# Uurimisteemade tutvustus TÜ MSI üliõpilastele

Rainis Haller

22. septembril 2022. a Tartus

Loodetavasti on teile silma jäänud mõni TÜ matemaatilise analüüsi õppejõud-teadlane, näiteks **Kati Ain, Rainis Haller, Urve Kangro, Johann Langemets, Aleksei Lissitsin, Märt Põldvere, Natalia Saealle, Indrek Zolk**, või olete enda uurimistöö võimalikku teemat arutanud mõne meie magistrandi (**Nikita Leo, Markus Lõo, Deivid Šaad**), doktorandi (**Stefano Ciaci, Jaan Kristjan Kaasik, Jaagup Kirme, Paavo Kuuseok, Triinu Veeorg**) või noore doktoriga (**Rihhard Nadel, Andre Ostrak, Katriin Pirk**). Või on teile meeldinud meie õppeained, nt Ühe- ja mitme muutuja matemaatiline analüüs, Funktsionaalanalüüs I, II ja III, Mõõt ja Lebesgue'i integraal, Üldine topoloogia I (või ka Kõrgem matemaatika I ja II). Igatahes on kõik üliõpilased meie juurde väga oodatud.

Isegi kui kõik matemaatilise analüüsi õppejõud-teadlased täna oma teemasid välja ei paku, siis nad on kõik juhendamiseks valmis. Matemaatilise analüüsi valdkonnas on meie (uurimisrühma, ülikooli ja Eesti) taseme hoidmiseks ja selle tõstmiseks põhjapanev, et noorte uurimisteemade hulk oleks mitmekesine. Arvestage ka, et ühel tööl võib vabalt olla mitu juhendajat.

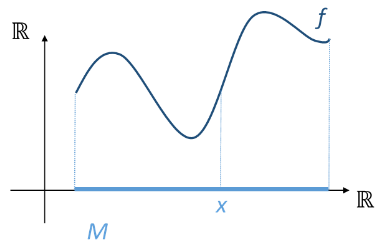
## 1 Uurimistöö funktsionaalanalüüsi uurimisrühma aktiivselt suunalt Banachi ruumide geomeetriast

a) **Diameeter-2 omaduste teema.** Tutvustus eeldab põhjalikumat sissejuhatust ja individuaalset lähenemist. Banachi ruumide diameeter-2 omaduste maailm on veel liiga kirju ja vajab selgitamist. Üldiselt uuritakse siin Banachi ruume, mille kinnise ühikkera kõik viilud on diameetriga 2, näiteks Daugaveti ruume. Siin on mitmeid hästi tuntud ja vähem tuntud lahendamata probleeme. Meie rühma liikmed ja mitmed meie head tuttavad matemaatikud tegelevad selles vallas aktiivselt.

b) **Lipschitzi-vabade ruumide teema.** Olgu $M \subseteq \mathbb{R}$ (või olgu $(M, d)$ suvaline meetriline ruum). Öeldakse, et kujutus $f\colon M \to \mathbb{R}$ on *Lipschitzi funktsioon*, kui mingi reaalarvu $L$ korral kehtib mis tahes elementide $x, y \in M$ jaoks võrratus

$$|f(x) - f(y)| \leqslant L \cdot |x - y| \qquad \big(|f(x) - f(y)| \leqslant L \cdot d(x, y)\big).$$

Lipschitzi funktsiooni $f$ on võimalik vaadelda teatud pideva lineaarse kujutuse $\hat{f}\colon \mathcal{F}(M) \to \mathbb{R}$ ahendina, kus $\mathcal{F}(M)$ on teatud Banachi ruum. N-ö *Lipschitzi-vabade ruumide* $\mathcal{F}(M)$ kohta on vähe teada ja neid uuritakse intensiivselt. Näiteks on teada,




Joonis 1: Lipschitzi funktsioon

et $\mathcal{F}(\mathbb{R}) = L_1(\mathbb{R})$, aga juba $\mathcal{F}(\mathbb{R}^2)$ ei ole rahuldavalt kirjeldatud. Uurimistöö käigus antakse ülevaade selles vallas avaldatud tulemustest ja ehk keskendutakse mingile konkreetsele juhule täpsemalt. Meie rühma liikmed ja mitmed meie head tuttavad matemaatikud tegelevad selles vallas aktiivselt.

c) **Normi saavutavate operaatorite teema.** Olgu $X$ Banachi ruum üle $\mathbb{K}$, kus $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ või $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Kõigi pidevate lineaarsete funktsionaalide $X \to \mathbb{K}$ hulk $L(X, \mathbb{K})$ on ise Banachi ruum loomulike vektorruumi tehetega ja normiga $\|f\| = \sup_{x \in B_X} |f(x)|$. Siin tähistab $B_X$ Banachi ruumi $X$ kinnist ühikkera ehk $B_X = \{x \in X \colon \|x\| \leqslant 1\}$. Öeldakse, et $f \in L(X, \mathbb{K})$ *saavutab normi*, kui leidub $x_0 \in B_X$ nii, et $|f(x_0)| = \|f\|$. On teada, et normi saavutavate funktsionaalide hulk on tihe Banachi ruumis $L(X, \mathbb{K})$ (s.o Bishopi–Phelpsi teoreem). Samuti on teada, et iga funktsionaal ruumist $L(X, \mathbb{K})$ saavutab oma normi parajasti siis, kui $X$ on refleksiivne (s.o Jamesi teoreem). Olukord on palju komplitseeritum, kui funktsionaalide asemel vaatleme üldiseid operaatoreid suvaliste Banachi ruumide vahel. Banachi ruumide $X$ ja $Y$ korral on pidevate lineaarsete operaatorite $X \to Y$ hulk $L(X, Y)$ Banachi ruum normiga $\|A\| = \sup_{x \in B_X} \|Ax\|$. Öeldakse, et operaator $A \in L(X, Y)$ saavutab normi, kui leidub $x_0 \in B_X$ nii, et $\|Ax_0\| = \|A\|$. On teada, et alati ei saa kõiki kompaktseid operaatoreid (s.o oluline alamklass kõigi pidevate lineaarsete operaatorite seas) lähendada normi saavutavate operaatoritega (M. Martín, 2014. a). Aga siiani ei ole teada, kas kõiki lõplikumõõtmelisi operaatoreid (s.o operaatorid, mille väärtuste hulk on lõplikumõõtmeline vektoralamruum) saab lähendada normi saavutavate operaatoritega. Mitmed meie head tuttavad matemaatikud tegelevad selles vallas aktiivselt.

## 2 Referatiivne töö matemaatilise analüüsi valdkonnas

Baka- ja magistritööd ei pea tingimata uusi matemaatilisi tulemusi andma. On väga palju selliseid teemasid, mis võimaldavad üliõpilasel ja juhendajal õppida mingit matemaatika olemasolevat osa sügavuti ja võib-olla alustuseks kaardistada seal lahtised probleemid edasiseks uurimistööks. Ka referatiivse töö matemaatika võib olla väga värske, iga päev avaldatakse matemaatika tulemusi ja me ju hoiame oma alal toimuval silma peal. Minge konkreetse inimese juurde (vt loendit eespool) ja küsige temalt (referatiivset) uurimisteemat, aga olge valmis selleks, et töö võib anda matemaatikale ka midagi uut!