arvesse võttes, et osa toodangust kulub tema enda valmistamiseks vajalike materjalide tootmiseks).

Täiskulude maatriksi abil on valemist (5) kerge määrata kogutoodangu mahtu X olenevalt lõpptoodangust Y. Olgu näiteks vaja saada lõpptoodanguna üks ühik kõiki tabelis 2 vaadeldavaid tooteid. Avaldise (5) abil võib nüüd hõlpsalt koostada vastava toodangu plaani (tabel 3).

Tabel 3

Toode	Kogutoodang	Tootmisalane tarbimine			Lõplik toodang
		Kivisüsi	Teras	Masinad	
Kivisüsi	7,843	0	6,296	0,547	1,000
Teras	3,148	0,784	0	1,364	1,000
Masinad	2,728	0,784	0,944	0	1,000

Sellist tabelit nimetatakse tootmisharude vahelise bilansi tabeliks. Ta annab hea ülevaate toodangu voogudest ja on aluseks tootmisharude toodangu planeerimisel.

Vaadeldud näites oli tegemist ainult kolme tootmisharuga. Praktilistes ülesannetes on tootmisharude arv tunduvalt suurem ja sellega kasvab ka valemi (5) rakendamisel vajaliku pöördmaatriksi arvutamisega seotud ajakulu. Kolme tehnoloogia korral kulub vilunud arvutajal pöördmaatriksi vahetuks arvutamiseks umbes 15 minutit. Kuid näiteks 10 haru korral oleks ajakulu ligi nädal ning kolmesaja haru puhul ületaks 1000 inimaastat! Seetõttu on nende ülesannete lahendamine jõukohane vaid elektronarvutitele.

Lihtsamate ülesannete käsitsi lahendamiseks, aga samuti ka suurte ülesannete lahendamiseks elektronarvuti abil kasutatakse tavaliselt ligikaudseid meetodeid. Tutvustame üht niisugust.

Praktikas esinevad otsekulude maatriksid A on tavaliselt niisugused, et Taylori rida

$$(E-A)^{-1}=E+A+A^2+\ldots+A^n+\ldots \qquad (6)$$

osutub kooduvaks (vt. [2]).

Valemit (6) kasutades võib nüüd võrduse (5) kirjutada kujul

$$X=Y+AY+A^2Y+\ldots+A^nY+\ldots$$

Selle rea jääkliiget ära jättes saamegi ligikaudse valemi

$$X=Y+AY+A^2Y+\ldots+A^nY. \qquad (7)$$

Avaldis (7) annab täpse tulemuse vaid siis, kui $n\to\infty$. Lõpliku n korral saame muidugi ainult ligikaudse tulemuse, kuid tunduvalt väiksema tehete arvuga, kui nn. täpsete meetodite puhul.

Otsekulude a_{ij} vähenemisel (tehnoloogia täiustamisel, tööviljakuse tõusmisel jne.) muutuvad ka täiskulud b_{ij}. Uue täiskulude maatriksi arvutamist on võimalik lihtsustada esialgse pöördmaatriksi teatava korrigeerimise teel. Vastava korrigeerimisteguri tuletus on järgmine (vt. [3]).

Olgu L_0 maatriksi

$$L=E-A$$

esialgne kuju ja L_1 tema muutunud kuju. Siis

$$D=L_0-L_1$$

kujutab endast muutuste maatriksit. Eeldame, et L_0^{-1} on teada ja otsime korrigeerivat maatriksit C nii, et oleks

$$L_1^{-1}=CL_0^{-1}.$$

Lihtsate teisenduste tulemusena saame

$$\begin{aligned}C&=L_1^{-1}L_0=(L_0^{-1}L_1)^{-1}=\\&=(L_0^{-1}(L_0-D))^{-1}=\\&=(E-L_0^{-1}D)^{-1}.\end{aligned}$$

Seega

$$C=(E-L_0^{-1}D)^{-1}$$

ja järelikult

$$L_1^{-1}=(E-L_0^{-1}D)^{-1}L_0^{-1}. \qquad (8)$$

Kui maatriks D on väikeste elementidega, siis on valemi (8) kasutamine uue otsekulude maatriksi pööramisest tunduvalt ökonoomsem.

Eelnevast selgus, et materiaalse tootmise maatriksmudeli alusel on võimalik koostada tootmise tasakaalustatud bilansse, mis vastavad etteantud lõpptoodangu variandile. Et vajalikud arvutused on lihtsalt mehhaniseeritavad, siis avaneb reaalne võimalus erinevate lõpptoodangu variantidega seotud kogutoodangute võrdluseks ja nende reaalsuse ning otstarbekuse üle otsustamiseks. Sellistel arvutustel on kahtlemata suur väärtus rahvamajanduse planeerimise seisukohalt. Balansseeritud tootmisplaanide koostamist võiks lugeda planeerimise täiustamise esimeseks etapiks.

Majandussüsteemide planeerimise täiustamise järgmine etapp peaks seisnema üleminekus balansseeritud plaanidelt ühe või teise kriteeriumi järgi optimiseeritud plaanidele. Sellisteks kriteeriumideks võiksid olla lõpptoodangu valmistamiseks vajalik töökulu, rahvamajanduse optimaalne arengutempo vms.

Üleminek kõrgemale planeerimistasemele peaks aitama täielikult ellu rakendada sotsialistliku planeerimise põhilist eesmärki — saavutada ühiskonna huvides kõige suuremaid tulemusi kõige väiksemate kulutustega.

Üheks sobivaimaks instrumendiks selliste plaaniülesannete lahendamisel tundub käesoleval ajal olevat majandussüsteemi astmete dünaamiliste maatriksmudelite kombineerimine mitmesuguste matemaatilise planeerimise meetoditega. Põhimõtteliselt peaks selline lähenemine võimaldama tootmisharude kaupa optimaalsete toodangu, võimsuste, fondide ja kapitalimahutuste plaanide koostamist ning majanduslikkuse hinnangute arvutamist (efektiivsuse koefitsiendid), mis kindlustaksid piiratud ressursside, eriti kapitalimahutuste efektiivsemat kasutamist.

Maatriksite teooriat on majandusmatemaatilises kirjanduses kasutatud väga palju. Üksikasjalikumaks tutvumiseks võib soovitada näiteks järgmisi raamatuid:

1. Леонтьев, В. В. и др. Исследование структуры американской экономики. М., 1958.
2. Гребцов, Г. И., Смехов, Б. М. и др. Основы разработки межотраслевого баланса. М., 1962.
3. Финкельштейн, Б. Б. О методе пересчета матрицы коэффициентов полных затрат в случае изменения технологии в нескольких отраслях производства. М., 1959.
4. Немчинов, В. С. Экономико-математические методы и модели. М., 1962.
5. Ланге, О. Теория воспроизводства и накопления. М., 1963.
6. Ямада, И. Теоория и применение межотраслевого метода. М., 1963.
7. Ченери, Х. и Кларк П. Экономика межотраслевых связей. М., 1962.

TRANSPORT JA MATEMAATIKA

I. Kull

Kaasaegne ühiskond ei saa eksisteerida ilma kiirelt ja paindlikult tegutseva transpordisüsteemita. Transpordi normaalne funktsioneerimine eeldab paraja tihedusega teedevõrgu, piisava hulga transpordivahendite, transpordibaaside ja muidugi ka transporditöötajate olemasolu. Kuid ainuüksi sellest ei piisa veel transpordisüsteemi heaks tööks. Hea töö tagamiseks tuleb kõiki neid vahendeid ka otstarbekohaselt rakendada — tuleb koostada ökonoomsed transpordiplaanid, -graafikud jms.

Et planeerijatel ja dispetšeritel on transpordiplaanide koostamisel ja transpordi operatiivsel juhtimisel väga raske arvestada kõiki olulisi andmeid (neid on tavaliselt väga palju), siis püütakse vastavaid probleeme tänapäeval lahendada elektronarvutitega. Enne aga tuleb need probleemid sõnastada täpsete matemaatilis-loogiliste ülesannetena. Peale selle tuleb muidugi leida meetodid nende lahendamiseks.

Käesolevas kirjutises toomegi kaks transpordi vallas sagedamini esinevat ülesannet — nn. klassikalise transpordiülesande ja kaubaveo marsruutide leidmise ülesande, ning näitame, kuidas neid on võimalik lahendada.

Olgu mingis piirkonnas 3 ehituspaneelide tehast, mis toodavad aastas vastavalt 5000, 10000 ja 15000 tonni paneele. Asugu selles piirkonnas 6 ehitusrajooni, mis vajavad neid paneele aastas vastavalt 2000, 3000, 6000, 4000, 7000 ja 8000 tonni. Eeldame, et kõik paneelid on üht tüüpi ja neid võib ehitusrajoonidesse vedada mis tahes tehasest. Et paneelide toodang tehastes võrdub paneelide koguvajadusega, siis on ehitusrajoonide nõudmisi paneelide järele võimalik rahuldada. Seejuures tekib aga küsimus: kui palju paneele tuleb igast tehasest igasse ehitusrajooni vedada? Esimesel pilgul näib, et küsimusele võiks vastata nii: igasse ehitusrajooni tuleb vajalikud paneelid vedada sellele ehitusrajoonile kõige lähemast tehasest. Sest tõepoolest — nii peaks paneelide veoplaan tulema kõige ökonoomsem ja vedude kogumaksumus kõige väiksem. Kuid kahjuks ei tarvitse selline transpordiplaan olla realiseeritav, sest võib osutuda, et mõnest tehasest tuleks paneele välja vedada rohkem, kui neid seal toodetakse.

Optimaalseks tuleb lugeda sellist transpordiplaani, kus 1) tehasest ei veeta kaupa välja rohkem, kui seda seal toodetakse; 2) kõikide tarbijate vajadused on rahuldatud (eeldusel, et vastavat kaupa on piisavalt); 3) transpordi kogukulud on minimaalsed kõikide teiste tingimusi 1) ja 2) rahuldavate transpordiplaanidega võrreldes.

Seega peab optimaalse transpordiplaani koostamiseks teadma peale tehaste toodanguhulkade ja tarbijate nõudmiste veel toodangu ühe ühiku veo maksumust igast tehasest iga tarbijani. Olgu need andmed meie ülesande puhul näiteks sellised, nagu on toodud tabelis 1. Lihtsuse mõttes on siin toodanguühikuks võetud 1000 tonni paneele.

Tabel 1

Tehaste toodang	Tarbijate vajadused					
	$b_1 = 2$	$b_2 = 3$	$b_3 = 6$	$b_4 = 4$	$b_5 = 7$	$b_6 = 8$
$a_1 = 5$	2	5	2	1	3	4
$a_2 = 10$	5	3	1	2	4	3
$a_3 = 15$	4	2	5	3	8	3

Nii on näiteks toodangu ühe ühiku (s. t. 1000 tonni paneelide) veo maksumus 1. tehasest 1. ehitusrajooni 2 väärtusühikut (näiteks 2000 rbl.), 1. tehasest 2. ehitusrajooni aga 5 väärtusühikut jne.

Tähistades i-ndast tehasest ($i = 1, 2, 3$) j-ndasse ehitusrajooni ($j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) veetavate paneelide koguse (tuh. tonnides) x_{ij} abil, võib optimaalse transpordiplaani leidmise ülesande sõnastada nii: leida mittenegatiivsed suurused x_{ij} ($i = 1, 2, 3; j = 1, 2, \ldots, 6$), mis rahuldavad tingimusi

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} &= 5, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} &= 10, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} + x_{36} &= 15 \end{aligned} \tag{1}$$

(tehastest veetakse välja kogu toodang),

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 2, \quad x_{12} + x_{22} + x_{32} = 3, \quad x_{13} + x_{23} + x_{33} = 6, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 4, \quad x_{15} + x_{25} + x_{35} = 7, \quad x_{16} + x_{26} + x_{36} = 8 \end{aligned} \tag{2}$$

(tarbijate nõudmised rahuldatakse) ja minimiseerivad transpordi kogukulud

$$\begin{aligned} &2x_{11} + 5x_{12} + 2x_{13} + 1x_{14} + 3x_{15} + 4x_{16} + \\ &+ 5x_{21} + 3x_{22} + 1x_{23} + 2x_{24} + 4x_{25} + 3x_{26} + \\ &+ 4x_{31} + 2x_{32} + 5x_{33} + 3x_{34} + 8x_{35} + 3x_{36}. \end{aligned} \tag{3}$$

Selle ülesande sõnastusest nähtub, et olulised on ainult toodangu mahud tehastes, tarbijate nõudmised ja toodangu ühe ühiku veo maksumused. Oluline pole aga näiteks kauba liik (paneelid, tellised vms.), ühikute konkreetne suurus, samuti see, kas tootjad on tehased, kolhoosid või veetakse kaup välja hoopis ladudest.

Seega võime transpordiülesande üldkujul sõnastada järgmiselt:

Olgu antud m tootjat, kes valmistavad teatavat kaupa vastavalt $a_1, a_2, \ldots, a_m$ ühikut, ja n tarbijat, kes vajavad kaupa vastavalt $b_1, b_2, \ldots, b_n$ ühikut. Seejuures olgu toodetava kauba hulk võrdne koguvajadusega, s. t.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j. \tag{4}$$

Peale selle olgu antud veel kauba ühe ühiku transpordikulud i-ndalt tootjalt j-nda tarbijani — suurused c_{ij} ($i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$). Tähistades i-ndalt tootjalt j-ndale tarbijale veetava kauba hulga x_{ij} abil, võib ülesande sõnastada nii: leida mittenegatiivsed suurused x_{ij} ($i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$), mis rahuldavad tingimusi

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{5}$$

(i-ndalt tootjalt veetakse välja kogu kaup),

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{6}$$

(j-nda tarbija vajadus rahuldatakse) ja mis minimiseerivad transpordi kogukulu

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}. \tag{7}$$

Parema ülevaate saamiseks paigutame algandmed (ja samuti otsitavad) tabelisse 2.

Tabel 2

i	j			
	b_1	b_2	...	b_n
a_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1n} x_{1n}
a_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	...	c_{2n} x_{2n}
...	...	...	...	...
a_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	...	c_{mn} x_{mn}

Suuruste x_{ij} summa tabeli 2 igas reas peab võrduma vastava suurusega a_i (tingimus (5)), nende suuruste summa igas veerus peab aga olema b_j (tingimus (6)). Transpordi kogukulu (7) on võrdne samas ruudus asuvate suuruste c_{ij} ja x_{ij} korrutiste summaga.

Märgime, et transpordiülesanne on tegelikult üldise lineaarse planeerimisülesande erijuhtum. Seega on seda ülesannet võimalik lahendada lineaarse planeerimisülesande jaoks väljatöötatud lahendusmeetoditega. Kuid selline lahendusviis pole otstarbekohane, sest transpordiülesande iseärasusi arvestades on selle ülesande lahendamiseks võimalik anda lihtsamaid meetodeid.

Esitamegi siin transpordiülesande ühe lihtsaima lahendusmeetodi — nn. o p t i m i s e e r i v a t e l i i d e t a v a t e m e e t o d i [1]. Lahendusmeetod tugineb järgmisele teoreemile.

T e o r e e m. *Kui mingis reas või veerus asuvatele kordajatele c_{ij} liita üks ja sama konstant, siis see ei mõjusta plaani optimaalsust.*

Seega, kui plaan x_{ij} on optimaalne esialgsete kordajate c_{ij} suhtes, siis on ta optimaalne ka pärast konstantide liitmist (s. t. kordajate $c_{ij}+\lambda_i$ või $c_{ij}+\mu_j$ suhtes), ja ümberpöördult.

Esitatud teoreemil on päris konkreetne tähendus: optimaalse transpordiplaani koostamisel võib alati arvestamata jätta mingi tootja või tarbija kõigi kaubaveoste puhul esinevad konstantsed kulutused (näiteks kulutused meretranspordile, kui tarbija asub saarel ja kõik tootjad asuvad mandril, vms.).

Anname teoreemi tõestuse juhul, kui konstandid on liidetud ridade kaupa. Olgu plaan x_{ij} optimaalne kordajate $c_{ij}+\lambda_i$ suhtes. See tähendab, et ühegi teise plaani y_{ij} korral ei ole transpordikulu väiksem transpordikulust plaani x_{ij} puhul:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(c_{ij}+\lambda_i)x_{ij}\leqslant\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(c_{ij}+\lambda_i)y_{ij}.$$

Avades sulud saame

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i x_{ij}\leqslant\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}y_{ij}+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i y_{ij}. \tag{8}$$

Näitame, et summad

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i x_{ij} \tag{9}$$

ja

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i y_{ij} \tag{10}$$

on võrdsed. Tõepoolest, x_{ij} ja y_{ij} on plaanid ja peavad seega rahuldama võrdust (5). Siis saame aga kirjutada

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i x_{ij}=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i a_i$$

ja analoogiliselt

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i y_{ij}=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\sum_{j=1}^{n}y_{ij}=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i a_i,$$

millega on näidatud summade (9) ja (10) võrdsus.

Et plaan x_{ij} on optimaalne ka esialgsete kordajate c_{ij} suhtes, näeme siis, kui lahutame võrratuse (8) mõlemast poolest vastavalt võrdsed suurused (9) ja (10) ning saame võrratuse

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \leqslant \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}y_{ij}.$$

Teoreemi teiste juhtude tõestus on analoogiline esitatuga.

Transpordiülesande lahendamisel toimime nüüd järgmiselt. Rahuldame (formaalselt) iga tarbija vajaduse temale transpordikulude seisukohalt kõige soodsama tootja toodangust. Sellejuures osutuvad mõned tootjad ülekoormatuiks (ülekoormatuse suuruse paneme kirja miinusmärgiga), mõned tootjad alakoormatuiks (alakoormatuse suuruse paneme kirja plussmärgiga). Kui mingi tootja toodangu hulga ja temalt väljaveetava kauba hulga vahe on null, siis tuleb omistada kindel märk ka sellele vahele 0. Nimelt omistame nullile miinusmärgi siis, kui leidub ülekoormatud rida (tootja), millest saab mingi kaubakoguse sellesse «nullilisse» ritta üle kanda. Kaubakoguse ülekandmiseks peavad aga vastavates ruutudes asuvad kordajad c_{ij} olema võrdsed. Nii näiteks tabelis

			üle- või alakoormatus
	$c_{kj}=7$ 3		-2
...	...	...	
	$c_{lj}=7$		0

tuleb rea l koormatuse näitaja 0 võtta miinusmärgiga. Kõikidel teistel juhtudel omistame nullile plussmärgi.

Edasi vähendame ridade (tootjate) ülekoormatust sel teel, et suurendame kõikides ülekoormatud ridades kordajaid c_{ij} teatava konstandi võrra. Vastavaks konstandiks tuleb valida vähim arv, mis annab võimaluse kaubakoguse ülekandmiseks ülekoormatud tootjalt (realt) alakoormatud tootjale (reale). Meenutame, et kaubakoguse ülekandmine on võimalik ainult sel juhul, kui vastavates ruutudes asuvad kordajad c_{ij} on võrdsed. Näiteks juhul

			üle- või alakoormatus
	$c_{kj}=12$ 5		-3
...	...	...	
	$c_{lj}=12$		$+10$

võib kaubakoguse 5 kanda k-ndalt tootjalt üle l-ndale tootjale, millega ühtlasi kõrvaldatakse k-nda tootja ülekoormatus.

Lõpliku arvu sammude järel saame selliselt kõikide tootjate üle- ja alakoormatuse kaotada, kusjuures tekib lõppkordajate $c_{ij}+\lambda_i$ suhtes optimaalne plaan (positiivsed kaubakogused esinevad alati iga veeru kõige väiksemate kordajate c_{ij} juures). Teoreemi põhjal võime väita, et see plaan on optimaalne ka lähtekordajate c_{ij} suhtes. Transpordi kogukulu arvutamisel tuleb kasutada muidugi lähtekordajaid c_{ij}.

Demonstreerime esitatud meetodit nüüd paari näite varal.

Lahendame eespool esitatud transpordiülesande. Rahuldades (formaalselt) kõik tarbijad nendele kõige soodsamate tootjate toodanguga, saame tabelis 3 toodud «transpordiplaani» (kui $x_{ij}=0$, siis seda me tabelisse ei kirjuta).

Tabel 3

	$b_1=2$	$b_2=3$	$b_3=6$	$b_4=4$	$b_5=7$	$b_6=8$	üle- või alakoormatus
$a_1=5$	2 2	5	2	1 4	3 7	4	-8
$a_2=10$	5	3	1 6	2	4	3 4	$+0$
$a_3=15$	4	2 3	5	3	8	3 4	$+8$
	2	—	—	1	1	—	

Selles «plaanis» esineb ülekoormatud tootja ja seega pole ta tegelikult realiseeritav. Ülekoormatuse kõrvaldamiseks peame suurendama esimese tootja (rea) kordajaid c_{1j}. Et esimeses reas on positiivsed kaubakogused ainult 1., 4. ja 5. veerus, siis saab ülekoormatust kõrvaldada (või vähendada) ainult nendes veergudes olevate kaubakoguste ülekandmise teel. Leiame nende veergude jaoks vähimad arvud, mis võimaldavad kaubakoguse ülekandmist (s. t. mis tekitavad kordajate võrdsuse vastavates veergudes) ülekoormatud reast alakoormatud 2. või 3. ritta. Need arvud on toodud tabelis 3 vastavate veergude all. Minimaalne nendest (s. t. 1) ongi see konstant, mis tuleb liita 1. rea kordajatele c_{1j}. Pärast konstandi 1 liitmist esimese rea kordajatele ja kaubakoguste osalist ülekandmist saame järgmise tabeli 4. Märgime, et ülekandmist võime teostada mitmel viisil, mis aga põhimõtteliselt ei mõjusta lõpptulemust.

Tabel 4

	$b_1=2$	$b_2=3$	$b_3=6$	$b_4=4$	$b_5=7$	$b_6=8$	
$a_1=5$	3 2	6	3	2	4 3	5	-0
$a_2=10$	5	3	1 6	2 4	4 4	3	-4
$a_3=15$	4	2 3	5	3	8	3 8	$+4$
	1	—	4	1	4	—	

Tabelis 4 on ülekoormatud ridu küll juba kaks, kuid summaarne ülekoormatus on vähenenud. Leiame jälle minimaalsed liidetavad veergude jaoks (toodud tabeli 4 all). Minimaalne nendest arvudest on 1, mille liidame 1. ja 2. rea kordajatele c'_{ij}. Pärast konstandi 1 liitmist ja kaubakoguste ülekandmist saame tabeli 5.

Tabel 5

	$b_1 = 2$	$b_2 = 3$	$b_3 = 6$	$b_4 = 4$	$b_5 = 7$	$b_6 = 8$	
$a_1 = 5$	4 2	7	4	3	5 3	6	+0
$a_2 = 10$	6	4	2 6	3	5 4	4	+0
$a_3 = 15$	4	2 3	5	3 4	8	3 8	+0

Selles tabelis pole ei üle- ega alakoormatud tootjaid (ridu). Igas veerus on positiivsed kaubakogused kõige väiksemate kordajate c''_{ij} juures. Seega on tegemist plaaniga, mis tabeli 5 kordajate c''_{ij} suhtes on optimaalne. Toodud teoreemi põhjal on see plaan siis optimaalne ka esialgsete kordajate suhtes. Transpordi kogukulud tulevad selle plaani puhul 77 ühikut.

Lahendame nüüd teise transpordiülesande, mille algandmed on esitatud tabelis 6.

Tabel 6

	$b_1 = 26$	$b_2 = 12$	$b_3 = 22$	$b_4 = 30$	$b_5 = 20$
$a_1 = 33$	15	7	3	5	19
$a_2 = 25$	17	3	14	20	13
$a_3 = 40$	13	6	4	17	11
$a_4 = 38$	11	4	8	12	7

Et siin kogutoodang (136 ühikut) ületab koguvajaduse (110 ühikut) 26 ühiku võrra, tuleb juurde võtta nn. f i k t i i v n e t a r b i j a, mis «vajab» seda kaupa just 26 ühikut. Selle võttega taandame ülesande eespool vaadeldud kujule, mille puhul kehtis võrdus (4). Kordajad c_{ij} võtame fiktiivse tarbija veerus kõik võrdseks nulliga. Et ülesande lahendus on eelmisega analoogiline, siis toome selle ilma seletusteta (tabelid 7, 8 ja 9). Lahendamisel kasutame asjaolu, et kui ühes veerus on minimaalseid kordajaid mitu, siis võib kaubakoguse nende ruutude vahel jaotada suvalisel viisil.

Tabel 7

	$b_1 = 26$	$b_2 = 12$	$b_3 = 22$	$b_4 = 30$	$b_5 = 20$	$b_6 = 26$ (fiktiivne)	
$a_1 = 33$	15	7	3 22	5 30	19	0	—19
$a_2 = 25$	17	3 12	14	20	13	0	+13
$a_3 = 40$	13	6	4	17	11	0 26	+14
$a_4 = 38$	11 26	4	8	12	7 20	0	—8
	2	—	1	12	4	—	

min (2, 1, 12, 4) = 1

Tabel 8

	$b_1 = 26$	$b_2 = 12$	$b_3 = 22$	$b_4 = 30$	$b_5 = 20$	$b_6 = 26$	
$a_1 = 33$	16	8	4 3	6 30	20	1	+0
$a_2 = 25$	17	3 12	14	20	13	0 5	+8
$a_3 = 40$	13	6	4 19	17	11	0 21	+0
$a_4 = 38$	12 26	5	9	13	8 20	1	—8
	1	—	—	—	3	—	

min (1, 3) = 1

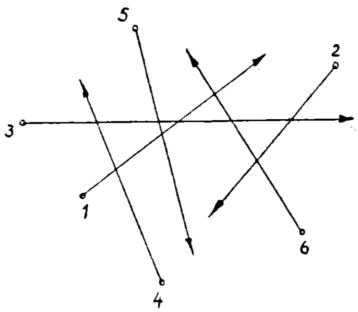
Tabel 9

	$b_1 = 26$	$b_2 = 12$	$b_3 = 22$	$b_4 = 30$	$b_5 = 20$	$b_6 = 26$	
$a_1 = 33$	16	8	4 3	6 30	20	1	+0
$a_2 = 25$	17	3 12	14	20	13	0 13	+0
$a_3 = 40$	13 8	6	4 19	17	11	0 13	+0
$a_4 = 38$	13 18	6	10	14	9 20	2	+0

Tabel 9 annab meile optimaalse plaani. Transpordi kogukulud tulevad selle plaani puhul 713 ühikut.

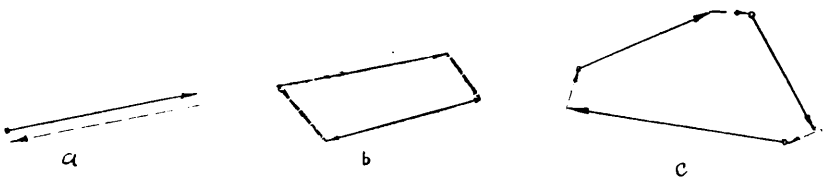
Teise probleemina vaatleme nüüd kaubaveo marsruutide määramise ülesannet, mille sõnastame jälle konkreetse näite varal. Olgu näiteks vaja vedada kaupu kuuel liinil (igal liinil mingis kindlas suunas), kusjuures veetavad kaubakogused olgu vastavalt 300, 400, 500, 600, 400 ja 300 koormat. Eeldame, et kaupade vedamisel kasutame ühetüübilisi veokeid, mis võivad vedada kõiki neid kaupu. Graafiliselt võib liine kujutada noolte abil (vt. joonis 1).

Kuidas on kõige mõistlikum neid vedusid korraldad? Päris kindlasti pole kaubaveo marsruute mitte alati otstarbekohane koostada selliselt, et mingil liinil koorma kohale vedanud veok samal liinil tühjalt tagasi sõidab (vt. joonis 2 a, sõit koormaga on kujutatud pideva joonega, tühisõit — punktiiriga). Sageli osutub võimalikuks tagasiteel tühisõitu oluliselt vähendada (vt. joonised 2 b ja 2 c).



Joonis 1.

Seda arvestades saamegi püstitada ülesande: koostada kaubaveo marsruudid nii, et tühisõitude kogupikkus oleks minimaalne. Selleks peame teadma teepikkusi iga liini lõpust iga liini algusesse. Olgu need andmed sellised, nagu on toodud tabelis 10. Selles tabelis tähendab näiteks 1. rea ja 2. veeru



Joonis 2.

lõikekohas olev arv 2, et teepikkus 1. liini lõpust 2. liini algusesse on 2 km.

Tabel 10

	1.	2.	3.	4.	5.	6.
1. liin	10	2	14	15	8	10
2. liin	4	8	10	3	12	4
3. liin	12	4	15	10	12	4
4. liin	5	10	6	10	3	12
5. liin	6	11	10	3	10	4
6. liin	7	6	9	12	11	11

Soovitud marsruutide leidmiseks tuleb meil lahendada eespool käsitletud klassikaline transpordiülesanne, kus kordajateks c_{ij} on tabelis 10 toodud arvud. «Tarbijateks» on liinid, mis «vajavad», et nendel veetaks vastavalt kaubakogused 300, 400 jne. koormat. Seega peavad ka veokid neid liine läbima 300, 400 jne. arv kordi. «Tootjateks» on siin samad liinid, mille lõpust veokid uuesti suunduvad (kas samale või teistele) liinidele. Seega tuleb transpordiülesande algandmed a_i ja b_j võtta vastavalt võrdsed ülaltoodud kaubakogustega liinidel, s. t. $a_1 = b_1 = 300$, $a_2 = b_2 = 400$, $a_3 = b_3 = 500$, $a_4 = b_4 = 600$, $a_5 = b_5 = 400$, $a_6 = b_6 = 300$. Saadud transpordiülesande optimaalne lahend on toodud tabelis 11.

Tabel 11

	$b_1 = 300$	$b_2 = 400$	$b_3 = 500$	$b_4 = 600$	$b_5 = 400$	$b_6 = 300$
$a_1 = 300$	10	2 300	14	15	8	10
$a_2 = 400$	4 300	8	10	3 100	12	4
$a_3 = 500$	12	4 100	15	10 100	12	4 300
$a_4 = 600$	5	10	6 200	10	3 400	12
$a_5 = 400$	6	11	10	3 400	10	4
$a_6 = 300$	7	6	9 300	12	11	11

Marsruutide määramine transpordiülesande lahendi (tabel 11) põhjal toimub põhimõttel, et marsruut peab moodustama kinnise teekonna ja et ühe marsruudi liinidel tuleb arvesse võtta võrdsed kaubakogused. Kõige lihtsama marsruudi saame siis, kui lahendil on peadiagonaalil nullist erinev kaubakogus. See annab meile üheliinilise marsruudi (vt. joonis 2 a). Järgmine lihtsam juhtum esineb siis, kui lahendil on nullist erinevad kaubakogused peadiagonaaliga sümmeetrilistes ruutudes. Sel korral saame kaheliinilise marsruudi (vt. joonis 2 b). Niisuguseid marsruute sisaldab ka antud lahend:

1. marsruut 1. → 2. → 1. → ... (300 koormat),
2. marsruut 3. → 6. → 3. → ... (300 koormat),
3. marsruut 4. → 5. → 4. → ... (400 koormat),
4. marsruut 3. → 4. → 3. → ... (100 koormat).

Viimase marsruudi määrame tingimusest, et marsruut peab moodustama kinnise teekonna:

5. marsruut 2. → 4. → 3. → 2. ... (100 koormat).

Veokite määramisel marsruutidele tuleb arvestada veel marsruutide läbimise aegu. Olgu need näiteks järgmised: 1. ja 3. marsruudil 50 min., 2. ja 4. marsruudil 80 min. ja 5. marsruudil 90 min.

Tähistame marsruutidele 1.—5. määratavate veokite arvud vastavalt x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 ning transpordi koguaja t abil. Siis saame kirjutada, et 1. marsruudil veetakse aja t jooksul 1. ja 2. liinil kaupa $\frac{tx_1}{50}$ koormat. Analoogilised avaldised saame ka teiste marsruutide ja liinide jaoks. Esitame need tabelis 12.

Tabel 12

	1. liin	2. liin	3. liin	4. liin	5. liin	6. liin
1. marsruut	$\frac{tx_1}{50}$	$\frac{tx_1}{50}$				
2. marsruut			$\frac{tx_2}{80}$			$\frac{tx_2}{80}$
3. marsruut				$\frac{tx_3}{50}$	$\frac{tx_3}{50}$	
4. marsruut			$\frac{tx_4}{80}$	$\frac{tx_4}{80}$		
5. marsruut		$\frac{tx_5}{90}$	$\frac{tx_5}{90}$	$\frac{tx_5}{90}$		
kokku veetakse liinidel	300	400	500	600	400	300

Tabelist 12 lähtudes võime leida ka tundmatud tx_i. Need tulevad järgmised

$$tx_1 = 15\,000, \quad tx_2 = 24\,000, \quad tx_3 = 20\,000, \quad tx_4 = 8000, \quad tx_5 = 9000. \tag{11}$$

Liites võrdused (11), saame

$$t(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) = 76\,000. \tag{12}$$

Kui oletada, et veokite koguarv on näiteks 100 (s. t. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 100$), siis saame võrdusest (12), et $t = 760$ (min), ja edasi võrduste (11) põhjal, et $x_1 \approx 19{,}7$, $x_2 \approx 31{,}6$, $x_3 \approx 26{,}3$, $x_4 \approx 10{,}5$, $x_5 \approx 11{,}9$ ehk, ümardades lähema täisarvuni, $x_1 \approx 20$, $x_2 \approx 32$, $x_3 \approx 26$, $x_4 \approx 10$, $x_5 \approx 12$. Sellega ongi marsruutide leidmise ülesanne lahendatud.

Kirjandus

1. Лурье, А. Л. Методы достижения наименьшего пробега грузов при составления перевозочных схем. — Применение математики в экономических исследованиях. М., 1959, lk. 354—389.
2. Геронимус, Б. и др. Применение математического метода в планировании перевозок. — «Автомобильный транспорт», 1961, № 7, lk. 30—34.

PYTHAGORASE TEOREEMIST[1]

H. Espenberg

Matemaatikas on saanud traditsiooniks nimetada teoreeme nende avastaja nime järgi ning võiks arvata, et ka Pythagorase teoreemi nimetus on seotud selle traditsiooniga. Ent tänapäeval on kõik matemaatika ajaloo uurijad veendunud, et Pythagorase teoreemi ei avastanud kreeka matemaatik ja filosoof P y t h a g o r a s, kes elas VI sajandil e. m. a., vaid seda tunti varem. Osa ajaloolasi arvab küll, et Pythagoras andis esimesena selle teoreemi korrektse tõestuse, kuid teised eitavad sedagi.

Arheoloogilistel väljakaevamistel leitud kiilkirjaga savitahvlid tõendavad, et Babüloonias tunti Pythagorase teoreemi juba 2000 aastat e. m. a. Olemasolevail andmeil tunti seda teoreemi (vähemalt mõnedel erijuhtudel) enne Pythagorast veel Hiinas, Egiptuses ning arvatavasti ka Indias.

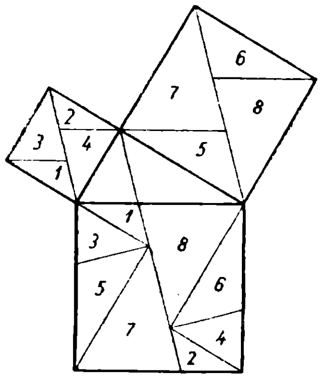
Peatume alljärgnevalt Pythagorase teoreemi mitmesugustel tõestustel. Kuna Pythagorase teoreem väidab, et «täisnurkse kolmnurga hüpotenuusile ehitatud ruudu pindala võrdub kaatetitele ehitatud ruutude pindalade summaga», siis paljudes tõestustes rakendatakse järgmist meetodit: nii hüpotenuusile kui ka kaatetitele ehitatud ruudud jaotatakse pindvõrdseteks osadeks. Sellele meetodile tuginevaid tõestusi nimetatakse a d i t i i v s e t e k s tõestusteks. Vaatleme mõningaid 19. sajandi matemaatikute poolt antud tõestusi.

Alustame N i e l s e n i tõestusega. Ta kasutab joonisel 1 esitatud jaotust. Samade numbritega tähistatud kolmnurkade pindvõrdsuse tõestamise jätame lugejale.

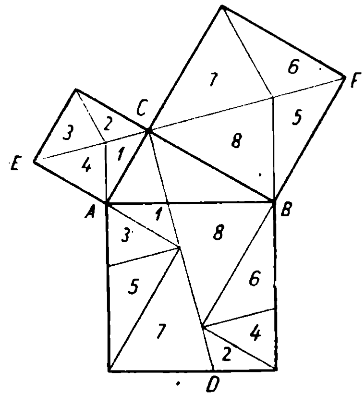
---

[1] Toimetusele saadetud kirjas soovitasid Tapa I Keskkooli matemaatikud muuhulgas avaldada Pythagorase teoreemi mitmesuguseid tõestusi, mida tavalistes õpikutes ei leidu. Käesolev artikkel ongi vastuseks sellele soovitusele. Et Tapa matemaatikahuvilised soovitasid ka matemaatiliste sofismide avaldamist, siis juhime nende tähelepanu ühtlasi J. M. G a i d u k i artiklile käesolevas kogumikus lk. 20—23.

Õige vähe erineb eelnevast E p s t e i n i tõestus, mis baseerub joonisel 2 toodud jaotusel.



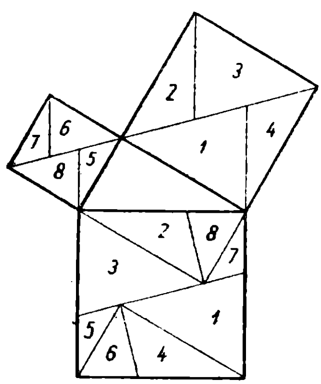
Joonis 1.



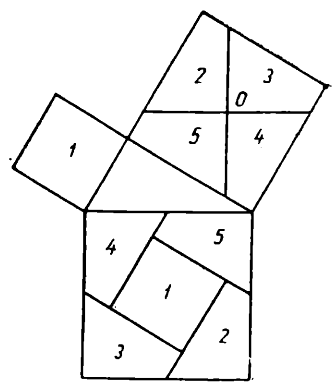
Joonis 2.

Joonisel 3 on antud jaotus, mida Pythagorase teoreemi tõestamiseks kasutas B ö t t c h e r.

Soovitame lugejal tõestada Pythagorase teoreem ka joonistel 4—6 näidatud jaotuste põhjal. Need jaotused on antud vastavalt P e r i g a l i, a n - N a i r i z i (10. sajand) ning G u t h e i l i poolt.

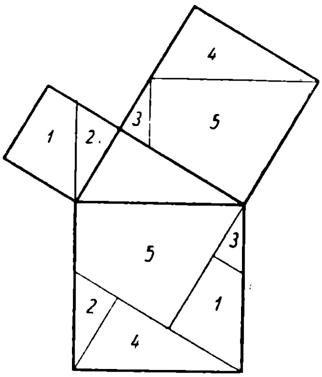


Joonis 3.

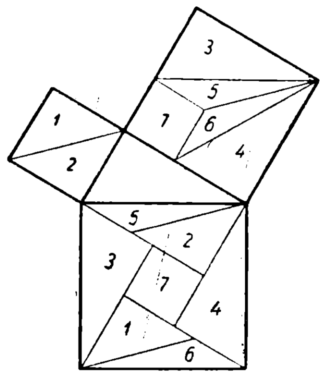


Joonis 4.

Vaadeldes kirjeldatud tõestusi näeme, et Nielseni, Epsteini ja Böttcheri poolt antud tõestustes jaotatakse hüpotenuusile ehitatud ruut kaheksaks kolmnurgaks. Perigal kasutab oma tõestuses viit nelinurka (s. o. kümmet kolmnurka), an-Nairizi kolme kolmnurka ja kahte nelinurka (s. o. seitset kolmnurka) ning Gutheil kuut

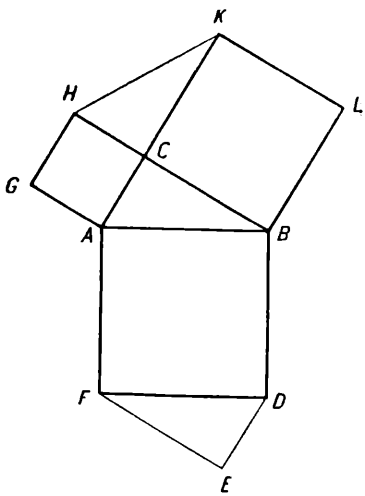


Joonis 5.



Joonis 6.

kolmnurka ning ühte nelinurka (s. o. kaheksat kolmnurka). Hinnates tõestuskäigu lihtsust kasutatavate kolmnurkade arvu järgi, tuleb kõige lihtsamaks lugeda an-Nairizi tõestust. Seoses sellega kerkib küsimus, kas ei saaks Pythagorase teoreemi aditiivse tõestuse puhul piirduda vähem kui seitsme kolmnurga kasutamisega. Sellele küsimusele andis eitava vastuse B r a n d e s, kes tõestas, et aditiivse tõestuse puhul tuleb hüpotenuusile ehitatud ruut jaotada vähemalt seitsmeks kolmnurgaks.



Joonis 7.

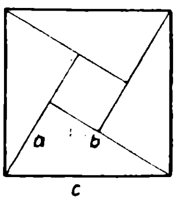
Sageli kasutatakse Pythagorase teoreemi tõestamiseks nn. täiendusmeetodit. Selgitame seda meetodit järgmise näite varal. Ehitame täisnurkse kolmnurga *ABC* külgedele ruudud ning täiendame saadud joonist lähtekolmnurgaga *ABC* võrdsete kolmnurkadega *CHK* ja *EFD* (joon. 7). Tõestame, et kuusnurgad *ABLKHG* ja *AFEDBC* on pindvõrdsed. Selleks näitame esmalt, et lõigud *GL* ja *CE* jaotavad kummagi kuusnurga kaheks pindvõrdseks osaks. Seejärel näitame, et nelinurk *AFEC* pärast pööramist 90° võrra ühtib nelinurgaga $ABLG$. Lahutades nüüd saadud pindvõrdsetest kuusnurkadest vastavalt võrdsed kolmnurgad ABC ja CKH ning ABC ja FED, jõuamegi Pythagorase teoreemi väiteni.

Terve rea huvitavaid ja lihtsaid Pythagorase teoreemi tõestusi saab anda, kui rakendada tõestuskäigus kõrvuti geomeetriliste meetoditega ka algebralisi meetodeid. Esitame kõigepealt ajaloolist huvi pakkuva tõestuse, mille andis india matemaatik Bhâskara (1174—1185). Joonisel 8 toodud nelja täisnurkse kolmnurga pindalade summa on $4 \cdot \frac{ab}{2}$ ning väikese ruudu pindala on $(b-a)^2$. Seega

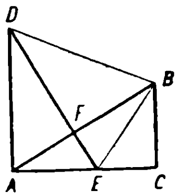
$$c^2 = 4 \cdot \frac{ab}{2} + (b-a)^2,$$

millest

$$c^2 = a^2 + b^2.$$



Joonis 8.



Joonis 9.

Paigutades kaks võrdset täisnurkset kolmnurka ABC ja DEA joonisel 9 näidatud viisil ning tähistades $BC = AE = a$, $AC = AD = b$ ja $AB = DE = c$, saame trapetsi $ACBD$ pindalaks

$$\frac{a+b}{2} \cdot b.$$

Teiselt poolt (kuna $DE \perp AB$ ning $EC = b - a$) saame, et nelinurga $AEBD$ pindala on $\frac{1}{2} c^2$ ning kolmnurga BEC pindala on

$$\frac{1}{2} (b-a) a.$$

Järelikult

$$\frac{a+b}{2} \cdot b = \frac{1}{2} c^2 + \frac{1}{2} (b-a) a,$$

millest

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Sellise tõestuse Pythagorase teoreemile esitas Waldheim.

Järgneva tõestuse, mis tugineb joonisele 10, andis H e r f i e l d aastal 1882. Joonisel 10 tekkinud kujundi pindala võime leida trapetsi pindalana või kolme täisnurkse kolmnurga pindalade summana. Seega

$$\frac{a+b}{2}\cdot(a+b)=\frac{ab}{2}+\frac{c^2}{2}+\frac{ab}{2},$$

millest

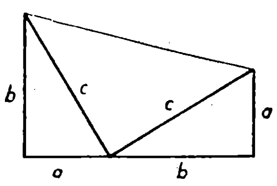
$$a^2+b^2=c^2.$$

Toome nüüd inglise matemaatiku H a w k i n s i poolt 1909. aastal esitatud tõestuse. Paigutame võrdsed täisnurksed kolmnurgad ABC ja DEC joonisel 11 näidatud viisil. Arvutades nelinurga $AEBD$ pindala S kolmnurkade BEC ja ADC pindalade summana, saame

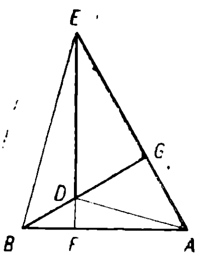
$$S=\frac{BC\cdot CE}{2}+\frac{DC\cdot CA}{2}=\frac{b^2}{2}+\frac{a^2}{2}.$$

Leides pindala S kolmnurkade BED ja ADE pindalade summana, saame

$$S=\frac{ED\cdot BF}{2}+\frac{ED\cdot FA}{2}=\frac{ED(BF+FA)}{2}=\frac{ED\cdot BA}{2}=\frac{c^2}{2}.$$



Joonis 10.



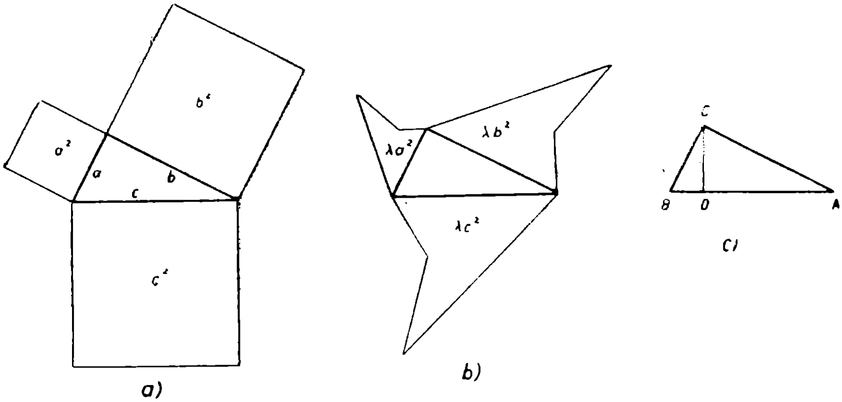
Joonis 11.

Nende tulemuste võrrutamisel saamegi

$$a^2+b^2=c^2.$$

Lõpuks veel üks tõestus, mille tegelikult esitas juba E u k l e i d e s (vt. Elemendid VI, teoreem 31).

Teatavasti sarnaste hulknurkade pindalad suhtuvad nagu nende vastavate külgede ruudud. Meil on tarvis tõestada, et täisnurkse kolmnurga hüpotenuusile ehitatud ruudu pindala võrdub kaatetitele ehitatud ruutude pindalade summaga. Siis peab aga sama vahekord kehtima ka kolmnurga külgedele ehitatud i g a s u g u s t e teiste sarnaste hulknurkade korral (vt. joonis 12 b), sest võrdused $c^2 = a^2 + b^2$ ja $\lambda c^2 = \lambda a^2 + \lambda b^2$ on samaväärsed. Jooniselt



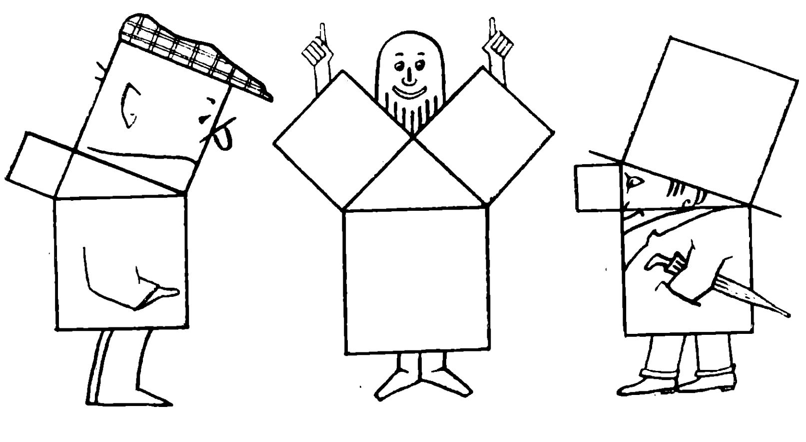
Joonis 12.

12 c aga näeme, et vähemalt ühel lihtsal erijuhul selle valemi kehtivus on ilmne:

$$S_{ABC} = S_{CDB} + S_{ADC}.$$

Järelikult on valem kehtiv ka ruutude korral (joonis 12 a), s. t. juhul $\lambda = 1$.

* * *



MATEMAATIKA ÕPETAMISE REFORMIMISTAOTLUSI AMEERIKA ÜHENDRIIKIDES

O. Prinits

Matemaatika areng, eriti tema rakenduslikes suundades, on kaasajal põhjustanud matemaatika autoriteedi tohutu kasvamise. Sellega seletubki fakt, et pea kõigis riikides on päevakorras matemaatika õpetamise ümberkorraldamine.

Teatud määral on praegused reformitaotlused jätkuks käesoleva sajandi algul laialt levinud soovitustele muuta koolimatemaatika kaasaegsemaks. Kui siis olid tulipunktis küsimused funktsionaalse sõltuvuse, tuletise ja integraali mõiste käsitlemise võimalustest keskkoolis, siis nüüd on kõne all peamiselt moodsa algebra ja statistika elementide koolimatemaatikasse paigutamine. Rahvusvahelistel matemaatikute kongressidel on rõhutatud matemaatika diferentseeritud õpetamise vajadust. Ei peeta õigeks, et kõigile tuleb matemaatikat õpetada samade programmide järgi. Ühes suunas nõutakse enam rakendusliku külje rõhutamist ja teises rohkem aine struktuurile, tema abstraktsele esitusele toetumist.

Päevakorras on väga teravalt ka matemaatika õpetajate ettevalmistamine, sest tööstus on neelanud mitte ainult suure osa viimastel aastatel kõrgema kooli lõpetanud matemaatikutest, vaid ka varem õpetajana töötanud inimesi. Sellest tingituna tuntakse aga paljudes riikides suurt puudust matemaatika õpetajaist.

Järgnevalt peatume lühidalt mõnedel vooludel, mis iseloomustavad matemaatika õpetamise reformimistaotlusi tänapäeval Ameerika Ühendriikides. Samuti lisame mõned näited uuenduslikust aine esitusest.

Ameerika Ühendriikides on matemaatika õpetamise reformitaotlejad grupeerunud kõrgemate õppeasutuste juurde. Peamisteks uurimisobjektideks on kujunenud matemaatilise loogika, tõenäosusteooria ja statistika, hulgateooria elementide ning arvutusmasinate töötamise printsiipide õpetamine.

Esimene nn. «uue matemaatika» projekt pärineb Illinoisi ülikoolist, kus sellealast tööd alustas rühm matemaatikuid (University of Illinois Curriculum Study in Mathematics) dr. M a x B e -

bermani juhtimisel 1952. aastal. Peamine tähelepanu suunati seal vanemates klassides käsitletavale materjalile. Nii töötatigi esmajärjekorras välja õpikud 9.—11. klassile. Neid katsetas umbes 200 õpetajat 25 linnas. Katsetamisele eelnes õpetajate põhjalik instrueerimine Illinoisi ülikoolis. Õpik 12. klassile lisandus 1963. aastal. Need raamatud sisaldavad eespool loetletud uusi teemasid ja, nagu ajakirja «The Mathematical Gazette» 1963. a. oktoobrikuu numbris humoorikalt väljendatakse, «takistavad vanemaid õpilaste kodutöid tegemast», sest see materjal on vanemaile uus. Uuendusi ei rõhutata aga mitte ainult materjali valikus. Ka aineesituse metoodilisele küljele on mõeldud. On rõhutatud õpilaste iseseisva töö vajadust, peetakse vajalikuks, et õpilased jõuaksid põhiprintsiipide mõistmiseni avastuste kaudu. Sealjuures astutakse mõningal määral välja Ameerikas väga levinud nn. *tell-them-and-test-them* meetodi vastu.

Teine suur ja elujõuline «uue matemaatika» propageerijate ja elluviijate rühmitus (School Mathematics Study Group) alustas tööd 1958. a. Yale'i ülikooli juures professor Edward G. Begle'i juhtimisel. See rühmitus taotles koolides matemaatika õpetamise kaasaegsemaks muutmist. Selleks peeti vajalikuks parandada kehtivaid programme, lisades sinna uut materjali koos selle käsitlemise instruktsioonidega. Samuti pandi rõhku koolimatemaatika huvitavamaks muutmise vajadusele. Begle seadis eesmärgiks teha iga õpilane matemaatika kompetentseks kasutajaks, sõltumata sellest, missuguse elukutse ta endale valib.

1958. a. töötasid Yale'i ülikoolis 40 matemaatikut ja matemaatika õpetajat välja 7. ja 8. klassi matemaatika programmi. Selles loobutakse varem nii sügavalt juurdunud kontsentrilise õpetamise printsiibist (7. ja 8. klassis käsitleti süvendatult 5. ja 6. klassi materjali), nähakse ette kursuse jätkamist ja jõutakse 8. klassis tõenäosusteooria ja statistika elementide juurde.

Seoses prof. Begle'i siirdumisega Stanfordi ülikooli juurde Kaliforniasse (1961. a.) on ka tema rühmituse töökeskus Yale'i ülikoolist sinna üle toodud.

Katseõpikud on see rühm välja töötanud juba 4.—12. klassini ja neid katsetab praegu üle 400 õpetaja 45 linnas.

Teised rühmitused, mis Ameerikas praegu töötavad, ei ole nii kaalukad nagu Bebermani ja Begle'i rühmad. Nimetada võiks veel Marylandi ülikooli juures töötava rühmituse poolt 7. ja 8. klassi jaoks välja töötatud raamatuid, mida kasutavad umbes 100 õpetajat 10 linnas, siis Bostoni kolledži matemaatika instituudi poolt välja antud 8. kl. raamatut, Ball'i õpetajate kolledži eksperimentaalprogrammi, mis hõlmab 8.—10. klassi kursust, ja Lõuna-Illinoisis väljatöötatud keskkoolimatemaatika arendamise projekti.

Ei tule muidugi arvata, et kõik ameerika matemaatikud uusi ideid koolimatemaatikas kohe pooldavad. Eriti teravalt astub «uue matemaatika» projektide vastu välja professor Morris Kline.

Esitame nüüd mõned näited ajakirjast «The Mathematics Teacher» hulgateooria elementide ja matemaatilise loogika rakendamise kohta koolimatemaatikas.

Teostatakse ruutfunktsiooni $y = x^2 - x - 6$ uurimist. Alustatakse sümboliga $\{(x, y) \mid y = x^2 - x - 6\}$; see kujutab x ja y väärtuspaaride hulka, mis rahuldavad antud võrdust. Nullkohtade hulga määramiseks tuleb leida

$$\{x \mid (x - 3) = 0\} \cup \{x \mid (x + 2) = 0\} = \{3; -2\}.$$

Positiivsuspiirkond määratakse järgmiselt:

$$\{x \mid (x - 3) > 0\} \cap \{(x \mid (x + 2) > 0\} \cup \{x \mid (x - 3) < 0\} \cap$$
$$\cap \{x \mid (x + 2) < 0\} = \{x \mid x > 3\} \cap \{x \mid x > -2\} \cup$$
$$\cup \{x \mid x < 3\} \cap \{x \mid x < -2\} = \{x \mid x > 3\} \cup \{x \mid x < -2\}.$$

Võrrandi

$$\sqrt{7x + 14} - \sqrt{2x + 6} = \sqrt{x + 4}$$

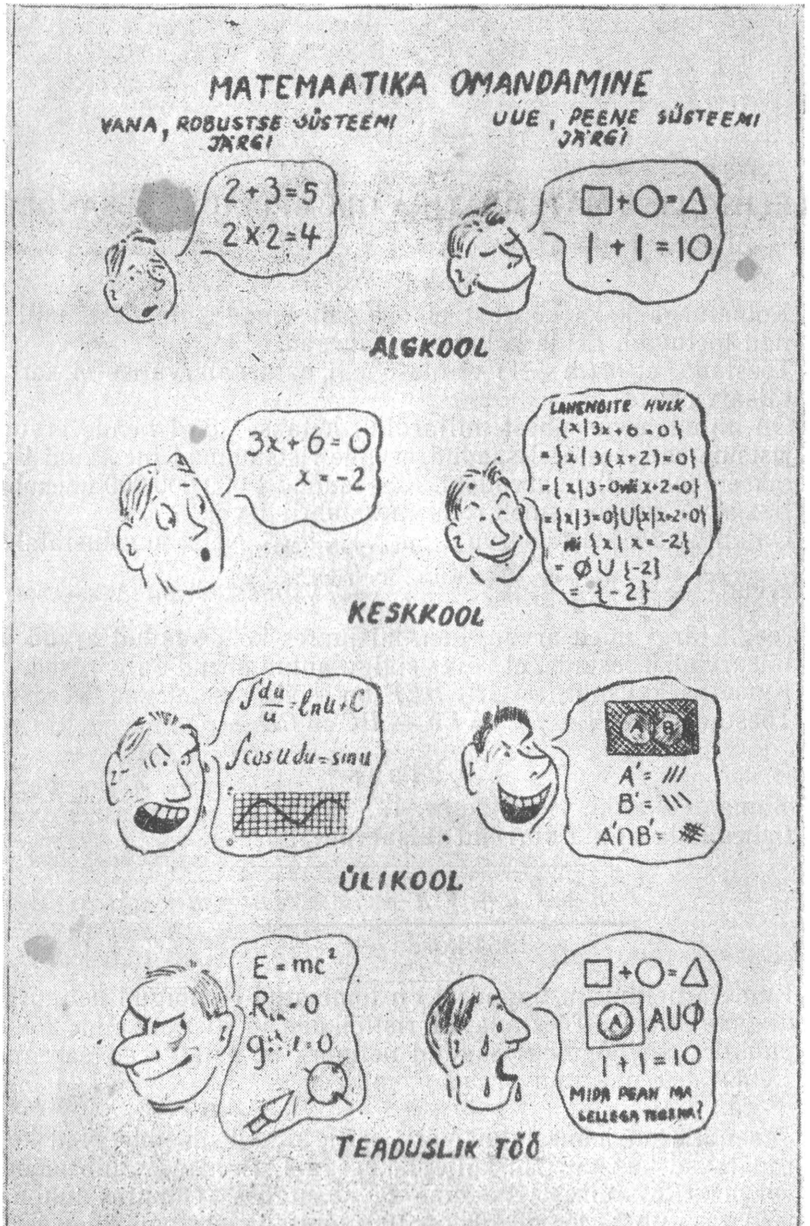
lahendamine toimub järgmiselt.

Olgu x^* lahend. Kolm arvu $\sqrt{7x^* + 14}$, $\sqrt{2x^* + 6}$ ja $\sqrt{x^* + 4}$ on reaalarvud, kui $x^* \in V_1 = \{x \mid x$ on reaalarv ja $x \geqslant -2\}$. Esimese kahe arvu vahe peab sealjuures olema mittenegatiivne. See on nii siis, kui $x^* \in V_2 = \{x \mid x$ on reaalarv ja $x \geqslant -\frac{8}{5}\}$. Lahend x^* peab järelikult kuuluma hulka V, mis on hulkade V_1 ja V_2 lõikeks, s. t. $V = V_1 \cap V_2$. Kokkuvõttes peab x^* seega kuuluma hulka V ja rahuldama antud võrrandit, seega selle võrrandi lahendite hulgaks on

$$S = \{x \mid (x \in V) \wedge (\sqrt{7x + 14} - \sqrt{2x + 6} = \sqrt{x + 4})\} =$$
$$= \{x \mid (x \in V) \wedge [(7x + 14) - 2\sqrt{7x + 14} \cdot \sqrt{2x + 6} + (2x + 6) =$$
$$= x + 4]\} = \ldots = \{x \mid (x \in V) \wedge [(x - 5) \cdot (x + 2) = 0]\} = \{5\}.$$

Toodud näited on seotud matemaatilise loogika sümbolite kasutamisega traditsiooniliste teemade juures.

Kõrvuti õpetamismeetodite moderniseerimisega ongi matemaatika koolikursuse moderniseerimine paljudes maades praegu katsetamisel. Lähemad aastad peavad näitama, missugused teemad võidavad endale eluõiguse keskkooli programmis.



«The Mathematics Teacher», XII 1959. a.

ÜLELIIDULISE MATEMAATIKA OLÜMPIAADI ÜLESANDED [1]

8. klass

1. Kolmnurga kaks kõrgust ei ole väiksemad külgedest, millele nad toetuvad. Leida kolmnurga nurgad.
2. Tõestada, et $m(m+1)$ ei ole ühegi naturaalarvulise m korral täisarvu aste.
3. On antud arvud ühest miljardini, leitakse kõigi nende arvude ristsummad, seejärel saadud arvude ristsummad jne., kuni jõutakse ühekohaliste arvudeni. Kas saadud 1 000 000 000 ühekohalise arvu hulgas esineb rohkem numbrit 1 või 2?
4. On antud $2k+1$ täisarvu $d_1, d_2, \ldots, d_{2k+1}$. Neist moodustatakse arvud $\frac{d_1+d_2}{2}, \frac{d_2+d_3}{2}, \ldots, \frac{d_{2k+1}+d_1}{2}$. Viimastest saadakse sama reegli järgi uued arvud, jne., kusjuures kõik saadud arvud on täisarvud. Tõestada, et kõik esialgu antud arvud on võrdsed.
5. Kumeras kuusnurgas $ABCDEF$ on kõik sisenurgad võrdsed. Tõestada, et $AB - DE = EF - BC = CD - FA$.

9. klass

1. Sama. mis 8. kl. ülesanne nr. 1.
2. Lahendada antud võrrand täisarvudes:

$$\underbrace{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n+\ldots+\sqrt{n}}}}}_{1964 \text{ korda}} = m.$$

3. Kumera nelinurga tippudest on tõmmatud ristlõigud nelinurga diagonaalidele. Tõestada, et ristlõikude ja diagonaalide lõikepunktide ühendamisel saadud nelinurk on esialgsega sarnane.
4. Leida kõik paaritud arvud n, millede korral $(n-1)!$ ei jagu n^2-ga.
5. Tasandile on joonestatud võrk, mille niidid moodustavad korrapärased kuusnurgad küljepikkusega 1. Putukas ronib mööda võrgu niite sõlmest A sõlme B, kasutades seejuures lühimat teed. Osutub, et tee pikkus on 100; tõestada, et poole kogu teest peab putukas roomama ühes suunas.

[1] Tõlkinud K. Velsker (vt. artikkel lk. 84).

10. klass

1. Ümber ringjoone keskpunktiga O on joonestatud nelinurk $ABCD$. Tõestada, et $\angle AOB + \angle COD = 180°$.
2. a, b ja n on fikseeritud naturaalarvud. On teada, et mis tahes naturaalarvu k $(k \neq n)$ korral $a - k^n$ jagub vahega $(b - k)$. Tõestada, et $a = b^n$.
3. Kuusnurga $ABCDEF$ kõik nurgad on võrdsed. Tõestada, et $AB - DE = EF - BC = CD - FA$. Tõestada ka vastupidi, et kuuest lõigust a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, millede pikkused rahuldavad seost $a_1 - a_4 = a_5 - a_2 = a_3 - a_6$, saab konstrueerida võrdsete nurkadega kuusnurga.
4. Avaldisse $x_1 : x_2 : \ldots : x_n$ paigutatakse sulud tehete järjekorra määramiseks. Tulemus kirjutatakse murruna

$$\frac{x_{i_1} \cdot x_{i_2} \cdot \ldots \cdot x_{i_k}}{x_{j_1} \cdot x_{j_2} \cdot \ldots \cdot x_{j_{n-k}}},$$

kusjuures iga arv $x_1, x_2, \ldots, x_n$ esineb kas murru lugejas või nimetajas. Mitu erinevat murdu võib saada, kui sulge paigutada kõikvõimalikel viisidel?
5. Kui suur on minimaalne arv mittelõikuvaid tetraeedreid, milleks saab jaotada kuubi?

11. klass

1. Leida suurim täisruut nii, et peale tema kahe viimase numbri mahatõmbamist jääks järele uuesti täisruut (seejuures eeldatakse, et üks mahatõmmatavatest arvudest pole null).
2. Trapetsi $ABCD$ kõik küljed puutuvad ringjoont. Punkt E on diagonaalide AC ja BD lõikepunkt, r_1, r_2, r_3 ja r_4 on vastavalt kolmnurkade ABE, BCE, CDE ja DAE siseringjoonte raadiused. Näidata, et $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_4}$.
3. Sama mis 10. kl. ülesanne nr. 4.
4. Sama mis 10. kl. ülesanne nr. 5.
5. On antud suvaline hulk n $(n > 2)$ paarikaupa erinevaid täisarve $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Neist moodustatakse arvud $\frac{a_1 + a_2}{2}$, $\frac{a_2 + a_3}{2}, \ldots,$ $\ldots, \frac{a_n + a_1}{2}$, millest omakorda moodustatakse samal viisil n uut arvu jne. Tõestada, et mõne sammu järel on saadud arvude hulgas ka murdarve.

VANEMAST EESTIKEELSEST MATEMAATILISEST KIRJANDUSEST

L. Võhandu

Mõni aasta tagasi tõlgiti vene keelest eesti keelde professor Jaan Depmani raamat «Jutustusi matemaatikast» [6]. Selle raamatu eestikeelse väljaande jaoks kirjutas professor Depman ühe täiendava peatüki, kirjeldades selles viit matemaatikat sisaldavat eestikeelset raamatut, mis ilmusid XVIII sajandi lõpul ja XIX sajandi esimesel poolel. Seda lisa lugedes tekkis tunne, et kindlasti oli neid matemaatikaraamatuid rohkem, ainult et prof. Depmanil ei olnud oma raamatu populaarteaduslikust iseloomust tingituna võimalik nende juures peatuda. Vastavate otsingute läbiviimine, mille juures autorit abistas diplomand Silvia Leppik, näitas aga, et tollal ilmunud matemaatikat sisaldavate raamatute arv oli tõesti nii väike. Käesolevas töös antakse lühike ülevaade tolleaegsetest haridusoludest, kirjeldatakse nende raamatute sisu ja metoodilist külge ning tuuakse tabelina kokkuvõte kasutatud terminoloogiast. Lõpuks vaadeldakse veel, kuidas nendes raamatutes kajastub tollal valitsenud feodaalne ühiskondlik kord.

1. Haridusolud

Pärisorjusliku korra ajal ei olnud Eestis rahvakoole. Kiriklik võim ja mõisnikud võitlesid talupoegadele hariduse andmise vastu.

«Kool on uks», ütles üks tolleaegne mõisnik, «mille läbi talupoeg omast toast välja ronib ja meie tuppa poeb, sellepärast — matame selle ukse hoolega kinni.» [7].

Alles XVII sajandi 80-ndad aastad olid eesti rahva hariduselus põhjapaneva tähtsusega. Sellal tekkisid Liivimaal ja hiljem nii Eesti- kui ka Saaremaal köstrikoolid. Nende koolide tekkimine ja lugemisoskuse levik eesti rahva seas oli seotud B. G. Forseliuse tegevusega, kes asutas 1684. a. Tartu lähedale Piiskopi mõisa talurahva kooliõpetajate ja köstrite seminari. See oli esimene rahvakoolmeistrite seminar kogu Rootsi riigis. Õppeaineteks olid usuõpetus, kirikulaulud, lugemine, kirjutamine ja rehkendamine. Köstrikoolides aga õpetati usuõpetust, kirikulaule ja lugemist, erandjuhtudel ka kirjutamist.

1736. a. oli Liivimaal 78 kihelkonnakooli 850 lapsega, nendest 35 eesti kooli 484 ja 43 läti kooli 366 koolilapsega. Õppetöö toimus koolides 10. novembrist kuni 20. märtsini, kaks kuni kuus päeva nädalas. Eestimaal olid koolioludveelgi viletsamad. 1780-ndate aastate paiku oli Eestimaal 44 külakooli, neist 29 Harju- ja Järvamaal (samal ajal oli aga Eestimaal umbes 100 mõisat ja üle tuhande kõrtsi).

XIX sajandi alguses, seoses pärisorjusest vabastamise seadusega, toimus rahvakoolide arengus seisak ja isegi tagasiminek. Selle seaduse alusel anti maa mõisnike omandiks. Mõisnikud hakkasid seniseid koolimaid ära võtma, mistõttu maakoolide arv vähenes. 1817. aastal oli Eestimaal ainult 3 kihelkonnakooli ja 17 vallakooli.

Õpperaamatuteks, mille järgi XIX sajandi esimesel poolel õpiti, olid: piibel, katekismus, O. W. Masingu «ABD ehk Luggemise-Ramat Lastele» (1795) [1], P. H. Frey «Arropiddamisse ehk Arwamisse-Kunst...» (1806) [3], O. W. Masingu «Pühhapäewa Wahheluggemised» (1818), «Luggemisse Lehhed» (1821) ja «Arwamisse-Ramat» (1823) [4].

2. Esimesed eestikeelsed matemaatikat sisaldavad raamatud

Esimene eestikeelne raamat, mis seletab matemaatilisi mõisteid, oli *ABD ehk Luggemisse-Ramat Lastele kes tahawad luggema oppida. Tartolinas trükkitud ja müa M. G. Grentsiuse jures. 1795.* Raamatu maht on 34 lehekülge pluss ükskordühe tabel. Kuigi see raamat on ette nähtud lugemisraamatuna, on seal peatükk «Numridest», kus antakse seletusi numbrite kümnendsüsteemi tarvitamise kohta ning esitatakse ükskordühe tabel. Selle raamatu autor Otto Wilhelm Masing on hästi tuntud, mistõttu me siinkohal tema tegevuse juures ei peatu.

XIX sajandi esimesel veerandil ilmus neli matemaatilisi mõisteid käsitlevat eestikeelset raamatut.

1805. aastal ilmus *Weikene oppetusse nink Luggemisse Ramat Tarto ma-rahwa kooli laste tarbis.* Selle raamatu autor Georg Gottfried Marpurg sündis Thüringenis 1755. aastal, õppis Leipzigi ülikoolis, oli Rõuges õpetajaks. Marpurg oli mitmete saksameelsete ja lõuna-eestimurdeliste kiriklike ja õpetlike raamatute autoriks. «Weikese oppetusse» raamatu eessõnas *Üks Juttustaminne kuidas se hä külla koolmeister Andre omma Koolmeistre Ammetit ärratallitap, kigille ma-Koolmeistrille Eenkojos* annab autor juhatusi kooliõpetajatele. Seal on ka mainitud, mitu tundi nädalas tuleks autori arvates matemaatikat õpetada:

Katskord näddalin oppetap Koolmeister ka neid suurembid poisi sedda allustust sest arwo kunstist. Sest temmal om ka siin se wiis ütteldа: üts ma-mees peap ka middake moistma rähhendada. Sest kui temma middäke, kus temma omma käe waiwa läbbi om sanu, lina wiip müwwa, siis tijap temma, kui temma moistap räh-

hendada, kui paljo rahha temmale se eest peap sama, nink temma ei lasse henda mitte petta ([2], lk. 8).

Lehekülgedel 77—115 (peatükkides «Arwo-Kunsti Eenoppus» ja «Arwo-Kunsti kige eddimänne Allustus») seletab autor nelja põhitehet 10 000 piirides. Seda raamatut kiitis Tartu ülikooli koolikomisjon ja auhindas üks Liivimaa mõisnike ühing.

Järgmine raamat ilmus 1806. aastal. See on *Arropiddamisse ehk Arwamisse-Kunst. Katseks öppetud Eesti-Ma Rahwa heaks ja kassuks.* Raamatu maht on XXV + 141 lehekülge. Selle raamatu autoriks oli P e t e r H i n r i k F r e y. Peter Hinrik Frey (1757—1833) sündis Tartumaal Erastvere vallas. Õppis Halle ülikoolis usuteadust. Töötas ühe aasta (1705) Kuressaares abi-kirikuõpetaja ja linnakooli juhataja kohal ning asus siis Püha koguduse õpetajaks, kus töötas kuni surmani.

P. H. Frey raamatut võib õigustatult pidada esimeseks eestikeelseks matemaatika õpikuks. Raamatu eesmärgi kohta ütleb autor eessõnas järgmist: *Se hea tarkus, mis siin antakse, ep olle ühhestki Teie Ramatude seast tännini mitte leida olnud...*

Agga sesinnatse Ramato selge tundmissega, ehk se tarkussega keiksuggused tarwilissed asjad nende nimmede arro möda ehk teine teisega ühte, ehk teine teisest mahha arwada; nisugguse hea tarkussega saab Teie lodud meel selgemaks, ja ikka pitkemaks Teie nou, ka aialikko önnet öigel wisil otsida ning leida.

Samuti seletab autor eessõnas, kuidas vanemad peavad oma lapsi õpetama: *Ärge agga ruttage ühhegi ue peatükki kallale, enne kui Teie selgeste moistate, mis iggaüks endine peatük öppetab.... Keige jöudsamad arroarwajad on wimaks need, kes mitte ülle pea ülle kaela, waid haaw hawalt öppiwad arropiddamisse ehk arwamisse kunsti.*

P. H. Frey raamat jõuab täisarvude vallas välja kuni miljonini, õpetab nelja tehet täis- ja murdarvudega ning võrdeliste suurustega arvutamist. Muide, võrdeliste suurusteni koolides nähtavasti kunagi ei jõutud, sest järgmistes raamatutes need juba puuduvad.

Siis möödus 17 aastat, ilma et oleks ilmunud ühtegi matemaatikat sisaldavat eestikeelset raamatut. 1823. aastal ilmus korraga kaks raamatut: *Arwamise-Ramat, mis Otto-Willem Masing koolmeistrite ja kolilaste kassuks wäljaandnud* ning A b r a m H o l t e r i koostatud esimene matemaatikaülesannete kogu *Arwo ehk Rehkendamise eksemplid.*

Masingu raamatus seletatakse nelja tehet nimega ja nimeta arvudega. «Arwamise-Ramatu» eessõnas märgib Masing, et ta kavatseb sellest raamatust veel välja anda kolm osa, mis peavad sisaldama võrdeid ja tehteid murdudega, kuid sellest ei tulnud nähtavasti midagi välja.

Holteri raamatus on 250 vastustega varustatud ülesannet (eksemplit) ning ta oli mõeldud kooliõpetajatele käsiraamatuks. A. Holter sündis 1798. a. Saugas taluperemehe pojana. Aastatel

Arropiddamisse

ehk

Arwamisse=Kunst.

Katseks öppetud

Eesti=Ma Rahwa heaks ja kassuks.

[J. H. Frey]

Geschenk des Verlegers, 1806

Tarto liñnas,

trükkitud 1806 aastal

Krentsiusse kirjade= ning temma kullo= ning warraga.

Arwo

ehk

Rehkendamise

eksemplid.

Tallinnas

trükkitud, Dullo kirjade= ning temma kullo ja warraga. 1823 aastal.

Arropiddamisse ~~ehk Räknungskunst~~ on ikka tarwis, ja wäärt et mitte ükspäinis Sakste, waid ka Tallorahwa lapsed sedda öppiwad. Ka Tallopoeg peab sesinnatse hea kunsti peäl tark ollema, kui ta middagi ostes ehk mües, wöigo uskudes ehk wahhetades, ennast pettusse kahjo eest tahhab hoida. — Peälegi on nisuggune kunst meie tulletamisse, moistusse ja selgema ärraarwamisse kinnitusseks.

Tahhate Teiegi nüüd, mo Lapsed, arropiddamisse=kunsti peäle diete öppida, mis peate siis enne ja keige essite moistma luggeda ja kirjotada? Ma kostan:

I.

Arro tähhed ehk Numbrid.

Mittuks sörmet on sul, mo Laps? — Wötta neid luggeda. (Laps loeb omma käekeste sörmed essimessest wiimse sadik: üks, kaks, kolm, nelli, wiis, kuus, seitse, kahheksa, ühheksa, kümme).

Diete, mo hea Laps! Hakka nüüd peäle:

üks ning kümme	ehk lühhidelt:	üksteistkümmend;
kaks ning kümme	— ——	kaksteistkümmend;
kolm ning kümme	— ——	kolmteistkümmend;
nelli ning kümme	— ——	nelliteistkümmend;
wiis ning kümme	— ——	wiisteistkümmend;
kuus ning kümme	— ——	kuusteistkümmend;
seitse ning kümme	— ——	seitseteistkümmend;
kahheksa ning kümme	— ——	kahheksateistkümmend;
ühheksa ning kümme	— ——	ühheksateistkümmend;
kümme ning kümme	— ——	kakskümmend.

LII.

9.

K. Ehk Teie lustite nüüd jälle murtud numbridega arwada? — L. Kül meie lustiksime; agga nendega moistame jo arwada, olgo neid kokkopannes ehk mahha arwades, olgo koggudes ehk jaggades.

K. Kas Teie ka siis murtud arrudega toime sate, kui neid on Proportions=Eksemplide sees? — L. Miks meie sedda ei moista! Mis on muud teggemist nisugguste Eksemplidega, kuid panne neid agga wisi pärrast ülles, koggusiis mollema külje numbrid, ning wimaks jagga selle külje Produktiga, kus küssimisse täht seisab. Egga meie melest polle jo mitte weel ärrakaddund murtud arrude koggumisse ning jaggamisse wisi öppetus, mis Teie, armas Koolmeister, meile teäda annud.

K. Se on ka hea ning tarwis, et Teie murtudki arrude arwamisse wisid mitte ärra ei unnusta. Agga polleksite neid ka ühtegi öppind; siiski woiksite keik nigisugguse Proportions=Eksemplid, mis murtud arrudega, kui paljo läbbi arwada. — L. Imme kül! Mil wisil teme sedda siis? —

K. Meie wahhetame agga nende nimmetajad sedda wisi, et neid, mis teises küljes on, essimesse, ning neid, mis essimesses seiswad, teise külge pannakse. —

L. Kas arrud siis ommeti sünniwad ühte? — K. Kui se ei olleks, kas sünniks kül sedda öppetada? — Waatke agga isse, mis siin seisab Teie ees:

$\frac{1}{4}$ ℔ $\frac{1}{8}$ Rbl.

? Rbl. $\frac{1}{6}$ ℔

N u m r i d e st.

ühhekordsed numrid		kümmne numrid		saa numrid		tuhhande numrid.	
Üks	1.	kümme	10.	üks sadda	100.	üks tuhhad	1000.
Kaks	2.	kakskümmend	20.	kaks sadda	200.	kaks tuhhad	2000.
Kolm	3.	kolmkümmend	30.	kolm sadda	300.	kolm tuhhad	3000.
Nelli	4.	nellikümmend	40.	nelli sadda	400.	nelli tuhhad	4000.
Wiis	5.	wiiskümmend	50.	wiis sadda	500.	wiis tuhhad	5000.
Kuus	6.	kuuskümmend	60.	kuus sadda	600.	kuus tuhhad	6000.
Seitse	7.	seitsekümmend	70.	seitse sadda	700.	seitse tuhhad	7000.
Kahheksa	8.	kahheksakümmend	80.	kahheksa sadda	800.	kahheksa tuhhad	8000.
Ühheksa	9.	ühheksakümmend	90.	ühheksa sadda	900.	ühheksa tuhhad	9000.

Kui ühhe ühhekordse numri tagga üks noll (o) seisab, siis se tähhendab kümmet; agga se nummer mis nolli ees on, ütleb kui mitto kümmet seal on.

10 üks kümme. 20 kakskümmend. j. n. t. s.

Seisawad kaks numrid kõrwi, siis ütleb essimenne nummer, mitto kümmet seal on, ja taggumenne kui mitto teist kümme peälesaab luggeda:

12. Kaksteistkümmend	56. Wiiskümmend ja kuus.
34. Kolmkümmend ja nelli	78. Seitsekümmend ja kahheksa

99. Ühheksa kümmend ja ühheksa.

Ons kaks nolli (oo) ühhe ühhekordsi numri tagga, siis on sadda. — 100. sadda. 500 wiis sadda.

Kui kolm numrid ühhes rinnas seisawad, siis on essimenne nummer sadda, teine kümme, kolmas ühhekordne nummer. n. k.

123. Sadda kakskümmend kolm.

101. Üks sadda ja üks	567. Wiis sadda kuuskümmend seitse.
234. Kaks sadda kolmkümmend nelli	899. Kahheksa sadda ühheksakümmend ja ühheksa.

41) Üks waene innimenne läks omma korjatud ja kerjatud koppikud linna wima, mis issi loetud arro järrele 365 kopp. piddas. Kui sedda leidis, kelle eest rahha täis ärra anda, siis teggi kukrukest lahti, ja lugges tubbaka eest 36 kopp., wari pastalde eest 72 kopp. Heering, mis wanna mehhe melest wägga hea näitis, wettis sit we jooksmissega 9 kopp. ärra, ja sool wõttis 45 kopp. temma käest. Kas nüüd wanna mees saksale ennam andis, kui omma kukruse jättis?

$$\begin{array}{rl} & 365 \text{ koppikud} \\ \left.\begin{array}{r} 36 \text{ kopp.} \\ 72 \ \text{„} \\ 9 \ \text{„} \\ 45 \ \text{„} \end{array}\right\} & 162 \ \text{„} \\ \hline \end{array}$$

Ei, kukrusse jäi weel 203 koppigad ehk 2 rubla 3 koppigad.

1815—1818 oli ta Rosenplänteri kasvandik, omandades rahvakooliõpetajale vajalikud eelteadmised. Seejärel oli ta Sauga (Eametsa) küla «Kirjutuse kooli» õpetajaks kuni surmani 1851. a. Need raamatud olid ka viimased matemaatikaraamatud, mis ilmusid XIX sajandi esimesel poolel. Alles 1852. aastal ilmus Meyeri «Koli-Ramatu Teine jaggo. Arwamisse Ramat».

3. Ülevaade raamatutes käsitletavatest põhiteemadest

Kõikide raamatute autorid alustavad arvusüsteemide selgitamisega. Peaasjalikult vaadeldakse india-araabia numbreid ja hindude positsioonilist süsteemi. G. G. Marpurg [2] toob sisse ka rooma numbrid, kasutades neid peamiselt lehekülgede ja peatükkide nummerdamisel. Erandina teistest autoritest on tal iga arvu taha pandud punkt, kusjuures pole tegemist järgarvudega.

Positsioonilist arvusüsteemi kirjeldab kõige paremini P. H. Frey [3], kasutades järgu mõistena sõna «liik». Esimeses liigis olev arv tähendab ühelisi, seitsmendas liigis olev arv miljoneid jne.

Masing toob ka midagi numbrite definitsiooni taolist: *Numrid on tähhed, mis näitawad, kui paljo ühhest asjast luggeda. Nemmad on nimmega, ehk nimmeta. Nimmega need, mis üht ehk toist nimmetatawad asja loewad, nenda kui: koppikaid, rublaid, wakke, topi, . . . Nimmeta need, kellele ühtigi nimme peale tehtud, egga kelle jure ühtigi loetawaks polle nimmetatud.* ([4], lk. 11).

Teiseks põhiteemaks, mille juures kõik autorid väga pikalt ja põhjalikult peatuvad, on mõõtude süsteemid. Tollal kehtisid erinevates kohtades erinevad mõõtude süsteemid, nii näiteks olid erinevad süsteemid Tallinnas, Riias, Pärnus, Narvas ja Tartus. Eriti keeruliseks tegi olukorra veel see, et peaaegu iga asja juures oli oma mõõdustik: sällitus nisu või otri sisaldas 48 riia vakka, sällitus rukkeid aga 45 riia vakka.

Selle kirju pildi reguleerimiseks kehtestati 1. I 1845. a. ülemaaliselt vene mõõdustik ja kaalustik, mille rakendamine jäi küll alguses kaunis formaalseks.

Oma matemaatilise sisu poolest ei ulatu need kooliraamatud kaugemale neljast põhitehtest. Õpetamine toimub enamasti kahekõnede kaudu, kusjuures praegusaegsele lugejale paistavad vähemalt õpilastepoolsed küsimused ja kostmised vägagi ebametoodilistena. (Muidugi mängib selles hinnangus oma osa küllaltki kauge ajalooline distants ja erinev mõtteviis).

Kõige kaugemale tungib P. H. Frey, kes oma raamatus toob sisse ka murdarvude mõiste ja tehted nendega. Murdarve on seletatud näitlikult õuna abil. Õun lõigatakse pooleks, neljaks jne., ning näidatakse, et mida rohkem on lõikeid, seda väiksemad on tükid. P. H. Frey on andnud ka nimetaja ja lugeja mõisted, kasutades nende kohta termineid *«nimmetaja»* ja *«arroandja»*. Peale murdude on P. H. Frey käsitlenud ka võrdelisi suurusi (nn. *«Pro-*

portsionaal-arropiddamine ehk ühtesünniwa arrude arwamine.»). P. H. Frey raamatus on võrdelisi suurusi seletatud paaridena, mis *«sünnivad ühte»*. Näidatud on ka seda, et võrdeliste suuruste korral võrdub võrde siseliikmete korrutis välisliikmete korrutisega (*«Produkt on üks»* ütleb selle kohta P. H. Frey).

	G. G. Marpurg [2]	P. H. Frey [3]	O. W. Masing [4]
arvutama	rähhendama	arropiddama	arwama
arvutamine	arwo-kunst, räkändamine ehk rähhendamine	arropiddaminne ehk Rääknungskunst	arwamine ehk rehkendamine
liitma	kokko-arwama	kokko-luggema ehk kokko arwama	kokkoarwama
liitmine	kokko-arwaminne ehk Addizion	Addition	kokkoarwamine
summa	summa	summa	summa
lahutama	mahhatombama ehk subtrahirima	mahhaarwama mahhatombama	mahhaarwama
lahutamine	Subratzion ehk mahhatombamine	ärravotmine ehk Subtraktion	mahhaarwamine
vahe	üllejänud	Rest ehk üllejänud	jädaw
korrutama	Multipliciren	ühhesuggused arrud teine teisega kokkuluggema	kaswatama
korrutis		Produkt	sadaw ehk Produkt
jagama	ärräjaggama	mitto kord mahha-arwama	jaggama ehk jautama
jagamine	ärräjaggamine ehk Diwision	jaggaminne ehk Diwision	jaggaminne
jagatis	jaggo ehk kozient	jaggo ehk kwotient	jaggu ehk Quotient
tehe	arwo-luggu ehk Pezies	Pezies	
murdarv		murtud arvud	
murrujoon		arromurdmisse märk	
nimetaja		nimmetaja	
lugeja		arroandja	

Eelmisel leheküljel asuvasse tabelisse on koondatud ülevaade matemaatiliselt sisukamates raamatutes kasutatud terminoloogiast.

4. Kokkuvõtteks

Millist huvi pakuvad need vähesed raamatud meile ajaloolisest aspektist?

Kõigepealt tuleb märkida, et nendes raamatutes kajastub suurepäraselt feodalismile omane killustatus. Seda just mõõdusüsteemide pika ja põhjaliku käsitlemise kaudu. Kindlasti väärib veel uurimist ühes või teises maakohas toimunud mõõtude süsteemi nihe ühe või teise majandusliku tsentri suunas.

Ka raamatute ilmumisaastad pole päris juhuslikud. Nad ilmusid peaasjalikult talupoegade mitmesuguste liikumisperioodide järel ja pidid olema teatud määral abiventiilideks, mis suunaksid talupoegade tähelepanu kõrvale sotsiaalsetelt küsimustelt. Nii näiteks vabandab G. G. Marpurg oma raamatu [2] eessõnas juba ette, et ta avaldab selle *mitte ainult koolmeistritele lastega töötamiseks sobivate näpunäidete andmiseks, vaid ka selleks, et pakkuda talupoegadele vähem kahjulikku jutuainet, sest tavaliselt tegelevad nad kokkusaamisel ainult härraste sõimamisega (kuigi seda ei saa neile eriti pahaks panna, sest nad ei oska ju millestki muust rääkida).*

Ka kolmekümneaastane paus (1823—1852) matemaatika raamatute ilmumises on tegelikult tingitud feodalistliku ühiskonna edasisest peremehetsemisest, millesse 1816. ja 1819. aasta seadused olulisi muutusi ei toonud. Alles ärkamisaegne liikumine muutis olukorda tunduvalt paremuse poole.

Kirjandus

1. Masing, O. W. ABD ehk Luggemise-Ramat Lastele kes tahawad luggema oppida. Tartolinnas trükkitud ja müa M. G. Grentsiuse jures. 1795. 34. lk. + tabel (19 × 10,5 cm).
2. Marpurg, G. G. Weikenne oppetusse nink luggemisse Ramat Tarto marahwa kooli laste tarbis. Selle suure tarto-lina ramato-kohto lubbaga. Tartolinas, 1805. Trükkitud M. G. Grentsiuse man. 137 + VI lk. (17 × × 10,5 cm).
3. Frey, P. H. Arropiddamisse ehk Arwamisse-Kunst. Katseks öppetud Eesti-Ma Rahwa heaks ja kassuks. Tarto linnas, trükkitud 1806. XXV + 141 lk. (19,5 × 12 cm).
4. Masing, O. W. Arwamise-Ramat mis Otto Willem Masing koolmeistrite ja kolilaste kassuks wäljaandnud. I Trük, Tartus 1823. Trükkitud Schünmanni jures. 83 lk. (17 × 10,5 cm).
5. Holter, A., Arwo ehk Rehkendamise eksemplid. Tallinnas trükitud, Dullo kirjade- ning temma kullo- ja warraga, 1823 aastal. 116 lk. (17,5 × × 10,5 cm).
6. Depman, J. Jutustusi matemaatikast. Tln., 1956.
7. Palm, H., Meie rahvakool. — «Postimees», 1902, nr. 93—96.
8. Eesti NSV ajalugu. 2. tr. Tln., 1956.

PROF. JAAN SARVE ELUST JA TEGEVUSEST

(Kümnenda surma-aastapäeva puhul)

H. Epler

Käesoleva aasta 23. augustil möödub kümme aastat eesti ühe vanima matemaatiku professor Jaan Hennu p. Sarve surmast.

J. Sarv sündis 21. detsembril 1877. a. endisel Võrumaal Saru vallas Leeguste küla Hanimäe talus talurentniku pojana. Pärast alghariduse omandamist Saru ja Mõniste vallakoolides ning Marienburgi (Aluksne) ap.-õigeusu kirikukoolis astus J. Sarv 1893. a. Treffneri gümnaasiumi, millest lahkus aga juba ühe õppeaasta järel, jätkates õppimist iseseisvalt. Alles enne küpsuseksamite sooritamist 1899. a. oli ta jällegi ühe aasta Treffneri gümnaasiumi õpilane. Valinud oma tulevaseks erialaks matemaatika, õppis J. Sarv aastail 1899—1904 Tartu Ülikoolis, viibis 1906. a. lühemat aega Sorbonne'is ja lõpetas Tartu Ülikooli 1908. a., omandades samal aastal keskkooliõpetaja kutse. Töötanud matemaatikaõpetajana 1907. a. Põltsamaal Eesti Aleksandrikooli põllutöökursustel ning seejärel Vitebski kubermangus Veliži eranaisgümnaasiumis, asus J. Sarv 1909. a. Tartusse Eesti Noorsoo Kasvatuse Seltsi (ENKS) tütarlastegümnaasiumi matemaatika ja füüsika õpetaja kohale, kuhu ta jäi 1918. aastani. Alates 1918. aastast on J. Sarv seotud Tartu ülikooliga.

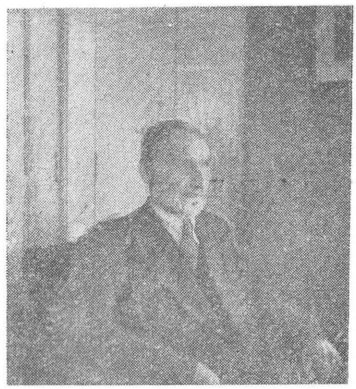
Aastavahetusel 1918/19 oli J. Sarv nõukogude ülikooli esimeseks kuraatoriks. Tsaariaegse Tartu ülikooli õppejõud olid saksa okupatsiooni eest evakueerunud Voroneži, kus nad töötasid äsjaasutatud ülikoolis. Seetõttu kerkis J. Sarve ette ühe esimese ülesandena ülikooli komplekteerimine uue kaadriga; seda asus ta tegema temale omase energiaga. Kodanluse võimulepääsemise järel töötas J. Sarv 1919/20. a. matemaatika-loodusteaduskonna esialgse korraldajana (ajutise dekaanina), tehes sellel kohal ära suure töö õppeprotsessi organiseerimisel. Neil ja järgmistel aastatel viibis J. Sarv korduvalt välismaal, tutvudes kõrgema hariduse korralduse tundmaõppimiseks mitmete ülikoolide matemaatika kateedrite tööga.

Alates 1919. a. oli J. Sarv Tartu ülikooli korralise matemaatikaprofessori kohusetäitja ja 1928. aastast korraline professor. Aastatel 1919—1920 oli ta ka ülikooli füüsika instituudi juhataja.

Tartu Ülikoolis töötas J. Sarv pidevalt 33 aastat ja oli viimati geomeetria kateedri juhataja. Pensionile läks J. Sarv 1. septembril 1951. a., kuid tema side ülikooliga ei katkenud. Vaatamata raskele tervislikule seisundile külastas J. Sarv kuni oma surmani geomeetria kateedri koosolekuid ja esines seal ka ettekannetega.

J. Sarve laialdase pedagoogilise, teadusliku ja ühiskondliku tegevuse hindamisel tuleb kõigepealt meenutada olukorda, milles tal tuli matemaatikuna töötama hakata. Emakeelne õpetus keskkoolides tegi tol ajal alles esimesi samme: teatavasti asutati esimene eesti õppekeelega keskõppeasutus — ENKS tütarlastegümnaasium — 1906. aastal. Eesti õppekeelega koolides puudus kaader, puudusid õpikud. Matemaatika alal ei olnud eestikeelset terminoloogiatki. On arusaadav, et J. Sarvel kui ühel esimesel eesti rahvusest kõrgema haridusega matemaatikul tuli kaasa aidata emakeelse kooli ülesehitamisele.

1925. a.



1950. a.

Prof. J. Sarv

J. Sarv asus tööle palju laiema haardega, kui seda tema kitsa eriala järgi oleks võidud oletada. Tema tähelepanu ei olnud sel ajal pööratud mitte üksnes matemaatika, füüsika ja astronoomia, vaid kõigi reaalteaduste õpetamisele. J. Sarve mitmekülgsust iseloomustab kas või seegi, et tema esimene trükis ilmunud brošüür (1904. a.) tutvustab lugejaid morfoloogia, füsioloogia, patoloogia ja liikide õpetuse küsimustega.

J. Sarve elav osavõtt hariduskusimuste lahendamisest on osaliselt jäädvustatud rohkearvulistes arvustustes ja ülevaadetes populaarteadusliku ja koolikirjanduse kohta. Nimetatud materjalidest, mis on avaldatud peamiselt Eesti Kirjanduse Seltsi ajakirjas ning aastaraamatutes, väärib erilist esiletõstmist 1908. a. ilmunud artikkel «Mis emakeelsete õpperaamatute kokkuseadmisel mitte soovitav ei ole», milles J. Sarv kritiseerib tookordseid koolikirjanduse autoriteete M. Kampmaad ja E. Petersoni, kes propageerisid välisõppekirjanduse vahetut kopeerimist. J. Sarv rõhutas, et niiviisi ei ole võimalik viia õpetamist ajakohasele tasemele, sest õpikute koostamisel tuleb arvestada uusimaid metoodilisi seisukohti pedagoogikas ning neid kohe ellu rakendada, mitte aga oodata, kuni need, juba osaliselt vananenutena, teiste rahvaste koolikirjanduse kaudu meie juurde jõuavad.

Mäletatavasti oli J. Sarve üheks iseloomulikumaks jooneks püüe mitte piirduda üldiste seisukohtade avaldamisega, vaid neid alati ka praktiliselt teostada. Tunnistanud originaalsete õpikute vajalikkust, asus J. Sarv ise nende koostamisele. Temalt ilmusid «Elekter» (1911) ja «Füsika õpetus I» (1917), millest eriti teine on kirjutatud tugevalt isikupärases käsitlusviisis. Keskkooli vajadusi pidas J. Sarv silmas ka siis, kui ta ise juba töötas kõrgemas õppeasutuses. Seoses üleminekuga tsaariaegses koolis kasutusel olnud viiekohalistelt logaritmide tabelitelt neljakohalistele tabelitele koostas J. Sarv 1921. aastal ise neljakohaliste logaritmide tabelid.

Uus periood J. Sarve kui matemaatiku elus algab tema tööleasumisega Tartu ülikoolis. Pole kahtlust, et matemaatika teaduslikud probleemid olid J. Sarve köitnud juba üliõpilaspõlves, mida näitab kas või tema osavõtt 1908. a. Roomas toimunud rahvusvahelisest matemaatikute kongressist. Kuid alles kõrgemas õppeasutuses tööl olles saab J. Sarv võimaluse pühenduda teaduslikule tööle.

J. Sarve uurimistöö kogu ulatust on praegu raske kindlaks teha, sest J. Sarv ei armastanud eriti tööde publitseerimist. Näiteks Tartu ülikooli toimetistes on J. Sarv avaldanud ainult kaheksa tööd, millest suuremad on kaks: doktoridissertatsioon «Geomeetria alused» (1931) ja «Foundations of arithmetics» (1935). Oma teadusliku töö resultaate kasutas J. Sarv põhiliselt vahetus õppetöös ning luges tulemused avaldatuks, kui ta oli oma seisukohad õpilastele esitanud. Seetõttu võis J. Sarve loenguid nimetada sõna tõsises mõttes teaduslikkudeks, sest nende ülesehituses kasutas lektor alati rikkalikult isiklikke resultaate, ja mõned loengutsüklid, nagu näiteks geomeetria aluste kursus, olid kogu ulatuses J. Sarve originaalne uurimistöö. Kahjuks on aga loengute ülestähendusi säilinud vaid üksikutest õppeaastatest ning needki on kaunis puudulikud, sest kuulajatel on esinenud sageli raskusi J. Sarve mõttekäikude jälgimisel tema esitusviisi raskepärasuse tõttu.

J. Sarve uurimistööde põhiteemaks olid matemaatika või isegi teaduste aluste küsimused. Muud J. Sarve poolt puudutatud teemad on enamuses matemaatika aluste konkreetsete probleemide läbitöötamise kõrvalsaadusteks.

J. Sarve huvi teaduste aluste vastu on selgelt välja kujunenud Esimese maailmasõja ajaks ning on üldiste seisukohtadena formuleeritud juba «Füsika õpetuse» 41-leheküljelises sissejuhatuses.

Hiljem on J. Sarv püüdnud teaduste aluseid ka aksiomatiseerida, kuid tehtud töö kohta on säilinud liiga vähe andmeid. Ainukeseks suuremaks kirjanduslikuks jäljeks nimetatud uurimistsüklist on vist küll analüütilise geomeetria loengute ülestähendused 1923. aastast. Viimaste väärtus on aga küllaltki kaheldav, sest vähemalt teaduste aluseid käsitlevat osa ei ole J. Sarv ilmselt ise redigeerinud.

Matemaatika aluste osas on J. Sarvel esikohal geomeetria aluste probleemid. Sajandivahetusel maailmas teostatud kapitaalseid uurimusi arvestades nägi J. Sarv geomeetria aluste alal kolme olulist ülesannet: põhimõistete ja põhilausete arvu vähendamine, põhimõistete ja põhilausete sisu lähendamine sellele, mida me otsekohe oma meeltega märkame, ning geomeetria lausete tõestamise (s. t. põhilausetest ja definitsioonidest tuletamise) lühendamine.

TRÜ geomeetria kateedri koosolekul 1951. a.

Esimese kahe ülesande lahendamisele pühendas J. Sarv oma doktoriväitekirja, milles esitatud põhimõistete ja -lausete süsteem on teatud süntees Paschi, Peano ja Vebleni (õigemini Moore'i poolt modifitseeritud Vebleni) aksiomaatikatest.

J. Sarve tööd geomeetria aluste alal jätkusid ka pärast doktoridissertatsiooni avaldamist, kuid nüüd hakkas pearõhk kalduma varem formuleeritud kolmanda ülesande lahendamisele — tuletuskäikude lihtsustamisele. J. Sarv ei tundnud siin huvi mitte ainult üksikute tõestuskäikude koondamise vastu, vaid tegeles rohkesti selliste meetodite propageerimisega, mis geomeetria ühes või teises harus rakendatutena võiksid anda vajaliku mugavuse. Nii valmisid tööd «Punktarvutus analüütilises geomeetrias» (1946) ja «Уравнение прямой в пространстве» (1948).

Sõjajärgsetel aastatel tekkis J. Sarve suhtumises geomeetria alustesse teatav murrang. Püüdnud kogu aeg põhimõistete arvu vähendamise poole, veendus J. Sarv, et vähemalt geomeetria esimeste elementaarsete järelduste osas saavutatakse niiviisi tõestuskäikude lihtsustamise asemel vastupidine efekt. Seoses sellega esitab J. Sarv veel kaks aksiomatiseerimise katset. Neist tähtsam on kirjutis «Projektiivne geomeetria», mis oli ühtlasi 1949/50. õppeaasta projektiivse geomeetria loengute aluseks. Töös on ühendus- ja lahutusaksioomid võetud kokku neljaks paarikaupa duaalseks aksioomiks. Seejuures on ühendusaksioomid valitud väga otstarbekohaselt: näiteks õnnestub J. Sarvel Desargues'i teoreem tõestada juba kolmanda lausena, kusjuures tõestusele kulub kaheksa rida teksti. Tuleb aga märkida, et töös esitatud aksiomaatika ei ole täielik ja projektiivse geomeetria ülesehitamiseks nendest aksioomidest ei piisa. Lahutusaksioomide vähesuse tõttu ei õnnestu näiteks tõestada, et täisnelinurga kolm diagonaalpunkti ei asu ühel sirgel. Teiseks, nagu teada, ei ole projektiivse geomeetria põhilause järelduv üksnes ühendus- ja lahutusaksioomidest. Ka töös toodud tõestuses kasutatakse varjatult Archimedese aksioomi projektiivses kujus. Vaatamata neile lünkadele aksiomaatilises ülesehituses on «Projektiivne geomeetria» J. Sarve sisukamaid töid ning kujutab endast rikkaliku sellealase kirjanduse hulgas üht ilusamat sissejuhatust projektiivsesse geomeetriasse. Jääb ainult kahetseda, et sellest kuues eksemplaris paljundatud tööst ei ole ühtegi ärakirja ei TRÜ Teaduslikus Raamatukogus ega geomeetria ja algebra kateedris.

J. Sarve töödest nähtus alati tema isikupärane teadlasepale. Tema mõttekäikudes väljendus teravalt analüütiline vaim, suur iseseisvus ja järjekindlus oma ideede teostamisel. Raske on öelda, missugune osa J. Sarve töödest ja mõtetest leiab edasiarendamist. Kaheldamatu on aga see, et J. Sarve elutööl eesti matemaatikute kasvatajana ning nende teadusliku profiili kujundajana on püsiv väärtus.

Oleks aga väär näha J. Sarve kogu elutööd ainult matemaatikute põlvkonna kasvatajana. Eesti üldises kultuuriloos kuulub J. Sarvele kindel koht. Vaieldamatult suured on tema teened materialistliku maailmavaate ja teadusliku ateismi propageerimisel sajandi alguses ning hiljem eesti progressiivse intelligentsi kujundamisel. Käesolevast lühikirjutisest jäävad need küsimused paratamatult välja, kuid niigi peaks olema näha, kui suureks osutus see ülesanne, mida Jaan Sarv endale 1917. a. püstitades sõnastas järgmiselt: «. . . *jõudu mööda kaasa aidata meie haridusolude parandamisele*».

V. M. GLUŠKOV — LENINI PREEMIA LAUREAAT

Ü. Kaasik

Suureks tunnustuseks nõukogude küberneetikateaduse saavutustele oli Lenini preemia andmine Ukraina TA Küberneetika Instituudi direktorile, Ukraina TA akadeemikule **Viktor Mihhailovitš Gluškovile** tema tööde eest numbriliste automaatide teooria alalt, mis ilmusid aastail 1960—1962.

V. M. Gluškov sündis 24. augustil 1923. a. Rostovis Doni ääres. 1948. aastal lõpetas ta kodulinna ülikooli ja asus siis õppejõuna tööle Uraali Metsatehnilisse Instituuti Sverdlovskis. Seal algaski V. M. Gluškovi pingeline teaduslik tegevus uurimustega rühmateooria (eeskätt nilpotentsete ja bikompaktsete rühmade teooria) valdkonnas. Uurimuste intensiivsusest ja viljakusest annab tunnistust kas või see, et Sverdlovskis töötamise kaheksa aasta vältel avaldas ta trükis 18 uurimust ning juba 1956. a. omistati talle füüsika-matemaatikadoktori teaduslik kraad. Oma selle perioodi uurimustes lahendas V. M. Gluškov muuhulgas D. Hilberti poolt 1900. a. püstitatud probleemidest viienda: konstrueerida Lie' rühmade niisugune teooria, milles ei kasutata rühma määravate funktsioonide diferentseeruvuse eeldust.

Uus periood V. M. Gluškovi teaduslikus tegevuses algab 1956. aastal, mil ta siirdub tööle Kiievisse, Ukraina TA Matemaatika Instituuti ja arvutuskeskusesse (kui asutatakse Ukraina TA Küberneetika Instituut, saab ta selle direktoriks). Siitpeale pühendub ta täielikult küberneetika teoreetiliste ning praktiliste probleemide lahendamisele ja tagajärjed ei lase end kaua oodata. Prof. Gluškovi vahetul osavõtul ja juhtimisel on Ukraina TA Küberneetika Instituut saavutanud silmapaistvat edu uute küberneetiliste seadmete (mitmesuguste universaalsete juhtimismasinate) loomisel ja nende juurutamisel praktikasse. Nende seadmete konstrueerimise käigus tuligi V. M. Gluškovil tegelikult välja töötada terve uus teooria — diskreetsete (ehk numbriliste) automaatide teooria. Selles valdkonnas saadud tulemusi on V. M. Gluškov avaldanud reas artiklites ning kahes monograafias («Теория алгоритмов», Kiiev 1961. a. ja «Синтез цифровых автоматов», Moskva 1962. a.), millede eest talle määratigi Lenini preemia.

Automaatide teooria alged tekkisid enam kui 25 aastat tagasi (Põhjapaneva tähtsusega olid V. I. Šestakovi ja C. E. Shannoni tööd). Eriti aktiivselt on automaatide sünteesi abstraktse teooriaga tegeldud kogu maailmas viimase kümne aasta vältel, kuid alles V. M. Gluškovil õnnestus viia see teooria niisugusele tasemele, et seda saab efektiivselt rakendada automaatide tegeliku konstrueerimise juures. Veelgi suurem tähtsus on vahest tõsiasjal, et V. M. Gluškovi uurimuste tulemusena muutuski automaatide sünteesi teooria tegelikult üldse teooriaks selle sõna matemaatilises mõttes.

A. I. MALTSEV — LENINI PREEMIA LAUREAAT

Jevgeni Gabovitš

Silmapaistev nõukogude matemaatik A n a t o l i I v a n o v i t š M a l t s e v sündis 27. novembril 1909. a. Moskva oblastis Mišeroni klaasivabriku töölise pojana, lõpetas 1931. a. Moskva Riikliku Ülikooli ning asus 1932. a. tööle Ivanovo Pedagoogilises Instituudis. Aastal 1937 kaitses ta kandidaadiväitekirja, millele järgnevad doktoriväitekirja kaitsmine (1941), professori kutse omandamine (1944), NSVL Teaduste Akadeemia korrespondeerivaks liikmeks valimine (1953) ning lõpuks 1958. aastal TA tegevliikmeks valimine. Ivanovos töötas A. I. Maltsev vahetpidamata 28 aastat, arendades energilist tegevust mitte ainult teadlasena, vaid ka pedagoogina ja ühiskonnategelasena. Tänu tema tegevusele kuuluvad Ivanovo Pedagoogilise Instituudi lõpetajad oma matemaatilise taseme poolest meie maa parimate hulka. Tema initsiatiivil organiseeriti Ivanovos üks esimesi noorte matemaatikute koole Nõukogude Liidus. Kaks korda — aastatel 1954 ja 1958 — on A. I. Maltsev valitud NSVL Ülemnõukogu saadikuks. Kümne aasta jooksul (1951—1960) oli ta Ivanovo oblasti rahukaitse komitee esimeheks. Ühtlasi töötas ta alates 1942. aastast NSVL TA Matemaatika Instituudis. Aastast 1960 asus A. I. Maltsev tööle Novosibirski ülikooli professorina ning TA Siberi osakonna Matemaatika Instituudi algebraosakonna juhatajana. Tema algatusel hakkas Novosibirskis ilmuma ajakiri «Алгебра и логика» ning loodi matemaatika-alane internaatkool.

Kuigi A. I. Maltsevi esimene teaduslik töö (ilmunud 1936. a.) oli pühendatud matemaatilisele loogikale, on tema põhiliseks huvialaks olnud alati üldine algebra. Oma esimestes töödes lahendas ta Van-der-Waerdeni tuntud probleemid nulliteguriteta ringide kaldkorpuse ning taandamisega poolrühmadesse sisestamise võimalikkusest. (Maltsev näitas, et vastus mõlematele probleemidele on eitav.) Topoloogiliste ja Lie' rühmade uurimisele pühendatud tööde tsükli eest sai ta 1946. aastal riikliku preemia.

Saavutanud rea sügavaid tulemusi algebra sellistes traditsioonilistes harudes nagu rühma-, ringi-, algebrate ja järjestatud algebraliste süsteemide teoorias, pöördus A. I. Maltsev viiekümnendate aastate algul universaalsete algebrate ning algebra ja matemaatilise loogika piiril asuva mudeliteooria poole. Juba kolmekümnendate aastate lõpul leidis ta üldise meetodi rühmateooria nn. lokaalsete teoreemide tõestamiseks. Need teoreemid sõnastatakse kujul: «Kui rühma igal lõpliku arvu moodustajatega alamrühmal on omadus A, siis ka rühmal endal on omadus A». Jätkates uurimisi selles suunas ning kasutades üldist mudeliteooria keelt, arendas Maltsev oma meetodi nii kaugele, et see võimaldab algebralise süsteemi aksioomide kuju järgi vahetult otsustada, kas selle puhul kehtib lokaalne teoreem. Koos teiste mudeliteooriale pühendatud töödega, mille eest A. I. Maltsev sai tänavu Lenini preemia, samuti muidugi varasemate töödega on see tulemus toonud talle ülemaailmse tunnustuse.

ESIMENE EESTIKEELNE DIFERENTSIAALGEOMEETRIA ÕPIK

K. Ariva, M. Rahula

Diferentsiaalgeomeetria ei kuulu kehtivate õppeplaanide kohaselt tulevaste keskkooliõpetajate kohustuslike õppeainete hulka. Näib, et seda geomeetria haru loetakse kitsaks erialateaduseks, millel puudub üldhariduslik tähendus. Sellist vaatekohta saab küll vaevalt õigustada. Teatavasti muutuvad matemaatilise analüüsi ja diferentsiaalvõrrandite teooria abstraktsed tõed õppijale «läbipaistvateks» alles geomeetria vahendusel. Teisest küljest on kaasaegne diferentsiaalgeomeetria äärmiselt laia ja mitmekesise uurimisvaldkonnaga, arvukate rakendustega tormiliselt arenev teadusala.

Eestikeelses õppekirjanduses puudus viimase ajani diferentsiaalgeomeetria õpik. Ü. Lumiste «Diferentsiaalgeomeetria»[1] ilmumisega on nimetatud lünk kõrvaldatud ja loodud alus selle geomeetria haru ideede levikuks eesti matemaatikute laiematesse hulkadesse. Teos sisaldab klassikalise diferentsiaalgeomeetria kursust, mis mõnevõrra ületab ülikooli programmi raame. Ta on kirjutatud sissejuhatusena diferentsiaalgeomeetria mõttemaailma, kuid pakub huvi ka geomeetria vallas edasijõudnutele. Sest ilmunud raamat mitte ainult ei täida lünka, vaid on ühtlasi sammuks edasi klassikalise diferentsiaalgeomeetria moodsa kaasaegse käsitlemise suunas. Selles mõttes ei ole diferentsiaalgeomeetriale pühendatud õppekirjanduses seni uue õpiku kõrvale midagi asetada.

Käesolevate ridade eesmärgiks on juhtida ilmunud raamatule ka nende geomeetriahuviliste tähelepanu, kes ei ole üldse või on vähe kokku puutunud diferentsiaalgeomeetriaga. Selleks kirjeldame põgusalt selle geomeetria suuna mõningaid põhimõisteid.

Diferentsiaalgeomeetrias avardatakse analüütilise geomeetria uurimisvälja ja -meetodeid. Teatavasti uuritakse analüütilises geomeetrias, — mille elementidega tutvutakse juba keskkoolis, — väga lihtsaid kujundeid, nagu sirge, tasand, teist järku jooned (ringjoon, ellips, hüperbool, parabool) ja teist järku pinnad (sfäär, ellipsoid, hüperboloid, paraboloid). Diferentsiaalgeomeetria uurimisobjektideks on palju suvalisema kujuga kõverjooned ja kõverpinnad. Mõlema geomeetria puhul on uurimisvahendiks koordinaatmeetod.

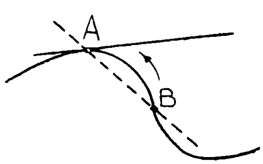
Analüütiline geomeetria taandab geomeetrilised seosed algebralistele võrranditele; tänu sellele avaneb võimalus kasutada lihtsaid algebralisi algoritme. Diferentsiaalgeomeetrias astutakse samm edasi: rakendatakse matemaatilise analüüsi vahendeid. Analüütilises geomeetrias saavutatakse suurt lihtsustust vektorarvutuse esimese osa

[1] Lumiste, Ü. Diferentsiaalgeomeetria Tln., 1963.

— vektoralgebra abil. Diferentsiaalgeomeetrias aga kasutatakse vektoranalüüsi, s. o. muutuvaid vektoreid, vektorfunktsioone ja nende diferentseerimist.

Klassikalist diferentsiaalgeomeetriat, mis kujunes välja möödunud sajandil Monge'i, Gauss'i, Darboux' jt. töödes, iseloomustab lokaalne vaatlusviis: uuritavat geomeetrilist kujundit vaadeldakse tema suvalise punkti väikeses ümbruses. Selline «mikroskoopiline» uurimisviis võimaldab diferentsiaalarvutuse abil asendada keerulisi sõltuvusi lihtsatega ja sel teel leida komplitseeritud geomeetrilistele kujunditele lihtsaid lähendeid.

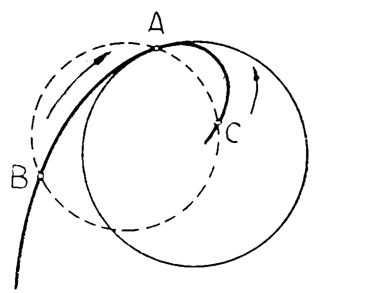
Sisuliselt jaguneb kolmedimensionaalse eukleidilise ruumi diferentsiaalgeomeetria peamiselt kahte ossa; kõverateooria ja pinnateooria. Rangelt kõneldes osutuvad kõvera ja pinna mõisted oma näilisest lihtsusest hoolimata äärmiselt keerukaiks.



Joonis 1.

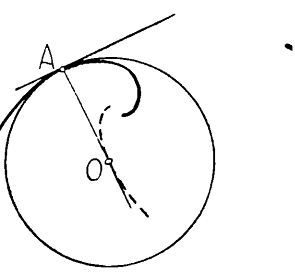
Vaadeldavas õpikus räägitakse näiteks sellisest kõverast, mille punktid täidavad terve ruudu tasandil (nn. *Peano kõver*). Klassikalises diferentsiaalgeomeetrias kitsendatakse uuritavate kujundite hulka mõnevõrra nõudega, et neid esitavad funktsioonid oleksid küllaldane arv kordi diferentseeruvad ehk, nagu öeldakse, kõverad ja pinnad oleksid küllalt siledad.

Tasandilise kõvera uurimisel võrreldakse teda lihtsaimate joontega — sirge ja ringjoonega (vaadeldava punkti ümbruses). Võrdlussirget nimetatakse kõvera puutujaks, võrdlusringjoont — kõverusringjooneks. Puutuja kõvera punktis A defineeritakse lõikaja AB piirasendina punkti B lähenemisel punktile A mööda kõverat (joon. 1). Kõverusringjoone



Joonis 2.

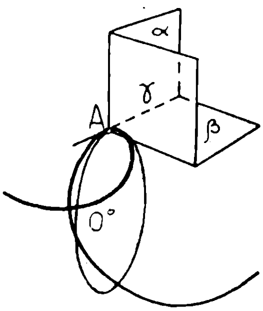
punktis A saame aga kolme punkti A, B ja C läbiva ringjoone piirasendina punktide B ja C lähenemisel punktile A mööda kõverat (joon. 2). Puutuja ristsirget, mis läbib puutepunkti, nimetatakse kõvera normaaliks selles punktis. Niisiis, sileda kõvera igas punktis saab moodustada puutuja, normaali ja kõverusringjoone. Nende abil on võimalik konstrueerida uusi kujundeid. Nii on näiteks kõvera kõverusringjoonte keskpunktide geomeetriliseks kohaks uus kõver, mida



Joonis 3.

nimetatakse vaadeldava kõvera evoluudiks (vt. punktiir joonisel 3). Kõvera normaalid osutuvad evoluudi puutujaiks.

Ruumilise kõvera jaoks defineeritakse analoogilisel viisil puutuja, normaal ja kõverusringjoon. Siin osutub otstarbekaks siduda kõveraga veel erilised tasandid (joon. 4). Tasand α, millel asub kõverusringjoon, kannab kooldumistasandi nimetust. Tasand β, mis läbib puutujat ja on kooldumistasandiga risti, on kõvera sirgestustasand. Tasand γ, mis läbib puutepunkti ja on risti puutujaga, on



Joonis 4.

normaaltasand. Näidatud viisil seotakse kõvera iga punktiga tasandite kolmik. Nende tasandite lõikejooni vaadeldakse kõvera punktiga seotud teljestikuna ja kõverat uuritakse vaadeldava punkti ümbruses selle teljestiku abil. Kuna see teljestik on üldiselt kõvera erinevais punktides erinev, siis räägitakse kõveraga seotud liikuvast teljestikust. Viimase «liikumise» iseloom kirjeldab kõvera struktuuri. Teljestiku liikumist kirjeldab omakorda teatud diferentsiaalvõrrandite süsteem (Bartels-Frenet' valemid), mille kaks kordajat määravadki kõvera ehituse. Neil kordajail, mida nimetatakse kõveruseks ja väändeks, on lihtne geomeetriline tähendus. Näiteks kõverus on kõverusringjoone raadiuse (mis üldiselt muutub punkti liikumisel mööda kõverat) pöördväärtus.

Tähtsaks probleemiks on geomeetriliste kujundite puutumisjärgu (s. o. lähedusastme) uurimine nende ühise punkti ümbruses. Selle erijuhuks on juba märgitud sirge ja kõvera puutumine. Üldisemalt vaadeldakse kahe kõvera, kõvera ja pinna ning kahe pinna puutumist. Uues õpikus uuritakse kõiki puutumise erijuhte ühise definitsiooni baasil. Uudsete momentide hulka kuulub raamatus ka evoluudi uurimine ruumis.

Analoogiline teooria ehitatakse üles ka pindade käsitlemisel. Üldiselt esinevad pindade uurimisel juba tunduvalt suuremad analüütilised raskused. Koordinaatkujus väljakirjutatuna osutuvad pinnateooria valemid äärmiselt keerukaiks ja väheülevaatlikeks. Sellepärast toimub diferentsiaalgeomeetrias (nagu kõikjal matemaatikas) pidev sümboolika lihtsustamine kompaktsemate tähistuste ja mõistete sissetoomise teel. On ju üldtuntud, kui suurt lihtsustust võimaldab vektorsümboolika näiteks analüütilises geomeetrias, tõstes samal ajal reljeefselt esile probleemide geomeetrilise sisu. Selline osa on vektorarvutusel kahtlemata ka diferentsiaalgeomeetrias. Kuid pinnateooria põhiküsimuste uurimisel osutub ka vektormeetod kohmakaks. Sellepärast võeti (esialgu n-dimensionaalsete ruumide uurimisel; $n > 3$) kasutusele nn. tensorarvutus, mis on tegelikult vektorarvutuse üldistus ja mille eesmärgiks on lihtsate operatsioonide abil selgitada koordinaadistiku valikust sõltumatuid — invariantseid — geomeetrilisi seoseid. Tensorsümboolikat iseloomustavad kokkuvõtlikud indekstähistused. Näiteks summat

$$a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3$$

tähistatakse sümboliga $a_\alpha x^\alpha$.

Ühe ja sama indeksi samaaegset esinemist antud avaldises kord ülemises ja kord alumises asendis mõistetakse seejuures summeerimiseeskirjana selle indeksi järgi (kolmemõõtmelises ruumis $\alpha = 1, 2, 3$). Selline eeskiri, mida nimetatakse Einsteini summeerimisreegliks, näib algul kunstlik, kuid osutub mõninga harjumise puhul endisest hoopis ülevaatlikumaks ja — lihtsamaks. Uues õpikus rakendatakse kõikjal niisugust tähistusviisi.

[illegible] probleemide puhul on tensorsümboolika indeksite rohkuse tõttu tülikas. Selles suhtes pakub tuntavat lihtsustust Cartani liikuva teljestiku meetod ja ω-arvutus, mis on kasutusel uue õpiku viimastes peatükkides.

Lineaarseiks diferentsiaalvormideks e. Pfaffi vormideks nimetatakse avaldisi kujul [2]

$$(Pdx + Qdy + Rdz),$$

kus P, Q, R on mingid diferentseeruvad koordinaatfunktsioonid ja dx, dy, dz — koordinaatdiferentsiaalid. Pfaffi vormi tähistatakse lühisümboliga ω.

Analoogiliselt kõveraga seotakse ka pinna iga punktiga kolm ristuvat telge, millest kaks on pinna puutujatasandil ja kolmandaks on pinna normaal vaadeldavas punktis. Üldiselt erineb igas pinna punktis selline teljestik teljestikust naaberpunktis, sellepärast räägitakse pinnaga seotud liikuvast teljestikust. Niisuguse teljestiku «liikumine» kirjeldab pinna iseärasusi ja on määratud teatud diferentsiaalvõrrandite süsteemiga. Sellel süsteemil on viis sõltumatut kordajat, mis osutuvad kõik Pfaffi vormideks; neid tähistatakse ω^1, ω^2, ω_1^2, ω_1^3, ω_2^3. Pinna struktuuri uurimine taandatakse nende vormide uurimisele, milleks osutubki kasulikuks ω-arvutus. Selles arvutuses on olulised kaks operatsiooni Pfaffi vormidega: väliskorrutamine ja välisdiferentseerimine, vastavalt sümbolitega $[\omega\omega]$ ja $[d\omega]$. Märgitud sümboolikat on võimalik kasutada ka matemaatilise analüüsi valemite lihtsustamiseks.

Seega iseloomustab vaadeldavat õpikut ühelt poolt käsitluse geomeetrilisus (liikuva reeperi meetod), teiselt poolt sümboolika äärmine lihtsus, mis võimaldab autoril väiksemahulises raamatus puudutada isegi programmi mittekuuluvaid küsimusi. Õppetöö kogemused näitavad, et uudne sümboolika ja meetod on kergesti omandatavad ning huvipakkuvad — peame silmas, et lühidust ja selgust on alati loetud matemaatilise arutluse voorusteks.

Märgime veel, et autor meenutab raamatu lugejale Tartu ülikooli tähtsat osa klassikalise diferentsiaalgeomeetria väljaarendamisel. Kõverateooria ja pinnateooria mõned põhilised küsimused lahendati esmakordselt nimelt Tartus M. Bartelsi (1830) ja K. Petersoni (1853) töödes. Suure tähtsusega on õpikus Petersoni valemitele antud geomeetriline tõlgendus — esmakordne õppekirjanduse raames.

Uus diferentsiaalgeomeetria õpik väärib iga eesti matemaatiku tähelepanu.

[2] Selline avaldis esineb näiteks üldistatud joonintegraalis integraalimärgi all.

MÕTTEID ÜHE ARTIKLI LUGEMISEL

Ü. Kaasik

Lugesin suure huviga artiklit [1], milles O. Rünk teeb ettepaneku praegu kasutusel oleva matemaatilise terminoloogia täpsustamiseks. Kahjuks jääb sm. Rünk aga n.-ö. poolele teele peatuma, piirdudes vaid *pöördteoreemi* ja *libaspöörandi* mõistete eristamisega. Kõigepealt nõuab see eristamine ise otsekohe omaette terminit teoreemi pööramise tulemuse jaoks üldse (kui me veel ei tea, kas tegemist on pöördteoreemi või libaspöörandiga). Nähtavasti võiks selliseks üldnimeks võtta sõna *pöörand*.

Elementaarne järjekindlus nõuab, et lauset, mis ei väljenda üldkehtivat tõde, nimetatakse mitte *teoreemiks*, vaid näiteks *libandiks*. Kui nüüd sõna *lause* soovitakse säilitada selle praeguses

[1] Rünk, O., Arutlusi pöördteoreemi mõiste ümber. — Matemaatika metoodiliste artiklite kogumik, II. Tallinn, 1964, lk. 16—20.

tähenduses, siis tuleks luua uus üldnimi, mis hõlmab nii teoreemi kui libandi. Teeksin siinkohal ettepaneku kasutada selleks terminit *koband* (kuni tõesuse küsimus pole selgitatud, on tegemist lihtsalt kobamisega!). Ühtlasi tuleb sealjuures laiendada mõistet *pöörand*, andes talle kobandi pööramise tulemuse tähenduse. Sõna *lause* võiks kasutada vaid sel juhul, kui tema päritolu pole tarvis rõhutada, seega lause hõlmab nii kobandid kui ka nende pöörandid.

Koos põhimõistete eneste niisuguse täpsustamisega tuleb muidugi täpsustada ka nende kasutamist. Näiteks senise «teoreemi tõestamise» asemel tuleb edaspidi «tõestada, et koband on teoreem». Analoogiliselt tuleb ütelda mitte «kehtib teoreem», vaid «on olemas teoreem»; mitte «seega on teoreem tõestatud», vaid «seega on tegemist teoreemiga»; mitte «see teoreem ei kehti», vaid «see koband on liband» jne.

Nüüd jõuame järgmise astme juurde. Võib näiteks osutuda, et libandi pöörand väljendab üldkehtivat tõde. Kas saab seda siis nimetada pöördteoreemiks? Nähtavasti mitte. Lausa iseenesestmõistetavalt tuleks siin kasutada nimetust *pöördliband*. Analoogiliselt võib vaja tulla ka *pöördkobandi* nimetust. Kui aga näidatakse, et libandi või üldse kobandi pöörand on liband, siis võiks vist kasutada lihtsalt nimetust *libandi libaspöörand* või vastavalt *kobandi libaspöörand* (näiteks kui siiski peaks tõestatama, et Fermat' suure kobandi pöörand on liband).

ÜLEVAADE TALLINNA MATEMAATIKASEMINARI TÖÖST AASTAIL 1958—1964

S. Ülm

Tallinna matemaatikaseminar alustas oma tööd 1958. a. tehn. tead. doktori N. Alumäe ja dotsent A. Särevi initsiatiivil. Seminar seadis oma eesmärgiks nii Tallinnas elunevate matemaatikute teaduslike tööde kui ka kaasaja matemaatika põhiliste saavutuste tutvustamise asjahuvilistele. Esialgu võtsid seminari töökoosolekuist osa Tallinna Polütehnilise Instituudi matemaatika kateedri õppejõud ja grupp TA Energeetika Instituudi juures töötavaid matemaatikuid. Et eelkõige oli vaja ette valmistada kaadrit elektronarvutil töötamiseks, siis toimusid 1958. a. lõpul ja 1959. a. kevadel esimesed ettekannetetsüklid teemal «Elektronarvutite konstruktiivsetest ja matemaatilistest alustest», kusjuures lektoritena esinesid M. Sinisoo ja Ü. Kaasik. Lisaks toimusid ettekanded iteratsioonimeetodite teooriast ja matemaatilisest loogikast.

Seminari tegevus intensiivistus aastal 1960, millal asutati ENSV TA Küberneetika Instituut. Sellest ajast peale on seminari töökoosolekud toimunud peaaegu regulaarselt kord nädalas à 2 tundi Küberneetika Instituudi ruumes. Seminari juhendajaks on arvutuskeskuse juhataja I. Petersen. Kõrvuti Küberneetika Instituudi ja Tallinna Polütehnilise Instituudi töötajatega on seminari tööst osa võtnud ka Teaduste Akadeemia teiste instituutide ja Elektrotehnika Teadusliku Uurimise Instituudi töötajaid.

Võib öelda, et ligikaudu $^1/_3$ ettekannetest on sisaldanud ettekandjate eneste teaduslikke tulemusi. Seminari töökoosolekutel on ettekannetega esinenud ka Tartu matemaatikud.

1960.—1961. a. peeti rida ettekandeid informatsiooniteooria, tõenäosusteooria, majandusmatemaatika, matemaatilise loogika, programmeerimise jne. alalt. Ettekannetega esinesid E. Pallum, U. Oper, P. Laufer, R. Pukk, M. Reigo, L. Liin, A. Lepamaa, B. Tiikma, I. Petersen, M. Kotli, I. Kull, U. Agur jt.

1962. a. jooksul toimusid Tallinna matemaatikaseminaris järgmised ettekanded:

V. Kuusik, Harilike diferentsiaalvõrrandite rajaülesannete lahendamine iteratsioonimeetodil.
2. H. Ruubel, Uuest ruutjuure arvutamise programmist.
3. I. Petersen, Funktsionaalide miinimumkohtade otsimise algoritmidest.
4. P. Laufer, Aritmeetilise seadme testprogrammid.
5. M. Kotli, Automaatsest programmeerimisest.
6. I. Sõrmus, Harilike diferentsiaalvõrrandite rajaülesannete lahendamine diferentsmeetoditega.
7. M. Sinisoo, Magnetlindil töötavate arvutusmasinate konstrueerimisest.
8. M. Tamm, Simpleksmeetodi modifikatsioonidest lineaarse programmeerimise ülesannete lahendamiseks I, II.
9. I. Petersen, Mittelineaarsete võrrandite lahendamise mõned algoritmid ja nende koonduvus Hilberti ruumis.
10. T. Tobias, Wieneri mõõdu kasutamine kvadratuurvalemite teoorias.
11. T. Tiits, Funktsionaalide optimaalsest aproksimatsioonist.
12. V. Kuusik, Interpreteeriv programm arvutamiseks transformeeruva komaga.
13. V. Poll, Funktsioonide lähendamine polünoomidega ja vastav standardprogramm.
14. U. Oper, Regressioonanalüüsi programm.
15. A. Männil, Silumisprogrammidest.
16. H. Ruubel, Ühest silumisprogrammist.
17. R. Pukk, Ühest mittelineaarse programmeerimise meetodist.
18. M. Sinisoo, Väikesemõõtmeliste ferriitelementide kasutamisest arvutustehnikas.
19. H. Salum, Ülevaade kaasaegsetest elektronarvutitest.
20. H. Salum, Analüüsiv testprogramm.
21. M. Levin, Kvadratuurvalemite teooriast I, II.
22. I. Petersen, Algoritm mittelineaarse programmeerimise ülesannete lahendamiseks.
23. S. Ulm, Interpolatsioonimeetoditest mittelineaarsete võrrandite lahendamiseks Banachi ruumis.
24. M. Kotli, Programmeeriva programmi väljatöötamise käigust elektronarvutile M-3.
25. S. Ulm, Ühest interpolatsioonimeetodite klassist Hilberti ruumis.
26. M. Levin, Kordsete integraalide ligikaudsest arvutamisest I, II.
27. I. Mauer, Ülevaade Novosibirski konverentsi tööst.

Lisaks ülaltoodud ettekannetele viidi V. Kuusiku juhendamisel läbi 16-tunnine õppus teemal «Algol-60».

1963. a. organiseeriti pikem ettekannetetsükkel funktsioonide lähendamisteooriast, kus ettekannetega esinesid M. Levina, M. Levin, A. Särev. Seminari töökavas oli veel rida ettekandeid Wieneri integraali teooriast (T. Tobias) ja ettekanne reguleerimisobjektide dünaamiliste karakteristikute määramisest statistiliste meetoditega (E. Lelumees). Aasta lõpul toimus 6-tunniline seminar programmeerimise alal, kus M. Kotli ja V. Kuusik andsid ülevaate nende poolt väljatöötatud automaatse programmeerimise süsteemist arvutile M-3.

Käesoleval aastal on ühe suurema üritusena organiseeritud (seoses uue elektronarvuti saamisega) 20-tunniline seminar programmeerimisest elektronarvutile Minsk-2, mille viisid läbi M. Kotli, A. Männil ja A. Pihlak. Teiseks toimus mittelineaarse programmeerimise seminar, kus tutvuti vastavate meetoditega ja nende rakendusvõimalustega. Seminari raames peeti 10 ettekannet (ettekandjad M. Levin, M. Tamm, J. Kajari, H. Kaarlep, E. Leinemann, I. Mauer, S. Ulm ja A. Tavast). Lisaks nendele on käesoleval aastal toimunud järgmised ettekanded:

1. S. Ulm, Mittelineaarsete transtsendentsete võrrandite ja võrrandisüsteemide lahendamisest I, II, III.
2. R. Jürgenson, Diferentsiaalvõrrandi ligikaudse lahendi vea hindamisest.
3. V. Kuusik, Ülevaade automaatse programmeerimise keeltest.
4. I. Petersen, Elementaarne ülevaade katsete planeerimise teooriast.
6. L. Heinla, Integraalvõrrandite lahendamisest I, II.

Seminari lähemas tööplaanis on ettekannete läbiviimine matemaatilise statistika ja hüperboolsete osatuletistega diferentsiaalvõrrandite numbrilise lahendamise meetodite alalt.

DOTSENT J. GABOVITŠ 50-AASTANE

30. augustil 1964. a. saab 50-aastaseks Eesti Põllumajanduse Akadeemia matemaatika kateedri dotsent Jakob Gabovitš.

Juubilar sündis Tartus, kuid kasvas ja sai alghariduse Tallinnas. Pärast keskkooli lõpetamist 1932. aastal ja sõjaväeteenistust astus ta 1934. a. sügisel Tartu ülikooli, algul keemia-, hiljem matemaatikaosakonna üliõpilaseks. Õppimist pidevalt jätkata tal ei õnnestunud, korduvalt tuli katkestada õpingud ja asuda tööle (matemaatika tundide andjana, panga arveametnikuna jne.).

Suure Isamaasõja aastail töötas juubilar Kaasanis moodustatud eesti tööstuskooli õpetajana. Pärast Eesti NSV-sse tagasipöördumist määrati ta Tartu tööstuskooli direktoriks. Järgnes ülikooli lõpetamine eksternina 1945. aastal, aspirantuur (1946—1949) ning kandidaadiväitekirja kaitsmine 1950. aastal. Ajavahemikus 1947—1952 luges J. Gabovitš terve rea kursusi TRÜ üliõpilastele, alates 1952. aastast töötab ta aga EPA-s matemaatika kateedris (1960. aastast dotsendina).

Juubilari teadusliku tegevuse võib jagada kolmeks perioodiks. Esimene periood (1935—1941) oli pühendatud teoreetilisele astrofüüsikale. Üheksast sel alal avaldatud uurimusest tuleks eriti mainida kaht probleemi, kus J. Gabovitš osutus pioneeriks: orbiitide paigutused kolmiktähtedes ning valguse neeldumine titaanoksüüdis punaste tähtede atmosfääris.

Teine periood (1945—1950) kuulus väitekirjaga seotud uurimustele, mille põhilise tulemusena õnnestus konst-

uuerida algoritm kuupirratsionaalile parimaid ratsionaallähendeid andvate perioodiliste «ahelmurdude» saamiseks.

Kolmandat perioodi, mis ulatub tänaseni, iseloomustab väga laiahaardeline temaatika. Enam kui kahekümnes artiklis käsitleb J. Gabovitš küsimusi arvuteooriast, analüütilisest geomeetriast, matemaatilisest analüüsist, lähendusmeetoditest ja mujalt.

Eriti tuleb märkida dots. Gabovitši aktiivset tegevust teaduse populariseerijana. Seda tõendab kas või asjaolu, et ta on praegu kahe matemaatilise väljaande tegevtoimetajaks («EPA Toimetised», «Matemaatika metoodiliste artikilte kogumik»), kahe toimetuskolleegiumi liikmeks («Matemaatika ja kaasaeg», «Loodus ja matemaatika») ning Tartu matemaatikaseminari «isaks». Lõpuks ei saa mainimata jätta, et juubilar on ka tunnustatud maletaja (eeskätt probleem- ja kirimale), võimekas muusik ja — mis peaasi — alati lõbus ning abivalmis seltsimees.

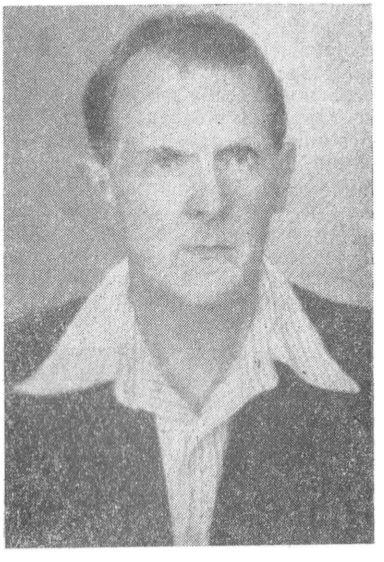
Ü. Kaasik

ÕPETAJA A. LEHIS 65-AASTANE

15. mail 1964. a. tähistati ENSV teenelise õpetaja, Tartu Kaugõppekeskkooli direktori A. Lehise 65. sünnipäeva.

Arvo Armini p. Lehis sündis 15. mail 1899. a. Saaluse vallas Võrumaal. Pärast keskhariduse omandamist 1918. a. tolleaegses Petrogradis töötas juubilar õpetajana Võrus ja Räpinas. 1924. a. alustas ta õpinguid Tartu Ülikoolis, mille füüsika-matemaatikaosakonna lõpetas 1928. a. Aastatel 1928—1930 töötas õpetajana Võru Õpetajate Seminaris, 1930—1932 Rakvere Õpetajate Seminaris ja 1932—1944 Tartu Õpetajate Seminaris. 1929.—1940. a. võttis osa lektorina kõigist matemaatika õpetajate suvekursustest. Hiljem oli mitmel korral õpetajate täienduskursuste juhatajaks ja lektoriks Tartus. 1945.—1950. a. töötas Tartus haridusosakonna inspektorina, seejärel õpetajana Tartu keskkoolides. 1945.—1959. a. oli Tartu matemaatika ainekomisjoni esimees. Pikka aega töötas ENSV Haridusministeeriumi matemaatika ainekomisjoni liikmena. Juubilar on Tartu Kaugõppekeskkooli rajaja ja alates 1959. a. selle kooli direktor. Aastail 1951.—1960. a. jagas A. Lehis oma rikkalikke pedagoogilisi kogemusi TRÜ matemaatikaosakonna üliõpilastele, kes olid tema juures pedagoogilisel praktikal.

A. Lehiselt on ilmunud rida metoodilisi artikleid ajakirjades «Teel Töökoolile», «Nõukogude Kool» ja «Nõukogude Õpetaja». Ta on ka mitmete matemaatikaõpikute autor: 1934. a. ilmusid tema sulest «Matemaatika töövihikud» V—VI kl., 1948. a. «Matemaatika õpik» IV kl., 1959. a. «Matemaatika» V kl. (kaasautorid J. Kallak ja A. Kasvand).



A. Lehist on korduvalt autasustatud aukirjaga. 1957. a. sai ta rinnamärgi «Haridustöö eesrindlane» ja 1959. a. omistati talle ENSV teenelise õpetaja aunimetus.

Nendest kuivadest biograafilistest andmetest ilmneb juubilari pedagoogilise tegevuse mitmepalgelisus. A. Lehis on eesti koolimatemaatika veteran, kelle väsimatu ja viljakas töö on lahutamatult seotud meie hariduseluga. Kustumatu mulje on jätnud A. Lehise õpilastele — aga neid leidub kõigis Eesti nurkades ja kõigil tegevusaladel — tema range pedagoogiline nõudlikkus ja printsipiaalsus, mis on harmooniliselt ühendatud inimeste sügava tundmise, südamlikkuse ja huumorimeelega. Kõigile oma kasvandikele ja kolleegidele on juubilar aastakümnete jooksul sisendanud kustumatut pedagoogilist tuld. Jätkugu tal veel paljude aastate jooksul temale omast väsimatut energiat selle tule jagamiseks!

UUSI TEADUSTE KANDIDAATE

5. juunil kaitses Tartu Riiklikus Ülikoolis kandidaadidissertatsiooni «Galjorkini tüüpi meetodite täpsusest» matemaatilise analüüsi kateedri assistent **Gennadi Vainikko.**

Töös käsitletakse diferentsiaalvõrrandite rajaülesannete ligikaudset lahendamist. Tuletatakse veahinnangud lähislahenditele, mis on arvutatud praktikas sageli kasutatavate (nn. Galjorkini tüüpi) meetoditega. Dissertanti juhendas dots. E. Tamme.

Mõlemad oponendid, prof. G. Kangro ja prof. S. G. Mihlin, andsid tööle kõrge hinnangu ning TRÜ Füüsika-Matemaatikateaduskonna nõukogu otsustas omistada G. Vainikkole füüsika-matemaatikakandidaadi kraadi.

G. Vainikko on üks nooremaid teadlasi vabariigis, kes on jõudnud kandidaadi kraadini.

Dissertant sündis 31. mail 1938. a. Kondopoga linnas Karjala ANSV-s, seejärel aga siirdus perekond Eesti NSV-sse. Huvi matemaatika vastu tekkis G. Vainikkol tänu isale juba lapsepõlves. Õpingute vältel Kehra keskkoolis süvendasid huvi täppisteaduste vastu matemaatikaõpetaja J. Kork ja füüsikaõpetaja O. Vinkmann.

Aastail 1956—1961 õppis G. Vainikko TRÜ matemaatikaosakonnas, seejärel aastail 1961—1963 aspirantuuris; kuna dissertatsioon valmis enne tähtaega, asus G. Vainikko juba 1963. a. sügisel tööle TRÜ matemaatilise analüüsi kateedrisse.

19. juunil kaitses TRÜ Füüsika-Matemaatikateaduskonna nõukogu ees kandidaadidissertatsiooni «Kõrgemat järku diferentsiaalgeomeetriast» algebra ja geomeetria kateedri vanemõpetaja **Maido Rahula.**

Töös uuritakse muutkonna puutujavektorite kihtruume ja nende teisenduste rühmi, lähtudes kujutuse diferentsiaali ja Lie' diferentseerimise mõis test. Dissertatsioon valmis dots. Ü. Lumiste juhendamisel.

Oponentideks olid prof. B. L. Laptev (Kaasani ülikool) ja dots. L. J. Jevtušik (Moskva ülikool). M. Rahulale omistati füüsika-matemaatikakandidaadi kraad.

M. Rahula sündis 20. mail 1936. a. Kärevere külas Paide rajoonis. Õppis Tännasilma algkoolis ja Türi keskkoolis. Lõpetas 1954. a. Krasnoturanski keskkooli Krasnojarski krais. 1954.—1959. a. oli M. Rahula Tomski Ülikooli Mehhaanika-Matemaatikateaduskonna üliõpilane. Geomeetria vastu tundis huvi juba esimesel kursusel. Ülikooli lõpetamisel suunati M. Rahula aspirantuuri, mille ta lõpetas Tartus.

ÜLELIIDULINE MATEMAATIKAOLÜMPIAAD

Käesoleva aasta 11.—15. aprillini toimus Moskvas üleliidulise matemaatikaolümpiaadi neljas voor. Selle organiseeris Vene NFSV Haridusministeerium koos NSV Liidu ning VNFSV kõrgema ja kesk-erihariduse ministeeriumidega ning ÜLKNÜ Keskkomitee.

Vastavalt olümpiaadi juhendile saatis iga vabariik viimasele voorule neljaliikmelise võistkonna. Meie vabariiki esindasid Moskvas Tallinna II keskkooli 11. kl. õpilased Oleg Kangur ja Paul Tammelo, Tartu I keskkooli 11. kl. õpilane Tõnu Haldre ning Märjamaa keskooli 11. kl. õpilane Evald Übi. Kümmet paremat viieteistkümne vabariigi võistkondade hulgast ning parimaid üksiklahendajaid autasustati Moskva Riikliku Ülikooli aulas toimunud lõppaktusel diplomite ja raamatutega. Eesti NSV võistkond saavutas seitsmenda koha Vene NFSV, Ukraina NSV, Armeenia NSV, Gruusia NSV, Läti NSV ja Kirgiisi NSV järel. Oleg Kangur, Paul Tammelo ja Tõnu Haldre loeti II järgu kiituskirja väärilisteks.

Olümpiaad ise toimus pühapäeval, 12. aprillil Moskva Riikliku Ülikooli peahoones. Peale vabariikide võistkondade kogunesid sinna ka Vene NFSV oblastite ning linnade olümpiaadist osavõtjad. Viimase korraldajaks oli Moskva Riiklik Ülikool.

Olümpiaadide ülesanded olid jaotatud klasside kaupa, igale klassile 5 ülesannet. Lahendamisajaks oli ette nähtud 5 tundi.

Olümpiaadide tulemuste põhjal komplekteeritakse ka NSVL võistkond rahvusvahelisele matemaatikaolümpiaadile. See peetakse käesoleva aasta suvel Moskvas.

Olümpiaadi ülesanded on avaldatud rubriigis «Täiendusi koolimatemaatikale» (lk. 60—61).

K. Velsker

MATEMAATIKAOSAKONNA LÕPETANUTE 10. KOKKUTULEK

1955. aasta märtsis otsustasid TRÜ matemaatikaosakonna tolleaegsed üliõpilased korraldada kohtumisõhtu oma endiste kaasüliõpilastega, kes olid õpingud juba lõpetanud. Kohtumisõhtule sõitis esindajaid kõigist viiest sõjajärgsest matemaatikaosakonna lõpetanute lennust. Osavõtjate ühine arvamus oli, et niihästi mõttevahetus vabariigi erinevates paikades töötavate kolleegide vahel kui ka kuulatud teaduslikud ettekanded olid kasulikud; sellist üritust maksaks korrata.

Nüüd, üheksa aastat hiljem, võime matemaatikaosakonna traditsioonide hulgas lugeda üheks populaarsemaks nimelt osakonna lõpetanute kokkutulekuid. Iga aasta märtsikuus saadavad III kursuse üliõpilased kutsed laiali kõigile sõjajärgseil aastail TRÜ lõpetanud matemaatikutele (nende arv ulatub juba mitmesajani) ning mõtlevad põhjalikult läbi kõik, mis on õhtu jooksul kavas. Ja märtsi viimasel laupäeval toimubki traditsiooniline kokkutulek, kus on tingimata kavas humoristlik kroonika osakonna elus aasta jooksul toimunud tähtsamatest sündmustest, mitmesugused «jõukatsumised» üksikute lendude vahel — niihästi matemaatilise laadiga kui ka muid väärtuslikke omadusi nõudvad.

Käesoleval aastal toimunud matemaatikute kokkutulek oli kümnes.

Kokkutuleku teaduslikus osas esinesid arvutuskeskuse töötajad A. Oja, K. Pukk ja M. Krull ülevaatega TRÜ arvutuskeskuses teostatavatest töödest, TA Küberneetika Instituudi esindaja U. Oper tutvustas lühidalt oma asutuses lahendatavaid probleeme. J. Reimand kõneles matemaatika metoodika alal töötavate õppejõudude probleemidest, peatudes lähemalt majandusmatemaatika õpetamisel.

Kogumiku «Matemaatika ja kaasaeg» ühiskondliku toimetuskolleegiumi nimel esines Ü. Kaasik, kes tutvustas kokkutulnud matemaatikuid nii eesmärkide ja ülesannetega, mis toimetuskolleegium on nimetatud kogumikule püstitanud, kui ka lähemate perspektiividega. Koosviibijad kinnitasid väljaande vajalikkust ning aktuaalsust ja esitasid mõningaid omapoolseid ettepanekuid avaldamist väärivate materjalide kohta.

Mõttevahetus jätkus kohvitassi juures Tartu II keskkooli saalis, mida dekoreerisid üliõpilaste valmistatud sõbralikud šaržid matemaatikaosakonna populaarsematest õppejõududest.

III kursuse üliõpilane Tombak luges ette «aruande», mis seekord oli värsivormis ja üle 3 meetri pikk (autoriks matemaatilise analüüsi kateedri laborant L. Karu).

Matemaatilise viktoriini võitis 1962. aastal lõpetanud lend. «Teatejooksus» oli aga vaja lahendada pähkel, mis mitmele võistkonnale käis üle jõu, — kokku panna tükkideks lõigatud malelaud —, kuid arvukalt esindatud 1959. a. lõpetajad said ka sellega toime ning võitsid siin esikoha. Lõpuks tõsteti klaas ka aktiivsemate matemaatikute — E. Jürimäe ja L. Luha terviseks, kes olid kõikidest kokkutulekutest osa võtnud, ning öeldi kõigile kunagistele kaasüliõpilastele — jällenägemiseni 1965. aasta märtsis!

AUHINNATÖID

TRÜ matemaatikaosakonna üliõpilased esitasid 1963/64. õppeaastal järgmised võistlustööd.

1. A b e l, M a t i (III k.). Summeeruvusteguritest Cesaro menetluse puhul. (Juhendaja dots. S. Baron.)

2. S a k k o v, E l m a r - **O s k a r** (V k.). Ristkülikukujulise plaadi pärastkriitilise staadiumi analüüs silindrilisel läbipaindel. (Juhendaja prof. Ü. Lepik.)

3. T ü r n p u, H e i n o (V k.). Abstraktsed koonduvus- ja summeeruvustegurid α-järku Rieszi menetluse jaoks. (Juhendajad prof. G. Kangro ja dots. S. Baron.)

4. V a i n i k k o, I v i (V k.). Nõtkete ümmarguste plaatide paine temperatuuripingete ja materjali mittehomogeensuse arvestamisega elastilis-plastiliste deformatsioonide piirkonnas. (Juhendaja prof. Ü. Lepik.)

Kõik mainitud tööd tunnistati esimese auhinna vääriliseks.

TEADUSLIKE KONVERENTSIDE MATERJALE

Tartu Riiklikus Ülikoolis toimus 26.—28. märtsini 1964. a. XIX ü l i õ p i l a s t e t e a d u s l i k k o n v e r e n t s. Matemaatikasektsioonis peeti järgmised ettekanded.

1. M. A b e l (mat. III k.). Summeeruvusteguritest Cesaro menetluse puhul. (Juhendaja dots. S. Baron.)

2. E. S a k k o v (mat. V k.). Elastilis-plastiliste plaatide pärastkriitilise staadiumi analüüs. (Juhendaja prof. Ü. Lepik.)

3. H. T ü r n p u (mat. V k.). Summeeruvusteguritest itereeritud menetluse puhul. (Juhendajad prof. G. Kangro ja dots. S. Baron.)

4. I. V a i n i k k o (mat. V k.). Muutuva paksusega nõtkete plaatide arvutamine. (Juhendaja prof. Ü. Lepik.)

Tallinna Polütehnilises Instituudis korraldati 20.—24. aprillini 1964 a. B a l t i l i i d u v a b a r i i k i d e, V a l g e v e n e N S V j a K a l i n i n g r a d i o b l a s t i k õ r g e m a t e õ p p e a s u t u s t e ü l i õ p i l a s t e X t e a d u s l i k tehniline konverents. Konverentsi 26-s sektsioonis peeti kuueteistkümne kõrgema õppeasutuse üliõpilaste poolt 480 teaduslikku ettekannet. Eesti NSV üliõpilastelt oli kokku 120 ettekannet; neist käsitlesid matemaatika ja teoreetilise mehhaanika probleeme järgmised.

1. M. Abel (TRÜ III k.). О множителях суммируемости для метода Чезаро. (Juhendaja dots. S. Baron.)
2. S. Idnurm (TPI IV k.). Расчет металлических тонкостенных балок на прочность и устойчивость. (Juhendaja dots. J. Aare.)
3. I. Joosepson (TPI IV k.). Геометрическая интерпретация второго метода Ляпунова. (Juhendaja v.-õp. B. Tiikma.)
4. H. Kasemägi (TPI III k.). Повторное сложное движение точки. (Juhendaja v.-õp. H. Relvik.)
5. A. Laur (TPI dipl.). О расчете висящей конструкции на тросах эллипсообразного планового очертания. (Juhendaja dots. V. Kulbach.)
6. A. Remmel ja I. Kaasik (TPI III k.). Обзор о применении программированного обучения и обучающих машин. (Juhendajad dots. U. Agur ja v.-õp. M. Jaagus.)
7. J. Riima (TPI IV k.). Релативистский расчет космической ракеты. (Juhendaja dots. O. Silde.)
8. E. Sakkov (TRÜ V k.). Исследование послекритической стадии упруго-пластических пластин. (Juhendaja prof. Ü. Lepik.)
9. V. Sinjakov ja A. Sobtšenko (TPI IV k.). Расчет конструкций на колебание матричным методом. (Juhendaja dots. L. Narets.)
10. H. Türnpu (TRÜ V k.). О множителях суммируемости итерированного метода Рисса. (Juhendajad prof. G. Kangro ja dots. S. Baron.)
11. I. Vainikko (TRÜ V k.). Расчет гибких круглых пластин переменной толщины. (Juhendaja prof. Ü. Lepik.)
12. A. Väljataga (TPI dipl.). Программа для электронно-вычислительной машины расчета неразрезных балок. (Juhendaja dots. A. Allikas.)

VABARIIKLIK TÄPPISTEADUSTE OLÜMPIAAD

Vabariikliku täppisteaduste olümpiaadi lõppvoor toimus Tartus 20.—23. märtsini käesoleval aastal.

Siia kogunes vabariigi 46-st keskkoolist 102 õpilast, kes olid eelmistes voorudes saavutanud parimaid tulemusi.

Kolme päeva jooksul lahendasid osavõtjad keemia, füüsika ja matemaatika ülesandeid. Tulemused tehti teatavaks 23. märtsil ülikooli aulas toimunud pidulikul koosolekul, kus anti ka võitjaile üle auhinnad.

Matemaatikas osutusid tugevaimaks Tallinna II keskkooli õpilased (matemaatika õpetaja K. Kallaste), kes saavutasid kolm esikohta. Nii jäi sellesse kooli edasi ka Tartu Riikliku Ülikooli ränddiplom.

Hindamist väärib ka Tartu I Keskkooli (vabariigi parim kool füüsikas!) õpilase Tõnu Haldre tubli esinemine, kes jõudis kõigil kolmel alal esimese kümne hulka (füüsikas II koht).

Individuaalselt osutusid matemaatika alal parimaiks järgmised õpilased:

1.	Oleg Kangur	Tallinna II	keskkooli	11.	klass
2.	Paul Tammelo	Tallinna II	„	11.	„
3.	Gunnar Kose	Tallinna II	„	11.	„
4.	Tõnu Haldre	Tartu I	„	11.	„
5.	Evald Übi	Märjamaa	„	11.	„
6.	Jaan Tiba	Tallinna X	„	10.	„
7.	Vello Nurmelo	Tallinna II	„	11.	„
8.	Taivo Arak	Tallinna XXI	„	11.	„
9.	Ants Ronk	Tallinna XLVI	„	11.	„
10.	Irina Grinblat	Tallinna XXIII	„	11.	„

Bibliograafia

Eesti NSV-s ilmunud matemaatikaalase kirjanduse nimestik Jaanuar—aprill 1964

(Koostanud E. Annus)

RAAMATUD

Harjutuste kogumik füüsika, keemia ja matemaatika alalt. Trt., 1964. 60 lk. (Tartu Riiklik Ülikool.) — Trükitud rotaprindil 1500 eks.

K r a i z m e r, L. **Bioonika.** Tln., ERK, 1964. 68 lk. — Bibliogr. lk. 67.

K u l d m a, H. **Väsimustugevuse arvutamise alused masinaehituses.** Tln., 1964. 44 lk. (Tallinna Polütehniline Instituut.) — Trükitud rotaprindil 600 eks.

K u l l, I. **Matemaatiline loogika.** Tln., ERK, 1964. 221 lk.

Küberneetikast. Kirjanduse soovitusnimestik. Tln., 1964. 16 lk. (M. Gorki nim. Tallinna Keskraamatukogu.)

L u m i s t e, Ü. **Geomeetria alused.** I. Trt., 1964. 160 lk. (Tartu Riiklik Ülikool.) — Trükitud rotaprindil 400 eks.

Matemaatika ja kaasaeg. Populaarteaduslik kogumik. 1. Trt., 1963. 91 lk. (Tartu Riiklik Ülikool.)

Sisu: E. J ü r i m ä e. Hulgateoreetilistest paradoksidest. — Kuidas püüda kõrbes lõvi? — A. A. L j a p u n o v, S. V. J a b l o n s k i. Küberneetika teoreetilisi probleeme. (Järgneb.) — R. P a l m. Küberneetika ja keeleteadus. — Ü. K a a s i k. Kuupvõrrandi trigonomeetriline lahendamine. — E. T a m m e. Kõrgemat järku aritmeetilised progressioonid. — Mõnda induktsioonist. — Ü. L u m i s t e. Lehekülgi matemaatika ajaloost Eestis. (Järgneb.) — L. E. M a i s t r o v. Pügalpulkadest ja vanimatest numbrimärkidest. — E. J ü r i m ä e. I. N. Vekua — Lenini preemia laureaat. — I. K u l l, E. T i i t. Konverents «Kaasaegne matemaatika ja tema rakendusalad». — A. O j a, K. P u k k. Uus võimas elektronarvuti meie vabariigis. — M. R a h u l a, E. T i i t. Tartu matemaatikaseminar. — Kroonika. — Bibliograafia. — Ülesandeid.

M e r i l o, H. **Tõenäosusteooria ja matemaatilise statistika elemendid.** Trt., 1964. 22 lk. (Eesti Põllumajanduse Akadeemia.) — Trükitud rotaprindil 1500 eks.

M e r i l o, H. **Analüütiline geomeetria.** Trt., 1964. 100 lk. (Eesti Põllumajanduse Akadeemia.) — Trükitud rotaprindil 1300 eks.

R i i v e s, S. j a R u u b e l, A. **Kujutava geomeetria kontrolltööde metoodiline juhend.** Trt., 1964. 19 lk. (Eesti Põllumajanduse Akadeemia.) — Trükitud rotaprindil 600 eks.

9. klassi uue matemaatika õpiku katsetamisest. Tln., 1963. 20 lk. (Eesti NSV Haridusministeerium.)

М у л л а р и, Р. Р. **Исследования по теории многомерных поверхностей евклидова пространства.** Автореферат. Тарту, 1963. 8 с. (Тартуский гос. ун-т.)

Ю р г е н с о н, Р. Р. **Об оценке погрешности приближенных методов при решении дифференциальных уравнений.** Автореферат. Тарту, 1964. 15 с. (Тартуский гос. ун-т.)

Р а х у л а, М. О. **К дифференциальной геометрии высшего порядка.** Автореферат. Тарту, 1964. 7 с. (Тартуский гос. ун-т.)

В а й н и к к о, Г. М. **О точности методов типа Галеркина.** Автореферат. Тарту, 1964. 14 с. (Тартуский гос. ун-т.)

PERIOODIKAS JA KOGUMIKKUDES ILMUNUD ARTIKLID.

Eesti Põllumajanduse Akadeemia teaduslike tööde kogumik. Trt., 1963.

Nr. 31. Matemaatika-alased tööd (venek., resümeed eesti ja inglise või saksak.):

E s p e n b e r g, H. Jada summeeruvusteguritest Euler-Knoppi menetluse puhul. — R u u b e l, A. Projektsioonitasandi mitteühtlase võnkuva kokkusurumise kasutamine pindade lõikumisülesannete lahendamisel. — T i i t, E. Faktoranalüüsist. — V a l l n e r, H. Anisotroopsete rõngasplaatide kandevõimest. — G a b o v i t š, J. Algebralise arvu astmest. — G a b o v i t š, J. Ruutjuurte arvutamisest üheliikmelise perioodiga ahelmurdude abil. — G a b o v i t š, J. Ühest diofantilisest kuupvõrrandist. — G a b o v i t š, J. Ühest J. Nuudi ülesandest ja selle üldistusest.

*

Arvutuslükati 9000-aastane? — «Tehnika ja Tootmine», 1964, nr. 4, lk. 41.

B o r e s k o v, G. j a S l i n k o, M. Keemilised protsessid ja matemaatika. — «Tehnika ja Tootmine», 1964, nr. 1, lk. 6—7.

G a b o v i t š, J. A. Anuma optimaalsed mõõtmed. — «Tehnika ja Tootmine», 1964, nr. 4, lk. 40.

Inimorganismi soojamajanduse küberneetika. — «Tehnika ja Tootmine», 1964, nr. 1, lk. 34—36.

J ü r i m ä e, E. Lenini preemia N. Vekuale. — «Eesti Loodus», 1964, nr. 1, lk. 58—59.

K o s e n k r a n i u s, H. j a S i i m a n n, Ü. Perfoplaat — lihtne seade programmeeritud õpetamiseks. — «Nõukogude Kool», 1964, nr. 3, lk. 192—196; nr. 4, lk. 293—297.

K ä r n e r, O. Funktsioonide graafikute ehitamine valmisgraafikute abil. — «Nõukogude Kool», 1964, nr. 1, lk. 75—79; nr. 2, lk. 144—149.

L i n g, H. Visuaalperfokaartide ühest kasutamisviisist. — «Eesti Loodus», 1964, nr. 2, lk. 109—111.

L u m i s t e, Ü. Kujundid ja kinemaatika. [Reuleaux' kõvera omadustest.] — «Tehnika ja Tootmine», 1964, nr. 1, lk. 30—31.

M i t t, E. ja P r i n i t s, O. Teadmiste tase on tõusnud. [Kontrolltööde tulemustest matemaatikas 9. ja 11. klassides.] — «Nõukogude Kool», 1964, nr. 1, lk. 56—62.

P o v i l e i k o, R. «Müstiline» 1, 618. [Proportsioonidest.] — «Tehnika ja Tootmine», 1964, nr. 3, lk. 34—35.

P r e e m, R. Universumi ehituse ja arengu probleeme. — «Eesti Loodus», 1964, nr. 1, lk. 1—6.

P r i n i t s, O. Seostada koolimatemaatika eluga. — «Nõukogude Kool», 1964, nr. 4, lk. 316—319. (Järgneb.)

R o s e n f e l d, I. Masin mängib malet. — «Tehnika ja Tootmine», 1964. nr. 2, lk. 45—46.

П а л ь м, В. А. Некоторые практические проблемы использования корреляционных уравнений. — Труды конференции по проблемам применения корреляционных уравнений в органической химии. Т. 2. Тарту, 1963, с. 136—141. Резюме на англ. яз.

Т о б и а с, Т. О среднеквадратном приближении линейных функционалов. — Известия Акад. наук ЭССР. Серия физ.-мат. и техн. наук, Т. 13, 1964. № 1, с. 70—82. — Резюме на эстон. и англ. яз.

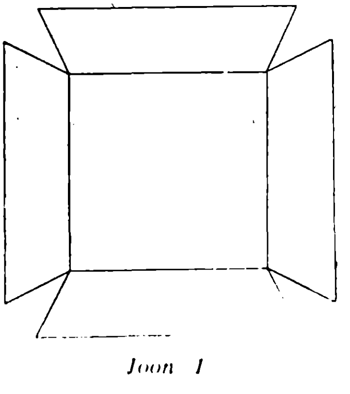
Ülesandeid

A. Ülesandeid elementaarmatemaatikast

1. Kolm kümnest suuremat algarvu moodustavad aritmeetilise progressiooni. Tõestada, et progressiooni vahe jagub kuuega.
2. Võrrandite $x^2 + Ax + B = 0$ ja $x^2 + Cx + D = 0$ lahendid on reaalsed ning absoluutväärtuselt väiksemad ühest. Tõestada, et võrrandi $x^2 + \frac{A+C}{2} x + \frac{B+D}{2} = 0$ lahendid on ka absoluutväärtuselt väiksemad ühest.
3. Milliseid korrapäraseid hulknurki on võimalik saada kuubi lõikumisel tasandiga?
4. Kolmnurka on joonestatud 3 ringjoont raadiustega r_1, r_2, r_3. Ringjooned puutuvad kolmnurga kahte külge ja siseringjoont. Leida siseringjoone raadius.

B. Ülesandeid kõrgemast matemaatikast

1. Tõestada, et
$$16 \operatorname{arccot} 19{,}8 + 48 \operatorname{arccot} 21 + 12 \operatorname{arccot} 239 = \pi.$$
2. Ellipsi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ mingist punktist on tõmmatud kaks fokaalkõõlu tõusudega k_1 ja k_2 (vt. M. Rahula artiklit käesolevas kogumikus). Leida niisuguse kolmnurga pindala, mille kaheks küljeks on need fokaalkõõlud.
3. Ruudukujulise papitüki nurkadest lõigatakse välja võrdsed nelinurgad (vt. joon. 1). Ülejäänud osast valmistatakse tüvipüramiidikujuline ilma kaaneta karp, mille külgtahkude ja põhja vaheline nurk on 120°. Millised peavad olema karbi mõõtmed, et ta ruumala oleks maksimaalne?



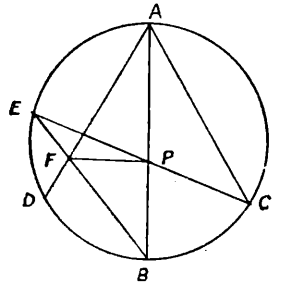
Joon. 1

4. Olgu antud naturaalarvude jada N, naturaalarvude ruutude jada N^2, naturaalarvude kuupide jada N^3 jne. Defineerime operaatori H_k, mille rakendamine jadale tähendab selle jada k-nda, $2k$-nda jne. elemendi väljajätmist. Peale selle olgu S operaator, mis seab jadale vastavusse tema osasummade jada. Lihtne on veenduda, et $N^2 = S(H_2(N))$. Tõestada, et
$$N^3 = S(H_2(S(H_3(N))))$$ ja
$$N^4 = S(H_2(S(H_3(S(H_4(N))))))$$

KOGUMIKU ESIMESE VIHIKU ÜLESANNETE LAHENDUSED

A. Elementaarmatemaatika

Ülesande nr. 1 lahendus. 5 õpilasel oli matemaatikas puudulik hinne, ülejäänud 19 õpilasel oli matemaatika hinne vähemalt rahuldav. Kuna $16+13+ +8=2\cdot 18+1$, siis kõik need 19 õpilast töötavad ringides (neist 18 samaaegselt kahes ringis ning üks õpilane ainult ühes ringis) ning nende hinneteks matemaatikas on «hea» või «rahuldav». Järelikult ükski õpilane ei saanud hinnet «väga hea». Kuna 16 õpilast töötasid matemaatikaringis, siis 3 või 2 õpilast on samaaegselt nii kirjandus- kui ka keemiaringi liikmed (vastavalt sellele, kas õpilane, kes töötab ainult ühes ringis, kuulub matemaatikaringi või mõnda teise ringi).



Ülesande nr. 2 lahendus. Kuna $\angle BAC=\angle BAD$ ja $\angle ABE=\angle ACE$, siis $\triangle ABF\sim\triangle ACP$ (vt. joonis). Nende kolmnurkade sarnasusest järeldub, et

$$\frac{AP}{AF}=\frac{AC}{AB}.$$

Kolmnurkade sarnasuse II tunnuse põhjal $\triangle AFP\sim\triangle ABC$. Kuna $\angle ACB=90°$, siis ka $\angle FPA=90°$.

Ülesande nr. 3 lahendus. Tingimuse $\sin\frac{x}{2^n}\neq 0$ põhjal $x\neq k\cdot 2^n\pi$ ($k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \ldots$). Esitame antud võrrandi kujul

$$2^x\sin x=2^n\cos\frac{x}{2}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{x}{2^n}\cdot\sin\frac{x}{2^n}.$$

Rakendades kahekordse nurga siinuse valemit n korda, saame võrrandile anda kuju

$$2^x\sin x=\sin x,$$

mille lahendeiks on $x=k\pi$ ($k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$). Arvestades aga ülaltoodud kitsendusi, on lähtevõrrandi lahenditeks $x=k\pi$, kus k ei jagu arvuga 2^n.

Ülesande nr. 4 lahendus. Olgu linn O ühendatud linnadega A, B, C, ... Tähistame $\angle OAB=\alpha$, $\angle OBA=\beta$ ja $\angle AOB=\gamma$. Kuna $OA<AB$ ja $OB<AB$, siis $\gamma>\alpha$, $\gamma>\beta$. Liites need võrratused võrdusega $\gamma=\gamma$, saame $3\gamma>\alpha+\beta+\gamma$, $3\gamma>180°$, $\gamma>60°$. Järelikult punktis O saavad asuda ülimalt viie kolmnurga tipud, mida oligi vaja tõestada.

Ülesande nr. 5 lahendus. Olgu otsitav summa S. Siis

$$3S=9+99+\ldots+\underbrace{99\ldots99}_{50\ \text{numbrit}},$$

$$3S+50=10+10^2+\ldots+10^{50},$$

$$3S+50=\frac{10^{51}-10}{9},$$

$S=370\,370\ldots$ (370 kordub 16 korda).

Ülesande nr. 6 lahendus. Nullist erinevaks numbriks, millega täisruut võib lõppeda, on kas 1, 4, 5, 6 või 9. Kuna paarisarvu täisruut jagub 4-ga, paaritu arvu täisruut aga annab jagamisel 4-ga jäägi 1, siis ei saa täisruut lõppeda numbritega 11, 55, 66, 99. Seega jääb selgitada, kas leidub (paarisarvude) täisruute, mis lõpevad numbritega 4444. Iga paarisarv on esitatav kas kujul $4k$

või $4k+2$; nende ruudud on $16k^2$ ja $16k^2+16k+4$, mis jagamisel kaheksaga annavad vastavalt jäägid 0 ja 4. Et 44 annab kaheksaga jagamisel jäägi 4, siis võib otsitav täisruut olla ainult kuju $4k+2$ omava arvu ruut. Kuid $16k^2+16k+$ $+4$ annab jagamisel 16-ga jäägi 4 ning numbritega 4444 lõppev arv annab jagamisel 16-ga jäägi 12, seega ülesandes mainitud omadusega arve ei leidu.

B. Kõrgem matemaatika

Ülesande nr. 1 lahendus. Olgu avaldises

$$A_k = \underbrace{(\ldots((}_{k \text{ sulgu}}x-2)^2-2)^2-\ldots-2)^2$$

x^2 kordaja c_k, x kordaja b_k ja vabaliige a_k. Tõestame matemaatilise induktsiooni abil, et

$$a_k=4, \quad b_k=-4^k \quad \text{ja} \quad c_k=\frac{1}{3}\cdot 4^{k-1}(4^k-1). \tag{1}$$

$k=1$ puhul on kerge veenduda seoste (1) kehtivuses. Eeldame, et seosed (1) kehtivad indeksi k puhul. Siis

$$\begin{aligned} A_{k+1} &= (A_k-2)^2 = (a_k+b_kx+c_kx^2+\ldots-2)^2 = \\ &= (2-4^kx+\frac{1}{3}\cdot 4^{k-1}(4^k-1)x^2+\ldots)^2 = \\ &= 4+4^{2k}x^2-4\cdot 4^kx+4\cdot\frac{1}{3}4^{k-1}(4^k-1)x^2+\ldots = \\ &= 4-4^{k+1}x+\left[4^{2k}+\frac{1}{3}\cdot 4^k(4^k-1)\right]x^2+\ldots. \end{aligned}$$

Siit saame, et

$$a_{k+1}=4, \quad b_{k+1}=-4^{k+1} \quad \text{ja}$$

$$c_{k+1}=4^{2k}+\frac{1}{3}\cdot 4^k(4^k-1)=\frac{1}{3}\cdot 4^k(4^{k+1}-1),$$

mida oligi vaja näidata.

Ülesande nr. 2 lahendus. Olgu vaadeldava kolmnurga ABC alus BC. Olgu tipu C koordinaadid (x, y). Nad rahuldavad antud ellipsi võrrandit $56x^2+225y^2=225$, millest

$$y=\pm\frac{1}{15}\sqrt{225-56x^2}. \quad \text{Kuna } S=x\left(1\pm\frac{1}{15}\sqrt{225-56x^2}\right),$$

siis saame x leidmiseks võrrandi $x(1\pm\frac{1}{15}\sqrt{225-56x^2})=\frac{28}{15}$. Lihtsustades saame $x^4-15x+14=0$, millel on kaks reaalset lahendit: $x_1=1$, $x_2=2$. Leides vastavad y väärtused saame punkti C koordinaatideks $\left(1,\frac{13}{15}\right)$, $\left(1,-\frac{13}{15}\right)$, $\left(2,\frac{1}{15}\right)$, $\left(2,-\frac{1}{15}\right)$, milledest ülesannet rahuldavad punktid $\left(1,-\frac{13}{15}\right)$ ja $\left(2,\frac{1}{15}\right)$ (nagu näitab vahetu kontroll). Järelikult kolmnurga kõrgus $h=\frac{2S}{BC}$ on kas $h_1=\frac{28}{15}$ või $h_2=\frac{14}{15}$.

Ülesande nr. 3 lahendus. Funktsiooni määramispiirkond on esitatav tingimustega

$$-1 \leqslant \log_{x^2}(x+2) \leqslant 1, \quad x \neq -1,\ 0,\ 1.$$

Lahendame esmalt võrratuse

$$\log_{x^2}(x+2) \leqslant 1. \tag{1}$$

Juhul $x^2 < 1$ saame $x+2 \geqslant x^2$, millest

$$-1 \leqslant x \leqslant 2.$$

Juhul $x^2 > 1$ saame $x+2 \leqslant x^2$, millest

$$x \leqslant -1, \quad x \geqslant 2.$$

Lahendame nüüd võrratuse

$$-1 \leqslant \log_{x^2}(x+2). \tag{2}$$

Juhul $x^2 < 1$ saame $x+2 \leqslant x^{-2}$, millest

$$x \leqslant -\frac{\sqrt{5}+1}{2}, \quad -1 \leqslant x \leqslant \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Juhul $x^2 > 1$ saame $x+2 \geqslant x^{-2}$, millest

$$-\frac{\sqrt{5}+1}{2} \leqslant x \leqslant -1, \quad \frac{\sqrt{5}-1}{2} \leqslant x.$$

Kuna võrratused (1) ja (2) peavad olema samaaegselt rahuldatud (ning arvestades, et $x \neq -1,\ 0,\ 1$) saame funktsiooni eksisteerimispiirkonna kujul

$$-\frac{\sqrt{5}+1}{2} \leqslant x < -1, \quad -1 < x < 0, \quad 0 < x \leqslant \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \quad 2 \leqslant x.$$

Ülesande nr. 4 lahendus. Arvestame, et

$$\sqrt{a^2+2a+1} = \begin{cases} a+1, & \text{kui } a \geqslant -1 \\ -a-1, & \text{kui } a < -1 \end{cases} \quad \text{ja}$$

$$\sqrt{a^2-2a+1} = \begin{cases} a-1, & \text{kui } a \geqslant 1, \\ 1-a, & \text{kui } a \leqslant x. \end{cases} \quad \text{Kuna vaadeldaval}$$

avaldisel ei ole mõtet $a = 0$ puhul, saame vastuseks

$$\lim_{x \to -2} \frac{a-1-\sqrt{a^2+ax+1}}{a+1-\sqrt{a^2-ax+1}} = \begin{cases} 1, & \text{kui } a \leqslant -1, \\ -\dfrac{1}{a}, & \text{kui } 0 < |a| < 1, \\ -1, & \text{kui } a \geqslant 1. \end{cases}$$

ÜLESANNE ELLIPSI FOKAALKÕÕLUDEST

M. Rahula

1963. aasta lõpul esitas dotsent J. Gabovitš oma õpilastele ja kolleegidele järgmise lihtsa ülesande: *näidata, et ellipsi fookust läbivate kõõlude keskpunktide geomeetriline koht on antud ellipsiga sarnane ellips.*

Ülesandele, mille lahendust seni kirjanduses ei olnud esitatud, saabus kohe terve rida lahendusi, mis üksteisest erinesid tõestusmeetodi ning tulemuse universaalsuse poolest.

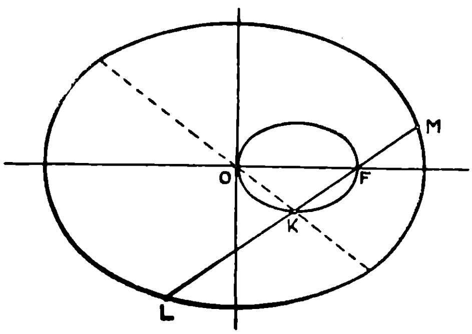
Vahetu analüütilise lahenduse andsid H. Espenberg ja allakirjutanu.

Läbi ellipsi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{1}$$

fookuse F (vt. joonis 1) võeti kõõl

$$y = k(x - c), \tag{2}$$



Joonis 1.

ning tema otspunktide L ja M abstsisside jaoks saadi ruutvõrrand

$$(a^2k^2 + b^2)x^2 - 2a^2k^2cx + a^2(k^2c - b^2) = 0.$$

Ruutvõrrandi lahendite omaduste järgi on selge, et kõõlu keskpunkti K abstsiss on

$$x_k = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{a^2k^2c}{a^2k^2 + b^2}.$$

Punkti K ordinaati pole nüüd raske leida:

$$y_k = k(x_k - c) = -\frac{b^2kc}{a^2k^2 + b^2}.$$

Otsekohe märkame, et x_k ja y_k rahuldavad võrrandit

$$\frac{x}{a^2} + \frac{ky}{b^2} = 0. \tag{3}$$

See on diameetri OK võrrand. Elimineerides võrrandeist (2) ja (3) tõusu k, saame teise astme võrrandi, mida võib tavaliste võtete abil viia kujule

$$\frac{\left(x-\frac{c}{2}\right)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\left(\frac{e}{2}\right)^2, \tag{4}$$

kus e on ellipsi (1) ekstsentrisus. Niisiis, punktide K geomeetriline koht on tõepoolest antud ellipsiga sarnane ellips (sarnasusteguriga $\frac{e}{2}$).

Lihtne on leida ka sarnasuse keskpunkti — selle abstsiss on $\frac{c}{2-e}$. Allakirjutanul õnnestus näidata, et see punkt jääb sarnasuse keskpunktiks ka järgmise ellipsipaari puhul (kui korrata sama ülesannet ellipsi (4) korral).

Hiljem näidati, et diameetri võrrandi (3) saab tuletada hõlpsamini, arvestades et ta on kaassuunaline kõõluga (2). Tõepoolest, teist järku joone kaassuundade tõusud k ja k^* on omavahel seotud võrrandiga

$$a_{11}+a_{12}(k+k^*)+a_{22}k^*k=0,$$

ehk ellipsi (1) puhul

$$\frac{1}{a^2}+\frac{k^*k}{b^2}=0.$$

Avaldades siit tõusu k^* ja asendades selle võrrandisse $y=k^*x$, saamegi võrrandi (3).

Ü. Lumiste näitas, et ülesannet on lihtne lahendada ka polaarkoordinaatide abil. Koonuslõigete ühine polaarvõrrand on teatavasti

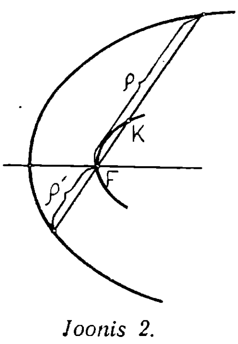
$$\varrho=\frac{p}{1-e\cos\varphi}.$$

Jooniselt 2 näeme, et

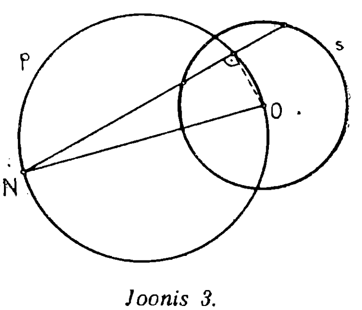
$$\varrho'=\frac{p}{1+e\cos\varphi}$$

ja

$$FK=\frac{\varrho-\varrho'}{2}=\frac{pe\cos\varphi}{1-e^2\cos^2\varphi}.$$



Joonis 2.



Joonis 3.

Seega on

$$\varrho=\frac{pe\cos\varphi}{1-e^2\cos^2\varphi}$$

otsitava geomeetrilise koha polaarvõrrand.

Teiselt poolt, koonuslõike tippvõrrand ristkoordinaatides on $y^2 = 2\tilde{p}x + (e^2 - 1)x^2$ ehk polaarkoordinaatidele üle minnes

$$\varrho = \frac{2\tilde{p}\cos\varphi}{1 - e^2\cos^2\varphi}$$

($\tilde{p}$ on fokaalparameeter). Tähendab, otsitavaks geomeetriliseks kohaks on osutunud koonuslõige ekstsentrisusega e ja fokaalparameetriga $\tilde{p} = \frac{pe}{2}$. Ühesuguse ekstsentrisusega koonuslõiked on aga sarnased. Me näeme, et siin on tõestatud rohkem, kui ülesandes nõuti: sama väide kehtib ka hüperbooli ja parabooli fokaalkõõlude puhul.

S. Zetel (Moskvast) tõestas, et ülesannet saab üldistada, vaadeldes kõõlude selliseid kimpe, mille keskpunktiks pole tingimata fookus, vaid suvaline punkt koonuslõike teljel. Ka siis moodustavad kõõlude keskpunktid koonuslõike, mis on sarnane antuga. Siin me jätame vastavad mõttekäigud esitamata, kuna loodame, et on olemas veel laiemaid üldistusi. Näiteks tõestas R. Mullari, et tasandi suvalist punkti läbivate ellipsi kõõlude keskpunktid asuvad selle ellipsiga sarnasel ellipsil.

Olgu antud ringjoon s keskpunktiga O ja punkt $N \neq O$ (vt. joonis 3). On selge, et punkti N läbivate ringjoone s kõõlude keskpunktid asuvad ringjoonel p, mille diameetriks on NO. Paralleelprojektsiooni abil võib ringjoone s kujutada suvalise ekstsentrisusega ellipsiks. Sama ekstsentrisusega ellipsiks kujutub siis ka ringjoon p, kusjuures kõõlude keskpunktid säilivad.

R. Mullari poolt esitatud tõestuse ilu seisneb selle sünteetilisuses (pole tarvis valemeid), kusjuures artikli algul sõnastatud väide järeldub siit erijuhuna. Võib püstitada küsimuse, kuidas sellist tõestust saaks teostada ka hüperbooli ja parabooli puhul ning milliseid üldistusi võib siin veel tekkida? Mõningaid neist on juba teada. Võib-olla on ka lugejal midagi pakkuda?

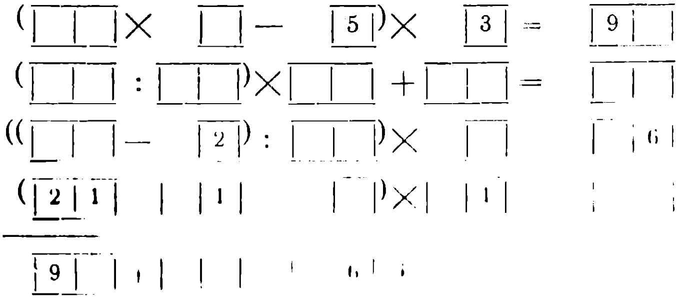
* * *

JAOTAGE VARANDUS

Vana pärimuse kohaselt olevat keegi pärandanud oma kahele pojale varanduse ja nõudnud, et selle jagamine toimuks õiglaselt. Selleks pidi üks vendadest jagama varanduse kaheks osaks ning teine valima, millise osa ta endale võtab. Üldistada see õiglase jagamise printsiip kolme venna (ja üldiselt n venna) juhule.

* * *

Selles ülesandes tuleb tühjad ruudud täita numbritega nii, et veergude summad võrduksid vastavates ridades saadud tulemustega (ükski arv ei alga nulliga):



SISUKORD