0000001

Matemaatika ja kaasaeg

1000000

TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

MATEMAATIKA
JA
KAASAEG

POPULAARTEADUSLIK KOGUMIK I

TARTU 1963

SAATEKS

Mitmesuguste teaduste ning kiiresti areneva tehnika nõuded ühelt poolt, arvutuslike võimaluste tohutu suurenemine teiselt poolt põhjustavad kaasajal matemaatika väga kiiret arengut nii sügavuti kui ka laiuti. Matemaatika meetodid on tunginud paljudesse varem mittematemaatiliseks peetud teadustesse ning saanud lahutamatuks osaks tootmistegevuses.

Seetõttu nõuab rahvamajandus üha rohkem matemaatikuid, kuid ka matemaatika meetodeid valdavaid teiste alade spetsialiste. Matemaatika tundmine ning matemaatilise mõtlemisviisi omandamine muutub igale töötajale järjest vajalikumaks.

Üha suurema hoo saavutavad ka elanikkonna teaduslikud harrastused. Üheks olulisemaks eelduseks selle juures on populaarteadusliku kirjanduse olemasolu.

Kahjuks puudub meie vabariigis populaarteaduslik matemaatika-alane perioodiline väljaanne, milles oleks võimalik avaldada ülevaateartikleid, metoodilisi märkmeid, kroonikat ja milles saaks retsenseerida ning annoteerida ilmunud kirjandust, vahetada töökogemusi jms. Seda lünka püüab kas või osaliselt täita käesolev ühiskondliku töö korras koostatud populaarteaduslik kogumik «Matemaatika ja kaasaeg», mis loomulikult ei jää viimaseks selletaoliseks. Kogumiku lugejaskonnaks on mõeldud keskkooliõpilased, üliõpilased, õpetajad, insenerid, aga samuti ka teadlased.

Käesolev kogumik seab oma ülesandeks süvendada noortes huvi matemaatika vastu, tutvustada matemaatika meetodeid mittematemaatikutele, pakkuda uusi ideid neile, kes töötavad matemaatika alal.

Ainest hõlpsama ülevaate saamiseks on suurem osa materjalist paigutatud vastavatesse rubriikidesse.

Üldküsimustest avaldame matemaatikaga seotud filosoofilisi käsitlusi, samuti mõningaid matemaatika teooriatesse ja rakendustesse puutuvaid materjale.

Rubriik «Küberneetika» on määratud matemaatika ühe kõige kaasaegsema piirdeala probleemide tutvustamiseks. Kogumiku üldist eesmärki arvestades tulevad siin avaldamisele eeskätt *sellised küberneetika-alased materjalid, mis nii või teisiti on seotud matemaatikaga. Neile täienduseks hakkab edaspidi eraldi rubriigina ilmuma veel «Majandusmatemaatika».*

Rubriik «Täiendusi koolimatemaatikale» käsitleb probleeme, mis on jõukohased kooliõpilastele, kuid pakub ühtlasi lisamaterjali ka õpetajatele ning kõrgemate koolide üliõpilastele. Samuti avaldatakse seal mitmesuguseid metoodilisi kirjutisi abiks õpetajatele.

Rubriik «Matemaatika ajaloost» toob eelkõige materjale matemaatika arengu kohta Eestis, kuid ka mõningaid üldisema iseloomuga käsitlusi.

Rubriigis «Matemaatiline päevakaja» valgustatakse tähtsamaid sündmusi matemaatikaelust, piirdudes põhilises osas ainult Eesti NSV-ga, ning tuuakse ära ka kroonikat.

Peale selle on eraldatud iseseisvateks rubriikideks «Bibliograafia» ja «Ülesandeid», millest esimene püüab anda ülevaadet olulisematest trükis ilmunud matemaatika-alastest materjalidest.

Lisaks nimetatud põhirubriikidele on kogumikus veidi ruumi eraldatud ka «vahepaladele», mis sisaldavad huvitavaid ütlemisi matemaatikast, matemaatilisi nalju jms.

Käesolev kogumik on koostatud peamiselt Tartu kõrgemate koolide õppejõudude poolt. Ühiskondlik toimetuskolleegium loodab aga edaspidi kaastööd ka Tallinna õppe- ja teaduslike asutuste töötajailt ning vabariigi matemaatikaõpetajate arvukalt perelt. See muudaks väljaande mitmekesisemaks, huvitavamaks ja kasutoovamaks. Teretulnud on samuti ettepanekud sisulise ja välise kujunduse kohta, uute rubriikide avamise kohta jne.

Kõik materjalid ja ettepanekud palume saata aadressil: Tartu, V. Kingissepa 16, TRÜ algebra ja geomeetria kateeder.

HULGATEOREETILISTEST PARADOKSIDEST

E. Jürimäe

1. Kvalitatiivne muutus matemaatikas

Matemaatika ajaloost on tuntud mitmed perioodid, kus matemaatika arenes niivõrd kiiresti, et tema aluste põhjalikum läbitöötamine sel perioodil osutus võimatuks. Võib-olla kõige reljeefsemaks näiteks selles suunas on diferentsiaal- ja integraalarvutuse loomine. Nagu teada, loodi see Newtoni ja Leibnizi poolt XVII sajandi teisel poolel. Diferentsiaal- ja integraalarvutus andis matemaatikale väga laialdase rakendusvälja ning juhtis matemaatikute peamise tähelepanu just nendele rakendustele. Et need rakendusalad olid äärmiselt köitvad, siis ei jäänud aega arvutusele soliidse baasi rajamiseks. Sellise baasi vajalikkus sai täielikult selgeks alles XIX sajandi alguses, kui hakkasid ilmnema mitmed raskused. Seoses nendega on mõningas osas kirjanduses seda perioodi nimetatud matemaatika aluste kriisiks. Selle «kriisi» ületamiseks näitas Cauchy XIX sajandi 30-ndatel aastatel, kuidas mittekorrektset infinitesimaalarvutust asendada soliidse piirväärtuste teooria kasutamisega. Sama sajandi 60-ndatel ja 70-ndatel aastatel anti (Weierstrassi jt. poolt) meetod kogu analüüsi ja funktsiooniteooria «aritmetiseerimiseks». Nüüd oli vaja luua igati soliidne teooria aritmeetikale. Seda ka tehti, ja nimelt reaalarvude teooria loomisega Dedekindi ja Cantori poolt. Kogu tehtud töö oli niivõrd edukas, et 1900. a. võis Poincaré ühes oma tervituskõnes märkida: «Tänaseks jääb analüüsi ainult täisarv ja lõplik või lõpmatu täisarvude süsteem ... Matemaatika on aritmetiseeritud ... . Me võime täna öelda, et absoluutne rangus on saavutatud.» Nendest, selle ajastu ühe silmapaistvama matemaatiku sõnadest võime välja lugeda, kuivõrd suur tähtsus oli analüüsi aluste rajamisel XIX sajandil. See oli tsentraalne probleem kogu sajandiks ning selle lahendamist peeti saavutuseks, mille järel võis kergendatult ohata. Kuivõrd selline kergendusohe oli enneaegne, seda näeme järgnevas.

Reaalarvude teooria loomine viis teatud ratsionaalarvude klasside või hulkade vaatlemisele. Matemaatikasse tuli uus objekt — hulk. Siin oli tegemist konkreetsete ja küllalt selgepiiriliste hulkadega. Hoopis keerulisema struktuuriga hulkade vaatlemisele viisid funktsioonide esitised trigonomeetriliste ridade abil. Trigonomeetrilise rea koonduvuspiirkonnaks on vägagi keerulise struktuuriga punktihulk. Juba Lipschitzi töös «Suvaliste funktsioonide, peamiselt nende, millel on lõplikus piirkonnas lõpmata palju maksimume ja miinimume, arendustest trigonomeetrilisse ritta» (1864) vaadeldi väga mitmesuguseid hulki, toodi sisse kõikjal tiheda ja eikuskil tiheda hulga mõiste ning kasutati tegelikult hulga kuhjumispunkti mõistet. Alates Cantori töödest (1870—1872), mis olid pühendatud funktsiooni trigonomeetrilisse ritta arendamise ühesuse probleemi käsitlemisele, muutus punktihulkade omaduste uurimine otseseks vajaduseks. Punktihulkade uurimine muutub iseseisvaks matemaatika osaks XIX sajandi teise poole keskel, eeskätt tänu Cantori töödele. Ühtlasi muutuvad aga hulgateooria mõisted ja meetodid funktsioonide omaduste uurimise vahendiks.

Paralleelselt punktihulkade teooriaga loodi ka üldine hulgateooria. Viimane arenes esmajoones punktihulkade teooria ja funktsioonide kasvu uurimise baasil. Tuli ilmsiks, et on vaja eristada mitut liiki lõpmatust. Selgus, et üksnes naturaalarvude jadast ei piisa. Oli vaja sisse tuua transfiniitse arvu mõiste.

Seoses kõigi eespool nimetatud ja ka paljude teiste XIX sajandi matemaatiliste uurimustega tekkis kvalitatiivselt uus nähtus — abstraktne loogiline meetod. Viimast iseloomustab see, et eelnevatele ajastutele omane formaalne arvutuslik moment asendus suurel määral vahetute loogiliste arutlustega. See meetod saigi «kaassüüdlaseks» abstraktsete hulkade üldise teooria rajamisel, sest abstraktsete hulkade elementideks on suvalise iseloomuga indiviidid, mistõttu neile ei ole rakendatavad formaalsed matemaatilised operatsioonid. Abstraktne loogiline meetod leidis eriti laialdast kasutamist aritmeetika aluste uurimisel Frege ja Dedekindi töödes, kus tegelikult on kasutatud sama abstraktset loogilist meetodit, mida kasutas Cantor abstraktsete hulkade omaduste uurimisel. On huvitav märkida, et kõik nimetatud tööd ilmusid peaaegu ühel ja samal ajal (1883—1887).

Loodud üldisele hulgateooriale sai esialgu matemaatikute ja filosoofide hulgas osaks küllaltki jahe vastuvõtt. Sajandi viimasel aastakümnel muutus aga hulgateooria väga populaarseks. Algas tema vägagi laialdane kasutamine nii analüüsis kui ka geomeetrias. Siis aga (1895) ilmnes esimene vastuolu hulgateoorias. Avastati üks paljudest paradoksidest, mis ka kohe avaldati. Et vastuolu tekkis küllaltki hästi arendatud hulgateooria piirimail, siis ei pööratud sellele erilist tähelepanu. Loodeti isegi, et kerge parandus mõnede teoreemide tõestustes selles valdkonnas, kus paradoks ilmsiks tuli, võib parandada kogu tekkinud olukorda; seda oli matemaatikas varemgi juhtunud. Kui aga 1902.—1903. a. esitas oma paradoksi Russell, siis sai kõigile selgeks, et üldise hulgateooria alustes on midagi korrast ära. Et Russelli paradoks on formuleeritav ka kõige põhilisemate loogika mõistete abil, siis tundus mõnele isegi, et loogika on hädaohtu seatud.

On huvitav vaadelda, kuidas uues situatsioonis tundsid end üksikud suured matemaatikud. Näib, et vapustatud olid kõik, kes olid seotud sajandivahetuse põhiliste probleemidega. Dedekind, kes oma töös «Mis on ja mida tähendavad arvud» kasutas hulga mõistet selle täielikus Cantori mõttes, et tõestada lõpmatu hulga olemasolu, lükkas edasi oma töö uue väljaande avaldamise, mille alused ta arvas olevat purustatud. Samavõrd traagiline oli ka Frege saatus, kes vahetult enne Russelli paradoksi avaldamist oli pannud punkti oma peatööle «Aritmeetika põhiseadused». Paljud matemaatikud olid just hakanud tunnustama hulgateooriat võrdväärsena teiste matemaatiliste distsipliinidega. Pärast esimeste paradokside ilmumist muutsid nad järsult oma suhtumist. Nende hulgas võiks mainida Poincaré'd, kes varem aitas kaasa hulgateooria propageerimisele. Kui aga pärast 1902. a. pöörduti tema poole palvega, et ta aitaks hulgateooriat rehabiliteerida, siis kohtles ta seda ettepanekut kui tema vastu suunatud pilget. Mis puutub Cantorisse endasse, siis ta küll ei kaotanud usku hulgateooria jõusse, selle «naiivselt» laia ulatusse, kuid ka tema oli võimetu tekkinud paradokside vastu.

Enamik matemaatikuist jäi aga nii-öelda neutraalsele pinnale. Nad ei omistanud erilist tähtsust «kunstlikult konstrueeritud» paradoksidele. Sellele perioodile matemaatikas on üldse iseloomulik mõningat ebamugavust tekitanud nähtuste ignoreerimine. Nii näiteks loeti «kunstlikeks» ka niisugused pidevad funktsioonid, millel pole tuletist, ning püüti neid vaatluse alt välja jätta. Nimetatud asjaolu on mõnel määral arusaadav, kui arvestada seda, et tol ajal omas tugevat kandepinda seisukoht, mille järgi matemaatiliste teooriate põhilist eesmärki nähti nende praktilises rakendamises. Vajadus selliste matemaatiliste teooriate järele, mis on loodud puhtalt matemaatika enese otstarbeks, oli ju tekkinud alles pool sajandit tagasi (eeskätt Lobatševski ja Cantori tööde põhjal). XIX sajandi lõpul saabus aga moment, kus matemaatilise abstraktsiooni aste tõusis niivõrd kõrgele, et matemaatilistes uurimustes toimus kvalitatiivne muutus. Oli vaja erilist loogilist rangust — aluste sügavat läbitöötamist. Praktika kinnitus ei saanud enam olla tõe kriteeriumiks, sest tekkisid niisugused matemaatilised teooriad, mille loomisest otsese praktika kontrollini on väga pikk tee. Seda arvestades ei või nüüd enam nõustuda teadlastega, kes ignoreerisid «kunstlikult» konstrueeritud paradokse ettekäändel, et need ei puudutanud matemaatika peamisi rakendusalasid — analüüsi ja geomeetriat. Kuna aga sajandivahetusel oli selline olukord alles kujunemisel, siis enamiku seisukoht — loobuda paradokside kui «kunstlike nähtuste» vaatlemisest — oli täiesti arusaadav. Pealegi ei ole hulgateoorias kuigi raske piirduda parajasti niipaljuga, et me ei jõuagi mingite paradoksideni, sest paradoksid tekkisid alati võimalike ekstremaalsete üldistuste piiril. Viimase asjaoluga on ka seletatav, et räägiti ikka üksnes paradoksidest või siis antinoomiatest, mitte aga vastuoludest.

Kõnesolevad paradoksid on avaldanud võrdlemisi suurt mõju matemaatika arengule viimase 50 aasta jooksul. Seda aitavad ehk mõningal määral iseloomustada ühe küllaltki tuntud autori, matemaatika aluste uurija Hermann Weyli sõnad: «Me oleme praegu vähem kui kunagi varem kindlad matemaatika (ja loogika) lõplike aluste suhtes. Nagu igaühel ja igal asjal tänapäeva maailmas, on ka meil oma «kriis». Meil on ta kestnud ligikaudu viiskümmend aastat. Väliselt ei näi ta segavat meie igapäevast tööd, kuid siiski, mis minusse puutub, siis tunnistan, et tal on olnud tunduv praktiline mõju minu matemaatilisele tegevusele: ta suunas minu huvisid aladele, mida ma vaatlesin suhteliselt «kindlatena», ja ta on mind juhtinud entusiasmile ja otsustele, mida ma olen järginud oma uurijatöös.» Tähelepanuvääriv on nende sõnade juures veel see, et nad pärinevad aastast 1946.

2. Paradoksid

Käesolevas vaatleme ainult mõningaid tüüpilisemaid ning tuntumaid paradokse, mis on esile kerkinud hulgateooria aluste uurimisel. Me ei esita neid nende ilmumise kronoloogilises järjekorras, vaid püüame nad anda niisuguses järjekorras, et neid oleks kergem jälgida.

(A) Russelli paradoks

On hulki, näit. õpilaste hulk klassis, mis ei ole iseenda elementideks. Vaadeldava hulga elemendiks on küll iga üksik õpilane, kuid kogu klass ei ole selle hulga element. Mitmete teiste hulkade puhul aga ei ole sugugi nii lihtne otsustada, kas hulk ise on enda elemendiks või mitte.

Mõningatel juhtudel on seevastu ilmne, et hulk on iseenda elemendiks. Triviaalseks näiteks on siin kõigi hulkade hulk.

Lähtudes eelöeldust on mõtet vaadelda kõiki hulki, mis ei ole iseenda elemendiks. Nimetame selliseid hulki «korrapärasteks». Tähistame *kõikide* korrapäraste hulkade hulga sümboliga S. Küsime, kas S on korrapärane või mitte? Oletame esmalt, et S on korrapärane. Siis S peab kuuluma hulka S (S oli *kõikide* korrapäraste hulkade hulk), siis aga ei saa S enam olla korrapärane. Oletame nüüd, et S ei ole korrapärane, s. t. ta *ei tohi* kuuluda meie poolt vaadeldavasse *kõikide* korrapäraste hulkade hulka. Siis on aga S korrapärane, kuna ta ei sisalda ennast elemendina. Kõike seda arutelu kokku võttes saame paradoksaalse tulemuse: *S on S parajasti siis, kui ta ei ole S.*

Selline ongi paradoks, millest oli juttu juba eelmises osas, kus märkisime tema erakordselt suurt tähtsust matemaatika arengule sajandivahetusel. Selle paradoksi avastas Russell 1902. a., millest ta kirjutas ka Fregele. Trükis avaldas ta paradoksi 1903. a. Samaaegselt jõudsid Göttingenis sellele paradoksile Zermelo ja tema õpilased. Nemad aga oma avastust ei publitseerinud.

Et Russelli paradoks kasutab küllaltki komplitseeritud mõistet — kõikide «korrapäraste» hulkade hulk, siis püüti seda paradoksi formuleerida lihtsamate mõistete abil. Vaatleme neist mõnda tuntumat ning huvitavamat [1].

(A_1) Paradoks habemeajajast

Vaatleme mingis külas elunevat meest, kes (üldise arvamuse kohaselt) ajab habet *ainult* neil ja *kõigil* neil selle küla elanikel, kes ise endal habet ei aja. Tähistame selle mehe tähega h. Kas h ajab enesel habet? Oletame, et h ajab enesel habet. Sel juhul tekib vastuolu tingimuses esineva sõnaga «ainult». Seega h ei aja enesel habet. Oletame nüüd, et h ei aja enesel habet. Siis aga saame vastuolu tingimuses esineva sõnaga «kõigil». Järelikult h ajab enesel habet. Kokkuvõttes: *h ajab enesel habet parajasti siis, kui ta ei aja enesel habet.*

Selline on üks eelnevas vaadeldud paradoksi populaarsetest variantidest, mille Russell andis 1918. a. Jälgides tähelepanelikult seda paradoksi näeme, et pealtnäha küllaltki mõistlik kriteerium — ajada habet ainult neil ja kõigil neil küla elanikel, kes ise endal habet ei aja — viib meid üllatavale järeldusele: niisugust tingimust ei saa rahuldada ükski indiviid, s. t. seda ei eksisteeri. Me nägime, et loogikast tuntud *välistatud*

[1] Mõningaid teisi variante Russelli paradoksile võib asjasthuvitatu leida raamatust Клини, С. К., Введение в метаматематику. М., 1957, lk. 40.

kolmanda seaduse kasutamine ei olnud siinkohal õigustatud. Nähtuse ja tema eituse kõrval oleks tulnud püstitada kolmas võimalus: kui eksisteerib, siis . . . .

(A_2) Russelli paradoksi loogikaline variant

Anname siinkohal veel ühe Russelli poolt esitatud variandi, mis näitab, et Russelli paradoks ei ole puhtmatemaatiline; järelikult langeb ära võimalus, et see paradoks on ehk tingitud vaid mõnedest hulga mõiste ebaharilikest iseärasustest.

Me võime uurida teatud omadust sellelt seisukohalt, kas tema määramiseks kasutatakse teda ennast või mitte. Omaduse «olla punane» määramisel me näiteks ei kasuta seda omadust ennast sellest ajast alates (tingimus «olla»), kui punane on kindlasti mittepunane. Omaduse «olla abstraktne» määramisel kasutatakse aga teda ennast. Omadus «olla konkreetne» on samuti abstraktne, mitte aga konkreetne. Omadust, mille määramiseks ei kasutata teda ennast, nimetame «impredikaatseks». Kui nüüd küsida, kas «olla impredikaatne» on impredikaatne omadus või mitte, siis jõuame jälle paradoksaalsele järeldusele: impredikaatne on impredikaatne parajasti siis, kui ta ei ole impredikaatne.

Selle paradoksi kõige pealiskaudsemgi analüüs viib meid järeldusele, et on vaja lähemalt uurida niisuguseid mõisteid, mille määramiseks kasutatakse neid endid. Arendades seda suunda jõudis Russell nn. tüüpide teooriani, mis on andnud palju materjali nii töödele matemaatika aluste uurimisel kui ka filosoofias.

(B) Cantori paradoks

See paradoks rajaneb hulga võimsuse mõistel. Viimane üldistab elementide arvu mõiste lõpliku hulga juhult mis tahes hulga juhule. Kui vaadelda kolmeelemendilist hulka $\{a, b, c\}$, siis sellel hulgal on 8 osahulka: $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$ ning lisaks neile tühi hulk. Analoogiliselt sellele näitele kehtib Cantori poolt arendatud üldises hulgateoorias teoreem, et antud hulga U kõikide osahulkade hulk CU on suurema võimsusega kui antud hulk. Teiselt poolt on teada, et antud hulga osahulga võimsus ei saa olla suurem antud hulga võimsusest, nii nagu lõpliku hulga osahulga elementide arv ei saa olla suurem antud hulga elementide arvust.

Vaatleme nüüd kõigi hulkade hulka K. Hulga K kõikide osahulkade hulk CK on eelöeldu põhjal suurema võimsusega kui hulk K. Teiselt poolt on CK ise üks osahulk kõigi hulkade hulgast K, seega ei ole tema võimsus suurem hulga K võimsusest. Saadud vastuolu kannabki Cantori paradoksi nime.

See paradoks oli Cantorile tuntud juba 1899. a., kuigi ta avaldati alles 1932. a. Viimane asjaolu on eriti tähelepanuväärne, sest see näitab veelkordselt, et paradokse ei tahetud algul tõsiselt võtta, vaid neist loodeti mingil viisil vabaneda. Cantor ise kuulus ka selliselt mõtlevate matemaatikute hulka.

Olgu veel märgitud, et vaadeldav paradoks oli juba 1901. a. tuntud ka Russellile, kes selle mõjul hakkas konstrueerima oma paradoksi, mis on mõnevõrra lihtsam, kuna ei vaja selliseid spetsiaalseid mõisteid, nagu seda on osahulga ja hulga võimsuse mõisted, samuti ka mitte eespool mainitud teoreeme hulkade võimsuste kohta.

(C) Richardi paradoks

Richard avaldas oma paradoksi 1905. a. Paradoks on eriti huvitav selle poolest, et ta on nagu teatavaks karikatuuriks Cantori diagonaalprotsessi meetodile (selle meetodiga tõestatakse näiteks kõigi 0 ja 1 vahel asuvate reaalarvude hulga mitteloenduvus). Ka sellest paradoksist on tuntud väga mitmed variandid. Siinkohal esitame ühe neist.

Vaatleme kõiki selliseid reaalarve 0 ja 1 vahel, mida võib määrata ülimalt 50 eestikeelse sõnaga. Näiteks «null koma seitse», «kuupjuur arvust null koma kakskümmend neli», «vähim arvudest, mis täidab tingimust, et tema numbrite ruutude summa korrutis arvuga null koma üks võrdub arvuga null koma kolm» jne.

Vastavalt loenduvate hulkade (s. t. jadana esitatavate hulkade) kohta teadaolevatele tulemustele on selge, et selliseid arve ei ole rohkem kui loenduv hulk. Korraldame nad jadana R. Iseloomustame nüüd reaalarvu r kui sellist reaalarvu 0 ja 1 vahel, mille k-s koht kümnendsüsteemis on hulga R k-nda elemendi k-ndale kohale tsükliliselt järgnev number (siin on mõeldud, et «1» järgneb tsükliliselt numbrile «0», «2» — numbrile «1» jne., ning «0» — numbrile «9»). Selline reaalarv r on määratud vähem kui 50 eestikeelse sõnaga, kuid ta ei võrdu ühegi arvuga jadast R. Et r ei sisaldu jadas R, siis ta aga ei tohiks olla määratud vähem kui 50 eestikeelse sõnaga. Jõudsime jällegi paradoksaalsele tulemusele.

(D) Grellingi paradoks

1908. a. esitasid Grelling ja Nelson paradoksi, mis on teataval määral sarnane paradoksiga (A_2), kuid mis pakub siiski iseseisvat huvi.

Mõnedel eestikeelsetel omadussõnadel, nagu «eesti», «mitmesilbiline», on just seesama omadus, mida nad tähendavad. Nii on näiteks omadussõna «mitmesilbiline» tõepoolest mitmesilbiline. Teisel osal omadussõnadest, nagu «vene», «sinine», «kuum», ei ole sellist omadust. Nimetame teist liiki omadussõnu «heteroloogilisteks»; oma üllatuseks leiame, et omadussõna «heteroloogiline» on ise heteroloogiline parajasti siis, kui ta ei ole heteroloogiline.

Kõik eespool esitatud paradoksid on teatud mõttes analoogilised ühele antiikajast pärinevale paradoksile, mida tänapäeval tuntakse «valetaja paradoksi» nime all. Seda paradoksi vaatles juba VI sajandil e. m. a. Epimenides.

(E) Valetaja

Paradoksi, mida tuntakse jällegi väga mitmetes versioonides, võiks formuleerida järgmiselt. Oletame, et Peeter Pulk ütles 11. jaan. 1963. a. üheainsa lause ja ei midagi muud: «Ainus lause, mis Peeter Pulk 11. jaan. 1963. a. ütles, on vale». See lause on deklareeriv lause ning me oleme õigustatud uurima, kas ta on õige või vale. Uurimisel aga jõuame paradoksaalsele tulemusele, et nimetatud lause on õige parajasti siis, kui ta on vale.

Kuigi hulgateooria aluste ja loogika küsimuste uurimisel on esile kerkinud veel terve hulk paradokse, piirdume siinkohal esitatutega. Märgime veel, et üks osa avaldatud paradoksidest on olnud uued, teised aga kordavad sisuliselt juba tuntud paradokse või on nende lihtsustatud ja enam piiritletud variandid. Märkida tuleb ka seda, et paljud ilmunud paradoksidest ei osutunudki tõelisteks paradoksideks, vaid olid rajatud valesti mõistmisele ja eksitustele [2].

Kuidas püüda kõrbes lõvi?

(Ajakirjast «*Математическое просвещение*»)

Tavalistes matemaatikaülesannete kogudes niisugust probleemi küll ei esine, kuid püüame siiski kujutleda olukorda, et see ülesanne on antud lahendada mõnedele matemaatika tähtsamate suundade esindajatele. Olgu need tõelised fanaatikud, kes on sügavalt veendunud oma teadusala meetodite universaalses rakendatavuses. Siis me saaksime pealkirjas esitatud küsimusele umbes järgmised vastused.

---

[2] Fraenkel, A. A. and Bar-Hillel, Y., Foundations of Set Theory. Amsterdam, 1958.

Matemaatilise analüüsi spetsialist. *Olgu lõvi diameeter d. Kõrb piiratakse ruuduga, mille külje pikkuse võib lugeda ühikuks. Ruut jaotatakse neljaks võrdseks osaks ning vähemalt ühes neist peab olema lõvi. Viimase ruudu jaotame jälle neljaks ja jätkame protsessi seni, kuni saadud ruudu külje pikkus on väiksem kui 2d. Lõvi saab nüüd lõikuda mitte enam kui nelja naaberruudu külgedega, mis kokku moodustavad ruudu kaks korda suurema küljepikkusega. Kattes selle ruudu kaanega me tabamegi lõvi.*

Kirjeldatud meetod on efektiivne vaid siis, kui lõvi on liikumatu. Kuigi lõvi tabamise ülesanne pole sellega täielikult lahendatud, oleme me asja siiski taandanud kitsama probleemi lahendamisele: tabada lõvi tingimusel, et ta liigub.

Geomeetria spetsialist. *Kõrbes olev vaatleja asub ümmarguses puuris. Lõvi paikneb väljaspool puuri. Teostatakse inversioon. Siis satub lõvi puuri ja vaatleja sellest välja.*

Reaalmuutuja funktsioonide teooria spetsialist. *Peano kõvera abil kujutatakse kõrb lõigule* [0,1]. *Iga lõvi satub seejuures ülimalt loenduvasse hulka ühisosata vahemikesse. Neid vahemikke nimetame «antud lõvi karakteristlikeks vahemikkudeks». Võtame kõigi lõigul* [0,1] *paiknevate ratsionaalarvude hulga* $\{r_k\}$ *ja nummerdame selle elemendid:* $r_1, r_2, \ldots$ *See jada on lõigul* [0,1] *kõikjal tihe. Liigume mööda seda jada seni, kuni leiame esimese arvu* r_{k_1}, *mis paikneb mõne lõvi karakteristlikus vahemikus. Tähistame selle lõvi sümboliga* $Lõ_1$. *Liigume nüüd edasi mööda jada* $\{r_k\}$ *seni, kuni leiame esimese arvu* r_{k_2}, *mis paikneb mõne niisuguse lõvi karakteristlikus vahemikus, mis erineb lõvist* $Lõ_1$. *Saadud lõvi nimeks paneme* $Lõ_2$. *Nii saame regulaarse protsessi, mille abil võib efektiivselt (ilma Zermelo aksioomi kasutamata) nummerdada kõik kõrbes olevad lõvid:*

$$Lõ_1, Lõ_2, \ldots, Lõ_n, \ldots$$

Nüüd tuleb vaid $Lõ_1$ *paigutada esimesse puuri,* $Lõ_2$ *teise puuri jne.*

Topoloogia spetsialist. *Toome kõigepealt sisse mõiste «nahk». Olgu see niisuguste punktide hulk, mis on üheaegselt nii lõvi kui ka kõrbe piirpunktideks. Püstitatakse küsimus: kas võib lõvil nahk puududa? Kuid siis peab see lõvi olema mõne teise lõvi abil kõrbest eraldatud. See on tiine emalõvi klassikaline juhtum ja raskuste vältimiseks nimetame emalõvi koos temas olevate lõvidega «üldistatud lõviks». Püstitatakse küsimus: kas võib kahel lõvil olla ühine nahk? Kuid siis on kolmel piirkonnal (kõrb ja kaks lõvi) ühine rajapind ja see osutub mittejaotuvaks kontiinuumiks. Tuuakse sisse «regulaarse lõvi» mõiste. Olgu see niisugune üldistatud lõvi, mille nahk ei osutu mittejaotuvaks kontiinuumiks. Nüüd korraldame üksühese vastavuse regulaarsete lõvide hulga ja nahkade hulga vahel.*

Edasi tõestatakse, et nahk on kahemõõtmeline tsükkel. Alexanderi duaalsuse printsiibi kohaselt leidub lõvi täiendruumis kahemõõtmeline tsükkel, mis on homoloogiline nahaga. See ongi puur, milles asub antud lõvi.

Teoreetilise füüsika spetsialist. *Füüsiku seisukohalt pakuvad huvi vaid need fenomenid, mis on põhimõtteliselt vaadeldavad. Väljaspool puuri olev lõvi pole põhimõtteliselt vaadeldav, sest ta sööb vaatleja ära. Seega ei saa niisugune lõvi füüsikut huvitada ja me ei patusta teadusliku tõe vastu, kui eeldame, et lõvi paikneb puuris.*

KÜBERNEETIKA TEOREETILISI PROBLEEME [1]

A. A. Ljapunov, S. V. Jablonski

Sissejuhatus

Küberneetika on teadus juhtimissüsteemide ehituse ning juhtimisprotsesside kulgemise üldistest seaduspärasustest.

Igasugune juhtimine toimub informatsiooni edasiandmise teel, seepärast uurib küberneetika informatsiooni säilitamise, edasiandmise, töötlemise ja vastuvõtmise protsesse, meetodeid informatsiooni kodeerimiseks erinevaisse keeltesse, informatsiooni töötlemise menetlusi ning töötlemisseadmeid. Oma meetodite poolest on küberneetika täppisteadus. Vastastikuse mõju seosed ühendavad küberneetikat mitmete konkreetseid juhtimissüsteeme uurivate teadusharudega.

Küberneetika rajaneb kujutlusel juhtimisprotsesside ja juhtimissüsteemide ehituse diskreetsusest [2], püüdel eristada elementaarakte, tagasisidestust ja juhtimise hierarhiat, ning juhtimissüsteemide ehituse ja funktsioneerimise komplekssel käsitlemisel.

1. Juhtimissüsteemi mõiste

Üldine juhtimissüsteemi mõiste võimaldab kirjeldada ja uurida oluliselt laiemat reaalsete objektide klassi kui need objektid, mis olid lähteks selle mõiste konstrueerimisel. Muuhulgas võivad osutuda juhtimissüsteemideks ka sellised objektid, milles puudub juhtimine selle sõna tavalises mõttes.

---

[1] Käesolev artikkel on tõlgitud kogumikust Проблемы кибернетики, вып. 9. М., 1963. Tõlkinud E. Tiit.

[2] Diskreetne hulk on selline hulk, millel puuduvad kuhjumispunktid, s. o. mis koosneb isoleeritud punktidest. — *Toim.*

Sellest aspektist vaadelduna kuuluvad juhtimissüsteemide hulka näiteks järgmised objektid: valemina antud aritmeetiline avaldis, mis esitab teatavaid aritmeetilisi tehteid; arvutusmasin, s. o. mingit kindlat tehete kompleksi sooritav elektriline skeem; neuronite süsteemist koosnev närvivõrk, mis võtab osa organismi elutalitluste juhtimisest; keemiline molekul — teatav kindlate omadustega aatomite ühend; malendite asetusega ning kõikvõimalike käikude loeteluga määratud maleseis; kindlat mõtet väljendav ja kindlatest süntaktilistest elementidest koosnev, näiteks venekeelne lause; majandusrajooni teenindavate pankade süsteem, mida iseloomustab pankade omavaheliste seoste struktuur ja teatavate operatsioonide sooritamine, jne.

Juhtimissüsteemis võib eristada järgnevaid koostisosi: skeemi, informatsiooni, koordinaate ja funktsiooni.

Skeemis peegeldub juhtimissüsteemi struktuur. Skeem omakorda koosneb poolustest, mälust ja elementidest. Poolused on organid, mille kaudu juhtimissüsteem on seotud väliskeskkonnaga. Vahel eristatakse sisendpoolusi (sisendeid) ja väljundpoolusi (väljundeid). Mälu koosneb hulgast pesadest, mis võivad omandada teatud diskreetseid olekuid. Igal pesal on omaette materiaalne informatsioonikandja. Mälupesadeks võivad erijuhul olla ka poolused. Tavaliselt jaotatakse mälu sise- ja välismäluks. Välismälu koosneb pesadest, millesse siseneb lähteinformatsioon, lähteandmed. Ülejäänud mälupesad ei ole väljapoolt otseselt mõjustatavad ning moodustavad sisemälu. Elemendid on süsteemi «elementaarsed ehituskivid» informatsiooni töötlemisel. Igal elemendil on oma poolused, mille kaudu ta on seotud nii teiste elementidega kui ka juhtimissüsteemi poolustega. Need seosed võivad olla keeruka geomeetrilise struktuuriga, kuid tavaliselt on nad avastatavad juhtimissüsteemi lihtsa jälgimise abil. Antud seoste tüüp tingib vastastikused mõjustused elementide vahel ja väliskeskkonnaga. Nende seoste kaudu toimub muuhulgas ka juhtimissüsteemi ühtede või teiste elementide töösselülitumine. Peale selle on elemendid seotud ka mälupesadega, kuid siin on sageli tegemist varjatud seostega, mis ei ilmne vahetul vaatlusel. Selliste seoste abil töödeldakse mälus salvestatud informatsiooni, ühtlasi aga mõjustatakse ka elemendi «olekut», mis määrab tema töörežiimi. Informatsioon on täielikult määratud mälupesade olekute hulgaga igal ajamomendil. Juhtimissüsteemi funktsioneerimisel huvitab meid tavaliselt see osa informatsioonist, mis on seoses välismälu olekutega. Mälu oluliseks omaduseks on võime säilitada, s. o. «mäletada» informatsiooni teatud ajavahemiku möödumiseni.

Koordinaadid iseloomustavad elementide asetust skeemis.

Tegelikult määravad nad juhtimissüsteemi konkreetse oleku seoses täiendava «mäluga». Koordinaatide mõte seisneb selles, et nende kaudu juhtimissüsteem n.-ö. tunnetab iseennast. Seetõttu võib ta vastavalt oma funktsionaalsetele omadustele teataval viisil iseennast mõjustada, n.-ö. ennast ümber muuta.

Funktsioon on juhtimissüsteemi käitumist iseloomustav karakteristik. Ta näitab seda, millist toimingut on juhtimissüsteem võimeline teostama üleminekul antud ajamomendist järgnevale diskreetsele ajamomendile. See toiming muudab üldiselt niihästi skeemi, informatsiooni, koordinaate kui ka funktsiooni ennast. Sõltuvalt juhtimissüsteemi olemusest võib sellel muutusel olla kas juhuslik või määratud iseloom. Jälgides juhtimissüsteemi muutusi ühest ajamomendist teiseni jne., saame täieliku pildi juhtimissüsteemi käitumise arengust, millest omakorda võime saada täieliku ettekujutuse selles süsteemis toimuvast informatsiooni töötlemisest.

Esitatud kirjeldusest nähtub, et juhtimissüsteem koosneb tegelikult lihtsamatest juhtimissüsteemidest, mille skeemid langevad ühte üksikute elementidega.

Juhtimissüsteemi mõiste selgitamiseks vaatleme lähemalt mõningaid näiteid.

1. Arvutusmasin

Skeem. Selleks on siin elektronskeem, mille elementideks on (sõltuvalt masina tehnilisest teostusest ja eesmärgist) klemmid, pooljuhid, ferriidid, takistid, kondensaatorid, elektrontorud, magnetlindid ning -trumlid, releed jne. Tavaliselt moodustatakse neist elementidest väikesed skeemid, mis kujutavad endast elementaarseid osaskeeme või pesasid; need on keerukamate skeemide — masina sõlmede koostisosadeks; ühendatud sõlmede kogum annab terve skeemi. Mälu koosneb pesadest, mille kandjateks on lindid, trumlid, elektrontorud, viiteahelad, tumblerid jne.

Informatsioon. Informatsiooni määravad mälu pesade olekud, s. t. nende pesade elektriliste, magnetiliste jt. karakteristikute väärtused.

Koordinaadid. Antud juhul on nendeks skeemi elementide numbrid. Need võimaldavad määrata detailide asetuse skeemis (näiteks masina kontrollimiseks).

Funktsioon. See on operatsioon, mida masin antud tingimustes teostab. Selleks võib olla näiteks kahe arvu «liitmine», «korrutamine», arvu viimine ühest pesast teise, loogiline võrdlemine koos järgneva juhtimise üleandmisega, masina seiskamine jne. Iga masina funktsionaalsed võimalused on määratud tema poolt teostatavate operatsioonide loeteluga.

2. Närvikude

Skeem. Antud juhul on skeemiks närvivõrk, mis koosneb närvirakkude — neuronite ühendusest. Seega on siin elementaarpesadeks neuronid. Närvisüsteemi mälu koosneb retseptoritest, mis on skeemi sisenditeks ja võtavad vastu välisärritusi, efektoritest, mis on skeemi väljunditeks ja annavad signaale organitele, ning lõpuks vaheneuronitest, mis on võimelised erutusseisundisse üle minema.

Informatsioon. Selle määrab mälu «pesade» seisund, s. t. stiimulite olemasolu või puudumine sisenditel, vaheneuronite olekud ja efektorite olekud.

Koordinaadid. Neile vastab konkreetse neuroni asukoha fikseerimine. Neuronite koordinaadid, mis määravad nende asendi ruumis, on olulised selliste probleemide lahendamisel, nagu närvikoe areng jms.

Funktsioon väljendab efektorite olekute sõltuvust retseptorite ja mälu olekutest. Teiste sõnadega, funktsioon määrab organitele avaldatava mõju iseloomu sõltuvalt ühtede või teiste stiimulite olemasolust või puudumisest.

3. Arvutusmasinate programmid

Skeem. Skeemiks on järjestikuste käskude jada. Tavaliselt jaotatakse programm osadeks, millest igaüks realiseerib mingit operaatorit — antud algoritmi osa. Need elementaarsed osaprogrammid jagunevad tüüpideks vastavalt operaatorite liikidele. Siinjuures võib elementaarseid osaprogramme ning vastavaid operaatoreid omavahel samastada. Tavaliselt eristatakse aritmeetilisi operaatoreid, ümberadresseerimise ning taastamise operaatoreid, formeerimise operaatoreid, juhtimisoperaatoreid jne. Seega võib programmi skeemi vaadelda operaatorite jadana.

Mälu koosneb pesadest, millega on seotud skeemisse kuuluvad operaatorid.

Informatsioon on määratud mälu pesade olekutega.

Koordinaadid. Programmis on nendeks käsuaadressid, operaatorkirjutises operaatorite numbrid. Käesolevas näites on koordinaadid tegelikult vajalikud juhtimissüsteemi funktsioneerimise selgitamiseks. Nad võimaldavad leida vajalikku käsku mingi tehte sooritamiseks, erijuhul programmi enda teisendamiseks.

Funktsioon. Selle määravad informatsiooni elementaarteisendused, mida realiseerimisel olev operaator ette annab.

Elementaarteisenduste jada kaudu saab leida ka informatsiooni lõpliku teisenduse; see langeb ühte kogu informatsiooni teisendusega, mis on määratud realiseeritava algoritmiga.

4. Aritmeetilised avaldised

Skeem. Antud juhul on skeemiks valem, mis määrab aritmeetilise avaldise. Valem koosneb sümbolitest: tähtedest, arvudest, sulgudest ja tehtemärkidest. Näiteks: $a(a+2b)$. Aritmeetilist valemit saab alati konstrueerida «elementaarsetest» valemitest, ja nimelt järgmise kujuga valemitest: $a+b$, $a-b$, $a \cdot b$, $a:b$. Tähtede ja arvude sümbolid moodustavad valemi mälu.

Informatsioon on määratud mälu olekutega. Aritmeetiliste avaldiste puhul määrab mälu oleku konstantide ning muutujate (tähtede) arvuliste väärtuste loetelu.

Koordinaadid. Siin on nendeks valemi koosseisu kuuluvate sümbolite numbrid, mille järgi võib eraldada näiteks ühe ja sama tähe korduvaid esinemisi valemis, sulgude paigutust jne.

Funktsioon määratakse arvude teisendusega, mida me tavaliselt seome antud valemiga, defineerides tehted $+$, $-$, $\cdot$ ja $:$ vastavalt liitmisena, lahutamisena, korrutamisena ja jagamisena.

5. Male

Skeem antakse malendite asetusega malelaual.

Informatsioon. Selle moodustavad andmed kogu mängu käigu kohta algseisust antud seisuni. Need andmed salvestatakse mälus. Nende järgi saab muuhulgas otsustada, kumb mängija on parajasti käigul, ning hinnata mängijate strateegilisi kavatsusi.

Koordinaadid määravad malendite asetuse malelaual ning võimaldavad mängu käiku kodeerida.

Funktsioon. Sellele vastab järjekordne käik. Viimane sisaldab esiteks mingi malendi nihutamist malelaual ja teiseks käigu salvestamist mälus. On selge, et iga konkreetse seisu puhul on *a priori* võimalik valida mitme käigu vahel. Milline neist sooritatakse, seda saab antud tingimustes teatava tõenäosusega ette näha. Funktsioon on seega täielikult määratud, kui on antud mingi konkreetse seisu lubatavate käikude loetelu ja iga käigu tõenäosus.

Võime nüüd jätkata juhtimissüsteemi mõiste analüüsimist. Nagu näha, on juhtimissüsteem küllaltki üldine mõiste, mille tähtsus ei piirdu üksnes küberneetikaga. Seetõttu tuleks küberneetikas uuritavate juhtimissüsteemide klassi lähemalt piiritleda. Selleks kirjeldame järgnevas mõningaid olulisi iseärausi, mis on omased just neile juhtimissüsteemidele.

Küberneetikas uuritavaid juhtimissüsteeme iseloomustab ee, et nad on diskreetse iseloomuga objektid. Diskreetne on nimelt juhtimissüsteemi ehitus, s. t. tema skeem, koordinaadid, informatsioon, funktsioon, kuid samuti ka aeg. See diskreetsus võib esineda tugevasti maskeeritud kujul. Näiteks masinatega töödeldava informatsiooni vaatlemisel on meil tegemist mälupesade olekutega. Mälupesade olekud määrab aga mingi pidev suurus — näiteks väljatugevus. Järelikult informatsiooni kandjaks võib olla mittediskreetne, s. o. pidev suurus, kuid masina töö jaoks on tähtis ikkagi ainult asjaolu, kas selle suuruse väärtused asuvad ülal- või allpool teatavat läve.

Teiseks iseloomustavaks jooneks spetsiaalset küberneetilist käsitlust nõudvate juhtimissüsteemide puhul on nende keerukus. Märkisime juba, et juhtimissüsteem koosneb üldiselt elementaarsetest juhtimissüsteemidest. Keerukus avaldub siin elementide (elementaarsete juhtimissüsteemide) suures arvus, keerulise sidesüsteemi olemasolus, suuremahuliste informatsioonivoogude esinemises ning keeruka funktsiooni realiseerimises. See kõik muudab juhtimissüsteemi vahetu ning täielku jälgimise raskeks.

Kolmas iseärasus seisneb selles, et reaalseid objekte võib juhtimissüsteemidena vaadelda üldiselt mitmel erineval viisil, est juhtimissüsteemi fikseerimine sõltub konkreetsel juhul selest, missugused juhtimissüsteemid loetakse elementaarseteks. Näiteks arvutusmasinaga on seotud terve rida juhtimissüsteeme. Huvitudes temast kui raadiotehnilisest seadmest arvude valiku», «teisendamise», «üleskirjutamise» jne. seisukohalt, uleks elementaarseteks juhtimissüsteemideks võtta üksikud raadiotehnilised elemendid: loogilised elemendid, mäluelemenid jne. Teisest küljest, kui vaadelda masina poolt täidetavat rogrammi, siis on elementideks üksikud käsud. Lõpuks, kui äsitleda masinat algoritmi realiseerimise vahendina, siis leks juhtimissüsteemideks lugeda üksikuid operaatoreid.

Seega on juhtimissüsteemi mõiste suhteline. Sageli asuvad uritavas objektis eraldatavad juhtimissüsteemid erinevail juhtimistasemeil». Sealjuures kuuluvad ühed juhtimissüsteeid teiste suuremate juhtimissüsteemide koosseisu elementaarte juhtimissüsteemidena. Teiste sõnadega, meil on siin tegeist juhtimissüsteemide hierarhiaga.

Juhtimissüsteemi uurimisel vaadeldakse tema ehitust ning unktsioneerimist ühtse kompleksina. Vaadeldes mõnd objekti htimissüsteemina, jätame selle juures alati kõrvale palju onkreetseid iseärasusi. Kui uurime arvutusmasinat juhtimissüsteemina, siis ei huvita meid näiteks elementide gabariidid, teatud määral ka mitte elementide tüüp jne. Seetõttu võib ilmneda, et kahel füüsiliselt erineval juhtimissüsteemil on sarnane skeem ja ühesugune ülesanne (funktsioon). Näiteks on täiesti mõeldavad kaks ühesuguse skeemi ja samasuguse funktsiooniga arvutusmasinat, millest üks koosneb lampelementidest, teine aga pooljuhtidest. Ühesuguse skeemiga ning ühesuguse funktsiooniga juhtimissüsteeme nimetatakse isomorfseteks. Juhtimissüsteemide uurimisel ja konstrueerimisel peab olema ettekujutus kõigi isomorfsete juhtimissüsteemide ühistest iseärasustest. Küberneetika raames toimuva uurimise seisukohalt on omavahel isomorfsed juhtimissüsteemid täiesti samaväärsed objektid. Seetõttu on küberneetikale iseloomulik abstraktsete mõistete ning täppisteaduste uurimismetoodika ulatuslik kasutamine.

(Järgneb)

KÜBERNEETIKA JA KEELETEADUS

R. Palm

Küberneetikat määratletakse sageli teadusena juhtimisprotsesside kõige üldisematest seaduspärasustest. Juhtimisprotsesside kategooriasse kuuluvad teatavasti väga paljud nähtused loodusest, tehnikast ja ühiskondlikust elust. Näitena võiks mainida kas või masinate töö automaatset reguleerimist, närvisüsteemi tegevust, pärilike tunnuste edasikandumist ühelt generatsioonilt teisele, konkreetse rahvamajandusharu või ka kogu maa majanduse arengut, kunstiteose mõju inimese psüühikale, inimkollektiivide kooskõlastatud tegevuse juhtimist, mitmesuguseid ühiskonna ajalooprotsesse jne.

Juhtimisprotsessist osavõtvad objektid moodustavad teatava juhtimissüsteemi. Hoolimata juhtimissüsteemide eri vormide väga suurest mitmekesisusest, on kõigil sellistel nähtustel üks ja sama struktuur. Üheks ühiseks omaduseks kõigil juhtimissüsteemidel, sõltumata viimaste konkreetsest iseloomust, on asjaolu, et neis toimub alati informatsiooni vahetus süsteemi osade vahel. See võib toimuda näiteks inimese ja inimese, inimese ja masina, inimese ja looma vahel, masinate vahel, inimese närvisüsteemis ja mujal. Iga juhtimisprotsess on võimalik ainuüksi tänu informatsiooni vahetusele, mis seob omavahel juhtimissüsteemi eri osi. Seetõttu on informatsiooni mõistel üks kesksemaid kohti küberneetikas üldse ja ta on omandanud tänapäeval samasuguse tähtsuse nagu mateeria või energia mõistegi.

Igasugune informatsioon saab loomulikult esineda ainult kodeeritult, s. t. mingite materiaalsete objektide või protsesside poolt kantuna. Teiste sõnadega, informatsioon on alati esitatud mingite leppemärkide või sümbolite jada kujul. Need märgid või sümbolid võivad olla väga mitmesugused, sõltuvalt sellest, millises juhtimissüsteemis vastavat informatsiooni kasutatakse. Nendeks märkideks võivad olla kirjutatud sümbolid: trükitähed, hieroglüüfid, piltkiri, matemaatilised märgid, liiklusmärgid, joonised; nendeks võivad olla valgus- või helisignaalid (sealhulgas ka häälikud keeles), muusika, žestid, tants, elektrilised impulsid, mingite materiaalsete esemete olemasolu või puudumine, nende materiaalsete esemete paigutus (näiteks matkajatel kividest ja puuokstest koostatud teemärgid või lippudega signaliseerimine laevadel), masina üksikute osade asend üksteise suhtes, mitmesugused bioloogilised nähtused ja palju muud. Osa neist koodidest, nagu matemaatiline sümboolika või liiklusmärgid, on inimeste poolt teadlikult ja tahtlikult konstrueeritud ning suhteliselt lihtsad; teine osa, nagu tavalised keeled või nn. geneetiline kood, milles avaldub organismide pärilikkus, on välja kujunenud pika ajaloolise arengu tulemusena ja nende mehhanism pole käesoleval ajal veel täiesti selge.

Igal juhtimisprotsessist osavõtval seadmel (s. o. seadmel, mis väljastab või võtab vastu informatsiooni) on üldiselt kõneldes oma spetsiifiline kood. Seetõttu pole sageli võimalik luua juhtimissüsteemi, ühendades lihtsalt ühe seadme väljundid (sidekanalid) teise seadme sisenditega, vaid saatja ning vastuvõtja vahele tuleb lülitada veel ümberkodeeriv seade, mis küll juhtimisprotsessist sisuliselt osa ei võta, ent mis oma olemasoluga teeb informatsiooni vahetuse üldse võimalikuks. Siin võiks näiteks olla süsteem, mis koosneb kõnelejast, kes räägib, ütleme, inglise keeles, ja kuulajast, kes valdab ainult eesti keelt. Hoolimata sellest, et kõik kõneleja poolt väljastatavad signaalid täies ulatuses jõuavad kuulajani, ei saa siin tekkida juhtimisprotsessi, kuna koodide erinevuse tõttu pole kuulaja suuteline vastu võtma kõneleja poolt antavat informatsiooni. Selleks, et juhtimissüsteem antud juhul funktsioneeriks, on vajalik veel üks vahelüli — tõlkija (inimene või masin).

Viimastel aastatel on väga intensiivselt arenema hakanud küberneetika osa, mille uurimisobjektiks on informatsiooni kodeerimine küberneetilistes juhtimisprotsessides, samuti mitmesuguste kodeerimisviiside omavaheliste vahekordade selgitamine ning seaduste kindlakstegemine, mille järgi toimub informatsiooni ümberkodeerimine ühest koodist teise. Kõnesoleva teadusala nimetuseks kujuneb nähtavasti s e m i o o t i k a (kõige laiemas mõttes).

Sageli nimetatakse kõiki informatsiooni kodeerimise süsteeme ka lihtsalt keelteks. Selles mõttes kõneldakse näiteks arvutusmasinate keeltest või liiklusmärkide keelest. Seoses sellega tehakse vahet loomulike ja kunstlike keelte vahel. Need mõisted semiootikas ei lange täpselt kokku tavalise, keeleteaduses tarvitusel oleva liigitusega. Allpool loemegi loomulike keelte hulka niihästi inimühiskonna arengu käigus väljakujunenud kui ka kõik meelevaldselt konstrueeritud keeled (näit. esperanto), mille loomisel on järgitud samu printsiipe.

Loomulikud keeled moodustavad informatsiooni kodeerimise süsteemide hulgas väga olulise klassi. Suur osa informatsiooni vahetusest juhtimissüsteemides, mille üheks osaks on inimene või inimeste kollektiiv, toimub just loomulike keelte abil. Kujutleme, et me vaatame aknast välja ning jutustame kõrvaltoas viibivale sõbrale sellest, mis tänaval toimub. Meie aju töötab sel juhul kodeeriva seadmena, mis valgusaistingute kaudu saadud informatsiooni ümber kodeerib loomulikku, näiteks eesti keelde. Teises toas viibiv sõber saab informatsiooni tänaval toimuvate sündmuste kohta niisiis juba mitte valgusaistingute keeles, vaid loomuliku keele vahendusel. Informatsiooni vahetus loomuliku keele abil võib toimuda ka inimese ja masina vahel. Valides näiteks Tallinnas telefonil numbri 005, saame teada täpse kellaaja, mis öeldakse meile tavalises eesti keeles. Kuid seda informatsiooni ei anna meile sugugi inimene, vaid magnetofonilint — masin. Ka inimese ja looma vahel võib informatsiooni vahetus toimuda loomulikus keeles. Selline olukord esineb näiteks loomade dresseerimisel.

Näiteid juhtimisprotsessidest, milles informatsiooni vahetus toimub loomulike keelte abil, võiks tuua veel palju. Seetõttu on arusaadav, et semiootika peab pöörama erilist tähelepanu loomulike keelte uurimisele ja nende ehituse väljaselgitamisele. Pealegi on sel probleemil ka rida väga olulisi praktilisi rakendusi. Neist võiks mainida näiteks küsimust inimese ja masina omavahelisest suhtlemisest. Teatavasti tuleb praegu iga ülesanne, mida soovitakse lahendada elektronarvutusmasinal, kirja panna programmi kujul erilises, sellele masinale n.-ö. «mõistetavas» koodis. Inimese seisukohast oleks palju mugavam, kui masinasse antavad ülesanded võiksid olla üles märgitud tavalises, loomulikus keeles, või kui masin täidaks sõnalisi käsklusi. Samuti on loomulike keelte uurimine väga tähtis selleks, et mehhaniseerida inimese vaimse töö mitmesuguseid lõike. Siia kuulub näiteks teaduslik-tehnilise informatsiooni automaatne hankimine, töötlemine ja salvestamine (dokumentalistika), automaatne refereerimine, samuti masinatõlge. On võimatu kasutada masinat tekstide tõlkimiseks ühest keelest teise, kui puudub nende keelte küllalt täielik ja täpne semiootiline kirjeldus.

Siinkohal tekib loomulikult küsimus semiootika ja keeleteaduse vahekorrast. Võib näida, et keeleteadus on semiootika osa, kujutades endast lihtsalt loomulike keelte semiootikat. See on muidugi samavähe õige, kui lugeda näiteks bioloogiat küberneetika osaks.

Semiootika vaatleb keelt ainult kui teatavat süsteemi informatsiooni kodeerimiseks ja keele grammatikat kui reeglite kogu, mille järgi informatsioon muudetakse üksteisele järgnevate kirjutatud sümbolite või üksteisele järgnevate artikuleeritud helide jadaks. Iga keel moodustab omaette kodeerimissüsteemi ja semiootika seisukohast on oluline esiteks: uurida neid süsteeme, anda kodeerimisreeglitele iga keele jaoks võimalikult otstarbekohane kuju, ning teiseks: välja selgitada nende kodeerimissüsteemide (s. t. keelte) suhted teiste (semiootiliste) süsteemidega, milles on võimalik kodeerida sama informatsiooni. Seega vaatleb semiootika keelt ainult kui informatsiooni kandjat, ainult nn. kommunikatiivsest seisukohast, jättes vähemalt esialgu täiesti kõrvale keele ülejäänud küljed, nagu ajaloolise arengu (sealhulgas keele tekkimise ja keelte suguluse probleemid), keele käsituse ühiskondliku nähtusena, keele seose kultuuri ja kirjandusega, emotsionaalsed ja esteetilised momendid keeltes jne.

Loomulike keelte semiootika puudutab ainult neid keele aspekte, mis iseloomustavad keelt kui märgisüsteemi, koodi; samuti nagu küberneetika vaatleb näiteks ainult neid bioloogiliste või mõnede teiste nähtuste aspekte, mis iseloomustavad neid nähtusi kui juhtimisprotsesse. Keele kirjeldamine kodeerimissüsteemina ammendab keelt sama vähe, kui bioloogiliste juhtimissüsteemide kirjeldus bioloogiat tervikuna. Keeleteaduse ülesandeks seevastu on uurida ja kirjeldada keelt, arvestades tema kõigi külgede, funktsioonide ja aspektide dialektilist ühtsust, andes võimalikult sügava tunnetuse keelest kui reaalse maailma nähtusest tervikuna.

Ka keeleteadus pöörab viimasel ajal üha suuremat tähelepanu keele kommunikatiivsele küljele. Tekib küsimus, kas pole võimalik semiootikas ära kasutada keeleteaduse küllaltki pika ajaloo jooksul kogutud teadmisi, kogemusi ja faktilist materjali. Enamasti see siiski vahetult võimalik ei ole.

Põhjus on siin ilmne. Kogu senine keeleteadus on vaikides eeldanud, et inimaju on ainus loomulikke keeli kommunikatsioonivahendina kasutav seade. Seetõttu on keeleteadus üles ehitatud ainuüksi inimese aju võimeid, vajadusi ja spetsiifikat arvestades. Aju struktuur ja funktsioneerimisviis on aga kõigil inimestel peaaegu identne. Samuti on selge, et meeleorganitelt saadavate andmete ekvivalentsuse ning kasvatuse ja keskkonna (ühiskonna) mõjustuste sarnasuse tõttu on kõigi inimeste, ammugi siis ühe keeleala kõigi inimeste ajudele omane teatav hulk ühist informatsiooni, mis koguneb sinna järk-järgult sünnimomendist peale. Seda informatsiooni pole keeleteadusel muidugi vajalik ega otstarbekohane dubleerida. Semiootikas aga tekib juba probleem loomulike keelte kasutamisest hoopis teiste, inimajust tunduvalt erinevate seadmete poolt. Seetõttu need andmed, mille puhul keeleteadus võib rahulikult eeldada, et nad on nii või teisiti salvestatud kindlasti iga inimese mällu, tuleb ette anda otseselt ja vahetult. Seega ei saa nn. traditsiooniline grammatika ja eriti selle grammatika süntaktiline osa anda keeles valitsevate seaduspärasuste niivõrd täpset, täielikku ja objektiivset kirjeldust, nagu seda vajab semiootika.

Olukorra iseloomustamiseks võiks tuua ehk järgmise näite. Igast eesti keele grammatikast võib leida umbes sellise definitsiooni: «Alus on lause pealiige, mis väljendab olendit, eset või nähtust, kes või mis on lauses tegijaks või olijaks». Igale eesti keelt oskajale on see definitsioon intuitiivselt selge, iga eesti keelt oskaja saab selle definitsiooni põhjal (nagu kogemused näitavad) lauses ära määrata aluse, ja seetõttu traditsioonilises grammatikas sellest definitsioonist täiesti piisab. Kuid seda definitsiooni ei saa muidugi pidada täielikuks semiootika seisukohast, sest grammatika jätab lahendamata küsimuse, millised on sõnad, mis «väljendavad olendit, eset või nähtust, kes või mis on lauses tegijaks või olijaks», ja kuidas neid sõnu on võimalik ka näiteks masina poolt ära tunda.

Mõnikord on avaldatud kartust, kas küberneetika vajadustest tingitud keeleteaduslike mõistete ja seaduste täpsustamine ei likvideeri üldse keeleteadust, muutes kõik seni saavutatu ebaõigeks ja väärtusetuks. Sellele võib vastata akadeemik B. Konstantinovi sõnadega [1], mis otseselt käivad küll füüsika kohta, ent on rakendatavad ka siin: «Iga edasiviiva sammu korral, iga uue, üldisema ja täpsema seaduse formuleerimisel jäävad vanad seadused jõusse neis tingimustes ja selle täpsusega, millega nad olid püstitatud. Ei kvantmehaanika ega relatiivsusteooria pole ümber lükanud klassikalist Newtoni mehaanikat: see sisaldub eelmistes piirjuhuna makroskoopiliste kehade jaoks, kui nende kiirus üksteise suhtes on valguse kiirusega võrreldes väike.» Pealegi, nagu märgitud, ei saa semiootika kuidagi hõlmata keeleteadust tervikuna.

Küberneetika ja keeleteaduse piirialadel on muidugi teha veel väga palju. See töö on alles alanud ja on võimatu praegu ette näha kõiki uusi perspektiive ja võimalusi, mida nende küsimuste lähem uurimine avab niihästi keeleteaduses kui ka küberneetikas ja üldises semiootikas. See kõik eeldab aga mitmete alade teadlaste tihedat koostööd ja kontakti, nagu seda väga tabavalt (ja võib-olla ka poeetiliselt) on väljendanud A. Kobrinski [2]: «Küberneetika on see, kui füüsik õpetab bioloogidele pärivusseadusi, kui insener räägib füsioloogidele, kuidas tekivad tingrefleksid, ja füsioloog omakorda selgitab tagasiside põhimõtet automaatjuhtimise spetsialistidele. Küberneetika on see, kui matemaatikud, füüsikud, füsioloogid ja insenerid õpetavad tõlkimist, luuletamist ja malemängu keeleteadlastele, poeetidele ja suurmeistritele, kui nad kõik koos lakkamatult võrdlevad inimest automaadiga, pidevalt eeldades, et inimese ja automaadi vahel ei ole midagi ühist.»

---

[1] «Известия», 1963, 26 янв.

[2] Кобринский, А., Числа управляют станками. М., 1961.

Täiendusi koolimatemaatikale

KUUPVÕRRANDI TRIGONOMEETRILINE LAHENDAMINE

Ü. Kaasik

Keskkoolikursuses tuletatakse elementaarselt valem ruutvõrrandi

$$ax^2 + bx + c = 0$$

lahendamiseks. See valem

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

on üldiselt sobiv praktiliseks kasutamiseks, mistõttu ruutvõrrandi lahendamiseks enamasti teisi meetodeid ei tuletata.

Sootuks teine olukord on aga kuupvõrrandiga

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0. \qquad (1)$$

Kõrgema algebra kursuses * näidatakse, et jagades seda võrrandit kordajaga a ja võttes uue tundmatu

$$y = x + \frac{b}{3a}$$

saame võrrandile (1) alati anda kuju

$$y^3 + py + q = 0, \qquad (2)$$

kus

$$q = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}$$

ja

$$p = \frac{3ac - b^2}{3a^2}.$$

Samas tuletatakse ka valem võrrandi (2) lahendamiseks.

* Eestikeelsest kirjandusest vt. näiteks Kangro, G., Kõrgem algebra. Tallinn, ERK, 1962, lk. 286—293. Sama teose vanem väljaanne: Kangro, G., Kõrgem algebra, II. Tallinn—Tartu, ERK, 1950. Seal käsitletakse kuupvõrrandi lahendamist lk. 140—147.

Selle valemi, mis kannab **Cardano valemi** nime, võib kirjutada kujul

$$y = u - \frac{p}{3u}, \tag{3}$$

kus

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}. \tag{4}$$

Abisuuruse u arvutamisel seosest (4) tuleb leida kõik kolm kuupjuure väärtust *. Valemisse (3) paigutatuna annab igaüks neist võrrandi (2) ühe lahendi.

Valemi (3) abil on iga kuupvõrrand (mis eelnevalt on muidugi kujule (2) teisendatud) teoreetiliselt lahenduv, kuid valemi praktilisel kasutamisel tekivad sageli suured raskused.

Näiteks lahendame selle valemi abil võrrandi

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0. \tag{5}$$

Võttes $y = x + \frac{2}{3}$ saame uue võrrandi

$$y^3 - \frac{7}{3}y - \frac{20}{27} = 0,$$

mida lahendades leiame:

$$u = \sqrt[3]{\frac{10}{27} + \sqrt{\frac{100}{729} - \frac{343}{729}}} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{10 + i\sqrt{243}},$$

$$y = \frac{1}{3}\sqrt[3]{10 + i\sqrt{243}} + \frac{7}{3\sqrt[3]{10 + i\sqrt{243}}}.$$

---

* Kui juuritav on kompleksarv $a + bi$, siis tuleb ta kõigepealt kirjutada trigonomeetrilisel kujul

$$a + bi = \varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

kus $\varrho = \sqrt{a^2 + b^2}$ ja $\tan\varphi = \frac{b}{a}$, ning seejärel kasutada valemit

$$\sqrt[3]{a + bi} = \sqrt[3]{\varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)} =$$

$$= \sqrt[3]{\varrho}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{3} + k\cdot 120^\circ\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{3} + k\cdot 120^\circ\right)\right].$$

Sellest valemist saame kolm erinevat juurt, kui arvule k anname järjekorras väärtused 0, 1 ja 2.

Järelikult võrrandi (5) lahendid avalduvad kujul

$$x = -\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{10 + i\sqrt{243}} + \frac{7}{3\sqrt[3]{10 + i\sqrt{243}}}. \qquad (6)$$

Otsese kontrollimisega võib kergesti veenduda, et võrrandil (5) on kolm reaalset lahendit: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$ ja $x_3 = -2$, kuid valemist (6) pole neid vastuseid algebraliste teisenduste abil võimalik saada.

Üldse osutub, et kui kuupvõrrandi kõik kolm lahendit on reaalsed ja erinevad, siis Cardano valem annab need avaldistena, mis sisaldavad imaginaarsusi. Sealjuures on tõestatud, et saadavate avaldiste vabastamine imaginaarsusest pole algebralisel teel võimalik *. Kuid valemi (3) kasutamine on ka muudel juhtudel äärmiselt tülikas (selle peamiseks põhjuseks on asjaolu, et arvutustes ei saa kasutada logaritme). Seepärast ei kasutatagi kuupvõrrandi praktilisel lahendamisel peaaegu kunagi Cardano valemit selle algebralisel kujul (3), vaid teisendatakse ta enamasti trigonomeetrilistele kujudele. Järgnevalt näitamegi, kuidas saab valemit (3) teisendada kujudele, mis on lahendite ligikaudseks leidmiseks hoopis sobivamad.

Et igale kuupvõrrandile saab ülalkirjeldatud viisil kergesti anda kuju (2), siis vaatlemegi võrrandeid edaspidi sellel kujul.

Reaalarvuliste kordajatega võrrandi

$$y^3 + py + q = 0$$

lahendamisel on olulise tähtsusega suuruste p ja $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ märgid. Sõltuvalt nende suuruste märkidest tuleb lahendamisel eraldi vaadelda kolme juhtu.

I juht:

$$p < 0; \quad \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \leqslant 0.$$

Sel juhul suurus

$$-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}},$$

millest valemi (4) kohaselt tuleb u saamiseks võtta kuupjuur,

---

* Seda juhtu nimetatakse taandumatuks juhuks (*casus irreducibilis*). Taandumatu juhuga on tegemist siis, kui $p < 0$ ja $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$.

on kindlasti kompleksarv. Anname sellele kompleksarvule trigonomeetrilise kuju:

$$-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}=-\frac{q}{2}+i\sqrt{-\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}},$$

$$\varrho=\sqrt{\left(-\frac{q}{2}\right)^2+\left(\sqrt{-\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}}\right)^2}=\sqrt{-\frac{p^3}{27}},$$

$$\tan\varphi=\frac{\sqrt{-\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}}}{-\frac{q}{2}}$$

ehk

$$\cos\varphi=-\frac{q}{2}\sqrt{-\frac{27}{p^3}}. \tag{7}$$

Võrdusega (7) on nurk φ üheselt määratud, sest arvu $-\frac{q}{2}+i\sqrt{-\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}}$ imaginaarosa kordaja positiivsuse tõttu saab φ olla ainult kas I või II veerandis (kui $q<0$, siis φ on I veerandis, kui $q>0$, siis II veerandis).

Seega

$$-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}=\sqrt{-\frac{p^3}{27}}\,(\cos\varphi+i\sin\varphi),$$

$$u=\sqrt[3]{\sqrt{-\frac{p^3}{27}}(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=$$

$$=\sqrt{-\frac{p}{3}}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{3}+k\cdot 120^\circ\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{3}+k\cdot 120^\circ\right)\right],$$

ja järelikult

$$y=\sqrt{-\frac{p}{3}}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{3}+k\cdot 120^\circ\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{3}+k\cdot 120^\circ\right)\right]-$$

$$-\frac{p}{3\sqrt{-\frac{p}{3}}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{3}+k\cdot 120^\circ\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{3}+k\cdot 120^\circ\right)\right]}=$$

$$=\sqrt{-\frac{p}{3}}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{3}+k\cdot 120^\circ\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{3}+k\cdot 120^\circ\right)\right]+$$

$$+\sqrt{-\frac{p}{3}}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{3}+k\cdot 120^\circ\right)-i\sin\left(\frac{\varphi}{3}+k\cdot 120^\circ\right)\right]=$$

$$=2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3}+k\cdot 120^\circ\right).$$

Andes tulemuses arvule k väärtused 0, 1 ja 2 saame vastavalt

$$\left.\begin{aligned}
y_1 &= 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\varphi}{3} \\
y_2 &= 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3}+120^\circ\right)= \\
&= 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left[180^\circ-\left(60^\circ-\frac{\varphi}{3}\right)\right]= \\
&= -2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(60^\circ-\frac{\varphi}{3}\right) \\
y_3 &= 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3}+240^\circ\right)= \\
&= 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left[180^\circ+\left(60^\circ+\frac{\varphi}{3}\right)\right]= \\
&= -2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(60^\circ+\frac{\varphi}{3}\right).
\end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Valemid (8) annavadki võrrandi (2) lahendid I juhul, kusjuures nurk φ on määratud võrdusega (7). Nende valemite praktilist kasutamist vaatleme allpool (vt. näide 1), enne seda tuletame valemid veel teiste juhtude jaoks.

II juht:

$$p < 0;\ \frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27} > 0.$$

Nüüd $-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$ on reaalarv. Suurus $-\frac{q}{2}\sqrt{-\frac{27}{p^3}}$, mis eelmisel juhul võrdus nurga φ koosinusega, on seekord absoluutväärtuse poolest suurem kui 1, sest võrratusest $\frac{q^2}{4}+$ $+\frac{p^3}{27}>0$ järeldub: $\frac{q^2}{4}>-\frac{p^3}{27}$; $-\frac{27q^2}{4p^3}>1$; $\frac{|q|}{2}\sqrt{-\frac{27}{p^3}}>1$. Siis on aga tema pöördväärtus absoluutselt ühest väiksem ja edaspidise jaoks osutub otstarbekaks defineerida selle kaudu teatav nurk φ võrdusega

$$\sin\varphi = -\frac{2}{q}\sqrt{-\frac{p^3}{27}}. \qquad (9)$$

Et võrdus (9) defineeriks nurga φ üheselt, püstitame lisatingimuse

$$-90^\circ < \varphi < 90^\circ.$$

Seosest (4) saame siis:

$$u=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{-\frac{p^3}{27}\left(-\frac{27q^2}{4p^3}-1\right)}}=$$

$$=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{-\frac{p^3}{27}\left(\frac{1}{\sin^2\varphi}-1\right)}}=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{-\frac{p^3}{27}\cot^2\varphi}}=$$

$$=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{-\frac{p^3}{27}}\cdot\cot\varphi}=$$

$$=\sqrt[3]{\sqrt{-\frac{p^3}{27}}\left(-\frac{q}{2}\sqrt{-\frac{27}{p^3}}+\cot\varphi\right)}=$$

$$=\sqrt[3]{\sqrt{-\frac{p^3}{27}}\left(\frac{1}{\sin\varphi}+\cot\varphi\right)}=\sqrt[3]{\sqrt{-\frac{p^3}{27}}\cdot\frac{1+\cos\varphi}{\sin\varphi}}=$$

$$=\sqrt[3]{\sqrt{-\frac{p^3}{27}}\cdot\cot\frac{\varphi}{2}}=\sqrt[3]{\sqrt{-\frac{p^3}{27}}\cdot\cot\frac{\varphi}{2}\cdot(\cos 0^\circ+i\sin 0^\circ)}=$$

$$=\sqrt{-\frac{p}{3}}\cdot\sqrt[3]{\cot\frac{\varphi}{2}}\,(\cos k\cdot 120^\circ+i\sin k\cdot 120^\circ).$$

Edaspidiste arvutuste lihtsustamise eesmärgil osutub siin otstarbekaks d e f i n e e r i d a uus nurk ψ seosega

$$\tan\psi=\sqrt[3]{\tan\frac{\varphi}{2}} \tag{10}$$

ja lisatingimusega

$$-90^\circ<\psi<90^\circ.$$

Siis

$$\sqrt[3]{\cot\frac{\varphi}{2}}=\cot\psi,$$

$$u=\sqrt{-\frac{p}{3}}\cot\psi\,(\cos k\cdot 120^\circ+i\sin k\cdot 120^\circ)$$

ja

$$y=\sqrt{-\frac{p}{3}}\cot\psi\,(\cos k\cdot 120^\circ+i\sin k\cdot 120^\circ)-$$

$$-\frac{p}{3\sqrt{-\frac{p}{3}}\cot\psi(\cos k\cdot 120^\circ+i\sin k\cdot 120^\circ)}=$$

$$= \sqrt{-\frac{p}{3}} \cot \psi \, (\cos k \cdot 120^\circ + i \sin k \cdot 120^\circ) +$$

$$+ \sqrt{-\frac{p}{3}} \tan \psi \, (\cos k \cdot 120^\circ - i \sin k \cdot 120^\circ) =$$

$$= \sqrt{-\frac{p}{3}} [\cos k \cdot 120^\circ \, (\cot \psi + \tan \psi) +$$

$$+ i \sin k \cdot 120^\circ \, (\cot \psi - \tan \psi)] =$$

$$= \sqrt{-\frac{p}{3}} \left(\cos k \cdot 120^\circ \, \frac{1 + \tan^2 \psi}{\tan \psi} + i \sin k \cdot 120^\circ \, \frac{1 - \tan^2 \psi}{\tan \psi} \right) =$$

$$= \sqrt{-\frac{p}{3}} \left(\frac{2 \cos k \cdot 120^\circ}{\sin 2\psi} + i \, 2 \sin k \cdot 120^\circ \cot 2\psi \right).$$

Andes suurusele k väärtused 0, 1 ja 2 saame II juhul võrrandi (2) lahendid:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \frac{2\sqrt{-\frac{p}{3}}}{\sin 2\psi} \\ y_2 &= -\sqrt{-\frac{p}{3}} \left(\frac{1}{\sin 2\psi} - i \sqrt{3} \cot 2\psi \right) \\ y_3 &= -\sqrt{-\frac{p}{3}} \left(\frac{1}{\sin 2\psi} + i \sqrt{3} \cot 2\psi \right), \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

kus ψ on defineeritud võrdusega (10) ja φ võrdusega (9).

III juht:

$$p > 0; \ \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0.$$

Siin tuletatakse lahendusvalemid peaaegu samuti nagu II juhul, ainult et nurk φ defineeritakse nüüd võrdusega

$$\tan \varphi = -\frac{2}{q} \sqrt{\frac{p^3}{27}} \qquad (12)$$

ja lisatingimusega

$$-90^\circ < \varphi < 90^\circ.$$

Nurga ψ defineerime endiselt seostega

$$\tan \psi = \sqrt[3]{\tan \frac{\varphi}{2}}, \qquad (13)$$

$$-90^\circ < \psi < 90^\circ$$

ning arvutusi läbi viies saame lahendid kujul

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= 2\sqrt{\frac{p}{3}}\cot 2\psi \\ y_2 &= -\sqrt{\frac{p}{3}}\left(\cot 2\psi - \frac{i\sqrt{3}}{\sin 2\psi}\right) \\ y_3 &= -\sqrt{\frac{p}{3}}\left(\cot 2\psi + \frac{i\sqrt{3}}{\sin 2\psi}\right). \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

II juhu eeskujul võib lugeja valemid (14) ise kergesti tuletada.

Parema ülevaate saamiseks koondame saadud valemid (7)—(14) ühte tabelisse, võttes ühtlasi tarvitusele tähistuse

$$r = \sqrt{\left|\frac{p}{3}\right|}. \tag{15}$$

p	$p<0$		$p>0$
$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$	$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\leqslant 0$	$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}>0$	$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}>0$
φ	$\cos\varphi = -\frac{q}{2r^3}$	$\sin\varphi = \frac{2r^3}{q}$	$\tan\varphi = -\frac{2r^3}{q}$
ψ		$\tan\psi = \sqrt[3]{\tan\frac{\varphi}{2}}$	$\tan\psi = \sqrt[3]{\tan\frac{\varphi}{2}}$
y_1	$2r\cos\varphi$	$\frac{2r}{\sin 2\psi}$	$2r\cot 2\psi$
y_2	$-2r\cos\left(60^\circ-\frac{\varphi}{3}\right)$	$-r\left(\frac{1}{\sin 2\psi} - i\sqrt{3}\cot 2\psi\right)$	$-r\left(\cot 2\psi - \frac{i\sqrt{3}}{\sin 2\psi}\right)$
y_3	$-2r\cos\left(60^\circ+\frac{\varphi}{3}\right)$	$-r\left(\frac{1}{\sin 2\psi} + i\sqrt{3}\cot 2\psi\right)$	$-r\left(\cot 2\psi + \frac{i\sqrt{3}}{\sin 2\psi}\right)$

Nende valemite praktilist kasutamist selgitame järgmiste näidetega.

Näide 1. Lahendada võrrand

$$10x^3 - 9x^2 - 31x + 11 = 0.$$

Jagades võrrandi mõlemad pooled kümnega ja võttes

$$y = x - \frac{3}{10} = x - 0{,}3$$

saame uue võrrandi

$$y^3 - 3{,}37y + 0{,}116 = 0,$$

millel on juba kuju (2).

Et siin $p = -3{,}37 < 0$, siis saab tegemist olla kas I või II juhuga. Nende eraldamiseks piisab, kui arvutame suuruse

$$-\frac{q}{2r^3}$$

(või õieti selle absoluutväärtuse, sest märk on ju vastupidine q märgiga). Kui see osutub absoluutselt ühest väiksemaks, siis on tegemist I juhuga ja saadud suurus ongi nurga φ koosinus. Vastasel korral kuulub võrrand II juhu alla ja saadud suuruse pöördväärtus on siis nurga φ siinus.

Arvutusi on otstarbekas korraldada näiteks järgmise skeemi kohaselt:

$$r = \sqrt{\frac{3{,}37}{3}}$$

$$\begin{array}{r}
\lg 3{,}37 = 0{,}5276 \\
\lg 3 = 0{,}4771 \\
\hline
2 \lg r = 0{,}0505 \\
\lg r = 0{,}0253 \\
\hline\hline
\lg 0{,}116 = \overline{1}{,}0645 \\
\lg 2 = 0{,}3010 \\
3 \lg r = 0{,}0758 \\
\hline
\lg \dfrac{0{,}116}{2r^3} = \overline{2}{,}6877
\end{array}$$

(siin tuleb meeles pidada, et $-\frac{q}{2r^3}$ on käesoleval juhul negatiivne!). Seega $\left|-\frac{0{,}116}{2r^3}\right| < 1$, kuna logaritm on negatiivne, ja tegemist on I juhuga. Tähendab

$$\cos\varphi = -\frac{0{,}116}{2r^3}$$

$$\cos(180^\circ - \varphi) = -\cos\varphi = \frac{0{,}116}{2r^3}$$

$$\lg\cos(180^\circ - \varphi) = \lg\frac{0{,}116}{2r^3} = \overline{2}{,}6877\ *$$

* Kui võrrandil oleks kuju

$$y^3 - 3{,}37y - 0{,}116 = 0,$$

siis oleks lihtsalt

$$\lg\cos\varphi = \overline{2}{,}6877,$$

sest siis $-\frac{q}{3r^3}$ on positiivne.

$$180^\circ - \varphi = 87^\circ 12'$$
$$\varphi = 92^\circ 48'$$
$$\frac{\varphi}{3} = 30^\circ 56'$$
$$60^\circ - \frac{\varphi}{3} = 29^\circ 4'$$
$$60^\circ + \frac{\varphi}{3} = 90^\circ 56'$$
$$\cos\left(60^\circ + \frac{\varphi}{3}\right) = \cos\left[90^\circ + \left(\frac{\varphi}{3} - 30^\circ\right)\right] = -\sin\left(\frac{\varphi}{3} - 30^\circ\right) =$$
$$= -\sin 56'$$

$$\begin{aligned} \lg 2 &= 0{,}3010 \\ \lg r &= 0{,}0253 \\ \lg\cos\frac{\varphi}{3} &= \overline{1}{,}9334 \\ \hline \lg y_1 &= 0{,}2597 \\ y_1 &= 1{,}819 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lg 2 &= 0{,}3010 \\ \lg r &= 0{,}0253 \\ \lg\cos\left(60^\circ - \frac{\varphi}{3}\right) &= \overline{1}{,}9415 \\ \hline \lg(-y_2) &= 0{,}2678 \\ y_2 &= -1{,}852 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lg 2 &= 0{,}3010 \\ \lg r &= 0{,}0253 \\ \lg\left[-\sin\left(\frac{\varphi}{3} - 30^\circ\right)\right] &= \overline{2}{,}2119 \\ \hline \lg y_3 &= \overline{2}{,}5382 \\ y_3 &= 0{,}03452 \end{aligned}$$

K o n t r o l l i m i s e k s arvutame leitud lahendite summa, mis Viète'i lause * kohaselt peab võrduma nulliga:

$$y_1 + y_2 + y_3 = 1{,}819 - 1{,}852 + 0{,}03453 = 0{,}00153.$$

Seega lähtevõrrandi lahendid on

$$x_1 = y_1 + 0{,}3 = 2{,}119$$
$$x_2 = y_2 + 0{,}3 = -1{,}552$$
$$x_3 = y_3 + 0{,}3 = 0{,}3345.$$

Näide 2. Lahendada võrrand

$$3x^3 + x^2 - 19x + 45 = 0.$$

---

* Viète'i lause kuupvõrrandi puhul ütleb, et kui võrrandi

$$y^3 + ry^2 + py + q = 0$$

lahendid on y_1, y_2 ja y_3, siis

$$y_1 + y_2 + y_3 = -r; \quad y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 = p \text{ ning } y_1y_2y_3 = -q.$$

Võttes $y = x + \frac{1}{9}$ (ja jagades võrrandi kolmega) saame uue võrrandi kujul

$$y^3 - \frac{172}{27} y + \frac{11449}{729} = 0.$$

Et ka siin $p < 0$, siis alustame lahendamist jälle suuruse

$$-\frac{q}{2r^3} \text{ arvutamisega:}$$

$$r = \sqrt{\frac{172}{81}}$$

$$\begin{array}{r}
\lg 172 = 2{,}2355 \\
\hdashline
\lg 81 = 1{,}9085 \\
\hline
2 \lg r = 0{,}3270 \\
\lg r = 0{,}1635 \\
\hline\hline
\lg 11449 = 4{,}0588 \\
\hdashline
\lg 729 = 2{,}8627 \\
\lg 2 = 0{,}3010 \\
3 \lg r = 0{,}4905 \\
\hline
\end{array}$$

$$\lg \frac{11449}{2 \cdot 729 r^3} = 0{,}4046$$

$$\left(\text{meeles pidada, et } \frac{q}{2r^3} < 0!\right)$$

Seega $\left| -\frac{11449}{2 \cdot 729 r^3} \right| > 1$ ja tegemist on II juhuga. Nüüd

$$\sin \varphi = -\frac{2 \cdot 729 r^3}{11449}$$

$$\sin(-\varphi) = -\sin \varphi = \frac{2 \cdot 729 r^3}{11449}$$

$$\lg \sin(-\varphi) = -\lg \frac{11449}{2 \cdot 729 r^3} = -0{,}4046 = \overline{1}{,}5954$$

$$-\varphi = 23°12'$$

$$-\frac{\varphi}{2} = 11°36'$$

$$\lg \tan\left(-\frac{\varphi}{2}\right) = \overline{1}{,}3123$$

$$\lg \tan(-\psi) = \frac{1}{3} \lg \tan\left(-\frac{\varphi}{2}\right) = \overline{1}{,}7708$$

$$-\psi = 30°32'$$
$$-2\psi = 61°\ 4'$$
$$\lg 2 = 0{,}3010$$
$$\lg r = 0{,}1635$$
$$\lg \sin(-2\psi) = \bar{1}{,}9421$$
$$\lg(-y_1) = 0{,}5224$$
$$-y_1 = 3{,}330$$
$$y_1 = -3{,}330$$

$$\mathrm{Re}(y_2) = \mathrm{Re}(y_3) = -\frac{1}{2}y_1 = 1{,}665\ *$$

$$\lg 3 = 0{,}4771$$
$$\lg r = 0{,}1635$$
$$\frac{1}{2}\lg 3 = 0{,}2386$$
$$\lg \cot(-2\psi) = \bar{1}{,}7426$$
$$\lg[-\mathrm{Im}(y_2)] = 0{,}1447$$
$$-\mathrm{Im}(y_2) = 1{,}395$$
$$\mathrm{Im}(y_2) = -1{,}395$$
$$\mathrm{Im}(y_3) = -\mathrm{Im}(y_2) = 1{,}395$$

Seega

$$y_2 = 1{,}665 - 1{,}395i$$
$$y_3 = 1{,}665 + 1{,}395i.$$

Lähtevõrrandi lahendid tulevad järelikult

$$x_1 = y_1 - \frac{1}{9} = -3{,}330 - 0{,}111 = -3{,}441$$
$$x_2 = 1{,}665 - 1{,}395i - 0{,}111 = 1{,}554 - 1{,}395i$$
$$x_3 = 1{,}665 + 1{,}395i - 0{,}111 = 1{,}554 + 1{,}395i.$$

Näide 3. Lahendada võrrand

$$x^3 + 3x - 2 = 0.$$

Et võrrandil on juba kuju (2) ning $p = 3 > 0$, siis on tegemist III juhuga. Arvutused annavad nüüd:

$$r = \sqrt{\frac{3}{3}} = 1$$

$$\tan\varphi = \frac{2}{2} = 1$$

$$\varphi = 45°$$

---

* Sümbol $\mathrm{Re}(y)$ tähendab kompleksarvu y reaalosa, ja sümbol $\mathrm{Im}(y)$ selle kompleksarvu imaginaarosa k o r d a j a t.

$$\frac{\varphi}{2} = 22°30'$$

$$\lg \tan \frac{\varphi}{2} = \overline{1},6172$$

$$\lg \tan \psi = \frac{1}{3} \lg \tan \frac{\varphi}{2} = \overline{1},8724$$

$$\psi = 36°42'$$
$$2\psi = 73°24'$$
$$\cot 2\psi = 0,2981$$

$$x_1 = 2 \cot 2\psi = 0,5962$$

$$\mathrm{Re}(x_2) = \mathrm{Re}(x_3) = -\frac{1}{2} x_1 = -\cot 2\psi = -0,2981$$

$$\lg 3 = 0,4771$$

$$\frac{1}{2} \lg 3 = 0,2386$$

$$\lg \sin 2\psi = \overline{1},9815$$

$$\lg \mathrm{Im}(x_2) = 0,2571$$
$$\mathrm{Im}(x_2) = 1,803$$
$$\mathrm{Im}(x_3) = -\mathrm{Im}(x_2) = -1,803$$

Seega

$$x_2 = -0,2981 + 1,803i$$
$$x_3 = -0,2981 - 1,803i.$$

Olgu veel märgitud, et viimasel kahel juhul on Viète'i valem $y_1 + y_2 + y_3 = -r$ arvutustäpsuse piirides alati rahuldatud, mis nähtub valemitest (11) ja (14). Seetõttu peab siin kontrollimiseks kasutama mõnda teist seost.

KÕRGEMAT JÄRKU ARITMEETILISED PROGRESSIOONID

E. Tamme

Keskkoolis tutvutakse aritmeetilise progressiooniga. Järgnevas vaatleme mõnevõrra üldisemaid nn. kõrgemat järku aritmeetilisi progressioone ning tuletame nende üldliikmete ja summade valemid. Kõigepealt toome sisse mõned mõisted ja tähistused.

Kõrgemat järku artimeetilise progressiooni mõiste

Vaatleme arvude jada

$$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$$

ning moodustame vahed ehk esimest järku vahed

$$u_1^{(1)} = u_2 - u_1, \quad u_2^{(1)} = u_3 - u_2, \ \ldots, \ u_n^{(1)} = u_{n+1} - u_n, \ \ldots$$

Esimest järku vahede vahesid

$$u_1^{(2)} = u_2^{(1)} - u_1^{(1)}, \quad u_2^{(2)} = u_3^{(1)} - u_2^{(1)}, \ \ldots$$
$$\ldots, \ u_n^{(2)} = u_{n+1}^{(1)} - u_n^{(1)}, \ \ldots$$

nimetatakse teist järku vahedeks. Analoogiliselt defineeritakse kolmandat, neljandat ja kõrgemat järku vahed. Üldiselt *k*-järku vahedeks nimetatakse $(k-1)$-järku vahede vahesid:

$$u_1^{(k)} = u_2^{(k-1)} - u_1^{(k-1)}, \quad u_2^{(k)} = u_3^{(k-1)} - u_2^{(k-1)}, \ \ldots$$
$$\ldots, \ u_n^{(k)} = u_{n+1}^{(k-1)} - u_n^{(k-1)}, \ \ldots$$

Arvutamisel on sobiv kõrgemat järku vahed kirjutada nn. *vahede skeemi*:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
u_1 & & u_2 & & u_3 & & u_4 & & u_5 & & u_6 \\
& u_1^{(1)} & & u_2^{(1)} & & u_3^{(1)} & & u_4^{(1)} & & u_5^{(1)} & \\
& & u_1^{(2)} & & u_2^{(2)} & & u_3^{(2)} & & u_4^{(2)} & & \\
& & & u_1^{(3)} & & u_2^{(3)} & & u_3^{(3)} & & &
\end{array}$$

Sellesse skeemi kirjutatakse kõigepealt jada liikmed u_1, u_2, ... ning seejärel arvutatakse iga ülejäänud arv kui kahe tema kohal oleva arvu vahe.

Näide 1. Moodustame arvude jada

$$2, -6, -13, -16, -12, 2, 29, 72, \dots$$

jaoks vahede skeemi:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
2 & & -6 & & -13 & & -16 & & -12 & & 2 & & 29 & & 72 \\
& -8 & & -7 & & -3 & & 4 & & 14 & & 27 & & 43 & \\
& & 1 & & 4 & & 7 & & 10 & & 13 & & 16 & & \\
& & & 3 & & 3 & & 3 & & 3 & & 3 & & & \\
& & & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & & &
\end{array}$$

Antud juhul neljandat ja kõrgemat järku vahed on nullid.

Teatavasti nimetatakse arvude jada aritmeetiliseks progressiooniks, kui tema esimest järku vahed on omavahel võrdsed ja nullist erinevad. Järgnevas nimetame sellist jada esimest järku aritmeetiliseks progressiooniks. Üldiselt nimetame arvude jada *k*-järku aritmeetiliseks progressiooniks, kui tema *k*-järku vahed on omavahel võrdsed ja nullist erinevad. Ilmselt *k*-järku aritmeetilise progressiooni korral $(k+1)$-st ja kõrgemat järku vahed võrduvad nulliga.

Näites 1 vaadeldud jada on seega kolmandat järku aritmeetiline progressioon. Tema esimest ja teist järku vahed on vastavalt teist ja esimest järku aritmeetilised progressioonid.

Kõrgemat järku aritmeetilise progressiooni üldliige

Esimest järku aritmeetilise progressiooni üldliige avaldub teatavasti kujul

$$u_n = u_1 + (n-1)u_1^{(1)}. \tag{1}$$

Tuletame analoogilise valemi teist järku aritmeetilise progressiooni üldliikme u_n jaoks. Teist järku aritmeetilise progressiooni esimest järku vahed $u_n^{(1)}$ moodustavad esimest järku aritmeetilise progressiooni, mille vaheks on $u_n^{(2)}$. Seetõttu valemi (1) põhjal

$$u_n^{(1)} = u_1^{(1)} + (n-1)u_1^{(2)}.$$

Seda arvestades järeldub seosest $u_n^{(1)} = u_{n+1} - u_n$, et

$$u_{n+1} = u_n + u_1^{(1)} + (n-1)u_1^{(2)}. \tag{2}$$

Viimase valemi abil saame

$$\begin{aligned}
u_2 &= u_1 + u_1^{(1)}, \\
u_3 &= u_2 + u_1^{(1)} + u_1^{(2)} = u_1 + 2u_1^{(1)} + u_1^{(2)}, \\
u_4 &= u_3 + u_1^{(1)} + 2u_1^{(2)} = u_1 + 3u_1^{(1)} + 3u_1^{(2)}, \\
u_5 &= u_4 + u_1^{(1)} + 3u_1^{(2)} = u_1 + 4u_1^{(1)} + 6u_1^{(2)}, \\
u_6 &= u_5 + u_1^{(1)} + 4u_1^{(2)} = u_1 + 5u_1^{(1)} + 10u_1^{(2)}.
\end{aligned}$$

Neid avaldisi analüüsides võib püstitada hüpoteesi, et teist järku aritmeetilise progressiooni üldliige

$$u_n = u_1 + (n-1)u_1^{(1)} + \frac{(n-1)(n-2)}{2}u_1^{(2)}. \tag{3}$$

Selle valemi tõestamiseks kasutame täieliku induktsiooni meetodit. Valem (3) on ilmselt õige, kui $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Teeme oletuse, et see valem on õige mingi naturaalarvu n korral. Vaatleme, kuidas avaldub siis u_{n+1}. Valemite (2) ja (3) abil saame

$$u_{n+1} = u_n + u_1^{(1)} + (n-1)u_1^{(2)} = u_1 + (n-1)u_1^{(1)} + \frac{(n-1)(n-2)}{2}u_1^{(2)} + u_1^{(1)} + (n-1)u_1^{(2)} = u_1 + nu_1^{(1)} + \frac{n(n-1)}{2}u_1^{(2)}.$$

Viimane avaldis ühtib valemi (3) parema poolega, kui seal indeks n asendada indeksiga $n+1$. Seega valemi (3) kehtivusest mingi naturaalarvu n korral järeldub tema kehtivus ka ühe võrra suurema naturaalarvu $n+1$ korral, millega ongi tõestatud selle valemi kehtivus mis tahes naturaalarvu n korral. Tõepoolest valemi kehtivusest $n = 6$ korral järeldub tema kehtivus $n = 7$ korral, millest omakorda järeldub tema kehtivus $n = 8$ korral jne.

Soovitame lugejal analoogiliste mõttekäikude abil tõestada, et kolmandat järku aritmeetilise progressiooni üldliige

$$u_n = u_1 + (n-1)u_1^{(1)} + \frac{(n-1)(n-2)}{2}u_1^{(2)} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}u_1^{(3)}. \qquad (4)$$

Püüame leida üldise valemi k-järku aritmeetilise progressiooni üldliikme jaoks. Paneme tähele, et kordajad valemites (2), (3) ja (4) kujutavad teatavaid kombinatsioone

$$C_{n-1}^{i} = \frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-i)}{i!}.$$

See viib mõttele, et k-järku aritmeetilise progressiooni üldliige avaldub kujul

$$u_n = u_1 + (n-1)u_1^{(1)} + \frac{(n-1)(n-2)}{2!}u_1^{(2)} + \ldots + \frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-k)}{k!}u_1^{(k)} \qquad (5)$$

ehk lühemalt

$$u_n = u_1 + C_{n-1}^{1}u_1^{(1)} + C_{n-1}^{2}u_1^{(2)} + \ldots + C_{n-1}^{k}u_1^{(k)}.$$

Esialgu on see muidugi ainult oletus. Valemi (5) tõestamiseks kasutame täieliku induktsiooni meetodit. Eespool nägime, et valem (5) kehtib esimest ja teist järku aritmeetilise progressiooni, s. t. $k = 1$ ja $k = 2$ korral. Püstitame oletuse, et mingi fikseeritud naturaalarvu k korral k-järku aritmeetilise progressiooni üldliige avaldub valemi (5) abil. Näitame, et sellest järeldub sama valemi kehtivus ka $(k+1)$-järku aritmeetilise progressiooni korral, s. t. et $(k+1)$-järku aritmeetilise progressiooni üldliige

$$u_n = u_1 + (n-1)u_1^{(1)} + \frac{(n-1)(n-2)}{2!} u_1^{(2)} + \ldots + \\ + \frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-k-1)}{(k+1)!} u_1^{(k+1)}. \qquad (6)$$

Sellega olekski tõestatud valemi (5) kehtivus mis tahes kõrgemat järku aritmeetilise progressiooni korral.

Asume põhjendama valemit (6). Märkame, et $(k+1)$-järku aritmeetilise progressiooni esimest järku vahed $u_n^{(1)} = u_{n+1} - u_n$ moodustavad k-järku aritmeetilise progressiooni, mistõttu tehtud eeldustel saame valemi (5) abil

$$u_n^{(1)} = u_1^{(1)} + (n-1)u_1^{(2)} + \ldots + \frac{(n-1)\ldots(n-k)}{k!} u_1^{(k+1)}.$$

Seega

$$u_{n+1} = u_n + u_n^{(1)} = u_n + u_1^{(1)} + (n-1)u_1^{(2)} + \\ + \ldots + \frac{(n-1)\ldots(n-k)}{k!} u_1^{(k+1)}. \qquad (7)$$

Seosest (7) valemi (6) järeldamiseks kasutame teistkordselt täieliku induktsiooni meetodit, kusjuures muutuvaks indeksiks on nüüd n. Valem (6) on ilmselt õige $n = 1$ korral. Oletame, et see valem jääb kehtima ka mingi naturaalarvu n korral. Siis valemite (7) ja (6) abil

$$u_{n+1} = u_1 + (n-1)u_1^{(1)} + \frac{(n-1)(n-2)}{2!} u_1^{(2)} + \ldots + \\ + \frac{(n-1)\ldots(n-k)(n-k-1)}{(k+1)!} u_1^{(k+1)} + u_1^{(1)} + \\ + (n-1)u_1^{(2)} + \ldots + \frac{(n-1)\ldots(n-k)}{k!} u_1^{(k+1)} = \\ = u_1 + nu_1^{(1)} + \frac{(n-1)n}{2!} u_1^{(2)} + \ldots + \\ + \frac{(n-1)\ldots(n-k)n}{(k+1)!} u_1^{(k+1)}.$$

Näeme, et valem (6) peab kehtima ka indeksi $n+1$ korral ning järelikult mis tahes naturaalarvu n korral. Sellega oleme lõplikult tõestanud valemi (5).

Näide 2. Leiame näites 1 vaadeldud kolmandat järku aritmeetilise progressiooni üldliikme u_n avaldise. Valemi (5) põhjal

$$u_n = 2 + (n-1)\cdot(-8) + \frac{(n-1)(n-2)}{2} \cdot 1 + \\ + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6} \cdot 3 = 8 - 4n - \frac{5}{2} n^2 + \frac{1}{2} n^3.$$

Kui valemis (5) avame sulud, siis saame k-järku aritmeetilise progressiooni üldliikme avaldisele anda kuju

$$u_n = a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \ldots + a_k n^k, \tag{8}$$

kus $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k$ on vaadeldavast progressioonist sõltuvad arvulised kordajad. Osutub, et kehtib ka vastupidine väide. Iga jada, mille üldliige avaldub kujul (8), on k-järku aritmeetiline progressioon, kui $a_k \neq 0$. Selle väite põhjendamiseks arvutame vahe

$$\begin{aligned} u_n^{(1)} &= u_{n+1} - u_n = a_0 + a_1(n+1) + a_2(n+1)^2 + \ldots + \\ &+ a_k(n+1)^k - (a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \ldots + a_k n^k) = \\ &= (a_1 + a_2 + \ldots + a_k) + (2a_2 + 3a_3 + \ldots + k a_k) n + \\ &+ \ldots + k a_k n^{k-1}. \end{aligned}$$

Näeme, et esimest järku vahe üldliige on n suhtes $(k-1)$-astme polünoom. Analoogiliselt saame näidata, et teist järku vahe üldliige on $(k-2)$-astme polünoom, kolmandat järku vahe $(k-3)$-astme polünoom jne., kuni lõpuks k-järku vahe on konstant

$$u_n = k!\, a_k.$$

Seega valem (8) määrab tõepoolest k-järku aritmeetilise progressiooni, kui $a_k \neq 0$.

Kõrgemat järku aritmeetilise progressiooni liikmete summa

Tähistame k-järku aritmeetilise progressiooni n liikme summa

$$s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \sum_{i=1}^{n} u_i.$$

Need summad moodustavad samuti teatud jada. Arvutame vastavad vahed

$$\begin{aligned} s_n^{(1)} &= s_{n+1} - s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + u_{n+1} - \\ &- (u_1 + u_2 + \ldots + u_n) = u_{n+1}. \end{aligned}$$

Seega summade jada esimest järku vahedeks on parajasti lähtejada liikmed. Indeksi nihkest vabanemiseks võtame vaatluse alla jada

$$0, s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots,$$

s. t. summade jada, millele on esimese liikmena lisatud 0. Selle jada vahede skeemil on kuju:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & & s_1 & & s_2 & & s_3 & & s_4 & & s_5 \\ & u_1 & & u_2 & & u_3 & & u_4 & & u_5 & \\ & & u_1^{(1)} & & u_2^{(1)} & & u_3^{(1)} & & u_4^{(1)} & & \\ & & & u_1^{(2)} & & u_2^{(2)} & & u_3^{(2)} & & & \end{array}$$

Näeme, et k-järku aritmeetilise progressiooni liikmete summad moodustavad $(k+1)$-järku aritmeetilise progressiooni.

Seetõttu valemi (5) abil saame

$$s_{n-1} = 0 + (n-1)u_1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2!} u_1^{(1)} + \ldots +$$
$$+ \frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-k)}{k!} u_1^{(k+1)}.$$

Sellega oleme tuletanud üldise valemi k-järku aritmeetilise progressiooni n liikme summa arvutamiseks:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} u_i = nu_1 + \frac{n(n-1)}{2!} u_1^{(1)} + \ldots +$$
$$+ \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} u_1^{(k)}. \qquad (9)$$

Näide 3. Leida näites 1 vaadeldud kolmandat järku aritmeetilise progressiooni 10 liikme summa s_{10}. Valemi (9) põhjal

$$s_n = 2n - 8\frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} + 3\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}.$$

Seega

$$s_{10} = 20 - \frac{8\cdot 10\cdot 9}{2} + \frac{10\cdot 9\cdot 8}{6} + \frac{3\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{24} = 410.$$

Näide 4. Arvutada naturaalarvude ruutude summa

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2.$$

Jada üldliikmega $u_n = n^2$ on teist järku aritmeetiline progressioon. Moodustame tema jaoks vahede skeemi:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & & 4 & & 9 & & 16 \\ & 3 & & 5 & & 7 & \\ & & 2 & & 2 & & \end{array}$$

Valemi (9) põhjal

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = n + 3\cdot\frac{n(n-1)}{2} + 2\cdot\frac{n(n-1)(n-2)}{6} =$$
$$= \frac{n}{6}(1 + 3n + 2n^2) = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1).$$

Sageli esineb probleeme, mille puhul on teada kõrgemat järku aritmeetilise progressiooni üldliige kujul (8) ning on vaja leida summa

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} u_i.$$

Sellisel juhul võib arvutada progressiooni esimeste liikmete väärtused (piisab $k+1$ liikme arvutamisest), moodustada vastav vahede skeem ning leida otsitav summa valemi (9) abil.

Tavaliselt on aga seda tüüpi summa arvutamisel lihtsam kasutada seost

$$\sum_{i=1}^{n}(a_0+a_1 i+a_2 i^2+\ldots+a_k i^k)=$$
$$=na_0+a_1\sum_{i=1}^{n} i+a_2\sum_{i=1}^{n} i^2+\ldots+a_k\sum_{i=1}^{n} i^k. \tag{10}$$

Viimase valemi rakendamiseks tuleb leida naturaalarvude astmete summad, millest esimesed avalduvad

$$\sum_{i=1}^{n} i=\frac{1}{2}n(n+1),$$
$$\sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),$$
$$\sum_{i=1}^{n} i^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2.$$

Nendest valemitest teise tuletasime näites 4. Esimese ja kolmanda soovitame lugejal iseseisvalt põhjendada.

Näide 5. Arvutame summa

$$\sum_{i=1}^{n}(i+1)(i+3).$$

Selleks avame sulud ja kasutame valemit (10):

$$\sum_{i=1}^{n}(i+1)(i+3)=\sum_{i=1}^{n}(i^2+4i+3)=\sum_{i=1}^{n} i^2+4\sum_{i=1}^{n} i+3n=$$
$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+2n(n+1)+3n=$$
$$=\frac{1}{6}n(2n^2+15n+31).$$

Lõpuks anname lugejale lahendamiseks mõned ülesanded.

1. Leida teist järku aritmeetilise progressiooni
$$1,\ 7,\ 11,\ 13,\ 13,\ 11,\ \ldots$$
üldliige ja n liikme summa.

2. Leida $\sum_{i=1}^{n} i^4$.

3. Leida $\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2)$.

4. Ühesuurustest kerakujulistest kuulidest on laotud korrapärane kolmnurkne püramiid, mille põhja igal serval on 100 kuuli. Mitu kuuli on püramiidis?

5. On 21 kuubikujulist reservuaari, millest esimese serva pikkus on 1 m ning iga järgneva serv 10 cm võrra pikem. Mitu liitrit vedelikku mahutavad need 21 reservuaari kokku?

Mõnda induktsioonist

Esitame lugejale lisaks paar lookest induktsiooni kohta, mis on võetud raamatust G. Polya, «Mathematics and Plausible Reasoning» [1].

Loogik, matemaatik, füüsik ja insener

«Vaata matemaatikut!» ütles loogik. «Ta märkab, et esimesed üheksakümmend üheksa arvu on sajast väiksemad, ning järeldab siit selle abil, mida ta nimetab induktsiooniks, et kõik arvud on sajast väiksemad.»

«Füüsik usub,» ütleb matemaatik, «et 60 jagub kõigi arvudega. Ta paneb tähele, et 60 jagub arvudega 1, 2, 3, 4, 5 ja 6. Ta proovib veel mõningaid teisi arve, näiteks 10, 20 ja 30, mis on võetud (nagu ta ise ütleb!) juhuslikult. Et 60 jagub ka nende arvudega, siis ta järeldab, et eksperimentaalseid andmeid on küllaldaselt.»

«Jah, kuid vaata inseneri!», esitas vastuväite füüsik. «Inseneril on tekkinud mulje, et kõik paaritud arvud on algarvud. Arvu 1 võib igatahes vaadelda kui algarvu, tõestab ta. Seejärel tulevad 3, 5 ja 7, mis kõik on kahtlemata algarvud. Edasi tuleb 9, ebameeldiv juhtum: see nähtavasti ei ole algarv. Kuid 11 ja 13 on muidugi algarvud. Pöördume nüüd tagasi 9 juurde, ütleb ta, ja järeldab, et 9 puhul peab tegemist olema katseveaga.»

Kas mis tahes *n* arvu on võrdsed?

Te tahaksite ütelda «ei». Aga kui võtta siiski ette katse tõestada matemaatilise induktsiooni abil vastupidist? Kuid et palju meelitavam on tõestada väidet «mis tahes n neiul on sama värvi silmad», siis piirdume viimase sõnastusega.

Juhul $k = 1$ on väide ilmselt õige (või «sisutu»). Jääb teostada üleminek arvult k arvule $k + 1$. Konkreetsuse mõttes läheme siin üle kolmelt neljale, jättes üldjuhu läbivaatamise lugejale. Lubage teile esitada nelja neidu, kelle nimed olgu Hille, Ilme, Juta ja Kersti, või lühidalt H, I, J ja K. Eeldatakse ($k = 3$), et neidude H, I ja J silmad on sama värvi. Täpselt samuti (eelduse põhjal) on ka neidude I, J ja K silmad sama värvi ($k = 3$). Järelikult kõigi nelja neiu H, I, J ja K silmad peavad olema sama värvi. Täieliku selguse saamiseks võib vaadelda skeemi

$$H,\ I,\ J,\ K.$$

See tõestab väite $k + 1 = 4$ korral, aga üleminek näiteks neljalt viiele pole ilmselt raskem.

Selgitage seda paradoksi. Võite kasutada ka eksperimentaalset lähenemist, vaadates silma mõnedele neidudele.

---

[1] On olemas venekeelne tõlge: Пойа, Д., Математика и правдоподобные рассуждения. М., 1957.

LEHEKÜLGI MATEMAATIKA AJALOOST EESTIS

Ü. Lumiste

Matemaatika on ürgsemaid teadusi, mille esimesed sammud ulatuvad tagasi inimühiskonna hällini. Võib liialdamata öelda, et samal ajal, kui tekkis arusaamine heast ja kurjast, kurbusest ja rõõmust, hakati eristama ka paljut vähesest, ümmargust kandilisest — hakkasid kujunema esimesed matemaatilised mõisted, mis üha täiustudes tungisid lahutamatult inimeste igapäevasesse ellu. Ei ole midagi imestusväärset selles, et kultuurrahvaste esimestes kirjapanekutes kohtame tähekujundite kõrval ka arvumärke, et praegune koolipoiss peab veerimise kõrval avastama ühe ürgseima «loodusseaduse»: summa ei olene liidetavate järjekorrast! Ilma matemaatikata ei ole hakkama saanud ükski ühiskond, matemaatiliste teadmiste sügavust ühe või teise rahva juures loevad mitmed uurijad kultuuritaseme üheks veenvaimaks iseloomustajaks. Ega asjatult pole kreeka sõna *mathēma* tähenduseks — teadmised, teadus.

Ka muistne eesti ühiskond oli kahtlemata välja kujundanud lihtsamad matemaatilised mõisted ja arusaamised. Tähelepanuvääriv on näiteks eesti keele arvsõnade süsteemi lihtsus ja selgus, range ja korrapärane geomeetriline ornamentika etnograafilistel esemetel. Keelelised andmed, folkloori ja vanavara rikkalikud kogud meie muuseumides on ainsateks nüüdisaegseteks tunnismärkideks, mis on säilitanud osakesi esivanemate kunagistest oskustest ja teadmistest. Paraku jutustavad need mälestused — pügalpulgad, sirvilauad, kirjatud tarbeesemed, rahvajutud ja -mõistatused meile praegu veel üpris vähe matemaatika varasest ajaloost meie maal, rahvapärasest «mõõduja plaanimajandusest», mis teataval moel vaieldamatult oli olemas. Nende uurimine sellelt seisukohalt on üsna algusjärgus ja ootab alles entusiaste.

Esivanemate ärkava kultuuri vaba arengu katkestasid vägivaldselt XIII sajandi alguses «püha» lipu all meie maale tunginud raudmeeste väed. Sellest ajast peale sai haridus ja õpetatus levida tervete sajandite kestel ainult valitsevates ringkondades, vähesed ärksamad noored maarahva seast said sellest osa üksnes saksastumise hinnaga.

Järgnevas ülevaates on püütud heita põgus pilk matemaatika ajaloole Eestis esimestest teadaolevatest andmetest tänapäevani. Juttu tuleb vanimatest Eestis trükitud matemaatilise sisuga raamatutest, matemaatikast Tallinna gümnaasiumis ja Tartu *Academia Gustaviana*'s XVII sajandil, XVIII sajandi «rehkendusraamatutest», matemaatikaalasest teaduslikust tööst XIX sajandil Tartu ülikoolis, eestikeelse matemaatilise kirjanduse algpäevist ja esimestest eesti teadlastest-matemaatikutest, matemaatika enneolematust õitselepuhkemisest Nõukogude Eestis. Kogu kirjutis kujutab endast mosaiiki, milles on püütud siduda üksikuid talletatud ja kirjandusest ammutatud andmeid ning liita neid ühtsesse ajaloolisse järgnevusse. Üksikasjalikust ja kõikehaaravast teemakäsitlusest ollakse siin veel kaugel. Kuid millestki tuleb ometi alustada!

Esimesed hariduskolded Eestis

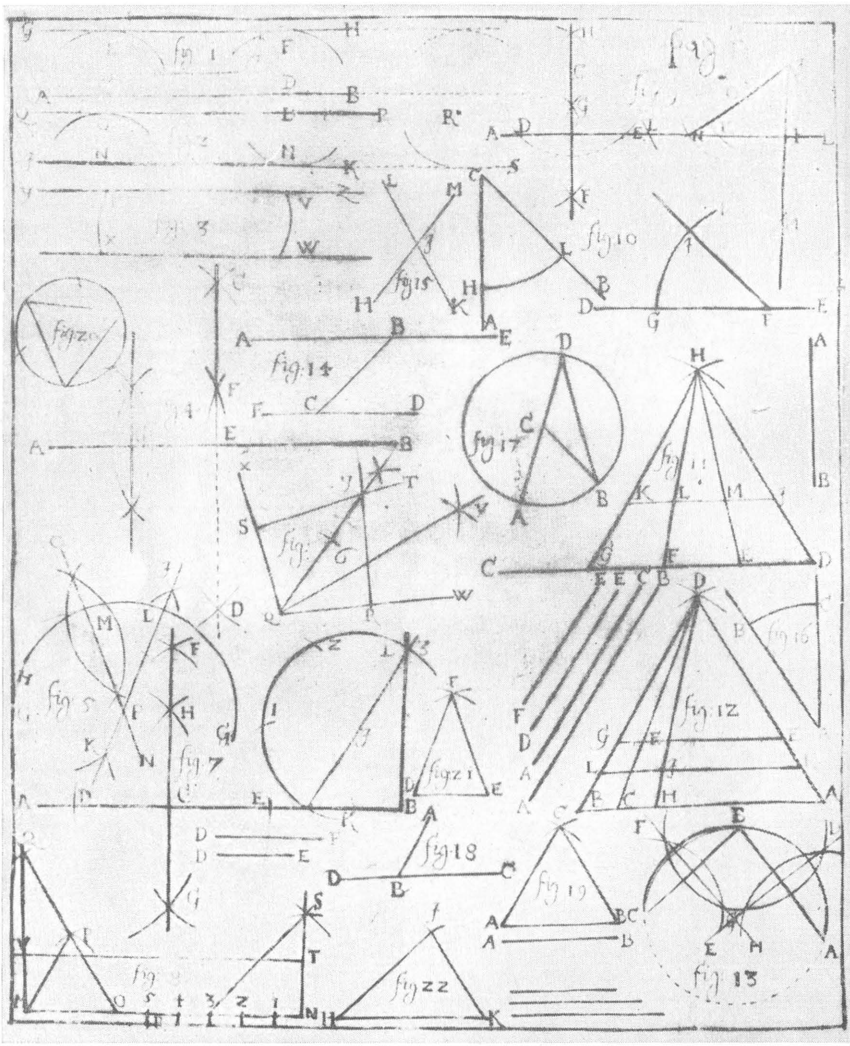
Ülemkihi jaoks rajatud koolivõrk Eestis hakkas tekkima juba XIV sajandil, kui eesti linnades asutati esimesed toomkoolid. Tallinnas avati selline kool näiteks 1319. aastal. Esimesed andmed Tallinna triviaal- ehk linnakoolist pärinevad XVI sajandi 30-ndatest aastatest. Orduaja lõpul töötasid niisugused koolid veel Tartus, Pärnus ja teistes Eesti ala linnades. Õpetajate nimetused *Rector*, *Arithmeticus* ja *Cantor* viitavad sellele, et õpetus haaras ka aritmeetika algteadmisi. Mõnesugust algõpetust võisid nendes koolides saada ka linnas elunevate eesti lihttööliste lapsed. Nii on näiteks teada, et Tallinnas töötas XVI sajandi keskel koguni eesti linnakool.

Tõsisematest teaduseharrastustest Eesti pinnal saab kõnelda alles XVII sajandi 30-ndatest aastatest alates, kui Tallinnas ja Tartus asutati esimesed gümnaasiumid. Praegune Tallinna I Keskkool võib oma ajalugu alustada 1631. aastaga. Tartu gümnaasium rajati küll aasta varem, kuid muudeti 1632. aastal ülikooliks nimega *Academia Gustaviana.* Viimane tegutses 1656. aastani ja seejärel peale mõnekümneaastast vaheaega nime all *Academia Gustavo-Carolina* kuni 1710. aastani, seejuures viimased kümmekond aastat Pärnus [1].

Uutesse õppeasutustesse sõitis kokku mitmeid õpetatud mehi peaasjalikult Saksamaalt, nende hulgas ka matemaati-

[1] Кенкмаа, Р. и Эрингсон, Л., Из истории Academia Gustaviana в Тарту (1632—1656). — Skandinaavia kogumik, II. Tallinn, 1957, lk. 137—175. Эрингсон, Л., Из истории Academia Gustavo-Carolina (1690—1710). — Skandinaavia kogumik, VII. Tallinn, 1963, lk. 184 jj.

Joonis 1. G. Himseli raamatu tiitelleht. Pythagoras, kes viitab tema nime kandvat teoreemi illustreerivale joonisele, kannab kilpi sõnadega: «Avastus, mis on väärt saja härja ohvriks toomist». Sürakuusa alla tunginud vaenlase laevu keeruka kangisüsteemi abil kummutava Archimedese kilbile on kirjutatud: «Andke mulle toetuspunkt ja ma nihutan paigast Maa».



Joonis 2. Jooniste leht G. Himseli raamatust.

kuid. Tartu rootsiaegse ülikooli põhikirjas oli näiteks ette nähtud kolm professorit-matemaatikut keskajast pärinevate huvitavate nimetustega: *Euclideus*, *Archimedeus* ja *Ptolemaicus*. Esimene pidi õpetama «puhast» matemaatikat (s. t. aritmeetikat ja geomeetriat), teine muusikateooriat, optikat ja mehaanikat, kolmas astronoomiat, geograafiat ja arhitektuuri. Tegelikult ei olnud aga esimeses Tartu ülikoolis kunagi üle ühe matemaatikaprofessori ning üle ühe astronoomia- ja füüsikaprofessori. Professoreiks nimetati muide ka Tallinna gümnaasiumi õpetajaid. Üldse oli vahe nende kahe kõrgemat tüüpi kooli vahel rohkem välist vormi kui õpetuse sisu puudutav. Maa kultuurilist arengut on Tallinna gümnaasium oma pideva tegutsemisega vahest rohkemgi mõjustanud kui *Academia Gustaviana*, mis töötas väikese, peamiselt rootslastest ja soomlastest üliõpilaskonnaga ühtekokku alla poole sajandi (1632—1656, 1690—1710), ja sedagi suhteliselt lahus kohalikest elanikest.

Käsiteldava teema seisukohalt on tollest ajast vahest kõige hinnatavam see, et mõlema õppeasutuse juurde rajati esimesed regulaarsed trükikojad Eesti alal, milles trükiti muuhulgas ka esimesed kohapeal koostatud matemaatilise sisuga teosed.

Matemaatikast Tallinna gümnaasiumis XVII sajandil

Kõige varasemaks Eestis trükitud matemaatikaraamatuks on Tallinna gümnaasiumi esimese matemaatikaprofessori Gebhard Himseli (*Himselius*; 1603—1676) töö: «Kolmeosaline fortifikatsiooni-alane kogumik ehk lühike, lihtne, kuid ometi põhjalik ja tõepärane õpetus praeguse-aegsest sõja-ehituskunstist, ... Tallinn, trükitud gümnaasiumi raamatutrükkali Heinrich Westphali juures, 1647» (joon. 1). Raamatu ainsat teadaolevat eksemplari säilitatakse TRÜ Teaduslikus Raamatukogus.

Autor oli pärit Saksamaalt Magdeburgist. 1632. a. sai ta Tallinna gümnaasiumi professoriks ja võttis peagi linna elust väga mitmekülgselt ja elavalt osa. Saksamaal ja Åbo (praegu Turu) ülikoolis omandatud meditsiinialaseid teadmisi rakendas Himsel linnaarsti ja raeapteegi juhataja kohuseid täites. Linna kindlustustööde juhatajana on ta jätnud jälgi Tallinna praegusessegi ilmesse. Ülalmainitud raamatu kõrval on ta kirjutanud veel «*Architectura militaris*» ja «*Cometologia*», millede avaldamise kohta puuduvad andmed, samuti tegutses G. Himsel esimeste kohapealsete kalendrite väljaandjana [2].

Oma 1647. a. ilmunud raamatus käsitleb Himsel mitmesuguseid fortifikatsiooni-alaseid küsimusi: linnade ja ehituste plaanistamist, perspektiivset kujutamist, mitmesuguseid tol

---

[2] Hansen, G. v., Geschichtsblätter des revalschen Gouvernements-Gymnasiums zu dessen 250-jährigen Jubiläum. Reval, 1881, lk. 183.

ajal sõjaarhitektuuris käibel olnud reegleid, nende kasutamist kindlustustööde juures jm. Need küsimused põimusid niivõrd tihedalt matemaatiliste ülesannetega, et Himsel loeb fortifikatsiooni koguni matemaatika üheks osaks.

Oma raamatut alustabki ta vajalike geomeetriliste eelteadmiste esitamisega (joon. 2). Ta tutvustab rööp- ja ristsirgete konstrueerimist, nurga ülekandmist, lõigu jagamist võrdseteks osadeks ja neljanda võrdelise lõigu leidmist. Raamatus tuuakse ilma tõestusteta teoreemid rööpsirgete lõikamisel tekkivatest nurkadest, antud kaarele toetuvast piirde- ja kesknurgast, kolmnurga sisenurkade summast, vastavalt võrdsete külgedega või võrdsete nurkadega kolmnurkadest, kolmnurga lõikamisest ühe küljega paralleelse sirgega ning kolmnurga pindala leidmisest kolme külje järgi. Üksikasjalikult käsitletakse korrapäraste hulknurkade (kuni 19-nurga) praktilist konstrueerimist. Esitatakse tabel, milles on toodud ühikringi sisse joonestatud korrapärase n-nurga ($n = 3, \ldots, 30$) külje ja apoteemi pikkused, ning märgitakse, et suvalise raadiuse korral tuleb kasutada «kolmiku reeglit» (*regula tribus*), s. t. suuruste võrdelisust. Leitakse hulknurga sisenurga summa ja kirjeldatakse hulknurga pindala arvutamist. Huvi pakub arvu π tutvustamine:

«Diameetri ja ümbermõõdu suhte leidmisega on küll paljud suurt vaeva näinud, teda ei ole aga seni veel leitud, võib-olla jääbki leidmata. Esimeses Kuningate raamatus, 7. ptk., 23. s.[3] seisab, et Saalomoni suur bassein olla ülevalt 10 küünart lai olnud ja 30-küünrane nöör olnud ümbermõõduks, see on nagu 1 3-sse[4]. See suhe ei ole aga õige. Archimedes on leidnud järgmist: nagu 7 22-sse, nii diameeter ümbermõõdusse ja nii oleks selle järgi basseini ümbermõõt $31^3/_7$ küünart olnud... Ludolph Kölnist[5] jõuab küll kõige lähemale, tal on järgmine:

nagu 100/000/000/000/000/000/000/000/000/000/000
314/159/265/358/979/323/846/264/338/327/951-sse,

nii suhtub ringjoone diameeter ümbermõõdusse. See suhe on natuke suurem ja siis, kui ma viimase 1 asemel 0 võtan, on ta natuke väiksem.»

Töö teine osa on pühendatud otseselt fortifikatsioonile, kolmandas osas pöördub aga Himsel uuesti tagasi matemaati-

---

[3] Piibli Vana Testamendi ühes osas, kus ajaloolise kroonika asjalikkusega kirjeldatakse Iisraeli-Juudi ühendatud kuningriigi viimase kuninga Saalomoni (Šelomo) valitsemise ajal (*ca* a. 960—935 e. m. a.) rajatud suure templi ehitamist.

[4] See piiblisalm kõlab eestikeelse piibli 1924. a. redaktsioonis järgmiselt: «Ja ta tegi ühe valatud pesemise astja, kümme küünart oli see oma teisest äärest teise, ümmargune ümberringi, ja viis küünart tema kõrgus ja üks kolmekümne-küünrane nöör läks selle ümber.» Siin kasutatud väärtus $\pi = 3$, mis esines muide juba vanades babüloonia tekstides, muudeti hiljem (meie ajaarvamise esimestel sajanditel) vana-juudi talmudis koguni «pühaks arvuks». (Vt. Ван дер Варден Б. Л., Пробуждающаяся наука. Математика Древнего Египта, Вавилона и Греции. Москва, 1959, lk. 43 ja 44).

[5] Ludolph van Ceulen (1540—1610) — hollandi matemaatik, kes arvutas π ligikaudse väärtuse 32 õige kohaga (avaldati posthuumselt 1615. a., s. t. 32 aastat enne Himseli raamatu ilmumist). Seda ligikaudset väärtust, mille Himsel esitabki, nimetatakse tihti ka Ludolphi arvuks.

kasse — nimelt trigonomeetriasse, kus ta käsitleb täis- ja kaldnurksete kolmnurkade elementide arvutamist. Tavaliste korrutamis- ja jagamistehete abil sooritatavate arvutuste kõrval tutvustab Himsel prostafereetilist meetodit ja šoti matemaatiku John Napieri (1550—1617) logaritmide meetodit. Esimene meetod seisneb korrutamistehte asendamises liitmis- ja lahutamistehtega valemite

$$2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$$
$$2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)$$

abil ning sai nimetuse kreekakeelsetest sõnadest *prostesis* (lisamine) ja *afareisis* (äravõtmine). See meetod saavutas XVI sajandi lõpul laialdase leviku, eriti tänu taani astronoomi Tycho Brahe (1546—1601) ja tema õpilaste töödele. Samu eesmärke teeniva märksa täiuslikuma logaritmide meetodi andis 1614. aastal J. Napier. Himsel oma raamatus kasutab arvukate näidete juures kõiki kolme meetodit paralleelselt. Esmalt annab ta lahenduse tavalisel viisil, seejärel prostafereetilise meetodiga ning lõpuks logaritmide meetodiga.

Matemaatilise materjali rohkus Himseli fortifikatsioonialases raamatus ei ole juhuslik. Vastavate teadmiste vajalikkus sõjaasjanduses tegi matemaatika üldse üheks kõige tähtsamaks aineks balti-saksa aadlivõsude koolihariduses XVII sajandil ja põhjustas näiteks 1688. a. aadli pöördumise Tallinna Gümnaasiumi poole palvega asendada aadlisoost õpilastel neile mittevajalikud ained (kreeka ja heebrea keel jm.) matemaatika kui ülimalt vajaliku teaduse täiendavate osadega. Neli aastat hiljem koostatud gümnaasiumi visitatsiooni protokollist selgub, et selleaegne matemaatikaõpetaja H. J. Woltemate töötaski aadlivõsudega eraldi, õpetades neile matemaatika täiendavaid küsimusi ja eriti fortifikatsiooni [6].

H e i n r i c h J u l i u s W o l t e m a t e (1651—1696) oli pärit Saksamaalt Hannoveri lähedalt. Tallinna gümnaasiumi matemaatikaõpetajaks sai ta peale Himseli surma 1676. a. Ka tema on osa võtnud õppekirjanduse koostamisest ja avaldamisest. ENSV TA Keskraamatukogus säilitatakse H. Woltemate raamatut «Anfang der Attaquen...», mis trükiti Tallinnas 1682. aastal. Teist, 1688. a. avaldatud õpikut «Definitiones und Handgriffe der Geometrie» ei ole käesoleva kirjutise autoril seni veel korda läinud leida.

Woltemate 1682. a. ilmunud raamat on oma sisult analoogiline Himseli omaga. Valgustamist leiavad pealetungi (Attaque) liigid, välikindlustuste (reduutide, tranšeede jt.) ehitus, patareide ülesseadmine ja muud sõjaasjandusse puutuvad küsimused. Alustatakse, samuti nagu Himseli raama-

[6] H a n s e n, G. v., mainitud teos, lk. 62—63, 65.

tuski, vajalikest lihtsatest geomeetrilistest eelteadmistest, mida käsitletakse näitlikult-praktiliselt. Woltemate «größte raison» (tähtsaim kaalutlus) on siin «alles so kurz als möglich ist, zu lehren» (õpetada kõike nii lühidalt kui võimalik), mistõttu tema raamat jääb Himseli omast selles osas maha nii ulatuse kui ka käsitluse põhjalikkuse poolest.

Matemaatikast *Academia Gustaviana*'s

Himseli ja Woltemate raamatutes oli matemaatikal ainult abistav osa. Märgatavalt suuremad eesmärgid seadis endale Tartu *Academia Gustaviana* matemaatikaprofessor Joachim Schelen — viljakas autor, kes jättis endast pärandina Eestisse käibele juba terve rea matemaatilise sisuga raamatuid, nende seas ulatusliku neljaköitelise «*Cursus matematici*», millest paraku on säilinud küll ainult kaks köidet.

Schelen ei olnud muide *Academia Gustaviana* esimene matemaatik. Tema eelkäijaks oli Joachim Warneke, endine Tallinna linnakooli õpetaja, kes 1630. aastal kutsuti tööle Tartu gümnaasiumi, kust ta tuli üle *Academia Gustaviana* koosseisu. Kuid juba 1636. aastal sai Warneke Tartu raehärraks, varsti koguni linnapeaks, ja õppetööga ta muidugi enam ei tegelnud. Linnapea kohal oli Warneke pikka aega kuni oma elu viimaste aastateni. Ta suri 1661.—1662. aasta paiku.

Joachim Schelen (*Schelenius*; 1611—1673) oli pärit Saksamaalt Pommerist Treptowi linnast, sai hariduse Königsbergi ülikoolis ning töötas Tartus 1644. aastast kuni 1656. aastani. Esimese J. Scheleni raamatuna trükiti Tartus akadeemia trükkali J. Vogeli poolt ladinakeelne «*Rhabdologia sive Computatio per virgulas*» (Rabdoloogia ehk pulkadega arvutamine). Raamat, mille üht eksemplari säilitatakse TRÜ Teaduslikus Raamatukogus, tutvustab arvutamist J. Napieri poolt 1617. a. kirjeldatud arvutuspulkadega [7]. Hiljem, 1665. a. ilmus selle raamatu saksakeelne tõlge. Tartus ilmus Schelenilt veel raamat «*Circini Proportionalis*» (Proportsionaalsirkel), millest TRÜ Teaduslikus Raamatukogus leidub üks ilma tiitelleheta ja ilma lõputa eksemplar ning mille täpset ilmumisaastat on seetõttu raske kindlaks teha. See raamat, milles kirjeldatakse XVI sajandi lõpul leiutatud ja XVII sajandi alguses suure populaarsuse saavutanud praktilise vahendi — proportsionaalsirkli konstruktsiooni ja kasutamist, on igatahes ilmunud enne 1655. aastat. Nimelt viidatakse Scheleni sellele raamatule *Academia Gustaviana* üliõpilase, filosoofiakandidaadi J. Me-

---

[7] Napieri arvutuspulkade kohta vt. Депман, И. Я., История арифметики. М., 1959, lk. 223.

galinuse kirjutises «*Memoriale mathematicum Seu Problematum Mathematicorum Syllabus*» (Matemaatilised teatmed ehk matemaatika probleemid lausete kaupa), mis trükiti Tartus 1655. a.

Mõni sõna Megalinuse töö kohta. Nagu tiitellehelt selgub, on autorit juhendanud tuntud rootsi kirjanik ja õpetlane Georg Stiernhielm (1598—1672), kes aastatel 1630—1642 oli Tartu õuekohtu assessor ja ka hiljem (aastatel 1651—1653 ja 1654—1656) viibis Liivimaal, kus talle kuulus Vasula mõis. Megalinuse töös on ainete kaupa (aritmeetika, geomeetria, geodeesia, kosmograafia, geograafia, astronoomia, fortifikatsioon jt.) loetletud tähtsamaid põhiülesandeid ja viidatud allikatele, milles võib leida nende ülesannete lahendusi. Nende allikate seas leiame Lääne-Euroopa autorite tööde kõrval ka Himseli ja Scheleni raamatuid, aga ka Stiernhielmi matemaatilisi töid, mis käesoleva artikli autorile teada olevail andmeil on tänapäevani avaldamata. Välisautoreist oli suurimas lugupidamises C. Clavius (1537—1612), kelle «*Opera mathematica*» (1612) sisaldub muide ka *Academia Gustaviana* raamatukogu säilinud nimestikus.

Pärast Tartu ajutist vallutamist Vene vägede poolt 1655. a. lõppes *Academia Gustaviana* tegevus. J. Schelen siirdus Tallinna, kus ta koos mõne kolleegiga jätkas gümnaasiumi ruumes eraviisiliselt loengute pidamist. Tallinnas trükiti 1665. a. A. Simoni poolt Scheleni «*Cursus matematici*» (Matemaatikakursus). Selle neljast osast on TRÜ Teaduslikus Raamatukogus säilinud teine osa «*Arithmetica Generalis & Specialis* ...» (Üldine ja spetsiaalne aritmeetika...) koos oma lisadega «*Rhabdologia Neperiana*» (Napieri rabdoloogia) ja «*Rudimenta Praxis Italicae*...» (Algteadmisi itaalia praktikast), saksakeelne neljas osa «*Geodaesia*» ning esimese osa lisa «Anhang der *Geometriae* handelt von der *Trigonometria plana*» (Geomeetria lisa, mis käsitleb tasapinnalist trigonomeetriat). Esimest osa «Geomeetria» ja kolmandat osa, mille pealkiri on teadmata, ei ole õnnestunud leida.

Scheleni «Matemaatikakursus» oli tolle aja kohta põhjalik ja kõigiti soliidne kursus. Esimese osa «Geomeetria» kohta võib neljandas osas «Geodeesia» tehtud üksikute viidete põhjal oletada, et see oli Eukleidese «Elementide» alusel tollal levinud eeskujude (Claviuse, Schwenteri jt. raamatute) järgi kirjutatud elementaargeomeetria kursus.

Kursuse teise osa «Üldine ja spetsiaalne aritmeetika...» alguses käsitletakse süstemaatiliselt nelja tehet nii nimeta kui nimega positiivsete täisarvudega. Tehtemärke seejuures veel ei kasutata. Samuti on huvitav märkida, et kui korrutamine tehakse kaasaegsel viisil, siis jagamise puhul võib leida elemente nii vanast «ülespoole» jagamisest (jagaja kirjutamine iga kord uuesti, osajääkide ülespoole kirjutamine[8]) kui ka kaasaegsest jagamisviisist (osakorrutise väljakirjutamine ja selle lahutamine ühe korraga, mahakriipsutamisest loobumine).

Edasi käsitletakse murde ja tehteid murdudega. Suurimalt ühistegurilt ja vähimalt ühiskordselt minnakse üle naturaalarvude liigitamisele paaris- ja paarituteks arvudeks, alg- ja kordarvudeks, puudulikeks, täiuslikeks ja ülemäärasteks arvudeks.

Järgmine ainelõik algab suhetega ja nende võrdlemisega. Vaadeldakse tehteid suhetega ja lahendatakse mõned tüüpilised ülesanded (näiteks ülesanne kolme toru kaudu täituvast tsisternist jm.). Esineb huvitav vihje suhete kohta: «*Hujus permagnus usus est in Algebra*» (Kõige enam kasutatakse neid algebras). Märgime siinkohal, et sümboolsest algebrast endast, mis tollal oli alles kujunemisjärgus, pole Scheleni raamatus veel jälgegi. Edasi käsitletakse aritmeetilist ja geomeetrilist proportsiooni ning progressiooni, millelt jõutakse lõpuks «kolmiku reegli»[9] (*regula de tri*) juurde.

Spetsiaalses osas (*Pars specialis*) tutvustatakse kümnendmurdude aritmeetikat, kujundarve ja kuuekümnendarvudega arvutamist.

«*Arithmetica* ...» üldosa juurde kuulub raamat «*Rudimenta Praxis Italicae*...» (Algteadmisi itaalia praktikast), milles käsitletakse üksikasjalikult «kolmiku reeglit» ja mitmesuguseid lihtsustavaid võtteid, mis olid omal ajal tuntud nimetuse all «itaalia praktika». «Aritmeetika» teiseks lisaks on varem ladina keeles ilmunud «*Rhabdologia*...» saksakeelne tõlge.

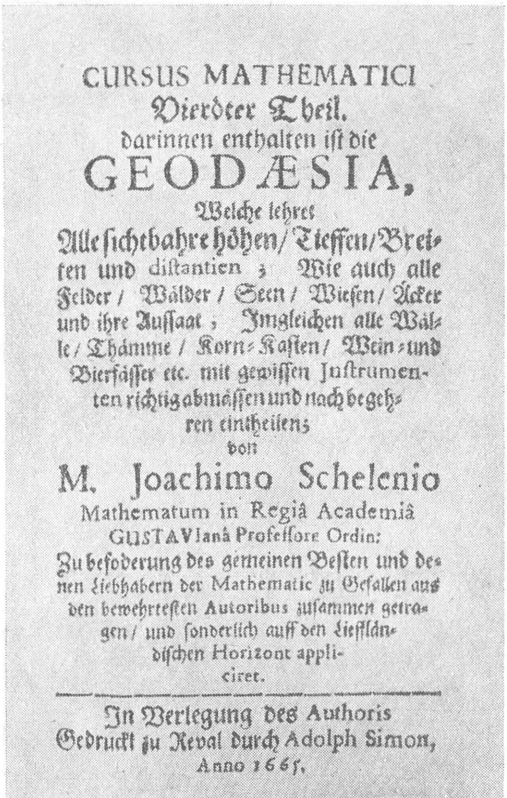
Kursuse neljanda osa moodustab «Matemaatikakursus. Neljas osa. See sisaldab geodeesiat, mis õpetab kõiki nähtavaid kõrgusi, sügavusi, laiusi ja kaugusi, nagu ka kõiki välju, metsi, järvi, aasu, põlde ja nende külve, niisamuti kõiki valle, tamme, viljasalvi, veini- ja õllepudeleid jne. teatavate instrumentidega õigesti ära mõõtma ja soovi järgi osadeks jaotama... Trükitud Tallinnas Adolph Simoni poolt aastal 1665» (joon. 3). See osa on puhtpraktilise iseloomuga ja selles käsitletakse mitmesuguseid mõõtmisi maastikul ning pindalade ja ruumalade arvutamist. Autor märgib eessõnas: «Geodeesia on matemaatiline teadus kõikide nähtavate ja tasandil asuvate asjade õigest ja tõepärasest mõõtmisest... Millest siis nähtub, et geomeetria oleks otsekui ema ja geodeesia tema tütar, niisama kui optikat, astronoomiat, geograafiat, arhitektoonikat ja veel teisi võib vaadelda tema õdedena».

---

[8] Selle kohta vt. Депман, И. Я., mainitud teos, lk. 228.

[9] Vt. Депман, И. Я., mainitud teos, lk. 319.

«Geodeesia» koosneb kolmest raamatust: «Longimeetria», «Planimeetria» ja «Stereomeetria». Matemaatika seisukohalt pakub kõige rohkem huvi esimene raamat, milles pikkuste kaudse mõõtmise juures kasutatakse trigonomeetrilisi seoseid kaldnurksetes kolmnurkades. Lahendatakse näiteks ülesanne: On antud lõigu CD pikkus ja nurgad $\angle ACD$, $\angle BCD$ ja $\angle ADC$ (vt. nr. 20 joonisel 4). Leida tornidevaheline kaugus AB.

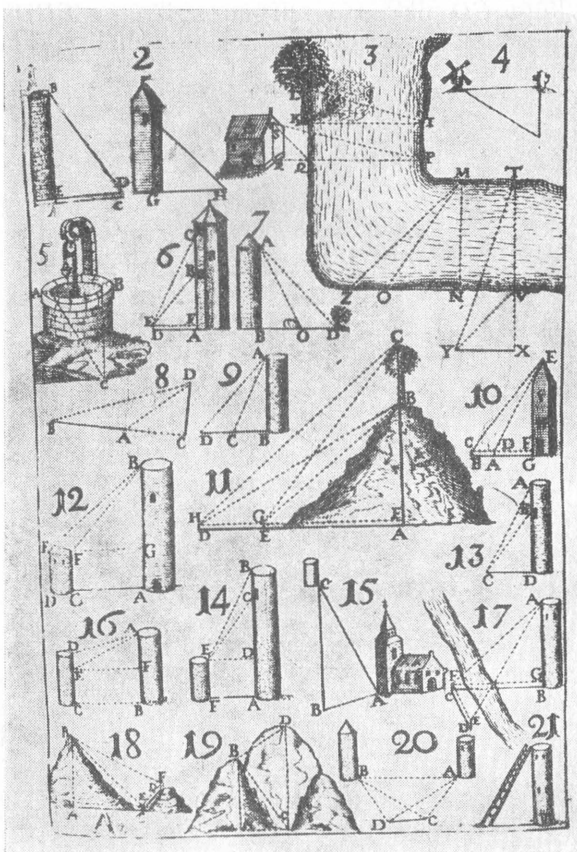

CURSUS MATHEMATICI
Vierdter Theil.
darinnen enthalten ist die
GEODÆSIA,
Welche lehret
Alle sichtbahre höhen/Tieffen/Breiten und distantien ; Wie auch alle Felder / Wälder / Seen / Wiesen / Äcker und ihre Aussaat ; Imgleichen alle Wälle / Thämme / Korn-Kasten / Wein- und Bierfässer etc. mit gewissen Instrumenten richtig abmässen und nach begehren eintheilen;
von
M. Joachimo Schelenio
Mathematum in Regiâ Academiâ GUSTAVIanâ Professore Ordin:
Zu beförderung des gemeinen Besten und denen Liebhabern der Mathematic zu Gefallen aus den bewehrtesten Autoribus zusammen getragen / und sonderlich auff den Liefländischen Horizont appliciret.
In Verlegung des Authoris
Gedruckt zu Reval durch Adolph Simon,
Anno 1665.

Joonis 3. J. Scheleni raamatu tiitelleht.

Lahendamisel kasutatakse korduvalt siinusteoreemi ja üks kord tangensteoreemi (kolmnurgas $\triangle ABC$).

Kahes järgmises raamatus käsitletakse mitmesuguste kujundite (korrapäraste ja korrapäratute hulknurkade, ringi, ellipsi, hulktahukate ja ümarkehade) pindalade ja ruumalade arvutamist.

J. Scheleni viljakat matemaatikaalast tegevust jätkas paarkümmend aastat hiljem *Academia Gustavo-Carolina* matemaatikaprofessor Sven Dimberg. Nimetatud õppeasutuse näol taastati 1690. aastal Tartus ülikool, kuid alanud Põhjasõja tõttu viidi see üheksa aasta pärast üle Pärnusse, kus ta vaevaliselt edasi hingitses kuni Pärnu vallutamiseni

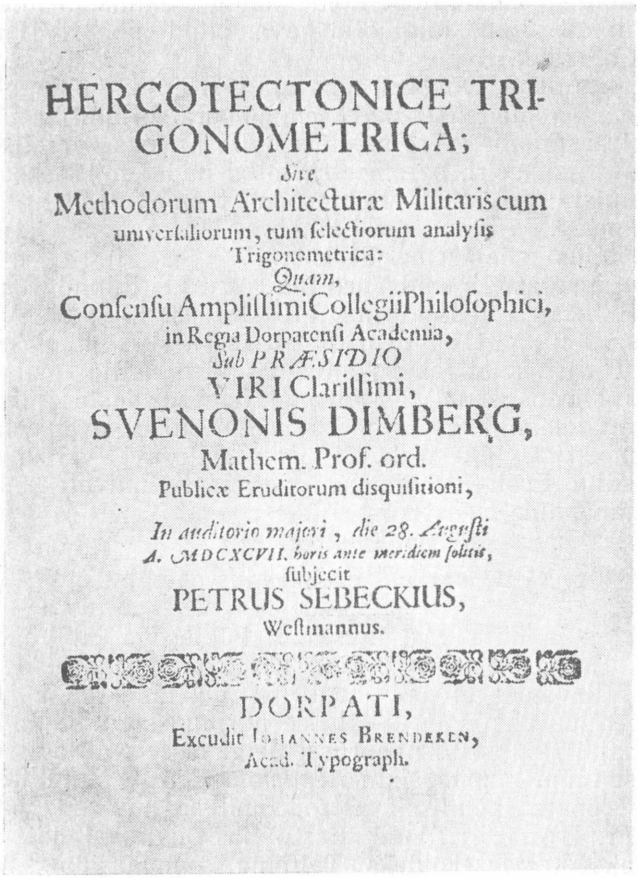


Joonis 4. Jooniste leht J. Scheleni raamatust.

Vene vägede poolt 1710. aastal. Dimberg, rahvuselt rootslane, kes kutsuti Tartusse Turu (Åbo) ülikoolist, ei olnud ise eriti viljakas autor. Tema juhendamisel on aga koostatud mitmed tolleaegsed dissertatsioonid, millest osa käsitles matemaatikat ja selle rakendusi. Kahjuks on mõnedest teada ainult pealkirjad: «*Apodixis mathematica*», «*Mathesis morum s. magna moralia*» jt. Riias Läti NSV TA Keskraamatukogus säilitatakse hilisema Tallinna gümnaasiumi matemaatikaprofessori P. Seebecki väitekirja «*Hercotectonice trigonomet-*

rica...», mis on koostatud S. Dimbergi juhendamisel ja trükiti Tartus 1697. aastal (joon. 5).

Dimberg oli tuttav revolutsiooniliste muudatustega XVII sajandi loodusteadustes, eriti I. Newtoni loominguga, mida ta tutvustas ka oma õpilastele. Üks tolleaegseid dissertatsioone-



HERCOTECTONICE TRI-
GONOMETRICA;
Sive
Methodorum Architecturæ Militaris cum
univerſaliorum, tum ſelectiorum analyſis
Trigonometrica:
Quam,
Conſenſu Ampliſſimi Collegii Philoſophici,
in Regia Dorpatenſi Academia,
Sub PRÆSIDIO
VIRI Clariſſimi,
SVENONIS DIMBERG,
Mathem. Prof. ord.
Publicæ Eruditorum diſquiſitioni,
In auditorio majori, die 28. Auguſti
A. MDCXCVII. horis ante meridiem ſolitis,
ſubjecit
PETRUS SEBECKIUS,
Weſtmannus.

DORPATI,
Excudit JOHANNES BRENDEKEN,
Acad. Typograph.

Joonis 5. P. Seebecki väitekirja tiitelleht.

käsitleb Newtoni valguseteooriat, teises tutvustatakse õhu füüsikalisi omadusi ja O. Guericke kuulsaid katseid magdeburgi poolkeradega. Ka Newtoni matemaatiline looming oli Dimbergi huvideringis. 1698/99. õ.-a. loengukataloogi andmeil kavatses ta mainitud õppeaastal Tartus lugeda «die Newtonsche Grundsätze der höheren Mathematik» (kõrgema matemaatika Newtoni põhilauseid)[10]. See on esimene teade kõrgema matemaatika elementide õpetamise katsest Eestis. Kõne alla saab siin nähtavasti tulla ainult Newtoni klassikaline teos «Loodusfilosoofia matemaatilised printsiibid», mis ilmus 1687. aastal, sest Newtoni teised matemaatilised tööd, nende hulgas ka tööd tema fluksioonide meetodi ehk praegusaegse diferentsiaal- ja integraalarvutuse kohta nägid trükimusta alles järgmise sajandi algul, kuigi olid kavandatud juba XVII sajandi 60.—70. aastatel.

Igatahes oli S. Dimberg oma aja eesrindlik õpetlane-täppisteadlane. Ta plaanitses ka keemialaboratooriumi ja observatooriumi asutamist Tartus, eksperimentideks vajalike riistade — termomeetri, baromeetri, tollal uudse mikroskoobi jms. muretsemist[11]. Alanud Põhjasõda tõmbas sellele kõigele kriipsu peale. Pärnusse S. Dimberg enam kaasa ei läinud, vaid suundus selle asemel Stokholmi.

Tema järglasteks said Turu ülikoolist üle tulnud Samuel Krook, kes töötas Pärnus 1701.—1703. a. ja lahkus siis Upsalasse, ning Conrad Quensel, kes tuli Pärnusse samuti Turust, kuid lahkus siit koos taanduvate Rootsi vägedega ja siirdus Lundi. Mõlemad nad piirdusid jällegi elementaarmatemaatikaga, lugedes aritmeetikat, geomeetriat ja trigonomeetriat. Quensel oli peale selle veel 1707. aastast alates kõigi Eesti-, Liivi- ja Ingerimaal ilmuvate kalendrite ehk almanahhide tsensoriks.

XVIII sajandi «rehkendusraamatud»

XVIII sajandil pärast laastavat Põhjasõda jäi Venemaaga liitunud Eesti ala esialgu ilma kõrgema hariduse keskuseta. Peeter I kavatses ülikooli tegevust elustada, kuid kohaliku aadli inertsus viis selle kavatsuse nurjumisele. Sajandi lõpul 1775. aastal rajati küll naabrusse Jelgavasse (Miitavisse) akadeemilist tüüpi gümnaasium *Academia Petrina*[12], milles matemaatikat õpetas põhiliselt astronoomiliste huvidega professor W. G. Fr. Beutler, kuid Eesti- ja Liivimaal jäi ainsaks tõsisemaks hariduskoldeks Tallinna gümnaasium. Viimase matemaatikaprofessoritest avaldasid mitmed silmapaistvat aktiivsust astronoomiliste vaatluste organiseerimise ja kalendrite väljaandmise alal, eriti A. Bartholomaei, kes Tallinna

---

[10] Backmeister, H. L. C., Nachrichten von der ehemaligen Universitäten zu Dorpat und Pernau. — Sammlung Russischer Geschichte, Bd. IX. St. Petersburg, 1764, lk. 227.

[11] Страдынь, Я. П., Естественные науки в Прибалтике в XVII—XVIII веках. — Из истории медицины, I. Рига, 1957, lk. 48.

[12] Страдынь, Я. П., Елгава как центр естественных наук в конце XVIII — начале XIX века. — Из истории медицины, II. Рига, 1959.

gümnaasiumis töötades oma elu viimastel aastatel 1733—1739 kavandas gümnaasiumi juurde koguni väikese observatooriumi ehitamist [13]. Kuid matemaatilise õppekirjanduse soetamises jäid nad tunduvalt maha oma eelmise sajandi eelkäijatest Himselist ja Woltematest. Ei ole teada õieti ühtegi nende poolt XVIII sajandil koostatud matemaatikaraamatut, kuigi oma ametisseastumise kõne teemaks on enamik neist valinud matemaatika kasulikkuse (*de utilitate matheseos*)! Sõnadest tegudeni jõudsid alles XIX sajandi alguses J. Lundberg ja K. H. Kupffer.

Ei tule siiski arvata, et matemaatika õpetamine Tallinna gümnaasiumis XVIII sajandil toimus madalal tasemel. On nimelt teada, et põhiliseks õppevahendiks oli seal saksa matemaatiku Chr. Wolffi (1679—1754) — Lomonossovi õpetaja raamat «Auszug aus den Anfangsgründen aller mathematischen Wissenschaften» (Kokkuvõte kõigi matemaatiliste teaduste lähtealustest) [14], mis ilmus Saksamaal kümnes väljaandes aastatel 1717—1772. See oli tolle aja kooliõpikuist üks eesrindlikemaid, milles teataval määral kajastusid ka algebra ja matemaatilise analüüsi uusimad edusammud.

Märksa suuremat aktiivsust ilmutasid sellel sajandil aritmeetikaraamatute autorid.

Sajandi alguses kasutati Tallinna algkoolides Lüübekis ilmunud A. Mölleri rehkendusraamatut [15]. Selle kaotsiläinud õpiku ühe võimaliku autorina tuleb arvesse Arvid Moller (Möller, 1674—1758), Tartu lähedal Vorbuse mõisas sündinud õpetlane, kes peale hariduse omandamist *Academia Gustavo-Carolina*'s oli esialgu Tartus lütseumi direktoriks ja ülikooli lektoriks, siirdus aga 1702. a. Tallinna, kus ta töötas gümnaasiumi matemaatikaprofessorina 1710. aastani, mil ta võttis vastu Lundi ülikooli professori koha.

Pärast Põhjasõda kasvas nõudmine sedalaadi raamatute järele tunduvalt. Eesti liitmine Venemaaga kiirendas linnade ja kaubanduse arengut, millega seoses ilmusid Eesti linnadesse erilised kaubanduslike arvutustega ja raamatupidamisega tegelevad isikud — rehkendusmeistrid (Rechenmeister), kelle ülesandeks oli abistada vähese kirjaoskusega kaupmeeskonda. Lääne-Euroopa linnades tegutsesid niisugused ametimehed juba varem. Saksamaal oli neil koguni oma selts — «Hamburgi rehkenduskunsti armastajate ja harrastajate selts», mis asutati XVII sajandi keskel ja oli esimene matemaatikaselts,

---

[13] H. Treumanni andmed (vt. «Eesti Loodus», 1960, nr. 3, lk. 63).

[14] Schiemann, Th., Materialen zur Geschichte des Schulwesens in Reval, V. — Beiträge zur Kunde Ehst-, Liv- und Kurlands, Bd. IV. Reval, 1894, lk. 48, 50.

[15] Puksoo, Fr., Jacob Johann Köhler. — Vana Tallinn, IV. Tallinn, 1939, lk. 29.

kuigi mitte veel teaduslik. Sellesse seltsi kuulus ka Tallinna linnaraamatupidaja J. D. Intelmann (1686—1760), kelle sulest ilmus 1736. a. «Aritmeetiline teejuht ehk ... esimene Tallinna rehkendusraamat...». See Halles trükitud raamat, mille põhiosa on kirjutatud puhtal kujul kaubanduspraktika vajaduste järgi, saavutas Eesti- ja Liivimaal laialdase leviku, nii et seda võib praegugi leida mitmetes raamatukogudes ja erakätes. Raamatut on seni kirjeldanud J. Depman, kes toob ära ka selle täieliku tiitli [16].

Täienduseks vaatleme siinkohal huvitavamaid Intelmanni raamatu lisas käsitletud küsimusi. Pealkirja all «*Regula Falsi*, auch *Regula Positionum* genant» (*Regula falsi*, mida nimetatakse ka asendamise reegliks) lahendab Intelmann näitena järgmise ülesande: «Ühe käest küsiti, kui vana ta on; saadi vastus: kui ma oma vanusele lisan poole, veerandi ja veel viis aastat, siis saan ma 75 aastat; küsitakse, kui vana ta on». Ülesanne lahendatakse esmalt *regula falsi* abil, seejärel antakse «*Solutio* nach der Allgebra» (lahendus algebra järgi) järgmisel kujul:

1	R	Jahr	
$\frac{1}{2}$			
$\frac{1}{4}$			
+5			
$1\frac{3}{4}$ R	+ 5 Jahr	— gleich —	75 Jahr
	4		4
7	+20	— gleich —	300
			÷ 20
7		— gleich —	280
1		— gleich —	40 J. das Fac.

Märkus: Jahr — aasta, gleich — võrdne, das Fac. — teeb välja.

Niisugusel üpris tagasihoidlikul kujul ja märgatava hilinemisega tungisid algebra meetodid esmakordselt kohapealsesse matemaatilisse kirjandusse. Märkigem siinkohal võrdluseks, et märgid «+» ja «—» võeti tarvitusele juba XV sajandi lõpul saksa «kossistide» algatusel, tähelise arvutuse tõeliseks loojaks sai aga prantslane Fr. Viète (1540—1603). Kuid isegi vene «rehkenduskunsti» alussammas, L. F. Magnitski «Aritmeetika» (1703) erines algebraliste meetodite rakendamise poolest veel vähe Intelmanni käsitlusest.

[16] Depman, J., Jutustusi matemaatikast. Tallinn, 1956, lk. 128—130.

Huvi pakub ka Intelmanni raamatus esitatud reegel antud järguga maagilise ruudu koostamiseks etteantud summa järgi. See reegel tuuakse ilma igasuguse põhjenduseta (viimased näivad muide üldse olevat Intelmanni jaoks üleliigsed). Maagiliseks ruuduks nimetatakse teatavasti ruutu, mis on jagatud n reaks ja n veeruks (arvu n nimetatakse ruudu järguks), ning mille kastikestesse tuleb kirjutada teatava aritmeetilise jada n^2 järjestikust arvu, nii et igas reas ja veerus ning kahel peadiagonaalil annaksid arvud liitmisel sama summa.

Järgmisel aastal pärast Intelmanni raamatu ilmumist trükiti Baltimaadel koguni kaks analoogilise sisuga rehkendusraamatut, üks Tallinnas ja teine Riias. See annab tunnistust suurest nõudmisest sedalaadi raamatute järele. Esimeseks oli Tallinna rüütli- ja toomkooli õpetaja M. Weberi «Anweisung zur Arithmetik...» (Aritmeetika õpetus. Tallinn, 1737), mida kirjeldab lühidalt J. Depman oma aritmeetika ajaloos [17]. Raamatu autor oli pärit Magdeburgist Saksamaal, sai 1731. a. Peterburi Peetri kooli õpetajaks ning siirdus 1736. a. Tallinna, kus ta töötas toomkoolis kuni oma surmani 1739. a.[18] Teiseks oli Riia Püha Peetri kooli õpetaja J. Wolcki «Rigisches Rechen-Buch» (Riia rehkendusraamat. Riia, 1737), mis on M. Lange, Fr. Wedermeyeri ja E. Pomergardteni varasemate «Riia rehkendusraamatute» ümbertöötlus.

Sajandi teisest poolest väärib märkimist Kuressaare kooli, hiljem Riia Püha Jacobi kooli õpetaja J. Flori «Rigisches Rechenbuch» (Riia, 1769). Riia rehkendusraamatud levisid ka Eesti alal ja etendasid koos Intelmanni ja Weberi käsiraamatutega olulist osa arvutusoskuse arendamisel kohaliku elanikkonna hulgas. Nii on sajandi lõpust huvitav märkida näiteks üht anonüümset asjaarmastajat, kes 1785. aastal kuulutab ühes Tallinna ajakirjas [19] omavalmistatud kuupjuurte tabelist, mille järgi «ilma kolme nulli kahe-kolmekordse lisamiseta ja koguni kuupi välja arvutamata võib juure koos selle õige ja tõepärase murdosaga teada saada».

Nagu nähtub ülaltoodust, kajastusid «rehkendusraamatutes» veel üpris tühisel määral matemaatika kui teaduse tolleaegsed kiired edusammud. (Võrdluseks meenutagem naabruses Peterburi Teaduste Akadeemias töötanud Leonhard Euleri (1707—1783) hiilgavaid tulemusi matemaatilises analüüsis.) Tõsine matemaatika-alane teaduslik töö Eestis teeb oma esimesed sammud alles pärast Tartu ülikooli asutamist 1802. aastal.

(*Järgneb*)

---

[17] Депман, И. Я., mainitud teos, lk. 313.

[18] Croesmann, Fr., Beiträge zur Geschichte der ehstländischen Ritter und Domschule, Reval, 1869, lk. 77—79.

[19] «Revalische Wöchentliche Nachrichten», 1785, 20. October, lk. 4—5 (Mainitud allikale juhtis autori tähelepanu H. Treumann).

PÜGALPULKADEST JA VANIMATEST NUMBRIMÄRKIDEST

L. E. Maistrov [1]

Kirjamärkide eelkäijaid — mitmesuguse tähendusega sisselõikeid eriotstarbelistel esemetel — võib leida kõikide rahvaste juures. Valdavas enamuses on need sisselõiked tehtud pulkadele sälkude ehk pügalate kujul, materjaliks on enamasti puu. Sellest ka nimetus — pügalpulgad (ehk sälkpuud; vene k. бирки). Sälgud sellistel pulkadel on tihti ainult paari eri tüüpi ja peaaegu alati tähendavad nad numbreid. Meil on seega tegemist kõige vanemate numbrite märkimise süsteemidega, mis eelnevad keerulisematele numeratsioonidele ja tähestikele.

Eesti NSV muuseumides säilitatakse väärtuslikke kollektsioone eestlaste juures käibel olnud pügalpulkadest, mis pakuvad huvi meie esivanemate majandusliku elu ja kultuuri arengu jälgimise seisukohalt. Enne nende pulkade ja neil leiduvate märkide tutvustamist selgitame üldse pügalpulkade kui huvitavate etnograafiliste esemete ülesandeid, kasutusviise ja levikut.

Pügalpulgad on olnud kasutusel väga paljude rahvaste juures. Nad olid levinud venelaste (ja peaaegu kõigi Venemaal elunevate rahvaste), tšehhide, prantslaste, sakslaste, inglaste seas, neid võib leida Skandinaaviamaades, Balkanil ja paljudes teistes kohtades. Ka nende kasutamise aeg ulatub sügavast muinasajast kuni XIX sajandini.

Sedalaadi rahvapäraste arvutus- ja arvestusvahendite kasutuselevõttu tingisid majanduslikud vajadused, kaubanduse areng ja liigkasuvõtmise laialdane levik. Sageli koosnesid pügalpulgad kahest osast, mis märkide pealekandmisel ühte liideti ning millest üks jäi võlglase ja teine võlausaldaja kätte. Pügalpulkade või teiste analoogiliste vahendite abil märgiti

[1] Artikli autoriks on NSVL TA Loodusteaduste ja Tehnika Ajaloo Instituudi teaduslik töötaja, vanu arvutus- ja mõõdusüsteeme kajastavate etnograafiliste esemete tuntud uurija, kes viimastel aastatel on korduvalt kasutanud meie muuseumide sellealaseid kogusid. Artikli on venekeelsest käsikirjast tõlkinud ja lühikese sissejuhatusega varustanud Ü. Lumiste. — *Toim.*

ka sooritatud töid, mõisnikule tehtud teopäevi jms. Lühidalt öeldes olid need vahendid, mis asendasid väga mitmesugustel juhtudel praegusaegseid kviitungeid, tähikuid, arveraamatuid jms.

Pügalpulkade laialdast kasutamist tõestavad näiteks mõningad järgmised huvitavad faktid.

Moskva Riiklikus Ajaloomuuseumis säilitatakse XII sajandist pärinevaid pügalpulki, mis on leitud Novgorodist. Need on lihtsaimad omataoliste seas: neil tähendab iga kriipsuke lihtsalt ühikut. Sealsamas säilitatakse aga ka niisuguseid pulki, mis on olnud kasutusel veel käesoleva sajandi 20-ndatel aastatel.

Pärast seda, kui 1805. a. asutati Siberis viljatagavarade säilitamiseks riiklikud magasiaidad, levisid laialdaselt «viljapulgad» (хлебные бирки). Burjaatide jaoks kehtestati 1822. a. rahalistel kviitungitel tavaliste numbrimärkide kõrval veel järgmised märgid:

✳ — 1000 rbl., ○ — 100 rbl., □ — 20 rbl.

× — 10 rbl., / — 1 rbl.; ¦¦¦¦¦¦¦¦¦¦ 10 kop., | — 1 kop.

Need märgid olid pikka aega kasutusel pügalpulkadel ja olid seetõttu arusaadavad kohalikule elanikkonnale. Ülaltooduist vähe erinevad märgid avaldati ühtlustamise eesmärgil koguni tsaari-Venemaa «Seaduste kogus» ja neid võis kasutada tavaliste numbrite asemel. Mitmetes praegusaegse Jugoslaavia koosseisu läinud rajoonides arvestati makse pügalpulkadel veel kuni 1887. aastani.

Vaatamata laialdasele levikule ja ühesugusele materjalile olid erinevate rahvaste pügalpulgad erisugused nii kujult, märkide poolest, tarvitamisviisidelt kui ka ülesannetelt. Toome selle kohta mõningaid näiteid.

Vjazma piirkonna karjuste pulkadel oli 1 lehm = ×, 4 lammast = ×, 1 lammas = |, 1 siga = ∧, 1 põrsas = | jne.

Tšuvašide juures olid kasutusel neljatahulised pügalpulgad, millele kanti märke igale neljale küljele. Kuid üleminekul ühelt küljelt teisele tähendas sama märk juba 100 korda suuremat arvu. Üks niisuguste pügalpulkade kimp on kujutatud joonisel 1.

Kaasani kubermangus olid küüdiarvestuses kasutusel järgmised märgid:

| — 1 hobune sõitis 10 versta

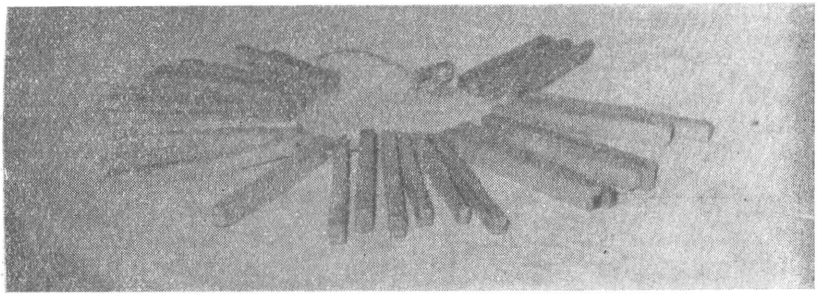
|| — 1 hobune sõitis 15 versta või 2 hobust 10 versta

/ — 1 hobune sõitis 30 versta

× — 2 hobust sõitsid 30 versta.

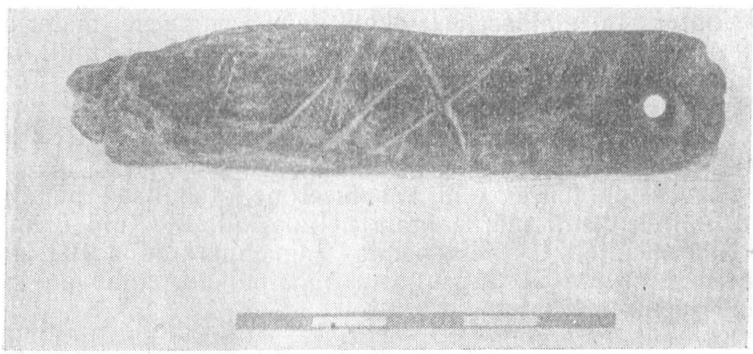
Kuju poolest meenutasid need sälkpuud saapaliistu.

Tihti kinnitatakse kirjanduses, et kõik pügalpulgad olevat koosnenud kahest osast, millest üks jäi võlgniku, kauba võtja jne. kätte, teine võlausaldaja, kauba andja jne. kätte. See ei ole aga alati sugugi nii.



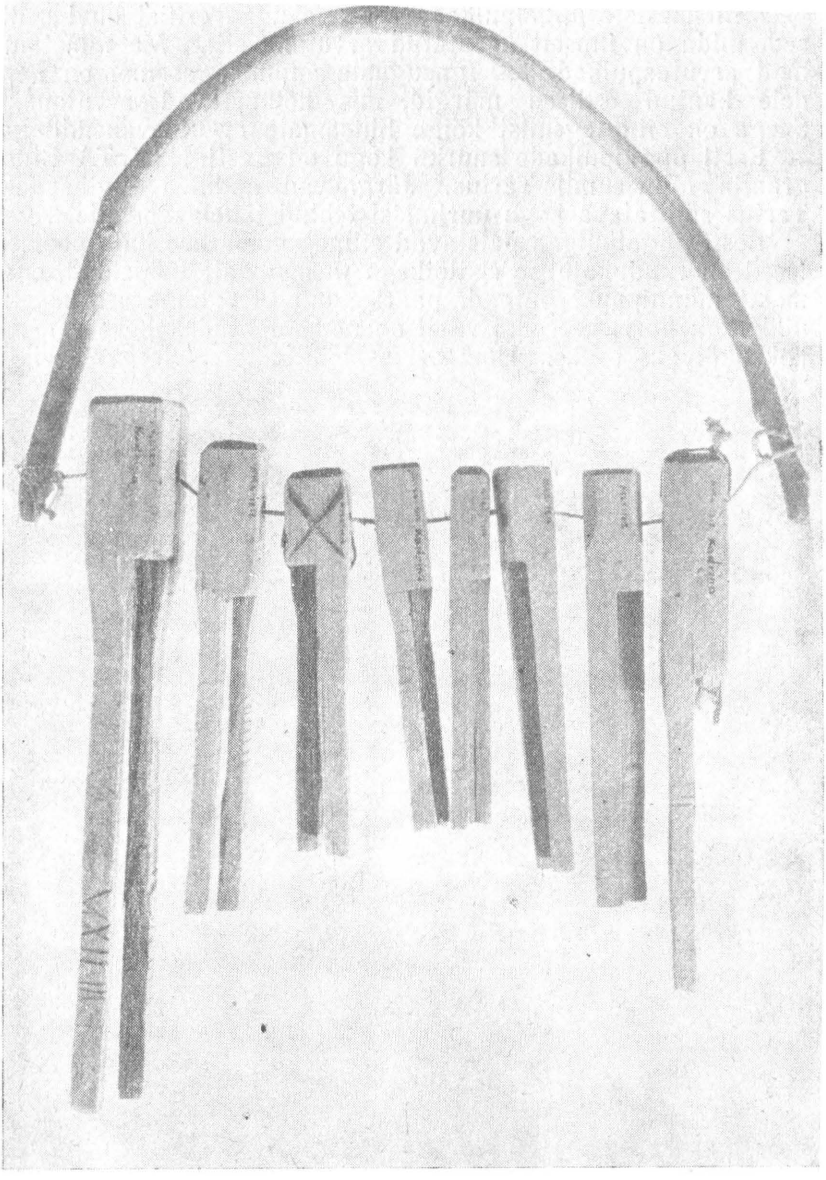
Joonis 1.

Näiteks Irkutski burjaatide juures tunti erilisi ohvripulki, mida kasutati «tailagani» püha puhul ohvriks toodava hobuse ostmisel. Šveitsis olid levinud erilised «vee pulgad», millele märgiti mägedest orgu juhitud niisutusvee kasutamist. Alpikütid kandsid pügalpulkadele andmeid piiriteenistuse pidamise kohta. Baikalitagused kasakad esitasid pügalpulkadel mitmesuguseid aruandeid. Selliseid näiteid võiks tuua veelgi.



Joonis 2.

Levinud on arvamine, et pügalpulki on valmistatud ainult puust. Kuid V. K. Kuzakov, kes hiljuti Novgorodi Kremli ääres veevärgikraavist kaevatud mulla läbi vaatas, leidis koos teiste XVI—XVII sajandist pärinevate esemetega kivist val-



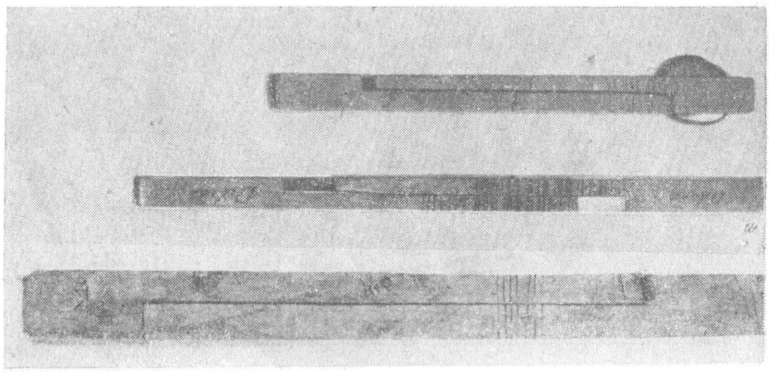
Joonis 3.

mistatud pügalpulga. See on väikesemõõduline kiviplaat, millele on selgesti kantud märgid X\\ (joon. 2). Tegemist on nähtavasti pikaajalise kviitungi või tähikuga.

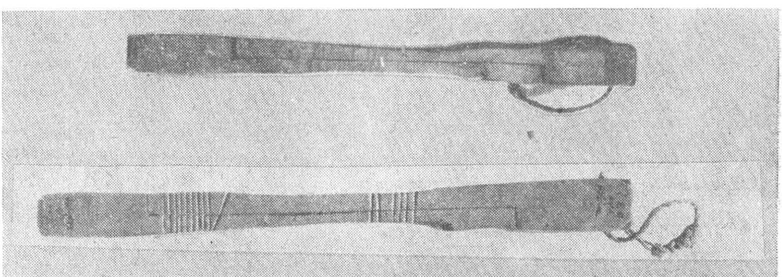
Mitmekesiste pügalpulkade seas pakuvad erilist huvi sellised, mida on ilmselt kasutatud arvutamiseks. Me nimetame neid arvutuspulkadeks. Igasuguste andmete asemel on nendele kantud erilised märgid, mis hõlbustavad arvutamist. Seega on siin tegemist kõige lihtsamate arvutusvahenditega.

Eesti pügalpulkade suurim kogu on Eesti NSV TA Etnograafia Muuseumil Tartus. Järgnevad andmed tuginevadki Tartus säilitatava kogu uurimisel tehtud tähelepanekutele.

Eesti pügalpulgad paistavad silma omapärase kuju poolest. Need on ruudukujulise ristlõikega ja hoolikalt töödeldud, enamasti männipuust pulgad, paari- kuni viiekümne sentimeetri pikkused; üpris keerukal viisil on nad lõigatud kaheks vaheliti kokkukäivaks osaks. Neid osi saab liita teineteisega tervikli-



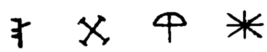
Joonis 4.



Joonis 5.

kuks neljakandiliseks latiks. Joonisel 3 on kujutatud poolikutest pulkadest koosnev kimp, joonisel 4 aga mõned pulgad kokkupandud kujul. Selliste pulkade valmistamine oli üsna keeruline toiming. Seetõttu kasutati üht ja sama pulka mitu korda pärast eelmise kirjutise mahalõikamist. Üht niisugust korduvalt kasutatud pulka kujutab joonis 5.

Pügalpulki kasutati Eestis kõikjal, ja sealjuures väga mitmesuguseks otstarbeks. Ühtedele märgiti mõisnikule tehtud teopäevi, teistele võlgu võetud vilja jne. Sageli võib pulkadel leida peremärke:



ja sälkude tähendusele viitavaid sõnu: rukis, nisu, kaer jne. Pulgad ühendati tavaliselt kimpudesse kolme-, nelja-, isegi kuni paarikümnekaupa.

Pügalpulkade laialdasest kasutamisest annab tunnistust kas või see fakt, et riiklike magasiaitade asutamisel Eestis 1763. a. loeti võlgu võetud vilja märkimisel pügalpulki võrdseteks võlakirjadega. Sellest tulenes koguni vastavate pügalpulkade eriline nimetus — magasipulgad. Võla tasumisel pandi pulga pooled kokku, kontrolliti sälkude ühtelangevust ja tagasitoodud viljaühikuid kujutavad sälgud lõigati tasaseks.

Numbreid kujutavatest sisselõigetest võib eesti pügalpulkadel leida ainult järgmisi:

| / \ V X ı ·

Need märgid on sisse lõigatud kord madalamalt, kord sügavamalt. Mõnikord on nad ühendatud rühmadesse, näiteks V//, //\\ jne. Punkt või punktid eraldavad nähtavasti üht kirjutist teisest ega ole iseseisva tähendusega, näiteks:

||:|||||:||:|||||:||:||, |·||||·|||||·|||||||||·

Seejuures võib tähele panna, et punktid esinevad väheste eranditega ainult sel juhul, kui tegemist on üksnes lihtsate põikkriipsudega. Nähtavasti on see vanimaid kirjutusviise.

Sageli on lihtsa põikkriipsu kordumisel (näiteks 82, 65, 42, 29 jne. korda) iga kümnes sisselõige tehtud sügavamalt.

Märkide arvulist väärtust eesti pügalpulkadel võib kindlaks teha, arvestades mitmete rahvaste pügalpulkade uurimisel saadud kogemusi. Võib üsna suure kindlusega väita, et need tähendused on järgmised:

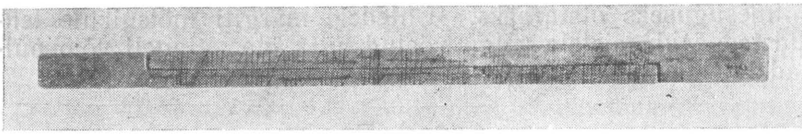
| = 1, / või \ või V = 5, X = 10, ı = ½.

Üldiselt märgiti pügalpulkadele mitte väga suuri arve.

Ka eesti pügalpulkade seas võib eristada niisuguseid, mida me nimetasime arvutuspulkadeks. Need on valmistatud väga korralikult, märgid on neile kantud rühmadena ühtlaste vahedega. Ühele pügalpulgale (joon. 6) on lõigatud näiteks järgmised märgid:

|||||/|||||/|||||/|||||/|||||/ jne.

On selge, et selle pulga abil on lihtne viiekaupa loendada või arvutada. Kui arvestada veel, et pulga üks pool liigub teise



Joonis 6.

suhtes nii, et peale nihutamist võib märgid ühtimisse viia, siis on selge, et niiviisi saab loendada küllaltki suuri koguseid. Ühel üsna vana välimusega pulgal leiduvad märgid on lõigatud järgmiselt:

////////// \\\\\\\\\\ ////////// \\\\\\\\\\

Siin on loomulikult tegemist vahendiga, mis hõlbustab loendamist kümnekaupa. Loendamiseks kahe-, kolme- jne. kaupa leidub analoogilisi pügalpulki.

Ülalkirjeldatud keeruka ehitusega pole mitte kõik eesti pügalpulgad. Leidub mitmesuguse kujuga sälkpuid, sealhulgas ka lihtsaid pulki sisselõigetega. Viimaste seas äratavad tähelepanu kaks arvutuspulka. Ühel on sälgud paigutatud järgmiselt:

/// \\\ /// \\\ /// \\\ /// \\\ /// \\\

kusjuures igale kümnendale kolmikule järgneb sügav põiksälk. Teisele on lõigatud märgid:

\\\\ //// \\\\ //// \\\\ //// \\\\ ////

Tegemist on vahenditega, mis hõlbustavad loendamist kolme- ja neljakaupa.

Selliste hoolikalt valmistatud pügalpulkade seas, millele on sisselõiked tehtud ühtlaste korrapäraste vahedega, leidub ka pulk 183 lihtsa põiksälguga (366 : 2 = 183), samuti pulk 52 kaldsälguga (aastas on 52 nädalat). See viib mõttele, et neid pulki on võib-olla kasutatud kalendriarvutuste jaoks. Selle väite kinnitamiseks oleks aga vaja veel materjali täiendavat analüüsi.

Lõpuks tahaks märkida, et ENSV TA Etnograafia Muuseumil on suur pügalpulkade kogu, mis pakub vaieldamatut huvi ajaloo seisukohalt üldse ja teaduse ajaloo jaoks eriti. Kuid see kogu on äärmiselt korratus seisundis. Paljud pügalpulgad on kokku pandud erisugustest pooltest. Väärtusetud murdunud pulgad on ühes hunnikus väga hinnaliste eksemplaridega. Selle kogu edasine uurimine, mis kahtlemata võib lisada mõndagi olulist ajalooteadusele, on võimalik alles peale kollektsiooni kordaseadmist.

Matemaatiline päevakaja

I. N. VEKUA — LENINI PREEMIA LAUREAAT

E. Jürimäe

Käesoleval aastal anti Lenini preemia Novosibirski ülikooli rektorile Ilja Nestorovitš Vekuale tema 1959. a. ilmunud raamatu «Обобщенные аналитические функции» eest. Värske laureaat sündis 23. aprillil 1907. a. talupoja perekonnas Šešeleti külas Gruusias. Kõrgema hariduse sai ta Tbilisi ülikoolis, mille lõpetas 1930. a. Pärast seda oli ta kolm aastat Leningradis aspirantuuris, mille lõpetamise järel töötas ligi 20 aastat Tbilisis. 1939. a. kaitses I. N. Vekua doktoridissertatsiooni ning 1940. a. omistati talle professori kutse. Alates 1952. a. töötas I. N. Vekua Moskva Lomonossovi nim. Riikliku Ülikooli juures, kust ta hiljem siirdus Novosibirskisse. 1946. a. valiti praegune laureaat NSVL TA korrespondeerivaks liikmeks ning 1958. a. tegevliikmeks.

I. N. Vekua teaduslik tegevus algas elastsusteooriast pärinevate rajaväärtusülesannete lahendamisega aspirantuuripäevil ning kandus sealt aegamööda esimest järku elliptilist tüüpi osatuletistega võrrandisüsteemide uurimisele. Nende süsteemide lahendeid hakati nimetama üldistatud analüütilisteks funktsioonideks, kuna lahendite reaal- ja imaginaarosad rahuldavad teatavas mõttes Cauchy-Riemanni (ehk D'Alembert-Euleri) võrrandeid üldistavaid seoseid. Need võrrandid iseloomustavad aga analüütilisi funktsioone.

Üldistatud analüütiliste funktsioonide uurimisele oli pühendatud I. N. Vekua tähelepanu 50-ndatel aastatel. Seda tööd kroonis nüüd suurepärane autasu — Lenini preemia.

Autasustatud raamatu esimene osa on pühendatud vastava teooria ülesehitamisele ning lõpeb küllaltki üldiste rajaülesannete vaatlemisega, millele klassikalised Dirichlet' ja Neumanni probleemid on erijuhtudeks.

Raamatu teine osa on pühendatud üldistatud analüütiliste funktsioonide rakendustele positiivse kõverusega pindade lõpmata väikeste painete uurimisel, momendivabade ning kumerate elastsete koorikute küsimuste käsitlemisel jm.

Tuleb märkida, et ühest küljest on I. N. Vekua tulemused tähtsaks panuseks osatuletistega võrrandite ja nende süsteemide teoorias, s. o. teoorias, mille probleemid kuuluvad käesoleva aja rakendusmatemaatikas akuutseimate hulka. Teiselt poolt aga on autasustatud raamat suureks panuseks funktsiooniteooria arengusse ning on nõukogude funktsiooniteooria koolkonna üheks tippteoseks. Selle preemiaga on autasustatud mõnel määral kogu seda koolkonda, mille rajasid käesoleva sajandi algul N. N. Luzin ja D. F. Jegorov.

KONVERENTS «KAASAEGNE MATEMAATIKA JA TEMA RAKENDUSALAD»

I. Kull, E. Tiit

Loodusuurijate Seltsi täppisteaduste sektsiooni asutamisest peale 1957. a. on meil muutunud traditsiooniks teaduslike ja teaduslik-pedagoogiliste konverentside korraldamine. Ka käesoleval aastal toimus 3.—5. maini Tartus Loodusuurijate Seltsi ja Tartu Riikliku Ülikooli organiseerimisel teaduslik konverents. Erinevalt eelnevatest oli seekordne konverents temaatiline. Kõik ettekanded käsitlesid matemaatikaga ja eriti tema rakendustega seotud probleeme ning kajastasid seega ühtlasi olulisemaid suundi täppisteaduste arengu kaasaegsel etapil.

Osavõtt konverentsist oli rõõmustavalt elav. Hoolimata sellest, et organiseerijate hulgas puudus sedapuhku haridusministeerium, kes oleks komandeerinud Tartusse õpetajaid vabariigi koolidest, nagu varem enamasti on tehtud, ulatus konverentsist osavõtjate arv ligi kahesajani. Kuulajate hulgas oli peale matemaatikute (sealhulgas õpetajate) rohkesti teiste erialade esindajaid: tõsiasi, mis matemaatika-alasel konverentsil veel kümmekond aastat tagasi oleks tundunud kummaline. Teiselt poolt oli konverentsile iseloomustav ka matemaatilisest küljest huvitavate ning probleemirikaste ettekannete esitamine mittematemaatikute poolt.

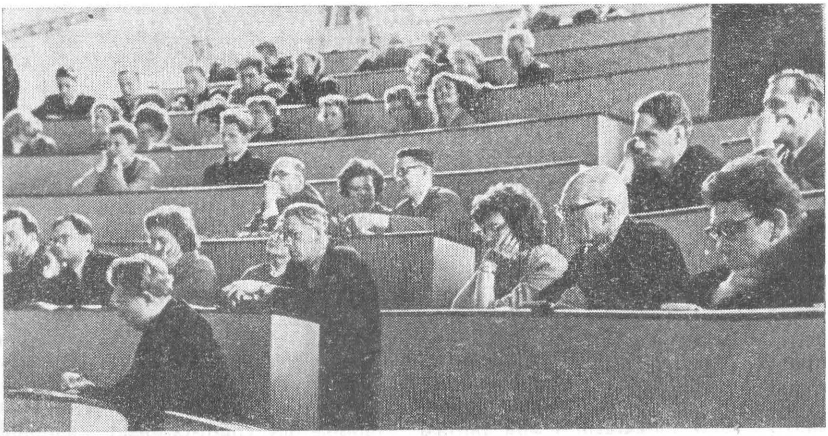
Kõik see annab tunnistust süvenevast koostööst matemaatikute ja mittematemaatikute vahel meie vabariigis, millise koostöö intensiivistamine oligi üks konverentsi põhilisi eesmärke. Ettekandeid oli konverentsil arvukalt, nii et istungite jaoks planeeritud aeg kippus isegi napiks jääma, eriti arvestades seda, et sageli tekkis ettekannete järel elav diskussioon vastupidi kõigile senistele matemaatikute harjumustele.

Esimesel konverentsipäeval olid kavas statistilise suunaga ettekanded [1], mille hulgas pakkus suurimat huvi J. R o s s i «Põllumajanduslike kultuuride fotosünteesi ja kiirgusrežiimi matemaatiline teooria», kus ettekandja selgitas probleeme, mis tuleb lahendada vastava teooria loomisel. Nimetatud ettekanne oli paljuski iseloomustav kaasaegsele matemaatikale, kus komplitseeritud teooria luuakse tegeliku elu tarbeks. Sisukad olid ka mitmed järgnevad ettekanded: S. V e l d r e «Osalise loendusmeetodi kasutamisest ja veahinnangust», T. O r a v a «Nakatusjaotuse (Neyman-jaotuse) kasutamisest rakusiseste kiirguskahjustuste uurimisel», L. V õ h a n d u «Paljutunnuseliste bioloogiliste süsteemide uurimisest matemaatiliste meetoditega», Ü. V a h t r a «Hemolüütiliste erütrospektrite jaotuskõverad ja nende parameetrite arvutamine» jt. Aktuaalseid probleeme käsitlesid ka kõik ülejäänud sel päeval peetud ettekanded.

Konverentsi puhtmatemaatikalistest ettekannetest olid väga sisukad Ü. L u m i s t e «Kaasaja diferentsiaalgeomeetria meetodid ja rakendusalad» ning G. K a n g r o «Ridade teooria küsimustest». Nendest ettekannetest võib õppida, kuidas 45 minuti jooksul saab anda ülevaate tervest teadusharust ja pealegi nii, et sellega vähetuttav kuulaja saab selgeks kõige põhilisema, mis seda teadusharu iseloomustab.

Matemaatikute ettevalmistamisega ja matemaatika õpetamisega seotud küsimustele oli planeeritud töökoosolek, kus esinesid I. Piir, R. Kolde, O. Prinits ja H. Merilo. Nende ettekannete juhtmõtte võib kokku võtta järgmiselt: matemaatika areneb praegu kiiresti, tema sidemed praktikaga ja teiste teadustega on muutunud tihedamaks; kõik see peab aga kajastuma ka õppeplaanides ja -programmides alates algkoolist kuni kõrgema koolini. Võib-olla kõige probleemirikkam äsjamainituist oli O. P r i n i t s a ettekanne, kus näidati, et kommunistliku ühiskonna ülesehitamise künnisel ei tohi mõista tootmisõpetuse erialasid kui peami-

[1] Vt. kogumik Matemaatika ja tema rakendusalad. TRÜ rotaprint, 1963.



Pilk konverentsisaali.

selt füüsilist tööd nõudvaid alasid (treial, ehitaja jt.). Tuleb silmas pidada arvutusmasinate ja küberneetiliste seadmete üha laialdasemat rakendamist nii rahvamajanduses kui ka teaduses ning vastavalt sellele pöörata suuremat tähelepanu keskharidusega arvutusmatemaatikute ettevalmistamisele. Meie vabariigis õpetatakse välja keskharidusega arvutusmatemaatikuid Tartu I keskkoolis ja Tallinna I keskkoolis (kokku kolmes klassis), kuid nende ettevalmistamist tuleks laiendada. Seoses sellega kerkivad mitmesugused praktilised ja metoodilised probleemid: millised on sobivad õppeplaanid ja programmid, kuidas on otstarbekohane välja õpetada vastava eriala õpetajaid, jms. I. Piir kõneles sellest, et matemaatikute füüsika-alane ettevalmistus peab andma füüsikalise maailmapildi kaasaegsel tasemel ja näitama õigesti matemaatika ja füüsika vastastikust seost. Ettekandest nähtus, et praegused programmid, mille järgi matemaatikutele loetakse füüsika kursust, seda ei võimalda. R. Kolde kõneles Moskvas tehtavatest katsetest — tuua algebraelemendid kooliõpetusse sisse juba algklassides, mis võimaldaks tõhusamalt arendada õpilaste abstraktse mõtlemise võimet. Senised katsetulemused räägivad uue süsteemi kasuks. H. Merilo kõneles Eesti Põllumajanduse Akadeemias tehtud ümberkorraldustest matemaatiliste ainete õpetamisel.

Kaasaja ühe tähtsama matemaatikaharu — arvutusmatemaatika kohta peetud ettekanded olid koondatud konverentsi lõppistungile, mille avas Ü. Kaasik oma ülevaatliku ettekandega «Majandusmatemaatika põhisuundadest». M. Krulli ettekandes kõneldi tehase juhtimissüsteemide kontrollimise ühest huvitavast võimalusest. Selleks et vältida riski ja materiaalseid kulutusi ühenduses mingi väljatöötatud juhtimissüsteemi kontrollimisega tehases eneses, on kõige otstarbekohasem seda kontrollida elektronarvuti abil. Selleks tuleb aga koostada programm, mis modelleeriks vaadeldava tehase tööd. T. Akkel kõneles söödabaasi planeerimisest ja põllumajandusliku tootmise paigutamisest. Samadest probleemidest rääkis ka V. Aasmäe, kes analüüsis esmajoones mitmesuguseid optimaalsuskriteeriume ning karja optimaalse struktuuri küsimusi. Insenertehniliste arvutuste automatiseerimisele oli pühendatud H. Polli ja A. Pihlaku ettekanne. Autorid on TA Küberneetika Instituudi arvutil M-3 teostanud käigukastide tugevusarvutusi Tallinna Ekskavaatoritehasele ja raamide arvutusi «Eesti Tööstusprojektile». Varem tehti selliseid arvutusi käsitsi või lükatil üksikute variantide (töörežiimide, koormuste kombinatsioonide) jaoks. Selline moodus võttis tavaliselt mitu kuud aega. Masin arvutab aga tulemused kõikide variantide jaoks umbes ühe tunniga. Arvutusmasinatest ja programmeerimisest kõnelesid ka V. Allsalu, A. Oja, P. Piirikivi ja P. Eelma.

Arvutusmatemaatika probleemidele selle sõna otseses mõttes oli pühendatud kaks ettekannet. I. Peterseni ja S. Ulmi ettekanne käsitles ENSV TA Küberneetika Instituudis toimuvat uurimistööd mittelineaarsete võrrandite numbrilise lahendamise alal, E. Tamme kõneles aga veahinnangutest diferentsiaalvõrrandite ligikaudsel lahendamisel. Sellelaadilised uurimused on muutunud praegu eriti vajalikeks.

Teistest eespool nimetamata ettekannetest võiks veel märkida J. Lotmani ettekannet «Kirjanduse uurimise matemaatilistest meetoditest», J. Gabovitši ettekannet Tartu algebraistide töödest järjestatud algebraliste süsteemide alal jt. (vt. bibliograafia lk. 85—86).

Töö lõpul võttis konverents vastu järgmise resolutsiooni.

RESOLUTSIOON

Tartu Riikliku Ülikooli ja ENSV TA Loodusuurijate Seltsi poolt korraldatud teadusliku konverentsi «Kaasaegne matemaatika ja tema rakendusalad» tööst võttis osa arvukas teadlaste ja õppejõudude pere meie vabariigi paljudest õppe- ja uurimisasutustest, nagu Tartu Riiklikust Ülikoolist, Tallinna Polütehnilisest Instituudist, Eesti Põllumajanduse Akadeemiast ja enamikust Teaduste Akadeemia instituutidest, mitmetest vabariigi keskkoolidest ja teistest asutustest. Sealjuures võttis konverentsi tööst osa peale matemaatikute ka füüsikuid, astronoome, biolooge, arstiteadlasi, metsandusteadlasi, keeleteadlasi jt.

Konverents märgib, et matemaatika-alastes uurimistöödes meie vabariigis käsitletakse aktuaalseid teoreetilisi ja praktilisi probleeme. Peale täppisteadlaste on hakanud matemaatilisi meetodeid laialdasemalt rakendama ka teiste teadusalade esindajad, nagu näiteks bioloogid ja arstiteadlased. Konverents võttis heameelega vastu teate, et Tartusse saabus uus võimas arvutusmasin «Ural-4», mis võimaldab oluliselt suurendada arvutustööde mahtu meie vabariigis.

NLKP XXII kongressil vastuvõetud parteiprogrammis on korduvalt rõhutatud teaduse, seejuures eriti matemaatika ja küberneetika suurt tähtsust. Konverents konstateerib, et meie vabariigi vastava ala teadlased juhinduvad oma töös partei programmis püstitatud eesmärkidest. Samal ajal tuleb aga märkida, et matemaatika ja küberneetika arendamisel, sellealase kaadri ettevalmistamisel, vastavate meetodite tutvustamisel ja rakendamisel meie vabariigis on olulisi kitsaskohti, mida ei ole võimalik kõrvaldada ainuüksi matemaatikute poolt ja mille likvideerimiseks on vajalik kõrgemalseisvate organite abi.

Kõikide nende kitsaskohtade kõrvaldamiseks teeb konverents järgmised ettepanekud:

1. Pidada vajalikuks matemaatika-alase populaarteadusliku perioodilise väljaande asutamist.

Samal ajal tuleb juhtida ka Riikliku Kirjastuse, ajakirjade toimetuste ja matemaatikute tähelepanu matemaatika aktuaalseid küsimusi käsitlevate kirjutiste, teoste ja õpikute laialdasemale avaldamisele.

2. Pidada kõigi vabariigi matemaatikute, esmajoones matemaatika õpetajate kohustuseks kaasa aidata selleks, et võimalikult suurem hulk andekaid keskkoolilõpetajaid asuks edasi õppima matemaatika erialale.

Sobiva üliõpilaskandidaatide kontingendi korral soovitada ENSV Kõrgema ja Keskerihariduse Komiteel suurendada vastuvõttu matemaatika alal TRÜ-s.

3. Arvestades matemaatilise statistika eriteadlaste puudumist vabariigis ja tungivat vajadust vastavate spetsialistide järele pidada vajalikuks nende ettevalmistamist TRÜ matemaatikaosakonnas.

4. Paluda TRÜ teoreetilise mehaanika, üldfüüsika ja teoreetilise füüsika kateedreid 1963. a. novembriks välja töötada kooskõlastatud õppeprogrammid füüsikadistsipliinide õpetamiseks matemaatikutele.

5. Pidada vajalikuks Tartu Riiklikus Ülikoolis ja Eesti Põllumajanduse Akadeemias bioloogilistel erialadel vastavate matemaatiliste erikursuste sisseviimist (umbes 50 tundi).

6. Soovitada kõrgemates õppeasutustes ja uurimisinstituutides kontrollida kandidaadimiinimumi raames eksperimentaalse uurimissuunaga aspirantide statistika-alaseid teadmisi.

7. Soovitada ENSV Riiklikul Kõrgema ja Keskerihariduse Komiteel organiseerida kõrgema haridusega arvutustehnikainseneride ettevalmistamine vabariigi jaoks kas kohapeal või mõne vennasvabariigi kõrgemas õppeasutuses.

Konverentsist osavõtjad toetasid ka mõtet luua Tartus aparaadiehitusliku suunaga keskeriõppeasutus. Konverents soovitab selles õppeasutuses hakata ette valmistama ka keskharidusega arvutustehnikuid. Vastava haru õppejõudude kaadrit on võimalik komplekteerida Tartu Riikliku Ülikooli Füüsika-Matemaatikateaduskonna baasil.

8. Pidada õigeks nn. matemaatikaklasside asutamine Tartu ja Tallinna I keskkooli juures.

Olemasolevate klasside töö edasiseks tagamiseks ja vastavate klasside arvu suurendamiseks palub konverents Haridusministeeriumi astuda resoluutsemaid samme selleks, et matemaatikaklasside õpilaste jaoks avataks Tartu I Keskkooli juures internaat, mis võimaldaks selle kooli juures igal aastal avada kaks matemaatikaklassi.

9. Soovitada Tallinna Pedagoogilises Instituudis uurida matemaatika algõpetuse ümberkorraldamise võimalusi, silmas pidades õpilaste loogilise ja abstraktse mõtlemise võime tõhusamat arendamist.

10. Konverents juhib ENSV Haridusministeeriumi tähelepanu vajadusele muuta keskkooli matemaatikakursus rakenduslikumaks ja kaasaegsemaks. Selleks võiks soovitada näiteks diferentsiaal- ja integraalarvutuse ning matemaatilise statistika elementide käsitlemist keskkoolis. Suure rakendusliku tähtsusega on samuti lineaarse planeerimise teooria, mille elementide õpetamine on keskkoolis täiesti võimalik.

11. Konverents loeb otstarbekohaseks analoogiliste konverentside korraldamist ka järgnevatel aastatel.

UUS VÕIMAS ELEKTRONARVUTI MEIE VABARIIGIS

A. Oja, K. Pukk

Ikka sagedamini kasutatakse kaasaegse matemaatika teoreetilisi ja tehnilisi saavutusi kui võimsat vahendit teistes teadustes ja tootmises üleskerkinud ülesannete lahendamisel. Tootmise organiseerimise ja juhtimise, samuti selliste teaduste, nagu bioloogia, keeleteaduse, põllumajanduse jne. «matematiseerimine» nõuab suure hulga informatsiooni läbitöötamist loogilis-matemaatiliste meetoditega või mahukate arvutuste tegemist lühikese aja jooksul. Selline töö pole mõeldav ilma kaasaegsete elektronarvutiteta.

Senini olid Eesti NSV matemaatikute käsutuses üksnes võrdlemisi väikese võimsusega universaalsed elektronarvutid «Ural-1» ja «M-3», mis ei võimaldanud mahukamate ülesannete lahendamist. Tihti olid TRÜ arvutuskeskuse matemaatikud sunnitud kasutama suuremaid elektronarvuteid väljaspool meie vabariiki.

Käesoleva aasta maipühadeks said meie vabariigi, eeskätt aga TRÜ arvutuskeskuse matemaatikud suurepärase kingituse — elektronarvuti «Ural-4».

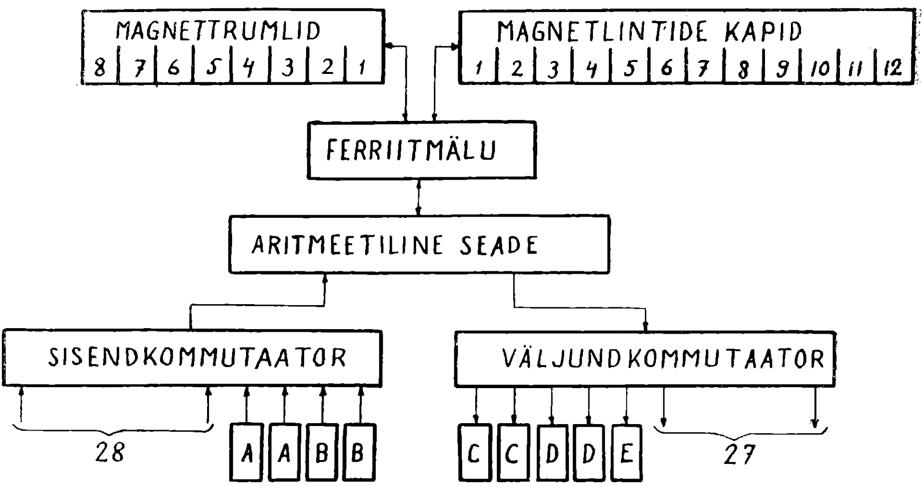
Elektronarvuti «Ural-4» on väga laia profiiliga: ta on ette nähtud kõige mitmekesisemate teaduslike, insenertehniliste ning eriti plaanilis-majanduslike ülesannete lahendamiseks. Masinal on hästi väljaarendatud ja paindlik käskude süsteem, mis võimaldab realiseerida ükskõik millist arvutusmeetodit. Arvuti mäluseadmete suurendatud maht ning sisend- ja väljundseadmete arvukus ja mitmekesisus võimaldavad tema abil efektiivselt lahendada statistika, tootmise planeerimise, arvelduse ja analüüsi, kaubalis-materiaalsete väärtuste arvelduse, igasuguste vaatlustulemuste ümbertöötamise jms. ülesandeid, mis on seotud suure informatsioonihulga vastuvõtmise, säilitamise, töötlemise ja väljastamisega. Elektronarvutisse «Ural-4» on võimalik sisse viia, temas säilitada ja töödelda nii numbrilist kui alfabeetilis-numbrilist informatsiooni.

Operatsioonide teostamise kiiruse poolest kuulub «Ural-4» keskmise võimsusega arvutite hulka. Ta sooritab ühes sekundis keskmiselt 5000—6000 tehet teaduslikel ja insenertehnilistel arvutustel ning 9000—10 000 tehet plaanilis-majanduslike või loogiliste ülesannete lahendamisel. Mälu mahu ja sisend-väljundseadmete hulga poolest tuleb aga «Ural-4» lugeda suureks elektronarvutiks.

Esitame tema informatsiooni töötlemise, liikumise ja salvestamise funktsionaalse blokkskeemi (vt. all).

Informatsiooni salvestamiseks kasutatakse arvutis ferriitkuupi (operatiivmälu), magnettrumleid ja magnetlinte. Ferriitkuupi võib salvestada 2048 neljakümnekohalist kahendarvu või 12 288 alfabeetilist märki (ühe alfabeetilise märgi esitamiseks on tarvis 6 kahendsüsteemi numbrikohta.)

«Ural-4» juurde on võimalik lülitada 8 magnettrumlit, millest igaühel on võimalik salvestada 16 384 neljakümnekohalist kahendarvu või 98 304 alfabeetilist märki. Arvude lugemise ja kirjutamise kiirus magnettrumlil on umbes 4500 neljakümnekohalist kahendarvu sekundis (koos vajaliku pesa otsimiseks kuluva ajaga).



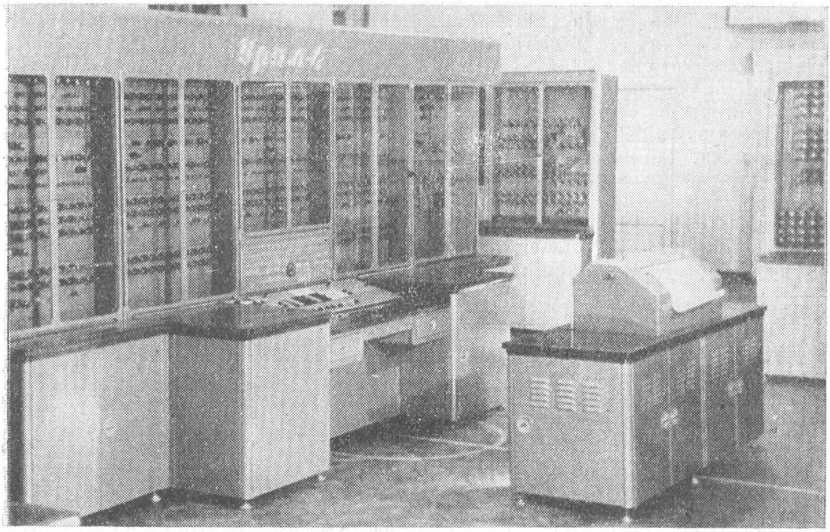
LUGEMISSEADMED:
A - PERFOKAARTIDELT
B - TELEGRAAFILINDILT

PERFORAATORID: C - PERFOKAARTIDE JA D - TELEGRAAFILINDI JAOKS
E - NUMBRILIS-ALFABEETILINE TRÜKKIMISSEADE

«Ural-4» blokkskeem.

Informatsiooni säilitamiseks magnetlindil kasutatakse 35 mm laiust ferrolakiga kaetud perforeerimata linti. Üks magnetlindikapp, milles on 4 linti, mahutab 262 144 neljakümnekohalist kahendarvu või 1 572 864 alfabeetilist märki. «Ural-4» juurde saab aga lülitada 12 magnetlindikappi. Magnetlindile salvestamise ja lugemise kiirus on 2000 neljakümnekohalist kahendarvu sekundis, arvestamata vajaliku pesa otsimiseks kuluvat aega.

Kogu «Ural-4» võimalike mäluseadmete maht on 3 278 848 neljakümnekohalist kahendarvu või 19 673 088 alfabeetilist märki. See tähendab, et «Ural-4» mälusse on võimalik salvestada kirjatekst, mis sisaldub umbes kahekümnes 400-leheküljelises raamatus, mille igal leheküljel on umbes 2500 tähte ja kirjamärki. Teiste sõnadega — «Ural-4» mälus võiks salvestada näiteks informatsiooni kogu Eesti NSV elanikkonna kohta, iseloomus-



Elektronarvuti «Ural-4» üldvaade.

tades iga inimest kolme 40-kohalise kahendarvuga või 18 alfabeetilise märgiga.

Informatsiooni sisseviimine arvutisse toimub 32 kanaliga kommutaatori kaudu, kusjuures iga kanal on võimeline läbi laskma 40-kohalisi kahendarve. Arvuti põhikomplekti sisendseadmed hõivavad ainult 4 kanalit (vt. skeem). Ülejäänud 28 kanalit võib seega kasutada informatsiooni sisseviimiseks otse informatsiooniallikast. Sisendkommutaator võib olla ühendatud otseselt näiteks mitme tehase või laboratooriumiga, kelle informatsiooni on vaja töödelda või kelle jaoks on vaja selle põhjal vahetult juhtida mingit protsessi. Kommutaatori sisendid võtavad vastu ka 20-kohalisi kahendarve. Sel juhul sisendkommutaatori kanalite hulk on kahekordistatav.

Perfokaart-lugemisseadme sisenemiskiirus on 300 perfokaarti minutis ehk 60 neljakümnekohalist kahendarvu sekundis. Sisenemiskiirus telegraafilindilt on 400 alfabeetilist märki sekundis.

Väljundkommutaatoril on samuti 32 kanalit, millest põhikomplekti seadmed hõivavad ainult 5. Ülejäänud kanalid võib ühendada objektidega, mida arvuti juhib.

Väljundperforaatori perforeerimiskiirus on 50 kaarti minutis ehk

10 neljakümnekohalist kahendarvu sekundis. Väljumiskiirus telegraafilindile on 8—10 alfabeetilist märki sekundis.

Numbrilis-alfabeetilise trükkimisseadme kiirus on 300 rida minutis, kusjuures ühes reas on 128 kohta. Trükkimisseadmel on kokku 63 erinevat märki (kümnendsüsteemi numbrimärgid, vene tähestiku tähed, kirjavahemärgid, matemaatilised märgid jne.). Arvutustulemusi on võimalik lasta välja trükkida ka graafikuna.

Arvuti keskmine kasulik aeg (s. o. aeg, mille jooksul teda saab kasutada vajalikeks arvutustöödeks) on 18 tundi ööpäevas. Muidugi kasuliku aja suurus sõltub oluliselt arvutusmasina tehnilise teenindamise tasemest.

TRÜ arvutuskeskuse uus elektronarvuti «Ural-4» avab Eesti NSV-s laialdased perspektiivid matemaatika veelgi intensiivsemaks arendamiseks. Kuid koos matemaatikutega peaksid ka meie majandusteadlased ja majandite juhid tegema kõik võimaliku, et maksimaalselt ära kasutada uue elektronarvuti täit võimsust rahvamajanduses üleskerkinud probleemide lahendamisel. See nõuab matemaatikute, rahvamajanduse spetsialistide ja tootmisjuhtide ühiseid jõupingutusi ja tihedat koostööd.

TARTU MATEMAATIKASEMINAR

M. Rahula, E. Tiit

Tartu järjest kasvav matemaatikute pere on jagunenud mitme asutuse vahel: peale Tartu Riikliku Ülikooli tegeldakse matemaatikaga Eesti Põllumajanduse Akadeemias, kus töötab matemaatika kateeder, ning äsja loodi Füüsika ja Astronoomia Instituudi juurde matemaatika laboratoorium.

Tartu erinevates asutustes töötavate matemaatikute vahel sidemete tugevdamiseks asutati 1962. aasta lõpul EPA dotsendi Jakob G a b o v i t š i eestvõttel Tartu Ülelinnaline Matemaatika Seminar. Seminari eesmärgiks on niihästi Tartu matemaatikute poolt viljeldavate probleemide kui ka kogu kaasaegse matemaatika uuemate tulemuste tutvustamine.

Seda, et seminari asutamine oli tõepoolest õigeaegne ja vajalik, näitab seminari regulaarne töö, kusjuures kuulajate arv on kõigil ettekannetel olnud paarikümne ümber, ulatudes mõningatel juhtudel neljakümneni.

Esimene töökoosolek, mis toimus 11. detsembril 1962. a., oli pühendatud suure saksa matemaatiku David Hilberti 100-ndale sünnipäevale. Ettekandega Hilberti elust ja tema teaduslikust tegevusest esines Jakob G a b o v i t š. Hilberti töödega tihedalt seotud geomeetria aksiomaatika probleemidest kõneles samal istungil Ülo L u m i s t e.

Avakoosolekul valiti seminari tööd juhtivad sekretärid ning otsustati seminari töö viia LUS-i täppisteaduste sektsiooni raamidesse. Avakoosolekul määrati kindlaks ka seminari edasised töösuunad.

Alates 1963. a. kevadsemestrist hakati pidama mitmesuguse temaatikaga ettekandeid, mis valgustasid Tartu matemaatikute tähtsamaid uurimissuundi ning enamasti ka autorite endi uusi teaduslikke tulemusi.

13. veebruaril esines Endel J ü r i m ä e, kõneldes absoluutsest summeeruvusest ridade teoorias.

27. veebruaril kuulati Enn T a m m e ettekannet «Diferentsmeetodite täpsusest diferentsiaalvõrrandite lahendamisel».

Rekordiline arv kuulajaid oli 13. ja 20. märtsi seminaril, kus Ivar K u l l tõstatas oma ettekandes «Konstruktiivsest matemaatikast» terve rea huvitavaid probleeme, mis põhjustasid elavat diskussiooni.

10. aprillil rääkis J e v g e n i G a b o v i t š poolrühmade ning

nende endomorfismide kaasaegsest teooriast.

Rohkesti oli osavõtjaid (sealhulgas ka keeleteadlasi ja õpetajaid) 24. aprillil toimunud töökoosolekul, kus Jakob Gabovitš ja Harry Espenberg tutvustasid kuulajaid EPA matemaatikakateedris koostatud «Väikese matemaatika oskussõnastiku» käsikirjaga ning tõstsid üles mitmeid terminoloogia-alaseid küsimusi.

15. mail esines Leo Võhandu. Oma ettekandes «Mõningaist statistika probleemidest» esitas ta uusi mõtteid eksamitulemuste hindamise modelleerimise võimaluste kohta.

Möödunud õppeaastal toimunud üritustest oli huvitav veel referatiivse žurnaali «Matemaatika» lugejatekonverents, mis toimus 11. juunil.

Ülelinnalisel matemaatika seminaril on arutatud ka mitmeid probleeme, mis huvitavad kõiki matemaatikuid, nagu kaastöö tegemist ajakirjale «Tehnika ja tootmine», õpikute kirjastamist jne.

Kroonika

PROF. G. KANGRO 50-AASTANE

21. novembril 1963. a. sai 50-aastaseks TRÜ matemaatilise analüüsi kateedri juhataja füüsika-matemaatikadoktor, professor Gunnar Kangro, kelle nimega on suures osas seotud kogu matemaatika kui teaduse areng Nõukogude Eestis.

G. Kangro sündis Tartus teenistuja perekonnas. Tema isa oli elukutselt ehitusinsener. Alghariduse sai praegune professor Tallinnas. Õppis edasi Tartu reaalkoolis, mille lõpetamise järel 1931. a. astus Tartu ülikooli. Ülikooli lõpetas G. Kangro 1935. a. Pärast aastast teenistust sõjaväes asus ta assistendina tööle Tallinna Polütehnilisse Instituuti. 1938. a. kevadel omistati G. Kangrole magistri kraad, mis peale Isamaasõja lõppu atesteeriti füüsika-matemaatikakandidaadi kraadiks.

1941. a. mobiliseeriti G. Kangro Punaarmeesse, kus ta teenis kuni 1942. a. Sealt suunati ta Rahvakomissaride Nõukogu stipendiaadina algul Tšeljabinski Põllumajanduse Mehhaniseerimise Instituuti, seejärel aga Moskva Ülikooli juurde. Stipendiaadina töötades jätkas G. Kangro edukalt oma uurimusi Boreli summeerimismenetluse üldistuste alalt, mida ta oli alustanud juba 1940. a. Nende uuringute tulemuseks oli doktoriväitekiri, mille kaitsmise järel 1948. a. G. Kangro sai füüsika-matemaatikadoktori teadusliku kraadi.

Alates 1944. a. novembrist töötab G. Kangro Tartu Riiklikus Ülikoolis, algul dotsendina, alates 1951. a. aga professorina. TRÜ seinte vahel on prof. Kangro teinud suurt tööd noorte matemaatikute kasvatajana. Nende aastate jooksul on ta lugenud väga mitmesuguseid kursusi, nagu matemaatiline analüüs, kõrgem algebra, reaalmuutuja funktsioonide teooria, funktsionaalanalüüs, ridade teooria, trigonomeetrilised read jt., pälvides lektorina üliõpilaste lugupidamise. Tema sulest on ilmunud ka kõrgema algebra õpik (kahes trükis). Ilmumas on matemaatilise analüüsi õpik.

Aastate jooksul on prof. Kangro juhendanud mitmeid eriseminare, kus ta on suutnud üliõpilastes äratada huvi teadusliku töö vastu. Paljudel on need seminaritööd ning edasi diplomitööd saanud esimesteks teaduslikeks uurimusteks, mis on kujunenud aluseks nende tööle prof. Kangro aspirantidena. Just aspirantide juhendamisel on prof. Kangro näidanud end erakordselt viljaka pedagoogina. Aspirantide juhendajaks on ta olnud alates 1950. a. ning senini on 12 tema õpilast kaitsnud kandidaadiväitekirja. Seega enamik meie noortest teadusliku kraadiga matemaatikutest on olnud prof. Kangro otsesed õpilased.

Kuna prof. Kangro enda teaduslik töö on põhilises osas pärit ridade teooria vallast, siis on sellelt alalt kaitstud ka suurem osa (kokku 8) tema juhendatud kandidaadidissertatsioone. Ei saa aga märkimata jätta ka teist uurimissuunda — lähendusmeetodeid; sinna valdkonda suunas prof. Kangro kolm oma õpilast, kes nüüd edukalt juhivad sellealast tööd meie vabariigis.

Arvestades eelkirjeldatud tähelepanuväärseid teaduslikke saavutusi ja kogu organisatoorset tööd, mida prof. Kangro on teinud matemaatika arendamisel, valiti ta 1961. a. ENSV TA korrespondeerivaks liikmeks.

Prof. Kangro ligi kahekümneaastane töö Tartu Riiklikus Ülikoolis on suuresti aidanud ehitada Nõukogude Eesti matemaatikateaduse hoonet, mille sees ja mille ümber keeb praegu vilgas elu. Kui kunagi hakatakse tegema kokkuvõtteid matemaatika arengust Nõukogude Eestis, siis kahtlemata märgitakse seal ühe kaalukamana prof. G. Kangro nime.

E. Jürimäe

MEIE KÜLALISI

Maikuus külastas Tartut Moskva Riikliku Ülikooli elastsusteooria kateedri professor P j o t r O g i b a l o v. Professor Ogibalov saabus Tartusse meie mehaanikute kutsel ning viibis siin terve nädala.

Tartus pidas professor Ogibalov rea loenguid plastilisusteooria uuemate suundade kohta, andis konsultatsioone mehaanika alal töötavatele Tartu Riikliku Ülikooli ja Eesti Põllumajanduse Akadeemia õppejõududele ning tutvustas üliõpilastele õppimisvõimalusi Moskva Riiklikus Ülikoolis.

Professor Ogibalov on tunnustatud eriteadlane oma alal. Ta on avaldanud mitu raamatut plaatide ja koorikute teooria, plastilisusteooria jm. küsimuste kohta. Professor Ogibalov kuulub mitmeisse mehaanika-alast teaduslikku tööd koordineerivaisse organeisse, on NSVL Ministrite Nõukogu juures asuva Teaduslik-Tehnilise Nõukogu matemaatika, astronoomia ja mehaanika sektsiooni esimees.

Isiklik kontakt, mille jätkamiseks tulevikus andis külaline oma nõusoleku, tõi Tartu mehaanikutele suurt kasu.

L. Roots

* *

Juuni algul viibis Tartu Riiklikus Ülikoolis Dnepropetrovski Riikliku Ülikooli dotsent I. I. O g i e v e t s k i, kes pidas matemaatilise analüüsi kateedri ridade teooria seminaris mitu ettekannet oma doktoridissertatsiooni «Uurimused summeeruvuse kohta» materjalidest. Ettekannetest nähtus, et I. I. Ogievetski on saanud uusi väärtuslikke tulemusi üldiste ja spetsiaalsete regulaarsete summeerimismenetluste alalt. Ta on välja töötanud head meetodid Tauberi tüüpi teoreemide saamiseks, samuti antud maatriksiga seotud jadade hulga võimsuste uurimiseks jne.

I. I. Ogievetski tööle anti kõrge hinnang ja soovitati esitada füüsika-matemaatikadoktori teadusliku kraadi saamiseks.

E. Reimers

* *

8.—11. juunini viibisid Tartus kolm teadlast-matemaatikut Moskvast: Moskva Riikliku Ülikooli diferentsiaalgeomeetria kateedri professor G. F. L a p t e v, P. Lumumba nim. Rahvaste Sõpruse Ülikooli algebra ja geomeetria kateedri juhataja prof. V. V. R õ ž k o v ning referatiivse ajakirja «Matemaatika» toimetuskolleegiumi teaduslik sekretär van. tead. töötaja N. M. O s t i a n u.

Mõlemad Moskva professorid esinesid Tartu Riiklikus Ülikoolis loengutega. Prof. Laptevi loengud «Seostusega ruumid sisestatud muutkondadena» olid pühendatud tema enda originaalsetele uurimistulemustele. Prof. Rõžkov andis loengutes teemal «Punktikujutuste diferentsiaalgeomeetria» ülevaate ühest viimase aastakümne jooksul kujunenud diferentsiaalgeomeetria suunast.

11. juuni õhtul toimus Tartu ülelinnalise matemaatikaseminari raames referatiivse ajakirja «Matemaatika» lugejatekonverents, millest võttis osa arvukalt matemaatikahuvilisi. Külalistest esines ajakirja toimetuse liige prof. G. F. Laptev lühikese sissejuhatusega ja teaduslik sekretär N. M. Ostianu pikema informatsiooniga ajakirja toimetuskolleegiumi tegevusest. Järgnenud elavas arutelus võtsid sõna prof. G. Kangro, dots. J. Gabovitš, dots. Ü. Lumiste, dots. E. Tamme jt.

12. juunil sõitsid külalised edasi Vilniuses toimuvale I Baltimaade diferentsiaalgeomeetria konverentsile.

Ü. Lumiste

UUSI TEADUSTE KANDIDAATE

1963. aasta 8. märtsil kaitses Moskva Riikliku Ülikooli Mehaanika Teadusliku Uurimise Instituudi Nõukogu ees kandidaadidissertatsiooni «Mitmesuguse kujuga plaatide stabiilsusest» TRÜ teoreetilise mehaanika kateedri vanemõpetaja **Lembit Roots.** Väitekirjas käsitles dissertant kolmnurga- ja trapetsikujuliste elastsete plaatide stabiilsuse probleeme.

Lembit Rootsi juhendajaks oli TRÜ teoreetilise mehaanika kateedri professor Ülo Lepik. Oponeerisid Moskva Riikliku Ülikooli prof. P. Ogibalov ja Kirgiisi NSV TA akadeemik prof. S. Popov.

Lembit Rootsile omistati füüsika-matemaatikakandidaadi kraad.

12. aprillil 1963. a. toimus TRÜ Füüsika-Matemaatikateaduskonna Nõukogu koosolek, kus TRÜ matemaatilise analüüsi kateedri vanemõpetaja **Tamara Sõrmus** kaitses väitekirja teemal «Merceri tüüpi teoreemidest kahekordsetele ridadele».

Dissertatsioon, mis käsitleb ridade teoorias olulisi probleeme, sisaldab huvipakkuvaid tulemusi. Töö valmis aspirantuuriaja vältel professor G. Kangro juhendamisel ning töö autorile omistati füüsika-matemaatikakandidaadi kraad.

4. mail 1963. a. kaitses Tallinna Polütehnilise Instituudi assistent **Frederik Vichmann** kandidaadidissertatsiooni teemal «Üldistatud summeeruvustegurid».

ENSV TA Füüsika-Matemaatika ja Tehnikateaduste Osakonna Nõukogu omistas dissertandile füüsika-matemaatikakandidaadi kraadi.

F. Vichmann töötas aspirantuuris matemaatilise analüüsi kateedri juures prof. G. Kangro juhendamisel. Nagu märkisid oponendid prof. B. Rõmarenko ja füüs.-mat. kandidaat S. Baron, on tööl märgatav teaduslik väärtus ridade teooria mitmesuguste probleemide lahendamisel.

ENSV TA Küberneetika Instituudi aspirant **Meiše - Levin** kaitses 4. mail 1963. a. väitekirja teemal «Integraalide ligikaudsest arvutamisest», mille eest ENSV TA Füüsika-Matemaatika ja Tehnikateaduste Osakonna Nõukogu omistas talle füüsika-matemaatikakandidaadi kraadi. M. Levini teaduslikuks juhendajaks oli dots. Ülo Kaasik. Oponeerisid prof. B. Rõmarenko ja dots. E. Tamme.

Väitekirjas tuletatakse rida rakenduslikult väärtuslikke valemeid nii ühe- kui ka mitmekordsete integraalide ligikaudseks arvutamiseks ning antakse eeskirjad täpsuse hindamiseks. Peamiselt on vaatluse all valemid, mille abil määratud integraali ligikaudne väärtus arvutatakse integreeritava funktsiooni ja tema tuletiste väärtuste lineaarkombinatsioonina.

21. juunil 1963. a. kaitses oma dissertatsiooni «Ridade ümberjärjestamisest» ENSV TA Füüsika ja Astronoomia Instituudi noorem teaduslik töötaja **Ene Tiit**.

E. Tiidu teaduslikuks juhendajaks oli prof. G. Kangro. Oponeerisid prof. H. Jaakson ja füüsika-matemaatikakandidaat S. Geisberg.

TRÜ Füüsika-Matemaatikateaduskonna nõukogu otsustas E. Tiidule omistada füüsika-matemaatikakandidaadi kraadi.

Ene Tiit oli kaheteistkümnes aspirant, kes professor G. Kangro juhendamisel töötades on saanud kandidaadikraadi.

AUHINNA- JA DIPLOMITÖÖD

TRÜ matemaatikaosakonna üliõpilased teostasid 1962/63. õppeaastal järgmised **võistlustööd.**

1. T ü r n p u, Heino (IV k.). Mõnedest abstraktsete summeeruvustegurite tüüpidest II järku Rieszi menetluse jaoks. (Juhendajad prof. G. Kangro ja dots. kt. S. Baron.)
2. K i l p, Mati (III k.). Parempoolselt järjestatud poolrühmadest. (Juh. dots. kt. J. Hion.)
3. R e b a n e, Jüri (IV k.). Ringidest, mille kõik aditiivsed alamrühmad on alamringid. (Juh. dots. kt. J. Hion.)

Kõik ülalnimetatud tööd tunnistati I auhinna vääriliseks.

TRÜ matemaatikaosakonnas kaitsti 13. ja 14. juunil 1963. a. järgmised **diplomitööd.**

1. N i l s o n, Tiit. Kiirguse transformatsioonivõrrand taimkatte jaoks. (Juh. füüs.-mat. kand. J. Ross.)
2. K o r j u s, Maie. Parameetriline planeerimine. (Juh. asp. T. Akkel.)
3. A r i v a, Karl. Geodeetiliste kongruentside ortogonaalpindadest Riemanni ruumis. (Juh. dots. Ü. Lumiste.)
4. K a s k, Imbi. Tõlkimisalgoritmi automaatsest koostamisest. (Juh. R. Palm.)
5. E i e r, Elle. Järjestatud poolrühmade teooria küsimusi. (Juh. ass. J. Gabovitš.)
6. L a m p, Jüri. Ühest maatriksmenetluste klassist. (Juh. prof G. Kangro.)
7. E e l m a, Peeter. Doomino mängimise programm. (Juh. dots. Ü. Kaasik.)
8. S a a r n i i t, Igor. Diferentsiaalvõrrandi lähislahendi vea hindamisest. (Juh. dots. E. Tamme.)
9. R e i n o, Vaike. Eestikeelse matemaatika-alase kirjanduse bibliograafia 1920—1941. (Juh. dots. O. Prinits.)
10. S e p p, Lii. Eestikeelse matemaatika-alase kirjanduse bibliograafia 1944—1960. (Juh. dots. O. Prinits.)
11. K e n k, Kalju. Õhukese ringsilindrilise kooriku dünaamikast konstantse kiirgusega leviva ühtlase normaalrõhu mõjul. (Juh. v.-õp. A. Tümanok.)
12. L a i d o, Tiiu. Geomeetria õpetamise näitlikustamisest. (Juh. ass L. Tuulmets.)
13. H e i n, Maaja. Aritmeetilise keskmise ja ruuthajuvusmõõdu käsitlus rahvamajandusliku aine taustal. (Juh. prof. G. Rägo.)
14. G r ü n e r, Leida. Matemaatilisi küsimusi pärilikkuse probleemi taustal. (Juh. prof. G. Rägo.)
15. N a z a r o v a, Eeva. Noorte matemaatikute kool — klassivälise töö uus liik. (Juh. ass. J. Gabovitš.)
16. L e e d u, Maie. Permutatsioonid, kombinatsioonid ja matemaatilise tõenäosuse mõiste bioloogilise materjali taustal. (Juh. prof. G. Rägo.)
17. V e l d r e, Tiina. Ühest faktoranalüüsi meetodist. (Juh. dots. kt. L. Võhandu.)
18. A r r o, Evi. Surevustabel ja kindlustusmatemaatika põhiprobleemid. (Juh. prof. G. Rägo.)
19. S e i t a m, Anneli. Matemaatika tunni efektiivsus. (Juh. dots. O. Prinits.)
20. J a e g e r, Andres. Loogiliste funktsioonide minimiseerimine lineaarplaneerimise meetodite abil. (Juh. dots. kt. I. Kull.)

TEADUSLIKE KONVERENTSIDE MATERJALE

Tallinna Polütehnilises Instituudis toimus 19.—27. aprillini 1963 V. I. Lenini 93. sünni-aastapäevale pühendatud XVIII teaduslik konverents, kus peeti järgmised matemaatika-alased ettekanded.

1. Dots. A. Särev. Mõningaid äärväärtusülesannetega seotud küsimusi.
2. Dots. kt. M. Tamm. n-parameetrilisest lineaarprogrammeerimisest.
3. Ass. F. Vichmann. Üldistatud summeeruvustegureist.
4. Dots. N. Paluver. Astmeridade üldistatud summeerimisest.
5. Dots. P. Volmer. Iteratsioonitüüpi erifunktsioonide rakendusi füüsikalis-matemaatilises analüüsis.
6. V.-õp. B. Tiikma. Virtuaalsetest võimsustest.
7. Dots. kt. O. Silde. Ühest lagranžiaanist.

Eesti Põllumajanduse Akadeemias toimus 7.—13. veebruarini 1963 X teaduslik konverents, kus peeti järgmised matemaatika-alased ettekanded.

1. Dots. J. Gabovitš. Ühe diofantilise võrrandi naturaalarvulistest lahenditest.
2. Dots. A. Ruubel. Kujutavas geomeetrias kasutatavatest teisendustest.
3. V.-õp. H. Espenberg. Summeeruvusteguritest Euler-Knoppi menetluse jaoks.
4. Van.-õp. H. Merilo. Schuri meetodi rakendamisest Voronoi-Nörlundi menetluse puhul.

Tartu Riiklikus Ülikoolis toimus 28.—30. märtsini 1963. a. XVIII üliõpilaste teaduslik konverents. Matemaatikasektsioonis peeti järgmised ettekanded.

1. J. Rebane (mat. IV k.). ε-null poolrühmad. (Juh. dots. kt. J. Hion.)
2. M. Kilp (mat. III k.) Ühest parempoolselt järjestatud poolrühmade klassist. (Juh. dots. kt. J. Hion.)
3. H. Türnpu (mat. IV k.). (P/B)-tüüpi summeeruvustegurid. (Juh. dots. kt. S. Baron.)
4. M. Abel (mat. II k.). M. Hoolma, K. Riives ja E. Rooba (mat. III k.). Summeeruvusteguritest kompleksset järku Cesàro menetluse jaoks. (Juh. dots. kt. S. Baron.)

Bibliograafia

Kogumiku «Matemaatika ja kaasaeg» käesoleva numbri bibliograafiarubriigis avaldame valikulise ülevaate matemaatika-alasest kirjandusest, mis on ilmunud Eesti NSV-s 1962/63. õppeaasta jooksul.

EESTI RIIKLIKU KIRJASTUSE VÄLJAANDEL ILMUNUD TEOSED

Kangro, G. **Kõrgem algebra.** Õpik kõrgematele õppeasutustele. Tallinn, 1962. 555 lk.

Petersen, I. ja Roos, H. **Kõrgema matemaatika ülesannete kogu.** 2. tr. Tallinn, 1962. 1. osa: 302 lk. 2. osa: 251 lk.

Rägo, G. **Kõrgem matemaatika. I.** Tallinn, 1962. 739 lk.

Borkvell, A. **Arvutuslükati teooria ja käsitlemine.** 3. tr. Tallinn, 1963. 160 lk.

TRÜ ja TPI ROTAPRINDIL ILMUNUD ÕPPEVAHENDID

Rõbnikov, K. A. **Matemaatika ajalugu. I.** Tartu, 1962. 203 lk. Vene k.

Mereste, U. **Ülesandeid statistika praktikumiks.** Tartu, 1962. 100 lk.

Hion, J. **Elementaarmatemaatika kõrgemalt vaatekohalt. I.** Algebra. Tartu, 1962. 139 lk.

Jürimäe, E. **Integraalvõrrandid.** Tartu, 1963. 103 lk.

Jõgi, E. ja Velsker, K. **Elementaarmatemaatika ülesandeid. I.** Tartu, 1963. 34 lk.

Tamme, E. **Arvutusmeetodid. III.** Funktsioonide lähendamine. Tartu, 1963. 110 lk.

Mendel, L. ja Mereste, U. **Arvjoonised.** Tartu, 1963. 116 lk.

Lepik, Ü. **Valitud küsimusi teoreetilisest mehhaanikast. II.** Kindla keha liikumine kinnispunkti ümber. Tartu, 1963. 43 lk.

Soonets, K. **Valitud küsimusi teoreetilisest mehhaanikast. III.** Dünaamika üldvõrrand ja selle rakendusi. Tartu, 1963. 50 lk.

Roots, L. **Valitud küsimusi teoreetilisest mehhaanikast. IV.** Analüütiline mehhaanika. Tartu, 1963. 81 lk.

Tamm, M. **Lineaaralgebra ja lineaarprogrammeerimise konspekt.** TPI raamatupid. eriala üliõpilastele. Tallinn, 1962. 1. osa: Lineaaralgebra. 40 lk. 2. osa: Lineaarprogrammeerimine. 116 lk.

PERIOODIKA JA KOGUMIKUD

Tartu Riikliku Ülikooli Toimetised. Vihik 129. Matemaatika- ja mehhaanika-alaseid töid. III. Tartu, 1962. 496 lk. Vene k.; resümeed eesti k. ning inglise või saksa k.

Sisu:

Gabovitš, J. Poolrühmade endomorfismidest. Gabovitš, J. Arhimeediliselt järjestatud Ω-rühmadest. Rahula, M. Ühest mitteholonoomse geomeetria aspektist. Rahula, M. Dervitatsioonide jada muutkonnal. Mullari, R. Mitmemõõtmelise eukleidilise ruumi maksimaalselt sümmeetrilistest pindadest. Lumiste, Ü. Kahemõõtmeliste minimaalpindade teooriast. III. Põhiteoreem ja painutamine. Lumiste, Ü. Kahemõõtmeliste minimaalpindade teooriast. IV. Kõverusringjoontega pinnad. Tuulmets, L. Minimaaldemikongruentsid eukleidilises ruumis R_4. Reimers, E. Uued üldised summeerimismenetlused. Kangro, G. ja Baron, S. Summeeruvus- ja absoluutsed summeeruvustegurid Rieszi kaalutud keskmiste menetlusega absoluutselt summeeruvate kahekordsete ridade jaoks. Vichmann, F. Peyerimhoffi meetodi ülekandmine üldistatud summeeruvustegureile. Vichmann, F. Bohr-Hardy tüüpi teoreemid kahekordsete ridade korral. Vichmann, F. Üldistatud summeeruvustegurid Rieszi kaalutud keskmiste menetluse korral. Baron, S. Summeeruvustegurid Rieszi kaalutud keskmiste menetlusega summeeruvate või tõkestatud kahekordsete ridade korral. Espenberg, H. Summeeruvusteguritest Euler-Knoppi menetluse puhul. Espenberg, H. Summeeruvusteguritest Hausdorffi menetluse puhul. Türnpu, H. Mõned summeeruvustegurite tüübid teist järku Rieszi menetluse jaoks. Sõrmus, T. Mõningatest Merceri tüüpi teoreemidest kitsendatud koonduvuse korral. Sõrmus, T. Merceri tüüpi teoreemid kitsendatud ja hariliku koonduvuse korral. Geisberg, S. Tõkestatud summeerimisväljade sisalduvusest. Geisberg, S. Mazur-Orliczi teoreemide analoogid absoluutse summeeruvuse korral. Tiit, E. Summade piirkondadest lineaarsetes normeeritud ruumides. Tiit, E. Teatud tüüpi summeeruvate ridade A-summade piirkonnad. Tiit, E. Mõned uued summeeruvate ridade A-summade piirkonnad. Baron, S. E. Landau ühe teoreemi üldistustest. Kivistik, L. Ühest iteratsioonimeetodite klassist Hilberti ruumis. Kivistik, L. ja Ustaal, A. Mõned koonduvusteoreemid minimaalse jäägi meetodi jaoks. Vainikko, G. Galjorkini meetodi vea hinnangud lineaarse diferentsiaalvõrrandi korral. Vainikko, G. Ritzi meetodi vea hinnangud lineaarse homogeense võrrandi korral. Levin, M. Mõningad valemid kahekordsete integraalide ligikaudseks arvutamiseks. Levin, M. Mõned hinnangud analüütiliste funktsioonide kubatuurvalemite jaoks. Levin, M. Gaussi valemi üldistus mitme muutuja funktsioonide jaoks. Levin, M. Kvadratuurvalemid ühe funktsioonide klassi jaoks. Dragilev, A. Rayleigh-tüüpi võrrandi perioodiline lahend. Jõgi, E. Lamedate elastilis-plastiliste kõverate varraste arvutamisest. Jõgi, E. Lamedate kõverjooneliste varraste stabiilsusest. Lepik, Ü. Neutronkiirgusele allutatud ümmarguste plaatide kandevõimest. Roots, L. ja Tauts, T. Meelevaldse kujuga jäigalt kinnitatud plaatide stabiilsusest.

Eesti NSV Teaduste Akadeemia Füüsika ja Astronoomia Instituudi Uurimused. 1963, nr. 20.

Matemaatika-alased artiklid:

Tauts, A. Predikaat-tüüpi loogiliste võrrandite lahendamine. Tiit, E. Mõningate summeeruvate ridade A-summade piirkond. Jürgenson, R. Integro-diferentsiaalvõrrandi ligikaudse lahendi vea hinnangust. Kruusmaa, A. Ringikujulise plaadi paine tema välisserva antud kiirenduse puhul.

Eesti NSV Teaduste Akadeemia Toimetised. Füüsika-matemaatika- ja tehnikateaduste seeria. 1963, nr. 1. 112 lk. Vene k., resümeed eesti ja inglise k.

Matemaatika-alased artiklid:

Alumäe, N. ja Poverus, L. Suletud ringsilindrilise kooriku otsa järsul mittetelgsümmeetrilisel koormamisel areneva elastse deformatsiooni üleminekuprotsessist. Ulm, S. Interpolatsioonimeetodid mittelineaarsete võrrandite lahendamiseks Banachi ruumis. Ainola, L. Elastsete plaatide arvutusmudelitest dünaamika-ülesannete lahendamiseks. Levin, M. Ühe kvadratuurvalemiga seotud ekstremaalülesannetest. Timma, E. Pärivooluses leviva turbulentse lameda joa probleemi analüütiline lahendamine.

Eesti NSV Teaduste Akadeemia Toimetised. Füüsika-matemaatika- ja tehnikateaduste seeria. 1963, nr. 2. 223 lk. Vene k., resümeed eesti ja inglise k.

Matemaatika-alased artiklid:

Petersen, I. Runge-Kutta tüüpi meetodid mittelineaarsete võrrandite lahendamiseks Hilberti ruumis. Ulm, S. Ühest iteratsioonmenetluste klassist Hilberti ruumis. Levin, M. Ekstremaalülesanne ühe funktsioonide klassi jaoks. Nigul, U. A. I. Lurje sümboolse meetodi kasutamisest elastsete plaatide dünaamika kolmemõõtmelises teoorias.

Eesti NSV Teaduste Akadeemia teaduslike töötajate poolt 1962. a. füüsika-matemaatika- ja tehnikateaduste alal avaldatud tööde bibliograafia. Tallinn, 1963. 29 lk. (Eesti NSV Teaduste Akadeemia Toimetised. XII köide. Füüsika-matemaatika- ja tehnikateaduste seeria. 1963, nr. 2. Lisa.)

Труды Вычислительного центра. Выпуск 3. Тарту, Ротапринт ТГУ, 1963.

Содержание:

Крулль, М. Стандартные подпрограммы вычисления значений элементарных функций с четырьмя десятичными знаками. Лухт, С. Стандартная программа решения транспортной задачи. Лухт, С. Обобщенная транспортная задача.

Teaduslik konverents «Kaasaegne matemaatika ja tema rakendusalad» 3.—5. maini 1963. [Ettekannete lühikokkuvõtted.] Tartu, TRÜ rotaprint, 1963. 104 lk.

Sisu:

Ross, J. Põllumajanduslike kultuuride fotosünteesi ja kiirgusrežiimi matemaatiline teooria. Mürk, H. Mõningatest rakendusmeteoroloogia küsimustest. Marran, H. Õhuelektriliste vaatlusandmete töötlemisest. Eelsalu, H. Stellaarstatistika — matemaatilise statistika noor distsipliin. Tiit, E. Faktoranalüüsi rakendamisest astronoomias. Noorma, R. Graafide teooria rakendusi. Võhandu, L. Paljutunnuseliste bioloogiliste süsteemide uurimisest matemaatiliste meetoditega. O p e r, U. Vaatlusandmete töötlemisest ENSV TA Küberneetika Instituudi elektronarvutil. V e l d r e, S. Ühest faktoranalüüsi meetodist. O r a v, T. Nakatusjaotuse (Neyman-jaotuse) kasutamisest rakusiseste kiirguskahjustuste uurimisel. V a h e r, Ü. Hemolüütiliste erütrospektrite jaotusköverad ja nende parameetrite arvutamine. K r i g u l, T. Algandmete probleemist metsamajanduses. N i l s o n, A. Bioloogilise andmestiku vormistamisest seoses matemaatilise töötlemisega. K a n g r o, G. Ridade teooria küsimustest. L u m i s t e, Ü. Kaasaja diferentsiaalgeomeetria meetodid ja rakendusalad. R a h u l a, M. Liikumiste geomeetriast. G a b o v i t š, J. Tartu algebraistide tööd järjestatud algebraliste süsteemide alal. K u l l, I. Matemaatiline loogika ja tema rakendused. L o t m a n, I. Kirjanduse uurimise matemaatilistest meetoditest. K o l d e, R. Mõningaid gnoseoloogilisi küsimusi seoses uute matemaatika programmidega. P r i n i t s, O. Keskharidusega arvutusmatemaatikute ettevalmistamisest. M e r i l o, H. Matemaatika õpetamisest Eesti Põllumajanduse Akadeemias. P i i r, I. Füüsika osast matemaatiku hariduses. K a a s i k, Ü. Majandusküberneetika põhisuundadest. P e t e r s e n, I. ja U l m, S. Mittelineaarsete võrrandite numbrilise lahendamise alasest uurimistööst ENSV TA Küberneetika Instituudis. T a m m e, E. Vea hindamisest diferentsiaalvõrrandite ligikaudsel lahendamisel. P o l l i, H. ja P i h l a k, A. Elektronarvuti kasutamisest projekteerimistöödel. K r u l l, M. Tehase töö küberneetiline mudel. A k k e l, T. Matemaatika põllumajanduses. A a s m ä e, V. Söödakõlvikute ja -kultuuride struktuuri arvutamine lineaarplaneerimise meetodi abil. A l l s a l u, V. ja O j a, A. Analoogarvutid. P i i r i k i v i, P. Elektronmasinate arengusuunad. E e l m a, P. Doomino mängimisest elektronarvutusmasinaga.

Ülesandeid

Kogumikus «Matemaatika ja kaasaeg» hakatakse avaldama igas numbris ülesandeid nii elementaar- kui ka kõrgema matemaatika valdkonnast. Elementaarmatemaatika ülesannete lahendamiseks piisab teadmistest keskkoolikursuse ulatuses, mistõttu ootame ka keskkooliõpilaste aktiivset osavõttu.

Ülesannete lahendused tuleb ära saata poolteise kuu jooksul peale nende ilmumist. Lahendused koos lahendajate nimedega avaldatakse kogumiku ülejärgmises numbris.

Ühtlasi pöördume kõigi lugejate poole palvega saata toimetusele avaldamiseks omapoolseid originaalseid ülesandeid, mis on varustatud ükskasjalike lahendustega.

Ülesannete lahendused ja uued ülesanded tuleb saata aadressil: Tartu, Lenini väljak 1, Eesti Põllumajanduse Akadeemia matemaatika kateeder.

A. Ülesandeid elementaarmatemaatikast

1. Klassis on 24 õpilast. Neist 16 on matemaatikaringi, 13 kirjandusringi ja 8 keemiaringi liikmed. Ükski õpilane ei ole kõigi kolme ringi liikmeks. Õppeveerandi lõpul said matemaatikas puuduliku hinde 5 õpilast, kuid kõigil õpilastel, kes töötasid vähemalt ühe ringi liikmena, oli matemaatikas hindeks «hea» või «rahuldav». Mitu õpilast said matemaatikas hindeks «väga hea»? Mitu õpilast töötasid samaaegselt nii kirjandus- kui ka keemiaringis?

2. Ringjoone punktist A on tõmmatud diameeter AB ja võrdsed kõõlud AC ning AD. Diameetril AB on võetud vabalt mingi punkt P. Lõiku CP on pikendatud lõikumiseni ringjoonega punktis E. Kõõlud EB ja AD lõikuvad punktis F. Tõestada, et $FP \perp AB$.

3. Lahendada võrrand:

$$\frac{2^{x-n}\sin x}{\sin\frac{x}{2^n}} = \cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdot\cos\frac{x}{2^3}\cdots\cos\frac{x}{2^n}.$$

4. Ühendame Euroopa kaardil iga linna temale lähima linnaga (eeldusel, et linnadevahelised kaugused on kõik erinevad). Tõestada, et ükski linn ei ole ühendatud rohkem kui viie naaberlinnaga.

5. Leida summa

$$3+33+333\ldots+\underbrace{333\ldots33}_{50\ \text{numbrit}}.$$

6. Kas on olemas niisuguseid täisarve, mille ruut lõpeb nelja ühesuguse nullist erineva numbriga?

B. Ülesandeid kõrgemast matemaatikast

1. Leida x^2 kordaja avaldises

$$\underbrace{(\ldots((}_{k \text{ sulgu}}x-2)^2-2)^2-\ldots-2)^2.$$

2. Ellipsisse pooltelgedega $a=\frac{15}{2\sqrt{14}}$ ja $b=1$ on joonestatud võrdhaarne kolmnurk pindalaga $S=\frac{28}{15}$ nii, et tema tipp asub ellipsi väiksema telje otspunktis ning alus on paralleelne ellipsi suurema teljega. Leida kolmnurga kõrgus.

3. Leida funktsiooni $y=\arcsin\log_{x^2}(x+2)$ määramispiirkond.

4. Arvutada

$$\lim_{x\to-2}\frac{a-1-\sqrt{a^2+ax+1}}{a+1-\sqrt{a^2-ax+1}}.$$

SISUKORD

KROONIKA

Математика и современность.
Научно-популярный сборник № 1.
На эстонском языке.
Тартуский государственный университет
г. Тарту, ул. Юликооли, 18.

Toimetaja E. Sarv
Korrektor E. Võhandu

Ladumisele antud 13. XI 1963. Trükkimisele antud 24. XII 1963. Paber 60 × 90, 1/16. Trükipoognaid 5,75. Arvestuspoognaid 5,96. Trükiarv 1500. MB-10157. Tellimuse nr. 8738. Hans Heidemanni nim. trükikoda. Tartu, Ülikooli 17/19. II.

Hind 31 kop.