Matematika ja kaasaeg

TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

MATEMAATIKA JA KAASAEG

II

ABIMATERJALE MATEMAATIKA ÕPETAJATELE JA ÕPPIJATELE

TARTU 1964

MATEMAATILISE LOOGIKA PÕHIMÕISTEID

A. Tauts

Matemaatilise loogika mõisteid ning meetodeid kasutavad tänapäeval peaaegu kõik teadused. Sellepärast on huvi selle ala vastu tohutult kasvanud. Sageli pole teiste teadusalade esindajatel sealjuures tarvis matemaatilist loogikat eriti põhjalikult tundma õppida — piisaks vaid tutvumisest mõningate põhimõistetega. Kahjuks aga ei ole meil matemaatilise loogika kohta mingisugust eestikeelset populaarteaduslikku kirjandust [1]. Selle lünga kas või osalisekski täitmiseks anname järgnevalt lühiülevaate kahevalentse loogika kahe lihtsama osa — l a u s e a r v u t u s e ja esimest järku p r e d i k a a t a r v u t u s e põhimõistetest.

Lausearvutuse üheks tähtsamaks põhimõisteks on l a u s e. Kahevalentses lausearvutuses loetakse lauseks igasugust väidet, mille sisu kohta võib öelda, et see vastab tegelikkusele või ei vasta tegelikkusele. Esimesi lauseid nimetatakse t õ e s t e k s, teisi v ä ä r a d e k s. Näiteks $2+2=4$ ja *New York asub Ameerikas* on tõesed laused; $2+2=5$ ja *Suvorov oli Nõukogude Liidu marssal* on aga väärad laused. Lause *Napoleon oli suur mees* ei kuulu kahevalentse loogika uurimispiirkonda, sest ei ole selge, keda ja millisel alusel võib lugeda suureks meheks.

Et meid huvitab loogikas ainult lause vahekord tegelikkusega ja mitte tema sisu, siis vaatame iga lause puhul ainult seda, kas ta on tõene või väär, jättes kõik muu kõrvale. Seega samastame mõttes kõik tõesed laused omavahel ja kõik väärad laused omavahel, nii et lõpuks saame ainult kaks erinevat väidet — tõese ja väära. Neid nimetame t õ e v ä ä r t u s t e k s ning tähistame vastavalt t ja v.

Antud lausetest uute saamiseks kasutatakse l o o g i l i s i t e h t e i d. Esimene neist on e i t u s. Seda tehet rakendatakse ainult ühele lausele, kusjuures tulemuseks on lause, mis väidab vastupidist esialgsele. On selge, et tõese lause eitus on väär ja väära

[1] Trükkimisel on küll I. K u l l i õpik «Matemaatiline loogika», kuid muidugi pole see mõeldud pealiskaudseks tutvumiseks põhimõistetega.

lause eitus tõene. Eituse märgiks on kriips lause üleskirjutuse kohal, näiteks $\overline{2+2=5}$ tähendab *2 liita 2 ei ole 5*.

K o n j u n k t s i o o n (ehk loogiline korrutamine) on tehe, mida rakendatakse vähemalt kahele, üldiselt aga mis tahes lõplikule arvule lausetele. Selle sisuline tähendus on sama, mis tavalises keeles sidesõnal «ja». Konjunktsiooni sümbol on & lausete üleskirjutuste vahel. Näiteks $(2+2=4)\&(2+2=5)$ tähendab *2 liita 2 on 4 ja 2 liita 2 on 5*. Konjunktsiooni tulemuseks on lause, mis on tõene vaid siis, kui kõik konjunktsiooni liikmed on tõesed; vastasel korral on konjunktsiooni tulemus väär.

D i s j u n k t s i o o n (ehk loogiline liitmine) on tehe, mida rakendatakse samuti vähemalt kahele lausele, üldiselt aga mis tahes lõplikule arvule lausetele. Tulemuseks on lause, mis väidab, et vähemalt üks lähtelausetest on tõene. Tavalises keeles vastab disjunktsioonile sidesõna «või» mittevälistavas mõttes, s. t. selles mõttes, et ühe liikme kehtimine ei nõua veel teiste mittekehtimist. Disjunktsiooni märgiks on sümbol $\vee$ tema liikmete vahel. Näiteks disjunktsioon $(0>1)\vee(2+2=4)\vee(3=2)$ tähendab *0 on suurem kui 1 või 2 liita 2 on 4 või 3 võrdub 2-ga*, ning saadud lause on tõene, sest tema teine liige on tõene. Seega loeme disjunktsiooni tulemuse tõeseks, kui vähemalt üks liikmetest on tõene; vastasel korral on disjunktsiooni tulemus väär.

I m p l i k a t s i o o n on tehe, mida rakendatakse kahele lausele. Neid lauseid nimetatakse sealjuures vastavalt implikatsiooni ees- ja tagaliikmeks. Implikatsiooni sümboliks on märk $\rightarrow$ tema liikmete vahel. Näiteks kui eesliiget tähistada lühidalt tähega A ja tagaliiget tähega B, siis implikatsiooni üleskirjutus on $A \rightarrow B$. Implikatsiooni tulemus loetakse vääraks vaid siis, kui eesliige on tõene ja tagaliige väär. Kõigil teistel juhtudel loetakse implikatsiooni tulemus tõeseks. Tavalises keeles vastab implikatsioonile sidesõnade kombinatsioon «kui ... siis». Kirjutus $A \rightarrow B$ tähendab seega *kui A, siis B* ehk *A-st järeldub B*. Kui A on väär, siis tavalises keeles loetakse $A \rightarrow B$ tõepoolest alati tõeseks, olenemata lausest B, sest öeldes *kui A, siis B* nõuame me ju B kehtimist üksnes tingimusel, et A kehtib. Kui aga A ja B on mõlemad tõesed, siis loetakse $A \rightarrow B$ loomulikult tõeseks, sest tingimus, et B kehtib, kui A kehtib, on siis täidetud. Kui lõpuks A on tõene ja B väär, siis $A \rightarrow B$ tuleb lugeda vääraks, sest tingimus, et B kehtiks eeldusel, et A kehtib, ei ole nüüd täidetud.

E k v i v a l e n t s on tehe, mida rakendatakse kahele lausele ja mille tulemusena saadud lause väidab, et liikmete tõeväärtused on ühesugused. Lausete A ja B ekvivalentsi kirjutame üles kujul $A \sim B$.

A n t i e k v i v a l e n t s i rakendame samuti kahele lausele. Tehte tulemus väidab, et liikmete tõeväärtused on erinevad. Lausete A ja B antiekvivalentsi märgime $A \not\sim B$.

Toome lõpuks veel loogiliste tehete tulemuste tõeväärtuste tabeli:

A	$\bar{A}$
t	v
v	t

A	B	$A \& B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \sim B$	$A \simeq B$
t	t	t	t	t	t	v
t	v	v	t	v	v	t
v	t	v	t	t	v	t
v	v	v	v	t	t	v

Et iga loogilise tehte tulemus on uus lause, siis võime sellele omakorda tehteid rakendada. Tehete korduval rakendamisel võime saada mitmesuguseid v a l e m e i d, näiteks: $(A \vee B) \rightarrow (\overline{A \& C})$. Kui liikmete tõeväärtused on teada, siis on ka kogu valemi tõeväärtus määratud ja seda saab järk-järgult leida. Oletame, et viimases näites laused A ja C on tõesed, B aga väär, siis on disjunktsioon $A \vee B$ tõene, sest esimene liige on tõene. Konjunktsioon $A \& C$ on samuti tõene, sest mõlemad liikmed on tõesed. Järelikult on eitus $\overline{A \& C}$ väär. Nüüd on aga implikatsioonis eesliige tõene ja tagaliige väär, seega on implikatsiooni tulemus ja kogu vaadeldav valem väär.

Sageli kohtame struktuurilt analoogilisi lauseid, mis erinevad vaid mingi neis esineva objekti poolest. Näiteks laused *Moskva on Nõukogude Liidu pealinn* ja *New York on Nõukogude Liidu pealinn* erinevad selle poolest, et seal, kus esimeses lauses on *Moskva*, on teises lauses *New York*. Samuti on laused $2 < 3$, $5 < 7$ ja $8 < 1$ struktuurilt kõik analoogilised, erinevus on ainult neisse paigutatud arvudes. Selliste lausete ühtseks käsitlemiseks tuuakse sisse mõisted indiviid ja predikaat.

I n d i v i i d on mingi objekt (toodud näidetes linn või arv), kusjuures peab olema kindlalt määratud objektide klass, kust indiviid valitakse. Mõnes mõttekäigus võib klasse ka palju olla, sel juhul öeldakse, et tegemist on mitmesordilise predikaatarvutusega.

P r e d i k a a t tähendab seda, mida antud indiviidi või antud indiviidide kombinatsiooni kohta väidetakse. Rakendades mingit predikaati mingitele indiviididele, saame kas tõese või väära lause. Näiteks predikaat *on Nõukogude Liidu pealinn* annab tõese lause, kui teda rakendada indiviidile *Moskva*; linnade klassi mis tahes teisele objektile rakendatuna annab ta aga väära lause. Lühendatud üleskirjutuses kasutame predikaatide tähistamiseks suuri ladina tähti, indiviidide tähistamiseks aga väikesi ladina tähti. Predikaadi rakendamisel saadavaid lauseid märgime näiteks Px, Rxy jne. Et $2 < 3$ on tõene, $3 < 2$ aga väär lause, siis näeme, et tähtis on ka indiviidi positsioon lauses; seetõttu tuleb vahet teha näiteks lausete Rxy ja Ryx vahel.

Vastavalt indiviidide arvule nimetame predikaate ühekohalisteks, kahekohalisteks jne. Sealjuures ei ole sugugi nõutav, et

n-kohalise predikaadi puhul sõltuks lause sisu kõigist n indiviidist. Sisu võib sõltuda ainult mõnedest indiviididest nende hulgas (või isegi mitte ühestki), kusjuures ülejäänud indiviidid on fiktiivsed. Näiteks kahekohalise predikaadi R puhul võib lause Rxy sisu sõltuda ainult indiviidist x, nii et mingi antud x korral on Rxy tähendus alati sama, olenemata indiviidist y. Sel juhul on y fiktiivne indiviid. Küll tuleb aga nõuda, et saaksime alati kindla tõeväärtusega lause, niipea kui antud predikaadi kõik n indiviidi on fikseeritud. Nullkohalist predikaati mõistame kui lihtsat lauset.

Et predikaat koos indiviididega moodustab lause, siis võib teda ka valemisse asetada. Nii võime näiteks kirjutada valemi $(A \,\&\, Px) \vee \bar{R}xy$. See valem on omakorda lause, aga kui seal x ja y tähendust muuta, siis muutub üldiselt ka selle lause tõeväärtus. Niisugune valem, kui indiviidid temas lugeda muutuvaiks, on seega tegelikult kahekohaline predikaat, sest ta väidab midagi valemis sisalduvate indiviidide kohta.

Teatavate sageli esinevate lausete lühendatud üleskirjutamiseks on võetud tarvitusele kaks sümbolit, mida nimetatakse kvantoriteks. Need on üldsuskvantor $\forall$ ja olemasolukvantor $\exists$. Kvantor on seotud mingi indiviidide klassi sümboliga ja talle järgneb predikaat, mis sisaldab määramata indiviidi sellest klassist. Kvantor $\forall$ tähendab, et järgnev predikaat kehtib kõigi antud klassi indiviidide korral. Kvantor $\exists$ tähendab, et antud klassis leidub niisugune indiviid, mille korral järgnev predikaat kehtib. Kirjutisega $\forall x\, Px$ märgitakse seega lauset: *antud klassi iga indiviidi x korral kehtib Px.* Mingi kindla indiviidide klassi ja kindla predikaadi korral on iga niisugune lause muidugi kas tõene või väär. Kui vastav klass on seejuures tühi [2], siis loeme lause $\forall x\, Px$ alati tõeseks, lause $\exists x\, Px$ aga vääraks, olenemata predikaadist P.

Rakendades kvantorit n-kohalisele predikaadile, saame tulemuseks $(n-1)$-kohalise predikaadi. Näiteks $\exists x\, Rxy$ on lause, mis mingi kindla indiviidide klassi ja kindla predikaadi korral sõltub ainult indiviidist y. Selle lause loeme tõeseks niisuguste indiviidide y korral, mille jaoks leidub antud klassis indiviid x nii, et Rxy on tõene. Nende indiviidide y korral, mille jaoks sellist indiviidi x ei leidu, loeme $\exists x\, Rxy$ vääraks. Analoogiliselt loeme $\forall x\, Rxy$ tõeseks niisuguste indiviidide y korral, millede puhul lause Rxy on tõene sõltumata x valikust antud klassis. Ülejäänud indviidide y korral loeme $\forall x\, Rxy$ vääraks.

Lause $\forall x\, \exists y\, Rxy$ tõeväärtuse arvutame järgmisel viisil. Et Rxy on lause, mis olenevalt indiviididest x ja y võib olla kas tõene või väär, siis $\exists y\, Rxy$ on tõene vaid nende indiviidide x korral, mille puhul leidub y nii, et Rxy on tõene. Lause $\forall x\, \exists y\, Rxy$ loeme seega tõeseks siis, kui iga x korral $\exists y\, Rxy$ on tõene; see tähendab, et iga x korral peab leiduma y nii, et Rxy on tõene.

---

[2] S.t. et ei sisalda ühtki indiviidi.

Et iga muutuvate indiviididega valem on samuti predikaat, siis võime sellise valemi kvantori järele asetada. Nii on lubatud näiteks kirjutis $\exists x(Px \vee Rxy)$. Sealjuures võib kvantori järel olev valem muidugi veel teisi kvantoreid sisaldada, näiteks: $\forall x[(Px \vee \exists y\, Rxy) \,\&\, \overline{Qx}]$.

Kvantori järel olevat valemit, mis väljendab mingit väidet kvantoriga seotud indiviidi kohta, nimetatakse **kvantori mõjupiirkonnaks**. Viimases näites on $\forall x$ mõjupiirkonnaks $(Px \vee \exists y\, Rxy) \,\&\, \overline{Qx}$, $\exists y$ mõjupiirkonnaks aga Rxy.

Kvantori järel asuvat indiviidi nimetatakse kogu kvantori mõjupiirkonnas **seotud indiviidiks**. Indiviidi, mis valemis seotud ei ole, nimetame **vabaks**. Näiteks valemis $\exists x(Px \vee Rxy)$ on x seotud indiviid, y aga vaba indiviid.

Viimane mõiste, millel me käesolevas artiklis peatume, on **funktor**. See on eeskiri, mis seab mingi klassi igale indiviidile (või indiviidide kombinatsioonile) vastavusse ühe indiviidi kas samast või mingist teisest klassist. Näiteks funktor $x+y$ seab arvude klassi igale kahele indiviidile x ja y vastavusse mingi kolmanda indiviidi arvude klassist; funktor *x-i pealinn* seab riikide klassi igale indiviidile x vastavusse mingi indiviidi linnade klassist. Rakendades viimast funktorit indiviidile *Ameerika Ühendriigid* saame indiviidi *Washington*, rakendades sama funktorit aga indiviidile *Šveits*, saame indiviidi *Bern*. Lühiüleskirjutuses tähistatakse funktoreid väikeste kreeka tähtedega, mille järel asetatakse sulgudesse **argumentide**, s. o. nende indiviidide tähised, milledest funktori tähendus sõltub. Nii kirjutame $\mu(x)$, $\varrho(x, y)$ jne. Räägitakse ühe, kahe jne. argumendiga funktoritest. Sealjuures ei ole nõutav, et indiviid, mida funktor argumentidele vastavusse seab, sõltuks tingimata kõigist funktori järel kirja pandud argumentidest. Ta võib sõltuda ainult mõnedest nende hulgas (või ka mitte ühestki), kusjuures ülejäänud argumendid on siis **fiktiivsed**. Küll tuleb aga nõuda, et funktor seaks argumentidele vastavusse alati mingi kindla indiviidi, niipea kui kõik argumendid on fikseeritud. Null argumendiga funktor on mingi kindel indiviid, sest tema tähendus ei sõltu millestki.

Et ka funktor koos tema järel sulgudes olevate indiviididega tähendab indiviidi, siis võib ta paikneda predikaadi järel. Seejuures võib funktori argumendiks olla omakorda funktor. Näiteks on mõeldavad kirjutised $P\mu(\varrho(x, y))$ või $P\varrho(\mu(x), \varrho(x, y))$.

Nagu juba öeldud, oli käesoleva artikli eesmärgiks vaid matemaatilise loogika mõnede põhimõistete tutvustamine. Sellepärast me nende mõistete praktilist rakendamist siinkohal ei vaatlegi. Küll aga kavatseme vähemalt mõningatest rakendustest juttu teha kogumiku «Matemaatika ja kaasaeg» järgmistes väljaannetes. Käesolev artikkel jäägu sellele teatavaks ettevalmistuseks.

NUMBRILISEST INTEGREERIMISEST

E. Tamme

Trapetsvalem on määratud integraalide ligikaudseks arvutamiseks üks lihtsamaid, aga ka suhteliselt väikese täpsusega valemeid. Näitame järgnevas lihtsa ja arvutuspraktikas edukalt kasutatava võtte tema baasil hoopis kõrgema täpsusega numbrilise integreerimise valemite moodustamiseks [1].

Trapetsvalemi abil arvutatakse määratud integraali

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

lähisväärtus järgmisel teel. Integreerimislõik $[a, b]$ jaotatakse n võrdseks osaks pikkusega $h = \frac{b-a}{n}$. Jaotuspunktides $x_i = a + ih$ arvutatakse integreeritava funktsiooni väärtused $f(x_i)$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ ning integraali lähisväärtuseks võetakse summa

$$T_{00} = \frac{b-a}{n}\left[\frac{1}{2} f(a) + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2} f(b)\right].$$

Integraali arvutamiseks suurema täpsusega võib peenendada jaotust. Trapetsvalemi abil leitud integraali lähisväärtused, mis vastavad lõigu $[a, b]$ jaotamisele $2n, 2^2n, \ldots, 2^kn$ võrdseks osaks, tähistame vastavalt $T_{01}, T_{02}, \ldots, T_{0k}$.

Kui oleme arvutanud T_{0k} indeksi k mitme järjestikuse väärtuse korral, siis saame moodustada uued, tavaliselt täpsemad määratud integraali lähisväärtused

$$T_{1k} = T_{0k} + \frac{1}{3}(T_{0k} - T_{0,k-1}) \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

$$T_{2k} = T_{1k} + \frac{1}{15}(T_{1k} - T_{1,k-1}) \qquad (k = 2, 3, \ldots)$$

ja üldiselt

$$T_{jk} = T_{j-1,k} + \frac{1}{4^j - 1}(T_{j-1,k} - T_{j-1,k-1}) \qquad (k = j, j+1, \ldots).$$

---

[1] See võte on kirjeldatud artiklis E. Stiefel, Altes und Neues über numerische Quadratur. — Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, 1961, Nr. 10/11, lk. 408—413.

Selline integraali lähisväärtuste täpsustamisprotsess on lihtsalt rakendatav nii käsitsi arvutamisel kui ka elektronarvutites. Ta annab ka informatsiooni tulemuste täpsuse kohta, sest esialgsele lähendile lisatakse järjest väiksemaid parandusliikmeid. Tavaliselt loetakse, et lõpptulemuse viga on väiksem viimasest kasutatud parandusliikmest.

Kui T_{1k} ja T_{2k} avaldada vahetult funktsiooni $f(x)$ väärtuste kaudu, siis ilmneb, et T_{1k} ühtib integraali lähisväärtusega, mille saame Simpsoni valemi abil, ja T_{2k} ühtib lähisväärtusega, mille saame, jaotades integreerimislõigu $2^{k-2}n$ võrdseks osaks ning rakendades igas osas 5 ordinaadiga Newton-Cotesi valemit. Seega on meil tegemist uute, praktikas küllaltki sobivate arvutusskeemidega nende kvadratuurvalemite jaoks. Järgmised lähendid T_{3k}, T_{4k}, ... ei ole aga enam Newton-Cotesi valemi erijuhtudeks.

Et suurused T_{jk} kujutavad suurema j korral teatud eeldusel tõepoolest paremaid integraali lähisväärtusi, seda saab põhjendada, kasutades Euleri valemit[2]

$$\int_a^b f(x)\,dx = T_{0k} + \sum_{i=1}^{m} A_i \left(\frac{b-a}{2^k n}\right)^{2i} [f^{(2i-1)}(b) - f^{(2i-1)}(a)] +$$
$$+ A_{m+1} \left(\frac{b-a}{2^k n}\right)^{2m+2} (b-a) f^{(2m+2)}(\xi),$$

kus ξ on mingi arv a ja b vahel ning A_i on teatavad konstandid, millest esimesed võrduvad

$$A_1 = -\frac{1}{12},\ A_2 = \frac{1}{720},\ A_3 = -\frac{1}{30\,240},\ A_4 = \frac{1}{1\,209\,600}.$$

Euleri valem kehtib, kui funktsioon $f(x)$ on lõigul $[a, b]$ pidevalt diferentseeruv $2m + 2$ korda.

Euleri valemi põhjal

$$T_{0k} = \int_a^b f(x)\,dx + \frac{1}{12}\left(\frac{b-a}{2^k n}\right)^2 [f'(b) - f'(a)] -$$
$$-\frac{1}{720}\left(\frac{b-a}{2^k n}\right)^4 [f'''(b) - f'''(a)] + \dots$$

Seetõttu

$$T_{1k} = T_{0k} + \frac{1}{3}(T_{0k} - T_{0,k-1}) = \frac{1}{3}(4T_{0k} - T_{0,k-1}) =$$
$$= \int_a^b f(x)dx + \frac{1}{180}\left(\frac{b-a}{2^k n}\right)^4 [f'''(b) - f'''(a)] + \dots$$

Näeme, et küllaldane arv kordi diferentseeruva funktsiooni $f(x)$ korral integraali lähisväärtuse T_{0k} viga väheneb n ja k suurenemi-

---

[2] Vt. näit. Березин, И. С. и Жидков, Н. П., Методы вычислений, I. M., 1962, lk. 291.

sel ligikaudu võrdeliselt suurusega $(2^k n)^{-2}$, aga T_{1k} viga ligikaudu võrdeliselt suurusega $(2^k n)^{-4}$. Analoogiliselt saame näidata, et T_{2k} viga on ligikaudu võrdeline suurusega $(2^k n)^{-6}$ jne. Sellise olukorraga on tegemist muidugi juhul, kui $f'(b) - f'(a) \neq 0$, $f'''(b) - f'''(a) \neq 0, \ldots$ Kui aga mõni neist suurustest võrdub nulliga, siis vastava lähendi viga väheneb kiiremini. Juhul, kui funktsioon $f(x)$ on perioodiline perioodiga $b - a$, siis võrduvad nulliga kõik need vahed ning ülalkirjeldatud protsess ei anna tavaliselt paremaid integraali lähisväärtusi. Viimati mainitud juhul on trapetsvalem teatavasti üks kõige kõrgema täpsusega numbrilise integreerimise valemeid.

Euleri valemi abil saab ka näidata, et suurused T_{jk} kujutavad vaadeldava integraali täpset väärtust, kui $f(x)$ on ülimalt $(2j + 1)$-astme polünoom.

ARVAMUSI MATEMAATIKAST[1]

Head kombed on ühiskonnale rohkem väärt kui kõik Newtoni arvutusmeetodid ühtekokku

Saksa keisri Friedrich II kirjast D'Alembert'ile (1770)

* * *

Matemaatikud on mingi eriline sort prantslasi: kui nendega kõnelda, siis tõlgivad nad selle kohe oma keelde ja siis on see juba midagi hoopis muud.

J. W. Goethe

* * *

Tuntud poola matemaatiku Hugo Steinhausi «hüpoteesi» kohaselt kehtib loodusseadus, mida võib sõnastada kujul: «matemaatik teeb selle paremini». Nimelt kui kahele isikule, kellest üks on matemaatik, anda teha mingi neile mõlemale võõras töö, siis tulemus on alati sama: matemaatik teeb selle paremini.

---

[1] Vt. ka lk. 21 ja 76.

KÜBERNEETIKA TEOREETILISI PROBLEEME[1]

A. A. Ljapunov, S. V. Jablonski

2. Küberneetika põhiülesanded

Küberneetika probleemistikku võib liigendada omavahel sarnanevate küsimuste kaupa rühmadeks, millest igaüks hõlmab probleeme teaduse kõige erinevamatest valdkondadest. Sõnastades iga rühma probleemid väga üldisel kujul saame küberneetika põhiülesannete loetelu.

Juhtimissüsteemide uurimine on võimalik kahest vaatekohast: makroskoopilise ja mikroskoopilise lähenemisviisiga.

Makroskoopilisel uurimisel vaadeldakse juhtimissüsteemi kui nn. «musta kasti», mille sisemine ehitus on tundmatu või peaaegu tundmatu. Niisugune olukord tekib näiteks ligipääsmatute juhtimissüsteemide tundmaõppimisel (mängude jms. korral) või mittepiisavalt uuritud struktuuriga juhtimissüsteemide käsitlemisel (bioloogias jms. aladel). Makroskoopilise lähenemisviisi olemuse määravad mõningad juhtimissüsteemide erilised iseärasused. Eespool antud käsitlusest teame juba, et juhtimissüsteem on enamasti diskreetset laadi objekt, mis koosneb üldiselt suurest hulgast elementaarsetest juhtimissüsteemidest (elementidest). Selle asjaolu tõttu on juhtimissüsteemil teatav kindel mikrostruktuur, kuid ühtlasi on ta vaadeldav ka makroskoopilise objektina. Kui juhtimissüsteem on väga keeruline, siis on raske jälgida tema makroskoopiliste omaduste sõltuvust mikroskoopilistest. Juhtimissüsteemi uurimise esimestel etappidel kasutatakse tavaliselt makroskoopilist lähenemisviisi (näiteks Pavlovi lähenemisviis kõrgema närvitegevuse uurimisel jms.). Tuleb arvestada, et makroskoopiliselt pole juhtimissüsteem täielikult jälgitav; otseselt vaadeldavad on siin üksnes skeemi poolused ja välismälu, kuid ka süsteemi käitumine.

Enne makroskoopilise uurimise algust pole meil üldjuhul teada ei juhtimissüsteemi skeem ega temas töödeldava informatsiooni

---

[1] Käesoleva artikli algus vt. Matemaatika ja kaasaeg, I. Tartu, 1963, lk. 14—20. — Artikkel on tõlgitud kogumikust Проблемы кибернетики, Выпуск 9. M., 1963. Tõlkinud E. Tiit.

iseloom, samuti ei tunne me veel juhtimissüsteemi koordinaate ega funktsiooni. Algusest peale seisavad meie käsutuses vaid andmed vaadeldava objekti otstarbe kohta ning meil on kas tugevalt lihtsustatud või hoopis ebamäärane kujutlus sellest objektist kui juhtimissüsteemist. Seetõttu peame kõigepealt selgitama antud objekti olemuse juhtimissüsteemina.

Objekti niisuguse tõlgenduse saamiseks tuleb koostada tema spetsiaalne matemaatiline kirjeldus, mida läheb vaja järgneval küberneetilisel uurimisel. Makroskoopilise vaatluse kõrval osutub siin vältimatuks ka mikroskoopiline lähenemisviis.

Makroskoopilise uurimise valdkonda kuulub neli põhiülesannet.

1. Informatsioonivoogude väljaselgitamine

Lähtume sellest, et antud objekti otstarbe kohta on meil juba midagi teada. See võimaldab asuda objekti poolt taotletava eesmärgi täpsele sõnastamisele. Objekti eesmärgi teadmine on äärmiselt tähtis, kuna see võimaldab — tõsi küll, esialgu puhtsisulisel (mitte formaalsel) tasemel — selgitada, missugune informatsioon on juhtimissüsteemi jaoks oluline ja missugune mitte. See omakorda annab võimaluse jätta vaatlusest välja seda informatsiooni, mis ei puutu vaadeldavasse küsimusse. Siinjuures tuleb eristada informatsiooni, mille ümbertöötamine meid vahetult huvitab (muutujate arvulised väärtused valemites, stiimulite olemasolu või puudumine jne.), ning informatsiooni, mis ei huvita meid vahetult, kuid mis on oluline tulemuse saamiseks; lõpuks tuleks eristada ka informatsiooni, mis on vajalik juhtimissüsteemi funktsioneerimisel (programmis on see antud hetkel töötava operaatori teadmine, males — teadmine, kumb mängijaist on käigul jne.). Esimese informatsioonitüübiga on seotud nn. välismälu, teise tüübiga — sisemälu ning kolmandaga skeemi poolused, mille kaudu on korraldatud ühendus väliskeskkonnaga. Informatsioonivoogude selgitamisel peame seega kõigepealt välja eraldama välismälu. Sisemälu ehitus ei ole meile makroskoopilisel vaatlusel vahetult kättesaadav. Edasi määratakse skeemi poolused ja nende iseloom, s. t. tehakse kindlaks, millised neist on sisendid ja millised väljundid.

Informatsioonivoogude väljaselgitamise ülesanne nõuab seega sisuliselt juhtimissüsteemi skeemi esialgset analüüsi, mille eesmärgiks on välismälu ja pooluste määramine. Üldiselt lahendatakse see ülesanne puhtsisulisel, mitte formaalsel tasemel.

2. Informatsiooni koodi selgitamine

Juhtimissüsteemi mälu jaguneb välis- ja sisemäluks. Nagu nägime, on informatsioon, millega tuleb tegelda makroskoopilisel käsitlusel, seotud välismäluga. Nimelt just selle informatsiooni suhtes toimib juhtimissüsteem masinana: kui juhtimissüsteem on mingil ajamomendil mingis teatud olekus ja võtab oma välismälu kaudu vastu mingit informatsiooni, siis muudab ta ühelt poolt oma olekut, kuid teiselt poolt väljastab ühtlasi teatavat kindlat informatsiooni. Seejuures avaldub niihästi vastuvõetav kui ka väljastatav informatsioon mingite elementaarsignaalide süsteemide kaudu. Tekib küsimus: kuidas on informatsioon välismälus kodeeritud, millised informatsiooni kodeerimise ja dekodeerimise eeskirjad kehtivad juhtimissüsteemis?

Detailsemas käsitluses võib informatsiooni töötlemist kirjeldada järgnevalt.

On olemas mingi nähtus (näiteks matemaatiline ülesanne, füüsikaline olukord vms.). Seda nähtust iseloomustab mingi informatsioon (näiteks ülesande arvuliste andmete, teatavate stiimulite olemasolu või puudumise näol jne.). Mingil ajamomendil siseneb antud informatsioon mingi koodina juhtimissüsteemi välismällu. Sellega kaasneb esmase informatsiooni ümberkodeerimine teatavaks mälu olekuks. Vahel on juhtimissüsteem võimeline ise vahetult informatsiooni vastu võtma ja niisugust kodeerimist automaatselt toimetama (näiteks iselugevates seadeldistes). Edasi teostub informatsiooni töötlemine juhtimissüsteemis ning järgmisel ajamomendil annab juhtimissüsteem oma välismälusse signaali, mis jällegi tähendab kodeeritud informatsiooni. Viimaks toimub informatsiooni lõplik dekodeerimine.

Seega püstitab juhtimissüsteemide uurimine kodeerimissüsteemide uurimise, erinevate kodeerimissüsteemide võrdlemise ülesande. Seoses järgneva ülesandega — juhtimissüsteemide sünteesiga — on oluliseks küsimuseks etteantud omadustega, näiteks minimaalse liiasusega kodeerimissüsteemide loomine. Teisest küljest tuleb kodeerimissüsteemide loomisel selgitada, kas neil on teatavaid omadusi, näiteks kas kodeerimissüsteem võimaldab dekodeerimist üheselt, kas dekodeerimise eeskiri annab tulemuse lõpliku aja vältel, jne. Nimetatud probleemistikku uurib kodeerimisteooria, mis moodustab ühe osa informatsiooniteooriast.

3. *Juhtimissüsteemi funktsiooni selgitamine*

Teades «sisenevat» ja «väljastatavat» informatsiooni võime hakata määrama uuritava juhtimissüsteemi funktsiooni. On täiesti arusaadav, et siinjuures ei mõelda kogu funktsiooni leidmist (makroskoopilisel lähenemisel on see üldiselt võimatu), vaid ainult funktsiooni üht komponenti, mis on seotud välismälu olekute teisendamisega.

Rääkides «sisenevast» ja «väljastatavast» informatsioonist seostame neid paratamatult teatavate ajahetkedega. See aga eeldab ajaskaala moodustamist, s. t. tuleb selgitada, millistel momentidel võib informatsioon juhtimissüsteemi siseneda ja millistel momentidel toimub informatsiooni väljastamine juhtimissüsteemist.

Muuhulgas lahendatakse siin ka küsimus, kas informatsiooni töötlemine vältab üks või mitu takti. Viimasel juhul määratakse ajasammu pikkus, milleks korraldatakse vajalik seeria katseid. Edasi selgitatakse eksperimentaalselt sisend- ja väljundinformatsiooni vahelise seose iseloom. Siinjuures tehakse kindlaks, missugust tüüpi on informatsiooni töötlemine: kas determineeritud või juhuslik. Esimesel juhul määrab ajamomendil T_0 sisenev informatsioon üheselt järgmisel ajamomendil T_1 väljastatava informatsiooni. Teisel juhul on sisend- ja väljundinformatsiooni vaheline seos juhusliku iseloomuga.

Lõpuks antakse informatsiooni töötlemise funktsionaalne kirjeldus. Selleks on vaja esiteks küllalt täielikku eksperimentide komplekti ja teiseks informatsiooni koodkirjelduste tundmist. Funktsionaalse iseloomustuse koostamiseks võetakse kõikvõimalikud antud ajamomendile eelnevail momentidel sisenenud informatsioonikogumid. Iga kogumi jaoks leitakse võimaliku väljastatava informatsiooni loetelu. Kui juhtimissüsteemis toimub informatsiooni determineeritud töötlemine, siis saame iga konkreetse sisendinformatsiooni jaoks alati ühesuguse väljundinformatsiooni. See annab meile funktsiooni, mis kirjeldab seost sisend- ja väljundinformatsiooni vahel. Seda funktsiooni võib siis juba avaldada kas Boole'i algebra või mitmevalentse loogika või hoopis rekursiivsete funktsioonide vms. terminoloogias. Kui aga informatsiooni töötlemine juhtimissüsteemis on juhuslik, siis ei sõltu väljundinformatsioon sisendinformatsiooni kogumist üheselt. Seda tulemust iseloomustatakse kõikvõimalike väljundinformatsioonide loeteluga ja jaotusseadusega, mis kirjeldab ühe või teise selles loetelus sisalduva väljundinformatsiooni esinemise tõenäosust. Seda võib esitada kas tõenäosusloogika terminoloogias, või juhuslike elementaaraktide operaatorite ja algoritmide terminoloogias, või juhuslike protsesside teooria vahenditega jne. Selle küsimusega on tihedalt seotud veel teine probleem: moodustada funktsionaalne süsteem operatsioonidega, mis võimaldaksid kirjeldada informatsiooni töötlemist.

4. *Juhtimissüsteemide funktsioneerimise uurimine*

Tervel real juhtudel, eriti kui on tegemist naaberteaduste objektiks olevate juhtimissüsteemidega, nagu peaaju, majanduslike seoste süsteem jne., tekib küsimus juhtimissüsteemide funktsioneerimise uurimisest. See ülesanne on oluline ka sellepärast, et keerukate juhtimissüsteemide puhul ei õnnestu sageli nende funktsioone lõpuni välja selgitada. Sel juhul jääb ainsaks võimaluseks uurida süsteemi funktsioneerimist, kusjuures eesmärgiks on õppida juhtimissüsteemi paremini tundma. Arusaadavalt on selline uurimine kasulik niihästi antud juhtimissüsteemide tunnetamise seisukohast kui ka nendes avastatud funktsioneerimisprintsiipide inimese heaks rakendamise seisukohast (selleks kasutatakse modelleerimist).

Kui vaadelda juhtimissüsteemi sidekanalina, siis tekib terve kompleks küsimusi, mis on seotud selle kanali funktsioneerimisega. Siia kuuluvad näiteks niisugused ülesanded, nagu kanali läbilaskevõime hindamine, kanali mürakindluse uurimine jms. Nende küsimustega tegeleb informatsiooniteooria.

Juhtimissüsteemi vaadeldakse sageli ka mingisugust teenindamist sooritava süsteemina. Teenindamissüsteemiks on näiteks tänavaliiklust reguleeriv automaat. Nüüd tulevad lahendada järjekorra tekkimise ülesanne, ooteaja hindamise ülesanne jne. Selliseid ülesandeid käsitleb massilise teenindamise teooria (ehk järjekorrateooria).

Mõnikord pakub huvi uurida juhtimissüsteemi käitumist tema eesmärgi saavutamise seisukohast. Niisugune olukord tekib mängude algoritmide vaatlemisel. Vastav küsimustekompleks kuulub mänguteooria ning lineaarse ja dünaamilise planeerimise valdkonda.

Oluline uurimissuund on ka erinevate juhtimissüsteemide käitumise võrdlemine. Siia kuuluvad muuhulgas mõisted nagu käitumise otstarbekus, õppimine jne.

Lõpuks on vaja tundma õppida ka juhtimissüsteeme tervikuna, lähtudes nende funktsioneerimise uurimisest. Siin selgitatakse näiteks tagasiside olemasolu või puudumine juhtimissüsteemis, hinnatakse sisemälu mahtu jne. Niiviisi avanevad mõningad võimalused heita pilku ka «musta kasti» sisemusse.

Tuleb märkida, et makroskoopiline uurimine jääb paratamatult piiratuks, mistõttu ta ei võimalda juhtimissüsteemi ehitust täielikult selgitada. Muuseas on ilmne, et makrouurimine ei anna peaaegu mingit kujutlust juhtimissüsteemi skeemi ehitusest. Tavaliselt ei võimalda ta leida ka juhtimissüsteemi täielikku funktsiooni, sest süsteemivälise eksperimendiga ei saa avastada sisemälu olekute muutumise iseloomu ega skeemi teisenduste toimumist (esinevad näiteks programmi töö puhul). Sellele vaatamata on makroskoopilisel lähenemisviisil suur tähtsus juhtimissüsteemide uurimises, iseäranis selle algjärgus.

Pärast makroskoopiliste uuringute lõpetamist järgneb paratamatu üleminek mikrokäsitlusele. Mikroskoopilise uurimise võimalikkus on tingitud sellest, et juhtimissüsteem on liigendatav elementaarsüsteemideks. Viimaste arv võib aga olla küllaltki suur, mis tekitab tõsiseid raskusi ja tingibki vajaduse tugineda makroskoopilise käsitluse andmetele. Nagu alati, on ka siin iseloomulik mitte üksikute juhtimissüsteemide, vaid tervete juhtimissüsteemide klasside vaatlemine.

Mikroskoopilise uurimise valdkonda kuuluvad järgmised kaheksa ülesannet.

5. Juhtimissüsteemi elementide selgitamine

Mikroskoopiline uurimine algab alati elementaarsete juhtimissüsteemide eristamisega kõigis vaadeldavates juhtimissüsteemides, mis kokku moodustavad teatava klassi. Seega tehakse kõigepealt kindlaks «ehituskivid», millest juhtimissüsteemid koosnevad. Väga oluline on silmas pidada, et selline tükeldamine on üldiselt teostatav mitmel viisil ja n.-ö. erinevas mõõtkavas. Toome selle kohta näiteid. Arvutusmasina puhul võib «ehituskivideks» lugeda terveid selle masina sõlmi või funktsionaalseid blokke või üksikuid raadiodetaile. Aju uurimisel võib «ehituskividena» vaadelda niihästi ajupiirkondi, mis täidavad erinevaid funktsioone, kui ka neuroneid. Arvutusprogrammi uurimisel võivad «ehituskivideks» olla kas algoritmi osadele vastavad operaatorid või elementaaraktidega seotud üksikud käsud. Seega on «ehituskive» võimalik valida erineval tasemel, ning iga valik annab erineva juhtimissüsteemi.

Küsimus, mida lugeda «ehituskiviks», on seotud hulga sisuliste tegurite arvestamisega. Näiteks, kui «ehituskivid» valitakse liiga «suured», siis jäävad paljud antud objektiga seotud nähtused paratamatult selgitamata. Kui «ehituskivid» on «väikesed», siis on põhimõtteliselt küll iga nähtus seletatav, kuid see seletus kujuneb äärmiselt keeruliseks ja kohmakaks. Seega valmistab juhtimissüsteemi uurimine ka sel juhul raskusi. «Ehituskivide» mõõtkava valik oleneb objekti uurimisel püstitatud eesmärgist ning on «ehituskivide» eristamise juures kõige olulisem moment.

Kui kõik «ehituskivid» on juba leitud ja klassifitseeritud, siis tuleb hakata nende elementaarsete juhtimissüsteemide omadusi lähemalt uurima. Seda tehakse makroskoopilise käsitluse vahenditega ja see nõuab alati erialaseid teadmisi valdkonnas, kuhu kuuluvad vaadeldavad objektid.

6. Elementidevaheliste seoste selgitamine

Elementaarsete «ehituskivide», s. t. juhtimissüsteemi elementide eristamisele järgneb elementidevaheliste seoste uurimine. Siin tulevad arvesse ainult niisugused seosed, mis on antud objekti funktsioneerimiseks olulised. Erilist tähelepanu pööratakse sellele, kuidas on omavahel geomeetriliselt ühendatud elementide poolused. Tuleb märkida, et «füüsiliselt» võivad need seosed realiseeruda õige mitmeti. Näiteks aritmeetiliste avaldiste puhul väljendub seos sümbolite korrastatud paigutuses, arvuti puhul — juhtmete ühendusviisis või elektromagnetiliste väljade mõjus vms., närvikoes on seosed organiseeritud aksonite ja sünapsite kaudu, jne.

Määranud uuritavas objektis kõik olulised elementidevahelised seosed, saame lõpuks võimaluse kirjeldada teda juhtimissüsteemina, kuna meil on nüüd teada niihästi tema skeem, informatsioon, koordinaadid kui ka funktsioon. Sellega ühenduses pakub suurt huvi mõningate topoloogiliste küsimuste uurimine. Siinkohal võiks meenutada selliseid, nagu lõplike meetriliste ruumide uurimine, graafide ja võrkude teooria jms.

Edasiste ülesannete eesmärgiks on juhtimissüsteemi kui terviku uurimine.

7. *Juhtimissüsteemi algoritmeerimine*

Tavaliselt on meil tegemist mitte ühe juhtimissüsteemiga, vaid terve juhtimissüsteemide klassiga. Antud klassi kuuluvate süsteemide uurimine on põhimõtteliselt võimalik äsjakirjeldatud viisil. Muuseas võib katselisel teel leida juhtimissüsteemide funktsionaalsed karakteristikad. Niisuguse eksperimendi mahukus tekitab siin aga olulisi raskusi. Mõningatel juhtudel, kui vaadeldakse alles loodavaid juhtimissüsteeme (näiteks arvuti projekt), on funktsionaalsete karakteristikate katseline leidmine hoopis võimatu. Seetõttu tekib probleem, kuidas neid leida ilma eksperimendita. Selleks annab võimaluse juhtimissüsteemide algoritmeerimine. Leitakse nimelt algoritm ehk eeskiri, mis võimaldab antud klassi iga juhtimissüsteemi jaoks määrata skeemi, informatsiooni ja koordinaatide järgi funktsionaalset karakteristikat. Selles mõttes on algoritmeerimine juhtimissüsteemide modelleerimise üldine meetod.

Selliselt leitud funktsionaalne karakteristika võib ühtida katseliselt saaduga; sel juhul osutub algoritmeerimine antud juhtimissüsteemi jaoks täpseks. Matemaatilise kirjelduse ligikaudsuse tõttu juhtub aga sageli, et algoritmeerimine ei osutu vaadeldavas klassis täpseks mitte kõigi juhtimissüsteemide puhul. Niisugune olukord võib esineda elektriliste skeemide klassi kirjeldamisel, lingvistika valdkonda kuuluvate juhtimissüsteemide korral jne. Sellega seoses kerkib küsimus algoritmeerimisest, mis oleks antud klassis täpne küllalt suure hulga juhtimissüsteemide puhul.

Algoritmeerimise protsess eeldab piiratud mahuga eksperimendi sooritamist. Kõigepealt leitakse katselisel teel funktsionaalsed karakteristikad elementidele, seejärel selgitatakse eksperimentaalselt, kuidas skeemi üksikelementide funktsioonide ja nendevaheliste seoste põhjal saaks leida juhtimissüsteemi tegelikku funktsionaalset karakteristikat. Tulemusena saadakse algoritm, mis elementaarsetele juhtimissüsteemidele (elementidele) rakendatult annab nende tegelikud funktsionaalsed karakteristikad ja annab mingisugused funktsionaalsed karakteristikad antud klassi ülejäänud juhtimissüsteemidele. Juhul, kui algoritm on õnnestunult konstrueeritud, ühtivad saadud funktsionaalsed karakteristikad suurema osa juhtimissüsteemide puhul tegelike karakteristikatega. Algoritmeerimise kvaliteeti kontrollitakse ka katseliselt.

Järgnevad ülesanded võivad esineda niihästi algoritmeeritud kui ka algoritmeerimata juhtimissüsteemide korral.

8. *Juhtimissüsteemide analüüs*

Juhtimissüsteemide uurimisel on sageli vaja leida nende kohta täielikumaid andmeid või täpsustada mõningaid nende omadusi. Näiteks tuleb määrata juhtimissüsteemi funktsioon, kui on teada skeem, koordinaadid ja informatsioon, või on tarvis selgitada, kas antud juhtimissüsteemidest saab «ehitada» uut juhtimissüsteemi, mis käituks teataval ettenähtud viisil. Niisugused ülesanded kuuluvad juhtimissüsteemide analüüsi valdkonda.

Peatume pisut detailsemalt juhtimissüsteemide analüüsimise ülesandel. Nagu juba märgitud, tuleb sageli skeemi, informatsiooni ja koordinaatide järgi leida juhtimissüsteemi funktsioon. Erinevalt funktsiooni selgitamise ülesandest makrokäsitlusel nõutakse siin niisuguse funktsiooni leidmist, mis kirjeldaks mitte üksnes sisemälu olekute töötlemist, vaid ka skeemi, koordinaatide ja funktsiooni enda muutumist. Osaliselt tekib see ülesanne juba algoritmeerimise etapil. Suurimat huvi pakub ta siiski algoritmeeritud juhtimissüsteemide puhul, sest teda saab siin lahendada ilma eksperimendita. Juhtimissüsteemi funktsiooni ehk, nagu me seda nimetame, juhtimissüsteemi täieliku funktsiooni teadmine võimaldab määrata paljusid tuletatud funktsionaalseid karakteristikaid. Nende hulgas on eriti olulised niisugused funktsionaalsed karakteristikad, mis kirjeldavad välismälu olekute töötlemist. Näiteks programmi puhul tähendab täielik funktsioon järjekordset teisendust, kuid tuletatud funktsiooniks võib lugeda algandmete (välismälu lähteoleku) teisendust saadud tulemuse andmeteks (välismälu vastavaks lõppolekuks). Et järgnevate ülesannete sõnastamisel on kasutatud mitte täielikku, vaid tuletatud funktsiooni, siis kirjutame edaspidi (välja arvatud p. 11) lühiduse mõttes «tuletatud funktsiooni» asemel «funktsioon».

Edasi kuulub siia ka küsimus elementide kogumi täielikkusest. Seda küsimust saab sõnastada järgnevalt. On antud mingi funktsioonide hulk ja mingisugune elementide (elementaarsete juhtimissüsteemide) hulk; tuleb otsustada, kas vastavalt antud hulga igale funktsioonile on võimalik antud elementide abil konstrueerida juhtimissüsteemi, millel oleks just see funktsioon.

Lõpuks huvitab meid sageli juhtimissüsteemi üldine käitumine (funktsioon). Näiteks kaupade transportimise ülesandes läheb meil vaja transpordiplaani, tänavaliikluse reguleerimise ülesandes — reguleerimisalgoritmi. Siinjuures määrab küsimuse lahendamine tavaliselt mingi kriteeriumi juhtimissüsteemi käitumise hindamiseks. Toodud näiteis on vaja anda hinnang transpordiplaanile ja juhtimisalgoritmile. Vastavalt hindamisalustele tuleb valida antud tüüpi juhtimissüsteem, mille käitumine oleks parim (optimaalne). Sedalaadi ülesanded on tähelepanu keskpunktiks niisugustes distsipliinides, nagu massilise teenindamise teooria, mänguteooria, lineaarse ja dünaamilise planeerimise teooria.

9. *Juhtimissüsteemide süntees*

Juhtimissüsteemide süntees on mõnes mõttes pöördülesanne juhtimissüsteemide analüüsi suhtes. Ülesanne püstitatakse järgmiselt. On antud mingi funktsioonide klass ning selle klassi jaoks lõplik elementide kogum. Nendest elementidest tuleb moodustada etteantud funktsiooniga juhtimissüsteem. Üldiselt on sünteesiülesandel mitu lahendit, mistõttu tekib küsimus, millist lahendit eelistada. See sõltub kriteeriumist, mis määrab ühe juhtimissüsteemi paremuse võrreldes teisega. Seega tuleb kõigepealt leida kriteerium, mis vastaks ülesande iseärasustele. Sellega on ülesandeseade täpsustatud ning nüüd töötatakse välja optimaalsete juhtimissüsteemide sünteesi meetodid.

Et optimaalsete juhtimissüsteemide sünteesimine nõuab projekti koostamist ning selleks kulub küllaltki palju tööd, siis tekib küsimus, kuidas saaks optimaalse projekti leidmist automatiseerida. Sedalaadi probleemistikuga kohtume näiteks programmeerimise teoorias, ühest keelest teisesse tõlkimise ülesandes jne. Seoses juhtimissüsteemide sünteesi ülesandega tuleb sageli uurida veel sünteesialgoritmide tõhususe küsimusi.

10. *Juhtimissüsteemide ekvivalentsed teisendused*

Kaks juhtimissüsteemi on ekvivalentsed, kui nende funktsioonid on samased. On ilmne, et ükski süsteemiväline katse ei võimalda ekvivalentsete juhtimissüsteemide vahel vahet teha. Üleminekut mingilt juhtimissüsteemilt temaga ekvivalentsele süsteemile nimetatakse samasusteisenduseks. Juhtimissüsteemide samasusteisenduste uurimine on oluline ülesanne. Eriti suurt huvi pakub kõigi mõeldavate samasusteisenduste kirjelduse leidmine. See annab põhimõttelise võimaluse kasutada samasusteisendusi juhtimissüsteemi optimiseerimiseks. Järelikult võib samasusteisenduste uurimist rakendada juhtimissüsteemide sünteesi ülesande lahendamisel. Tähtis on uurida ka juhtimissüsteemide «lihtsustamise» algoritme, milles kasutatakse samasusteisendusi.

11. *Juhtimissüsteemide evolutsioon*

Võtame siin ajutiselt uuesti kasutusele juhtimissüsteemi täieliku funktsiooni mõiste. On ilmne, et oma funktsiooni mõjul teisendub antud juhtimissüsteem uueks juhtimissüsteemiks. Teisendamise tulemused võivad juhusest sõltuvalt olla mitmesugused. Näiteks mingis maleseisus tehtud käik annab uue seisu, mis sõltub käigu valikust. Saadud juhtimissüsteemile uuesti tema funktsiooni rakendades saame üldiselt jälle uue juhtimissüsteemi, jne. Niisugusel viisil kujunenud (lõplikku või lõpmatut) süsteemide jada nimetatakse juhtimissüsteemi evolutsiooniks. Et igal sammul tuleb kõne alla hulk erinevaid teisendusi, siis võib antud juhtimissüsteem evolutsioneeruda paljudel erisugustel viisidel. Malemängu näite korral avaldub evolutsioon konkreetse partiina; kõigi mõeldavate partiide hulk määrab kõik evolutsiooni viisid.

Juhtimissüsteemide evolutsiooni uurimine on tähtis ülesanne. Eriti huvitav on järgmine küsimus: on antud kaks juhtimissüsteemi; küsitakse, kas on võimalik evolutsiooniline üleminek ühelt teisele. Male puhul tähendaks see otsustamist, kas antud seisust on võimalik võita, s. t. minna üle võiduseisule. Niisugused küsimused on väga olulised ka bioloogias (näiteks tõuaretuses).

Mõnikord on võimalik elementaarseid üleminekuid «juhtida». Males toimub selline juhtimine mängija kogemuste varal, evolutsioonilises bioloogias kasutatakse valiku meetodit. Niimoodi saab evolutsiooni «juhtida». Siit tuleneb omakorda evolutsiooni «juhtimismeetodite» väljatöötamise, s. t. evolutsiooni algoritmide koostamise ja uurimise küsimus. Vastavaid probleeme käsitlevad mänguteooria ja dünaamilise planeerimise teooria.

12. Juhtimissüsteemide töökindluse uurimine

Juhtimissüsteemide funktsioneerimisel on võimalikud häired, s. t. kõrvalekalded nõutavast režiimist. See tingib vajaduse uurida juhtimissüsteemide töökindlust. Süsteemi häirete põhjuseks võivad olla niihästi välismälusse siseneva informatsiooni moonutused kui ka üksikutes elementides tekkinud häired.

Kõigepealt tuleb muidugi selgitada võimalike häirete allikas ning klassifitseerida kõik sellest allikast olenevad kõrvalekalded.

Juhul kui on teada, et lähteinformatsioon on moonutatud, ning kui on teada moonutuste konkreetne iseloom, saab lähteinformatsiooni kasutatavust kindlustada kahel viisil. Esimene eeldab usaldusväärsema kodeerimissüsteemi rakendamist. See toob kaasa mürakindlate koodide loomise ülesande (teatava mürade klassi jaoks), mis on informatsiooniteooria kesksemaid ülesandeid. Suurimaid raskusi valmistab siin sobiva kompromissi leidmine, sest üheaegselt tuleb tagada ka informatsioonikanali võimalikult suur läbilaskevõime ning kodeerimis- ja dekodeerimisalgoritmide lihtsus. Teine viis seisneb juhtimissüsteemi enda «stabiilsuse» kindlustamises sobiva sisestruktuuri abil. Umbes niisugune lahendus esineb näiteks homöostaadi tüüpi süsteemides.

Tuleb märkida, et teine viis on perspektiivsem, kuigi ta ei võimalda häireid täielikult kõrvaldada. Mõlemad viisid eeldavad juhtimissüsteemi ümberehitamist ning ei anna mitte midagi juhul, kui see ei ole teostatav.

Vaatleme nüüd teist võimalust: olgu teada, et juhtimissüsteemi ebakindlust võib põhjustada tema elementide mitteusaldatavus. Kui sealjuures juhtimissüsteem ise on ette antud, siis tekib küsimus, kuidas saaks teda sellest hoolimata kasutada. See toob kaasa juhtimissüsteemi funktsioneerimise kontrolli ülesande, mis eeldab häirete otsimise meetodite loomist. Kui aga juhtimissüsteemi veel ei ole ning ta tuleb antud elementidest alles ehitada, siis seisneb probleem selles, kuidas mitteusaldatavatest elementidest luua töökindlat juhtimissüsteemi. Põhiküsimuseks kujuneb nüüd niisuguste algoritmide otsimine, mis võimaldavad konstrueerida töökindlaid juhtimissüsteeme ja ühtlasi saavutada nende optimaalsust.

Küberneetika põhiülesannete siintoodud loetelu ei saa muidugi lõplikuks lugeda. Kuid juba seegi võimaldab koostada küberneetika valdkonnas ühtset ja küllalt täielikku uurimistööde programmi. Need tööd eeldavad nii matemaatilise aparatuuri ja mitmete konkreetsete teadusalade teoreetiliste tulemuste kasutamist kui ka eksperimentaalseid uurimusi.

(Järgneb)

ARVAMUSI MATEMAATIKAST

Saksa reaktsiooniline idealistlik filosoof A. Schopenhauer (1788—1860) on korduvalt püüdnud arveid õiendada ka matemaatikaga. Muuseas on ta esitanud järgmisi «kaalukaid» vastuväiteid:

Me nõuame igasuguse loogilise põhjenduse taandamist näitlikuks; seevastu matemaatika, nii nagu ta Eukleidese poolt teadusena rajati ja nagu ta tänaseni üldiselt ka on jäänud, püüab usinalt ja suurt vaeva nähes meelega kõrvale heita kogu näitlikkust ja silmanähtavust, mis on tema jaoks iseloomulikud ja kõikjal lähedased, selleks et neid asendada loogilisega. Vägisi kipud arvama, et see on niisamuti, nagu lõikaks keegi endal jalad maha, et karkudega käima hakata . . .

Et kõik, mida Eukleides tõestab, on just sedamoodi, sellega tuleb vastuolulause sunnil nõustuda: m i k s see aga on niimoodi, seda me teada ei saa. Seetõttu tekib peaaegu sama ebamugav tunne, nagu pärast mustkunstniku trikki, ja tõepoolest on enamus Eukleidese tõestusi millegi niisugusega hämmastavalt sarnased. Peaaegu alati astub tõde sisse kuskilt tagaukse kaudu, järeldudes juhuslikul viisil mingist kõrvalisest asjaolust. Tihti lükkab vastuväiteline tõestus üksteise järel kõik uksed kinni ja jätab kõigest üheainsa valla, millest siis hädasunnil tuleb sisse minna. Sageli — nagu näiteks Pythagorase lause puhul — veetakse igasugu jooni, ilma et oleks teada, miks see sünnib: tagantjärele selgub, et need olid lingud, mis ootamatult kinni tõmmatakse... Viis, kuidas Eukleides on kõik selle läbi viinud, väärib aga muide kõigest hoolimata täit imetlust, mis talle ka nõnda palju sajandeid on osaks saanud.

MASIN ÕPIB MÄNGIMA

H. Türnpu

Igapäevases elus mõistetakse õppimist kui uute teadmiste ja
oskuste omandamise protsessi kas õpetaja kaasabil või ilma õpe
tajata. Käesolevas kasutame aga mõistet «õppima» veidi teise
tähenduses. Nimelt ütleme, et mingi objekt on õppiv, kui ta on
võimeline iseseisvalt salvestama väljastpoolt saadavat informat
siooni ja juhinduma sellest oma järgnevas tegevuses. Kui objek
on võimeline õppima õpetaja abil, siis nimetame objekti õpetata
vaks. Loomulikult on iga õppiv objekt ka õpetatav, vastupidi aga
üldiselt mitte. Meie mõttes on seega õppivaks või õpetatavaks
objektiks mitte ainult elusolend, vaid ka küberneetiline masin
Märgime siinjuures, et õppivatel masinatel on täita asendamatu
osa niisuguste protsesside juhtimisel, mille kulgu me ei ole või
melised üksikasjaliselt ette nägema ning seega ei suuda anda juh
tivale masinale täpset informatsiooni tema tegevuseks. Õppiv
masin aga hangib tundmatus situatsioonis ise uut informatsioon
ja tegutseb vastavalt saadud informatsioonile mingis mõttes pari
mal viisil, kusjuures informatsiooni hankimise ja ümbertöötamise
metoodika peab masinale eelnevalt teada olema.

Järgnevalt vaatleme ühte lihtsamat põhimõtet, mille järg
elektronarvuti «Ural-1» on võimeline õppima. Kuna paljusid reaal
suses esinevaid protsesse saab vaadelda mingi mänguna üksikisi
kute või kollektiivide vahel, siis me valime õppimise sisuks teatava
mängu masina ja inimese vahel. Lihtsuse mõttes vaatleme ainul
mõningaid niisuguseid mänge, mida saab mängida 3 × 3 (üheksa
osalisel) väljakul. Rahuldagu need mängud järgmisi tingimusi

1° Mängu seis on üksnes mänguväljaku osade kombinatsioon
funktsioon, s. o. mingit tähtsust ei ole käikude järjekorral
millega vastav kombinatsioon on saadud.

2° Mängu võit on kas 3 või 4 väljakuosa teatav kombinatsioon
mida edaspidi nimetame võiduseisuks.

3° Võiduseis ei sõltu mängijast, s. o. inimese võiduseis on ka
masina võiduseis.

4° Mängu algab inimene.

Üheks selliseks mänguks on nn. «trips-traps-trull».

On ilmne, et mängu õppimist ei saa alustada n.-ö. tühjalt kohalt, s. o. ilma mingite eelteadmisteta. Meie valime masinale järgmised eelteadmised:

1) Kui puudub informatsioon käigu valimiseks, siis masin käib väljaku vabasse ossa.
2) Kõik võiduseisud salvestatakse.
3) Inimese võidule viinud käike imiteeritakse.
4) Inimese käikudest tekkida võivad võiduseisud blokeeritakse, s. o. tehakse käik, mis takistab selle seisu saavutamist.

Õppimise programm on koostatud järgmiselt. Masin, teada saanud inimese järjekordse käigu, vaatab, kas salvestatud võiduseisude hulgas on selliseid, mis sisaldavad antud käiku. Kui niisugust seisu pole, siis käib masin väljaku vabasse ossa. Kui selline võiduseis leitakse, siis vaadatakse, kas see on juba masina enda poolt blokeeritud. Kui mitte, siis see seis fikseeritakse, blokeerituse korral aga vaadeldakse salvestatud seise edasi. Kui kõik salvestatud võiduseisud on läbi vaadatud, siis korratakse ülalkirjeldatud protsessi masina käikude suhtes: masin teeb kindlaks, missugused võiduseisud on saavutatavad tema seniste käikude põhjal, s. o. toimub vastase imiteerimine. Lõpuks valitakse kõigi eespool kirjeldatud viisil fikseeritud seisude võrdlemise teel niisugune käik, mis blokeerib vastast ja võib endale võidu tuua või ainult blokeerib vastast. Kui masin on mängu kaotanud, siis annab inimene koos oma viimase käiguga vastava signaali, mispeale masin salvestab inimese võiduseisu. Kui aga masin on võitnud, siis inimene «kiidab» masinat sellega, et annab talle teistsuguse signaali, millele masin reageerib oma seisu salvestamisega.

Nagu eelnevast järeldub, muutub seega suurte kogemuste korral masina mäng aeglasemaks. «Trips-traps-trulli» tegelikul mängimisel oli masina lühim mõtlemisaeg 5 sekundit ja pikim 35 sekundit. Masin eristab seisusid ja inimese käike tänu sellele, et mänguväljak on nummerdatud alljärgnevalt:

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Oma käigud trükib masin sama skeemi järgi.

Programm on koostatud nii, et masina jaoks osutub võimalikuks ka nn. «ümberõppimine». Seda omadust läheb masinal tarvis, kui on tegemist iseseisva õppimisprotsessiga (ilma õpetajata). Õpetamise puhul eeldame muidugi õpetaja eksimatust. Ümberõppimine toimub järgmiselt. Kui masin on teinud käigu ja «arvab», et ta on võitnud, siis ta peatub ja annab vastava signaali. Kui nüüd inimene sellest hoolimata jätkab mängu ja võidab, siis masin salvestab oma mälusse uue, õige võiduseisu varasema asemele. Praktika aga näitab, et ümberõppimine on aeganõudev protsess, sest valed võiduseisud võivad säilida küllaltki kaua, ilma et masin neid üles leiaks.

Nüüd toome ära ühe seeria masina «õpetamisel» mängitud «trips-traps-trulli» partiisid. Partiid on järjestatud; araabia numbrid näitavad neis inimese käikude järjekorda, rooma numbrid aga masina käikude järjekorda, kusjuures araabia numbrid rooma numbrite juures näitavad masina «mõtlemise» aega sekundites.

1.

I^{5}	II^{5}	3
III^{5}	1	
2		

2.

2	II^{15}	I^{12}
III^{12}	1	
		3

3.

III^{15}		I^{13}
2	1	3
		II^{19}

4.

I^{15}	3	II^{15}
III^{20}	1	
	2	

5.

1	II^{15}	
2	I^{12}	
3	III^{12}	

6.

1	2	3
I^{10}	II^{20}	III^{19}

7.

II^{25}	I^{10}	III^{15}
1	2	3

8.

II^{12}		1
	I^{10}	2
	III^{25}	3

9.

II^{12}	IV^{25}	4
3	1	III^{30}
I^{5}	5	2

Masin peatus viimases partiis pärast 35-sekundilist mõtlemist.

Näeme, et masin käis esimeses partiis mänguväljaku esimestesse vabadesse osadesse. Teises, kolmandas ja neljandas partiis blokeeris masin inimese kõiki teada saadud võiduseise. Viiendas, kuuendas ja seitsmendas partiis blokeeris masin vastast juba nii, et saavutas ka ise võiduseisu, kuid alles pärast inimest. Kaheksandas partiis püüdis masin võitu saavutada, kuid ei osanud veel ette näha, et inimene käib kindlasti väljakuossa nr. 9. Üheksandas partiis oli masinal mängu taktika juba täiesti selge.

Lõpuks märgime veel, et «trips-traps-trull» polnud ainuke 9-osalisel väljakul mängitav mäng, mida masin suutis ära õppida. Esitasime «trips-traps-trulli» õppimisprotsessi üksnes sellel kaalutlusel, et see mäng on teistest tuntum.

KAUGUSE MÕISTE RAKENDUSI

L. Võhandu

Matemaatilised meetodid tungivad tänapäeval kõige erinevamatele erialadele. TRÜ arvutuskeskuses on igapäevasteks külalisteks nii arstid kui majandusteadlased, nii bioloogid kui keelemehed. Kuigi ühtesid huvitavad haigete ravimisega seotud küsimused, teisi tehaste või sovhooside töö planeerimine, kolmandaid mingi loomaliigi kirjeldamine ja neljandaid sõnade tähenduse selgitamine või automaatne tõlkimine ühest keelest teise, on kõigi uurijate uurimisobjektidel ühine see, et nende «tunnetamiseks» ei jätku enam paljast silmast. Inimese mõttelend on harjunud opereerima tavalises kolmemõõtmelises ruumis, teaduslikes uurimustes ulatub objekte kirjeldavate näitajate arv aga sageli ligi sajani. On pikemata selge, et sellise suure näitajate hulga korral ei ole uuritavas materjalis seaduspärasuste leidmine sugugi lihtne.

Arusaadavalt tuleb erinevate ülesannete juures kasutada erinevaid meetodeid. Ühest põhimõtteliselt kõige lihtsamast, kuid praktikas end kõigiti õigustanud meetodist annamegi järgnevas lühikese ülevaate. See meetod baseerub kõigile hästi tuttava kauguse mõiste rakendamisel ja on heaks illustratsiooniks koordinaatide mõiste kasutamisele.

Koordinaatide meetodi tutvustamine algab analüütilises geomeetrias tavaliselt kahe punkti vahelise kauguse leidmisega.

Tasandi kahe punkti (x_{i1}, x_{i2}) ja (x_{j1}, x_{j2}) vahelise kauguse d_{ij} jaoks tuletatakse Pythagorase teoreemi kasutades lihtne valem

$$d_{ij} = \sqrt{(x_{i1} - x_{j1})^2 + (x_{i2} - x_{j2})^2}.$$

Paraku selle valemi tuletamisega aga tavaliselt ka lõpeb kauguse mõiste praktiline kasutamine. Ometi on võimalik sellest äärmiselt lihtsast mõistest lähtudes näidata terve rea teadusharude esindajatele, kuidas matemaatiliste abstraktsioonide kasutamine aitab lahendada neile erialaselt küllaltki suuri raskusi valmistavaid probleeme.

Tavaliselt ei jätku aga rakendustes punkti iseloomustamiseks kahest koordinaadist, vaid üldjuhul tuleb punkti iseloomustada

n koordinaadiga. Nii näiteks võib mineraalsoolade sisaldust mõnedes toiduainetes kirjeldada kolme koordinaadiga:

	Fosfor	Kaltsium	Raud
Loomaliha	162	9	2,2
Sealiha	231	23	0,3
Piim	93	120	0,2
Rukkileib	148	30	1,6

Selle tabeli andmed pärinevad «Tervishoiu käsiraamatust»[1]. Tabelis olevad arvud näitavad, mitu milligrammi mineraalainet sisaldub 100 grammis toiduaines.

Kui tähistada kahe punkti I ja J koordinaate järgmiselt:

$$I = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in}),$$
$$J = (x_{j1}, x_{j2}, \ldots, x_{jn}),$$

siis võib nende kahe punkti vahelise kauguse defineerida nii:

$$d_{ij} = \sqrt{(x_{i1} - x_{j1})^2 + (x_{i2} - x_{j2})^2 + \ldots + (x_{in} - x_{jn})^2}.$$

Seda definitsiooni kasutades võime arvutada näiteks loomaliha ja sealiha vahelise kauguse mineraalainete sisalduse mõttes:

$$d_{LS} = \sqrt{(162 - 231)^2 + (9 - 23)^2 + (2{,}2 - 0{,}3)^2} = 70{,}5.$$

Arvutusi jätkates võime koostada kõigi vaadeldavate toiduainete vaheliste kauguste täieliku tabeli:

	L	S	P	R
L	0	d_{LS}	d_{LP}	d_{LR}
S	d_{SL}	0	d_{SP}	d_{SR}
P	d_{PL}	d_{PS}	0	d_{PR}
R	d_{RL}	d_{RS}	d_{RP}	0

Selles tabelis on peadiagonaalil ilmselt nullid (objekti kaugus iseendast on null!) ning peadiagonaali suhtes sümmeetriliselt paiknevad kaugused on võrdsed $(d_{ij} = d_{ji})$.

Kui selline kauguste tabel tõepoolest koostada üksikute toiduainete jaoks, siis oleks tal üks oluline puudus, mis muudab ta praktikas väärtusetuks. Nimelt on vaadeldavate toiduainete fosforisisaldus oma absoluutväärtuselt sedavõrd suur, et ta nagu «surmaks» oma suurusega näiteks rauasisalduse erinevuse. Kui

[1] Tervishoiu käsiraamat, I. k. Tallinn, 1961, lk. 386.

aga vaadelda kõigi muutujate suhtelisi kõikumispiire, siis näeme, et fosforisisaldust iseloomustav näitaja on hoopis stabiilsem kui kaltsiumi või rauda iseloomustav näitaja.

Sellise ebakõla kõrvaldamiseks tavaliselt näitajad normeeritakse, s. t. iga tunnuse vaatlusväärtus x teisendatakse valemi

$$\frac{x - \bar{x}}{x_{\max} - x_{\min}}$$

kohaselt, kus $\bar{x}$ on vaadeldava tunnuse keskmine väärtus üle kõikide objektide, $x_{\max}$ ja $x_{\min}$ aga vastavalt tunnuse maksimaalne ja minimaalne väärtus kõigi vaadeldavate objektide hulgas.

Normeerimisega me saame kahesugust kasu: esiteks muutuvad kõigi tunnuste varieeruvuspiirkonnad suuruse poolest võrreldavaks ja teiseks on meil pärast teisendamist tegemist juba dimensioonita suurustega. See elimineerib täielikult mõõtühiku osatähtsuse. Olgu mõõtmised teostatud millimeetrites või kilomeetrites; näidaku objekte iseloomustavad mõõtarvud kas kilosid või laste arvu — pärast normeerimist jääb iga mõõtetulemuse asemel uurija käsutusse arv, mis näitab selle suhtelist kõrvalekallet keskväärtusest.

Algandmete tabel omandab meie näite korral pärast normeerimist järgmise kuju:

	Fosfor	Kaltsium	Raud
Loomaliha	0,03	—0,33	0,56
Sealiha	0,53	—0,20	—0,39
Piim	—0,48	0,67	—0,44
Rukkileib	—0,08	—0,14	0,26

Pärast lihtsaid arvutusi eespool antud valemi järgi saame ka kauguste tabeli:

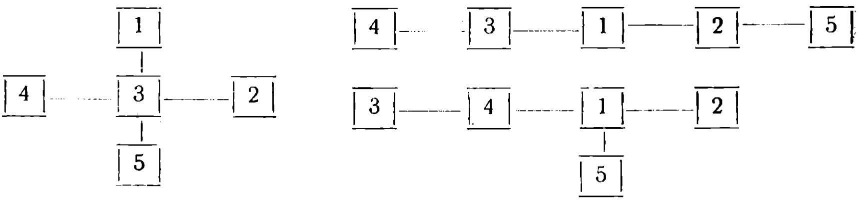
	L	*S*	*P*	*R*
L	0	1,08	1,50	0,37
S	1,08	0	1,33	0,89
P	1,50	1,33	0	1,14
R	0,37	0,89	1,14	0

Selle tabeli abil saab otsustada nelja toiduaine sarnasuse üle mineraalainete vahekordade mõttes. Näeme, et loomaliha ja rukkileib on kõige lähedasemad ja et piim on teistest kõige kaugemal.

Kui uuritavaid objekte on rohkem, siis ei ole niisuguse kauguste tabeli «lugemine» mitte just kõige lihtsam ülesanne. TRÜ arvutuskeskuses on siiani kõige suurema tabeli mõõtmed olnud 89×89. On päris selge, et niisuguse suure tabeli analüüsimiseks on omakorda vaja mõnda spetsiaalset meetodit. Selleks näib sobivat

TRÜ biofüüsika laboratooriumis üpris vilgast rakendamist leidnud minimaalse ühendustee meetod.

Minimaalse ühendustee meetodi kirjeldamiseks märgime kõigepealt üsna lihtsa tõena, et tasandi m punkti ühendamiseks piisab $m - 1$ ühenduslõigust. Sellist ühendatud punktide süsteemi nimetame edasises puuks. Toome mõned puude näited:



Igal lugejal on kerge veenduda, et juba viie objekti korral võib moodustada tohutu hulga erinevaid puid.

Millist puud lugeda mingis mõttes teistest paremaks? Füüsikud ja mehhaanikud on juba pikemat aega veendumusel, et looduses valitsevad väga sageli nn. miinimumprintsiibid. Osutub, et ka kauguste tabelite uurimisel on miinimumprintsiibid abiks. TRÜ biofüüsika laboratooriumis on suure hulga kõige erinevamatelt aladelt pärinevate ülesannete juures saanud kinnitust fakt, et kõige otstarbekamaks puuks tuleb lugeda niisugust, milles omavahel ühendatud punktide vaheliste kauguste summa on minimaalne. Minimaalse ühendustee leidmine on vastava algoritmi abil üsna lihtne ja nõuab ka suurte tabelite korral vähe aega.

Minimaalse ühendustee leidmiseks kirjutame alguses välja kauguste tabeli üldisel kujul:

$$\begin{array}{cccc}
d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{1m} \\
d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{2m} \\
d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{3m} \\
\cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot \\
d_{m1} & d_{m2} & d_{m3} \ \ldots & d_{mm}
\end{array}$$

Selles tabelis $d_{ii} = 0$ ja $d_{ij} = d_{ji}$.

Nüüd otsime kõigepealt kauguste tabelist kõige väiksema elemendi ülalpool peadiagonaali. Olgu see d_{ij}. Kirjutame vastava rea elemendid välja ja varustame nad elementide asukohti iseloomustavate aadressidega. Selleks märgime iga kauguse alla talle vastava rea numbri, s. o. esimese indeksi, ja tema kohale veeru numbri, s. o. teise indeksi:

$$\begin{array}{cccc}
1 & 2 & \boxed{\begin{array}{c} j \\ d_{ij} \\ i \end{array}} & m \\
d_{i1} & d_{i2} & & d_{im} \\
i & i & & i
\end{array}$$

Vähima kauguse d_{ij} märgime kuidagi ära, ümbritseme näiteks raamiga; loeme ta kinnistatuks ning järgnevast võrdlemisest ta enam osa ei võta.

Edasi kontrollime, kas j-ndas reas ei leidu kaugusi, mis oleksid väiksemad väljakirjutatud i-nda rea samades veergudes antud kaugustest[2]. Kui leidub, siis asendame väljakirjutatud i-nda rea sellised liikmed j-nda rea vastavate elementidega (muutes vastavalt ka indekseid). Kuna eelmisel sammul kinnistatud element jäi edasisest võrdlemisest kõrvale, siis saame uues reas ühe liikme vähem. Uues reas võivad alumiste indeksitena esineda juba i ja j. Selles reas kinnistame jälle kõige väiksema elemendi. Kui vähima elemendi ülemine indeks on k, siis võrdleme äsjamoodustatud uue rea elemente tabeli k-nda rea elementidega. Asendame jälle suuremad elemendid vastavalt väiksematega jne. Niisugust kinnistamise ja asendamise protsessi jätkame seni, kuni kõik objektid on kinnistatud. Kinnistatud elemendid annavadki otsitava minimaalse puu. Äsjakirjeldatud algoritm on ühe matemaatilise planeerimismeetodi, nn. dünaamilise planeerimise erijuhtum.

Demonstreerime algoritmi rakendamist eespool vaadeldud tabeli korral. Mugavuse mõttes kirjutame kauguste tabeli veel kord ümber, asendades objekte kirjeldavad tähed numbritega:

	1	2	3	4
1	0	1,08	1,50	0,37
2	1,08	0	1,33	0,89
3	1,50	1,33	0	1,14
4	0,37	0,89	1,14	0

Vähim kaugus ülevalpool peadiagonaali on 0,37. Et see paikneb esimeses reas, siis kirjutame esimese rea (s. o. esimese näitaja kaugused ülejäänutest) eraldi välja:

1	2	3	4
0	1,08	1,50	$\boxed{0,37}$
1	1	1	1

Võrdleme tabeli neljandas reas olevaid neljanda näitaja kaugusi väljakirjutatud rea kinnistamata näitajate kaugustega. Et neljanda näitaja kaugused teisest ja kolmandast näitajast on väiksemad kui vastavad kaugused esimesel näitajal, siis saame välja-

[2] Siin tähistab j viimati kinnistatud kauguse veeruindeksit ja i tähistab tema reaindeksit. — Esitatava algoritmi paremaks mõistmiseks soovitame lugejal kogu aeg paralleelselt jälgida allpool toodavat konkreetset arvutusnäidet.

kirjutatud esimese rea keskmiste liikmete asemele:

2	3
0,89	1,14
4	4

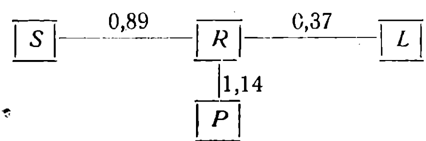
Viimasel sammul $d_{43} < d_{23}$, mistõttu kuulub kinnistamisele äsja väljakirjutatud kaugus:

3
1,14
4

Kinnistatud elementide põhjal saame ühendamisele kuuluvad näitajate paarid:

$$4 — 1;\ 4 — 2;\ 4 — 3.$$

Vastavat skeemi välja joonistades, näitajate numbreid nende tähendustega asendades ning kaugusi juurde märkides saame otsitava puu:



Suurte tabelite korral annavad sellised skeemid kõigiti ratsionaalse ning objektide vahelisi vahekordi hästi kirjeldava pildi. Nende skeemide üksikasjalikum uurimine on juba konkreetse teadusala esindaja ülesanne ja läheks matemaatilises kogumikus liiga pikale. Usume siiski, et juba toodud lihtsast näitest peaks nähtuma metoodika kasulikkus.

Bioloogiliste objektide vaheliste kauguste defineerimiseks võib kasutada ka teisi definitsioone, mis erinevad selles artiklis vaadeldust. Mõni neist definitsioonidest võib meid viia ka mittesümmeetrilise kauguseni ($d_{ij} \neq d_{ji}$). See nagu tuletaks meelde vana lugu krokodillist, kelle pikkus oli peast sabani 5 meetrit ja sabast peani 8 meetrit, kuid mittesümmeetriline kaugus kahe punkti vahel on kõigiti reaalne asi. Võime selles veenduda näiteks kahe punkti vahelise sõidukauguse arvutamisel, kui need punktid paiknevad ühesuunalise liiklusega tänaval.

LINEAARSED PLANEERIMISÜLESANDED

Ü. Kaasik

Majandusliku tegevuse planeerimisel tuleb pidevalt lahendada väga mitmesuguseid matemaatilisi ülesandeid. Enamasti on need planeerimisülesanded niisugused, et objektiivsed tingimused ei määra kõiki tundmatuid täielikult, vaid ainult teataval määral kitsendavad nende valikut. Sellisel juhul jääb plaani koostajale vabadus valida suure hulga objektiivselt võimalike plaanide seast see, mis mingis mõttes osutub kõige paremaks. Matemaatiline planeerimine ongi matemaatika haru, mis tegeleb niisuguste «mingis mõttes parimate» ehk optimaalsete plaanide leidmiseks vajalike meetodite väljatöötamisega.

Selleks, et planeerimisülesannete lahendamiseks saaks kasutada matemaatilisi meetodeid, tuleb need ülesanded kõigepealt sõnastada n.-ö. matemaatilises keeles. Demonstreerime paari lihtsa näite varal, kuidas seda tehakse.

Näide 1. Tehases toodetakse kaht liiki mineraalväetisi, kusjuures mõlema valmistamiseks läheb vaja nelja tsehhi tööd. Järgnev tabel kirjeldab tootmistingimusi.

Tsehh	Väetis 1.	Väetis 2.	Päevane tööaeg
I	2	3	77
II	0,5	2,5	42
III	1,25	0,25	28
IV	1,5	1	42
Päevaplaan	17,5	11,5	

Tabelis on antud aeg tundides, mis kulub ühe tonni kummagi väetise töötlemisele igas tsehhis. Lisaks on iga tsehhi kohta toodud päevas kasutada olev aeg tundides (sisuliselt võrdub see tsehhis olevate agregaatide arvu ning päeva töötundide arvu korrutisega) ja päevaplaan tonnides kummagi väetise jaoks.

Ülesandeks on planeerida väetiste tootmine nii, et päevaplaan oleks vähemalt täidetud ja ületunde ei tehtaks.

Tähistame esimest liiki väetise planeeritavat päevatoodangut (tonnides) sümboliga x_1 ja teist liiki väetise päevatoodangut x_2. Nõue, et päevaplaan oleks vähemalt täidetud, on nüüd kirjutatav võrratustena

$$x_1 \geqslant 17{,}5; \quad x_2 \geqslant 11{,}5.$$

Edasi arvutame igas tsehhis vajaliku tööaja ja nõuame, et see ei oleks suurem etteantud päevasest tööajast. Näiteks I tsehhis kulub x_1 tonni esimest liiki väetise peale $2x_1$ tundi ja x_2 tonni teist liiki väetise peale $3x_2$ tundi. Need ajad kokku ei tohi ületada 77 tundi:

$$2x_1 + 3x_2 \leqslant 77.$$

Ülejäänud kolme tsehhi tööaegade jaoks saame analoogiliselt

$$\begin{aligned} 0{,}5x_1 + 2{,}5x_2 &\leqslant 42, \\ 1{,}25x_1 + 0{,}25x_2 &\leqslant 28, \\ 1{,}5x_1 + x_2 &\leqslant 42. \end{aligned}$$

Sellega on kõik ülesande nõuded kirja pandud ja väetiste päevatoodangud x_1 ja x_2 tuleb nüüd leida nii, et nad rahuldaksid võrratussüsteemi

$$\left.\begin{aligned} x_1 \qquad\quad &\geqslant 17{,}5 \\ x_2 &\geqslant 11{,}5 \\ 2x_1 + 3x_2 &\leqslant 77 \\ 0{,}5x_1 + 2{,}5x_2 &\leqslant 42 \\ 1{,}25x_1 + 0{,}25x_2 &\leqslant 28 \\ 1{,}5x_1 + x_2 &\leqslant 42 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Sellel võrratussüsteemil on lõpmata palju lahendeid. Näiteks rahuldavad seda süsteemi väärtuste paarid $x_1 = 17{,}5$, $x_2 = 11{,}5$; $x_1 = 20$, $x_2 = 12$; $x_1 = 19$, $x_2 = 13$ jne. Seega tuleb siin suure hulga objektiivselt võimalike, s. t. püstitatud nõudeid rahuldavate plaanide hulgast valida mingis mõttes parim. Olgu tehasele ülesandeks tehtud toota väetisi võimalikult rohkem; see tähendab, et paremaks tuleb lugeda niisugust plaani, mille korral päevane kogutoodang on suurem. Et päevane kogutoodang on lihtsalt $x_1 + x_2$, siis selline täpsustatud planeerimisülesanne on matemaatiliselt sõnastatav järgmiselt: leida võrratussüsteemi (1) niisugune lahend, mis muudab maksimaalseks avaldise

$$x_1 + x_2. \qquad (2)$$

N ä i d e 2. Keemiatehase õlilaos valmistatakse immutusõli nelja olemasoleva õlisordi segamise teel. Riikliku standardi kohaselt peab immutusõli erikaal olema 0,98, viskoossus 44 ja leektäpp 95. Koostisosade vastavad andmed on katseliselt määratud; need on toodud järgnevas tabelis. Samas on antud ka nelja lähteõli päevased varud tonnides.

Õlisort	1.	2.	3.	4.
Erikaal	1,02	0,99	0,92	0,90
Viskoossus	20	42	78	98
Leektäpp	161	92	89	80
Varud	43	104	10	15

Lihtsuseks eeldame, et segu erikaal, viskoossus ja leektäpp on määratavad koostisosade vastavate andmete kaalutud keskmistena.

Antud varudest tuleb valmistada immutusõli, mille müügihind on 50 rubla tonn. Et õlireservuaarid tuleb järgmiseks päevaks varude alt vabastada, segatakse kõik ülejäägid kütteõliks ja müüakse hinnaga 30 rubla tonn.

Kuidas segada immutusõli nii, et päevase kogutoodangu maksumus oleks maksimaalne?

Tähistame i-ndast õlisordist ($i = 1, 2, 3, 4$) immutusõliks mineva koguse sümboliga x_i ja kütteõliks mineva koguse sümboliga x_{i+4} (näiteks x_6 tähendab õlisordi nr. 2 kütteõliks minevat kogust tonnides). Et iga õlisordi päevased varud on antud ja kogu varu tuleb ära kasutada, siis saame äsjadefineeritud tundmatute jaoks kohe neli võrrandit:

$$\begin{aligned} x_1 + x_5 &= 43 \\ x_2 + x_6 &= 104 \\ x_3 + x_7 &= 10 \\ x_4 + x_8 &= 15. \end{aligned}$$

Segu erikaalu leidmiseks tuleb segu koostisosade kaalude ning erikaalude korrutiste summa jagada segu kaaluga (s. t. leida koostisosade erikaalude kaalutud keskmine). Ülesande tingimuste kohaselt peab immutusõli erikaal olema 0,98, seega saame võrrandi

$$\frac{1{,}02x_1 + 0{,}99x_2 + 0{,}92x_3 + 0{,}90x_4}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4} = 0{,}98.$$

Seda võrrandit sajaga korrutades ning ühisele nimetajale viies omandab ta pärast sarnaste liikmete koondamist kuju

$$4x_1 + x_2 - 6x_3 - 8x_4 = 0.$$

Täpselt samuti leiame segu nõutava viskoossuse ja leektäpi võrrandid, mis pärast lihtsustamist on kirjutatavad kujul

$$12x_1 + x_2 - 17x_3 - 27x_4 = 0$$

ja

$$22x_1 - x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 0.$$

Leiame lõpuks veel kogutoodangu maksumuse. Et immutusõli saadakse kokku $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ tonni ja kütteõli $x_5 + x_6 + x_7 + x_8$ tonni, siis toodangu maksumus rublades on lihtsalt

$$50x_1 + 50x_2 + 50x_3 + 50x_4 + 30x_5 + 30x_6 + 30x_7 + 30x_8.$$

Kui veel arvestada asjaolu, et ülesande sisu kohaselt saavad tundmatud $x_1, x_2, \ldots, x_8$ omandada vaid mittenegatiivseid väärtusi, siis võime oma planeerimisülesande formuleerida järgmiselt: leida võrrandisüsteemi

$$\begin{array}{lllllllll}
x_1 & & & & +x_5 & & & & = 43 \\
 & x_2 & & & & +x_6 & & & = 104 \\
 & & x_3 & & & & +x_7 & & = 10 \\
 & & & x_4 & & & & +x_8 & = 15 \\
4x_1 & +x_2 & -6x_3 & -8x_4 & & & & & = 0 \\
12x_1 & +x_2 & -17x_3 & -27x_4 & & & & & = 0 \\
22x_1 & -x_2 & -2x_3 & -5x_4 & & & & & = 0
\end{array}$$

mittenegatiivsete lahendite hulgast see, mis muudab maksimaalseks funktsiooni

$$50x_1 + 50x_2 + 50x_3 + 50x_4 + 30x_5 + 30x_6 + 30x_7 + 30x_8.$$

Nagu toodud näidetest selgub, taanduvad planeerimisülesanded teatava funktsiooni maksimumi leidmisele, kusjuures peab olema rahuldatud terve rida lisatingimusi, mis väljenduvad võrranditena või võrratustena. Näited olid valitud sellised, et nii maksimaalseks muudetav funktsioon kui ka lisatingimused sisaldasid tundmatuid suurusi vaid esimesel astmel, s. t. olid lineaarsed. Sellepärast nimetataksegi kõiki seda tüüpi ülesandeid *lineaarseteks planeerimisülesanneteks*.

Iga lineaarset planeerimisülesannet saab sõnastada järgmisel põhikujul: leida võrrandisüsteemi

$$\left.\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m
\end{array}\right\} \quad (3)$$

mittenegatiivsete lahendite hulgast see, mis muudab maksimaalseks funktsiooni

$$c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n. \qquad (4)$$

Võrrandeid (3) nimetatakse tavaliselt planeerimisülesande **kitsendusteks**, ja funktsiooni (4) selle ülesande **sihifunktsiooniks**.

Esitatud näidetest oli vaid teine sõnastatud äsjatoodud põhikujul. Kerge on aga veenduda, et ka esimese näite puhul saab püstitada samaväärse ülesande, mille sõnastus omandab juba nõutud kuju. Nimelt kui planeerimisülesande mõned kitsendused on antud võrratustena, siis saab neid võrratusi tundmatute arvu suurendamisega alati muuta võrrandeiks. Kui näiteks esimesel kitsendusel on kuju

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leqslant b_1,$$

siis, tähistades vahe $b_1 - (a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n)$ sümboliga x_{n+1}, saame moodustada võrrandi

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1.$$

Kui nõuda, et x_{n+1} oleks mittenegatiivne, siis see võrrand on samaväärne lähtevõrratusega.

Juhul kui lähtekitsendus on antud teisesuunalise võrratusena

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geqslant b_1,$$

tuleb võrrandi saamiseks viimase vasakus pooles uus tundmatu x_{n+1} lahutada. See uus tundmatu tähendab siis vahet $(a_{11}x_1 + \ldots$ $\ldots + a_{1n}x_n) - b_1 = x_{n+1}$.

Seega iga võrratusena antud kitsenduse muutmine võrrandiks suurendab tundmatute arvu ühe võrra (vahe x_{n+1} on ju samuti tundmatu, sest lahendamisele asudes me ei tea, kui palju osutub võrratuse üks pool teisest poolest väiksemaks).

Mõnikord tuleb planeerimisülesande lahendilt nõuda rohkem kui mittenegatiivsust: võib osutuda vajalikuks, et tundmatud oleksid suuremad teatud etteantud konstantidest (näide 1). Kui ülesandes on nõutud, et peab olema $x_i \geqslant d_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, siis võime defineerida uued tundmatud $x'_i = x_i - d_i$; pärast seda omandavad viimased võrratused kuju $x'_i \geqslant 0$ ning nende uute tundmatute suhtes saame ülesande sõnastuse jälle ülaltoodud põhikujul.

Näites 1 vaadeldud ülesande puhul tuleks vastavalt defineerida $x'_1 = x_1 - 17{,}5$ ja $x'_2 = x_2 - 11{,}5$. Võrratussüsteemi (1) kaks esimest võrratust omandavad nüüd kuju $x'_1 \geqslant 0$ ja $x'_2 \geqslant 0$. Tundmatute x_1 ja x_2 asendamine ülejäänud võrratustes annab pärast lihtsustamist (sealhulgas murdude kaotamist võrratuste vasakutes pooltes) ja täiendavate mittenegatiivsete tundmatute x'_3, x'_4, x'_5, x'_6

sissetoomist võrratussüsteemi (1) asemele võrrandisüsteemi

$$\left.\begin{array}{llllll} 2x'_1 + 3x'_2 + x'_3 & & & & = 7{,}5 \\ x'_1 + 5x'_2 & + x'_4 & & & = 9 \\ 5x'_1 + x'_2 & & + x'_5 & & = 13 \\ 3x'_1 + 2x'_2 & & & + x'_6 & = 8{,}5 \end{array}\right\}, \qquad (5)$$

kus kõik tundmatud $x'_1, \ldots, x'_6$ peavad nüüd olema juba mittenegatiivsed. Antud juhul on ühtlasi lihtne aru saada uute tundmatute tähendusest: x'_1 ja x'_2 tähendavad vastavalt esimest ja teist liiki väetise koguseid, mis kavatsetakse toota üleplaaniliselt. Võrrandite (5) paremad pooled tähendavad päevaplaani täpse täitmise korral tekkivat tsehhide tööaja ülejääki, täiendavad tundmatud aga sama ülejääki üleplaanilise tootmise puhul (x'_3 tundides, x'_4 ja x'_6 pooltundides ning x'_5 veerandtundides).

Üleminek uutele tundmatutele sihifunktsioonis $x_1 + x_2$ annab sellele kuju

$$29 + x'_1 + x'_2. \qquad (6)$$

Seega tuleb näites 1 püstitatud ülesande lahendamiseks leida võrrandisüsteemi (5) niisugune mittenegatiivne lahend, mis muudab maksimaalseks funktsiooni (6).

Mõnedes praktilistes planeerimisülesannetes võib muidugi juhtuda, et nõutakse mitte sihifunktsiooni maksimumi, vaid hoopis miinimumi leidmist (näiteks, kui on tarvis leida plaan, mis võimaldaks saavutada vähimat omahinda). Sel juhul tarvitseb vaid muuta sihifunktsiooni märk ning ülesanne omandabki kohe põhi kuju.

Põhikujul sõnastatud lineaarse planeerimisülesande lahendamiseks tuleb tundmatutele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ leida niisugused väärtused, mille korral: 1) võrrandisüsteem (3) on rahuldatud, 2) kõik tundmatute väärtused on mittenegatiivsed, 3) funktsioon (4) omandab maksimaalse väärtuse kõigi nende väärtuste hulgast, mida ta saab omandada eelmist kaht nõuet rahuldava tundmatute valiku korral.

Kui tundmatute väärtused on valitud nii, et võrrandisüsteem (3) on rahuldatud, siis sellist väärtuste kombinatsiooni $(x_1, \ldots, x_n)$ nimetatakse planeerimisülesande l a h e n d i k s. Seega on planeerimisülesande lahendiks võrrandisüsteemi (3) iga lahend. Kui kõigi tundmatute väärtused lahendis on peale selle veel mittenegatiivsed, siis nimetatakse lahendit p l a a n i k s ehk l u b a t a v a k s l a h e n d i k s. Niisugust lubatavat lahendit, mille puhul sihifunktsioon (4) omandab maksimaalse väärtuse, võrreldes tema väärtustega kõigi teiste lubatavate lahendite puhul, nimetatakse vaadeldava planeerimisülesande o p t i m a a l s e k s l a h e n d i k s ehk o p t i m a a l s e k s p l a a n i k s.

Selleks et võrrandisüsteemil (3) ja seega ka vastaval planeerimisülesandel üldse oleks lahendeid, peab lineaarselt sõltumatute võrrandite arv olema mitte suurem kui tundmatute arv [1]. Kui sõltuvad võrrandid on süsteemist juba kõrvaldatud, peab planeerimisülesande lahenduvuseks seega olema $m \leqslant n$. Jättes praktikas vähe huvi pakkuvad juhud kõrvale, eeldame edaspidi ikka, et võrrandisüsteem (3) on lahenduv ning tal on lõpmata palju lahendeid.

Leidub muidugi võrrandisüsteeme, millel on küll lõpmata palju lahendeid, kuid nende hulgas pole ühtki mittenegatiivset. Seega võib juhtuda, et süsteemi (3) lahenduvusele vaatamata planeerimisülesandel lubatavaid lahendeid ei ole. Kuid ka lubatavate lahendite olemasolu korral võib vastav planeerimisülesanne siiski osutuda mittelahenduvaks, s. t. pole olemas optimaalset lahendit. See juhtub siis, kui sihifunktsioon saab lubatavate lahendite puhul omandada kui tahes suuri väärtusi, s. t. ta on lubatavate lahendite hulgal tõkestamata. Niisuguste olukordade võimalikkust tuleb planeerimisülesannete lahendamisel loomulikult arvestada.

Et lineaarse planeerimisülesande optimaalse lahendi leidmine tähendab teatava lineaarse võrrandisüsteemi mittenegatiivsete lahendite hulgast mingis mõttes parima väljavalimist, siis muidugi peab optimaalse lahendi leidmiseks eeskätt oskama seda lineaarset võrrandisüsteemi lahendada. Lineaarse võrrandisüsteemi lahendamine taandub teatavasti reale operatsioonidele selle tundmatute kordajatega ja vabaliikmetega, s. o. laiendatud maatriksi elementidega [1]. Süsteemi (3) üldlahendi leidmiseks tuleb tema laiendatud maatriks

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \tag{7}$$

elementaarteisendustega (nendeks on maatriksi rea korrutamine nullist erineva teguriga või ühele reale mingi arvu kordse teise rea liitmine) teisendada kujule, mis sisaldab nii mitmest reast ja veerust koosnevat ühikmaatriksit, kui suur on võrrandisüsteemi maatriksi astak (ehk lineaarselt sõltumatute võrrandite arv). Näiteks kui süsteemi (3) maatriksi astak on m, siis teisendades ühikvektoriteks [2] maatriksi (7) esimesed m veergu saame tulemuseks maatriksi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & a'_{1,m+1} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a'_{2,m+1} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a'_{m,m+1} & \dots & a'_{mn} & b'_m \end{pmatrix}.$$

---

[1] Lineaarsete võrrandisüsteemide lahendamisega seotud küsimuste lähemaks tundmaõppimiseks võib kasutada näiteks õpikut K a n g r o, G., Kõrgem algebra. Tallinn, 1962, peatükk II (lk. 51—86).

[2] Ühikvektori all mõistame käesolevas maatriksi niisugust veergu, mille üks element võrdub arvuga 1 ja ülejäänud elemendid on nullid. Ühikmaatriks on selline ühikvektoritest koosnev maatriks, mille igas reas on täpselt üks element, mis võrdub arvuga 1.

Pidades silmas, et elementaarteisenduste teostamine tähendab võrrandisüsteemi teisendamist samaväärseks võrrandisüsteemiks, oleme seega süsteemi (3) teisendanud temaga samaväärsele kujule

$$\left.\begin{array}{llllll} x_1 & & + a'_{1,m+1}x_{m+1} & + \ldots + a'_{1n}x_n & = b'_1 \\ & x_2 & + a'_{2,m+1}x_{m+1} & + \ldots + a'_{2n}x_n & = b'_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & x_m + a'_{m,m+1}x_{m+1} & + \ldots + a'_{mn}x_n & = b'_m \end{array}\right\} \quad (8)$$

Kui võrrandisüsteem (3) on teisendatud kujule (8), siis ei valmista raskust välja kirjutada selle süsteemi niisugust üldlahendit, milles vabadeks (s. t. täiesti vabalt valitavate väärtustega) tundmatuteks on $x_{m+1}, \ldots, x_n$:

$$\begin{array}{l} x_1 = b'_1 - a'_{1,m+1}x_{m+1} - \ldots - a'_{1n}x_n \\ x_2 = b'_2 - a'_{2,m+1}x_{m+1} - \ldots - a'_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m = b'_m - a'_{m,m+1}x_{m+1} - \ldots - a'_{mn}x_n . \end{array}$$

Sellest üldlahendist kõige lihtsamini saadavaks erilahendiks on niisugune, milles kõik vabad tundmatud on võrrutatud nulliga:

$$x_1 = b'_1,\ x_2 = b'_2,\ \ldots,\ x_m = b'_m,\ x_{m+1} = 0,\ \ldots,\ x_n = 0. \quad (9)$$

Kui võrrandisüsteemiga (3) on kirja pandud lineaarse planeerimisülesande kitsendused, siis huvitavad meid vaid lubatavad, s. t. mittenegatiivsed erilahendid. Lahendi (9) lubatavuseks peab seega olema $b'_i \geqslant 0$ iga $i = 1, 2, \ldots, m$ korral. Maatriksi (7) ühikvektoriteks teisendatavate veergude mis tahes valiku puhul ei tarvitse see tingimus üldiselt täidetud olla, kuid osutub, et kui võrrandisüsteemil üldse on mittenegatiivseid lahendeid, siis saab sellist valikut alati teostada.

Kirjeldamisele tulev lineaarsete planeerimisülesannete lahendamise meetod seisnebki optimaalse lahendi otsimises niisuguste lubatavate lahendite hulgast, millel on kuju (9), s. t. milles vabad tundmatud võrduvad nulliga.

Lineaarse planeerimisülesande tegelik lahendamine on jaotatav kaheks enam-vähem iseseisvaks osaks: mingi lubatava lahendi (nn. a l g l a h e n d i) leidmine kujul (9) ja optimaalse lahendi konstrueerimine sellest alglahendist lähtudes. Võtame siin üksikasjalikumale vaatlusele vaid lahendamise teise osa, eeldades, et sobiva kujuga alglahend on juba leitud, s. t. et kitsenduste võrrandisüsteem on teisendatud kujule (8), kus kõik vabaliikmed on mittenegatiivsed.

Selline eeldus on paljude praktikast pärinevate planeerimisülesannete korral ka tegelikult täidetud. Nimelt kui lineaarse planeerimisülesande kitsendused on esialgses sõnastuses antud võrratustena kujul $\leqslant$, kusjuures kõik vabaliikmed b_i on mittenegatiivsed, siis võrratustest vabanemisel saamegi võrrandisüsteemi nõutud kujul:

$$\left.\begin{array}{lllllll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} & & & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & + x_{n+2} & & = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & & + x_{n+m} & = b_m. \end{array}\right\} \quad (10)$$

Meenutame, et niisuguse kujuga planeerimisülesandeks osutus ka ülalvaadeldud esimene näide (vt. võrrandisüsteemi (5)).

Selleks, et optimaalse lahendi leidmisel saaks täielikumalt ära kasutada lineaarsete võrrandisüsteemide lahendamise metoodikat, kirjutame ka sihifunktsiooni (4) võrrandina. Tähistades sihifunktsiooni väärtuse sümboliga z ja lugedes ka seda tundmatuks (see on ainus tundmatu, mille kohta me ei püstita mittenegatiivsuse nõuet) saame võrrandi

$$z - c_1x_1 - c_2x_2 - \ldots - c_nx_n = c_0. \qquad (11)$$

Lisades selle võrrandi süsteemile (10) saame vaadeldava planeerimisülesande sõnastada järgmiselt: leida võrrandisüsteemi (10)—(11) selline lahend, milles iga $i = 1, 2, \ldots, n + m$ korral $x_i \geqslant 0$, kusjuures z omandab maksimaalse võimaliku väärtuse. Et selle võrrandisüsteemi laiendatud maatriksil

$$\begin{pmatrix} 1 & -c_1 & -c_2 & & -c_n & 0 & 0 & \ldots & 0 & c_0 \\ 0 & a_{11} & a_{12} & & a_{1n} & 1 & 0 & \ldots & 0 & b_1 \\ 0 & a_{21} & a_{22} & & a_{2n} & 0 & 1 & \ldots & 0 & b_2 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} & 0 & 0 & \ldots & 1 & b_m \end{pmatrix} \qquad (12)$$

on juba nõutav kuju, siis võime kohe välja kirjutada meid huvitava erilahendi:

$$z = c_0,\ x_1 = 0, \ldots, x_n = 0,\ x_{n+1} = b_1,\ x_{n+2} = b_2, \ldots, x_{n+m} = b_m.$$

Nüüd on ülesandeks konstrueerida uus erilahend nii, et endiselt oleks $x_i \geqslant 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n + m)$ ja z omandaks praegusest suurema väärtuse. Kõigepealt paneme tähele, et sellest erilahendist mingi teise lubatava lahendi saamiseks tuleb vähemalt üks tundmatutest $x_1, \ldots, x_n$ muuta positiivseks; kui need kõik jätta nullideks, siis ülejäänud $m + 1$ tundmatu väärtused on võrrandisüsteemist juba üheselt määratud, s. t. teisi niisuguseid lahendeid ei leidu. Järelikult, kui me soovime leida uut lubatavat lahendit, milles z omandaks suurema väärtuse, siis tuleb nulliliste tundmatute $x_1, \ldots, x_n$ hulgast leida mõni niisugune, mille suurendamisel suureneb ka z. Otsimist kergendab võrrand (11), mis annab z avaldise just nende tundmatute kaudu, millede mõju z muutumisele on vaja selgitada:

$$z = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n.$$

Kui mingi tundmatu x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ kordaja c_i selles võrrandis on negatiivne, siis x_i suurendamine vähendab tundmatut z. Seega niisuguste tundmatute suurendamine sihile ei vii.

Kui kõik kordajad c_i on negatiivsed või nullid, siis tundmatut z pole üldse võimalik suurendada ning me olemegi leidnud planeerimisülesande optimaalse lahendi. Leitud lahendi optimaalsus paistab otsekohe silma ka süsteemi laiendatud maatriksist (12), mille ülemine rida sel juhul koosneb ainult mittenegatiivsetest arvudest (erandiks võib olla selle rea viimane element c_0, mis võrdub sihifunktsiooni väärtusega ega ole märgi poolest kitsendatud).

Vaatleme nüüd juhtu, kui c_i-de hulgas leidub vähemalt üks positiivne, s. t. kui maatriksi (12) esimeses reas leidub vähemalt üks negatiivne element. Olgu vastava tundmatu indeks j, s. o. $-c_j < 0$ (j on üks arvudest $1, 2, \ldots, n$). Siis tundmatu x_j suurendamine suurendab ka z väärtust, seega polnud lahend optimaalne.

Seame endale eesmärgiks niisuguse uue lubatava lahendi konstrueerimise, milles x_j omandab positiivse väärtuse ja z on seega senisest suurem. Selleks et protsess oleks lihtsalt korratav, juhul kui ka see uus lahend ei osutu veel optimaalseks, teisendame maatriksit (12) elementaarteisendustega nii, et ta ka pärast teisendamist sisaldaks $(m+1)$-järku ühikmaatriksit. Arvestades, et maatriksist kõige lihtsamini saadavas erilahendis erinevad nullist vaid nende tundmatute väärtused, millele vastavad veerud on ühikvektorid, tuleb meil nüüd ühikvektoriks teisendada tundmatule x_j vastav veerg. Sellise teisendamise tulemusel muidugi lakkab mingi teine veerg olemast ühikvektor, mis tähendab, et temale vastav tundmatu omandab uues lahendis väärtuse null.

Tundmatule x_j vastavat veergu nimetame edaspidi j u h t v e e r u k s. Meenutame, et *juhtveeruks võib valida ükskõik millise nendest veergudest, mille esimene element on negatiivne.*

Juhtveeru teisendamine ühikvektoriks tähendab, et üks tema elementidest teisendatakse arvuks 1 ja ülejäänud nullideks. Seda rida, milles paikneb arvuks 1 teisendatav juhtveeru element, nimetame edaspidi j u h t r e a k s. Olgu juhtreaks valitud maatriksi $(k+1)$-ne rida; arvuks 1 teisendatav element (j u h t e l e m e n t) on seega a_{kj}. Kirjutame maatriksi (12) veelkord ümber, nii et juhtveerg, juhtrida ja mingi suvaline rida oleksid meie lühendatud kirjutises eraldi nähtavad:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 1 & -c_1 & \ldots & -c_j & \ldots & -c_n & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \;\; c_0 \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccccccccccccc} 0 & a_{11} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} & 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \;\; b_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & a_{k1} & \ldots & a_{kj} & \ldots & a_{kn} & 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \;\; b_k \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & a_{i1} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 \;\; b_i \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & a_{m1} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn} & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 \;\; b_m \end{array}\right) \qquad (12')$$

Juhtveeru ühikvektoriks muutmiseks vajalikud elementaarteisendused on nüüd järgmised: 1) $(k+1)$-se rea, s. t. juhtrea elemendid korrutatakse arvuga $(1 : a_{kj})$; 2) iga teise, üldiselt $(i+1)$-se rea puhul liidetakse reale arvuga $-a_{ij}$ (esimese rea puhul arvuga c_j) korrutatud uus $(k+1)$-ne rida. Nende teisenduste tulemusel omandab maatriks (12′) kuju

$$\begin{pmatrix} 1 & -c'_1 & \dots & 0 & \dots & -c'_n & 0 & \dots & -c'_{n+k} & \dots & 0 & \dots & 0 & c'_0 \\ 0 & a'_{11} & \dots & 0 & \dots & a'_{1n} & 1 & \dots & a'_{1,n+k} & \dots & 0 & \dots & 0 & b'_1 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & a'_{k1} & \dots & 1 & \dots & a'_{kn} & 0 & \dots & a'_{k,n+k} & \dots & 0 & \dots & 0 & b'_k \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & a'_{i1} & \dots & 0 & \dots & a'_{in} & 0 & \dots & a'_{i,n+k} & \dots & 1 & \dots & 0 & b'_i \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & a'_{m1} & \dots & 0 & \dots & a'_{mn} & 0 & \dots & a'_{m,n+k} & \dots & 0 & \dots & 1 & b'_m \end{pmatrix}, \tag{13}$$

kus uued elemendid on kirjutiste lühendamiseks märgitud üheainsa sümboliga. Nende avaldisi maatriksi (12′) elementide kaudu pole aga raske saada. Näiteks

$$-c'_1 = -c_1 + \frac{c_j a_{k1}}{a_{kj}}, \qquad a'_{11} = a_{11} - \frac{a_{1j} a_{k1}}{a_{kj}} \qquad \text{jne.}$$

Järgnevas on meil tarvis teada vaid maatriksi (13) viimase veeru elementide avaldisi maatriksi (12′) elementide kaudu. Kirjutame need välja:

$$c'_0 = c_0 + \frac{c_j b_k}{a_{kj}}, \tag{14}$$

$$b'_i = b_i - \frac{a_{ij} b_k}{a_{kj}} \quad (i = 1, \dots, k-1, k+1, \dots, m), \tag{15}$$

$$b'_k = \frac{b_k}{a_{kj}}. \tag{16}$$

Avaldised (14)—(16) on eriti olulised sellepärast, et maatriksist (13) saadav uus erilahend avaldub just nende kaudu:

$$z = c'_0,\ x_1 = 0, \dots, x_{j-1} = 0,\ x_j = b'_k,\ x_{j+1} = 0, \dots, x_n = 0,$$
$$x_{n+1} = b'_1, \dots, x_{n+k-1} = b'_{k-1},\ x_{n+k} = 0,$$
$$x_{n+k+1} = b'_{k+1}, \dots, x_{n+m} = b'_m .$$

Peame silmas, et juhtrea järjekorranumber k on meil esialgu veel fikseerimata. Selle valimiseks arvestame nõuet, et saadud uus lahend peab olema lubatav, s. t. iga i puhul peab olema $b'_i \geqslant 0$.

Tehtud eelduse kohaselt on b_k mittenegatiivne ja elemendi b'_k mittenegatiivsuseks peab valemit (16) arvestades seega olema $a_{kj} > 0$. Seega juhtrida tuleb valida niisuguste ridade hulgast, kus juhtveerus paiknev element on positiivne.

Võib aga juhtuda, et juhtveerus pole üldse positiivseid elemente. Sel juhul näeme maatriksist (12′) vahetult, et kui vabale tundmatule x_j anda mis tahes positiivne väärtus $x_j = M$, siis saame uue lahendi

$$z = c_0 + c_jM,\ x_1 = 0, \dots, x_{j-1} = 0,\ x_j = M,\ x_{j+1} = 0, \dots, x_n = 0,$$
$$x_{n+1} = b_1 - a_{1j}M, \dots, x_{n+i} = b_i - a_{ij}M, \dots, x_{n+m} = b_m - a_{mj}M.$$

See lahend on $a_{ij} \leqslant 0$ $(i = 1, 2, \dots, m)$ tõttu lubatav iga $M > 0$ korral. Sealjuures z väärtus kasvab M kasvades (sest $c_j > 0$). Seega pole mingit takistust valida M kui tahes suurena, mis aga tähendab, et sihifunktsioon pole lubatavate lahendite hulgal tõkestatud. Järelikult, *kui juhtveerus pole positiivseid elemente, siis sihifunktsioon on tõkestamata ja planeerimisülesandel ei ole optimaalset lahendit.*

Mittelahenduvuse juhu vaatlemise võib sellega lõpetada. Kui aga juhtveerus leidub vähemalt üks positiivne element, siis tuleb saadava uue erilahendi lubatavust edasi uurida. Maatriksi (13) viimase veeru ülejäänud elementidel b'_i on kuju (15). Nende mittenegatiivsuseks peab seega iga $i = 1, \dots, k-1, k+1, \dots, m$ korral olema

$$b_i - \frac{a_{ij}b_k}{a_{kj}} \geqslant 0. \tag{17}$$

Sõltuvalt elemendi a_{ij} märgist võib siin olla tegemist kahe võimalusega. Nimelt juhul $a_{ij} \leqslant 0$ on võrratus (17) alati rahuldatud, sest siis $b_k \geqslant 0$ ja $a_{kj} > 0$ tõttu on alati $b'_i \geqslant b_i \geqslant 0$. Seega nendes ridades, kus juhtveeru element on mittepositiivne, on garanteeritud, et viimase veeru element teisendamisel ei kahane. Kui aga $a_{ij} > 0$, siis teisendamisel viimase veeru element üldiselt kahaneb ja võib järelikult muutuda negatiivseks. Jagame nüüd võrratuse (17) mõlemad pooled elemendiga a_{ij} ($a_{ij} > 0$ tõttu võrratuse märk seejuures ei muutu!) ja viime ühe liikme teisele poole:

$$\frac{b_i}{a_{ij}} \geqslant \frac{b_k}{a_{kj}}.$$

Saadud võrratusest näeme, et juhtrea indeksiks k tuleb valida see i, mille korral jagatis b_i/a_{ij} omandab vähima väärtuse. Meenutades, et vaatlusel olid vaid need read (s. t. reaindeksid i), mille puhul $a_{ij} > 0$, võime tulemuse lühidalt üles kirjutada võrdusena

$$\frac{b_k}{a_{kj}} = \min_{a_{ij}>0} \frac{b_i}{a_{ij}}.$$

Seega uue lahendi lubatavuse garanteerimiseks *tuleb juhtreaks valida juhtveerus positiivsete elementidega ridade hulgast see, mille puhul rea viimase elemendi jagatis juhtveeru samas reas paikneva elemendiga on kõige väiksem.*

Kui juhtveerg ja juhtrida on äsjasõnastatud reeglite järgi valitud, siis uus erilahend on kindlasti lubatav ja annab sihifunktsioonile üldiselt suurema väärtuse kui lähtelahend: $c_i > 0$, $b_k \geqslant 0$, $a_{kj} > 0$ tõttu seosest (14) järeldub $c'_0 \geqslant c_0$.

Sellega ongi üks samm kirjeldatavast lahendusmeetodist teostatud. Edasi kordub täpselt sama protseduur lähtudes maatriksist (13), mis sisaldab ju samuti $(m+1)$-järku ühikmaatriksit ja millest saadud erilahendis on n tundmatut võrdsed nulliga. Kordamine seisneb selles, et otsitakse nüüd juba maatriksi (13) esimesest reast negatiivne element, valitakse vastav veerg juhtveeruks, määratakse ülalkirjeldatud viisil juhtrida ning teostatakse maatriksi teisendamine. Kordamisi jätkatakse seni, kuni saadakse maatriks, mille esimeses reas enam ei ole negatiivseid elemente. Sellele maatriksile vastav erilahend ongi ülesande optimaalne lahend.

Kirjeldatud lahendusmeetodi nimetas seda esimesena kasutanud ameerika matemaatik G. B. Dantzig s i m p l e k s m e e t o d i k s.

Võib veel küsida, kas simpleksmeetod annab optimaalse lahendi lõpliku arvu sammudega. Näitame, et vähemalt teatud juhtudel on see saavutatav.

Simpleksmeetodi igal sammul leitakse $n+m+1$ tundmatuga ja $m+1$ võrrandist koosneva võrrandisüsteemi niisugune erilahend, milles n vaba tundmatut võrduvad nulliga. Kui nulliga võrrutatavad tundmatud on välja valitud, siis ülejäänud $m+1$ tundmatu väärtused on juba üheselt määratud. Kuid n vaba tundmatu väljavalimiseks $n+m+1$ tundmatu hulgast on vaid lõplik arv erinevaid võimalusi. Kui veel arvestada, et tundmatut z vabade tundmatute hulka kunagi ei valita, siis on erinevate võimaluste arv võrdne kombinatsioonide arvuga $n+m$ elemendist n kaupa. Simpleksmeetodiga leitavate erinevate erilahendite arv ei saa sellest arvust igatahes suurem olla.

Kui igas järgmises erilahendis on z väärtus suurem kui eelmises (see on nii $b_k > 0$ korral), siis pole ka tagasipöördumine mingi varem leitud erilahendi juurde võimalik. See aga tähendabki, et protsess peab lõpliku arvu sammude järel lõppema.

Kui mingis maatriksis on juhtrea viimane element b_k null, siis $c'_0 = c_0$ ja jääb põhimõtteline võimalus sama erilahendi juurde tagasipöördumiseks. Et see on juhtrea sobiva valikuga välditav, selle põhjendamisel me siin ei peatu.

Simpleksmeetodi tegeliku rakendamise demonstreerimiseks lahendame näites 1 püstitatud ülesande. Lisades süsteemile (5) sihifunktsioonist (6) saadava võrrandi võime kohe üles kirjutada oma võrrandisüsteemi laiendatud maatriksi:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 29 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 7{,}5 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 13 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 8{,}5 \end{pmatrix}.$$

Sel maatriksil on juba vajalik kuju ning seega võib kohe välja kirjutada erilahendi

$$z = 29\,,\ x_1 = x_2 = 0\,,\ x_3 = 7{,}5\,,\ x_4 = 9\,,\ x_5 = 13\,,\ x_6 = 8{,}5\,.$$

Et maatriksi esimeses reas leidub negatiivseid elemente, siis see lahend pole optimaalne. Juhtveeruks võib antud juhul valida kas maatriksi teise (vastab tundmatule x_1) või kolmanda (vastab tundmatule x_2) veeru. Tavaliselt valitakse juhtveeruks see, mille esimeses reas olev negatiivne element on absoluutväärtuselt suurim, kui need on aga võrdsed, siis veerg, millele vastava tundmatu indeks on väiksem. Seda reeglit arvestades valimegi juhtveeruks teise veeru; seega tuleb positiivseks muuta x_1.

Juhtrea leidmiseks tuleb moodustada viimase veeru elementide ja juhtveeru positiivsete elementide jagatised. Ridade järjekorras on need

$$\frac{7{,}5}{2} = 3{,}75;\quad \frac{9}{1} = 9;\quad \frac{13}{5} = 2{,}6;\quad \frac{8{,}5}{3} = 2{,}83.$$

Vähim nendest arvudest on eelviimane ja juhtreaks tuleb seega valida maatriksi neljas rida. Teisendame nüüd maatriksi teise veeru niisuguseks ühikvektoriks, mille neljandal kohal on arv 1. Saadavat maatriksit me eraldi välja ei kirjuta, vaid koondame kõik arvutused järgmisse tabelisse, kuhu on kantud ka järgmistel sammudel saadud maatriksid.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	vaba-liige
−1	−1	0	0	0	0	29
2	3	1	0	0	0	7,5
1	5	0	1	0	0	9
5	1	0	0	1	0	13
3	2	0	0	0	1	8,5
0	−0,8	0	0	0,2	0	31,6
0	2,6	1	0	−0,4	0	2,3
0	4,8	0	1	−0,2	0	6,4
1	0,2	0	0	0,2	0	2,6
0	**1,4**	0	0	−0,6	1	0,7
0	0	0	0	−1/7	4/7	32
0	0	1	0	**5/7**	−13/7	1
0	0	0	1	13/7	−24/7	4
1	0	0	0	2/7	−1/7	2,5
0	1	0	0	−3/7	5/7	0,5
0	0	0,2	0	0	0,2	32,2
0	0	1,4	0	1	−2,6	1,4
0	0	−2,6	1	0	1,4	1,4
1	0	−0,4	0	0	0,6	2,1
0	1	0,6	0	0	−0,4	1,1

Tabel sisaldab ühe võrra vähem veerge kui teisendatav maatriks, sest tundmatule z vastavat veergu pole mõtet korrata. Tabeli ridade arv pole lahendamisele asudes teada ja sammude arvu suurenemisel tuleb tabelit lihtsalt ridade lisamisega täiendada. Esimesse ritta on kasulik kirjutada veergude «nimed», milleks sobivad lihtsalt vastavate tundmatute tähised. Paremaks ülevaatlikkuseks on juhtelement igal sammul antud poolpaksus šriftis.

Vaadeldava näite lahendamisel tuleb teostada kokku kolm sammu, mille tulemused ongi kantud ülaltoodud tabelisse. Viimasel sammul saame ülesande optimaalse lahendi

$$z = 32{,}2\,,\ x_1 = 2{,}1\,,\ x_2 = 1{,}1\,,\ x_3 = 0\,,\ x_4 = 1{,}4\,,$$
$$x_5 = 1{,}4\,,\ x_6 = 0.$$

Ülesande majanduslikku tähendust arvestades annab seega maksimaalse päevase kogutoodangu ($z = 32{,}2$ tonni) niisugune tootmisplaan, mille puhul esimest liiki väetist toodetakse $17{,}5 + x_1 = 19{,}6$ tonni ja teist liiki väetist $11{,}5 + x_2 = 12{,}6$ tonni. Silmas pidades võrratuste kaotamiseks sisse toodud tundmatute tähendust näeme, et esimese ja neljanda tsehhi tootmisvõimsused kasutatakse selle plaani puhul täielikult ära ($x_3 = x_6 = 0$), kuid teise tsehhi tootmisvõimsus jääb kasutamata $x_4 = 1{,}4$ pooltunni ehk 0,7 tunni ja kolmanda tsehhi tootmisvõimsus $x_5 = 1{,}4$ veerandtunni ehk 0,35 tunni ulatuses.

Simpleksmeetodi kirjeldamisel me eeldasime, et sobiva kujuga alglahend on juba leitud, s. o. lähtemaatriks sisaldab ühikmaatriksit. Tegelikult saab aga sama meetodit kasutada ka alglahendi enda leidmiseks. Selleks täiendatakse võrrandisüsteemi vajaliku arvu *fiktiivsete tundmatutega* nii, et saadav uus maatriks sisaldaks ühikmaatriksit, ja võetakse need fiktiivsed tundmatud ka sihifunktsioonisse absoluutväärtuselt väga suurte negatiivsete kordajatega. Sellega saadakse küll sisuliselt hoopis uus ülesanne, kuid on peaaegu läbinähtav, et selle optimaalne lahend peab ühtima lähteülesande omaga. Lugu on nimelt nii, et sissetoodud fiktiivsete tundmatute väärtused uue ülesande optimaalses lahendis saavad olla ainult nullid: seda garanteerivad neile sihifunktsioonis omistatud väga suured negatiivsed kordajad. Viimaseid on võimalik tõlgendada «trahvina», mis alati oluliselt vähendab sihifunktsiooni väärtust ja seega plaani headust, niipea kui mõni fiktiivne tundmatu nullist erineb. Kui mingi fiktiivne tundmatu jääb optimaalsesse lahendisse ikkagi positiivsena, siis see tähendab, et lähteülesandel puuduvad lubatavad lahendid.

Et ülesande lahendamise meetod jääb täpselt endiseks, siis peaks piisama, kui äsjakirjeldatud võtte illustreerimiseks moodustame üksnes näite 2 lahendamise lähtetabeli. See on toodud järgmisel leheküljel; fiktiivsed tundmatud on siin x_9, x_{10} ja x_{11} ning sihifunktsiooni on nad võetud kordajatega —1000.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	Vabaliige
—50	—50	—50	—50	—30	—30	—30	—30	1000	1000	1000	0
1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	43
0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	104
0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	10
0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	15
4	1	—6	—8	0	0	0	0	1	0	0	0
12	1	—17	—27	0	0	0	0	0	1	0	0
22	—1	—2	—5	0	0	0	0	0	0	1	0

Vajaliku ühikmaatriksi saamiseks tuleb selles tabelis esimesele reale liita arvuga 30 korrutatud teine, kolmas, neljas ja viies rida ning arvuga —1000 korrutatud kuues, seitsmes ja kaheksas rida. Selliselt saadud tabelist jätkatakse lahendamist eelmises näites kirjeldatud viisil.

Alglahendi leidmiseks on ka teisi meetodeid, mis mõnel juhul võivad tõhusamaks osutuda. Nende ja teiste käesolevas artiklis käsitlemata jäetud küsimuste tutvustamiseks võiks soovitada raamatuid:

1) Гасс, С. Линейное программирование (методы и приложения). М., 1961.

2) Юдин, Д. В. и Гольштейн, Е. Г. Задачи и методы линейного программирования. М., 1961. [1964. aastal ilmub sellest raamatust «Советское Радио» kirjastusel uus väljaanne.]

* * *

Lineaarne planeerimine moodustab ühe osa (tõsi küll väikese!) uuest teadusalast, mis on saanud operatsioonianalüüsi nime. Kogumiku «Matemaatika ja kaasaeg» ühes järgmistest vihikutest on kavas anda lühike ülevaade sellest teadusalast. Et lugejaid siiski juba praegu asja olemusega tutvustada, toome ära ameerika matemaatiku Thomas L. Saaty definitsiooni: «Operatsioonianalüüs on kunst anda halbu vastuseid niisugustele praktilistele ülesannetele, millele kõikide teiste vahenditega antakse veel halvemaid vastuseid».

* * *

Matemaatilisest planeerimisest pidas suurt lugu juba antiik-kreeka filosoof Platon, ehkki tema ajal seda teadusharu veel polnudki. Ta ütles ühes oma teoses:

«...sest nii majapidamises kui riigi valitsemises ja samuti kõigis kunstides ei ole ühelgi õppeainel suuremat tähtsust kui arvude käsitamisel; kõige olulisem on aga, et see äratab üles ka unised ja loomu poolest taipamatud ning teeb nad vastuvõtlikuks ja teravmeelseks...»

MAJANDUSMATEMAATIKA-ALASEID TÖID TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI ARVUTUSKESKUSES

Ü. Kaasik, R. Mullari, E. Saareste

TRÜ arvutuskeskus asutati tegelikult septembris 1959. a. ning juba sama aasta oktoobris hakkas tööle elektronarvuti «Ural-1», mis on siiani olnud arvutuskeskuse põhiliseks tehniliseks baasiks. 1963. aastal saabunud uus elektronarvuti «Ural-4» saab töökorda tõenäoliselt alles 1964. a. teiseks kvartaliks.

Möödunud nelja aasta vältel arvutuskeskuses lahendatud ning praegu lahendamisel olevatest probleemidest kuulub küllaltki suur osa majandusmatemaatika valdkonda. Esitame neist lühikese loetelu näol ülevaate, kusjuures ülesannete iseloomu arvestades on probleemid jaotatud kahte suurde rühma.

Ühe rühma moodustavad matemaatilise planeerimise mitmesuguste meetodite tegeliku kasutamisega seotud küsimused. Töö on siin seisnud olemasolevate meetodite rakendamiseks sobivate rahvamajandusharude ja ettevõtete väljaotsimises, vajalike andmete kogumises ja süstematiseerimises, meetodite kohandamises vastavalt konkreetsele olukorrale, ülesannete tegelikus lahendamises ning saadud tulemuste praktilise kasutamise organiseerimises. Esimene, teine ja viimane etapp sellest loetelust ei peaks küll kuuluma arvutuskeskuse kohuste hulka, kuid seni kahjuks puudub koordineeriv ja juhtiv vabariiklik organ, kes need ülesanded enda täita võtaks.

Suurem osa vaadeldava rühma probleemidest on olnud seotud mitmesuguste lineaarsete planeerimisülesannete püstitamise ning lahendamisega. Nimetagem neist mõned olulisemad.

Külvipinna optimaalse jaotamise ülesande koostamisel lähtuti nõudest, et leitavad söödakultuuride külvipinnad peavad kindlustama ettenähtud koostisega sööda tootmise vajalikul hulgal ja kõige väiksemate kuludega. Vastavaid arvutusi on tehtud mitme majandi jaoks meie vabariigis (Luunja, Alliku, Valguta sovhoosid, Nõukogude Armee nim. kolhoos) ja kogu vabariigi jaoks tervikuna. Selgus, et olemasolevate plaanidega võrreldes saab tootmiskulusid vähendada 20—25% ning näiteks vabariik tuleks toime ka ilma jõusööta sisse vedamata. Tulemuste tegelikku rakendamist on seni alustanud kahjuks vaid üksikud majandid. Nimetatud ülesannete lahendamisel kulus kõige rohkem tööd vajalike algandmete kogumisele ja ülesande matemaatilisele sõnastamisele niisugusel kujul, et see oleks jõukohane suhteliselt väikeste võimetega elektronarvutile «Ural-1».

Analoogiliste meetoditega lahendati ka üksikute majandite poolt esitatud ülesandeid talviste söödavarude optimaalseks jaotamiseks loomarühmade vahel ja varutud söödahulga jaoks soodsaima loomade arvu leidmiseks. Uurimisel on veel traktoripargi optimaalse kasutamise probleem: kuidas olemasolevate traktorite abil sooritada kõik vajalikud tööd, nii et tööde maksumus tuleks minimaalne.

Käesoleval ajal otsitakse arvutuskeskuses uut metoodikat, mille abil saaks hinnata sovhooside majanduslikku tegevust ja leida parimad teed tootmise laiendamiseks. Arvestades töötingimuste erinevusi tuli uurimisele võtta 89 põhinäitajat iga sovhoosi kohta. Nende vahel leitud seostest püütakse praegu tuletada ettepanekuid kapitalimahutuste majandusliku efektiivsuse tõstmiseks, soovitavate spetsialiseerumise suundade määramiseks jms.

Arvutuskeskuse kõige ulatuslikum uurimus põllumajanduse küsimustes käsitleb põllumajandusliku tootmise loogilis-matemaatilise mudeli koostamist. Töö eesmärgiks on imiteerida põllumajanduslikku tootmist elektronarvutis ning leida mänguteooria meetodite abil statistiliselt parimad, s. o. ilmastikust kõige vähem sõltuvad tootmisplaanid. Esialgu on veel käsil põhiseoste leidmine ilmastiku ja olulisemate kultuuride saagikuse vahel.

Tööstuses on planeerimise meetodite seisukohast uuritud esmajoones Kiviõli Põlevkivi- ja Keemiakombinaadi mitmeid probleeme, nagu õlide segamisvahekorra määramine (võimalikult suure koguse immutusõli saamiseks), uttevete töötlemise ratsionaalse režiimi selgitamine (et eraldada maksimaalsel hulgal fenoole ja ketoone) ja bensiini optimaalse segamise ülesanne. Väljatöötatud meetodite tegelikuks rakendamiseks on ettevalmistused tehtud ning astutakse esimesi samme nende juurutamiseks praktikasse.

Tamsalu Jõusöödatehase jaoks lahendati küsimus, kuidas oleks võimalik operatiivselt koostada kõige madalama omahinnaga retsepte. Tegelikud katsed näitasid, et uus metoodika võimaldab varasemaga võrreldes saada kokkuhoidu umbes 6000 rbl. ööpäevas. Alates 1964. a. jaanuarist koostatakse vastavaid retsepte juba regulaarselt.

Ettevalmistused matemaatilise planeerimise meetodite rakendamiseks toimuvad praegu ka Tartu Tekstiilivabrikus «Areng». Eesmärgiks on leida niisugused materjalisegud ja tootmisskeemid, mis kindlustaksid etteantud nomenklatuurplaani korral toodangu minimaalse omahinna.

Matemaatiliste meetoditega on uuritud veel kogu vabariigi rahvamajandust, ja nimelt tootmise ja tarbimise vahelist tasakaalu.

Töötati välja spetsiaalne meetod otsekulutuste maatriksi pööramiseks ja teostati vastavad arvutused vabariigi plaaniorganitele. Jätkub meetodi edasine täiustamine ning selle rakendusala laiendamise võimaluste väljaselgitamine.

Teise suure rühma TRÜ arvutuskeskuse majandusmatemaatikaalastest töödest moodustavad uurimused tootmise operatiivse juhtimise valdkonnas. Kui eelmise rühma probleemide puhul oli enamasti tegemist olemasolevate meetodite täiendamisega, täpsustamisega ning kohaldamisega, siis siin on ülesandeks täiesti uute lähenemisviiside otsimine ja vastavate meetodite loomine.

On välja töötatud metoodika Tartu tehase «Võit» valutsehhi vooluliini töö kalendriliseks planeerimiseks. Esimesed tegelikud katsed andsid rahuldavaid tulemusi ning praegu on juba asutud menetluse pidevale rakendamisele. Kogu aeg tehakse selles ühtlasi täiendusi ja muudatusi vastavalt praktika nõuetele. Eriti pööratakse tähelepanu metoodika niisugusele täiustamisele, mis võimaldaks seda kasutada ka vooluliini töö operatiivsel juhtimisel, seega otse tootmispraktikas.

Üks mahukamaid uurimistöid on seotud Tartu Aparaadiehituse Tehase operatiivse juhtimise matemaatiliste meetodite loomisega. Põhimõtteliselt ongi juba koostatud tehase mehhaanikatsehhi töö kalendrilise planeerimise metoodika. Mehaanikatsehhi vaadeldakse kui iseliiki teenindamissüsteemi, kus ei ole ette antud mitte tellimuste sisendvoog, vaid soovitav väljundvoog, s. t. montaažitsehhi ajalis-koguselised detailivajadused. Iga tellimust (detailipartiid) peab tema jaoks määratud järjekorras teenindama (töötlema) rida teenindajaid (tööpinke), kusjuures teenindamisajad on juhuslikud suurused, mille jaotusseadused on ette antud. Peale selle nähakse ette veel teenindajate juhuslikke väljalangemisi süsteemist (avariisid) jms. Ülesandeks on organiseerida teenindamine selliselt, et saavutataks mingi mõistlik kompromiss järgmiste matemaatilisest seisukohast mitteüheselt või raskesti kirjeldatavate vastuoluliste tingimuste vahel: 1) tegelik väljundvoog peab võimalikult hästi lähendama soovitavat väljundvoogu, 2) tellimused peavad süsteemis viibima võimalikult lühikest aega, 3) süsteemi juhtimine peab olema võimalikult lihtne, s. t. praktiliselt hõlpsasti ülekantav tsehhi juhtimisele.

Koostatud ning praegu täpsustamisel olevas metoodikas on antud selle ülesande n.-ö. kaheetapiline lahendus. Esimesel etapil koostatakse orienteeriv teenindamisgraafik pikema aja peale ette ning teisel etapil toimub juba planeerimine lühema aja peale.

Kuna vajalike statistiliste seaduspärasuste tuletamisel osutuvad paratamatuks mitmed lihtsustavad eeldused, siis nende vältimiseks on kasutatud teenindamissüsteemi modelleerimist elektronarvutis. Mudeli eeliseks on võimalus läbi viia suurel arvul katseid, mis tegelikkuses oleksid kas hoopis võimatud või seotud suure riskiga.

Senise mudeli abil on juba saadud rida kvalitatiivseid seaduspärasusi. Lõplike kvantitatiivsete seaduspärasuste saamiseks tuleb aga ootama jääda, kuni hakkab tööle elektronarvuti «Ural-4».

Tartu Aparaadiehituse Tehase jaoks väljatöötatud meetodite praktiliseks rakendamiseks vajaliku informatsiooni kogumine on käimas juba pikemat aega, ja nimelt regulaarsete koormusarvutuste näol, mis isegi omaette võetuna on tunduvalt parandanud tehase töö organisatsioonilist taset. Praegu tehakse viimseid ettevalmistusi tehase tootmisosakonna töö osaliseks mehhaniseerimiseks elektronarvuti «Ural-4» abil: arvuti uueks ülesandeks kujuneb detailsete tootmisülesannete operatiivne koostamine. Kõigi nende arvutustega luuakse vajalikud eeldused selleks, et Tartu Aparaadiehituse Tehas saaks uuritavat kalendrilise planeerimise süsteemi varsti ellu viia. On astutud samme analoogiliste arvutuste laiendamiseks ka teistele tehastele, kuid esialgu on siin põrkutud tõsistele organisatsioonilistele raskustele.

Arvutuskeskuse tööde vaadeldavas rühmas tuleks nimetada ka uurimusi, mis taotlevad elektronarvutite rakendamist arvelduses. On alustatud vastavaid eeltöid Tartu Naha- ja Jalatsikombinaadis ning koostöös Eesti NSV RMN Elektrotehnika Teadusliku Uurimise Instituudiga ka ETKVL-i süsteemis. Eesmärgiks on lao arvepidamise üleandmine elektronarvutile ning võimaluste uurimine ka muude raamatupidamistööde mehhaniseerimiseks. Põhilisteks uurimissuundadeks on praegu lao sissetulekute ja väljaminekute automaatse arvestamise süsteemi koostamine ning lähteinformatsiooni sobiva vormi väljatöötamine.

Sellega ongi loetletud kõige olulisem, mida TRÜ arvutuskeskus on majandusmatemaatika alal ära teinud. Võiks veel nimetada töid, mis on käsile võetud Eesti NSV RMN Põlevkivi Instituudi või NSV Liidu Ehituse ja Arhitektuuri Akadeemia ettepanekutel, kuid et esialgu nendes suundades nimetamisväärseid tulemusi pole saavutatud, tuleb neist nähtavasti kunagi tulevikus rääkida.

RAHVUSVAHELISED KOOLINOORTE MATEMAATIKA OLÜMPIAADID

O. Prinits

Paljudes maades on saanud traditsiooniks korraldada koolinoortele matemaatika ülesannete lahendamise võistlusi. Neid võistlusi on hakatud nimetama matemaatika olümpiaadideks. Eriti laiaulatuslikult on selliseid olümpiaade organiseeritud Nõukogude Liidus, peamiselt ülikoolide juures. Aga ka Ungaris, Rumeenias, Bulgaarias, Jugoslaavias, Poolas, Tšehhoslovakkias ja Saksa Demokraatlikus Vabariigis on niisugused võistlused populaarseks muutunud.

Olemasolevatel andmetel toimus esimene matemaatika olümpiaad 1934. a. Leningradis. Juba enne Teist Maailmasõda on matemaatika ülesannete lahendamise võistlusi organiseeritud samuti ka Rumeenias.

Eesti NSV-s on koolinoorte matemaatika olümpiaadide korraldamine saanud traditsiooniks; käesoleval õppeaastal toimunu oli meil juba üheteistkümnes.

Kui meil on olümpiaadi organiseerimise peamiseks eesmärgiks keskkooliõpilaste üldise matemaatika-alase ettevalmistuse tõstmine ning võimalikult suuremate õpilashulkade kaasatõmbamine, siis üleveneemaaliste, aga samuti Moskvas, Leningradis ja Kiievis läbiviidavate olümpiaadide peamiseks eesmärgiks on andekate noorte matemaatikute väljaselgitamine. Vastavalt sellele on ka esitatavad ülesanded raskemad kui meie olümpiaadidel.

Ühesuguste võistluste korraldamine paljudes maades viis mõttele organiseerida ka rahvusvahelisi matemaatika olümpiaade, millest võtaksid osa üksikutes riikides parimaiks osutunud õpilased. Selle mõtte elluviijaks sai Rumeenia Matemaatikute ja Füüsikute Ühing, kelle initsiatiivil korraldati esimene niisugune olümpiaad 1959. aastal. See üritus muutus traditsiooniliseks ja nii kogunevad nüüd paljude maade tugevaimad noored matemaatikud igal suvel omavahelisele jõukatsumisele. On välja kujunenud kord, mille kohaselt iga riik saadab 8-liikmelise õpilaste võistkonna ühe õpetaja juhendamisel ja ühe ametliku esindajaga. Ülesanded valitakse riikide esindajailt laekunute hulgast kõigi esindajate ühisel kokku leppel. Tavaliselt võetakse kavasse iga riigi poolt üks ülesanne, et sellega tagada kõigile võistkondadele võrdseid tingimusi. Lahendamine toimub kahel päeval, kummalgi 3—4 ülesannet, kusjuures lahendamisaega on ette nähtud umbes üks tund ülesandele, seega 3—4 tundi kummalgi päeval. Esimesel päeval antakse ülesandeid aritmeetika, algebra ja trigonomeetria valdkonnast, teisel päeval geomeetriast. Kõik õpilased saavad ülesanded oma emakeeles ning ka lahendused esitatakse samas keeles. Iga võistleja tööd vaatab läbi tema enda võistkonna esindaja; hindamine toimub jällegi kõigi esindajate poolt ühiselt.

I rahvusvaheline matemaatika olümpiaad toimus 23.—31. juulini 1959. a. Stalini linnas Rumeenias. Täisarvuliste võistkondadega võtsid sellest osa Rumeenia Rahvavabariik, Ungari Rahvavabariik, Tšehhoslovakkia Sotsialistlik Vabariik, Bulgaaria Rahvavabariik, Poola Rahvavabariik ja Saksa Demokraatlik Vabariik. Nõukogude Liit võistles pooliku võistkonnaga (4 õpilast).

I olümpiaadil anti lahendamiseks järgmised ülesanded:

1. Tõestada, et murdu $\frac{21n+4}{14n+3}$ ei saa taandada ühegi naturaalarvu n korral.

2. Leida, milliste x-i reaalarvuliste väärtuste korral kehtivad võrdused

$$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=\sqrt{2},$$

$$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=1,$$

$$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=2,$$

kusjuures juurtele omistatakse ainult positiivne tähendus.

3. On antud võrrand $\cos x$ suhtes:

$$a\cdot\cos^2 x+b\cdot\cos x+c=0,$$

kus a, b ja c on mingid reaalarvud. Koostada a, b ja c abil ruutvõrrand, mille lahenditeks on $\cos 2x$ vastavad väärtused.

Võrrelda antud ja koostatud võrrandit juhul, kui $a=4$, $b=2$ ja $c=-1$.

4. Konstrueerida täisnurkne kolmnurk, kui on antud tema hüpotenuus c ja kui on teada, et hüpotenuusile tõmmatud mediaan on kaatetite geomeetriline keskmine.

5. Tasandil on antud lõik AB ja sellel üks seesmine suvaline punkt M. Lõikudele AM ja BM kui külgedele on konstrueeritud ruudud $AMCD$ ja $MBHE$ sirgest AB ühele ja samale poole. Nende ruutude ümber joonestatud ringjooned, mille keskpunktideks on vastavalt F ja G, lõikuvad peale punkti M veel mingis punktis N. Niisuguse konstruktsiooni puhul:

a) tõestada, et sirged AE ja BC läbivad punkti N;

b) tõestada, et sirge MN läbib tasandil üht kindlat punkti S, mis ei sõltu M asendist lõigul AB;

c) leida ruutude keskpunkte ühendava lõigu FG keskpunkti geomeetriline koht, kui M asukoht lõigul AB muutub.

6. Tasandid P ja Q lõikuvad mööda sirget p. Tasandil P on antud punkt A ja tasandil Q punkt C. Kumbki neist punktidest ei asetse sirgel p. Joonestada võrdhaarne trapets $ABCD$ alustega AB ja CD nii, et temasse saab joonestada ringjoone ja et punkt B asetseks tasandil P ja punkt D tasandil Q.

Parimaks osutus sellel olümpiaadil Tšehhoslovakkia kooliõpilane B. Diviš, kes saavutas ainsana maksimaalse arvu punkte. Võistkondadest olid parimad Rumeenia ja Ungari. Mõlemad said ühe esimese ja kaks kolmandat auhinda ning ühe aukirja, kuid rumeenlased võitsid kaks teist auhinda ungarlaste ühe vastu. Nõukogude Liidu võistkonnale langes üks kolmas auhind ja kaks aukirja. Teistest nõrgemini esines Saksa Demokraatlik Vabariik, kes ei saanud ühtegi auhinda ega aukirja. Kahtlemata põhjustas seda asjaolu, et Saksa Demokraatlikus Vabariigis alustati laiaulatuslikumat olümpiaadide läbiviimist alles 1962/63. õppeaastal.

II rahvusvaheline matemaatika olümpiaad toimus Rumeenias Sinaia mägiasulas 18.—25. juulini 1960. a. Sellest võtsid osa Rumeenia, Ungari ja Bulgaaria Rahvavabariikide, Tšehhoslovakkia Sotsialistliku Vabariigi ning Saksa Demokraatliku Vabariigi kooliõpilased. Siin anti lahendamiseks järgmised ülesanded:

1. Leida kõik kolmekohalised arvud, mille jagamisel 11-ga saame jagatise, mis on võrdne jagatava numbrite ruutude summaga.

2. Lahendada võrratus

$$\frac{4x^2}{(1-\sqrt{1+2x})^2} < 2x+9.$$

3. Täisnurkse kolmnurga ABC hüpotenuus on jaotatud n võrdseks osaks, kusjuures n on paaritu arv. α tähistab nurka, mille all punktist A on näha nendest omavahel võrdsetest lõikudest see, mis sisaldab hüpotenuusi keskpunkti. Kõrguse ja hüpotenuusi pikkusteks on vastavalt h ja a. Tõestada, et

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{4nh}{(n^2-1)a}.$$

4. Konstrueerida kolmnurk ABC, kui on antud tema kõrgused h_b ja h_a ja tipust A tõmmatud mediaan m_a.

5. On antud kuup $ABCDA'B'C'D'$.

a) Olgu X mingi punkt serval AC ja Y mingi punkt serval $B'D'$. Leida lõigu XY keskpunkti geomeetriline koht.

b) Leida lõigul XY asetseva punkti Z geomeetriline koht, kui punkti Z asukoht on määratud võrdusega

$$ZY = 2XZ.$$

6. On antud koonus, millesse on kujutatud kera ja viimase ümber püstsilinder, mille üks põhi on koonuse põhjaga ühel ja samal tasandil. Koonuse ruumala on V_1 ja silindri ruumala V_2.

a) Tõestada, et $V_1 \neq V_2$.

b) Leida väikseim k väärtus, mille puhul $V_1 = kV_2$ ja konstrueerida selle juhu jaoks koonuse telglõike tipunurk.

7. On antud võrdhaarne trapets alustega a ja b ning kõrgusega h.

a) Leida konstrueerimise teel trapetsi sümmeetriateljel punkt P, millest mõlemad haarad paistavad täisnurga all.

b) Leida punkti P kaugus ühest alusest.

c) Millised tingimused peavad kehtima, et oleks võimalik punkti P konstrueerida? (Vaadelda juhte, millised võivad aset leida).

Sellel olümpiaadil esinesid kõige paremini Ungari õpilased, kes said kaks esimest ja kaks teist preemiat ning ühe aukirja, ning

Tšehhoslovakkia õpilased, kes said ühe esimese, ühe teise ja kaks kolmandat preemiat ning kaks aukirja. Head olid ka Rumeenia õpilaste tulemused, kes võitsid ühe esimese, ühe teise ja ühe kolmanda preemia ning ühe aukirja. Nõrgemini teistest esinesid jälle Saksa Demokraatliku Vabariigi õpilased. Siinjuures on huvitav märkida, et ungarlaste võistkonnast jätkasid edaspidi 7 õpilast õpinguid matemaatika alal, sakslaste võistkonnast aga mitte ükski.

III rahvusvahelise matemaatika olümpiaadi organiseerimise võttis enda kanda Ungari Janos Bolyai nimeline Matemaatikute Selts. Olümpiaad toimus 6.—16. juulini 1961. a. Balatoni järve ääres asuvas Veszpremi ülikoolis. Peale II olümpiaadil esindatud riikide koolinoorte võtsid sellest olümpiaadist osa veel Poola Rahvavabariigi õpilased. Lahendamiseks anti järgmised ülesanded:

1. Lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} x+y+z=a \\ x^2+y^2+z^2=b^2 \\ xy=z^2, \end{cases}$$

kus a ja b on etteantud arvud. Missugust tingimust peavad rahuldama arvud a ja b, et süsteemi lahendid x, y ja z oleksid kõik positiivsed ja mittevõrdsed.

2. Kolmnurga küljed on a, b ja c ning pindala on S. Tõestada, et kehtib

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant 4S\sqrt{3}.$$

Missugustel tingimustel kehtib siin võrdus?

3. Lahendada võrrand

$$\cos^n x - \sin^n x = 1,$$

kus n on mingi naturaalarv.

4. On antud kolmnurk $P_1P_2P_3$ ja selles punkt P. Sirged P_1P, P_2P, P_3P lõikavad kolmnurga vastasküIgi vastavalt punktides Q_1, Q_2, Q_3. Tõestada, et suhete $\frac{P_1P}{PQ_1}$, $\frac{P_2P}{PQ_2}$, $\frac{P_3P}{PQ_3}$ hulgas on vähemalt üks, mis ei ole suurem kui 2, ja vähemalt üks, mis ei ole väiksem kui 2.

5. Konstrueerida kolmnurk ABC, kui $AC=b$, $AB=c$ ja $\angle AMB=\omega$, kusjuures M on külje BC keskpunkt ja $\omega < 90°$. Tõestada, et ülesanne on lahenduv siis ja ainult siis, kui

$$b \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} \leqslant c < b.$$

Millal kehtib võrdus?

6. On antud tasand ε ja kolm mitte ühel sirgel asetsevat punkti A, B ja C. Nende punktide poolt määratud tasand ei ole paralleelne tasandiga ε. Tasandil ε on võetud kolm punkti A', B' ja C'. Lõikude AA', BB' ja CC' keskpunktid on tähistatud vastavalt tähtedega L, M ja N. Tähega G on tähistatud kolmnurga LMN raskuspunkt. (Siin ei vaadelda selliseid punktide A', B' ja C' asendeid, milliste korral LMN ei moodusta kolmnurka).

Leida punkti G geomeetriline koht, kui punktid A', B' ja C' üksteisest sõltumatult liiguvad tasandil ε.

Ungari kooliõpilane Bela Bollobas, kes juba II rahvusvahelisel matemaatika olümpiaadil saavutas esimese preemia, osutus siingi parimaks ja saavutas maksimaalse punktide arvu. Ükski Ungari kooliõpilane ei jäänud sellel olümpiaadil ilma autasuta. Poola võistkonna 8-st liikmest tulid 7 auhinnalistele kohtadele. Saksa Demokraatlikus Vabariigis oli hakatud suuremat tähelepanu osutama õpilaste ettevalmistamisele rahvusvaheliseks olümpiaadiks ning seda kroonis edu — võideti üks kolmas preemia ja 3 aukirja ning kokkuvõttes esineti paremini bulgaarlastest.

IV rahvusvaheline matemaatika olümpiaad oli üheks ürituseks Tšehhoslovakkia Matemaatikute ja Füüsikute Seltsi 100. aastapäeva tähistamise raames. See toimus 5.—15. juulini 1962. a. České Budějovice linnas, kusjuures ülesannete lahendamine viidi läbi ajaloolises Hluboká lossis. IV rahvusvahelisest olümpiaadist võtsid osa õpilased Nõukogude Liidust, Bulgaaria, Ungari, Poola ja Rumeenia Rahvavabariikidest, Tšehhoslovakkia Sotsialistlikust Vabariigist ja Saksa Demokraatlikust Vabariigist. Kõigi riikide esindajaist moodustatud komitee valis õpilastele lahendamiseks järgmised ülesanded:

1. Leida väikseim naturaalarv n, millel on järgmised omadused:
a) kümnendsüsteemis on selle arvu viimaseks numbriks 6;
b) kui viimane number 6 paigutada ümber esimeseks, siis saadud arv on $4n$.

2. Lahendada reaalarvude vallas võrratus

$$\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1}>\frac{1}{2}.$$

3. On antud kuup $ABCDA'B'C'D'$, millel $ABCD$ ja $A'B'C'D'$ on vastastahud ja $AA'\|BB'\|CC'\|DD'$. Punkt X liigub konstantse kiirusega ruudu $ABCD$ külgi mööda (antud tippude järjekorras) ja punkt Y liigub sama kiirusega ruudu $B'C'CB$ külgi mööda (antud tippude järjekorras). Punktid X ja Y alustavad liikumist vastavalt punktidest A ja B' samaaegselt. Leida lõigu XY keskpunkti Z geomeetriline koht.

4. Lahendada võrrand

$$\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x=1.$$

5. Ringjoonel on antud kolm punkti A, B ja C. Samal ringjoonel konstrueerida sirkli ja joonlaua abil neljas punkt D nii, et nelinurk $ABCD$ oleks puutujanelinurgaks ühele ringjoonele.

6. On antud võrdhaarne kolmnurk ABC. Selle kolmnurga ümberjoonestatud ringjoone raadius on r ja sisejoonestatud ringjoone raadius ϱ. Tõestada, et nende ringjoonte keskpunktide vaheline kaugus

$$d=\sqrt{r(r-2\varrho)}.$$

7. Leidub 5 kera, mis puutuvad tetraeedri $SABC$ kõiki servi või nende pikendusi. Tõestada,
a) et tetraeeder $SABC$ on korrapärane,
b) et vastupidi, iga korrapärase tetraeedri jaoks leidub 5 niisugust kera.

Maksimaalse arvu punkte sai Moskva kooliõpilane Jossif Bernštein. Ühe punkti vähem sai Kéry Gerzson Ungarist. On tähelepanuväärne, et kuigi tütarlaste osavõtt rahvusvahelistest matemaatika olümpiaadidest on suhteliselt väike (IV olümpiaadil oli 56 osavõtja hulgas ainult 4 tütarlast), ometi saavutas Moskva kooliõpilane Lidia Gontšarova sellel olümpiaadil paremusjärjestuses kolmanda koha ja võitis I preemia. Ka poola tütarlapse Ewa Henszi autasustamine III preemiaga on nimetamisväärt.

Nõukogude Liidu kooliõpilased võitsid IV olümpiaadil 2 esimest preemiat, 2 teist ja 2 kolmandat preemiat. Ungari kooliõpilased — 2 esimest, 3 teist ja 2 kolmandat preemiat. Nemad olidki tublimad. Kokku määrati parimaile 4 esimest preemiat, 12 teist ja 15 kolmandat preemiat. Erinevalt eelmistest olümpiaadidest anti kõigile preemiast ilmajäänud osavõtjaile diplomid, ning aukirju enam välja ei jagatud.

V rahvusvaheline matemaatika olümpiaad toimus 5.—15. juulini 1963. a. Poolas Wroclawis. Eelmisest olümpiaadist osavõtnud riikide õpilastele lisandusid seekord noored matemaatikud Jugoslaavia Föderatiivsest Sotsialistlikust Vabariigist. Lahendamiseks anti õpilastele järgmised ülesanded:

1. Lahendada reaalarvude vallas võrrand

$$\sqrt{x^2-p}+2\sqrt{x^2-1}=x,$$

kus p on reaalarvuline parameeter.

2. Leida ruumis täisnurga tipu geomeetriline koht, kui täisnurga üks haar läbib antud punkti A ja teisel haaral on vähemalt üks ühine punkt antud lõiguga BC.

3. Kumeras n-nurgas on kõik nurgad võrdsed ja järjestikuste külgede a_1, $a_2, \ldots, a_n$ kohta on teada, et nad rahuldavad tingimust $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \ldots \geqslant a_n$. Tõestada, et $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n$.

4. Lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} x_5 + x_2 = yx_1 \\ x_1 + x_3 = yx_2 \\ x_2 + x_4 = yx_3 \\ x_3 + x_5 = yx_4 \\ x_4 + x_1 = yx_5\,; \end{cases}$$

kus y on parameeter.

5. Tõestada, et

$$\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}\,.$$

6. Võistlusest võtsid osa viis õpilast: A, B, C, D ja E. Keegi ennustas, et paremusjärjestuseks kujuneb A, B, C, D, E. Osutus aga, et ta ei ennustanud õigesti ühegi õpilase kohta, samuti ei olnud tema ennustuses õige ükski järjestikune paar. Keegi teine ennustas paremusjärjestuseks D, A, E, C, B. Tema ennustusest osutus õigeks kahe õpilase koht ja samuti järjestus kahes paaris. Missugune oli tegelik õpilaste paremusjärjestus?

Parima tulemuse — 39 punkti 40-st võimalikust — saavutasid F. Dacar Jugoslaaviast, Leningradi 307. keskkooli õpilane G. Maloletkin ja Jerevani 55. keskkooli õpilane R. Sarkisjan. Üldse oli sellel olümpiaadil nõukogude kooliõpilaste esinemine väga edukas: I preemia said 4 õpilast, II preemia — 3 õpilast ja III preemia — 1 õpilane.

Parema ülevaate üksikute riikide õpilaste esinemisest kõigil senistel olümpiaadidel annab järgnev tabel:

Riik	Preemiaid									
	I olümpiaadil					II olümpiaadil				
	I	II	III	aukirju	Σ	I	II	III	aukirju	Σ
Punkte	37—40	36	34—35	25—35		üle 40	37—40	33—36	29—32	
1. Nõukogude Liit	—	—	1	2	3	ei võtnud osa				
2. Ungari Rahvavabariik	1	1	2	1	5	2	2	—	1	5
3. Rumeenia Rahvavabariik	1	2	2	1	6	1	1	1	1	4
4. Poola Rahvavabariik	—	—	—	1	1	ei võtnud osa				
5. Bulgaaria Rahvavabariik	—	—	—	1	1	—	—	1	2	3
6. Tšehhoslovakkia Sotsialistlik Vabariik	1	—	—	4	5	1	1	2	2	6
7. Saksa Demokraatlik Vabariik	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1
8. Jugoslaavia Föderatiivne Sotsialistlik Vabariik	ei võtnud osa					ei võtnud osa				

	Preemiaid												
	III olümpiaadil					IV olümpiaadil				V olümpiaadil			
	I	II	III	aukirju	Σ	I	II	III	Σ	I	II	III	Σ
	37—40	34—36	30—33	20—29		41—46	34—40	29—33		35—40	28—34	21—27	
1.	ei võtnud osa					2	2	2	6	4	3	1	8
2.	2	3	1	2	8	2	3	2	7	—	5	3	8
3.	—	1	1	4	6	—	3	3	6	1	1	3	5
4.	1	—	—	6	7	—	1	3	4	—	—	2	2
5.	—	—	—	1	1	—	1	2	3	—	—	3	3
6.	—	—	1	3	4	—	1	3	4	1	—	1	2
7.	—	—	1	3	4	—	1	—	1	—	—	3	3
8.	ei võtnud osa					ei võtnud osa				1	2	1	4

Kõigil rahvusvahelistel olümpiaadidel on osavõtjaid tutvustatud neid vastuvõtva riigi vaatamisväärsustega, nad on külastanud teatrietendusi ja kohtunud nimekate matemaatikutega. Nii on parimad koolinoored-matemaatikud külastanud Šveijki lugudega seotud paiku ning mitmeid ajaloolise tähtsusega kohti, on saanud tuttavaks poola professori dr. Iwaskiewicziga, tšehhi akadeemiku prof. Novakiga ja rumeenia professori Simionescuga, ning saanud kõigi olümpiaadi läbiviinud maade haridusministrite soojade tervituste osaliseks.

Meie vabariigi koolinoorte matemaatika-alastes teadmistes ja oskustes on viimastel aastatel märgata teatud tõusu. Selle tulemusena jõudis Tallinna 2. keskkooli abiturient Jaak Tepandi V rahvusvahelise matemaatika olümpiaadi Nõukogude Liidu võistkonna kandidaatide nimekirja. Võistkonna selgitamiseks korraldatud võistlustest Moskvas võtsid osa ka Viljandi keskkooli abiturient Mare Koit ja Tallinna 19. keskkooli õpilane Valentin Zaitsev. Kuigi nad ei tulnud esimeste hulka, on pääsemine sellelegi võistlusele juba nimetamisväärne saavutus. On arvata, et meie vabariigi esindajad konkureerivad ka edaspidi kohtadele Nõukogude Liidu koolinoorte esinduses.

KIRJANDUS

1. Журавлев, Б. В. Международные математические олимпиады для учащихся. — «Математика в школе», 1961, № 2, стр. 88—90.
2. Журавлев, Б. В. Международные математические олимпиады для учащихся. — «Математика в школе», 1962, № 3, стр. 93—94.
3. Морозова, Е. А. и Петраков, И. С. IV Международная математическая олимпиада. — «Математика в школе», 1962, № 6, стр. 54—55.
4. Морозова, Е. А. и Петраков, И. С. V Международная математическая олимпиада. — «Математика в школе», 1963, № 6, стр. 87—92.
5. Nitz, R. Bericht von der ersten internationalen Mathematikolympiade. — «Mathematik und Physik in der Schule», 1960, Heft 8, S. 499—509.
6. Schramm, W. und Gronitz, J. II Internationale Mathematische Schülerolympiade 1960 in der Rumänischen Volksrepublik. — «Mathematik und Physik in der Schule», 1960, Heft 11, S. 684—687.
7. Gronitz, J. und Schramm, W. II Internationale Mathematische Schülerolympiade 1960 in der Rumänischen Volksrepublik — Lösungen zu den Aufgaben. — «Mathematik, Physik, Astronomie in der Schule», 1961, Heft 9, S. 635—645.
8. Gronitz, J. und Titze, H. Bericht über die III Internationale Mathematikolympiade in der Ungarischen Volksrepublik. — «Mathematik, Physik in der Schule», 1962, Heft 1, S. 65—70.
9. Titze, H. Bericht über die IV Internationale Mathematik-Olympiade 1962 in der ČSSR. — «Mathematik, Physik in der Schule», 1962, Heft 12, S. 916—922.
10. Titze, H. Bericht über die V Internationale Mathematikolympiade 1963. — «Mathematik in der Schule», 1963, Nr. 5, S. 321—325.
11. Riedel, R.-G. Ich nahm an der V Internationalen Mathematikolympiade teil! — «Mathematik in der Schule», 1963, Nr. 5, S. 326—328.

TRIGONOMEETRILISTE FUNKTSIOONIDE TÄPSETE VÄÄRTUSTE ARVUTAMISEST

Jakob Gabovitš

1. Trigonomeetriliste funktsioonide täpseid väärtusi kasutame me tavaliselt ainult teravnurkade 30°, 45° ja 60° puhul. Kõikidel teistel juhtudel rahuldavad meid trigonomeetriliste funktsioonide ligikaudsed väärtused, mis on antud tabelites. Ent metoodilistel kaalutlustel (eriti klassivälises töös) pakuvad huvi ka ülesanded, mis on seotud ülalmainitud nurkadest erinevate teravnurkade trigonomeetriliste funktsioonide täpsete väärtuste arvutamisega. Selliste ülesannete lahendamisel leiavad rakendamist tuntud **poolnurga valemid**:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},\qquad \cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}},\tag{1}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha},\qquad \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}.\tag{2}$$

Poolnurga tangensi ja kootangensi arvutamisel osutub sageli kasulikuks lähtuda valemite (2) asemel valemitest

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=-\operatorname{ctg}\alpha+\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha},\quad \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\operatorname{ctg}\alpha+\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}.\tag{3}$$

Valemite (1)—(3) mitmekordne rakendamine võimaldab arvutada nurkade $\alpha/4$, $\alpha/8$, $\alpha/16$ jne. trigonomeetrilisi funktsioone. Lähtudes näiteks nurkadest 30° ja 45°, saame kergesti järgmised tulemused:

$$\left.\begin{aligned}
&\sin 15^\circ=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},\qquad \cos 15^\circ=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},\\
&\operatorname{tg} 15^\circ=2-\sqrt{3},\qquad \operatorname{ctg} 15^\circ=2+\sqrt{3},\\
&\operatorname{tg} 22^\circ30'=-1+\sqrt{2},\qquad \operatorname{ctg} 22^\circ30'=1+\sqrt{2},\\
&\operatorname{tg} 7^\circ30'=-2+\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6},\\
&\operatorname{ctg} 7^\circ30'=2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6},\\
&\operatorname{tg} 37^\circ30'=-2-\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6},\\
&\operatorname{ctg} 37^\circ30'=2-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6}.
\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

Lähtudes nurgast $\alpha = 90°$ ning kasutades korduvalt teist valemitest (1), saame järgmise huvitava jada:

$$2\cos 45° = \sqrt{2}, \quad 2\cos 22°30' = \sqrt{2+\sqrt{2}},$$
$$2\cos 11°15' = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},$$
$$2\cos 5°37'30'' = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}, \quad \text{jne.}$$

2. Selleks, et arvutada sin 18°, teostame järgmised teisendused:

$$\sin 72° = \cos 18°, \quad 2\sin 36° \cos 36° = \cos 18°,$$
$$4\sin 18° \cos 18° \cos 36° = \cos 18°, \quad 4\sin 18° \cos 36° = 1,$$
$$2(\sin 54° - \sin 18°) = 1, \quad 2(\cos 36° - \sin 18°) = 1,$$
$$2(\cos^2 18° - \sin^2 18° - \sin 18°) = 1,$$
$$2(1 - 2\sin^2 18° - \sin 18°) = 1,$$
$$4\sin^2 18° + 2\sin 18° - 1 = 0.$$

Otsitav sin 18° on saadud ruutvõrrandi positiivseks juureks. Teades nurga siinust, leiame kergesti selle nurga teised trigonomeetrilised funktsioonid. Sel teel saame:

$$\left.\begin{aligned} &\sin 18° = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}, \quad \cos 18° = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}, \\ &\operatorname{tg} 18° = \sqrt{1-\sqrt{0{,}8}}, \quad \operatorname{ctg} 18° = \sqrt{5+2\sqrt{5}}. \end{aligned}\right. \qquad (5)$$

Nüüd võime arvutada nurga 36° trigonomeetrilised funktsioonid, kasutades kahekordse nurga valemeid:

$$\sin 36° = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}, \quad \cos 36° = \frac{1+\sqrt{5}}{4},$$
$$\operatorname{tg} 36° = \sqrt{5-2\sqrt{5}}, \quad \operatorname{ctg} 36° = \sqrt{1+\sqrt{0{,}8}}.$$

3. Valemid (4) ja (5) võimaldavad arvutada nurga 3° trigonomeetrilisi funktsioone, sest

$$\sin 3° = \sin(18° - 15°) = \sin 18° \cos 15° - \sin 15° \cos 18°.$$

Edasi on juba lihtne arvutada nurkade 6°, 9°, 12° jne. trigonomeetrilisi funktsioone. Seega saame nüüd koostada t a b e l i nurkade $(3n)°$ trigonomeetriliste funktsioonide t ä p s e t e s t v ä ä r t u s t e s t, kus n on suvaline naturaalarv (praktiliselt piisab valikust $1 \leqslant n \leqslant 15$).

Alljärgnevalt ongi antud säärane tabel. Et viimast mitte koormata juuremärkidega, võtame kasutusele järgmised tähised:

$$\left.\begin{aligned} &a = \sqrt{2}, \quad b = \sqrt{3}, \quad c = \sqrt{5}, \quad m = 1+\sqrt{3}, \quad n = -1+\sqrt{3}, \\ &p = 1+\sqrt{5}, \quad q = -1+\sqrt{5}, \quad A = \sqrt{10+2\sqrt{5}}, \quad B = \sqrt{10-2\sqrt{5}}. \end{aligned}\right\} (6)$$

Märgime muuseas, et suurused A, B ja c on omavahel seotud järgmiste valemitega:

$$2A = B(c+1),\quad 2B = A(c-1),\quad AB = 4c.$$

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
3°	$\frac{a}{16}(mq-nA)$	$\frac{a}{16}(mA+nq)$	$\frac{B-2}{2b+p}$	$\frac{B+2}{2b-p}$
6°	$\frac{bB-p}{8}$	$\frac{bp+B}{8}$	$\frac{A-2b}{p}$	$\frac{A+2B}{3-c}$
9°	$\frac{a}{8}(p-B)$	$\frac{a}{8}(p+B)$	$\frac{4-A}{q}$	$\frac{4+A}{q}$
12°	$\frac{A-bq}{8}$	$\frac{bA+q}{8}$	$\frac{2b-B}{3+c}$	$\frac{2b+B}{q}$
15°	$\frac{an}{4}$	$\frac{am}{4}$	$2-b$	$2+b$
18°	$\frac{q}{4}$	$\frac{A}{4}$	$\frac{B}{5+c}$	$\frac{A}{q}$
21°	$\frac{a}{16}(mB-np)$	$\frac{a}{16}(mp+nB)$	$\frac{A-2}{2b+q}$	$\frac{A+2}{2b-q}$
24°	$\frac{bp-B}{8}$	$\frac{bB+p}{8}$	$\frac{A-2b}{3-c}$	$\frac{A+2b}{p}$
27°	$\frac{a}{8}(A-q)$	$\frac{a}{8}(A+q)$	$\frac{4-B}{p}$	$\frac{4+B}{p}$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{b}{2}$	$\frac{b}{3}$	b
33°	$\frac{a}{16}(mq+nA)$	$\frac{a}{16}(mA-nq)$	$\frac{B+2}{2b+p}$	$\frac{B-2}{2b-p}$
36°	$\frac{B}{4}$	$\frac{p}{4}$	$\frac{B}{p}$	$\frac{A}{5-c}$
39°	$\frac{a}{16}(mp-nB)$	$\frac{a}{16}(mB+np)$	$\frac{A-2}{2b-q}$	$\frac{A+2}{2b+q}$
42°	$\frac{bA-q}{8}$	$\frac{A+bq}{8}$	$\frac{2b-B}{q}$	$\frac{2b+B}{3+c}$
45°	$\frac{a}{2}$	$\frac{a}{2}$	1	1

Toome mõningad näited tabeli rakendamise kohta. Arvestades tähistusi (6) saame:

$$\sin 27^\circ = \frac{1}{8}\left(\sqrt{2} - \sqrt{10} + \sqrt{20 + 4\sqrt{5}}\right),$$

$$\cos 12^\circ = \frac{1}{8}\left(-1 + \sqrt{5} + \sqrt{30 + 6\sqrt{5}}\right),$$

$$\operatorname{tg} 9^\circ = \frac{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{\sqrt{5} - 1} \quad \text{jne.}$$

Tabel on kasutatav mitmesuguste ülesannete koostamisel ja lahendamisel. Näiteks:

1. Tõestada samasused
   a) $8 \sin 12^\circ \sin 48^\circ \sin 54^\circ = 1$,
   b) $8 \sin 18^\circ \sin 24^\circ \sin 84^\circ = 1$,
   c) $\operatorname{ctg} 3^\circ \operatorname{ctg} 33^\circ = 8 + 4\sqrt{3} + 3\sqrt{5} + 2\sqrt{15}$,
   d) $\operatorname{tg} 6^\circ \operatorname{tg} 66^\circ = \operatorname{tg} 12^\circ \operatorname{tg} 48^\circ = -2 + \sqrt{5}$.
2. Näidata, et arvud $\sin 6^\circ$, $\sin 18^\circ$, $\sin 66^\circ$ moodustavad geomeetrilise progressiooni.
3. Näidata, et $\sin 6^\circ$ on üheks juureks võrrandile

$$8x(1 + 2x)(1 - x^2) = 1.$$

4. Näidata, et

$$\operatorname{tg} 4^\circ 30' = \frac{4 - 2\sqrt{5 - \sqrt{5}}}{4 + \sqrt{2} + \sqrt{10}}.$$

4. Tabeli analüüs viib mõningatele huvitavatele järeldustele. Kõigepealt näeme, et tabelis esinevad irratsionaalarvud on eranditult a l g e b r a l i s e d, s. o. nad rahuldavad täisarvuliste kordajatega algebralisi võrrandeid. Nii on näiteks $\sin 3^\circ$ järgmise 16. astme võrrandi juureks:

$$65536\,x^{16} - 262144\,x^{14} + 430080\,x^{12} - 372736\,x^{10} +$$
$$+ 182784\,x^8 - 50176\,x^6 + 7040\,x^4 - 384\,x^2 + 1 = 0.$$

Tabelist näeme, et nurkade $(3n)^\circ$ trigonomeetriliste funktsioonide arvutamisel kasutatakse peale nelja aritmeetika põhitehte veel vaid ruutjuurte leidmist (kuigi mitmekordselt). Geomeetriast on teada, et selliselt avalduva pikkusega lõiku saab konstrueerida sirkli ja joonlauaga. Seega on kõik tabelis esinevad trigonomeetriliste funktsioonide väärtused konstrueeritavad sirkli ja joonlaua abil.

Tekib küsimus, mida saab öelda nurkade n° trigonomeetriliste funktsioonide kohta, kus n on kolmega mittejaguv naturaalarv? Vastuse saamiseks lähtume kolmekordse nurga siinuse valemist:

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha.$$

Tähistades $x = \sin \alpha$ saame võrrandi, mille juureks on $\sin \alpha$:

$$4x^3 - 3x + \sin 3\alpha = 0. \tag{7}$$

Siit järeldub, et ka kõnesolevate nurkade siinused ja samuti nende teised trigonomeetrilised funktsioonid on algebralised irratsionaalarvud, sest seda on ju võrrandi (7) vabaliige $\sin 3\alpha$. Ent sellise pikkusega lõiku ei saa enam sirkli ja joonlaua abil konstrueerida, sest tema avaldamiseks tuleb kasutada, nagu näitab võrrand (7), ka kuupirratsionaalsusi. Seega võime öelda, et iga täisarvulise kraadimõõduga nurga kõik trigonomeetrilised funktsioonid avalduvad algebraliste irratsionaalarvudena, kusjuures viimased on esitatavad ruut- ja kuupjuurte kaudu.

Kuidas on aga olukord murdarvulise kraadimõõduga nurkade juhul? Moivre'i valemist

$$\sqrt[n]{\cos\alpha + i\sin\alpha} = \cos\frac{\alpha}{n} + i\sin\frac{\alpha}{n}$$

on kergesti tuletatav valem

$$2\cos\frac{\alpha}{n} = \sqrt[n]{\cos\alpha + i\sin\alpha} + \sqrt[n]{\cos\alpha - i\sin\alpha},$$

kust järeldub, et ka niisuguste nurkade trigonomeetrilised funktsioonid on algebralised irratsionaalarvud, kuid need avalduvad juba kõrgemat järku juurte kaudu.

Kokkuvõttes võime sõnastada järgmise teoreemi: *iga ratsionaalse kraadimõõduga nurga trigonomeetrilised funktsioonid avalduvad algebraliste irratsionaalarvudena.*

Olukord muutub, kui vaatleme irratsionaalse kraadimõõduga nurki. Niisuguste nurkade trigonomeetrilised funktsioonid osutuvad üldiselt transtsendentseteks arvudeks (niiviisi nimetatakse irratsionaalarve, mis ei ole täisarvuliste kordajatega algebraliste võrrandite juurteks). Nii näiteks arvud $\sin(\lg 3)^\circ$, $\cos(\sqrt{5})^\circ$, $\mathrm{tg}\,\pi^\circ$ on transtsendentsed. Kuid siin võib esineda erandeid. Näiteks, nurk $\arcsin(1/3)$ sisaldab irratsionaalset kraadide arvu, selle nurga siinus aga võrdub algebralise (ja isegi ratsionaalse) arvuga $1/3$.

Ülalöeldu tõttu peab hoiatama sageli esineva väära väite eest, et trigonomeetriliste funktsioonide tabelites esinevad arvud on transtsendentsete arvude ligikaudsed väärtused. Tabelites antakse ju nurkade väärtused kraadides ratsionaalarvulistena, sel juhul on aga, nagu nägime, nurgafunktsioonide väärtusteks algebralised irratsionaalarvud. Tekib mõnevõrra paradoksaalne olukord: kuigi trigonomeetrilised funktsioonid kuuluvad niinimetatud transtsendentsete funktsioonide klassi, ei kohta me nende funktsioonide tabelites — olgu nad kui tahes täpsed — ühegi transtsendentse arvu ümardatud väärtust!

Lõpuks rõhutame, et kõik, millest ülalpool oli juttu, käis kraadides mõõdetud nurkade kohta. Kui nurga suurus võrdub ratsionaalarvuga radiaanmõõdus, siis meie teoreem enam ei kehti. Isegi nii «lihtsad» suurused, nagu $\sin 1$, $\cos 2$, $\mathrm{tg}\,3$ (nurgad radiaanmõõdus!), on transtsendentsed arvud.

LEHEKÜLGI MATEMAATIKA AJALOOST EESTIS

Ü. Lumiste

Matemaatika kui teaduse areng Eestis sai alguse alles pärast ülikooli asutamist Tartus 1802. aastal. Varasemad harrastused *Academia Gustaviana* ja gümnaasiumide seinte vahel ning XVIII sajandi rehkendusmeistrite ringkonnis — nendest oli juttu käesoleva ülevaate esimeses osas [1] — on küll huvipakkuvad matemaatiliste teadmiste leviku ajaloo seisukohast, kuid teadust nad omapoolselt ei rikastanud. Tartu ülikoolist kujunes aga peagi üks juhtivaid teaduslikke keskusi mitte üksnes Baltimaadel, vaid ka kogu Venemaal. Omaaegse nimetuse all — Dorpati ehk venepäraselt Derpti ülikool — on ta ülikoolihariduse ajaloos tuntud kui vanimaid kõrgemaid õppeasutusi NSV Liidu territooriumil. Alljärgnevalt anname lühikese ülevaate matemaatika arengust Tartu ülikoolis kuni 1918. aastani.

Elementaarmatemaatikast kõrgema matemaatikani
(*aastad 1802—1830*)

Esimeseks kandidaadiks matemaatika professori kohale seadis ülikooli asutamiskomisjon juba 1800. aastal, veel enne ülikooli ametlikku avamist, Georg Friedrich Parroti (1767—1852) — prantsuse linnakesest Montbéliard'ist pärit edumeelse haritlase, mitmete füüsika- ja tehnikaalaste leiutiste autori, keda koduõpetaja amet tõi Liivimaale 1795. aastal [2].

Parrot jõudis Tartus esimestele teadmishimulistele lugeda ainult populaarse loengutsükli mehhaanikast ja elementaarmatemaatika kursuse, kui kolleegid valisid ta 1802. aasta lõpul ülikooli esimeseks rektoriks. Niisugune lugupidamisavaldus tähendas eel-

[1] Matemaatika ja kaasaeg, I. Tartu, 1963, lk. 47—61.

[2] Левицкий, Г. В., Биографический словарь профессоров и преподавателей Императорского Юрьевского, бывшего Дерптского, университета за сто лет его существования (1802—1902), т. I. Юрьев, 1902. — Selles väljaandes sisalduvaid bio-bibliograafilisi materjale on kasutatud kogu käesoleva ülevaate ulatuses, ilma et sellele igakordselt viidataks.

G. F. Parrot

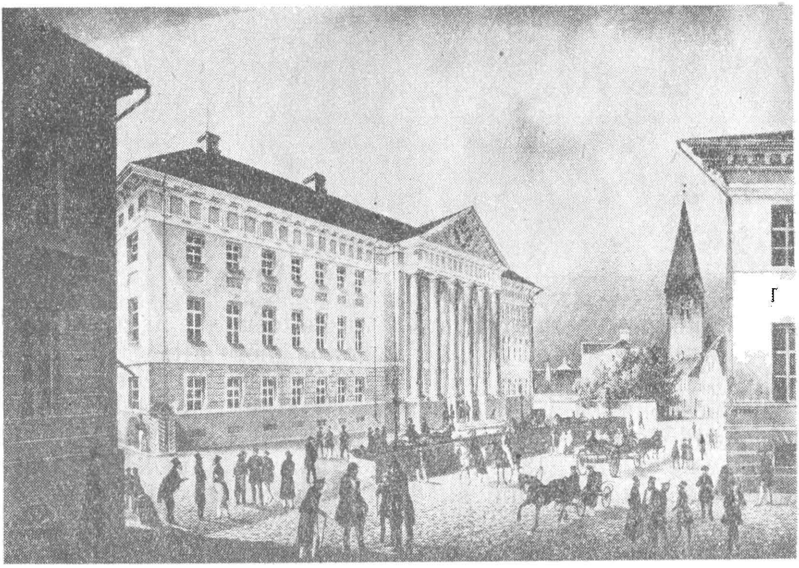
kõige tunnustust Parroti silmapaistvatele teenetele äsjaavatud ülikooli vabastamises tagurliku rüütelkonna mõju alt.

Matemaatika õpetamise oli Parrot juba sama aasta sügisel usaldanud kohaliku tütarlastekooli õpetajale, enne seda Tartus kümmekond aastat tegutsenud amatöörastronoomile Ernst Knorrele (1759—1810). Ise asus Parrot füüsika professori kohale, kus ta töötas kuni akadeemikuks valimiseni ja Peterburi siirdumiseni 1826. aastal.

Kui füüsika ja astronoomia areng uues ülikoolis algas kohe edukalt, siis matemaatika alal jäid saavutused esialgu üpris tagasihoidlikeks. Tolleaegne statuut nägi ette filosoofiateaduskonna füüsika-matemaatika klassis ühe puhta matemaatika ja rakendusmatemaatika professori ning ühe observaatori (erakorralise professori õigustes), kes pidi teostama astronoomilisi vaatlusi ja abistama professorit matemaatiliste ainete lugemisel. Esimeseks observaatoriks oligi E. Knorre, kes luges ülikoolis oma elu lõpuni 9 aasta jooksul eranditult ainult elementaarmatemaatikat. Õpetuse iseloomust annab tunnistust tema «Leitfaden bei unseren mathematischen Vorlesungen» (Käsiraamat meie matemaatiliste loengute juurde), mis ilmus Tartus 1803. aastal.

Matemaatika professori koht seisis esimesed kaks aastat vakantne. Sellele kohale kutsutute seas oli tuntud saksa matemaatik Johann Friedrich Pfaff (1765—1825), hilisem Berliini Teaduste Akadeemia liige. Tema nähtavasti soovitaski oma nooremat venda

Johann Wilhelm Pfaffi (1774—1835), tolleaegset Tübingeni vaimuliku kooli repetiitorit, kes võimetelt kahjuks ei küündinud vanema vennani. Pärast Tartusse saabumist 1804. a. arendas J. W. Pfaff esialgu küll viljakat tegevust astronoomina [3], pöörates sellega endale Peterburi Akadeemia tähelepanu; 1807. a. valiti ta koguni akadeemia korrespondeerivaks liikmeks. Seejärel aga Pfaffi tööhoog rauges ja 1809. aastal lahkus ta hoopiski Tartust. Hilisemas tegevuses ilmutas Pfaff tolleaegses teaduseilmas juba haruldaseks jäänud anakronismi — tõhusad astronoomia-alased teadmised ei seganud teda samal ajal uskumast astroloogia imedesse ja kirjutamast sellekohaseid teoseid.



Matemaatika professorina püüdis Pfaff aeg-ajalt lugeda mõningaid kursusi ka kõrgema matemaatika valdkonnast. Võib arvata, et neid kuulasid ainult üksikud, sest matemaatikast huvitatud üliõpilasi oli tollal Tartus vähe ja needki kasina ettevalmistusega.

Pärast Pfaffi lahkumist tegi ülikooli juhtkond uue katse kedagi lootustandvat noort teadlast Tartusse kutsuda. Seekord langes valik Carl Friedrich Gaussile (1777—1855), kes oli paar aastat enne seda saanud Göttingeni professoriks ja tähetorni direktoriks. Oma vastuses motiveerib Gauss äraütlemist peamiselt sellega, et rohked ülesanded, mis langeksid Tartus tollal ainsale matemaatika professorile, ei jätaks talle küllaldaselt vaba aega teadusega

[3] Želnin, G., Astronoomiliste vaatluste algpäevilt Tartus. — Tähetorni Kalender, 1962, lk. 44—50.

tegelemiseks [4]. Nii jäigi kateeder jälle kaheks aastaks vakantseks ning matemaatika õpetamine langes täielikult Knorre ja, pärast viimase surma, Parroti õlgadele.

Järgmiseks professoriks tuli Harkovist 1811. aastal Johann Sigismund Huth (1763—1818), omal ajal Saksamaal teatavat kuulsust omandanud, kuid loomingust juba tagasi tõmbunud astronoom. Matemaatika lektorina ei ületanud Huth oma eelkäijat mitte millegi poolest. Seitsme aasta pärast suri ta Tartus, jättes kateedri uuesti vakantseks.

Nagu näha, oli ülikoolil esimese kahe aastakümne jooksul küllaltki tegemist sobivate kandidaatide leidmisega matemaatika kateedrile. Isikud, kellega tuli rahulduda, ilmutasid heal juhul mõnesugust aktiivsust astronoomiliste vaatluste korraldamisel, kuid neil polnud huvi ega nähtavasti ka võimeid matemaatika õpetamise viimiseks oma kaasaja tasemele.

Sellele vaatamata leidus ülikooli kasvandike seas üksikuid matemaatikast huvitatud võimekaid noori, kes suutsid oma õpetajaid ületada. Eestimaalt Simunast pärit Magnus Georg Paucker (1787—1855), lõpetanud ülikooli 1808. aastal, kaitses siin 1812. aastal doktoriväitekirja kindla keha elastsusnähtuste teooriast. Aasta enne seda oli ta asunud Knorre järglasena astronoom-vaatleja kohale, kellena luges ülikoolis diferentsiaal- ja integraalarvutust ning analüütilist ja kujutavat geomeetriat (samal ajal kui Huth rahuldus elementaarmatemaatikaga). 1813. aastal võttis Paucker vastu matemaatika ja astronoomia professori koha Jelgava gümnaasiumis, kuhu ta jäi elu lõpuni. Talle kuulub rida uurimusi geomeetria, astronoomia ja metroloogia alal [5].

Pauckerit asendas astronoom-vaatleja kohal üks silmapaistvamaid Tartu ülikooli kasvandikke Wilhelm Struve (1793—1864), hilisem kuulus astronoom [6]. Nagu eelkäijadki, nii luges ka Struve ülikoolis matemaatikat, esialgu Huthi kõrval, pärast viimase lahkumist paari aasta jooksul aga ainsa matemaatika lektorina. Ta pidas juba regulaarselt loenguid diferentsiaal- ja integraalarvutusest. Ka hiljem astronoomia professorina võttis Struve endale sageli üksikuid matemaatilisi aineid.

---

[4] «Das Inland», 1856, lk. 402—404.

Депман, И. Я., Из истории математики в Дерптском (Юрьевском) университете. Приглашение К. Ф. Гаусса на кафедру математики и астрономии. — Уч. зап. Ленинградского гос. пед. ин-та, т. 14, вып. 1, 1955, lk. 128—137.

[5] Рабинович, И. М. и Страдынь, Я. П., Елгавский астрономо-математический центр в конце XVIII в. и в первой половине XIX в. — Вопросы истории физико-математических наук. Москва, 1963, lk. 481—486.

[6] Роотсмяэ, Т., Академик В. Я. Струве и его деятельность в Тартуском университете. — TRÜ Toimetised, vihik 37, 1955, lk. 30—73.

Vt. ka G. Želnini, M. Jõeveere ja L. Vallneri artiklid: Tähetorni Kalender, 1964.

Ülikooli selle ajajärgu kasvandikest väärib mainimist Jelgavast pärit Karl Heinrich Kupffer (1789—1838), kes 1813. aastal kaitses Tartus doktoriväitekirja ridade summeerimisest *«De summatione serierum...»* (*Mitaviae*, 1813). Kupfferile kuuluvad mõningad uurimused algebraliste võrrandite kohta [7]. Tallinna gümnaasiumi õpetajana andis ta 1833—1834. aastal välja esimest venekeelset elementaarmatemaatika ja metoodika ajakirja [8].

Vaatamata matemaatika üpriski tagasihoidlikule tasemele ülikooli tegevuse esimesel kahel aastakümnel ületas saavutatu siiski kõik, mis varem oli Eestis matemaatika alal tehtud — alustati kõrgema matemaatika õpetamist, ilmusid esimesed originaalsed uurimused Pauckerilt ja Kupfferilt.

Uus etapp matemaatika arenguteel Tartu ülikoolis algas 1821. aastal, kui protestiks tsaari reaktsionääri M. L. Magnitski võimutsemise vastu tuli Kaasani ülikoolist Tartusse teenekas matemaatika professor Martin Bartels (1769—1836). Ehkki pärit Saksamaalt, on Bartels oma nime jäädvustanud vene teaduse ajalukku kui geniaalse matemaatiku N. I. Lobatševski õpetaja Kaasanis [9]. Veel hulk aastaid hiljem, 1836. aastal, võttis Lobatševski ette reisi Tartusse, et avaldada lugupidamist oma kõrgeealisele õpetajale.

Kogenud pedagoogina suutis Bartels viia õppetegevuse Tartus kiiresti oma kaasaja tasemele [10]. Tänu sellele, et 1820. aastal loodi W. Struve jaoks astronoomia professuur, võis Bartels esimese Tartu õppejõuna pühenduda täielikult matemaatikale.

Ta meenutas hiljem oma matemaatilise analüüsi kursuse (Dorpat, 1833) eessõnas: «Kuigi ma siin, vaatamata suuremale üliõpilaste arvule kui Kaasanis, palju vähem matemaatilise stuudiumi harrastajaid eest leidsin ja oma loengutes suuremalt jaolt elementaarmatemaatikaga piirduma pidin, siiski on ka siin aegamööda huvi selle teaduse vastu kasvanud ja ma võin juba mõnda aastat oma kõrgema matemaatika loengutel vähemalt 10—12 kuulajaga arvestada.»

Tänu Bartelsi ja Struve viljakale koostööle muutus Tartu ülikool matemaatiliste teaduste arenguastme poolest peagi üheks eesrindlikumaks tolleaegses Vene riigis.

---

[7] Сушкевич, А. К., Материалы к истории алгебры в России. — Историко-математические исследования, вып. 4, 1951, lk. 237—451.

[8] Бобынин, В. В., Первый русский математический журнал. — Физико-математические науки в ходе их развития, 1899, т. 1, № 2, lk. 35—54 ja № 3, lk. 71—75.

[9] Каган, В. Ф., Лобачевский. Москва—Ленинград, 1948.
Lumiste, Ü., Kilde Tartu ülikooli XIX sajandi matemaatikute kokkupuuteist Lobatševskiga ja tema loominguga. — «Eesti Loodus», 1959, № 3, lk. 162—165.

[10] Ряго, Г., Из жизни и деятельности четырех замечательных математиков Тартуского университета. — TRÜ Toimetised, vihik 37, 1955, lk. 74—81.

Tartusse saadeti end astronoomias ja geodeesias täiendama mitmeid noori vene mereväelasi. 1828. a. asutati siin Professorite Instituut — midagi nüüdisaegse aspirantuuri taolist, kuhu suunati vene ülikoolide kasvandikke kogenud professorite juhendamisel akadeemilisi kraade omandama. Professorite Instituudis täiendas end teiste seas P. I. Kotelnikov, hilisem Kaasani ülikooli matemaatika professor ja Lobatševski lähim kolleeg.

Matemaatika Tartu ülikoolis oli seega saavutanud ajakohase taseme. Oli läbi käidud tee elementaarmatemaatikast kõrgema matemaatikani.

Tartu — diferentsiaalgeomeetria keskus
(aastad 1830—1860)

Bartelsi kasvandikest Tartus olid silmapaistvaimaks ülikooli joonestamise ja graveerimiskunsti õppejõu K. A. Senffi pojad. Erilist tähelepanu pälvib noorema venna Karl Eduard Senffi (1810—1850) kuldmedaliga autasustatud ladinakeelne töö, mille ta esitas ülikooli lõpetamisel 1830. aastal ja mis trükiti järgmisel aastal ülikooli trükikojas pealkirja all «*Theoremata principalia e theoria curvarum et superficierum*» (Kõverate ja pindade teooria põhiteoreemid). Selles raamatus leiame ülemaailmselt esimese süstemaatilise diferentsiaalgeomeetria kursuse, millesse on põimitud ka Bartelsi ja Senffi enda uusi tulemusi. Näiteks kõverate teoorias kasutatakse esmakordselt liikuvat teljestikku. Tuletatakse ka teljestiku pöörlemist kirjeldavad valemid. Neid tulemusi, mis tegelikult kuuluvad Bartelsile, omistatakse siiamaani tavaliselt prantsuse matemaatikule F. Frenet'le, kelle vastav töö ilmus aga alles 1847. aastal. Bartelsi teaduslikud teened selles valdkonnas selgusid alles üsna hiljuti [11].

Pärast Bartelsi surma ei tulnud tema järeltulijat kaugelt otsida — selleks sai Bartelsi enda õpilane K. E. Senff, kes oli vahepeal käinud end täiendamas Königsbergis ja teistes Saksa ülikoolides [12]. Matemaatika õpetamine Tartus süvenes Senffi ajal veelgi. Ta ise pidas heatasemelisi loenguid tollaegse matemaatika mitmetest valdkondadest, huvitudes eriti geomeetrilisest optikast, mis oli ta lemmikaineks. Tänu Senffi hoolitsusele asutati Tartus veel teine, rakendusmatemaatika professuur, millele 1843. a. saabus Berliinist Ferdinand Minding (1806—1885). Mindingi näol sai Tartu ülikool endale silmapaistva teadlase, kelle mitmeid uurimusi pinnateoorias ja teistes matemaatika ja mehhaanika vald-

---

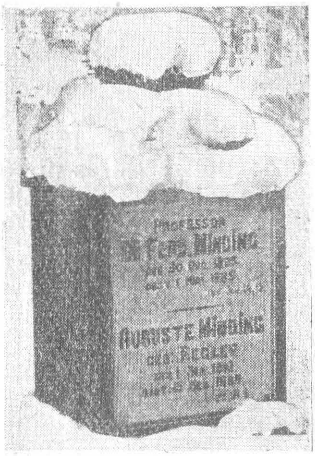
[11] Лумисте, Ю. Г., Предвосхищение формул Френе в сочинении К. Э. Зенфа. — Вопросы истории физико-математических наук. Москва, 1963, lk. 141—147.

[12] Lumiste, Ü., Karl Eduard Senff. — «Eesti Loodus», 1962, № 5, lk. 281—282.

kondades loetakse praegu õigusega klassikalisteks [13]. Kujunes lõplikult välja esimene matemaatika-alane uurimissuund, millele pani aluse juba Bartels.

Tuntud ameerika matemaatik D. J. Struik kirjutas juba 1933. a. oma diferentsiaalgeomeetria ajaloo ülevaates, tundmata veel Bartelsi teeneid: «Tänu Mindingile, tema kolleegile Senffile ja nende õpilasele Petersonile hakkab Tartu etendama diferentsiaalgeomeetrias väikese keskuse osa» [14].

F. Minding jätkas Tartus pinnateooria uurimist, mida ta oli juba Berliinis alustanud. Rea töid pühendas ta isoperimeetrilisele probleemile kõverpindadel, saavutades märkimisväärset edu. Mitmekülgse matemaatikuna andis Minding Tartus hinnatavaid uurimusi ka diferentsiaalvõrrandite teoorias (tema sellealast tööd autasustas Peterburi Akadeemia 1861. aastal Demidovi preemiaga), analüütilises mehhaanikas, ahelmurdude teoorias. Erilist tähelepanu äratasid aga Mindingi esimesed uurimused konstantse kõverusega pindade sisegeomeetria alal, pärast seda, kui möödunud sajandi 70-ndail aastail selgus nende tihe seos Lobatševski geomeetriaga [15]. Igatahes võib kahtluseta väita, et Minding on XIX sajandil Tartus töötanud matemaatikuist silmapaistvaim. Peterburi Teaduste Akadeemia valis ta 1864. aastal oma korrespondeerivaks liikmeks, 1879. aastal aga auliikmeks. F. Minding suri Tartus ja on maetud Raadi kalmistule.



Tartu diferentsiaalgeomeetria keskuse peamiseks teeneks vene ja maailma teaduse ees on aga see, et tema rüpes sirgus küpseks uurijaks selline diferentsiaalgeomeetria klassik nagu K a r l P e t e r s o n (1828—1881). Riia käsitöölise poeg Peterson õppis Tartus aastatel 1847—1852 ning kirjutas siin 1853. aastal oma kuulsa kandidaadiväitekirja pinnateooria alalt [16]. Selles töös, mis jäi kauaks ajaks ülikooli arhiivi lebama ja avaldati alles 1952. aastal, tuletas Peterson esimesena pinnateooria kaks puuduvat põhivõrrandit (4 aastat enne Mainardit, 16 aastat enne Codazzit) ning

---

[13] Р я г о, Г., viites 10 mainitud artikkel.

[14] С т р о й к, Д. Дж., Очерк истории дифференциальной геометрии до XX столетия. Москва—Ленинград, 1941, lk. 44.

[15] Vt. viide 9.

[16] Д е п м а н, И. Я., Карл Михайлович Петерсон и его кандидатская диссертация. — Историко-математические исследования, вып. 5, 1952, lk. 134—164.

andis esimesena pinnateooria põhiteoreemi (15 aasta enne Bonnet'd). Pärast ülikooli lõpetamist tuli K. Petersonil rahulduda tagasihoidliku matemaatikaõpetaja kohaga ühes Moskva keskõppeasutuses. Ta lõi aga kaasa Moskva Matemaatikaseltsi asutamisel ning oma väärtuslike uurimuste avaldamisega seltsi ajakirjas pani ta aluse Moskva diferentsiaalgeomeetria koolkonna tekkimisele.

Matemaatika tõusuteel
(aastad 1860—1880)

F. Minding töötas Tartu ülikoolis ühtejärge 40 aastat ja viis siin matemaatika-alase töö heale ajakohasele tasemele. Tema ise ja ta kolleegid lugesid Tartus mitmeid erikursusi matemaatika uutest suundadest, mõningaid neist (näiteks elliptiliste funktsioonide teooriat 1853. aastal) esmakordselt vene ülikoolides.

Mindingi lähimaks kolleegiks Tartus oli Saksamaalt pärinev Peter Helmling (1817—1901), kes 1852. a. asus K. E. Senffi varase surma läbi vabaks jäänud kateedrile ja töötas siin pidevalt 35 aastat, esialgu eradotsendina ja erakorralise professorina, alates 1859. aastast aga korralise professorina. Helmlingile kuulub kümmekond eraldi brošüüridena avaldatud uurimust diferentsiaalvõrrandite teooriast, tähtsaim neist on Tartus 1859. aastal kaitstud doktoritöö. Kahjuks ei ole need tööd ei tolleaegsete ega ka hilisemate uurijate tähelepanu kuigi tõsiselt köitnud.

Märksa suuremat tunnustust matemaatikuna saavutas tollal Thomas Clausen (1801—1885), kes töötas Tartus astronoom-vaatlejana (aastail 1848—1865) ja astronoomia professorina (alates 1865. aastast). Avaldatud tööde eest sai Clausen Königsbergi ülikoolilt 1844. a. doktorikraadi, Peterburi Teaduste Akadeemia valis ta oma kirjavahetajaks liikmeks. Clauseni matemaatilised tööd hõlmavad mitmekesist probleemistikku geomeetrilistest konstruktsioonidest elliptiliste funktsioonideni. Teda tuntakse laialt kui kahe uue Hippokratese kuukese avastajat (1840. a.). Kuid matemaatika õpetamisest ülikoolis võttis Clausen osa ainult paari kursusega (matemaatika ajalugu 1867. a., vähimruutude meetod 1871. a.).

See-eest luges füüsikalise geograafia ja meteoroloogia professor Friedrich Weyrauch (1841—1891) oma Tartu ülikoolis tegutsemise esimese kümnekonna aasta jooksul (aastad 1871—1881) agaralt mitmeid matemaatilisi erikursusi, peaasjalikult lineaaralgebra valdkonnast, ning avaldas uurimusi determinantide teooriast ja diofantilisest analüüsist. Viimased, samuti nagu Helmlingi töödki, ei ole erilist vastukaja leidnud.

Eeltoodule võib lisada, et 70-ndail aastail lugesid mitmeid matemaatika-alaseid erikursusi ka tolleaegsed astronoom-vaatlejad, kelledest teenekamatena tuleb nimetada Heinrich Brunsi (1848—1919) ja Johann Oskar Backlundi (1846—1916).

Avaneb pilt elavast ja mitmekülgsest õppetööst, mida teostavad mitte enam üks-kaks professorit, vaid juba arvukam matemaatikute pere, kes jälgib tähelepanelikult teaduse uusimaid saavutusi.

Ülikooli nende aastate kasvandikest saavutas matemaatika alal suurimat tunnustust hiljem Saksamaale siirdunud A x e l H a r n a c k (1851—1888), üks reaalmuutuja funktsioonide teooria pioneere [17], kes õppis Tartus aastail 1869—1873. Tartu ülikooli kasvandike seast valis oma matemaatika õppejõud ka 1862. a. asutatud Riia Polütehnikum, esimene omataoline õppeasutus Vene riigis [18].

Tartus sirguvad matemaatika klassikud
(aastad 1880—1900)

Mindingi järglaseks rakendusmatemaatika professori kohal sai 1883. a. Upsala ülikooli kasvandik A n d e r s L i n d s t e d t (sünd. 1854), kes juba 1879. aastal asus Tartusse astronoom-vaatleja kohale. Tema peamine teene Tartu ülikoolis oli matemaatikaseminari rajamine üliõpilaste innustamiseks iseseisvale uurimistööle ja nende juhendamiseks. Sellest seminarist sai alguse T h e o d o r M o l i e n i (1861—1941), Riia kooliõpetaja poja sirgumine silmapaistvaks teadlaseks [19]. Pärast ülikooli lõpetamist 1883. aastal suunati T. Molien Lindstedti soovitusel ennast täiendama Leipzigisse Felix Kleini juurde. Tagasi saabunud, kaitses Molien 1885. aastal magistriväitekirja elliptiliste funktsioonide alal. Samal aastal kinnitati ta Tartu ülikooli dotsendiks. Suvevaheaegadel külastas Molien sageli välismaa teaduslikke keskusi. Tema huvid kaldusid algebra valdkonda, kus ta saavutas silmapaistvat edu. 1891. aastal avaldas ta oma klassikalise töö hüperkompleksarvude teooria valdkonnast. Selle töö eest, millega T. Molien sai abstraktsete algebrate teooria üheks rajajaks, andis Tartu ülikool talle 1892. aastal doktori teadusliku kraadi. Sellele vaatamata tuli andekal teadlasel tolleaegseis kitsais tingimusis jääda edasi dotsendi kohale ja alles 1900. a. sai ta professoriks Tomskisse. T. Molieni silmapaistvad teened leidsid hindamist alles nõukogude aastail, mil talle omistati teenelise teadlase aunimetus.

Teine noil aastail Tartu ülikoolist võrsunud matemaatika klassik, Läti-Valga kaupmehe poeg P i e r s B o h l (1865—1921) [20],

---

[17] П а п л а у с к а с, А. Б., Проблема единственности в теории тригонометрических рядов. — Историко-математические исследования, вып. 14, 1961, lk. 193—194, 203—207.

[18] Б у н г а, А. У., Математика в Рижском политехническом институте. — Наука в Прибалтике в XVIII — начале XX века. Рига, 1962, lk. 41—44.

[19] Р я г о, Г., viites 10 mainitud artikkel.

[20] М ы ш к и с, А. Д. и Р а б и н о в и ч, И. М., Пирс Георгиевич Боль. Raamatus П. Г. Б о л ь, Избранные труды. Рига, 1960, lk. 5—29.

M. Bartels

F. Minding

K. E. Senff

K. Peterson

P. Helmling

T. Clausen

P. Bohl

A. Kneser

tegi esimese uurimuse ülikooli lõpetamise eel 1887. a. diferentsiaalvõrrandite teooriast, oma juhendaja P. Helmlingi tööde vaimus. Töötades seejärel koduõpetajana Leevi mõisas ja hiljem õpetajana Irlavi seminaris (Lätis), alustas ta oma silmapaistvat uurimuste tsüklit taevamehhaanika matemaatiliste küsimuste valdkonnas. 1893. aastal kaitses P. Bohl Tartus edukalt magistriväitekirja, milles ta pani aluse kvaasiperioodiliste funktsioonide teooriale. Järgmised selle teooria edasiarendajad (Bohr, Weyl, Levitan, Jessen jt.) mainivad alati Bohli töid kui selle ala esimesi. Üht meetodit peaaegu-perioodiliste funktsioonide teoorias tuntaksegi praegu Bohl-Weyli meetodi nime all.

Veelgi silmapaistvamaid tulemusi sisaldab P. Bohli doktoritöö, mida ta kaitses Tartus 1900. aastal. Millegipärast jäid aga need Bohli saavutused kauaks ajaks vajaliku tähelepanuta, kuigi olid avaldatud ühes tuntud matemaatika ajakirjas. Alles 1955. a. avastas Riia teaduseajaloolane I. Rabinovitš, et Bohli selles ja järgnenud töös (1904) on esmakordselt antud rida topoloogilisi teoreeme, milledest muu hulgas järeldub tuntud lause püsipunkti olemasolust kera pideval kujutamisel iseendaks. Bohl ei piirdunud üksnes teoreemide esitamisega, tema tööde põhiosa on pühendatud nende rakendamisele matemaatilise analüüsi mitmete keerukate probleemide lahendamisel. Ülalmainitud klassikalist teoreemi püsipunktist hakatakse viimasel ajal matemaatilises kirjanduses üha sagedamini nimetama mitte enam Brouweri teoreemiks, nagu varem, vaid Bohl-Brouweri teoreemiks (hollandi matemaatik L. Brouwer jõudis selle teoreemini iseseisvalt 1910. a. paiku).

P. Bohli side Tartu ülikooliga seisnes pärast lõpetamist ainult väitekirjade ettevalmistamises ja kaitsmises. Tema akadeemiliseks töökohaks sai 1895. a. Riia Polütehniline Instituut, mille professoriks ta oli elu lõpuni.

Tartus endas vahetusid neil aastakümneil matemaatika professorid õige sageli. Mindigi ja Lindstedti järglasteks Tartu rakendusmatemaatika kateedril olid Saksamaalt siia tulnud E r n s t O t t o S t a u d e (1857—1928) ja A d o l f K n e s e r (1862—1930). Esimene peatus Eestis ainult kaks aastat (1886—1888). Sügavamaid jälgi jättis A. Kneseri tegevus aastatel 1889—1900. P. Bohl sai oma töös peamist innustust just Kneserilt, kelle mõningaid Tartus tehtud uurimusi ta kaugele edasi arendas.

Puhta matemaatika kateedril asendas Helmlingit aastatel 1888—1892 F r i e d r i c h S c h u r (1856—1932), kes oli samuti Saksamaalt juba tuntud matemaatikuna Tartusse tulnud ja alustas siin oma märkimisväärseid uurimusi geomeetria aluste valdkonnas. Sellesse töösse tõmbas ta kaasa üliõpilase K. R. K u p f f e r i (1872—1935), kes ühes oma töös esimesena tõestas lõikude korrutamise kommutatiivsuse mittearhimeedilises geomeetrias. Hiljem Riias kaldusid Kupfferi huvid botaanikasse ja temast sai Baltimaade selle aja suurimaid botaanikuid.

Ülikooli kasvandikest-matemaatikuist sellel ajajärgul mainigem veel G. Grofe't (1848—1895) ja P. Kadik'it (1857—1923), kes mõlemad kaitsesid siin magistrikraadi (esimene 1888. a. ja teine 1885. a.) ning töötasid lühikest aega dotsentidena.

Mõõnast uue tõusuni rakendusmatemaatikas
(aastad 1900—1918)

Möödunud sajandi viimasel aastakümnel algas vene ülikoolidele 1884. a. tsaarivalitsuse poolt ettekirjutatud reaktsioonilise põhimääruse laiendamine ka Tartu ülikoolile[21]. Seoses linna ümbernimetamisega hakkas ülikool 1893. aastast peale kandma Jurjevi ülikooli nime. Toimus üleminek vene õppekeelele ja saksa professorite asendamine vene rahvusest õppejõududega.

Mitmel erialal tähendas vene professorite tulek Tartusse sidemete tugevnemist vene progressiivse teaduse ja kultuuri saavutustega, materialistliku teaduse edusamme Tartus. Matemaatika osas tuleb aga täheldada õppe- ja teadusliku töö taseme esialgset langust. Tartusse määrati tööle kahjuks noori, vähese kvalifikatsiooniga vene matemaatikuid, kes ei olnud suutelised asendama oma kogenud eelkäijaid. F. Schuri lahkumisel vabanenud kohale 1892. aastal suunatud Moskva ülikooli kasvandikul Leonid Kuzmitš Lahtinil (1863—1927) puudus määramise ajal isegi magistrikraad, kuigi ta saavutas selle juba samal aastal. (Tolleaegset õhkkonda iseloomustab vabanenud kohale kandideerinud Molieni taotluse tagasilükkamine ilma ühegi motiveeringuta, kuigi Molien oli äsja hiilgavalt kaitsnud oma doktoriväitekirja.) Sel ajal veel mõjurikaste saksa professorite jahe suhtumine ja paljude baltlaste eksmatrikuleerumisest tingitud järsk üliõpilaste arvu kahanemine põhjustasid Lahtini tagasipöördumise Moskvasse juba 4 aasta pärast. Moskva ülikooli professorina saavutas ta hiljem tunnustuse oma töödega matemaatilises statistikas.

Haridusministeerium, olles järjekindel oma taotlustes, asutas Tartusse veel enne Lahtini lahkumist kolmanda matemaatika professuuri. Sellele määrati Lahtini ja Kneseri kolleegiks Moskva ülikooli kasvandik magister Vissarion Grigorjevitš Aleksejev (1866—1943), kes oli lühikest aega enne seda saabunud paariaastaselt välismaiselt komandeeringult. Aleksejev töötas Tartus ülikooli evakueerimiseni Voroneži 1918. aastal. Alates 1921. aastast tegutses ta Tartu kodanliku ülikooli eradotsendina. Tema 1899. aastal Moskvas kaitstud doktoriväitekiri käsitles algebraliste invariantide teooriat. Hilisemates Tartus avaldatud töödes püüdis Aleksejev seda teooriat rakendada keemia valemitele.

---

21 Эрингсон, Л., Из истории Тартуского университета в конце XIX и начале XX вв. — TRÜ Toimetised, vihik 114, 1961, lk. 177—214.

Бутягин, А. С. и Салтанов, Ю. А., Университетское образование в СССР. Изд. МГУ, 1957, lk. 27, 28.

L. K. Lahtin

V. G. Aleksejev

Lahtini asemele määrati Tartusse moskvalane magister Nikolai Vassiljevitš Bervi, kes aga vabastati nõrga tervise tõttu töölt juba kahe aasta pärast. 1898. aastal asus vabanenud kohale Kaasani ülikooli lõpetanud Platon Platonovitš Grave (1867—1919), kes töötas Tartus 20 aastat, ilmutades väga vähest huvi teadusliku uurimistöö vastu.

Nende nn. «puhta» matemaatika professorite loidust iseloomustab ilmekalt kasvõi see fakt, et käesoleva sajandi kahel esimesel aastakümnel ei kaitstud Tartu ülikoolis ühtegi matemaatika-alast väitekirja.

Mõnevõrra elavam tegevus arenes Tartus rakendusmatemaatika alal. Pärast A. Kneseri lahkumist Saksamaale jäi kateeder 1900. aastal vakantseks, kuni 1903. aastal määrati sellele Peterburi ülikooli kasvandik Guri Vassiljevitš Kolossov (1867—1936) [22]. Tartus töötas Kolossov 10 aastat, jätkates siin algul oma uurimusi kinnispunkti ümber pöörleva kindla keha probleemi alal. Sama probleemi kohta avaldas Tartus 1909. a. paar tööd M. Rebinder — arvatavasti Kolossovi mõjutusel. Tartus valmis 1909. aastal ka Kolossovi hinnaline doktoriväitekiri kompleksmuutuja funktsioonide teooria rakendustest elastsusteoorias, mida ta

---

[22] Ряго, Г., mainitud artikkel.
Депман, И. Я., С.-Петербургское математическое общество. — Историко-математические исследования, вып. 13, 1960, lk. 83—86.

järgmisel aastal kaitses Peterburi ülikoolis. See töö pani aluse uuele suunale elastsusnähtuste matemaatilisel uurimisel. 1913. a. lahkus G. Kolossov Tartust ja siirdus Peterburi, kus talle avanesid avaramad võimalused uurimistööks.

Lühikest aega, aastatel 1915—1918, töötas Tartus algul eradotsendina, hiljem professorina pärastine tuntud nõukogude teadlane, NSVL Teaduste Akadeemia akadeemik Leonid Samuilovitš Leibenson (1879—1951). Tema Tartus tehtud uurimusi talavabade katete teoorias jätkas siin V. V. Kupffer.

1918. aastal evakueeriti Jurjevi ülikool Voroneži, kus tema baasil tekkis praegune Voroneži ülikool. Oli lõppenud 116 aasta pikkune lõik Tartu ülikooli ajaloost.

Selline on põgus ülevaade matemaatika arengust vanas Dorpati-Jurjevi ülikoolis. Tagasihoidlik algus, seejärel esimese viljaka uurimissuuna kujunemine diferentsiaalgeomeetrias, kuni järjest tõhusamaks muutuv töö annab sajandi lõpul niisugused püsiva väärtusega uurimused, nagu Molieni ja Bohli väitekirjad.

Ei tahaks märkimata jätta üht iseloomulikku joont — üsna mitmed tartlaste tööd, mida praegu loetakse klassikalisteks, olid pikka aega unustuse hõlmas. Tartu matemaatikute prioriteet nendes küsimustes selgus märgatava hilinemisega. Nii oli see M. Bartelsi, K. Petersoni, P. Bohli, suurelt osalt ka T. Molieni puhul. Meie päevade eesti matemaatikute ülesandeks jääb uurida tähelepanelikult oma eelkäijate pärandit, mis võib sisaldada veel möndagi väärtuslikku.

ARVAMUSI MATEMAATIKAST

Mul on onu, kes väidab, et pole muud vaja, kui vaid kuskilt hullumajast või peast nikastanute haiglast mõni välja tuua — ja see väljatoodu on kindlasti parim matemaatik. Mina ütlen selle kohta, ja nii arvab ka Dirichlet, et oleks küll mõeldav väita, et kogu matemaatika on teatav ebanormaalsuse liik, kuid sellepärast ei tarvitse veel igasugune hullus matemaatilise iseloomuga olla... Kui ma sellele onule näidete varal suure vaevaga olin selgeks teinud, kuidas kujul $4n + 1$ esitatavad algarvud lagunevad kahe ruudu summaks, aga algarvud $4n + 3$ mitte, siis arvas ta: «See on igatahes küll üpris kummaline, aga selleks, et niisuguse asja peale üldse tulla, läheb ilmtingimata tarvis hullumeelsuse kõige kõrgemat kraadi: juba algarv on üks tohutu jama, ja nüüd nad võtavad kätte ja teevad veel vahet $4n + 1$ ja $4n + 3$ vahel, no siin lõpeb küll igasugune aru otsa!» Kulla valmistamise kunst olevat igatahes hulga etem. Ja see on minu sugulastest veel kõige selgema peaga!

Eisensteini[1] kirjast M. A. Sternile (1848)

[1] Gotthold Eisenstein (1823—1852) — tuntud saksa algebraist.

Kuidas minust sai matemaatik [1]

A. N. Kolmogorov

Matemaatilise «avastamise» rõõmu sain ma juba varakult tunda, siis kui ma viie-kuueaastaselt märkasin seaduspärasust

$1 = 1^2$

$1 + 3 = 2^2$

$1 + 3 + 5 = 3^2$

$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$ *jne.*

Meie kodus Jaroslavli lähedal asutasid mu tädid väikese kooli, kus tolleaegse pedagoogika kõige uuemate retseptide järgi õppis kümmekond mitmesuguses vanuses last. Koolis anti välja ajakirja «Kevadised pääsukesed». Selles ilmus minu avastus. Samas avaldasin ka enda väljamõeldud aritmeetikaülesandeid.

Seitsmeaastaselt otsustati mind panna E. A. Repmani eragümnaasiumi Moskvas. Selles radikaalselt meelestatud intelligentide ringkonna poolt organiseeritud gümnaasiumis oli huvitav õppida. Gümnaasium, kus õppisid koos nii poisid kui tüdrukud (poeglaste gümnaasiumi programmide järgi), oli pidevalt sulgemisohus. Suurepärased tulemused eksamitel, mida kuulas ka «ringkonna esindaja», olid meile kõigile kohusetunde ja au küsimus. Õpingud olid korraldatud omapäraselt. Üksvahe õppisin ma matemaatikat üks klass eespool kui teisi aineid.

Muide, ajutiselt said ülekaalu huvid teiste teaduste vastu. Esimese sügava mulje teadusliku uurimistöö jõust ja tähtsusest tekitas mulle K. A. Timirjazevi raamat «Taimede elu». Seejärel innustusin ma koos ühe sõbraga (N. A. Seliverstoviga) ajaloost ja sotsioloogiast. See huvi oli nii tõsine, et minu esimene teaduslik ettekanne, mille tegin 17-aastasena Moskva ülikoolis professor S. V. Bahrušini seminaris, oli referaat maavaldustest Novgorodis. Selles ettekandes, tõsi küll, sai XV—XVI sajandi käsikirjade analüüsimisel kasutatud mõningaid matemaatilise tõenäosusteooria võtteid.

Aastatel 1918—1920 ei olnud elu Moskvas kerge. Koolides õppisid tõsiselt ainult need, kellel oli selleks kül-

---

[1] See artikkel ilmus akadeemiku ja sotsialistliku töö kangelase A. N. Kolmogorovi, NSV Liidu ühe silmapaistvaima matemaatiku 60 aasta juubeli tähistamiseks ajakirjas «Ogonjok» nr. 48, 1963. a. (Tõlkinud H. Õiglane).

lalt püsivust. 1919.—1920. a. tuli mul koos vanemate kaaslastega sõita Kaasan-Jekaterinburgi (praegune Sverdlovsk) raudtee ehitusele. Ma õppisin töö kõrval iseseisvalt edasi ja valmistusin eksternina keskkooli lõpueksameid andma. Moskvasse tagasi jõudnud, pettusin ma mõnevõrra: mulle anti kooli lõputunnistus kätte, ilma et oleks hakatud vaeva nägema minu eksamineerimisega.

Sel ajal loeti tehnikat kuidagi tõsisemaks ja vajalikumaks kui puhast teadust. Astusin ülikooli matemaatikaosakonda, kuhu võeti kõiki soovijaid ilma eksamiteta, ja samaaegselt Mendelejevi instituudi metallurgiateaduskonda, kus nõuti sisseastumiseksamit matemaatikast. Kuid varsti kaalus huvi matemaatika vastu üles kõik mu kahtlused matemaatiku elukutse aktuaalsuses. Kui ma olin esimeste kuude jooksul andnud ära kõik esimese kursuse eksamid, sain teise kursuse üliõpilasena pealegi veel õiguse kuueteistkümnele kilole leivale ja ühele kilole võile kuus, mis tähendas tolleaegsete arusaamiste järgi juba täielikku materiaalset heaolu. Riided olid mul olemas ja puutallaga kingad tegin endale ise.

Muide, vajadus teenida lisa selleaegsele napile stipendiumile viis mind aastatel 1922—1925 keskkooli. Oma tööd VNFSV Hariduse Rahvakomissariaadi Potõlihhinski katse- ja näidiskoolis meenutan veel praegugi heameelega. Ma õpetasin matemaatikat ja füüsikat (sel ajal ei kardetud usaldada üheksateistkümneaastasele õpetajale kahte õppeainet korraga) ning võtsin kooli elust väga aktiivselt osa, olles koolinõukogu sekretär ja internaadis kasvataja.

Ülikoolis käisin ma ainult erikursustel ja seminaridel. Teisel kursusel tegin oma esimesed iseseisvad teaduslikud tööd. Hakkasin tegelema professor V. V. Stepanovi juures trigonomeetriliste ridade teooriaga koos oma lähedase sõbraga, erakordselt silmapaistva ning andeka matemaatikuga G. A. Seliverstoviga (mõlemad vennad Seliverstovid hukkusid Suures Isamaasõjas). Minu esimesteks juhendajateks ülikoolis olid peale V. V. Stepanovi veel V. K. Vlassov, P. A. Aleksandrov, P. S. Urõsson. Veidi hiljem sain N. N. Luzini õpilaseks.

Päris harilikul ja seaduspärasel viisil olid kõik mu esimesed tööd pühendatud üksikute, juba ülesseatud raskete ülesannete lahendamisele. Hiljem hakkasin koos A. J. Hintšiniga looma uut uurimissuunda oma matemaatilisel põhialal — tõenäosusteoorias.

Kogu minu edasises töös omandas suure tähtsuse koostöö andekate õpilastega, kes hiljem said juhtivateks teadlasteks ühes või teises uurimissuunas, nagu näiteks I. M. Gelfand funktsionaalanalüüsis, S. M. Nikolski funktsioonide lähendamises polünoomidega, A. M. Obuhhov turbulentse liikumise uurimises või kõige viimastel aastatel V. I. Arnold «väikeste nimetajatega» seotud diferentsiaalvõrrandite teooria meetodite väljatöötamises.

1920. aastast alates on kogu minu tegevus seotud Moskva ülikooliga.

Tegeldes teatud eduga ja mõnikord ka kasuga matemaatika praktilisel rakendamisel küllaltki laias valdkonnas, olen põhiliselt ikka puhta matemaatika esindajaks jäänud. Olles vaimustatud matemaatikutest, kellest on saanud meie tehnika suurmehed, ja hinnates täiel määral arvutusmasinate ja küberneetika tähtsust inimkonna tuleviku jaoks, arvan siiski, et puhas matemaatika oma traditsioonilises aspektis ei ole veel kaotanud seaduspärast aukohta teiste teaduste hulgas. Hukatuslikuks võib talle saada ainult matemaatikute liiga terav jagunemine kahte voolu: ühed kultiveerivad abstraktseid uusimaid matemaatikaharusid, orienteerumata selgelt nende seoses reaalse maailmaga, mis neid on sünnitanud, teised tegelevad «rakendustega», ilma et tungiksid nende teoreetiliste aluste ammendava analüüsini. Seepärast tahaksin ma lõpetuseks rõhutada, kuivõrd seaduspärane ja väärikas on positsioon, millel asub puhta matemaatika esindaja, kes mõistab oma teaduse kohta ning osa loodusteaduste, tehnika ja ka kogu inimkonna kultuuri arengus ning kes on võimeline arendama oma teadust vastavalt neile nõuetele.

Noored, kes tunnevad kutsumust seda teed mööda minna, ei tarvitse karta, et nad osutuvad meie maal vähem vajalikeks inimesteks ja teevad mingit liigset või vähem aktuaalset tööd kui agronoomid, insenerid, füüsikud ja küberneetikud.

ÜKS VAJALIK RAAMAT

E. Jürimäe

Riikliku Kõrgema ja Kesk-erihariduse Komitee teaduslik-metoodilise kabineti väljaandel ilmus hiljuti matemaatika metoodiliste artiklite kogumik[1], mis metoodilise materjali kõrval pakub ka teatud populaarse sisuga palu. Ei saa märkimata jätta, et eestikeelses trükisõnas on see üks esimesi sellelaadilisi väljaandeid. Siin on puudutatud küsimusi, mis sageli praktikas esinevad, kuid millest kuskil ei kirjutata. Sellest uudsusest on ka tingitud kogumiku põhilised head ja halvad küljed.

Heaks küljeks on eelkõige materjali värskus. Sisu poolest seisab enamik artikleid koolimatemaatika ning kõrgemates koolides õpitava vahepeal. Siit aga tuleneb, et otseselt ei ole artiklid nagu kellelegi adresseeritud. Tahaks loota, et järgnevate numbritega saab vaadeldav kogumik endale konkreetsema adressaadi.

H. Espenbergi artikkel «Tarvilikkus ja piisavus» käsitleb kaht põhilist matemaatika mõistet, millele meie õpetamise süsteemis on seni lubamatult vähe tähelepanu osutatud. Selles on artikli peamine väärtus. Kui kõnelda puudustest, siis kohtume siin ühe üldise väärnähuga meie matemaatilises keeles, milleks on pöördsõna «omama» kuritarvitamine (näit. «arv omab kuju» lk. 6, 7). Niisugune teiste keelte mõjul tekkinud keelepruuk on vaja matemaatilisest kõnest välja juurida, sest see on eesti keelele võõras. Küsitavaks tuleks lugeda ka väljendit «jagamisel annab arv jäägi». Selle asemel tundub hoopiski loomupärasem «jagamisel saame jäägi». Artiklist loeme veel (lk. 8), et mingi väite tarvilikuks tingimuseks nimetame iga järeldust, mida saab teha antud väite kehtivuse põhjal. Kas see on tõesti nii? Oletame näiteks, et Jüri ütles Reinule: «Arvo jäi eile sarlakisse» (väide) ja Rein vastas Jürile: «Siis ta ei saa mitmel nädalal kooli tulla» (järeldus). Siin ei saa kõnelda «tarvilikust tingimusest»! Küsitav on ka näide võrdsete kolmnurkade kohta (lk. 10).

Ü. Kaasiku artikli «Täielik induktsioon» puhul on väike etteheide toimetajale. Lugemisel jääb mulje, et lk. 14, 15 jt. on tegemist teoreemidega, kuid tegelikult on seal vaid eelnevate teoreemide rakendamine. Seda aga oleks saanud trükipildi abil vältida. Kogumikus esineb ka mujal üksikuid toimetamisel kõrvaldamata jäänud vigu ning ebaühtlusi, kuid need üldiselt ei sega lugemist. Näiteks lk. 31 (enne valemit (3)) esineb «jagatis $Q(x)$» asemel «jagaja $Q(x)$», lk. 20 (all) peaks väljend «Pascali kolmnurk» olema ühtluse mõttes sõrendatud, jne.

Kogumiku viimane artikkel (H. Silling, Rohkem tähelepanu kordamisele!) sisaldab liialt vähe üldistavat materjali, kuigi artikli autoril oleks olnud oma ametikoha tõttu seda suhteliselt kerge hankida. Toodud näidisülesannetes esineb ebatäpsusi. Tekib küsimus, kas me saame kõnelda võrrandi lahutamisest tegureiks (ülesanne 8)? Ülesannete sõnastused pole stiililiselt head (näiteks ülesanne 18), kohati puuduvad ülesannetes kirjavahemärgid (näit. ülesanded 22—25, 29 jne.).

Üksikutele puudustele vaatamata on vaadeldav kogumik hea lisa meie napile matemaatilisele lugemisvarale. Teda võivad oma töös edukalt kasutada nii meie keskkoolide õpetajad kui õpilased ning sealt saame peale metoodiliste märkuste teatud täiendust ka matemaatika aineringide tarbeks.

[1] Matemaatika. Metoodiliste artiklite kogumik. I. Tallinn, 1963. [62 lk.].

* * *

Need, kes on loomu poolest arvutamises osavad, näitavad üles teravmeelsust peaaegu et kõigis teadustes... seetõttu ei tohi seda teadust hooletusse jätta, vaid teda tuleb õpetada vaimult õilsaimatele.

Platon

ALGEBRA SUVEKOOL KÄÄRIKUL

Jevgeni Gabovitš

Üldine algebra on tänapäeva algebra tähtis haru, mille uurimismeetodeid ja tulemusi kasutavad paljud teised matemaatilised distsipliinid.

Algebra sõjajärgne kiire areng Nõukogude Liidus põhjustas vajaduse tugevdada sidemeid eri linnade algebraistide vahel, eriti kuna kirjastusoludest tingituna saadi uurimistulemustest teada sageli mitmeaastase hilinemisega ning esines tööde kordamisi erinevate autorite poolt. 1958. a. toimuski Moskva Riikliku Ülikooli algebra kateedri juhataja, tuntud nõukogude algebraisti prof. Aleksander K u r o š i initsiatiivil Moskvas esimene üleliiduline algebraalane konverents ehk üleliiduline üldise algebra kollokvium. Järgmisel aastal Moskvas peetud teisel kollokviumil otsustati edaspidi organiseerida niisuguseid kokkutulekuid igal aastal ja erinevates kohtades. Nii toimus kolmas kollokvium 1960. aastal Sverdlovskis, neljas 1962. a. Kiievis ja viies 1963. a. Novosibirskis. 1961. aastal ametlikult kollokviumi ei olnud, kuid faktiliselt viidi see läbi Leningradis, kus sel aastal toimus IV üleliiduline matemaatika kongress. Novosibirski kollokviumil otsustati kuues kollokvium korraldada 1964. a. Minskis.

Kollokviumide organiseerimine tõi nõukogude algebrale suurt kasu. Uute tulemustega tutvumine, otseste kontaktide loomine algebraistide vahel, diskussioonidest osavõtt — kõik see on äärmiselt vajalik igale teadlasele, eriti noorele. Kollokviumide plenaarettekanded, samuti kõigi ettekannete ning lühiteadaannete teesid avaldati nõukogude juhtivates matemaatikaajakirjades ja sealjuures küllaltki operatiivselt.

Üleliidulistel kollokviumidel kui nõukogude algebraistide omavahelise kontakti vormil on aga ka mõningaid puudusi. Kollokviumist osavõtjate arv on tavaliselt suur, ligi kolmsada. Kollokviumi kestus on aga võrdlemisi lühike (6—8 päeva) ning töökava seetõttu väga pingeline. See raskendab tutvu-

Grupp suvekoolist osavõtjaid. Vasakult paremale V. Vagner, J. Hion, J. Ljapin, L. Ševrin, L. Gluskin, B. Plotkin ja V. Viljatser.

mist kogu pakutava hiiglasuure informatsioonihulgaga. Eriti raske on noortel algebraistidel, keda huvitavad tihti mitte üksikud uued tulemused, vaid see, kuidas need on saadud.

Nii kujunes pikapeale arvamus, et täienduseks kollokviumidele oleks õige korraldada algebra-alaseid koole. Esimese niisuguse kooli organiseerimise initsiatiiv tuli Tartu Riiklikust Ülikoolist, kelle nimel TRÜ algebra ja geomeetria kateedri dotsendi k. t. J. Hion esines viimasel Novosibirski kokkutulekul vastava ettepanekuga. Kollokvium

kiitis selle ettepaneku heaks ja moodustas suvekooli läbiviimiseks organiseeriva komitee, kelle ülesandeks jäi selgitada suvekoolist osavõtjate arv ning koostada töökava.

Esimene suvekool üldises algebras toimus 12.—24. augustini 1963. a. TRÜ spordibaasis Käärikul. Suvekoolist võttis osa 44 matemaatikut, neist neli teaduste doktorit (professorid V. Vagner Saraatovist, L. Gluskin Kommunarskist, J. Ljapin Leningradist ning B. Plotkin Riiast) ning kaksteist teaduste kandidaati. Osavõtjaid oli saabunud paljudest Nõukogude Liidu linnadest, sealhulgas Sverdlovskist üheksa, Leningradist ja Riiast neli, Moskvast, Novosibirskist, Minskist ja Kišinjovist kaks ning Saraatovist, Kommunarskist, Permist ja Odessast üks. Peale nende tegid suvekooli kaasa Tartu algebraistid ning üksteist TRÜ matemaatikaosakonna üliõpilast.

Suvekoolis peeti kokku 21 ühe- kuni kolmetunnilist loengut. Enamus neist andis ülevaate mingist laiemast probleemide ringist. Rühmateooria valdkonnast väärib märkimist leningradlase A. Rukolaine ettekanne rühmade esitustest ning Sverdlovski matemaatikute J. Gortšakovi, V. Viljatseri, A. Starostini ja V. Bussarkini ettekanded erinevatest rühmade klassidest ning rühmade auto-

[illegible] Erilise huviga kuulasid [illegible] matemaatikud Riia professori B. Plotkini ettekandeid, kes luges meile juba 1962. a. sügisel TRÜ külalisena rühmateooria erikursust ja kelle teaduslikud huvid on lähedased tartlaste omadele.

Professor J. Ljapin andis oma loengutes ülevaate poolrühmateooria tänapäevasest arengutasemest. Poolrühmateooriale olid pühendatud ka prof. L. Gluskini, Leningradi matemaatiku A. Aizenštati ning Sverdlovski algebraisti L. Ševrini ettekanded.

Algebra ja geomeetria piiril olevatest küsimustest rääkis oma ettekannetes prof. V. Vagner.

Märkimist väärivad veel noorte algebraistide K. Ževlakovi ja J. Gurevitši ettekanded, kellest esimene esines silmapaistvalt hea ülevaatega ringide nilpotentsusest, teine käsitles klassikalise algebra ja loogika piirdeprobleeme.

Tartlastest esinesid suvekoolis H. Õiglane teemal «Üldistatud rühmade esitused» ning algebra ja geomeetria kateedri juhataja dots. Ü. Lumiste ettekandega «Mõningaid algebralisi probleeme seoses geomeetria alustega».

Kooli töö oli organiseeritud selliselt, et kõik ettekanded toimusid päeva esimesel poolel. Seega jäi aega nii teaduslike kontaktide loomiseks kui ka puhkuseks. Oli ju suvekoolist osavõtjate käsutuses Kääriku spordibaasi ujula ning spordiväljak. Korraldati jalutuskäike Kääriku ümbrusesse, Pühajärvele ja Otepääle, pikem ringsõit mööda Lõuna-Eestit ning — pärast kooli ametlikku lõpetamist — ühine ekskursioon Tallinna.

Suvekooli organiseerimise esimest katset võib ilmselt õnnestunuks pidada. Seda tõendab ka koolist osavõtjate ühine kiri TRÜ rektorile, milles tänatakse selle ürituse korraldajaid ja muuseas öeldakse: «Sellise kooli töö esimesed kogemused näitavad, et kooli organiseerimine õigustas ennast täielikult ning tõi vaieldamatut kasu.»

TARTU MATEMAATIKASEMINAR

E. Tiit

Oma teist tööaastat alustas 1962. aasta lõpul loodud LUS-i ülelinnaline matemaatikaseminar 16. oktoobril koosolekuga, mis oli pühendatud Noorte Matemaatikute Kooli tööle. Ettekandega eelneva aasta töökogemustest esines Noorte Matemaatikute Kooli direktor, TRÜ vanemõpetaja K. Soonets; järgnes elav mõttevahetus, millest võtsid osa ka mitmed keskkoolide õpetajad. Arutelu tulemusena jõuti otsusele: kooli struktuur vajab muutmist nii, et oleks võimalik kaasa tõmmata ka Tartust kaugel elavaid õpilasi ning selleks tuleks tööle rakendada rohkem jõude keskkooliõpetajate hulgast TRÜ õppejõudude juhendamisel.

Järgnes seeria ettekandeid Eesti NSV TA Füüsika ja Astronoomia Instituudi matemaatikarühmalt.

R. Jürgenson rääkis seminaris 30. oktoobril oma valminud dissertatsioonist «Diferentsmeetodi veahinnangust suvalist järku diferentsiaalvõrrandi rajaülesande lahendamisel» ning seal saadud tulemustest.

A. Nilsoni ettekanne «FAI masinarvutusjaam», milles oli juttu instituudi matemaatikarühma uurimissuundadest ja analüütiliste arvutusmasinate kasutamise perspektiividest, toimus 13. novembril.

Järgnevas seminaris, 27. novembril, kõneles E. Tiit faktoranalüüsi matemaatilistest ja statistilistest probleemidest.

Suurim arv osavõtjaid oli aasta viimasel, 11. detsembril toimunud seminaril, kus matemaatikute külalisena rääkis FAI teoreetilise füüsika sektori noorem teaduslik töötaja V. Unt rahvusvahelisest relativistide suvekoolist Prantsusmaal ja üldise relatiivsusteooria probleemidest. Ettekande esimeses osas jagas lektor muljeid oma kahekuuliselt viibimiselt ühes parimate traditsioonidega suvekoolis Prantsuse Alpides, kõneles selle organisatsioonilisest küljest ning näitas kaasatoodud materjale ja pilte. Seminari teises osas olid kõne all üldise relatiivsusteooria mitmesugused matemaatilist laadi probleemid ja raskused ning uuemad suunad nende lahendamisel. V. Unt oli seega esimeseks mittematemaatikuks, kes esines matemaatikaseminaris ettekandega naaberaladel tekkinud matemaatiliste probleemide kohta.

Seminar jätkab oma tööd järgmisel semestril.

NOORTE MATEMAATIKUTE KOOL

K. Soonets

Tänapäeval vajavad kõik teadusharud inimesi, kes vähemal või rohkemal määral suudaksid rakendada matemaatilisi uurimismeetodeid. Põhilise töö matemaatika-alaste algteadmiste andmisel kasvavale põlvkonnale teevad matemaatika õpetajad koolides. See toimub matemaatika tundides ja klassiväliselt matemaatikaringides. Klassivälise töö üheks uueks vormiks on nn. noorte matemaatikute koolid.

Juba 1934/35. õppeaastal loodi Moskvas NSVL TA V. A. Steklovi nimelise Matemaatikainstituudi juurde matemaatikaring keskkoolidele. Seal esinesid õpilastele loengutega tolle aja nimekamad matemaatikud. Järgmisel aastal viidi ring üle Moskva Riikliku Ülikooli juurde, kusjuures loodi sektsioonid matemaatiliste distsipliinide ja keskkooli klasside järgi. Toimusid ka kõigile ühised loengud, mille eesmärgiks oli tutvustada õpilastele niisuguseid kaasaja matemaatika probleeme, mis koolikursusse ei kuulu. Osal loengutel käsitleti süvendatult ka koolikursuse küsimusi. Sektsioonide tegevus oli korraldatud vestluste ja ülesannete lahendamise vormis. Tolleaegse töö puuduseks tuleb lugeda temaatika juhuslikku valikut ja erinevail aastail käsiteldava materjali sisulist mittejärgnevust.

Uueks etapiks klassivälises töös matemaatika alal kujunesid kindla põhikirja ja programmiga noorte matemaatikute koolid. Alates 1959. aastast korraldati matemaatikaringide töö selliselt ümber Moskvas ja Ivanovos. Järgmistel aastatel alustasid tööd analoogilised koolid reas teistes linnades, nagu Kalininis, Kišinjovis, Saraatovis jm. Õppeaeg noorte matemaatikute koolides on 2—3 aastat. Kokkutulekud toimuvad 1—2 korda nädalas kestusega 2 tundi. Kõigi koolide programmidele on iseloomulikud sellised teemad, nagu arvuteooria põhimõisted, matemaatilise loogika alused, lineaarvõrrandite süsteemid ja determinandid, elementaarfunktsioonid, funktsiooni piirväärtus, tuletis ja diferentsiaal, Lobatševski geomeetria elemendid. Mõnedes koolis käsitleti ka topoloogia, küberneetika, mänguteooria ja tõenäosusteooria põhimõisteid jms. Noorte matemaatikute koolide töö korraldamisest võtavad osa kõrgemate õppeasutuste õppejõud, üliõpilased ja keskkooliõpetajad ühiskondlikel alustel.

Novosibirskis korraldati 1962. a. Siberi koolide õpilastele kahevooruline ülesannete lahendamise olümpiaad. Olümpiaadil silmapaistnud õpilased kutsuti Novosibirskisse suvelaagrisse, kus neid tutvustati matemaatika aktuaalsete probleemidega. 1963. a. jaanuaris alustas sealsamas tööd täppisteadusliku kallakuga internaatkool.

Noorte matemaatikute koolide senises töös on välja kujunenud kaks põhisuunda. Osa koole seavad oma eesmärgiks õpilaste üldise tutvustamise matemaatika probleemidega. Teistes koolides on aga pearõhk pandud käsitletavate küsimuste põhjalikumale omandamisele, kusjuures temaatika on piiratum.

Tartus asutati Noorte Matemaatikute Kool TRÜ matemaatikute initsiatiivil 1961. a. veebruaris. Õppetöö vormiks valiti pühapäeviti toimuvad loengud. Kahel esimesel õppeaastal toimu-

…ad loengud igal pühapäeval à 2 tundi. 1962. a sügisest alates toimuvad loengud üle nädala kestusega 3 tundi. Kooli tööd juhib ühiskondlikel alustel töötav 4-liikmeline kooli nõukogu. Nõukogu peab kontakti keskkoolidega ja hoolitseb loengute temaatika eest. Kooli töös on seni domineerinud matemaatika üksikuid probleeme tutvustav suund.

Osavõtt loengutest oli tavaliselt õppeaasta alguses võrdlemisi aktiivne, kevadeks aga loengutest osavõtjate arv kahanes. Loengute kuulajad olid valdavas enamikus X ja XI klassi õpilased. Lisaks Tartu koolinoortele käis loengutel ka Puhja ja Lähte keskkooli õpilasi. 1962/63. õppeaastal korraldati Noorte Matemaatikute Koolis ülesannete lahendusvõistlus. Parimaid tulemusi saavutasid Tartu I keskkooli matemaatikaklassi õpilased ja kaks õpilast Tartu V keskkoolist. Kahel viimasel aastal autasustati aktiivsemaid loengutest osavõtjaid ja ülesannete lahendusvõistluse parimaid diplomite ja mälestusesemetega.

Tartu Noorte Matemaatikute Koolis peetud loengutel on käsitletud väga mitmesuguseid probleeme. Suhteliselt suure osa moodustasid võrrandisüsteemide, võrrandite ja võrratuste lahendusmeetodid. Tutvuti kaasaegsete arvutusmasinatega, käsitleti mänguteooria ja küberneetika küsimusi ning mõningaid lineaarse planeerimisega seotud ülesandeid. Omaette tsükli moodustasid rühmateooria algmõisted ja nende rakendused. Kahel loengul käsitleti loogiliste ülesannete lahendamist koos matemaatilise loogika elementidega.

Senised kogemused näitavad, et Noorte Matemaatikute Kool on end igati õigustanud. Sellepärast on aeg asuda töö laiendamisele: tuleks kaasa haarata ka vabariigi teiste keskuste õpilasi, välja töötada püsivad programmid jne. Selles suunas praegu toimuvate ettevalmistuste käigus on teretulnud kõigi asjasthuvitatute ettepanekud.

Kroonika

PROF. KANGRO JUUBEL

Teed siin meeldiva Maa peal poolsada aastat ju käidud,
nüüd analüüsida võib
töid, mida teinud on mees.
Kuid kes jookseks kiirelt ning tooks arvuti appi,
et summeeritud saaks
kõik tema väärikad teod!?
Kõrget au on ju väärt see mees, kes kõrgema mati
kõrgusis hirmu ei tea,
teisigi toetada võib.
Kaksteist last — aspiranti Te käe all kõndima õppind
(pluss veel need kolm last,
kes «isa» ütlevad Teil').
Kuid hajuvaid ridu koondada on veel nii väga palju —
selleks soovime, et
Jõud Teil otsa ei saaks!

(P.-E. Rummo)

1963. aasta lõpul toimus Eesti NSV matemaatikaelus meeldejääv sündmus: tähistati meie vabariigi kaasaegse matemaatika koolkondade rajaja ja rahvusvaheliselt tuntud teadlase, füüsika- ja matemaatikadoktori professor **Gunnar Kangro** 50-ndat sünnipäeva.

TRÜ matemaatikaosakonna poolt 21. novembril organiseeritud piduliku koosoleku avas prof. Ü. Lepik, tehes ühtlasi teatavaks juubilari autasustamise Eesti NSV Ülemnõukogu Presiidiumi aukirjaga. Ülevaate juubilari elust ja tööst andis dots. Ü. Kaasik. Järgnesid ettekanded matemaatikaosakonna isetegevuslastelt, muuhulgas kanti esmakordselt ette P.-E. Rummo luuletus prof. G. Kangro juubeliks. Klaveril esines endine matemaatik, praegune klaverikunstnik Mall Sarv.

Oma kolleegi ja kunagist kaasüliõpilast õnnitles prof. H. Keres, meenutades ühiseid üliõpilasaastaid. Rohkearvulisi tervitusi tõid oma õpetajale kolleegid ja õpilased Tartu Riiklikust Ülikoolist, Tallinna Polütehnilisest Instituudist, Eesti Põllumajanduse Akadeemiast, Eesti NSV Teaduste Akadeemia asutustest — Küberneetika Instituudist, Füüsika ja Astronoomia Instituudist ning mujalt.

Loeti ette ka teistest Nõukogudemaa kõrgematest õppeasutustest saabunud tervitustelegrammid.

Prof. G. Kangrot õnnitleb tema kunagine kaasüliõpilane prof. H. Keres.

UUSI TEADUSTE KANDIDAATE

21. veebruaril 1964. a. kaitses oma väitekirja «Uurimused eukleidilise ruumi mitmemõõtmeliste pindade teooriast» TRÜ arvutuskeskuse töötaja **Rünno Mullari.** Tööd juhendas dots. Ü. Lumiste, oponeerisid füüsika-matemaatikadoktor A. Vassiljev ja füüsika-matemaatikakandidaat V. Goldberg.

Väitekirjas vaadeldakse m-mõõtmelisi pindu V_m n-mõõtmelises eukleidilises ruumis R_n ja üldistatakse sellele juhule rida klassikalise pinnateooria mõisteid ning tulemusi. Lähemalt uuritakse kaht pindade klassi, millest ühte lihtsaima erijuhuna kuulub tuntud Cliffordi pind, teise aga — s. o. maksimaalselt sümmeetriliste pindade klassi — tasand ja sfäär. Pindade uurimisel rakendatakse originaalset metoodikat.

TRÜ Füüsika-Matemaatikateaduskonna nõukogu otsustas R. Mullarile omistada füüsika-matemaatikakandidaadi kraadi.

Rünno Mullari on sündinud Tallinnas 7. detsembril 1931. a. Ta lõpetas 1949. aastal Tallinna I keskkooli, kus tema matemaatika õpetajaks oli F. Männik. Tartu Riikliku Ülikooli matemaatikaosakonna lõpetas R. Mullari 1960. aastal.

13. märtsil 1964. a. kaitses väitekirja «Diferentsiaalvõrrandite ligikaudse lahendamise meetodite veahinnangust» ENSV TA Füüsika ja Astronoomia Instituudi noorem teaduslik töötaja **Rein Jürgenson.** Tööd juhendas dots. E. Tamme, oponeerisid füüsika-matemaatikadoktor prof. G. Kangro ja füüsika-matemaatikakandidaat L. Kivistik.

Väitekirjas antakse veahinnangud mitmetele praktikas kasutatavatele diferentsiaalvõrrandi ligikaudse lahendamise meetoditele (lähedaste diferentsiaaloperaatorite meetod, Newtoni meetod, diferentsmeetod). Olulisi tulemusi on saadud diferentsmeetodi uurimisel. Diferentsmeetodi veahinnangute leidmisel kasutab autor originaalset metoodikat, mis põhineb nn. diskreetse Greeni funktsiooni kasutamisel. R. Jürgensoni tulemused on praktikas hästi rakendatavad.

TRÜ Füüsika-Matemaatikateaduskonna nõukogu omistas R. Jürgensonile füüsika-matemaatikakandidaadi teadusliku kraadi.

Rein Jürgenson on sündinud Pärnus 28. juunil 1936. a. Ta lõpetas 1955. aastal Pärnu L. Koidula nimelise II keskkooli, kus talle matemaatikat õpetasid V. Nano ja A. Kuhi. Tartu Riikliku Ülikooli matemaatikaosakonna lõpetas R. Jürgenson 1960. a.

PREMEERITUD ÜLIÕPILASTÖÖD

Üliõpilaste teaduslike tööde 1962/63. õppeaasta üleliidulisel konkursil sai NSV Liidu Kõrgema ja Kesk-erihariduse Ministeeriumi aukirja **Jevgeni Gabovitši** töö «Упорядоченные полугруппы и их эндоморфизмы» (juhendaja dots. k. t. J. Hion).

Eesti NSV vabariiklikul üliõpilaste teaduslike tööde konkursil võitsid esimese preemia (60 rbl.) **Tõnu Mölsi** töö «К кибернетической теории эволюции» (juhendaja dots. L. Võhandu) ja **Heino Türnpu** «Mõnedest abstraktsete summeeruvustegurite tüüpidest II järku Rieszi menetluse jaoks» (juhendajad prof. G. Kangro ja dots. k. t. S. Baron). Kolmas preemia (25 rbl.) langes **Igor-Ivar Saarniidule**, kes oli esitanud töö «Diferentsiaalvõrrandi lähislahendi vea hindamisest» (juhendaja dots. E. Tamme). Esile tõsteti **Mati Kilpi**, kelle töö kandis pealkirja «Parempoolselt järjestatud poolrühmadest» (juhendaja dots. k. t. J. Hion).

ESIMENE LEND KESKHARIDUSEGA MATEMAATIKUID

20. märtsil 1964. a. sooritasid TRÜ arvutuskeskuse juures kvalifikatsiooni-eksami meie vabariigi esimesed 32 keskharidusega matemaatikut-programmeerijat. Nendeks on A. H. Tammsaare nimelise Tartu linna I Keskkooli XI^c klassi õpilased, kes omandasid matemaatiku kutse tootmiseriala õppimise korras.

Matemaatikute-programmeerijate ettevalmistamist keskkooli ja TRÜ arvutuskeskuse baasil alustati Tartus 1961. a. sügisel. Asja algatajaiks olid eelkõige TRÜ õppejõud dots. O. Prinits ja dots. Ü. Kaasik. Peamiselt Tartust, kuid osalt ka mujalt tulnud matemaatika-andelistest õpilastest moodustati omaette klass, mille tunniplaan sisaldas tavalise keskkoolikursuse kõrval rea eriaineid, nagu kõrgema matemaatika alused, arvutusmeetodid, elektronarvutid ja programmeerimise teooria. Samasugused klassid komplekteeriti ka igal järgneval õppeaastal.

Eriaineid õpetavad keskkoolis Tartu Riikliku Ülikooli õppejõud ja arvutuskeskuse töötajad. Teoreetiliste ainete kõrval teevad õpilased läbi arvutusmeetodite praktika alates 9. klassist ning programmeerimise praktika elektronarvutil «Ural-1» alates 10. klassist. Kolmeaastased õpingud lõpevad praktikatööga, s. o. mingi keerulisema probleemi iseseisva lahendamisega ja vastava programmi koostamisega, millele järgneb kvalifikatsioonieksam. Kõigile eksami sooritanud õpilastele omistatakse matemaatik-programmeerija kvalifikatsioon ning erialaline kategooria.

Käesoleva aasta programmeerijate lennust omandasid kõrgeima, s. o. 3. kategooria:

1. Ebre, Lembit
2. Haldre, Tõnu
3. Kaldaru, Mart
4. Kauri, Mai
5. Kivi, Raal
6. Lõhmus, Ann
7. Mäeoja, Virko
8. Ohvril, Hanno
9. Pirk, Mart
10. Simm, Jaak
11. Vainer, Anne

2. kategooria matemaatik-programmeerijaiks said:

1. Alttoa, Helli
2. Ebre, Eve
3. Fuchs, Ott
4. Karu, Jaak
5. Kingu, Tiit
6. Mark, Anu
7. Meos, Matti
8. Reintam, Olev
9. Saag, Ülle
10. Saimre, Teo
11. Sakla, Jaak
12. Seiler, Margis
13. Sonn, Helbe
14. Truus, Andrus
15. Urbanik, Tõnu
16. Varbhein, Olga
17. Vari, Merike

1. kategooria omistati järgmistele õpilastele:

1. Möldre, Hele-Mai
2. Somelar, Rein
3. Truus, Ants
4. Vari, Luule

Esimesele matemaatik-programmeerijate lennule lisanduvad peatselt järgmised. Praegu õpivad arvutusmatemaatika erialal 23 õpilast 10. klassis ja 40 õpilast 9. klassis. Peale selle valmistab keskharidusega matemaatika spetsialiste ette veel Tallinna I keskkool, kus 1962. ja 1963. a. sügisel asutati samuti klassid matemaatika süvendatud õpetamiseks.

Kogumiku «Matemaatika ja kaasaeg» käesolevas väljaandes jätkame ja täiendame eelmises vihikus alustatud ülevaadet Eesti NSV-s ilmunud matemaatika ja teoreetilise mehhaanika alasest kirjandusest; ajaliselt hõlmab nimestik sedapuhku kogu 1963. aasta. Nimestiku koostas ühiskondliku töö korras Fr. R. Kreutzwaldi nim. Eesti NSV Riikliku Raamatukogu peabibliograaf E. Annus.

RAAMATUD

Harjutuste kogumik füüsika, keemia ja matemaatika alalt. Trt., 1963. 60 lk. (Tartu Riiklik Ülikool). — Trükitud rotaprindil 2000 eks.

H e n r i c h s o n, B. **Eksponentfunktsioon arvutusvahendina ja tehted juurtega.** Trt., 1963. 54 lk. (Õpetajate ja kasvatajate töökogemusi. ENSV Vabariiklik Õpetajate Täiendusinstituut.)

J a k o b s o n, L. **Eelisarvude süsteem ja selle praktiline kasutamine.** Tln., 1963. 16 lk. (ENSV Rahvamajanduse Nõukogu Tehnilise Informatsiooni Büroo.) — Trükitud rotaprindil 450 eks.

K a a s i k, Ü. ja O j a, A. **Küberneetika põhisuundadest.** Tln., ERK, 1963. 39 lk.

K a l l a k, J. ja L i n t s, A. **Matemaatika õpetamisest 3. klassis.** Tln., ERK, 1963. 48 lk.

K o t l i, M., O p e r, U. ja P e t e r s e n, I. **Elektronarvuti teadust ja rahvamajandust abistamas.** Tln., ERK, 1963. 62 lk.

K r u l l, M. ja P u u s e p p, E. **Juhised koormusarvutusteks tehases.** Tln., 1963. 52 lk. (ENSV Rahvamajanduse Nõukogu Tehnilise Informatsiooni Büroo.) — Trükitud rotaprindil 550 eks.

Kujutav geomeetria. Harjutusülesanded. Tln., 1963. 55 lk. (Tallinna Polütehniline Instituut.) — Trükitud rotaatoril 2000 eks.

K u l l, L. **Punkti liitliikumise kinemaatika.** Trt., 1963. 28 lk. (Eesti Põllumajanduse Akadeemia.) — Trükitud rotaprindil 300 eks.

K u l l, I. **Reaalmuutuja funktsioonide teooria.** 2. tr. Trt., 1963. 157 lk. (Tartu Riiklik Ülikool.) — Trükitud rotaprindil 300 eks.

L e p a m a a, A. **Metoodilised materjalid kaugõppe-ettevalmistuskursustel õppijaile õppeaines «Matemaatika».** Tln., 1963. 19 lk. (Tallinna Polütehniline Instituut). — Trükitud rotaprindil 1000 eks.

M e t s, G. ja P e t e r s e n, I. **Üldine füüsika, kinemaatika ja sissejuhatus matemaatilisse analüüsi.** Tln., 1962. 27 lk. (Tallinna Polütehniline Instituut.) — Trükitud rotaprindil 2000 eks. — Sama ka vene k.

P i h o, H. ja T e i t e l b a u m, V. **Arvutusmasinate kasutamine kolhoosides ja sovhoosides.** Tln., ERK, 1963. 84 lk.

P r i n i t s, O. **Funktsionaalne sõltuvus, tuletis ja integraal keskkoolis.** Tln., ERK, 1963. 206 lk.

R ä g o, G. **Kõrgem matemaatika. II.** Tln., ERK, 1963. 588 lk.

R u u b e l, A. ja R i i v e s, S. **Kujutava geomeetria koduseid harjutusülesandeid EPA kaugõppeteaduskonna üliõpilastele.** I vihik. Trt., 1963. 28 lk. (Eesti Põllumajanduse Akadeemia.) — Trükitud rotaprindil 600 eks.

S i l d e, O. ja R e l v i k, H. **Vektoranalüüsi algmed.** Tln., 1963. 78 lk. (Tallinna Polütehniline Instituut.) — Trükitud rotaprindil 1200 eks.

T a m m e, E. **Arvutusmeetodid. IV.** Lineaarsed võrrandsüsteemid. Trt., 1963. 143 lk. (Tartu Riiklik Ülikool.) — Trükitud rotaprindil 400 eks.

T i i k m a, B. ja R e l v i k, H. **Teoreetiline mehaanika.** Programmid, metoodilised juhendid ja kontrolltööd kaugõppe üliõpilastele. I. Staatika. Tln., 1963. 60 lk. (Tallinna Polütehniline Instituut.) — Trükitud rotaprindil 1200 eks.

Töötasu arvestuse mehhaniseerimisest ja ratsionaliseerimisest klahvarvutusmasinate abil. Tln., 1963. 16 lk. (ENSV Rahvamajanduse Nõukogu Keskraamatupidamine.) — Trükitud rotaatoril 350 eks.

Õpik keskkooli matemaatikakursuse kordamiseks. Abimaterjal sisseastujaile. I osa. Tln., 1963. 112 lk. (Tallinna Polütehniline Instituut.) — Pealk. ees autorid: E. Etverk, A. Garšnek, A. Kass [jt.] — Trükitud rotaprindil 5000 eks.

Ülesandeid ja harjutusi arvutamiseks arvutusmasinatega. Trt., 1963 39 lk. (Eesti Põllumajanduse Akadeemia.) — Trükitud rotaprindil 400 eks.

Вихманн, Ф. А. **Обобщенные множители суммируемости.** Автореферат. Таллин, 1963 10 с. (Академия Наук Эстон. ССР. Отделение физ.-мат. и техн. наук.) — 250 экз.

Левин, М. И. **О приближенном вычислении интегралов.** Автореферат. Таллин, 1963. 13 с. (Академия Наук Эстон. ССР. Отделение физ.-мат. и техн. наук.) — Отпечатано на ротапринте 170 экз.

Роометс, С. **Перфокарты и их применение.** Таллин, 1963. 163 с. (Совет нар. хозяйства Эстон. ССР. БТИ.) — Библиогр. с. 125—162. Прил.: 12 л.

Сырмус, Т. И. **Теоремы типа Мерсера для двойных последовательностей.** Автореферат. Тарту, 1963. 9 с. (Тартуский гос. ун-т.) — 250 экз.

Тийт, Э. А. **О перестановке рядов.** Автореферат. Тарту, 1963. 10 с. (Тартуский гос. ун-т.) — 250 экз.

PERIOODIKAS JA KOGUMIKKUDES ILMUNUD ARTIKLID

Eesti NSV Teaduste Akadeemia Toimetised. Füüsika-matemaatika- ja tehnikateaduste seeria. Tln., 1963.

Nr. 3. Matemaatika-alased artiklid (vene k., resümeed eesti ja inglise k.):

S. Ulm. Gradiendimeetodi interpolatsioonanaloog. — P. Hanko. Releekontaktskeemide kvaasikordumatus. — K. Leppik. Ekvidistandi korrigeerinisest freespinkide programmjuhtimisel. A. Männil ja U. Nigul. Elastse plaadi pingeolukordadest sinusoidaalsete painde lainete levimisel. — U. Nigul. Lambi võrrandi juurtest plaadi keskpinna suhtes antisümmeetrilise deformatsiooni puhul.

Nr. 4. Matemaatika-alased artiklid (vene k., resümeed eesti ja inglise k.):

M. Levin. Mõnede parimate kvadratuurvalemite leidmine. — S. Ulm. Newtoni interpolatsioonivalemiga lineariseerimisel põhinevatest mittelineaarse võrrandi lahendamise iteratsioonimeetoditest. — R. Jürgenson. Diferentsimeetodi veahinnangust mistahes järku diferentsiaalvõrrandite rajaülesannete lahendamisel. — T. Siimut. Ekvidistantidele üleminekut võimaldav interpolaator.

Eesti NSV Teaduste Akadeemia Füüsika ja Astronoomia Instituudi uurimused. Trt., 1963.

Nr. 22. Matemaatika-alased artiklid (vene k., resümeed inglise k.):

Пятидесятилетие академика Харальда Петровича Кереса. — Х. Керес. О принципах эквивалентности и относительности. — А. Коппель. О точных аксиально симметричных статических решениях уравнений Эйнштейна, зависящих от одной координаты. — А. Айнсаар, И. Отс, Х. Ыйглане. Группа преобразований Паули- Фирца и лагранжианы четырехфермионного взаимодействия. — В. Лооритс, Х. Ыйглане. Группа преобразований Паули-Фирца и лагранжианы четырехбозонного взаимодействия (случай 5-рядного представления). — А. Круусмаа, П. Мюрсепп. К устойчивости короткой цилиндрической оболочки.

Eesti Põllumajanduse Akadeemia teaduslike tööde kogumik. Trt., 1963.

Nr. 25. Matemaatika-alased tööd (vene k., resümeed eesti ja inglise või saksa k.):

H. Vallner. Tugedest üleulatuvate servadega rõngasplaatide kandevõimest. — A. Ruubel. Teistkordsete projektsioonide kompleksjoonised. — J. Gabovitš ja E. Tamme. Algebraliste võrrandite ligikaudsest lahendamisest. — J. Gabovitš. Aritmeetilisgeomeetriliste ridade summeerimisest. — J. Gabovitš. Tetraeedri ruumala mõningate tema elementide funktsioonina. — Я. Габович. Таблица некоторых новых определенных интегралов.

Loodus ja matemaatika. 3. Trt., 1963. (Loodusuurijate Selts Eesti NSV Teaduste Akadeemia juures. Täppisteaduste sektsiooni toimetised.)

Matemaatika-alased artiklid:

P. Kard. Kinemaatilised [illegible] spetsiaalses relatiivsusteoorias. A. Sapar. Üldistatud loogika[illegible] A. Humal. Matemaatika [illegible] konna arenemises ja matemaatika ajaloo periodiseerimisest. — G. Kangro. Kaasaegse algebra küsimustest. — L. Võhandu. Matemaatilise uurimismeetodi rakendusvõimalustest bioloogias. — E. Tamme. Iteratsioonimeetodite kasutamine võrrandite ligikaudseks lahendamiseks. — Ü. Lumiste. Liikumiste osast geomeetrias. — A. Ruubel. Projektsiooni mõiste üldistamisest kujutavas geomeetrias. — O. Prinits. Matemaatika õpetamise reformimistaotlusi möödunud sajandi lõpul ja käesoleval sajandil.

Matemaatika. Metoodiliste artiklite kogumik. I. Tln., 1963. 63 lk. (ENSV Ministrite Nõukogu. Riiklik Kõrgema ja Kesk-erihariduse Komitee. Teaduslikmetoodiline Kabinet.)

Sisu:

H. Espenberg. Tarvilikkus ja piisavus. — Ü. Kaasik. Täielik induktsioon. — Ü. Kaasik. Ühendid. — J. Gabovitš. Horneri skeem. — E. Tamme. Algebraliste võrrandite ratsionaallahendite leidmine. — H. Silling. Rohkem tähelepanu kordamisele!

* *

Agur, U. Elektronanaloogarvutite kasutamise alad. — «Tehnika ja Tootmine», 1963, nr. 9, lk. 32—36.

Delone, B. Matemaatika ja kosmos. — «Tehnika ja Tootmine», 1963, nr. 4, lk. 31.

Depman, J. Loogiliste võrrandite lahendamine. — «Nõukogude Kool», 1963, nr. 8, lk. 611—616; nr. 9, lk. 678—681; nr. 10, lk. 794—797.

Espenberg, H. Huvitavate omadustega joontest. — «Tehnika ja Tootmine», 1963, nr. 2, lk. 38.

Espenberg, H. Mõnda neljamõõtmelisest ruumist. — «Tehnika ja Tootmine», 1963, nr. 11, lk. 31—32.

Espenberg, H. Ühest arvuteoreetilisest probleemist. [Waringi probleemist.] — «Tehnika ja Tootmine», 1963, nr. 5, lk. 23.

Kareda, A. Arvutuslükati sõpradele. [Rööbiti ühendatud takistite kogutakistuse arvutamise võimalustest arvutuslükatiga.] — «Tehnika ja Tootmine», 1963, nr. 8, lk. 30—31.

Kareda, A. Vestleme analoogarvutist. — «Tehnika ja Tootmine», 1963, nr. 1, lk. 33—34.

Karro, E. Kui puudub mall. — «Tehnika ja Tootmine», 1963, nr. 10, lk. 23.

Kondratov, A. Arvud intuitsiooni asemel. — «Tehnika ja Tootmine», 1963, nr. 8, lk. 29—30; nr. 9, lk. 16—17; nr. 10, lk. 21—22.

Koppel, A. Veel kord siit ja sealt. [Huvitavatest matemaatikaprobleemidest.] — «Tehnika ja Tootmine», 1963, nr. 2, lk. 36—37.

Linde, K. Vestleme nomograafiast. — «Tehnika ja Tootmine», 1963, nr. 6, lk. 30—33; nr. 7, lk. 22—24; nr. 12, lk. 34—36.

Malbahhov, E. Matemaatika võitluses kvaliteedi eest. — «Tehnika ja Tootmine», 1963, nr. 3, lk. 30—32.

Prinits, O. Siit saab täppisteadlaste pere täiendust. [Täppisteaduste olümpiaadist Eesti NSV-s.] — «Nõukogude Kool», nr. 7, lk. 545—548.

Puusepp, E. Kindlamaks tootmise juhtimine. [Tartu Aparaaditehase kogemusi matemaatiliste meetodite ja elektronarvutustehnika kasutamisel.] — «Tehnika ja Tootmine», 1963, nr. 9, lk. 3—4.

Raia, E. Matemaatika ja küberneetika ehituses. — «Tehnika ja Tootmine», 1963, nr. 5, lk. 28—30.

Salu, M. Matemaatikute töömailt. [Matemaatika rakendusvõimalustest rahvamajanduses.] — «Tehnika ja Tootmine», nr. 6, lk. 29—30.

Suurte raadiustega kaarte joonestamine. — «Tehnika ja Tootmine», 1963, nr. 12, lk. 36.

«Sõnakuulelik» elektronarvuti. — «Tehnika ja Tootmine», 1963, nr. 3, lk. 32.

Telgmaa, A. Üks matemaatika õpetamise elule lähenemise teedest. — «Nõukogude Kool», 1963, nr. 3, lk. 211—215. — Bibliogr. 5 nim.

Tulik, P. Mõnda algarvudest. — «Tehnika ja Tootmine», 1963, nr. 4, lk. 32—33.

Usai, M. Matemaatilise mõiste kujunemine. — «Nõukogude Kool», 1963, nr. 1, lk. 23—28; nr. 5, lk. 373—377.

Uus, T. Kas on täiesti ümmargune? — «Tehnika ja Tootmine», 1963, nr. 9, lk. 16.

Vaher, L. Perfokaardid tõuaretustöös. [Veise boniteerimismaterjalide läbitöötamisest Rakvere masinarvutusjaamas.] — «Sotsialistlik Põllumajandus», 1963, nr. 24, lk. 1125—1128.

Tuletame lugejaile meelde, et lahendused tulevad ära saata poolteise kuu jooksul pärast ülesannete ilmumist järgmisel aadressil: Tartu, Eesti Põllumajanduse Akadeemia, matemaatika kateeder, H. Espenberg. Seejuures varustage ümbrik märgusõnaga «Ülesanded». Lahenduste saatmisel pole nõutav, et oleksid lahendatud kõik ülesanded; võib piirduda ka üksikute väljavalitud ülesannete lahendamisega. Lugejate endi poolt koostatud ülesanded käesolevas rubriigis avaldamiseks palume samuti saata ülalmärgitud aadressil.

A. Ülesandeid elementaarmatemaatikast

1. Minu ja mu venna vanuste summa on 63. Praegu olen ma kaks korda vanem, kui vend oli siis, kui mina olin nii vana, nagu vend on praegu. Leida meie vanused.

2. Kolmekohalise arvu ruut võrdub tema ristsumma viienda astmega. Leida see arv.

3. Kolmnurga külgede pikkused moodustavad aritmeetilise progressiooni. Tõestada ,et kolmnurga siseringjoone raadius võrdub kolmandikuga ühest kõrgusest.

4. Lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} x+y-z=7 \\ x^2+y^2-z^2=37 \\ x^3+y^3-z^3=1 \end{cases}$$

5. Ringjoonde on joonestatud kolmnurk ABC. Punktis B on tõmmatud ringjoonele puutuja. Leida kolmnurga tipust B tõmmatud kõrguse pikkus, kui on teada, et punktide A ja C kaugused puutujast on vastavalt p ja q.

B. Ülesandeid kõrgemast matemaatikast

1. Tõestada, et iga positiivse reaalarvu a (kus $a \neq 1$) ja naturaalarvu n puhul kehtib võrratus

$$\frac{a^{2n+2}-1}{a(a^{2n}-1)} > \frac{n+1}{n}.$$

2. Arvutada

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2^2+2\cdot 3^2+\ldots+n(n+1)^2}{1^2\cdot 2+2^2\cdot 3+\ldots+n^2(n+1)}.$$

3. Leida kolmnurga suurima nurga vähim võimalik väärtus, kui kolmnurga küljed a, b ja c rahuldavad tingimust

$$a^3=b^3+c^3.$$

4. Mitu naturaalarvulist lahendit on võrrandil

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{m},$$

kus m on naturaalarv?

UUSI TULEMUSI ARVUTEOORIAS

T. Roosinupp[1]

Imaginaararvusid ei ole olemas.

Tõestus: Kõik niinimetatud imaginaararvud on esitatavad kujul $a \cdot i$, kus a on reaalarv ja i tähistab imaginaarühikut $\sqrt{-1}$. Pealkirja väite tõestamiseks on seega täiesti küllaldane, kui tõestame, et imaginaarühik on tegelikult hoopis reaalarv, vastupidi üldiselt levinud kahetsetavale eksiarvamusele. Tõestamiseks lähtume vaieldamatult õigest võrdusest.

$$\sqrt{-x} = i \cdot \sqrt{x}$$

ja korrutame selle mõlemaid pooli suurusega $\sqrt{-1}$. Juurte korrutamise tuntud eeskirja rakendades saame

$$\sqrt{x} = i \cdot \sqrt{-x} = i \cdot (i \cdot \sqrt{x}) = i^2 \cdot \sqrt{x}.$$

Nüüd pole enam muud vaja, kui jagada saadud võrduste ahela esimene ja viimane liige suurusega $\sqrt{x}$, ning õige tulemus ongi käes: $i^2 = 1$, järelikult $i = \sqrt{1}$ ja on seega reaalarv, **m.o.t.t.**

Veerand on rohkem kui pool.

Tõestus: Ka uskumatud, kes ei taha pealkirja väitega nõustuda, on sunnitud möönma, et mingi suuruse kahekordne on alati suurem kui ühekordne. Seega kehtib

$$2 \cdot \log a > \log a$$

ehk teisiti kirjutatult

$$\log a^2 > \log a.$$

Me võime alati võtta $a = 1/2$ ja saame sel juhul äsjasest valemist

$$\log 1/4 > \log 1/2.$$

Et aga suuremale logaritmile vastab alati suurem arv, siis loomulikult

$$1/4 > 1/2, \quad \textbf{m.o.t.t.}$$

SUITSETAJATE LOOGIKA

Oletame, et iga reisirongi puhul saab anda jaatava või eitava vastuse järgmisele neljale küsimusele:

A. Kas suurem osa rongis viibivatest suitsetajatest sõidab suitsetajatele määratud vaguneis?

B. Kas suurem osa rongis viibivatest mittesuitsetajatest sõidab suitsetajatele määratud vaguneis?

C. Kas suitsetajatele määratud vaguneis on suitsetajaid rohkem kui mittesuitsetajaid?

D. Kas mittesuitsetajatele määratud vaguneis on suitsetajaid rohkem kui mittesuitsetajaid?

Sõltuvalt vastustest nendele küsimustele saab igale rongile omistada vastava tunnuse; näiteks tunnusega $A\bar{B}C\bar{D}$ tähistame rongi, mille puhul küsimustele A ja C saadakse jaatav vastus ning küsimustele B ja D eitav vastus.

Mitu erinevate tunnustega rongi saab üldse olemas olla? (Hoiatus: ärge leppige vastusega 16, sest see on vale!)

---

[1] Artikli autoriks on noor ja andekas teadlane, MRTUI (Matemaatika Reformimise Teadusliku Uurimise Instituudi) aspirant Tõeleid Roosinupp; kuna autor soovib kindlustada oma prioriteeti nende põhjapanevate ja kogu matemaatikas täielikku pööret tekitavate tulemuste suhtes, siis palus ta fikseerida, et artikkel on toimetusele esitatud 8. veebruaril 1964. a. — *Toim.*

SISUKORD

Тартуский государственный университет
г. Тарту, ул. Юликооли, 18

МАТЕМАТИКА И СОВРЕМЕННОСТЬ. II.

Воспомогательные материалы для преподающих и изучающих математику

Toimetaja E. Sarv
Korrektor E. Võhandu

Ladumisele antud 7. III 1964. Trükkimisele antud 23. IV 1964. Paber 60 × 90, 1/16. Trükipoognaid 6 + 1 kleebis. Arvestuspoognaid 6,53. Trükiarv 1500. MB-02934. Tellimise nr. 2066. Hans Heidemanni nim. trükikoda. Tartu, Ülikooli t. 17/19. II

Hind 33 kop.