Mittekorrektsed ülesanded

Bakalaureusetöid juhendavad Uno Hämarik, Toomas Raus ja Urve Kangro

Mittekorrektsed ülesanded on ülesanded, kus lähteandmete väiksel muutusel lahend muutub väga palju. Taolised ülesanded kerkivad paljude loodusnähtuste ja tehnoloogiliste protsesside modelleerimisel (näiteks tomograafia meditsiinis, maavarade otsing geoloogias, õhu ja vee kvaliteedi uurimine, ilmaennustused), kusjuures andmed saadakse mõõtmisel ning sisaldavad paratamatut mõõtmisviga. Mittekorrektsed ülesanded on ka paljud standardsed andmetöötluse ülesanded, näiteks suure konditsiooniarvuga lineaarse võrrandisüsteemi lahendamine, mõõtmisvigadega andmete numbriline diferentseerimine, andmete interpoleerimine, signaali ja kujutise töötlus. Mittekorrektse ülesande stabiilseks lahendamiseks (regulariseerimiseks) lähendatakse ülesanne korrektse ülesandega, kusjuures lähendustäpsust väljendav regulariseerimisparameeter valitakse sõltuvalt lähteandmete veatasemest. Mittekorrektsete ülesannete kesksed küsimused on regulariseerimisalgoritmide ja regulariseerimisparameetri valiku reeglite uurimine. Teema sobib bakalaureusetööks, aga on jätkatav ka magistri- ja doktoritööks. Mittekorrektsete ülesannete Tartu Ülikooli uurimisgrupi tegevuse kohta leiab rohkem infot veebilehelt https://reg.cs.ut.ee/. Kevadel 2023 on võimalus osaleda kursusel MTMM.00.210 "Mittekorrektsed ülesanded".

Lineaarsed mittekorrektsed ülesanded esitatakse tüüpiliselt operaatorvõrrandina

$$Au = f, \tag{(1)}$$

kus A on lineaarne operaator Hilberti või Banachi ruumide vahel ning u on otsitav. Täpse parema poole f asemel on tüüpiliselt teada lähend f_δ,

$$\|f_\delta - f\| \leq \delta.$$

Kui lähteandmete veatase δ on teada, saab sageli ülesannet regulariseerida, valides sobivas regulariseerimismeetodis regulariseerimisparameetri sõltuvalt suurusest δ nii, et lähislahend koondub täpseks lahendiks protsessis $\delta \to 0$.

Mõned näited konkreetsetest teemadest.

1) **Esimest liiki integraalvõrrandi numbriline lahendamine kollokatsioonimeetodiga** (juhendaja U. Hämarik ja/või U. Kangro).

Esimest liiki integraalvõrrand on võrrand kujul

$$Au(t) \equiv \int_a^b K(t.s)u(s)ds = f(t),$$

kus tuum $K(t,s)$ ja funktsioon $f(t)$ on antud ja funktsioon $u(s)$ on otsitav. Ülesande lahendamiseks arvutil on vaja ülesanne diskretiseerida.

Kollokatsioonimeetodis valitakse kollokatsioonipunktide $\{t_1, ..., t_n\}$ ja baasfunktsioonide $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ komplektid ning otsitakse lähislahendi $u_n = \sum_{i=1}^n c_i\varphi_i$ kordajaid $\{c_1, ..., c_n\}$, mis rahuldaksid kollokatsioonitingimusi

$$\int_a^b K(t_i.s)u_n(s)ds = f_\delta(t_i), \quad i = 1, ..., n.$$

Eesmärk on leida lihtsamatel juhtudel tingimusi, mil kollokatsioonimeetod osutub sobiva $n = n(\delta)$ valiku korral regulariseerimismeetodiks.

2) **Landweberi iteratsioonimeetodi kiirendamine** (juhendaja U. Hämarik ja/või T. Raus).

Klassikaline Landweberi iteratsioonimeetod võrrandi (1) lahendamiseks on kujul

$$u_{n+1} = u_n + \omega A^*(f_\delta - Au_n), \quad \omega \in (0, \frac{1}{\|A\|^2}), \quad n \in N_0,$$

kus A^* on operaatori A kaasoperaator. Iteratsioonid peatatakse esimese n korral, kus $\rho_n := \|Au_n - f_\delta\| < \delta$. Meetodi puuduseks on see, et vajatav iteratsioonide arv on sageli väga suur. Kirjanduses on välja pakutud kiirendatud Landweberi meetod kujul

$$u_{n+1} = z_n + \omega A^*(f_\delta - Az_n), \quad z_n = x_n + \alpha_n(x_n - x_{n-1}),$$

valides $\alpha_n = \frac{n-1}{n+1}$ või $\alpha_n = \frac{n-1}{n+2}$. Arvutused näitavad, et täpsema lähislahendi saab, valides α_n sõltuvana mitte ainult n-ist, vaid ka ρ_n väärtusest. Töö eesmärk ongi uurida sobiva α_n valikut.

3) **Regulariseerimisparameetri heuristilisest valikust Tihhonovi meetodis** (juhendaja U. Hämarik ja/või T. Raus).

Tihhonovi regulariseerimismeetod on kujul

$$u_\alpha = (\alpha I + A^*A)^{-1}A^*f_\delta.$$

Kui lähteandmete veatase δ pole teada, tuleb regulariseerimisparameeter α valida mingi heuristilise reegli järgi (s.t. veataset kasutamata). Kvaasioptimaalsuse reeglis valitakse regulariseerimisparameetriks funktsiooni

$$\psi_\alpha = \alpha\|A^*(\alpha I + AA^*)^{-2}f_\delta\|$$

globaalne miinimumkoht. Arvutused näitavad, et paljudel juhtudel saame parema parameetri (täpsema lähislahendi), võttes parameetriks α funktsiooni ψ globaalse miinimumkoha asemele mingi lokaalse miinimumi. Töö eesmärgiks on arvutil näiteülesandeid lahendades formuleerida reegel, milline miinimumkoht sobib parameetriks α.