TOPOLOOGILISED VEKTORRUUMID

MTPM.03.005 Loengukursus
Tartu Ülikooli
matemaatika-informaatikateaduskonna
üliõpilastele
2006/2007. õppeaasta

Toivo Leiger

Sissejuhatus

Kaasaegne matemaatika baseerub **hulga** mõistel. Hulk on mingite objektide kogum, milles iga objekt (element) on teistest erinev. Kui antud hulga elementide või alamhulkade vahel on määratud mingid seosed, siis öeldakse, et hulgas on määratud vastav *struktuur.* Struktuuriga hulki nimetatakse ka *ruumideks.*

Kõige üldisem hulki käsitlev õpetus on hulgateooria, mis üldjuhul ei eelda hulgas mingisuguse struktuuri olemasolu. Sisukamate ja rakenduste suhtes väärtuslikumate teooriate saamiseks vaadeldakse hulki, milles on defineeritud üks või enam struktuure.

N. Bourbaki järgi eraldatakse matemaatiliste struktuuride hulgast välja kolm struktuuride liiki, mida nimetatakse **matemaatika põhistruktuurideks:**

1) *algebralised struktuurid*, mida määravad seosed on antud algebraliste operatsioonide (tehete) abil ja seovad omavahel lõpliku arvu elemente,

2) *topoloogilised struktuurid*, milles (Bourbaki sõnul) "...leiavad matemaatilise formuleeringu intuitiivsed mõisted *ümbrus, piirväärtus ja pidevus,* mille juurde viib meid meie ettekujutus ruumist",

3) *järjestusstruktuurid*, mis määratakse sel viisil, et hulga mõnigate elementide järjestatud paaride (x, y) korral on fikseeritud komponentide järgnevus (tavaliselt väljendame seda sõnadega "x on väiksem kui y".

Käesoleva kursuse pealkiri - **topoloogilised vektorruumid** - viitab selgelt sellele, milliste struktuuridega me allpool tegemist teeme. Need on vektorruumid, mis samal ajal on ka topoloogilised ruumid, lisaks sellele eeldatakse nende kahe struktuuri teatavat loomulikku kooskõla. See kooskõla saavutatakse nõudega vektorruumi tehete pidevusest. Niisuguste struktuuride käsitlemist (ja seega käesoleva aine õppimist) hõlbustab kogemus, mis on saadud funktsionaalanalüüsi põhikursusest. Asjaolu, et normeeritud ruum on topoloogilise vektorruumi üks erijuhte, on oluliselt määranud topoloogiliste vektorruumide teooria arengut. Normeeritud ruumide teooriast on genereeritud mitte ainult mitmed probleemiasetused, vaid ka siinvaadeldava teooria sisemine loogika.

Kuigi **järjestusstruktuure** me käesolevas kursuses spetsiaalselt ei käsitle, vajame me sellise struktuuriga hulki konkreetsete probleemide uurimisel. Topoloogilise koonduvuse kirjeldamisel kasutame me käesolevas kursuses suunatud peresid. Suunatud pere on selline "jada", mille indeksid moodustavad mingi suunatud hulga (suunatud pere korrektne definitsioon on antud artiklis 1.2). Seejuures nimetatakse hulka X *suunatud hulgaks*, kui tema mõningate elementide paaride (x, y) korral on defineeritud (järjestus)suhe $x \leq y$, mis rahuldab tingimusi
(a) $x \leq x$ iga $x \in X$ korral,
(b) kui $x \leq y$ ja $y \leq z$, siis $x \leq z$ $(x, y, z \in X)$,
(c) kui $x, y \in X$, siis leidub $z \in X$ omadusega $x \leq z$, $y \leq z$.
Kui lisaks tingimustele (a) ja (b) rahuldab vaadeldav seos veel tingimust
(d) kui $x \leq y$ ja $y \leq x$, siis $x = y$ $(x, y \in X)$,
siis nimetatakse hulka X *järjestatud hulgaks.* Järjestatud hulkade üldisest teooriast rakendame me allpool Zorni lemmat, mille formuleerimiseks vajame veel selle teooria mõningaid põhimõisteid. Järjestatud hulka nimetatakse *täielikult järjestatuks* (ehk *lineaarselt järjestatuks*), kui iga paari $x, y \in X$ puhul kehtib kas $x \leq y$ või $y \leq x$. Alamhulka E järjestatud hulgas X nimetatakse *ülalt tõkestatuks*, kui leidub selline element $z \in X$, et $x \leq z$ iga $x \in E$

korral. Kui element $x_0 \in E$ on niisuguse omadusega, et

$$x \in E,\ x \geq x_0 \Rightarrow x = x_0,$$

siis teda nimetatakse alamhulga E *maksimaalseks elemendiks.*

Zorni lemma. *Kui järjestatud hulga X iga täielikult järjestatud alamhulk on ülalt tõkestatud, siis hulgas X leidub (vähemalt üks) maksimaalne element.*

Topoloogiliste struktuuride põhimõistetest ja meile vajalikest põhitulemustest anname ülevaate esimeses paragrahvis. Lühidalt meenutame siinkohal **lineaarse algebra** ehk vektorruumide teooria mõisteid ja lepime kokku tähtsamate tähistuste osas.

Vektorruum. Teatavasti nimetatakse hulka X *vektorruumiks* (ka *lineaarseks ruumiks*) üle korpuse $\mathbb{K}$ kui iga elementide paari $x, y \in X$ korral on defineeritud nende summa $x+y \in X$ ja iga $x \in X$ ning $\lambda \in \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (kõigi kompleksarvude korpus) või $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (kõigi reaalarvude korpus)) korral on defineeritud nende korrutis $\lambda x \in X$, kusjuures neilt tehetelt nõutakse järgmisi omadusi:
$x + (y + z) = (x + y) + z$,
$x + y = y + x$,
eksisteerib *nullelement* $0 \in X$ omadusega $x + 0 = x$ $(x \in X)$,
iga $x \in X$ korral leidub *vastandelement* $-x \in X$ omadusega $x + (-x) = 0$,
$(\lambda\mu)\, x = \lambda\,(\mu x)$,
$(\lambda + \mu)\, x = \lambda x + \mu x$,
$\lambda\,(x + y) = \lambda x + \lambda y$,
$1x = x$.
Vastavalt sellele, kas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ või $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, kõneleme kas *reaalsest* või *komplekssest vektorruumist.*

Vektorruumi X fikseeritud alamhulkade E ja F ning elementide $x \in X$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$ puhul kasutame järgmisi tähistusi:

$$\begin{aligned} x + E &:= \{x + y \mid y \in E\}\,,\ E + F := \{y + z \mid y \in E,\ z \in F\}\,, \\ \lambda E &:= \{\lambda y \mid y \in E\}\,. \end{aligned}$$

Vektoralamruum ja hulga lineaarne kate. Alamhulka $X_0 \subset X$, mis rahuldab tingimusi

$$X_0 + X_0 \subset X_0,\ \ \lambda X_0 \subset X_0 \quad (\lambda \in \mathbb{K})\,,$$

nimetatakse *vektoralamruumiks.* Antud alamhulka $E \subset X$ sisaldavat vähimat vektoralamruumi nimetame hulga E *lineaarseks katteks* ja tähistame $\operatorname{span} E$. Seejuures on $\operatorname{span} E$ hulga E elementide kõikvõimalike lineaarsete kombinatsioonide hulk, s.t.

$$\operatorname{span} E = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \mid x_k \in E,\ \lambda_k \in \mathbb{K}\ \ (k = 1, ..., n)\,,\ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Lineaarne sõltumatus, vektorruumi baas. Öeldakse, et alamhulk $E \subset X$ on *lineaarselt sõltumatu*, kui seosest $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0$ järeldub $\lambda_1 = ... = \lambda_n = 0$ iga $n \in \mathbb{N}$ ja suvalise valiku $x_1, ..., x_n \in E$ puhul. Niisugust lineaarselt sõltumatut alamhulka E, mille korral span $E = X$, nimetatakse vektorruumi X (algebraliseks) *baasiks.*

Lineaarne kujutus. Kujutust (ehk operaatorit) A vektorruumist X vektorruumi Z nimetatakse *lineaarseks*, kui

$$A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2), \quad A(\lambda x) = \lambda A(x) \quad (\lambda \in \mathbb{K}).$$

Kui selline kujutus A on pööratav, siis ka pöördkujutus $A^{-1} : Z \to X$ on lineaarne. Skalaarsete väärtustega lineaarset kujutust nimetame *lineaarseks funktsionaaliks.*

Bilineaarne funktsionaal. Olgu X ja Y vektorruumid üle ühe ja sama korpuse $\mathbb{K}$. Funktsionaali $B : X \times Y \to \mathbb{K}$, mille korral funktsionaalid

$$B_x : Y \to \mathbb{K}, \ y \mapsto B(x, y) \quad (x \in X)$$

ning

$$B_y : X \to \mathbb{K}, \ x \mapsto B(x, y) \quad (y \in Y)$$

on lineaarsed, nimetatakse *bilineaarseks.*

Lõpuks märgime, et me lubame endale kasutatavate terminite osas teatvaid "keelelisi vabadusi", muidugi vaid siis, kui see ei häiri tekstist arusaamist. Näiteks kasutame me sõna "ruum" nii vektorruumi, topoloogilise ruumi, topoloogilise vektorruumi jm. ruumide puhul, kui lause kontekstist on selge, millisest ruumist kõneldakse. Teiseks, me kasutame sõna "süsteem" (vastavalt üldtunnustatud traditsioonidele) mõnikord hulga tähistamiseks. Näiteks kõneldakse tavaliselt nulliümbruste süsteemist, kuigi põhimõtteliselt on tegemist hulgaga.

Tekstis on lugejale jäetud hulgaliselt nn. aktiviseerimiselemente. Need on ülesanded, lihtsamate lausete tõestused või mõned tehnilised detailid tõestustes, mille iseseisev kontrollimine aitab vaadeldavate mõistete ja tulemuste olemust paremini selgitada. Viimased on märgitud sümboliga ✠.

Sisukord

1 Topoloogilised ruumid **7**
- 1.1 Üldise topoloogia põhimõisted ja -tulemused . . . 7
- 1.2 Suunatud pered topoloogilises ruumis . . . 9
- 1.3 Kompaktsed topoloogilised ruumid . . . 12

2 Topoloogilised vektorruumid **14**
- 2.1 Topoloogilise vektorruumi mõiste . . . 14
- 2.2 Vektorruumide topologiseerimise põhiteoreem . . . 16

3 Tõkestatud ja kompaktsed alamhulgad topoloogilises vektorruumis **21**
- 3.1 Tõkestatud ja täielikult tõkestatud alamhulgad . . . 21
- 3.2 Täielikud ja kompaktsed alamhulgad topoloogilises vektorruumis . . . 23

4 Metriseeruvad topoloogilised vektorruumid **27**
- 4.1 Metriseeruvad topoloogilised vektorruumid . . . 27
- 4.2 Lõplikumõõtmelised topoloogilised vektorruumid . . . 30
- 4.3 Näiteid . . . 32

5 Kumerad hulgad ja poolnormid **36**
- 5.1 Kumerad alamhulgad vektorruumis . . . 36
- 5.2 Poolnormid ja Minkowski funktsionaalid . . . 40

6 Hahn-Banachi teoreem **43**
- 6.1 Hahn-Banachi teoreem reaalse vektorruumi puhul . . . 43
- 6.2 Hahn-Banachi teoreem kompleksse vektorruumi puhul . . . 46
- 6.3 Eraldamisteoreemid . . . 47

7 Lokaalselt kumerad ruumid **49**
- 7.1 Lokaalselt kumera topoloogia kirjeldamine nulliümbruste baasi ja poolnormide abil . . . 49
- 7.2 Koonduvus ja tõkestatus lokaalselt kumeras ruumis . . . 52
- 7.3 Metriseeruvad ja normeeruvad lokaalselt kumerad ruumid . . . 54
- 7.4 Lokaalselt kumera ruumi kaasruum . . . 57
- 7.5 Veel kaks eraldamisteoreemi . . . 59

8 Vektorruumide duaalsed paarid **60**
- 8.1 Duaalne paar . . . 60
- 8.2 Nõrk topoloogia . . . 62
- 8.3 Polaarid . . . 67

9 Polaartopoloogiad **70**
- 9.1 Võrdpidevad hulgad ja $\mathfrak{S}$-topoloogiad . . . 70
- 9.2 Mackey topoloogia . . . 73
- 9.3 Mackey teoreem tõkestatud hulkadest . . . 75

10 Tünniruumid ja F-ruumid **79**
10.1 Tugev topoloogia ja tünniruum 79
10.2 F-ruumid. Lahtise kujutuse printsiip 81
10.3 Teoreem kinnisest graaafikust 83

11 Projektiivsed piirid **86**
11.1 Projektiivse piiri topoloogia 86
11.2 Lokaalselt kumerate ruumide otsekorrutis 89

12 Induktiivsed piirid. Bornoloogilised ruumid **92**
12.1 Induktiivse piiri topoloogia 92
12.2 Bornoloogilised ruumid 94

13 Induktiivse piiri erijuhud: faktorruum, otsesumma, range induktiivne piir **97**
13.1 Faktorruumid 97
13.2 Topoloogilised otsesummad 99
13.3 Ranged induktiivsed piirid 103

1 Topoloogilised ruumid

Selles sissejuhatavas peatükis on meie eesmärgiks tuletada meelde topoloogiliste ruumidega seotud põhilised mõisted ja faktid, mida teame funktsionaalanalüüsi kursusest. Klassikaline funktsionaalanalüüs, mille põhisisu on normeeritud ruumid ja lineaarsed kujutused neis ning nende vahel, toetub põhiliselt meetriliste ruumide teooriale. Meetrilise ruumi topoloogia on täielikult kirjeldatav selles ruumis koonduvate jadadega. Topoloogilises ruumis vajatakse selleks üldisemat koonduvuse mõistet, mida saab kirjeldada kas filtrite või suunatud perede abil. Me ehitame oma käsitluse üles suunatud peredele.

1.1 Üldise topoloogia põhimõisted ja -tulemused

Topoloogiline ruum. Olgu X mingi hulk. Alamhulkade süsteemi τ nimetatakse *topoloogiaks* hulgas X, kui ta rahuldab järgmisi tingimusi:

(T1) $\emptyset \in \tau$ ja $X \in \tau$,

(T2) kui $G_\gamma \in \tau$ $(\gamma \in \Gamma)$, siis $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} G_\gamma \in \tau$ mistahes hulga Γ korral,

(T3) kui $G_1, ..., G_n \in \tau$, siis $\bigcap_{k=1}^{n} G_\gamma \in \tau$.

Hulka X, mis on varustatud topoloogiaga τ, nimetatakse *topoloogiliseks ruumiks* (järgnevalt lühidalt *TR*), mida me tähistame (X, τ) või lihtsalt X, kui topoloogia suhtes on kokku lepitud. Süsteemi τ elemente G nimetatakse TR-i X *lahtisteks hulkadeks,* hulga X elemente x aga selle ruumi *punktideks.*

Topoloogiate võrdlemine. Kui hulgas X on defineeritud kaks topoloogiat τ_1 ja τ_2 ning $\tau_1 \subset \tau_2$ (s.t. iga lahtine hulk TR-is (X, τ_1) on lahtine ka ruumis (X, τ_2)), siis öeldakse, et topoloogia τ_2 on *tugevam* topoloogiast τ_1 ehk τ_1 on *nõrgem* kui τ_2. Igas hulgas on nõrgim ja tugevaim topoloogia, need on vastavalt $\{\emptyset, X\}$ ja $\{G \mid G \subset X\}$.

TR-i alamruum. Olgu (X, τ) TR ja X_0 hulga X mingi alamhulk. Siis

$$\tau_0 := \{X_0 \cap G \mid G \in \tau\}$$

on topoloogia hulgas X_0. TR-i (X_0, τ_0) nimetatakse ruumi (X, τ) *alamruumiks.*

Hulga sisepunktid. TR-i (X, τ) alamhulga E elementi x nimetatakse selle hulga *sisepunktiks*, kui leidub niisugune $G \in \tau$, et $x \in G \subset E$. Selle definitsiooni kohaselt koosneb lahtine hulk ainult sisepunktidest.

Punkti ümbrused. Iga hulka $U \subset X$, millele element $x \in X$ on sisepunkt, nimetatakse punkti x *ümbruseks.* Niisiis,

hulk $U \subset X$ on punkti $x \in X$ ümbrus parajasti siis, kui leidub selline lahtine hulk $G \subset X$, et $x \in G \subset U$.

Ümbruste baas. Kui antud punkti $x \in X$ puhul on fikseeritud selline ümbruste süsteem $\mathfrak{B}_x$, et

punkti x suvalise ümbruse U korral leidub $V \in B_x$ omadusega $V \subset U$,

siis süsteemi $\mathfrak{B}_x$ nimetatakse punkti x ümbruste *baasiks* (ehk *fundamentaalsüsteemiks).*

Topoloogia saab määrata ka nii, et defineeritakse iga punkti x jaoks ümbruste baas. Nimelt kehtib järgmine teoreem.

Teoreem 1.1 (a) *Kui TR-s* (X,τ) *iga punkti* $x \in X$ *jaoks on fikseeritud tema ümbruste baas* $\mathfrak{B}_x$, *siis on täidetud järgmised tingimused:*
$(B1)$ *kui* $V \in \mathfrak{B}_x$, *siis* $x \in V$,
$(B2)$ *kui* $V_1, V_2 \in \mathfrak{B}_x$, *siis leidub* $V \in \mathfrak{B}_x$ *omadusega* $V \subset V_1 \cap V_2$,
$(B3)$ *iga* $V \in \mathfrak{B}_x$ *jaoks leidub* $V' \in \mathfrak{B}_x$ *nii, et*

$$\text{1) } V' \subset V \text{ ja 2) } \forall y \in V' \; \exists W \in \mathfrak{B}_y : W \subset V.$$

(b) *Olgu hulga* X *iga elemendi* x *jaoks määratud mittetühi alamhulkade süsteem* $\mathfrak{B}_x$ *nii, et oleksid täidetud tingimused* $(B1) - (B3)$. *Siis alamhulkade süsteem*

$$\tau := \{G \subset X \mid \forall x \in G \; \exists V \in \mathfrak{B}_x : V \subset G\}$$

on topoloogia hulgas X, *mille suhtes* $\mathfrak{B}_x$ *on punkti* x *ümbruste baas.*

Topoloogiate võrdlemine ümbruste baaside abil. Olgu hulgas X määratud kaks topoloogiat τ ja τ', tähistame suvalise punkti $x \in X$ ümbruste baasid nendes topoloogiates vastavalt $\mathfrak{B}_x$ ja $\mathfrak{B}'_x$. Kehtib seos

$$\tau \subset \tau' \Leftrightarrow \forall x \in X \; \forall V \in \mathfrak{B}_x \; \exists U \in \mathfrak{B}'_x : U \subset V.$$

Ümbruste baasid alamruumis. TR-i (X,τ) alamruumi X_0 topoloogia τ_0 on määratud ümbruste baasidega

$$\mathfrak{B}^0_x := \{X_0 \cap U \mid U \in \mathfrak{B}_x\} \quad (x \in X).$$

Alamhulga puutepunkt. Olgu E TR-i (X,τ) alamhulk. Punkti $x \in X$ nimetatakse hulga E *puutepunktiks*, kui ta iga ümbrus V lõikab hulka E, s.t. kui $E \cap V \neq \emptyset$. Selle definitsiooni puhul juhime tähelepanu järgmisele lihtsalt kontrollitavale, kuid olulisele faktile, mida me allpool tihti kasutame ilma seda kommenteerimata:

väljendi "*punkti x iga ümbrus*" võib asendada väljendiga "*iga $V \in \mathfrak{B}_x$*".

Alamhulga sulund. Hulga E kõigi puutepunktide hulka nimetame tema *sulundiks* ja tähistame $\overline{E}$. Niisiis,

$$x \in \overline{E} \Leftrightarrow \forall V \in \mathfrak{B}_x : E \cap V \neq \emptyset.$$

Toome mõned olulisemad **sulundi omadused:**
1) $E \subset \overline{E}$, $\overline{\overline{E}} = \overline{E}$
2) $E_1 \subset E_2 \Rightarrow \overline{E_1} \subset \overline{E_2}$,
3) $\overline{E_1 \cup E_2} = \overline{E_1} \cup \overline{E_2}$.

Kinnised hulgad. Hulka $E \subset X$ nimetatakse *kinniseks* TR-s (X,τ) ehk τ-*kinniseks*, kui $E = \overline{E}$. Lihtne kontroll näitab, et E on kinnine parajasti siis, kui tema täiend on lahtine, s.t. kui $X \setminus E \in \tau$.

Pidev kujutus. Kujutust f TR-st (X,τ) TR-i (Z,τ') nimetatakse pidevaks punktis $x \in X$, kui punkti $f(x) \in Z$ iga ümbruse V korral tema originaal $f^{-1}(V)$ on punkti x ümbrus TR-s (X,τ). Sellega on samaväärne tingimus

$$\forall V \in \mathfrak{B}_{f(x)} \; \exists U \in \mathfrak{B}_x : f(U) \subset V.$$

Kujutus f on pidev (s.t. pidev igas punktis $x \in X$), kui kehtivad järgmised teineteisega samaväärsed tingimused:

(*i*) $G \in \tau' \Rightarrow f^{-1}(G) \in \tau$ (lahtise hulga originaal on lahtine),

(*ii*) $F = \overline{F}$ ruumis $Z \Rightarrow f^{-1}(F) = \overline{f^{-1}(F)}$ ruumis X (kinnise hulga originaal on kinnine).

TR-de isomorfism. Kui antud TR-de (X, τ) ja (Z, τ') puhul leidub niisugune pööratav ehk bijektiivne kujutus $f : (X, \tau) \to (Z, \tau')$, mis on pidev ning mille pöördkujutus $f^{-1} : (Z, \tau') \to (X, \tau)$ on samuti pidev, siis nimetame neid TR-e *isomorfseteks* ehk *homöomorfseteks.* Kujutust f nimetame sel juhul TR-de (X, τ) ja (Z, τ') *topoloogiliseks isomorfismiks* ehk *homöomorfismiks.*

TR-de korrutis. Selle artikli lõpus vaatleme topoloogiliste ruumide korrutistopoloogiat, piirdudes seejuures kahe TR-i (X, τ) ja (Z, τ') korrutisega. Defineerime korrutishulgal

$$X \times Z := \{(x, z) \mid x \in X,\ z \in Z\}$$

korrutistopoloogia τ_Π järgmisel viisil. Punkti $w := (x, z)$ ümbruste baasiks võtame hulga $X \times Z$ alamhukade süsteemi

$$\mathfrak{B}_w := \{U \times V \mid U \in \mathfrak{B}_x,\ V \in \mathfrak{B}_z\},$$

kus $\mathfrak{B}_x$ ja $\mathfrak{B}_z$ on vastavalt punktide x ja z ümbruste baas ruumis (X, τ) ja (Z, τ'). Vahetu kontroll näitab, et sel juhul on täidetud teoreemi 1.1 tingimused $(B1)$ - $(B3)$, seega on hulgal $X \times Z$ defineeritud topoloogia, mida me nimetame *korrutistopoloogiaks* ja mille suhtes süsteem $\mathfrak{B}_w$ iga $w \in X \times Z$ korral on ümbruste baas.

Analoogiliselt defineeritakse korrutistopoloogia suvalise lõpliku arvu TR-de korral.

Pidev kujutus korrutisruumis. Olgu lisaks TR-dele X ja Z antud veel kolmas TR (H, τ''). Kujutus $f : (X \times Z, \tau_\Pi) \to (H, \tau'')$ on definitsiooni kohaselt punktis $w = (x, z)$ pidev parajasti siis, kui

$$\forall W \in \mathfrak{B}_{f(w)}\ \exists U \in \mathfrak{B}_x,\ V \in \mathfrak{B}_z : f(U \times V) \subset W.$$

Seejuures on kujutused

$$f_{z_0} : (X, \tau) \to (H, \tau''),\ x \mapsto f(x, z_0) \quad (z_0 \in Z \text{ on suvaline fikseeritud punkt})$$

ja

$$f_{x_0} : (Z, \tau') \to (H, \tau''),\ z \mapsto f(x_0, z) \quad (x_0 \in X \text{ on suvaline fikseeritud punkt})$$

pidevad vastavalt punktis x ja z.

1.2 Suunatud pered topoloogilises ruumis

Suunatud pere. Olgu Γ mingi suunatud hulk (suunatud hulga definitsioon on toodud sissejuhatuses). Kujutust suunatud hulgast Γ mingisse hulka X nimetatakse *suunatud pereks* (või lühidalt *pereks*) hulgas X. Lihtsaimad pered on jadad, mis tekivad juhul $\Gamma = \mathbb{N}$. Jadade eeskujul tähistame suunatud hulgaga Γ määratud peresid (x_γ) või täpsemalt $(x_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$.

Pere koonduvus. Olgu $(x_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ pere TR-s (X, τ). Punkti $x \in X$ nimetatakse pere (x_γ) *piirväärtuseks* (ütleme ka, et pere (x_γ) *koondub punktiks* x), kui punkti x iga ümbruse $U \in \mathfrak{B}_x$ puhul leidub selline indeks $\gamma_0 \in \Gamma$, et $x_\gamma \in U$ iga $\gamma \geq \gamma_0$ korral. Sel juhul kirjutame

$\lim_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma = x$ (lühemalt $\lim_\gamma x_\gamma = x$) või $x_\gamma \to x$, aga ka $x_\gamma \to x\,(\tau)$, kui on vaja rõhutada, millises topoloogias koonduvus aset leiab.

Eralduvad TR-d ehk Hausdorffi ruumid. Koonduvuse mõistel topoloogilises ruumis on oluline puudus meetriliste ruumidega võrreldes: koonduva pere (või jada) piirväärtus ei ole üldjuhul üheselt määratud. Selles on lihtne veenduda järgmise triviaalse näite varal. Olgu $X = \{a, b, c\}$ kolme-elemendiline hulk topoloogiaga $\tau := \{X, \{a, b\}, \emptyset\}$ (veenduda, et see on topoloogia!)✠. Kuna punktidel a ja b on ühed ja samad ümbrused, siis jadad $(a, a, ...)$ ja $(b, b, ...)$ koonduvad mõlemad nii punktiks a kui ka punktiks b.

Et vältida sellist paljude probleemiasetuste puhul vastuvõetamatut olukorda, vaadeldakse enamasti *eralduvaid* topoloogilisi ruume ehk *Hausdorffi ruume.* Nii nimetatakse TR-i X järgmise omadusega:

$$\text{kui } x \neq y,\ x, y \in X, \text{ siis leiduvad } U \in \mathfrak{B}_x \text{ ja } V \in \mathfrak{B}_y, \text{ et } U \cap V = \emptyset.$$

Kehib järgmine

Lause 1.2 *TR X on eralduv parajasti siis, kui igal koonduval perel on selles ruumis vaid üks piirväärtus.*

Tõestus. Iseseisvalt (vt. ülesanne 1)✠. ■

Kinniste alamhulkade ja kujutuste pidevuse kirjeldamine koonduvate perede abil. Punkti $x \in X$ ümbruste baas $\mathfrak{B}_x$ TR-s X on sisalduvuse järgi suunatud hulk. Tõepoolest, kui defineerime

$$V \leq V' :\Leftrightarrow V' \subset V,$$

siis $\mathfrak{B}_x$ rahuldab kõiki suunatud hulga definitsiooni tingimusi (kontrollida!)✠. Edasi, kui fikseerime suvaliselt iga $V \in \mathfrak{B}_x$ korral elemendi $x_V \in V$, siis saame suunatud pere $(x_V)_{V \in \mathfrak{B}_x}$. Seejuures kehtib $\lim_{V \in \mathfrak{B}_x} x_V = x$: kui $U \in \mathfrak{B}_x$, siis iga $V \geq U$ korral kehtib $x_V \in V \subset U$. See tähelepanek võimaldab koonduvate perede abil kirjeldada topoloogilisi seoseid TR-s X samamoodi, nagu seda meetriliste ruumide juhul saab teha koonduvate jadade abil.

Lause 1.3 *Olgu (X, τ) ja (Y, τ') TR-d.*

(a) *Element $x \in X$ on alamhulga $E \subset X$ puutepunkt parajasti siis, kui leiduvad selline suunatud hulk Γ ja hulga E mingi elementide pere $(x_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$, mis koondub piirväärtuseks x ruumis X (lühidalt: $x \in \overline{E} \Leftrightarrow [\exists\, (x_\gamma)_{\gamma \in \Gamma} : x_\gamma \in E\ (\gamma \in \Gamma)$ ja $x_\gamma \to x\ (\tau)]$).*

(b) *Alamhulk $E \subset X$ on kinnine parajasti siis, kui ta sisaldab kõigi oma koonduvate perede piirväärtused (lühidalt: $E = \overline{E} \Leftrightarrow [x_\gamma \in E\ (\gamma \in \Gamma),\ x_\gamma \to x\ (\tau) \Rightarrow x \in E]$).*

(c) *Kujutus $f : X \to Y$ on pidev punktis $x \in X$ parajasti siis, kui kehtib implikatsioon*

$$x_\gamma \to x\ \ (\tau) \Rightarrow f(x_\gamma) \to f(x)\ \ (\tau').$$

Ülesanne 1. Tõestada lause 1.2.
Ülesanne 2. Tõestada lause 1.3(a).
Ülesanne 3. Tõestada lause 1.3(b).
Ülesanne 4. Tõestada lause 1.3(c).

Osapered. Nii nagu meetrilises ruumis läheb kompaktsuse ja teiste sellele lähedaste omaduste kirjeldamiseks vaja osajadasid, vajame me topoloogilises ruumis osaperesid. Osajada definitsiooniga võrreldes on osapere mõiste veidi keerulisem. Ütleme, et pere $(y_\beta)_{\beta\in\Delta}$ on pere $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ *osapere*, kui on täidetud järgmine tingimus:

$$\forall\gamma\in\Gamma\ \exists\beta\in\Delta\ \forall\beta'\geq\beta\ \exists\gamma'\geq\gamma : y_{\beta'}=x_{\gamma'}.$$

Kui pere $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ koondub TR-s X mingiks punktiks x, siis samaks punktiks koondub ka iga tema osapere $(y_\beta)_{\beta\in\Delta}$ (kontrollida!)✠. Märgime, et jada osapere ei pruugi olla osajada: näiteks on $(3,2,4,6,...,2n,...)$ naturaalarvude jada $(1,2,3,...)$ osapere, kuid ei ole osajada.

Ülesanne 5. Tõestada, et koonduva pere iga osapere on koonduv.

Pere piirpunkt. Ütleme, et pere (x_γ) *riivab sageli hulka* E, kui iga $\gamma\in\Gamma$ korral leidub $\gamma'\geq\gamma$ omadusega $x_{\gamma'}\in E$. Kui (x_γ) on TR-i X elementide pere ja $x\in X$ selline punkt, mille iga ümbrust U see pere riivab sageli, siis öeldakse, et x on pere (x_γ) *piirpunkt* (ehk *kuhjumispunkt*).

Lause 1.4 *Punkt x on pere $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ piirpunkt TR-s X parajasti siis, kui leidub selline osapere $(y_\beta)_{\beta\in\Delta}$, et $y_\beta\to x$.*

Tõestus. *Tarvilikkus.* Olgu x pere $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ piirpunkt ning $\mathfrak{B}_x$ punkti x mingi ümbruste baas. Moodustame hulga

$$\Delta := \{(\gamma,U)\mid \gamma\in\Gamma,\ U\in\mathfrak{B}_x,\ x_\gamma\in U\},$$

see on hulga $\Gamma\times\mathfrak{B}_x$ mittetühi alamhulk (vajaduse korral võime eeldada, et $X\in\mathfrak{B}_x$). Defineerime selles seose

$$(\gamma,U)\geq(\gamma',U') :\Leftrightarrow \gamma\geq\gamma' \text{ ja } U\subset U'.$$

vahetu kontroll näitab, et selle seosega on Δ suunatud hulk (veenduda!)✠.

Vaatleme peret $(y_\beta)_{\beta\in\Delta}$, kus antud $\beta:=(\gamma,U)$ korral $y_\beta:=x_\gamma$. Paneme tähele, et tegemist on pere $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ osaperega. Tõepoolest, valime iga $\gamma\in\Gamma$ jaoks $U\in\mathfrak{B}_x$, mille puhul $x_\gamma\in U$, siis $\beta=(\gamma,U)\in\Delta$, ja kui $\beta'=(\gamma',U')\in\Delta$ ning $\beta'\geq\beta$, siis $\gamma'\geq\gamma$ ja $y_{\beta'}:=x_{\gamma'}$. Näitame, et $y_\beta\to x$. Fikseerime suvalise $U_0\in\mathfrak{B}_x$ ja märgime, et kuna pere (x_γ) riivab sageli hulka U_0, siis leidub $\gamma_0\in\Gamma$, mille korral $x_{\gamma_0}\in U_0$. Olgu $\beta_0:=(\gamma_0,U_0)$, siis $\beta_0\in\Delta$, ning kui $\beta'\geq\beta_0$, $\beta'=(\gamma',U')\in\Delta$, siis $y_{\beta'}=x_{\gamma'}\in U'\subset U_0$. Niisiis, iga $U_0\in\mathfrak{B}_x$ korral leidub $\beta_0\in\Delta$, et $y_{\beta'}\in U_0$ kõikide $\beta'\geq\beta_0$ puhul, s.t. $y_\beta\to x$.

Piisavus. Olgu $(y_\beta)_{\beta\in\Delta}$ pere $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ selline osapere, mis koondub punktiks x. Olgu $\gamma\in\Gamma$ ja $U\in\mathfrak{B}_x$, peame näitama, et leidub $\gamma'\in\Gamma$ omadusega $\gamma'\geq\gamma$ ja $x_{\gamma'}\in U$. Osapere definitsiooni kohaselt saame valida niisuguse $\beta(\gamma)\in\Delta$, mis rahuldab tingimust

$$\forall\beta'\geq\beta(\gamma)\ \ \exists\gamma'\geq\gamma : y_{\beta'}=x_{\gamma'}.$$

Edasi, lähtudes koonduvusest $y_\beta\to x$, saame leida $\beta_1\in\Delta$ omadusega

$$\beta'\geq\beta_1\Rightarrow y_{\beta'}\in U.$$

Valides nüüd $\beta'\in\Delta$ nii, et $\beta'\geq\beta(\gamma)$ ja $\beta'\geq\beta_1$, saame $x_{\gamma'}=y_{\beta'}\in U$.

Kokkuvõtteks: iga $\gamma\in\Gamma$ korral on võimalik leida $\gamma'\geq\gamma$ omadusega $x_{\gamma'}\in U$. Seega on x pere (x_γ) piirpunkt. ■

1.3 Kompaktsed topoloogilised ruumid

Kompaktsed TR-d. Olgu $\{E_\alpha\}_{\alpha\in A}$ hulga X alamhulkade süsteem. Ütleme, et $\{E_\alpha\}$ on *tsentreeritud süsteem*, kui iga tema lõpliku osasüsteemi ühisosa on mittetühi, s.t.

$$\bigcap_{k=1}^{n} E_{\alpha_k} \neq \emptyset \quad (\alpha_1, ..., \alpha_n \in A,\ n \in \mathbb{N})\,. \tag{1.1}$$

Kui $\bigcup_{\alpha\in A} E_\alpha = X$, siis öeldakse, et $\{E_\alpha\}$ on hulga X *kate.*

TR-i (X,τ) nimetatakse *kompaktseks*, kui iga tema lahtistest hulkadest moodustatud kate omab lõpliku osakatte, s.t. kui kehtib implikatsioon

$$\left[G_\alpha \in \tau \ \ (\alpha \in A)\,,\ \bigcup_{\alpha\in A} G_\alpha = X\right] \Rightarrow X = \bigcup_{k=1}^{n} G_{\alpha_k} \ \ (\alpha_1, ..., \alpha_n \in A)\,.$$

Vahetu kontroll näitab, et X on kompaktne parajasti siis, kui tema iga kinniste alamhulkade tsentreeritud süsteemi ühisosa on mittetühi, s.t. kui tingimusest (1) , kus $E_\alpha = \overline{E_\alpha}$ $(\alpha \in A)$, järeldub $\bigcap_{\alpha\in A} E_\alpha \neq \emptyset$ (veenduda!)✠.

Märgime mõned lihtsalt kontrollitavad **kompaktsusega seotud omadused.**

1^0. Kompaktse topoloogilise ruumi kinnine alamruum on kompaktne.✠

2^0. Kompaktse eralduva topoloogilise ruumi kompaktne alamruum on kinnine.✠

3^0. Kui f on pidev kujutus TR-st X TR-i Y, siis iga kompaktse alamruumi X_0 puhul on $f(X_0)$ kompaktne alamruum ruumis Y.✠

Teoreem 1.5 *TR-i (X,τ) puhul on järgmised väited samaväärsed:*

(a) *X on kompaktne,*

(b) *igal suunatud perel on TR-s X vähemalt üks piirpunkt,*

(c) *iga suunatud pere sisaldab koonduva osapere.*

Tõestus. Seos $(b) \Leftrightarrow (c)$ on tõestatud lauses 1.4.

$(a) \Rightarrow (b)$: Eeldame, et X on kompaktne TR, olgu $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ suvaline elementide pere ruumis X. Defineerime iga $\gamma \in \Gamma$ korral hulga $\Delta_\gamma := \{x_{\gamma'} \mid \gamma' \geq \gamma\}$, siis $\Delta_{\gamma_1} \subset \Delta_{\gamma_2}$, kui $\gamma_1 \geq \gamma_2$, ja $\Delta_\gamma \neq \emptyset$ iga $\gamma \in \Gamma$ korral. Seejuures on $\{\Delta_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ tsentreeritud süsteem. Nimelt, kui võtame suvalised $\Delta_{\gamma_1}, ..., \Delta_{\gamma_n}$ ja leiame $\gamma_0 \in \Gamma$ omadusega $\gamma_1, ..., \gamma_n \leq \gamma_0$ (see on võimalik, sest Γ on suunatud hulk), siis $\bigcap_{i=1}^{n} \Delta_{\gamma_i} \supset \Delta_{\gamma_0} \neq \emptyset$. Muidugi on siis ka süsteem $\left\{\overline{\Delta_\gamma}\right\}_{\gamma\in\Gamma}$ tsentreeritud ja kompaktsusest järeldub $\bigcap_{\gamma\in\Gamma} \overline{\Delta_\gamma} \neq \emptyset$. Võtame mingi punkti $x \in \bigcap_{\gamma\in\Gamma} \overline{\Delta_\gamma}$ ja näitame, et x on pere (x_γ) piirpunkt.

Olgu $U \in \mathfrak{B}_x$ ja $\gamma_0 \in \Gamma$ suvalised. Kuna $x \in \overline{\Delta_{\gamma_0}}$, siis $U \cap \Delta_{\gamma_0} \neq \emptyset$, seega leidub $\gamma \in \Gamma$ omadusega $\gamma \geq \gamma_0$ ja $x_\gamma \in U$. Teiste sõnadega, pere (x_γ) riivab sageli punkti x suvalist ümbrust U, s.t. x on selle pere piirpunkt.

$(b) \Rightarrow (a)$: Eeldame, et TR-i X iga elementide pere omab piirpunkti. Olgu $\mathcal{F}$ suvaline kinniste alamhulkade tsentreeritud süsteem, moodustame hulga

$$\Gamma := \left\{ S \subset X \mid \exists n \in \mathbb{N},\, F_1, ..., F_n \in \mathcal{F} : S = \bigcap_{i=1}^{n} F_i \right\}.$$

Siis iga $S \in \Gamma$ korral $\overline{S} = S \neq \emptyset$ (põhjendada!)$\maltese$. Defineerides hulgas Γ seose $S \leq S' :\Leftrightarrow S \supset S'$, saame suunatud hulga (kontrollida!)$\maltese$. Fikseerime iga $S \in \Gamma$ korral vabalt $x_S \in S$ ning moodustame pere $(x_S)_{S\in\Gamma}$. Eelduse kohaselt on sel perel vähemalt üks piirpunkt $x \in X$. Näitame, et $x \in \bigcap_{F\in\mathcal{F}} F$.

Olgu $U \in \mathfrak{B}_x$ ja $S_0 \in \Gamma$ suvalised. Kuna x on pere $(x_S)_{S\in\Gamma}$ piirpunkt, siis leidub $S_1 \in \Gamma$ omadusega $S_1 \geq S_0$ ja $x_{S_1} \in U$. Samal ajal $x_{S_1} \in S_1$, mistõttu $x_{S_1} \in U \cap S_0$. Niisiis, $U \cap S_0 \neq \emptyset$ iga $U \in \mathfrak{B}_x$ korral, s.t. $x \in \overline{S_0} = S_0$. Kuna $S_0 \in \Gamma$ oli suvaliselt valitud, siis $x \in \bigcap_{S\in\Gamma} S = \bigcap_{F\in\mathcal{F}} F$. Seega on suvaliselt valitud kinnistest alamhulkadest tsentreeritud süsteemi $\mathcal{F}$ ühisosa mittetühi hulk, s.t. X on kompaktne. Teoreem on tõestatud. ∎

Märgime tõestuseta järgmist lihtsat erijuhtu tuntud **Tihhonovi teoreemist**.

4^0. Suvalise lõpliku arvu kompaktsete topoloogiliste ruumide korrutis on kompaktne.

Suhteliselt kompaktsed hulgad. Edaspidi, kõneldes TR-i X alamhulgast X_0, nimetame teda kompaktseks, kui (X_0, τ_0) on kompaktne TR (τ_0 on alamruumi topoloogia). Alamhulka X_0 nimetame *suhteliselt kompaktseks*, kui $\overline{X_0}$ on kompaktne alamhulk.

2 Topoloogilised vektorruumid

2.1 Topoloogilise vektorruumi mõiste

Vektorruumi tehted. Olgu X vektorruum. Tema tehted on defineeritud kujutustena

$$T : X \times X \to X, \quad (x, y) \mapsto x + y \ \text{(liitmine)},$$
$$S : \mathbb{K} \times X \to X, \quad (\lambda, x) \mapsto \lambda x \ \text{(skalaariga korrutamine)},$$

kus $X \times X$ ning $\mathbb{K} \times X$ on vastavad otsekorrutised. Kui vektorruumil X on määratud mingi topoloogia τ, siis korrutisruumil $X \times X$ on defineeritud vastav korrutistopoloogia $\tau_{X \times X}$ (vt. art. 1.1). Edasi, korpusel $\mathbb{K}$ on defineeritud tema loomulik topoloogia, seega on ka otsekorrutis $\mathbb{K} \times X$ varustatud korrutistopoloogiaga $\tau_{\mathbb{K} \times X}$.

Topoloogiline vektorruum. Definitsioon. *Topoloogiliseks vektorruumiks* ehk lineaarseks topoloogiliseks ruumiks nimetatakse niisugust vektorruumi X, millel on määratud selline topoloogia τ, et vektorruumi tehted

$$T : (X \times X, \tau_{X \times X}) \to (X, \tau) \ \text{ja} \ S : (\mathbb{K} \times X, \tau_{\mathbb{K} \times X}) \to (X, \tau)$$

on pidevad.

Niisiis on topoloogiline vektorruum (**edaspidi lühidalt TVR**) selline hulk, millel on määratud kaks struktuuri: 1) algebraline, s.o. vektorruumi struktuur ja 2) topoloogia, kusjuures nende struktuuride kooskõla tagatakse nõudega tehete pidevusest. Korrutistopoloogia definitsioonist lähtudes (vt. art. 1.1) kirjeldame kujutuste T ja S pidevust täpsemalt.

Liitmise pidevuseks saame järgmise tarviliku ja piisava tingimuse (kontrollida!)✠:

$$\forall x \in X \ \forall y \in X \ \forall W \in \mathfrak{B}_{x+y} \ \exists U \in \mathfrak{B}_x \ \exists V \in \mathfrak{B}_y : U + V \subset W. \tag{2.1}$$

Skalaariga korrutamise pidevuse tingimuse leidmiseks peame silmas, et TR-s $\mathbb{K}$ moodustavad punkti $\lambda \in \mathbb{K}$ ümbruste baasi hulgad

$$U_\delta := \{\mu \in \mathbb{K} \mid |\mu - \lambda| \le \delta\} \quad (\delta > 0)\,.$$

Seega on skalaariga korrutamine pidev parajasti siis, kui

$$\forall x \in X \ \ \forall \lambda \in \mathbb{K} \ \ \forall W \in \mathfrak{B}_{\lambda x} \ \exists V \in \mathfrak{B}_x \ \exists \delta > 0 : |\mu - \lambda| \le \delta \Rightarrow \mu V \subset W \tag{2.2}$$

(kontrollida!)✠.

Nihe ja homoteetia TVR-s. Järgnevalt vaatleme kahte spetsiifiliste kujutuste klassi, mis edaspidistes aruteludes mängivad tähtsat rolli. Olgu X TVR ning olgu $x_0 \in X$ ja $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ fikseeritud elemendid, seejuures eeldame, et $\lambda_0 \neq 0$. Defineerime kujutused

$$T_{x_0} : X \to X, \quad x \mapsto x + x_0 \ \ \textit{(nihe)},$$
$$S_{\lambda_0} : X \to X, \quad x \mapsto \lambda_0 x \ \ \textit{(homoteetia)},$$

Nende kujutuste pidevus tuleneb otseselt kujutuste T ja S pidevusest. **Nihke T_{x_0} pidevuse kontrollimiseks** suvaliselt valitud punktis $x \in X$ võtame suvalise $W \in \mathfrak{B}_{x+x_0}$ ja leiame vastavalt tingimusele (2.1) ümbrused $U \in \mathfrak{B}_x$ ja $V \in \mathfrak{B}_{x_0}$ omadusega $U + V \subset W$. Siis $T_{x_0}(U) = U + x_0 \subset U + V \subset W$, seega on kujutus T_{x_0} punktis x pidev. Analoogiliselt tõestatakse seose (2.2) abil homoteetia S_{λ_0} pidevus (vt. ülesanne 1)✠.

Mõlemad vaadeldavad kujutused on **pööratavad**, kusjuures

$$T_{x_0}^{-1} = T_{-x_0} \text{ ja } S_{\lambda_0}^{-1} = S_{1/\lambda_0}.$$

Tõepoolest, iga $x \in X$ puhul

$$\begin{aligned} T_{x_0} \circ T_{-x_0}(x) &= T_{x_0}(x - x_0) = x - x_0 + x_0 = x, \\ T_{-x_0} \circ T_{x_0}(x) &= T_{-x_0}(x + x_0) = x + x_0 - x_0 = x, \end{aligned}$$

niisiis $T_{x_0} \circ T_{-x_0} = T_{-x_0} \circ T_{x_0} = i_X$ (ühikkujutus vektorruumis X). See tähendabki, et T_{-x_0} on kujutuse T_{x_0} pöördkujutus. Samamoodi veendutakse, et $S_{\lambda_0}^{-1} = S_{1/\lambda_0}$ (kontrollida!)✠.

Kuna **pöördkujutused** $T_{x_0}^{-1}$ ja $S_{\lambda_0}^{-1}$ kui vastavalt nihe ja homoteetia on samuti pidevad, siis on iga lahtise (kinnise) hulga $G \subset X$ puhul kujutishulgad

$$T_{x_0}[G] = x_0 + G = G - (-x_0) = T_{-x_0}^{-1}[G]$$

ja

$$S_{\lambda_0}[G] = \lambda_0 G = \frac{1}{1/\lambda_0} G = S_{1/\lambda_0}^{-1}[G]$$

kui lahtise (kinnise) hulga originaalid pidevate kujutuste $T_{x_0}^{-1}$ ja $S_{\lambda_0}^{-1}$ suhtes lahtised (kinnised). Kokkuvõttes oleme tõestanud järgmise väite.

Lause 2.1 *Kui G on lahtine (kinnine) alamhulk TVR-s X, siis ka hulgad $x + G$, λG ja $\lambda G + x$ on iga $x \in X$ ja $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ puhul lahtised (kinnised).*

Ülesanne 1. Tõestada, et homoteetia S_{λ_0} on pidev.
Ülesanne 2. Veenduda, et $S_{\lambda_0}^{-1} = S_{1/\lambda_0}$.

TVR-i nulliümbruste baas. Nagu me eelmises peatükis märkisime (vrd. teoreem 1.1), on üheks topoloogia määramise võimaluseks defineerida iga punkti jaoks tema ümbruste baas. Topoloogilise vektorruumi oluline eelis topoloogilise ruumi ees on selles, et piisab defineerida vaid nullpunkti ümbruste baas, sellega on määratud ümbruste baas kõigil ülejäänud punktidel. Nullpunkti ümbrusi nimetame edaspidi *nulliümbrusteks.*

Kehtib järgmine

Lause 2.2 *Kui $\mathfrak{B}$ on nulliümbruste baas TVR-s (X, τ), siis moodustavad hulgad $x + U$ $(U \in \mathfrak{B})$ punkti $x \in X$ ümbruste baasi.*

Tõestus. Kõigepealt märgime, et $x + U$ on iga $U \in \mathfrak{B}$ korral punkti x ümbrus. Tõepoolest, kuna U on punkti 0 ümbrus, siis leidub $G \in \tau$ omadusega $0 \in G \subset U$, mistõttu $x \in x + G \subset x + U$. Kuna lause 2.1 kohaselt $x + G \in \tau$, siis $x + U$ on punkti x ümbrus.

Näitame nüüd, et $\mathfrak{B}_x := \{x + U \mid U \in \mathfrak{B}\}$ on punkti x ümbruste baas. Kui V on selle punkti suvaline ümbrus, siis $x \in C \subset V$ mingi $C \in \tau$ puhul. Seejuures $0 = -x + x \in$

$-x+C \subset -x+V$ ja $-x+C \in \tau$. Niisiis on $-x+V$ nulliümbrus, mistõttu leidub $U \in \mathfrak{B}$, et $U \subset -x+V$ ehk $x+U \subset V$. ■

Lausetest 2.1 ja 2.2 saame lihtsalt järgmised väited, mis jätame lugejale kontrollida.

Ülesanne 3. Kui V on nulliümbrus TVR-s X, siis ka λV on nulliümbrus iga $\lambda \neq 0$ korral.

Ülesanne 4. Elementide pere (x_α) koondub piirväärtuseks x TVR-s X parajasti siis, kui $x_\alpha - x \to 0$.

Ülesanne 5. Punkt $x \in X$ on alamhulga E puutepunkt parajasti siis, kui tema kõik ümbrused $x+U$ $(U \in \mathfrak{B})$ lõikavad hulka E. Lühidalt,

$$x \in \overline{E} \Leftrightarrow \forall U \in \mathfrak{B} : E \cap (x+U) \neq \emptyset.$$

Ülesanne 6. Lineaarne kujutus A TVR-st X TVR-i Y on pidev parajasti siis, kui ta on pidev nullpunktis.

Nagu iga teise matemaatilise struktuuri puhul kõneldakse ka topoloogiliste vektorruumide puhul nende **isomorfismist**. TVR-e X ja Y nimetatakse *isomorfseteks*, kui leidub selline bijektiivne lineaarne kujutus $T : X \to Y$, mis on pidev ja mille pöördkujutus T^{-1} on samuti pidev. Seega on isomorfism pidev ja samal ajal lahtine kujutus, s.t. iga lahtise hulga $G \subset X$ korral on $T(G) \subset Y$ lahtine (veenduda!)✠.

2.2 Vektorruumide topologiseerimise põhiteoreem

Lisaks topoloogiliste vektorruumide sellele eelisele tavaliste topoloogiliste ruumide ees, mida kirjeldab lause 2.2, on veel teine oluline eelis. See väljendub võimaluses komplekteerida nulliümbruste baas hulkadest, mis on vektorruumi vahenditega lihtsalt kirjeldatavad.

Neelavad ja tasakaalus alamhulgad. Definitsioon. Öeldakse, et vektorruumi X mittetühi alamhulk E *neelab hulga* $A \subset X$, kui leidub selline $\delta > 0$, et

$$|\mu| \leq \delta \Rightarrow \mu A \subset E.$$

Alamhulka E nimetatakse *neelavaks*, kui ta neelab vektorruumi X iga ühe-elemendilise hulga $\{x\}$ $(x \in X)$.

Definitsioon. Öeldakse, et vektorruumi X alamhulk E on *tasakaalus*, kui $\lambda E \subset E$ iga $\lambda \in \mathbb{K}$ korral, mis rahuldab tingimust $|\lambda| \leq 1$.

Märgime mõned definitsioonidest lihtsalt järelduvad väited.

Ülesanne 7. Tasakaalus hulk E sisaldab nullelementi ja on sümmeetriline (s.t., $x \in E \Rightarrow -x \in E$).

Ülesanne 8. Tasakaalus hulkade ühisosa on tasakaalus.

Ülesanne 9. Lõpliku arvu neelavate hulkade ühisosa on neelav.

Ülesanne 10. Kui E on tasakaalus hulk, siis αE on tasakaalus iga $\alpha \in \mathbb{K}$ korral.

Ülesanne 11. Kui E on neelav hulk, siis αE on neelav iga $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ korral.

Ülesanne 12. Tasakaalus hulk E on neelav parajasti siis, kui iga $x \in X$ korral leidub selline $\delta > 0$, et $\delta x \in E$.

Ülesanne 13. Hulk E on neelav parajasti siis, kui span $E = X$.

Rõhutame, et nii alamhulga neelavus kui ka tasakaalustatus on *algebralised* mõisted. Nende tähtsus topoloogiliste vektorruumide jaoks selgub järgmisest lausest.

Lause 2.3 (*a*) *TVR-i X iga nulliümbrus on neelav hulk.*
(*b*) *TVR-i X iga nulliümbrus sisaldab tasakaalus nulliümbrust.*

Tõestus. Olgu U nulliümbrus TVR-s X ja olgu $x \in X$. Tänu seosele $0x = 0$ ja skalaariga korrutamise pidevusele leiduvad punkti x ümbrus V ja $\delta > 0$, et kehtib implikatsioon

$$|\mu| \leq \delta \Rightarrow \mu V \subset U \tag{2.3}$$

(vrd. (2.2)). Väite (a) tõestuseks märgime, et kuna $x \in V$, siis $\mu x \in U$ iga skalaari μ korral, mis rahuldab tingimust $|\mu| \leq \delta$, s.t. U on neelav hulk.

Väite (b) kontrollimiseks rakendame seost (2.3) juhul $x = 0$. Sellele vastavalt leiame suvalise nulliümbruse U puhul nulliümbruse V ning moodustame hulga $W := \cup \{\mu V \mid |\mu| \leq \delta\}$. Tänu seosele (2.3) kehtib $W \subset U$. Seejuures on W nulliümbrus, kuna ta sisaldab nulliümbrust δV. Jääb veenduda, et W on tasakaalus hulk. Tõepoolest, iga $x \in W$ on esitatav kujul $x = \mu u$, kus $|\mu| \leq \delta$, $u \in V$, ja kui $|\alpha| \leq 1$, siis $|\alpha\mu| \leq |\mu| \leq \delta$, mistõttu $\alpha x = \alpha\mu u \in W$. ■

Järeldus 2.4 *Igas TVR-s on tasakaalus neelavatest hulkadest koosnev nulliümbruste baas.*

Tõestus. See järeldub vahetult lause 2.3 väitest (b). ■

Järgnevalt tõestame selle peatüki **põhitulemuse**, mis kirjeldab vektorruumide topologiseerimist.

Teoreem 2.5 *Igas TVR-s X leidub nulliümbruste baas $\mathfrak{B}$ järgmiste omadustega:*
(NB1) $\forall V_1, V_2 \in \mathfrak{B}\ \exists V \in \mathfrak{B} : V \subset V_1 \cap V_2$;
(NB2) iga $V \in \mathfrak{B}$ on tasakaalus;
(NB3) iga $V \in \mathfrak{B}$ on neelav;
(NB4) $\forall V \in \mathfrak{B}\ \exists U \in \mathfrak{B} : U + U \subset V$.
Vastupidi, kui vektorruumis X on määratud mittetühi alamhulkade süsteem $\mathfrak{B}$ omadustega (NB1) - (NB4), siis X on TVR, milles punkti $x \in X$ ümbruste baasiks on

$$\mathfrak{B}_x := \{x + V \mid V \in \mathfrak{B}\}\,.$$

Tõestus. *Tarvilikkus.* Olgu $\mathfrak{B}$ TVR-i X kõigi tasakaalus nulliümbruste süsteem. Järelduse 2.4 põhjal on $\mathfrak{B}$ nulliümbruste baas, samuti on selge, et tingimused (NB2) ja (NB3) on rahuldatud. Ülesandest 8 ja faktist, et antud punkti kahe ümbruse ühisosa on samuti selle punkti ümbrus, järeldub (NB1). Tingimus (NB4) tuleneb liitmise pidevusest: kuna $0 + 0 = 0$, siis iga $V \in \mathfrak{B}$ puhul leiduvad $U_1, U_2 \in \mathfrak{B}$ omadusega $U_1 + U_2 \subset V$ (vrd. (2.1)), ja tingimuse (NB1) kohaselt saame valida $U \in \mathfrak{B}$ nii, et $U \subset U_1 \cap U_2$, seega $U + U \subset V$.

Piisavus. Olgu vektorruumis X fikseeritud alamhulkade süsteem $\mathfrak{B}$ omadustega (NB1) - (NB4). Näitame kõigepealt, et X on topoloogiline ruum, kus $\mathfrak{B}_x := \{x + V \mid V \in \mathfrak{B}\}$ on punkti $x \in X$ ümbruste baas. Teiste sõnadega, peame veenduma, et $\mathfrak{B}_x$ *rahuldab teoreemi 1.1 tingimusi (B1) - (B3).*

Esiteks, kuna $V \in \mathfrak{B}$ on tasakaalus hulk, siis $0 \in V$ ja seega $x = x + 0 \in x + V$ iga $V \in \mathfrak{B}$ korral. *Teiseks,* kui $V_1, V_2 \in \mathfrak{B}$ on suvalised ning $V \in \mathfrak{B}$ on selline, et $V \subset V_1 \cap V_2$ (vrd. (NB1)), siis $x + V \subset x + V_1 \cap V_2 \subset (x + V_1) \cap (x + V_2)$.

Kolmandaks peame näitama, et iga $x \in X$ ja $W := x + V$ puhul, kus $V \in \mathfrak{B}$, saab valida $U \in \mathfrak{B}$ nii, et $W' := x + U \subset W$ ja iga $y \in W'$ jaoks leidub $Q \in \mathfrak{B}_y$ omadusega $Q \subset W$. Vastavalt tingimusele (NB4) valime $U \in \mathfrak{B}$ omadusega $U + U \subset V$, siis $W' = x + U \subset x + U + U \subset x + V = W$. Kui $y = x + u$, $u \in U$, siis võtame $Q := y + U$, sel juhul $Q \in \mathfrak{B}_y$ ning $Q = x + u + U \subset x + U + U \subset x + V = W$.

Niisiis on X TR, näitame, et *vektorruumi tehted on pidevad.*

Liitmise pidevus tuleneb vahetult tingimusest (NB4): suvalise $W := x + y + V \in \mathfrak{B}_{x+y}$ korral, kus $x, y \in X$ ning $V \in \mathfrak{B}$, valime $U \in \mathfrak{B}$ omadusega $U + U \subset V$ ja tähistame $U_1 := x + U$ ja $U_2 := y + U$, seejuures $U_1 \in \mathfrak{B}_x$, $U_2 \in \mathfrak{B}_y$ ning $U_1 + U_2 \subset x + y + V = W$. Vastavalt seosele (2.1) tähendab see liitmise pidevust.

Skalaariga korrutamise pidevuse kontrollimiseks tõestame kõigepealt järgmise väite:

$$(^*) \qquad \forall U \in \mathfrak{B}\ \forall \lambda_0 \in \mathbb{K}\ \exists\ U_0 \in \mathfrak{B}\ : \lambda_0 U_0 \subset U.$$

Olgu $U \in \mathfrak{B}$ ja $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ suvalised. Peame silmas, et iga $E \subset X$ korral kehtib seos $2E \subset E + E$, seetõttu saame tänu tingimusele (NB4) leida $V^{(1)} \in \mathfrak{B}$ omadusega

$$2V^{(1)} \subset V^{(1)} + V^{(1)} \subset U.$$

Edasi leiame $V^{(2)} \in \mathfrak{B}$, et

$$2V^{(2)} \subset V^{(2)} + V^{(2)} \subset V^{(1)}, \text{ siis } 2^2 V^{(2)} \subset 2V^{(1)} \subset U$$

jne. Üldiselt võime iga $n \in \mathbb{N}$ korral valida $V^{(n)} \in \mathfrak{B}$ omadusega

$$2^n V^{(n)} \subset U.$$

Fikseerime $n \in \mathbb{N}$ nii, et $|\lambda_0| \le 2^n$, ja tähistame $U_0 := V^{(n)}$. Hulga $2^n U_0$ tasakaalustatusest saame

$$\lambda_0 U_0 = \frac{\lambda_0}{2^n} 2^n V^{(n)} \subset 2^n V^{(n)} \subset U.$$

Väide $(^*)$ on tõestatud.

Olgu nüüd $x_0 \in X$ ja $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ ja olgu $W := \lambda_0 x_0 + V$ punkti $\lambda_0 x_0$ ümbrus, kus $V \in \mathfrak{B}$. Vastavalt tingimusele (NB4) leiame nulliümbruse $U \in \mathfrak{B}$, et $U + U + U \subset V$. Rakendame väidet $(^*)$ ja fikseerime $U_0 \in \mathfrak{B}$ omadusega $\lambda_0 U_0 \subset U$. Seejuures võime eeldada, et

$$U_0 \subset U.$$

Tõepoolest, juhul $|\lambda_0| < 1$, võtame $U_0 := U$, juhul $|\lambda_0| \ge 1$ kehtib $U_0 \subset \lambda_0^{-1} U \subset U$ tänu hulga U tasakaalustatusele. Edasi, kuna U on neelav hulk, siis saab valida $\delta \in (0, 1]$ nii, et

$$|\mu| \le \delta \Rightarrow \mu x_0 \in U. \tag{2.4}$$

Olgu $\lambda \in \mathbb{K}$ suvaline arv omadusega $|\lambda - \lambda_0| \le \delta$ ja olgu x element punkti x_0 ümbrusest $x_0 + U_0$. Kuna $x - x_0 \in U_0 \subset U$ ja $|\lambda - \lambda_0| \le 1$, siis hulga U tasakaalustatuse tõttu

$$(\lambda - \lambda_0)\,(x - x_0) \in (\lambda - \lambda_0)\,U \subset U.$$

Tänu eeldusele $|\lambda - \lambda_0| \leq \delta$ kehtib (vrd. (4)) $(\lambda - \lambda_0)\, x_0 \in U$ ja seose $x - x_0 \in U_0$ tõttu

$$\lambda_0\,(x - x_0) \in \lambda_0 U_0 \subset U.$$

Kokkuvõttes,

$$\begin{aligned} \lambda x - \lambda_0 x_0 &= (\lambda - \lambda_0)\,(x - x_0) + (\lambda - \lambda_0)\, x_0 + \lambda_0\,(x - x_0) \\ &\subset U + U + U \subset V. \end{aligned}$$

Niisiis,

$$\begin{gathered} \forall W := \lambda_0 x_0 + V \in \mathfrak{B}_{\lambda_0 x_0}\ \exists Q := x_0 + U_0\ \exists \delta > 0 : \\ |\lambda - \lambda_0| \leq \delta \Rightarrow \lambda Q \subset W, \end{gathered}$$

seega on skalaariga korrutamine TVR-s X pidev iga $x_0 \in X$ ja $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ korral (vrd. (2.2)). Teoreem on tõestatud. ■

Nulliümbruste baasi moodustamiseks on veel **teisigi võimalusi**. Ilmne on, et selle saab alati moodustada lahtistest alamhulkadest (põhjendada!)✠. Teisalt kehtib järgmine väide.

Lause 2.6 *Igas TVR-s on olemas kinnistest taskaalus nulliümbrustest koosnev baas.*

Tõestus. Olgu $\mathfrak{B}$ TVR-i X nulliümbruste baas omadustega (NB1) - (NB4). Tähistame $\mathfrak{B}_1 := \left\{\overline{V} \mid V \in \mathfrak{B}\right\}$. Allpool ülesandes 14 sõnastatud väite kohaselt on $\mathfrak{B}_1$ elemendid kinnised tasakaalus hulgad, jääb üle veenduda, et ta on nulliümbruste baas. Kahtlemata on $\overline{V}$ iga $V \in \mathfrak{B}$ korral nulliümbrus. Valime suvalise nulliümbruse $W \subset X$ puhul sellise $V \in \mathfrak{B}$, et $V \subset W$. Tingimuse (NB4) põhjal saab leida $U \in \mathfrak{B}$ omadusega $U + U \subset V$. Näitame, et $\overline{U} \subset W$. Olgu $x \in \overline{U}$, siis $U \cap (x + U) \neq \emptyset$, mistõttu leidub $z \in U \cap (x + U)$. Seega $z = x + u$, $u \in U$ ja $z \in U$, järelikult $x = z - u \in U - U = U + U \subset V \subset W$. Niisiis, iga nulliümbruse W jaoks saab leida $\overline{U} \in \mathfrak{B}_1$, et $\overline{U} \subset W$, s.t. $\mathfrak{B}_1$ on nulliümbruste baas TVR-s X. ■

Ülesanne 14. Tõestada, et tasakaalus hulga sulund TVR-s on tasakaalus hulk.

Nagu näitab järgmine lause, saab nulliümbruste baasi abil lihtsalt kirjeldada **topoloogilise vektorruumi eralduvust.**

Lause 2.7 *TVR-i X puhul on järgmised väited samaväärsed:*
(a) *X on eralduv;*
(b) *iga nulliümbruste baasi $\mathfrak{B}$ korral kehtib seos*

$$\bigcap \{V \mid V \in \mathfrak{B}\} = \{0\}\,; \tag{2.5}$$

(c) *leidub nulliümbruste baas $\mathfrak{B}$ omadusega* (2.5).

Tõestus. $(a) \Rightarrow (b)$: Kui X on eralduv ja $x \in X \diagdown \{0\}$, siis suvalise nulliümbruste baasi $\mathfrak{B}$ korral leiduvad $U, W \in \mathfrak{B}$, et $U \cap (x + W) = \emptyset$. Tähendab, $x \notin U$, mistõttu $x \notin \cap \{V \mid V \in \mathfrak{B}\}$. Seega kehtib seos (2.5).
$(b) \Rightarrow (c)$ on ilmne.

$(c) \Rightarrow (a)$: Olgu $\mathfrak{B}$ TVR-i X nulliümbruste baas omadusega (2.5), teoreemi 2.5 kohaselt võime eeldada, et $\mathfrak{B}$ rahuldab tingimusi (NB1) - (NB4). Kui $x, y \in X$ ning $x \neq y$, siis $x - y \notin \cap\{V \mid V \in \mathfrak{B}\}$, seega leidub $W \in \mathfrak{B}$, et $x - y \notin W$. Rakendame tingimust (NB4) ja leiame $U \in \mathfrak{B}$ omadusega $U + U \subset W$. Osutub, et $(x + U) \cap (y + U) = \emptyset$: kui leiduks $z \in (x + U) \cap (y + U)$, siis saaksime $x - y = (z - y) - (z - x) \in U - U = U + U \subset W$, mis oleks vastuolus nulliümbruse W valikuga. ■

Ülesanne 15. Tõestada, et vektoralamruumi sulund TVR-s on vektoralamruum.

Me piirdume siin vaid ühe lihtsa näitega topoloogiliste vektorruumide kohta. Keerulisemaid näiteid vaatleme järgnevates peatükkides.

Näide 1. Lihtne on veenduda, et iga normeeritud ruum $(X, \|\|)$ on TVR. Olgu B selle ruumi ühikkera, s.t. $B := \{x \in X \mid \|x\| \leq 1\}$. Vahetu kontroll näitab, et alamhulkade süsteemi

$$\mathfrak{B} := \left\{\frac{1}{n}B_n \mid n \in \mathbb{N}\right\}$$

rahuldab tingimusi (NB1) - (NB4). Teoreemi 2.5 kohaselt on X TVR.

3 Tõkestatud ja kompaktsed alamhulgad topoloogilises vektorruumis

3.1 Tõkestatud ja täielikult tõkestatud alamhulgad

Tõkestatud hulgad TVR-s. Meenutame, et normeeritud ruumis $(X, \| \ \|)$ nimetatakse tõkestatuks sellist alamhulka, millel norm on tõkestatud. Teiste sõnadega, alamhulk $E \subset X$ on tõkestatud parajasti siis, kui leidub mingi skalaar $M > 0$, et $E \subset MB$, kus B on ühikkera. Niisiis on tõkestatud parajasti need alamhulgad, mis on *neelatavad ühikkera poolt* (vrd. art. 2.2). Lähtudes sellest ja pidades silmas, et hulgad $\lambda B \ \ (\lambda > 0)$ moodustavad nulliümbruste baasi normeeritud ruumis X (vrd. pt. 2, näide 1), defineerime järgnevalt tõkestatud hulgad topoloogilises vektorruumis.

Definitsioon. TVR-i X alamhulka E nimetatakse *tõkestatuks*, kui ta on neelatav iga nulliümbruse poolt ruumis X.

Lihtne on veenduda, et alamhulk $E \subset X$ on TVR-s X parajasti siis tõkestatud, kui ta on neelatav *nulliümbruste baasi iga elemendi* poolt, s.t. kui

$$\forall U \in \mathfrak{B} \ \exists \ \delta > 0 : |\mu| \leq \delta \Rightarrow \mu E \subset U \tag{3.1}$$

(kontrollida!)✠. Kui baas $\mathfrak{B}$ koosneb tasakaalus nulliümbrustest (teoreemi 2.5 põhjal selline baas alati leidub!), siis võib tingimuse (3.1) asendada lihtsama tingimusega

$$\forall U \in \mathfrak{B} \ \exists \ \mu > 0 : \mu E \subset U \tag{3.2}$$

(põhjendada!)✠.

Täielikult tõkestatud hulgad. Definitsioon. TVR-i X alamhulka E nimetatakse *täielikult tõkestatuks (*ehk prekompaktseks*)*, kui iga nulliümbruse U korral leidub selline lõplik alamhulk $E_0 \subset E$, et $E \subset E_0 + U$.

Nii nagu tõkestatud hulkade defineerimisel võime ka selles definitsioonis piirduda *nulliümbrustega baasist*. Niisiis, alamhulk E on täielikult tõkestatud TVR-s X parajasti siis, kui

$$\forall U \in \mathfrak{B} \ \exists \ n \in \mathbb{N} \ \exists \{x_1, ..., x_n\} \subset E : E \subset \bigcup_{k=1}^{n} (x_k + U) \,.$$

Veendume, et **iga täielikult tõkestatud hulk** $E \subset X$ **on tõkestatud.** Olgu $V \in \mathfrak{B}$, valime vastavalt tingimusele (NB4) nulliümbruse $U \in \mathfrak{B}$ omadusega $U + U \subset V$. Fikseerime lõpliku alamhulga $E_0 \subset E$ nii, et $E \subset E_0 + U$. Kuna E_0 on tõkestatud (vt. ülesanne 1), siis saame valida $\delta > 0$ nii, et $\delta \leq 1$ ja $\delta E_0 \subset U$. Seega

$$\delta E \subset \delta E_0 + \delta U \subset U + U \subset V,$$

tähendab, E on tõkestatud.

Me formuleerime järgnevalt rea definitsioonidest vahetult tulenevaid fakte.

Ülesanne 1. Iga lõplik alamhulk on täielikult tõkestatud (ja seega tõkestatud).

Ülesanne 2. (Täielikult) tõkestatud alamhulga alamhulk on (täielikult) tõkestatud.

Ülesanne 3. Lõpliku arvu (täielikult) tõkestatud alamhulkade ühend on (täielikult) tõkestatud.

Ülesanne 4. Kui E on (täielikult) tõkestatud alamhulk, siis ka αE on iga $\alpha \in \mathbb{K}$ korral (täielikult) tõkestatud.

Ülesanne 5. (Täielikult) tõkestatud alamhulkade $E_1, ..., E_n$ summa $E_1 + ... + E_n$ on (täielikult) tõkestatud.

Lisaks ülaltoodutele tõestame me veel **kaks tähelepanuväärset omadust.**

Lause 3.1 *(Täielikult) tõkestatud hulga $E \subset X$ sulund $\overline{E}$ on TVR-s X (täielikult) tõkestatud.*

Tõestus. Tõestuseks kasutame sisalduvust $\lambda\overline{E} \subset \overline{\lambda E}$, mida on kerge vahetult kontrollida (vt. ülesanne 6)✠. Olgu $\mathfrak{B}$ TVR-i X nulliümbruste baas, mis koosneb kinnistest tasakaalus hulkadest (vrd. LAUSE 2.6). Kui E on tõkestatud, siis iga $U \in \mathfrak{B}$ jaoks leidub $\mu > 0$ omadusega $\mu E \subset U$. Siit saamegi $\mu\overline{E} \subset \overline{\mu E} \subset \overline{U} = U$, s.t. $\overline{E}$ on tõkestatud.

Kui E on täielikult tõkestatud ning $x_1, ..., x_n \in E$ on sellised, et $E \subset \bigcup_{k=1}^{n} (x_k + U)$, siis, pidades silmas, et hulgad $x_k + U$ ja ka nende ühend $\bigcup_{k=1}^{n} (x_k + U)$ on kinnised (selgitada!)✠, saame

$$\overline{E} \subset \overline{\bigcup_{k=1}^{n} (x_k + U)} = \bigcup_{k=1}^{n} (x_k + U),$$

s.t. $\overline{E}$ on täielikult tõkestatud. ∎

Lause 3.2 *TVR-i X alamhulk E on tõkestatud parajasti siis, kui iga selle hulga elementide jada (x_n) ning suvalise nulliks koonduva arvjada (λ_n) korral $\lambda_n x_n \to 0$ ruumis X.*

Tõestus. *Tarvilikkus.* Olgu $E \subset X$ tõkestatud alamhulk ja $\mathfrak{B}$ tasakaalus nulliümbrustest koosnev baas TVR-s X. Fikseeritud $V \in \mathfrak{B}$ korral leidub siis $\lambda > 0$ omadusega $\lambda E \subset V$. Nulliks koonduva arvjada (λ_n) jaoks leiame $N \in \mathbb{N}$ nii, et $|\lambda_n| \leq \lambda$ iga $n > N$ puhul. Tänu nulliümbruse V tasakaalustatusele saame suvalise elementide jada (x_n) korral hulgast E seose

$$\lambda_n x_n \in \lambda_n E = \frac{\lambda_n}{\lambda}\lambda E \subset \frac{\lambda_n}{\lambda} V \subset V,$$

kui $n > N$. Niisiis, $\lambda_n x_n \to 0$.

Piisavus. Eeldame, et alamhulk E rahuldab tingimust

$$[(x_n) \subset E,\ \lambda_n \to 0] \Rightarrow \lambda_n x_n \to 0,$$

ja oletame vastuväiteliselt, et E ei ole tõkestatud. Siis leidub selline (tasakaalus) nulliümbrus U, et $(\lambda E) \diagdown U \neq \emptyset$ iga $\lambda > 0$ korral, muuhulgas kehtib $E \diagdown (nU) \neq \emptyset$ $(n \in \mathbb{N})$. Valime $z_n \in E \diagdown (nU)$ ja paneme tähele, et jada $\left(\frac{1}{n} z_n\right)$ ei koondu nulliks TVR-s X (kontrollida!)✠, kuigi $\frac{1}{n} \to 0$. Saime vastuolu eeldusega. ∎

Ülesanne 6. Tõestada, et sisalduvus $\lambda\overline{E} \subset \overline{\lambda E}$ kehtib TVR-s X iga alamhulga E ja skalaari λ korral.

3.2 Täielikud ja kompaktsed alamhulgad topoloogilises vektorruumis

Järgnevalt kirjeldame **kompaktseid alamhulki** topoloogilises vektorruumis. Meenutame (vt. lause 1.5), et topoloogilise ruumi alamhulk on kompaktne parajasti siis, kui iga selle hulga elementidest moodustatud pere sisaldab osapere, mis koondub selle hulga punktiks. Oma kogemustest meetriliste ruumide teoorias teame, et kompaktsus on tihedalt seotud täielikkuse mõistega. Seejuures ei ole täielikkus üldjuhul topoloogia abil kirjeldatav mõiste, tema defineerimiseks vajatakse nn. ühtlaste ruumide struktuuri, mis meetrilises ruumis on loomulikul viisil olemas. Saab veenduda, et ka igas topoloogilises vektorruumis on olemas loomulik nihke suhtes invariantne ühtlane struktuur. See võimaldab defineerida täielikud alamhulgad topoloogilises vektorruumis põhimõtteliselt samal viisil, kui meetrilises ruumis.

Definitsioon. TVR-i X elementide peret $(x_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$ nimetatakse *Cauchy pereks* ehk, kui iga nulliümbruse U korral leidub selline $\alpha_0 \in \Gamma$, et

$$\alpha, \alpha' \geq \alpha_0 \Rightarrow x_\alpha - x_{\alpha'} \in U.$$

Alamhulka $E \subset X$ nimetatakse *täielikuks*, kui tema elementide iga Cauchy pere koondub selle hulga mingiks elemendiks.

Siinkohal huvitab meid eeskätt **täielikkuse seos kompaktsusega.** Kasutades artiklis 1.3 tõestatud TEOREEMI 1.5, tõestame järgmise tulemuse, mis üsna selgelt viitab analoogiale meetriliste ruumidega.

Teoreem 3.3 *TVR-i X alamhulk E on kompaktne parajasti siis, kui ta on täielikult tõkestatud ja täielik.*

Tõestus. *Tarvilikkus.* Eeldame, et $E \subset X$ on kompaktne ning olgu $\mathfrak{B}$ ruumi X selline nulliümbruste baas, mis koosneb lahtistest hulkadest. Fikseerime suvalise $V \in \mathfrak{B}$ ja moodustame alamhulkade süsteemi $\{x+V\}_{x\in E}$, see on hulga E lahtine kate. Vastavalt kompaktsuse definitsioonile (vrd. pt. 1) leidub lõplik osakate $\{x_1+V,\ x_2+V, ..., x_n+V\}$. Seega

$$E \subset \bigcup_{k=1}^{n} (x_k + V)\,,$$

mis tähendabki, et E *on täielikult tõkestatud.*

Näitame, et E *on täielik hulk.* Olgu $(x_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$ hulga E elementide suvaline Cauchy pere ja olgu $\mathfrak{B}$ ruumi X nulliümbruste baas omadustega (NB1) - (NB4). Võtame suvalise $V \in \mathfrak{B}$ ja niisuguse $U \in \mathfrak{B}$, et $U + U \subset V$. Vastavalt Cauchy pere definitsioonile leidub $\alpha_0 \in \Gamma$, et $x_\alpha - x_{\alpha'} \in U$, kui $\alpha \geq \alpha_0$ ja $\alpha' \geq \alpha_0$. Hulga E kompaktsusest järeldub, et (x_α) sisaldab koonduva osapere $(y_\beta)_{\beta\in\Delta}$, olgu $x \in E$ selle osapere piirväärtus. Seega saab fikseerida $\beta_0 \in \Delta$ omadusega

$$\beta \geq \beta_0 \Rightarrow y_\beta - x \in U.$$

Osapere definitsioonist lähtudes (vrd. art. 1.2) võime leida $\beta_1 \in \Delta$ nii, et

$$\beta' \geq \beta_1 \Rightarrow \exists\ \alpha' \in \Gamma,\ \alpha' \geq \alpha_0,\ y_{\beta'} = x_{\alpha'}.$$

Võtame seejuures $\beta' \geq \beta_0$ ja $\beta' \geq \beta_1$, siis $x_\alpha - x = x_\alpha - x_{\alpha'} + y_{\beta'} - x \in U + U \subset V$, tähendab, $x_\alpha \to x$.

Piisavus. Eeldame, et E on täielikult tõkestatud täielik alamhulk TVR-s X. Kompaktsuse kontrollimiseks *võtame suvalise elementide pere* $(x_\alpha)_{\alpha\in\Gamma} \subset E$ *ja näitame, et ta sisaldab hulgas* E *koonduva osapere.*

Olgu $\mathcal{M}$ kõigi niisuguste tsentreeritud süsteemide $\mathcal{F}$ hulk, mis koosnevad ainult sellistest alamhulkadest $S \subset E$, mida (x_α) riivab sageli (vrd. art. 1.2). Hulk $\mathcal{M}$ ei ole tühi, sest ta sisaldab ühe-elemendilist süsteemi $\{E\}$. Järjestame hulga $\mathcal{M}$ sisalduvuse järgi, s.t. $\mathcal{F}_1 \leq \mathcal{F}_2 :\Leftrightarrow \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$, ning näitame Zorni lemma (vt. sissejuhatus) abil, et ta sisaldab maksimaalset elementi. Selleks *veendume, et iga täielikult järjestatud osahulk* $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}$ *on vaadeldava järjestuse mõttes ülalt tõkestatud.* Tähistame

$$\widehat{\mathcal{F}} := \{S \mid \exists \mathcal{F} \in \mathcal{M}_0 : S \in \mathcal{F}\}.$$

Kahtlemata riivab (x_α) sageli iga alamhulka $S \in \widehat{\mathcal{F}}$, näitame, et süsteem $\widehat{\mathcal{F}}$ on tsentreeritud.

Kui $S_1, ..., S_n \in \widehat{\mathcal{F}}$, siis leiduvad $\mathcal{F}_1, ..., \mathcal{F}_n \in \mathcal{M}_0$ omadusega $S_k \in \mathcal{F}_k$ $(k = 1, ..., n)$. Kuna $\mathcal{M}_0$ on täielikult järjestatud, siis saame süsteemide $\mathcal{F}_1, ..., \mathcal{F}_n$ hulgast leida suurima, tähistame selle $\mathcal{F}_{k_0}$. Seega $S_k \in \mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_{k_0}$ $(k = 1, ..., n)$, tähendab, $\{S_1, ..., S_n\} \subset \mathcal{F}_{k_0}$. Seejuures on $\mathcal{F}_{k_0}$ tsentreeritud, järelikult $\bigcap_{k=1}^n S_k \neq \emptyset$, mis ütlebki, et $\widehat{\mathcal{F}}$ on tsentreeritud süsteem.

Niisiis,

$$\widehat{\mathcal{F}} \in \mathcal{M} \text{ ja } \widehat{\mathcal{F}} \geq \mathcal{F} \text{ iga } \mathcal{F} \in \mathcal{M}_0 \text{ korral,}$$

teiste sõnadega, $\mathcal{M}_0$ on ülalt tõkestatud. Vastavalt Zorni lemmale leidub hulgas $\mathcal{M}$ maksimaalne element, mille me tähistame $\mathcal{F}_0$. Maksimaalsusest tuleneb, et

(*) *kui* $G \subset E$ *rahuldab tingimusi*

$$(a)\ \ (x_\alpha)\ \ \textit{riivab sageli hulka } G\ \ \textit{ja}\ \ (b)\ \ \mathcal{F}_0 \cup \{G\}\ \ \textit{on tsentreeritud,}$$

siis $G \in \mathcal{F}_0$.

Me näitame järgnevalt, et *süsteemil* $\mathcal{F}_0$ *on järgmised omadused:*

1) $E \in \mathcal{F}_0$,

2) $B_\alpha := \{x_{\alpha'} \mid \alpha' \geq \alpha\} \in \mathcal{F}_0$ iga $\alpha \in \Gamma$ korral,

3) kui $E_1, ..., E_n$ on hulga E niisugused alamhulgad, mida (x_α) riivab sageli ja $\bigcup_{k=1}^n E_k \in \mathcal{F}_0$, siis leidub selline $k_0 \in \{1, ..., n\}$, et $E_{k_0} \in \mathcal{F}_0$.

Väide 1) on ilmne. Väite 2) puhul on selge, et B_α rahuldab iga $\alpha \in \Gamma$ korral omaduse (*) tingimust (a). Tingimuse (b) juurde märgime, et kuna $\mathcal{F}_0$ on maksimaalne, siis $S_1 \cap S_2 \in \mathcal{F}_0$ suvaliste $S_1, S_2 \in \mathcal{F}_0$ korral, seega

$$\text{kui } S_1 \cap ... \cap S_n \neq \varnothing, \text{ siis } S_1 \cap ... \cap S_n \in \mathcal{F}_0.$$

Siit tuleneb, et kuivõrd kõik süsteemi $\mathcal{F}_0$ elemendid on sellised alamhulgad, mida (x_α) riivab sageli, siis $\mathcal{F}_0 \cup \{B_\alpha\}$ on tsentreeritud süsteem.

Väite 3) kontrollimiseks oletame vastuväiteliselt, et ükski hulkadest E_k ei kuulu süsteemi $\mathcal{F}_0$, teiste sõnadega, $\mathcal{F}_0 \cup \{E_k\}$ ei ole tsentreeritud süsteem $(k = 1, ..., n)$. Siis iga $k \in \{1, ..., n\}$ puhul saame valida alamhulgad $C_k^1, ..., C_k^{m_k} \in \mathcal{F}_0$ omadusega

$$E_k \cap C_k^1 \cap ... \cap C_k^{m_k} = \varnothing. \tag{3.3}$$

Moodustame hulga

$$C := \left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) \cap \bigcap_{k=1}^{n} \left(C_k^1 \cap ... \cap C_k^{m_k}\right)$$

ja paneme tähele, et

$$C \subset \bigcup_{k=1}^{n} \left(E_k \cap C_k^1 \cap ... \cap C_k^{m_k}\right) =: C'.$$

Tõepoolest, kui $x \in C$, siis leidub $l \in \{1, ..., n\}$, et $x \in E_l$ ning $x \in \bigcap_{k=1}^{n} (C_k^1 \cap ... \cap C_k^{m_k})$, mistõttu $x \in E_l \cap C_l^1 \cap ... \cap C_l^{m_l} \subset C'$. Sisalduvusest $C \subset C'$ ja tingimusest (3.3) järeldub $C = \emptyset$, mis on vastuolus eeldusega $\bigcup_{k=1}^{n} E_k \in \mathcal{F}_0$. Saadud vastuolu näitabki, et väide 3) on õige.

Hulga $\mathcal{F}_0$ abil *moodustame järgnevalt pere* $(x_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$ *osapere.* Tähistame

$$\Delta := \{\beta := (\alpha, S) \mid \alpha \in \Gamma,\ S \in \mathcal{F}_0,\ x_\alpha \in S\} \subset \Gamma \times \mathcal{F}_0$$

ning defineerime hulgas Δ järjestuse seosega

$$\beta \geq \beta' :\Leftrightarrow \alpha \geq \alpha' \text{ ja } S \subset S',$$

kus $\beta := (\alpha, S)$ ja $\beta' := (\alpha', S')$ on hulgast Δ. Näitame, et Δ on suunatud hulk. Olgu $\beta, \beta' \in \Delta$, võtame $\alpha_0 \in \Gamma$ nii, et $\alpha_0 \geq \alpha, \alpha'$. Kuna $\mathcal{F}_0$ on tsentreeritud, siis (vrd. 2)) $S \cap S' \cap B_{\alpha_0} \neq \varnothing$. Seega saame leida $\alpha'' \in \Gamma$, et $\alpha'' \geq \alpha_0$ ja $x_{\alpha''} \in S \cap S' =: S''$. Selge, et (x_α) riivab sageli hulka S'', teisalt on $\mathcal{F}_0 \cup \{S''\}$ tsentreeritud. Omaduse (*) kohaselt $S'' \in \mathcal{F}_0$, mistõttu $\beta'' := (\alpha'', S'') \in \Delta$. Seejuures $\beta, \beta' \leq \beta''$, järelikult on Δ tõepoolest suunatud hulk. Konstrueerime osapere $(y_\beta)_{\beta\in\Delta}$ seosega

$$y_\beta := x_\alpha, \text{ kui } x_\alpha \in S,\ \beta = (\alpha, S)\,.$$

Kui $\alpha \in \Gamma$ on fikseeritud ja $S \in \mathcal{F}_0$ on selline hulk, et $x_\alpha \in S$, siis $\beta := (\alpha, S) \in \Delta$. (Et selline S leidub, see tuleneb näiteks sellest, et $x_\alpha \in E$ ja $E \in \mathcal{F}_0$ (vrd. 1))). Kui nüüd $\beta' \geq \beta$, kus $\beta' := (\alpha', S') \in \Delta$, siis $y_{\beta'} := x_{\alpha'}$ ning $\alpha' \geq \alpha$. Seega on $(y_\beta)_{\beta\in\Delta}$ tõepoolest pere $(x_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$ osapere.

Lõpuks jääb veenduda, et (y_β) *on Cauchy pere*, hulga E täielikkuse tõttu on ta siis selles hulgas koonduv. Olgu $\mathfrak{B}$ TVR-i X nulliümbruste baas omadustega (NB1) - (NB4), olgu $V \in \mathfrak{B}$ suvaline ja $U \in \mathfrak{B}$ selline, et $U + U \subset V$. Kuna E on täielikult tõkestatud, siis leiduvad $z_1, ..., z_n \in E$, et $E \subset \bigcup_{i=1}^{n} (z_i + U)$. Tähistame $S_i := (z_i + U) \cap E \quad (i = 1, ..., n)$ ja eraldame nende hulgast välja kõik sellised alamhulgad $S_{i_1}, ..., S_{i_p}$, mida pere (x_α) riivab sageli. (Kuna Γ on lõpmatu hulk, siis peab vähemalt üks hulkadest S_i olema selline, mida (x_α) riivab sageli.)

Tähistame $S_0 := \bigcup_{j=1}^{p} S_{i_j}$ ning paneme tähele, et

$$\exists \alpha^* \in \Gamma : \alpha \geq \alpha^* \Rightarrow x_\alpha \in S_0$$

(s.t. $B_{\alpha^*} \subset S_0$). (Tõepoolest, kui oletada vastupidist, s.t.

$$\forall \alpha \in \Gamma\ \exists\ \alpha' \geq \alpha : x_{\alpha'} \in E \diagdown S_0,$$

siis (x_α) riivab sageli hulka $E \diagdown S_0$. Kuna hulki S_i $(i \neq i_j)$ on lõplik arv, siis vähemalt ühte neist riivab (x_α) sageli, kuid see on vastuolus hulkade S_{i_j} valikuga.) Väite 2) kohaselt

$B_{\alpha^*} \in \mathcal{F}_0$ ja kuna $\mathcal{F}_0$ on tsentreeritud, siis ka $\mathcal{F}_0 \cup \{S_0\}$ on tsentreeritud, seetõttu $S_0 \in \mathcal{F}_0$ (vrd. omadus (*)). Vastavalt väitele 3) fikseerime $S_{i_{j_0}} \in \mathcal{F}_0$. Olgu $\alpha_0 \in \Gamma$ indeks omadusega $x_{\alpha_0} \in S_{i_{j_0}}$ (selline indeks leidub, sest (x_α) riivab sageli hulka $S_{i_{j_0}}$), seega $\beta_0 := \big(\alpha_0, S_{i_{j_0}}\big) \in \Delta$. Seejuures, kui $\beta = (\alpha, S)$ ja $\beta' = (\alpha', S')$ ning $\beta, \beta' \geq \beta_0$, siis $S, S' \subset S_{i_{j_0}}$ ja

$$\begin{aligned} y_\beta - y_{\beta'} &= x_\alpha - x_{\alpha'} \in S - S' \subset S_{i_{j_0}} - S_{i_{j_0}} \subset \big(z_{i_{j_0}} + U\big) - \big(z_{i_{j_0}} + U\big) \\ &= U - U = U + U \subset V. \end{aligned}$$

Niisiis on $(y_\beta)_{\beta \in \Delta}$ Cauchy pere. ■

4 Metriseeruvad topoloogilised vektorruumid

Olgu Z meetriline ruum meetrikaga d. Alamhulga $E \subset Z$ sisepunktiks nimetatakse sellist punkti $x \in E$, mille jaoks leidub ümbrus $B(x,r) := \{z \in Z \mid d(x,z) < r\}$ omadusega $B(x,r) \subset E$. Kui alamhulk E koosneb ainult oma sisepunktidest, siis nimetatakse teda lahtiseks. Kõigi niiviisi defineeritud lahtiste hulkade süsteem τ_d on topoloogia hulgas Z, s.t. ta rahuldab topoloogia aksioome (T1) – (T3) (vt. art. 1.1). Seda topoloogiat nimetatakse meetrika d poolt määratud *meetriliseks topoloogiaks.*

Öeldakse, et topoloogilise ruumi X topoloogia τ on *metriseeruv*, kui hulgas X saab defineerida niisuguse meetrika d, et τ langeb kokku meetrika d poolt määratud meetrilise topoloogiaga. Sel juhul kerad $B(x,1/n)$ $(n \in \mathbb{N})$ moodustavad punkti x ümbruste baasi. Niisiis, *kui TR X on metriseeruv, siis igal punktil on olemas loenduv ümbruste baas.*

4.1 Metriseeruvad topoloogilised vektorruumid

TVR-i (X,τ) nimetame **metriseeruvaks**, kui tema topoloogia τ on metriseeruv. Eelpoolöeldu põhjal saab sellises TVR-s fikseerida loenduva nulliümbruste baasi. Me näitame järgnevalt, et 1) *topoloogiat τ määrava meetrika saab defineerida teatava üldistatud normi abil*, mida nimetatakse pseudonormiks, ja 2) *loenduva nulliümbruste baasi olemasolu eralduvas TVR-s garanteerib tema metriseeruvuse.*

Pseudonormid. Definitsioon. Olgu X vektorruum. Funktsiooni $|\ | : X \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x|$ nimetatakse *pseudonormiks*, kui ta rahuldab tingimusi

(i) $x = 0 \Leftrightarrow |x| = 0$,
(ii) $|\lambda x| \le |x|$, kui $x \in X$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$, $|\lambda| \le 1$,
(iii) $|x+y| \le |x| + |y|$.

Paneme tähele, et **iga norm on pseudonorm** (selgitada!)✠. Tähtsaim vahetu järeldus definitsioonist on, et **seosega** $d(x,y) := |x-y|$ **on vektorruumil** X **määratud meetrika** (kontrollida!)✠, kusjuures see on *invariantne nihke suhtes*:

$$d(x+z, y+z) = |(x+z) - (y+z)| = |x-y| = d(x,y).$$

Sellega defineeritud topoloogiat nimetame *pseudonormi $|\ |$ poolt määratud topoloogiaks.*

Lause 4.1 *Kui eralduvas TVR-s (X,τ) on loenduv nulliümbruste baas, siis saab tema topoloogia määrata pseudonormiga.*

Tõestus. Olgu $\mathfrak{B} = \{V_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ nulliümbruste baas TVR-s (X,τ). Vastavalt teoreemile 2.5 võime eeldada, et hulgad V_n on tasakaalus ja

$$V_{n+1} + V_{n+1} \subset V_n \ \ (n \in \mathbb{N}) \tag{4.1}$$

(põhjendada!)✠. Pseudonormi defineerimiseks tähistame iga **lõpliku** mittetühja alamhulga $J \subset \mathbb{N}$ korral

$$q_J := \sum_{k \in J} 2^{-k} \text{ ning } V_J := \sum_{k \in J} V_k.$$

Paneme tähele, et $0 < q_J < 1$ ja

$$q_J < 2^{-k} \Rightarrow r < \min\{l \mid l \in J\} \Rightarrow V_J \subset V_r. \tag{4.2}$$

Esimese implikatsiooni kehtivus on ilmne. Teise tõestamiseks eeldame, et J koosneb naturaalarvudest $k_1 < k_2 < ... < k_n$, ning võtame suvalise $r \in \mathbb{N}$ omadusega $r < k_1$. Seost (4.1) rakendades saame

$$\begin{aligned} V_r &\supset V_{k+1} + V_{k+1} \supset V_{k_1} + V_{k_1} \supset V_{k_1} + V_{k_1+1} + V_{k_1+1} \\ &\supset V_{k_1} + V_{k_2} + V_{k_2} \supset V_{k_1} + V_{k_2} + V_{k_2+1} + V_{k_2+1} \\ &\supset V_{k_1} + V_{k_2} + V_{k_3} + V_{k_3} \supset ... \supset \sum_{i=1}^{n} V_{k_i} = V_J. \end{aligned}$$

Defineerime nüüd ruumis X pseudonormi $|\ |$ järgmiselt. Olgu $|x| := 1$, kui $x \notin V_J$ kõigi lõplike alamhulkade $J \subset \mathbb{N}$ korral, vastupidisel juhul olgu

$$|x| := \inf\{q_J \mid x \in V_J\}. \tag{4.3}$$

Näitame, et funktsioon $|\ |$ rahuldab tõepoolest pseudonormi definitsiooni tingimusi $(i)-(iii)$.

Tingimuse (i) põhjendamiseks paneme tähele, et ühelt poolt kehtib ilmselt $|0| = 0$ (selgitada!)✠, teisalt, kui $|x| = 0$, siis $x \in V_n$ kõikide $n \in \mathbb{N}$ korral ja tänu ruumi X eralduvusele on sel juhul $x = 0$ (vrd. lause 2.7). Tingimuse (ii) puhul on selge, et kui $|x| = 1$, siis $|\lambda x| \leq |x|$. Teiselt poolt, kuna V_J kui lõpliku arvu tasakaalus hulkade V_k $(k \in J)$ summa on tasakaalus (kontrollida!)✠, siis eeldusel $|\lambda| \leq 1$ saame

$$|\lambda x| = \inf\{q_J \mid \lambda x \in V_J\} \leq \inf\{q_J \mid x \in V_J\} = |x|.$$

Tingimuse (iii) kontrollimiseks võtame $x, y \in X$. Kui $|x| + |y| \geq 1$, siis on tingimus (iii) täidetud. Kui $|x| + |y| < 1$, siis valime $\varepsilon > 0$ selliselt, et $|x| + |y| + 2\varepsilon < 1$, ja seejärel (seosest (4.3) ning infiimumi definitsioonist lähtudes) lõplikud alamhulgad $J \subset \mathbb{N}$ ning $I \subset \mathbb{N}$ nii, et $x \in V_J$ ja $y \in V_I$, kusjuures kehtivad võrratused $q_J < |x| + \varepsilon$ ning $q_I < |y| + \varepsilon$. Edasi leiame (üheselt määratud) lõpliku alamhulga $K \subset \mathbb{N}$ omadusega $q_K = q_J + q_I$ (veenduda hulga K olemasolus!)✠, sel juhul $V_J + V_I \subset V_K$ (selgitada!)✠. Seega $x + y \in V_K$, mistõttu $|x + y| \leq q_K = q_J + q_I < |x| + |y| + 2\varepsilon$. Kuna ε võib olla ükskõik kui väike positiivne arv, saamegi tingimuse $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Lõpuks jääb veel veenduda, et pseudonorm $|\ |$ määrab vektorruumis X topoloogia τ. Olgu d pseudonormiga $|\ |$ määratud meetrika ja olgu τ' selle meetrikaga (s.o. pseudonormiga $|\ |$) määratud topoloogia. Näitame, et $\tau = \tau'$, s.t. **ühikkujutused**

$$i : (X, \tau) \to (X, \tau') \quad \text{ja} \quad i : (X, \tau') \to (X, \tau) \quad \text{on pidevad.}$$

Teatavasti moodustavad topoloogia τ' nulliümbruste baasi $\mathfrak{B}'$ hulgad

$$B_\varepsilon := \{x \in X \mid |x| \leq \varepsilon\} \quad (\varepsilon > 0),$$

näitame, et

$$B_{2^{-(k+1)}} \subset V_k \subset B_{2^{-k}} \quad (k \in \mathbb{N}). \tag{4.4}$$

Esimese sisalduvuse põhjendamiseks valemis märgime, et kui $x \in B_{2^{-(k+1)}}$, siis leidub selline $J \subset \mathbb{N}$, et $x \in V_J$ ja $q_J < 2^{-k}$, millest seoste (4.2) põhjal järeldub $x \in V_k$. Teine sisalduvus on ilmne: kui $x \in V_k$, siis funktsiooni $|\ |$ definitsioonist tuleneb $|x| \leq 2^{-k}$.

Olgu $B_\varepsilon \in \mathfrak{B}'$, võtame $k \in \mathbb{N}$ nii suure, et $2^{-k} < \varepsilon$, siis seostest 4.4 järeldub $V_k \subset B_\varepsilon$. Seega on $i : (X, \tau) \to (X, \tau')$ pidev kujutus. Olgu nüüd, vastupidi, fikseeritud mingi $V_n \in \mathfrak{B}$. Kui $\varepsilon < 2^{-n-1}$, siis $B_\varepsilon \subset V_n$, niisiis on ka kujutus $i : (X, \tau') \to (X, \tau)$ pidev. Lause on tõestatud. ∎

Teoreem 4.2 *Eralduva TVR-i (X, τ) korral on järgmised väited samaväärsed:*
(a) *ruumis (X, τ) on loenduv nulliümbruste baas,*
(b) *topoloogia τ saab määrata pseudonormiga,*
(c) *topoloogia τ saab määrata nihete suhtes invariantse meetrikaga,*
(d) *topoloogia τ on metriseeruv.*

Tõestus. Implikatsioon $(a) \Rightarrow (b)$ tuleneb vahetult lausest 4.1, implikatsioonide $(b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (a)$ kehtivus on selge. ∎

Meetriliste ruumide teooria kõige efektsemad tulemused (Baire'i teoreem, Banachi püsipunktiprintsiip jt.) on seotud **täielike** meetriliste ruumidega. Eelmises peatükis toodud definitsiooni kohaselt on topoloogiline vektorruum täielik, kui iga tema elementidest moodustatud Cauchy pere on selles ruumis koonduv.

On selge, et Cauchy jadad (kui Cauchy perede eriliigi) saame defineerida igas TVR-s (X, τ): elementide jada (x_n) on Cauchy jada parajasti siis, kui iga nulliümbruse $V \in \mathfrak{B}$ korral leidub selline $N \in \mathbb{N}$, et $x_n - x_m \in V$ kõikide $m, n \geq N$ korral. Kui X on seejuures metriseeruv ning tema topoloogia on määratud nihke suhtes invariantse meetrikaga d, siis võime nulliümbruste baasiks $\mathfrak{B}$ võtta alamhulkade süsteemi

$$B_\delta := \{x \in X \mid d(x, 0) < \delta\} \quad (\delta > 0).$$

Seetõttu (tänu seosele $d(x_n, x_m) = d(x_n - x_m, 0)$) on jada (x_n) Cauchy jada topoloogias τ parajasti siis, kui ta on meetrika d suhtes Cauchy jada, s.t. $\lim_{n,m\to\infty} d(x_n, x_m) = 0$ (kontrollida!)✠. Seega kehtib järgmine väide.

Lause 4.3 *Kui d_1 ja d_2 on nihke suhtes invariantsed meetrikad vektorruumil X, mis määravad ühe ja sama topoloogia τ, siis on neil meetrikatel ühed ja samad Cauchy jadad ning meetrika d_1 on täielik parajasti siis, kui meetrika d_2 on täielik.*

Metriseeruva topoloogilise vektorruumi täielikkuse kirjeldamiseks tõestame järgmise lause.

Lause 4.4 *Metriseeruv TVR X on täielik parajasti siis, kui tema topoloogia saab määrata täieliku nihke suhtes invariantse meetrikaga. Teisi sõnu, metriseeruv TVR on täielik parajasti siis, kui iga tema Cauchy jada on selles ruumis koonduv.*

Tõestus. *Tarvilikkus* tuleneb sellest, et iga jada, mis on Cauchy jada vaadeldava meetrika mõttes, on Cauchy jada ka TVR-s X.

Piisavus. Olgu (X, τ) selline metriseeruv TVR, milles iga Cauchy jada on koonduv. Olgu $\mathfrak{B} = \{V_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ τ-nulliümbruste baas omadusega $V_{n+1} + V_{n+1} \subset V_n$. Olgu $(x_\alpha)_{\alpha \in \Gamma}$ suvaline Cauchy pere ruumis X, meie eesmärk on näidata, et (x_α) on koonduv ruumis X.

Vastavalt Cauchy pere definitsioonile saab iga $V_n \in \mathfrak{B}$ korral leida sellise $\alpha'_n \in \Gamma$, et kui $\alpha, \beta \geq \alpha'_n$, siis $x_\alpha - x_\beta \in V_n$. Moodustame indeksite jada (α_n) nii, et

$$\alpha_n \geq \alpha'_n \text{ ja } \alpha_n \geq \alpha_{n-1} \quad (n \in \mathbb{N}), \tag{4.5}$$

ning paneme tähele, et (x_{α_n}) on Cauchy jada: suvalise $V_m \in \mathfrak{B}$ korral valime $k, l \geq m$, siis $\alpha_k, \alpha_l \geq \alpha_m \geq \alpha'_m$, mistõttu $x_{\alpha_k} - x_{\alpha_l} \in V_m$. Et eelduse kohaselt on iga Cauchy jada koonduv, siis eksisteerib piirväärtus $\lim_n x_{\alpha_n} =: x$. Näitame, et ka pere (x_α) koondub piirväärtuseks x.

Olgu $V_m \in \mathfrak{B}$. Kuna $x_{\alpha_n} \to x$, siis saab valida $n_0 > m+1$ nii, et $x_{n_0} - x \in V_{m+1}$. Võtame $\alpha \geq \alpha_{n_0}$, siis $\alpha \geq \alpha_{n_0} \geq \alpha_{m+1} \geq \alpha'_{m+1}$ (vrd. (4.5)), seega $x_\alpha - x_{\alpha_{n_0}} \in V_{m+1}$. Kokkuvõttes, kui $\alpha \geq \alpha_{n_0}$, siis

$$x_\alpha - x = \left(x_\alpha - x_{\alpha_{n_0}}\right) + \left(x_{\alpha_{n_0}} - x\right) \in V_{m+1} + V_{m+1} \subset V_m,$$

s.t. $x_\alpha \to x$. ∎

Definitsioon. TVR-i X nimetatakse
1) *lokaalselt tõkestatuks*, kui tal leidub *tõkestatud* nulliümbrus ja
2) *lokaalselt kompaktseks,* kui tal leidub *kompaktne* nulliümbrus.

Lokaalselt tõkestatud ruumide tüüpiliseks näiteks on normeeritud ruum, kuid peale nende leidub ka teisi (vt. art. 7.3, näide 2). Siinkohal märgime järgmist olulist fakti.

Lause 4.5 *Iga lokaalselt tõkestatud eralduv TVR on metriseeruv.*

Tõestus. Iseseisvalt!✠ Kasutada ülesannet 1. ∎

Ülesanne 1. Näidata, et kui B on tõkestatud nulliümbrus TVR-s X, siis hulgad $r_n B$ $(n \in \mathbb{N})$, kus $r_1 > r_2 > ... > r_n \to 0$, moodustavad ruumis X nulliümbruste baasi.

4.2 Lõplikumõõtmelised topoloogilised vektorruumid

Lõplikumõõtmeline vektorruum. Lokaalselt kompaktsed eralduvad topoloogilised vektorruumid osutuvad, nagu me peagi veendume, lõplikumõõtmelisteks. Meenutame (vt. sissejuhatus), et vektorruumi X nimetatakse n-mõõtmeliseks (kirjutame $\dim X = n$), kui tal leidub n elemendist koosnev *baas*, s.t. selline lineaarselt sõltumatu alamhulk $\{e_1, ..., e_n\}$, et iga element $x \in X$ on (üheselt) esitatav kujul $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$ $(\lambda_k \in \mathbb{K},\ k = 1, ..., n)$ (vrd. sissejuhatus). Kui vektorruumi X puhul see tingimus on mingi $n \in \mathbb{N}$ korral täidetud, siis öeldakse, et X on lõplikumõõtmeline ja märgitakse $\dim X < \infty$.

Eralduvad n-mõõtmelised TVR-d on omavahel isomorfsed. Teatavasti on lõplikumõõtmelises vektorruumis kõik normid ekvivalentsed. Järgmise lause kohaselt võib sedasama väita ka selliste eralduvate topoloogiate kohta, mis muudavad lõplikumõõtmelise vektorruumi topoloogiliseks vektorruumiks. Me tähistame sümboliga m_n kõigi n-mõõtmeliste vektorite $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$ normeeritud ruumi, kus norm on defineeritud seosega $\|\xi\| := \max_{1 \le i \le n} |\xi_i|$. Olgu C selle normeeritud ruumi lahtine ühikkera, s.t. $C := \{\xi \in m_n \mid \max_{1 \le i \le n} |\xi_i| < 1\}$.

Lause 4.6 *Olgu X suvaline n-mõõtmeline vektorruum üle korpuse $\mathbb{K}$. Kui τ on selline topoloogia, et (X, τ) on eralduv TVR, siis (X, τ) on isomorfne TVR-ga m_n, mis on defineeritud üle sama korpuse $\mathbb{K}$.*

Tõestus. Olgu $\{e_1, ..., e_n\}$ vektorruumi X algebraline baas. Näitame, et kujutus

$$T : m_n \to X, \quad \xi \mapsto \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$$

korraldab TVR-de m_n ja X vahel isomorfismi. Ilmselt T on lineaarne ja bijektiivne (põhjendada!)✠. Liitmise ja skalaariga korrutamise pidevusest TVR-s X tuleneb kujutuse T pidevus: kui $\xi^{(\alpha)} \to 0_{m_n}$ ruumis m_n, siis iga $i \in \{1, ..., n\}$ korral $\xi_i^{(\alpha)} \to 0$, mistõttu $\xi_i^{(\alpha)} e_i \to 0e_i = 0_X$ ja seega $T\xi^{(\alpha)} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^{(\alpha)} e_i \to 0_X$. Pöördkujutuse T^{-1} pidevuse kontrollimiseks näitame, et leidub selline τ-nulliümbrus U, mille T^{-1} teisendab ruumi m_n ühikkerasse C, s.t. $U \subset T(C) = \{x \in X \mid \|T^{-1}x\| < 1\}$. Kuna T on pidev ja $\{\xi \in m_n \mid \max_{1 \le i \le n} |\xi_i| = 1\}$ kui tõkestatud kinnine alamhulk lõplikumõõtmelises normeeritud ruumis m_n on kompaktne, siis $S := \{x \in X \mid \|T^{-1}x\| = 1\}$ on kompaktne ning seega kinnine ruumis (X, τ). Nullelement hulka S ei kuulu, seetõttu saab valida tasakaalus lahtise nulliümbruse U omadusega $U \cap S = \emptyset$. Osutub, et $U \subset T(C)$. Tõepoolest, kui oletada, et leidub mingi $x \in U \setminus T(C)$, siis $\|T^{-1}x\| \ge 1$ ja $y := \frac{x}{\|T^{-1}x\|} \in S \cap U$ (põhjendada!)✠, mis on vastuolus nulliümbruse U valikuga. ■

Järeldus 4.7 *Eralduvas TVR-s X on iga lõplikumõõtmeline alamruum Y kinnine.*

Tõestus. Olgu $x \in \overline{Y}$ ja $Y_0 := \text{span}\,(Y \cup \{x\})$. Kuna $\dim Y_0 < \infty$, siis lause 4.6 põhjal on Y_0 topoloogilise vektorruumina samastatav Banachi ruumiga m_n mingi $n \in \mathbb{N}$ korral. Ka TVR-s Y_0 on x alamruumi Y puutepunkt (põhjendada!)✠, kuid samal ajal on Y kui lõplikumõõtmelise normeeritud ruumi Y_0 alamruum selles kinnine. Siit järeldub $x \in Y$. ■

Lokaalselt kompaktne eralduv TVR on lõplikumõõtmeline. Funktsionaalanalüüsi kursusest teame, et *lõplikumõõtmelises* normeeritud ruumis on iga kinnine tõkestatud alamhulk (muuhulgas ka kinnine ühikkera) kompaktne. Seega on selline ruum lokaalselt kompaktne. Järgmine lause ütleb, et lokaalne kompaktsus on omane ainult lõplikumõõtmelistele topoloogilistele vektorruumidele.

Lause 4.8 *Iga lokaalselt kompaktne eralduv TVR X on lõplikumõõtmeline.*

Tõestus. Olgu V kompaktne nulliümbrus TVR-s X, üldisust kitsendamata võime eeldada, et V on tasakaalus (põhjendada!)✠. Kuna V on tõkestatud hulk, siis $\mathfrak{B} := \{2^{-n}V \mid n \in \mathbb{N}\}$ on nulliümbruste baas (vrd. ülesanne 1). Et V on täielikult tõkestatud (vrd. teoreem 3.3), siis saab valida sellised elemendid $x_1, ..., x_m \in V$, et $V \subset \bigcup_{i=1}^{m} \left(x_i + \frac{1}{2}V\right) = \{x_1, ..., x_m\} + \frac{1}{2}V$. Moodustame alamruumi $Y := \operatorname{span}\{x_1, ..., x_m\}$, siis $\dim Y \leq m$. Me *näitame järgnevalt, et* $V \subset Y$, millest hulga V neelavuse tõttu tuleneb $X = Y$ ning järelikult ka $\dim X < \infty$.

Järelduse 4.7 kohaselt on Y kinnine alamruum TVR-s X, kusjuures $V \subset Y + \frac{1}{2}V$. Pidades silmas, et $\lambda Y = Y$ iga $\lambda \neq 0$ korral, saame $\frac{1}{2}V \subset Y + \frac{1}{4}V$, ja seega

$$V \subset Y + \frac{1}{2}V \subset Y + Y + \frac{1}{4}V = Y + \frac{1}{4}V.$$

Nii jätkates saame sisalduvuse

$$V \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(Y + 2^{-n}V\right) =: Z.$$

Paneme tähele, et $Z \subset \overline{Y}$. Tõepoolest, kui $x \in Z$ ja $W := 2^{-n}V \in \mathfrak{B}$, siis $x \in Y + W$, mistõttu $x = y + w$, kus $y \in Y$, $w \in W$. Kuna $x - w \in (x + W) \cap Y$, siis punkti x iga ümbrus lõikab hulka Y, tähendab, $x \in \overline{Y}$. Kokkuvõttes saame $V \subset Z \subset \overline{Y} = Y$. Lause on tõestatud. ■

4.3 Näiteid

Selle peatüki lõpetame kolme olulise näitega topoloogilistest vektorruumidest.

Näide 1. Olgu $C(\mathbb{C})$ kõigi komplekstasandil $\mathbb{C}$ pidevate funktsioonide hulk, s.t.

$$C(\mathbb{C}) = \{x = x(t) \mid x : \mathbb{C} \to \mathbb{K} \text{ on pidev}\}.$$

Ilmselt on $C(\mathbb{C})$ vektorruum, milles liitmine ja skalaariga korrutamine on defineeritud punktiviisi: suvaliste $x, y \in C(\mathbb{C})$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$ puhul $(x + y)(t) := x(t) + y(t)$ ja $(\lambda x)(t) := \lambda x(t)$ $(t \in \mathbb{C})$. Tähistame

$$V_{n,i} := \{x \in C(\mathbb{C}) \mid |x(t)| \leq 1/i, \text{ kui } |t| \leq n\}$$

ja näitame, et alamhulkade süsteem $\mathfrak{B}:=\{V_{n,i} \mid n, i \in \mathbb{N}\}$ rahuldab tingimusi (NB1) - (NB4). Nende kontrollimiseks paneme kõigepealt tähele, et (kontrollida!)✠

$$n \leq m \Rightarrow V_{m,i} \subset V_{n,i} \quad (i \in \mathbb{N}),$$
$$i \leq j \Rightarrow V_{n,j} \subset V_{n,i} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

(NB1): Hulkade $V_{k,j}$ ja $V_{l,r}$ korral tähistame $n := \max\{k, l\}$ ning $i := \max\{j, r\}$, siis $V_{n,i} \subset V_{k,j} \cap V_{l,r}$.

(NB2): Kui $|\lambda| \leq 1$, siis iga $x \in V_{n,i}$ korral

$$|(\lambda x)(t)| = |\lambda| |x(t)| \leq |x(t)| \leq 1/i \quad (|t| \leq n),$$

s.t. $\lambda x \in V_{n,i}$. Tähendab, $V_{n,i}$ on tasakaalus hulk.

(NB3): Olgu $x \in C(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ ning tähistame $M := \max\{|x(t)| \mid |t| \leq n\}$ ja $\delta := \frac{1}{Mi}$ fikseeritud $V_{n,i} \in \mathfrak{B}$ korral. Siis

$$|(\delta x)(t)| = \frac{1}{Mi} |x(t)| \leq \frac{1}{i} \quad (|t| \leq n),$$

s.t. $\delta x \in V_{n,i}$. Seega on $V_{n,i}$ neelav hulk.

(NB4): Võtame $V_{n,i} \in \mathfrak{B}$ korral $U := V_{n,2i}$, siis $U + U \subset V_{n,i}$. Tõepoolest, kõikide x ja y puhul hulgast U saame $|(x+y)(t)| \leq |x(t)| + |y(t)| \leq \frac{1}{2i} + \frac{1}{2i} = \frac{1}{i}$ $(|t| \leq n)$, s.t. $x + y \in V_{n,i}$.

Kokkuvõttes oleme tõestanud, et $C(\mathbb{C})$ on TVR nulliümbruste baasiga $\mathfrak{B}$. Kuna $\mathfrak{B}$ on loenduv süsteem, siis $C(\mathbb{C})$ on metriseeruv.

Näide 2. Olgu $S[a,b]$ kõigi lõigus $[a,b]$ Lebesgue'i mõttes mõõtuvate peaaegu kõikjal lõplike reaalsete väärtustega funktsioonide hulk. Kui peaaegu kõikjal lõplikud funktsioonid $x = x(t)$ ja $y = y(t)$ on mõõtuvad lõigul $[a,b]$, siis ka $x + y$ ja λx $(\lambda \in \mathbb{R})$ on peaaegu kõikjal lõplikud ja mõõtuvad. Teiste sõnadega, $S[a,b]$ on vektorruum. Lepime kokku, et me samastame selle ruumi punktidena funktsioonid, mis langevad kokku peaaegu kõikjal:

$$x = y :\Leftrightarrow \operatorname{mes}\{t \in [a,b] \mid x(t) \neq y(t)\} = 0.$$

Tähistame

$$V_{n,i} := \{x \in S[a,b] \mid \operatorname{mes}\{t \in [a,b] \mid |x(t)| > n\} < 1/i\} \quad (n, i \in \mathbb{N}),$$

siis (kontrollida!)✠

$$n \leq m \Rightarrow V_{n,i} \subset V_{m,i} \quad (i \in \mathbb{N}),$$
$$i \leq j \Rightarrow V_{n,j} \subset V_{n,i} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Näitame, et tingimused (NB1) - (NB4) on süsteemi $\mathfrak{B} := \{V_{n,i} \mid n, i \in \mathbb{N}\}$ korral rahuldatud.

(NB1): Hulkade $V_{k,j}$ ja $V_{l,r}$ korral olgu $n := \min\{k, l\}$ ja $i := \max\{j, r\}$, siis $V_{n,i} \subset V_{k,j} \cap V_{l,r}$.

(NB2): Kui $|\lambda| \leq 1$, siis iga $x \in V_{n,i}$ korral

$$\{t \in [a,b] \mid |\lambda x(t)| > n\} \subset \{t \in [a,b] \mid |x(t)| > n\},$$

mistõttu

$$\operatorname{mes}\{t \in [a,b] \mid |\lambda x(t)| > n\} \leq \operatorname{mes}\{t \in [a,b] \mid |x(t)| > n\} < 1/i.$$

Tähendab, $\lambda x \in V_{n,i}$ ja $V_{n,i}$ on tasakaalus hulk.

(NB3): Olgu $x \in S[a,b] \setminus \{0\}$ ja $V_{n,i} \in \mathfrak{B}$ fikseeritud. Kuna $x = x(t)$ on peaaegu kõikjal lõplik funktsioon, siis leidub selline $n_0 \in \mathbb{N}$, et $\operatorname{mes}\{t \in [a,b] \mid |x(t)| > n_0\} < \frac{1}{i}$. Võttes $\delta := \frac{n}{n_0}$, saame

$$\begin{aligned}\operatorname{mes}\{t \in [a,b] \mid |\delta x(t)| > n\} &= \operatorname{mes}\left\{t \in [a,b] \mid \frac{n}{n_0} |x(t)| > n\right\} \\ &= \operatorname{mes}\{t \in [a,b] \mid |x(t)| > n_0\} < \frac{1}{i},\end{aligned}$$

järelikult $\delta x \in V_{n,i}$. Niisiis on hulk $V_{n,i}$ neelav.

(NB4): Tähistame hulga $V_{n,i}$ korral $U := V_{\left[\frac{n}{2}\right],2i}$. Osutub, et $U + U \subset V_{n,i}$. Tõepoolest, lähtudes suvaliste $x, y \in U$ korral seostest

$$\{t \in [a,b] \mid |x(t) + y(t)| > n\} \subset \left\{t \in [a,b] \mid |x(t)| > \left[\frac{n}{2}\right]\right\} \cup \left\{t \in [a,b] \mid |y(t)| > \left[\frac{n}{2}\right]\right\}$$

(paneme tähele, et kui $|x(t)| \leq \left[\frac{n}{2}\right]$ ja $|y(t)| \leq \left[\frac{n}{2}\right]$, siis $|x(t) + y(t)| \leq |x(t)| + |y(t)| \leq n$), saame mõõdu aditiivsuse tõttu

$$\begin{aligned}
&\operatorname{mes}\{t \in [a,b] \mid |x(t) + y(t)| > n\} \\
&\leq \operatorname{mes}\left\{t \in [a,b] \mid |x(t)| > \left[\frac{n}{2}\right]\right\} + \operatorname{mes}\left\{t \in [a,b] \mid |y(t)| > \left[\frac{n}{2}\right]\right\} \\
&\leq \frac{1}{2i} + \frac{1}{2i} = \frac{1}{i}
\end{aligned}$$

ehk $x + y \in V_{n,i}$.

Kokkuvõttes oleme tõestanud, et $S[a,b]$ on metriseeruv TVR nulliümbruste baasiga $\mathfrak{B}$. Lihtne on veenduda, et elementide jada (x_m) koondub nulliks TVR-is $S[a,b]$ parajasti siis, kui

$$\forall n, i \in \mathbb{N} \;\; \exists N \in \mathbb{N}\colon\; m > N \Rightarrow \operatorname{mes}\{t \in [a,b] \mid |x_m(t)| > n\} < \frac{1}{i}.$$

Viimane tingimus tähendab funktsioonide jada (x_m) koonduvust nulliks *mõõdu järgi*. Niisiis, *TVR-i $S[a,b]$ topoloogiline koonduvus langeb kokku funktsionaaljada mõõdu järgi koonduvusega lõigul $[a,b]$.*

Märkus. Defineerime vektorruumis $S[a,b]$ lisaks vaadeldud topoloogiale, mida me siin tähistame τ, veel teise topoloogia τ_0 pseudonormiga $|\ |$, kus $|x| := \int_a^b \frac{|x(t)|}{|x(t)|+1} dt$ $(x \in S[a,b])$. Olgu (x_n) elementide jada vektorruumis $S[a,b]$. Vahetu kontroll näitab, et

$$x_n \to 0 \text{ TVR-s } (S[a,b], \tau_0) \Leftrightarrow x_n(t) \to 0 \text{ mõõdu järgi } \Leftrightarrow x_n \to 0 \text{ TVR-s } (S[a,b], \tau).$$

Seetõttu on nii ühikkujutus $i : (S[a,b], \tau) \to (S[a,b], \tau_0)$ kui ka tema pöördkujutus $i^{-1} : (S[a,b], \tau_0) \to (S[a,b], \tau)$ pidevad, mis tähendab, et TVR-d $(S[a,b], \tau)$ ja $(S[a,b], \tau_0)$ on isomorfsed ehk $\tau = \tau_0$. Osutub, et TVR $(S[a,b], \tau)$ (ja seega ka $(S[a,b], \tau_0)$) on täielik.

Näide 3. Olgu ω kõigi arvjadade $\xi = (\xi_k)$ hulk, s.t.

$$\omega = \{\xi = (\xi_k) \mid \xi_k \in \mathbb{K} \;\; (k \in \mathbb{N})\}.$$

Hulk ω on vektorruum, kui defineerida vektorruumi tehted selles hulgas koordinaaditi:

$$\xi + \eta := (\xi_k + \eta_k), \quad \lambda\xi := (\lambda\xi_k) \quad (\xi, \eta \in \omega, \; \lambda \in \mathbb{K}).$$

Tähistame

$$V_{n,i} := \left\{\xi \in \omega \mid |\xi_k| \leq \frac{1}{i} \quad (k = 1, ..., n)\right\} \tag{4.6}$$

ja veendume✠, et

$$\begin{aligned}
m \leq n &\Rightarrow V_{n,i} \subset V_{m,i} \quad (i \in \mathbb{N}), \\
i \leq j &\Rightarrow V_{n,j} \subset V_{n,i} \quad (n \in \mathbb{N}).
\end{aligned}$$

Vahetu kontroll näitab (vrd. ülesanne 2), et $\mathfrak{B} := \{V_{n,i} \mid n, i \in \mathbb{N}\}$ on nulliümbruste baas mingis topoloogias τ_ω, kusjuures (ω, τ_ω) on meetriline topoloogiline vektorruum.

Ülesanne 2. Kontrollida, et seosega (4.6) määratud $\mathfrak{B} := \{V_{n,i} \mid n, i \in \mathbb{N}\}$ rahuldab tingimusi (NB1) - (NB4).

Ülesanne 3. Tõestada, et TVR-s (ω, τ_ω) on koonduvus samaväärne koonduvusega koordinaatide järgi, s.t.

$$\xi^{(n)} \to 0\,(\tau_\omega) \Leftrightarrow \xi_k^{(n)} \to 0 \text{ iga } k \in \mathbb{N} \text{ korral.}$$

Ülesanne 4. Tõestada, et TVR (ω, τ_ω) on täielik.

5 Kumerad hulgad ja poolnormid

5.1 Kumerad alamhulgad vektorruumis

Kumera hulga mõiste, mille me käesolevas peatükis defineerime, on oma *olemuselt algebraline* ega sõltu topoloogiast. Sellest hoolimata mängivad just kumerad hulgad topoloogiliste vektorruumide teoorias erakordselt tähtsat rolli.

Definitsioon. Vektorruumi X alamhulka E nimetatakse *kumeraks*, kui iga elementide paari $x, y \in E$ puhul kõik elemendid $\lambda x + (1-\lambda)\, y \ \ (0 \le \lambda \le 1)$ kuuluvad hulka E. Tasakaalus kumerat hulka nimetatakse *absoluutselt kumeraks.*

Definitsiooni kohaselt on $E \subset X$ kumer parajasti siis, kui $\lambda E + (1-\lambda)\, E \subset E$ iga $\lambda \in [0,1]$ korral. Geomeetriliselt tähendab hulga E kumerus seda, et *koos iga oma kahe punktiga x ja y sisaldab E ka neid punkte ühendava sirglõigu $\{\lambda x + (1-\lambda)\, y \mid \lambda \in [0,1]\}$ vektorruumis X.*

Lause 5.1 *Vektorruumi X alamhulk E on absoluutselt kumer parajasti siis, kui $\lambda x + \mu y \in E$ iga elementide paari $x, y \in E$ ja arvude $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ korral, mis rahuldavad tingimust $|\lambda| + |\mu| \le 1$.*

Tõestus. *Tarvilikkus.* Olgu E tasakaalus kumer hulk. Võtame punktid $x, y \in E$ ning arvud $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ omadusega $|\lambda| + |\mu| \le 1$. Kui üks arvudest λ ja μ on null, siis tasakaalustatuse tingimusest saame $\lambda x + \mu y \in E$. Eeldame, et mõlemad arvud on nullist erinevad, sel juhul $\frac{\lambda}{|\lambda|} x,\ \frac{\mu}{|\mu|} y \in E$. Peale selle

$$\frac{|\lambda|}{|\lambda| + |\mu|} + \frac{|\mu|}{|\lambda| + |\mu|} = 1,$$

millest hulga E kumeruse tõttu saame seose

$$\frac{1}{|\lambda| + |\mu|}\,(\lambda x + \mu y) = \frac{|\lambda|}{|\lambda| + |\mu|}\frac{\lambda}{|\lambda|} x + \frac{|\mu|}{|\lambda| + |\mu|}\frac{\mu}{|\mu|} y \in E.$$

Kasutades veel kord asjaolu, et hulk E on tasakaalus, ning pidades silmas võrratust $|\lambda| + |\mu| \le 1$, jõuame seoseni

$$\lambda x + \mu y \in (|\lambda| + |\mu|)\, E \subset E.$$

Piisavus tuleneb vahetult vastavatest definitsioonidest (kontrollida!)✠. ■

Toodud definitsioonidest järelduvad vahetult ka järgmised vaadeldavate mõistetega seotud omadused.

Ülesanne 1. Kui vektorruumi X alamhulgad E_α $(\alpha \in \Gamma)$ on kumerad (absoluutselt kumerad), siis ka $\bigcap_{\alpha \in \Gamma} E_\alpha$ on kumer (absoluutselt kumer) hulk. Kui alamhulgad E_1 ja E_2 on kumerad (absoluutselt kumerad), siis ka hulgad $E_1 + E_2$ ja λE_1 on kumerad (absoluutselt kumerad).

Ülesanne 2. Olgu X ja Z vektorruumid ning $T : X \to Z$ lineaarne kujutus. Kui $E \subset X$ on (absoluutselt) kumer, siis ka $T\,(E) \subset Z$ on (absoluutselt) kumer.

Alamhulga (absoluutselt) kumer kate. Vektorruumi antud alamhulga puhul kerkib üles küsimus: *kuidas hulgale elementide juurdelisamise teel konstrueerida kumer hulk?* Niisuguse nn. kumera (vastavalt absoluutselt kumera) katte kirjeldamisel on lähtekohaks järgmine lemma.

Lemma 5.2 *Olgu E vektorruumi X alamhulk.*

(a) *Kui E on kumer ning $\lambda_1, ..., \lambda_n$ on sellised mittenegatiivsed reaalarvud, et $\lambda_1+...+\lambda_n = 1$, siis $\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_n x_n \in E$ suvaliste punktide $x_1, ..., x_n \in E$ korral.*

(b) *Kui E on absoluutselt kumer ning $\lambda_1, ..., \lambda_n$ on sellised skalaarid, et $|\lambda_1|+...+|\lambda_n| \leq 1$, siis $\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_n x_n \in E$ suvaliste punktide $x_1, ..., x_n \in E$ korral.*

Tõestus. Esitame siinkohal väite (a) tõestuse, väide (b) tõestatakse analoogiliselt, mõlemal juhul kasutatakse matemaatilise induktsiooni meetodit. Juhul $n = 2$ väide ilmselt kehtib, sel juhul taandub ta kumera hulga definitsioonile. Oletame, et väide on õige, kui $n = m - 1$, ja näitame, et siis kehtib ta ka juhul $n = m$.

Olgu $\lambda_1, ..., \lambda_m \geq 0$ ning $\lambda_1 + ... + \lambda_m = 1$, tähistame $\lambda := \lambda_1 + ... + \lambda_{m-1}$. Võtame suvalised $x_1, ..., x_m \in E$ ja paneme tähele, et kui $\lambda = 0$, siis $\lambda_m = 1$ ning $\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_m x_m = \lambda_m x_m = x_m \in E$. Kui $\lambda \neq 0$, siis saame seose $\sum_{i=1}^{m-1} \frac{\lambda_i}{\lambda} = 1$ tõttu, et

$$\sum_{i=1}^{m-1} \frac{\lambda_i}{\lambda} x_i \in E.$$

Kuna $\lambda + \lambda_m = 1$, siis tänu hulga E kumerusele kehtib

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i = \lambda \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\lambda_i}{\lambda} x_i + \lambda_m x_m \in E.$$

Seega on väide (a) tõestatud. ■

Definitsioon. Vektorruumi X mittetühja hulga E *kumeraks katteks* nimetatakse hulka

$$\operatorname{conv} E := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \mid \lambda_1, ..., \lambda_n \geq 0,\ \lambda_1 + ... + \lambda_n = 1,\ x_1, ..., x_n \in E,\ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Hulka

$$\operatorname{absconv} E := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \mid \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K},\ |\lambda_1| + ... + |\lambda_n| \leq 1,\ x_1, ..., x_n \in E,\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

nimetatakse hulga E *absoluutselt kumeraks katteks.*

Ülesanne 3. Veenduda, et $E \subset \operatorname{conv} E \subset \operatorname{absconv} E \subset \operatorname{span} E$.

Ülesanne 4. Näidata, et kui E on tasakaalus hulk vektorruumis X, siis ka $\operatorname{conv} E$ on tasakaalus ja $\operatorname{absconv} E = \operatorname{conv} E$.

Märgime, et $\operatorname{conv} E$ on kumer ning $\operatorname{absconv} E$ on absoluutselt kumer hulk. Et veenduda näiteks hulga $\operatorname{conv} E$ kumeruses, võtame tema suvalised punktid $x = \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_n x_n$ ja $y = \mu_1 y_1 + ... + \mu_m y_m$, kus

$$0 \leq \lambda_i, \mu_k \leq 1, \quad x_i, y_k \in E \quad (i = 1, ..., n;\ k = 1, ..., m)\,, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{k=1}^{m} \mu_k = 1.$$

Kui λ ja μ on mittenegatiivsed reaalarvud omadusega $\lambda + \mu = 1$, siis

$$\lambda x + \mu y = \sum_{i=1}^{n} \lambda\lambda_i x_i + \sum_{k=1}^{m} \mu\mu_k y_k,$$

kusjuures $\lambda\lambda_i \geq 0$ $(i = 1, ..., n)$, $\mu\mu_k \geq 0$ $(k = 1, ..., m)$ ja $\sum_{i=1}^{n} \lambda\lambda_i + \sum_{k=1}^{m} \mu\mu_k = \lambda + \mu = 1$. Niisiis, $\lambda x + \mu y \in \operatorname{conv} E$, mis tähendabki, et $\operatorname{conv} E$ on kumer hulk.

Pole raske tõestada, et $\operatorname{conv} E$ on vähim kumer hulk, mis sisaldab hulka E. Tõepoolest, kui F on kumer ja $E \subset F$, siis iga $x = \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_n x_n \in \operatorname{conv} E$ puhul, kus

$$0 \leq \lambda_i \leq 1, \quad x_i \in E \ \subset F \quad (i = 1, ..., n)\,, \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1,$$

kehtib lemma 5.2(a) põhjal $x \in F$. Samamoodi veendutakse, et absconv E on vähim absoluutselt kumer hulk, mis sisaldab hulka E.

Kumera hulga sulund on kumer. Siiani vaatlesime kumeraid ja absoluutselt kumeraid hulki suvalises vektorruumis. Näitame järgnevalt, et topoloogilises vektorruumis kanduvad alamhulga kumerus ja absoluutne kumerus üle ka tema sulundile.

Lause 5.3 *Kui E on TVR-i X kumer alamhulk, siis ka tema sulund $\overline{E}$ on kumer.*

Tõestus. Võtame $x, y \in \overline{E}$ ning $\lambda, \mu \in [0, 1]$, et $\lambda + \mu = 1$, ja tähistame $z := \lambda x + \mu y$. Liitmise pidevuse tõttu saab punkti z iga ümbruse V_z jaoks leida punktide λx ja μy ümbrused $V_{\lambda x} = \lambda x + U$ ja $V_{\mu y} = \mu y + V$, et $V_{\lambda x} + V_{\mu y} \subset V_z$ ning U ja V on tasakaalus nulliümbrused TVR-s X. Eelduse kohaselt

$$(x + U) \cap E \neq \emptyset, \quad (y + V) \cap E \neq \emptyset,$$

seega leiduvad hulgas E punktid x' ja y', et $x' \in x + U$ ning $y' \in y + V$. Kuna E on kumer, siis $\lambda x' + \mu y' \in E$, teisalt kehtib (peame silmas, et $\lambda U \subset U$ ja $\mu V \subset V$)

$$\lambda x' + \mu y' \in (\lambda x + \lambda U) + (\mu y + \mu V) \subset (\lambda x + U) + (\mu y + V) \subset V_z.$$

Niisiis, $\lambda x' + \mu y' \in V_z \cap E \neq \emptyset$, mis ütlebki, et $z \in \overline{E}$. Seega on $\overline{E}$ kumer hulk. ∎

Järeldus 5.4 *Absoluutselt kumera hulga sulund on absoluutselt kumer.*

Tõestus. Kui E on absoluutselt kumer hulk, siis $\overline{E}$ on kumer ja tasakaalus (vrd. pt. 2, ülesanne 14), seega absoluutselt kumer. ∎

Ülesanne 5. Kui G on TVR-i X lahtine alamhulk, siis ka conv G ja absconv G on lahtised hulgad.

Olgu $E_1, ..., E_n$ absoluutselt kumerad hulgad vektorruumis X. Näitame, et

$$\operatorname{absconv} \bigcup_{i=1}^{n} E_i = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \mid \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \leq 1,\ x_i \in E_i \ \ (i = 1, ..., n) \right\}. \tag{5.1}$$

Tähistame parempoolse hulga seoses (5.1) tähega E, lihtne on näha, et $E \subset \operatorname{absconv} \bigcup_{i=1}^{n} E_i$ (selgitada!)✠. Olgu $x = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k x_k$ hulga absconv $\bigcup_{i=1}^{n} E_i$ suvaline element, seega $\sum_{k=1}^{m} |\lambda_k| \leq 1$ ja $x_k \in \bigcup_{i=1}^{n} E_i$ $(k = 1, ..., m)$. Siis

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k x_k = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k_i} \lambda_j^i x_j^i,$$

kus $x_j^i \in E_i$ $(j = 1, ..., k_i;\ i = 1, ..., n)$ ja λ_j^i on elemendi x_j^i kordaja summas $\sum_{k=1}^{m} \lambda_k x_k$. Tähistame $\alpha_i := \sum_{j=1}^{k_i} \left|\lambda_j^i\right|$ ning $z_i := \sum_{j=1}^{k_i} \frac{\lambda_j^i}{\alpha_i} x_j^i$, siis

$$\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k_i} \left|\lambda_j^i\right| = \sum_{k=1}^{m} |\lambda_k| \leq 1$$

ja $z_i \in E_i$ iga $i = 1, ..., n$ korral (kontrollida!)✠, seetõttu

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k x_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\sum_{j=1}^{k_i} \frac{\lambda_j^i}{\alpha_i} x_j^i \right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i \in E.$$

Valem (5.1) on tõestatud.

Lause 5.5 *Kui $E_1, ..., E_n$ on kompaktsed absoluutselt kumerad hulgad LKR-s X, siis on ka absconv $\bigcup_{i=1}^{n} E_i$ kompaktne hulk.*

Tõestus. Vaatleme kõigi n-mõõtmelist vektorite $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$ Banachi ruumi ℓ_n^1, kus norm on defineeritud seosega $\|\lambda\| := \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|$, tema ühikkera

$$B := \left\{ \lambda \in \ell_n^1 \mid \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| \leq 1 \right\}$$

on kompaktne alamhulk (põhjendada!)✠. Moodustame korrutisruumi $Z := \ell_n^1 \times X \times ... \times X$, milles LKR X esineb komponendina n korda. Alamhulk $B \times E_1 \times ... \times E_n$ on Tihhonovi teoreemi (vt. art. 1.3) põhjal kompaktne hulk korrutisruumis Z. Defineerime kujutuse

$$\Phi : Z \to X, \quad (\lambda_1, ..., \lambda_n;\ x_1, ..., x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i,$$

see on pidev, sest vektorruumi tehted on igas TVR-s pidevad. Paneme tähele, et tänu seosele (5.1) kehtib võrdus

$$\Phi\left(B \times E_1 \times ... \times E_n\right) = \operatorname{absconv} \bigcup_{i=1}^{n} E_i$$

(selgitada!)✠. Teatavasti on pideva kujutuse korral kompaktse hulga kujutis kompaktne, seetõttu ongi absconv $\bigcup_{i=1}^{n} E_i$ LKR-s X kompaktne hulk. ■

5.2 Poolnormid ja Minkowski funktsionaalid

Sublineaarne funktsionaal ja poolnorm. Kumerate hulkade analüütiliseks kirjeldamiseks kasutatakse spetsiaalseid reaalsete väärtustega funktsionaale.

Definitsioon. Olgu X vektorruum. Funktsionaali $p : X \to \mathbb{R}$ omadustega
1) $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ iga $x \in X$ ja $\lambda \geq 0$ korral,
2) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ iga $x, y \in X$ korral
nimetatakse *sublineaarseks.* Kui funktsionaal p rahuldab tingimusi 2) ja
1') $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ iga $x \in X$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$ korral,
siis nimetatakse teda *poolnormiks.*

Ülesanne 6. Näidata, et a) suvalise sublineaarse funktsionaali p puhul $p(0) = 0$ ja

$$|p(x) - p(y)| \leq \max\{p(x - y), p(y - x)\} \quad (x, y \in X); \tag{5.2}$$

b) poolnormi p korral on $p(x) \geq 0$ iga $x \in X$ puhul ning $|p(x) - p(y)| \leq p(x - y)$ $(x, y \in X)$.

Ülesanne 7. Näidata, et kui p on poolnorm, siis $\{x \in X \mid p(x) = 0\}$ on vektoralamruum vektorruumis X.

Ülesanne 8. Näidata, et kui p on poolnorm, siis tema ühikkerad $\{x \in X \mid p(x) < 1\}$ ja $\{x \in X \mid p(x) \leq 1\}$ vektorruumis X on absoluutselt kumerad ja neelavad.

Hulga Minkowski funktsionaal. Definitsioon. Olgu U neelav alamhulk vektorruumis X. Funktsionaali

$$p_U : X \to \mathbb{R}, \, x \mapsto \inf\{\mu > 0 \mid x \in \mu U\}$$

nimetatakse hulga U *Minkowski funktsionaaliks.*

Ülesanne 9. Näidata, et $p_U(0) = 0$ ja $p_U(x) < \infty$ iga $x \in X$ korral.

Ülesanne 10. Näidata, et $p_U(x) \geq 0$ iga $x \in X$ korral.

Minkowski funktsionaali kõige olulisemad ja tähelepanuväärsemad omadused formuleerime järgmises lauses.

Lause 5.6 *Olgu U vektorruumi X neelav alamhulk.*
(a) *Iga $x \in X$ ja $\lambda \geq 0$ korral on $p_U(\lambda x) = \lambda p_U(x)$.*
(b) *Kui U on tasakaalus, siis $p_U(\lambda x) = |\lambda| p_U(x)$ iga $x \in X$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$ korral.*
(c) *Kui U on kumer, siis*

$$p_U(x + y) \leq p_U(x) + p_U(y) \quad (x, y \in X) \tag{5.3}$$

ning

$$\{x \in X \mid p_U(x) < 1\} \subset U \subset \{x \in X \mid p_U(x) \leq 1\}. \tag{5.4}$$

Tõestus. (a) Kui $\lambda = 0$, siis $0 = p_U(0x) = 0p_U(x)$. Juhul $\lambda > 0$ saame

$$\begin{aligned} p_U(\lambda x) &= \inf\{\mu > 0 \mid \lambda x \in \mu U\} = \inf\left\{\mu > 0 \mid x \in \frac{\mu}{\lambda}U\right\} \\ &= \lambda \inf\left\{\frac{\mu}{\lambda} > 0 \mid x \in \frac{\mu}{\lambda}U\right\} = \lambda p_U(x). \end{aligned}$$

(b) Selge, et väide kehtib juhul $\lambda = 0$. Tasakaalus hulga U ja suvalise nullist erineva arvu λ korral kehtib $\lambda U = |\lambda| U$, seetõttu

$$\begin{aligned} p_U(\lambda x) &= \inf\left\{\mu > 0 \mid x \in \frac{\mu}{\lambda}U\right\} = \inf\left\{\mu > 0 \mid x \in \frac{\mu}{|\lambda|}U\right\} \\ &= |\lambda| \inf\left\{\frac{\mu}{|\lambda|} > 0 \mid x \in \frac{\mu}{|\lambda|}U\right\} = |\lambda| p_U(x) \quad (x \in X). \end{aligned}$$

(c) Eeldame, et U on kumer hulk. Suvaliste elementide $x, y \in X$ ja arvu $\varepsilon > 0$ puhul valime $\lambda > 0$ ning $\mu > 0$ nii, et

$$p_U(x) < \lambda < p_U(x) + \frac{\varepsilon}{2}, \quad p_U(y) < \mu < p_U(y) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Kuna $p_U(x) < \lambda$, siis $x \in \lambda U$ ehk $\frac{1}{\lambda}x \in U$, samuti kehtib $\frac{1}{\mu}y \in U$. Seejuures

$$\frac{1}{\lambda + \mu}(x + y) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\frac{x}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda + \mu}\frac{y}{\mu} \in U$$

tänu hulga U kumerusele. Niisiis, $x + y \in (\lambda + \mu) U$, järelikult $p_U(x + y) \leq \lambda + \mu \leq p_U(x) + p_U(y) + \varepsilon$ iga $\varepsilon > 0$ korral, millest tulenebki (5.3).

Kui $p_U(x) < 1$, siis saame leida $\mu \in (0, 1)$ omadusega $x \in \mu U$ ehk $\frac{1}{\mu}x \in U$. Hulga U kumerust arvestades saame $x = \mu\frac{1}{\mu}x + (1 - \mu) 0 \in U$ (peame silmas, et kuna U on neelav hulk, siis $0 \in U$), niisiis kehtib esimene sisalduvustest (5.4) Teise tõestuseks märgime, et kui $x \in U = 1U$, siis $p_U(x) \leq 1$. ■

Lauses 5.6 toodud omadustest $(a) - (c)$ tuleneb järgmine väide.

Järeldus 5.7 *Neelava kumera alamhulga $U \subset X$ Minkowski funktsionaal p_U on positiivne sublineaarne funktsionaal, kusjuures kehtivad sisalduvused (5.4). Kui U on sealjuures tasakaalus, siis p_U on poolnorm.*

Ülesanne 11. Olgu $p : X \to \mathbb{R}$ poolnorm ja $U := \{x \in X \mid p(x) \leq 1\}$ (kinnine ühikkera). Veenduda, et hulga U Minkowski funktsionaal on p, s.t. $p_U = p$.

Topoloogilises vektorruumis iseloomustab kumera neelava alamhulga **Minkowski funktsionaali pidevus** selle hulga topoloogilisi omadusi. Nende seoste täpsemaks kirjeldamiseks vajame järgmist lemmat.

Lemma 5.8 *Olgu X TVR. Kui sublineaarne funktsionaal $p : X \to \mathbb{R}$ on pidev punktis 0, siis on ta pidev ruumis X.*

Tõestus. Olgu $\varepsilon > 0$. Pidevuse tõttu punktis 0 leidub niisugune tasakaalus nulliümbrus V, et $p(v) \leq \varepsilon$ iga $v \in V$ puhul. Suvalise $x \in X$ puhul on $W := x + V$ tema ümbrus ning $x - z$ ja $z - x$ kuuluvad nulliümbrusse V iga $z \in W$ korral. Seega $|p(x) - p(z)| \leq \max\{p(x-z), p(z-x)\} \leq \varepsilon$ (vrd. (5.2)), mis tähendabki funktsionaali p pidevust punktis x. ■

Lemma 5.8 abil tõestame selle artikli **põhitulemuse.**

Teoreem 5.9 *TVR-i X neelav kumer alamhulk U on nulliümbrus parajasti siis, kui Minkowski funktsionaal p_U on pidev. Kui U on lahtine, siis kehtib seos $U = \{x \in X \mid p_U(x) < 1\}$, kui U on kinnine, siis $U = \{x \in X \mid p_U(x) \leq 1\}$.*

Tõestus. Eeldame, et U on kumer nulliümbrus TVR-s X, ning näitame, et p_U on pidev punktis 0, lemma 5.8 põhjal on ta sel juhul pidev kogu ruumis X. Tähistame suvalise $\varepsilon > 0$ korral $V := \varepsilon U$. Kuna V on nulliümbrus ja $p_U(x) = p_U(\varepsilon u) = \varepsilon p_U(u) \leq \varepsilon$, kus $x = \varepsilon u \in V$, $u \in U$ (vrd. (5.4)), siis p_U on pidev punktis 0.

Vastupidi, kui eeldada, et kumera neelava alamhulga U Minkowski funktsionaal p_U on pidev, siis ruumis $\mathbb{R}$ lahtise hulga $(-1,1)$ originaal $p_U^{-1}((-1,1))$ on lahtine. Seejuures (vrd. (5.4))

$$0 \in p_U^{-1}((-1,1)) = \{x \in X \mid p_U(x) < 1\} \subset U,$$

niisiis on U nulliümbrus.

Kui eeldada, et U on lahtine, siis iga $x \in U$ on tema sisepunkt, mistõttu leidub nulliümbrus V omadusega $x + V \subset U$. Kuna V on neelav, siis saame valida $\delta > 0$ selliselt, et $\delta x \in V$. Siit tuleneb $(1+\delta)x = x + \delta x \in x + V \subset U$. Niisiis,

$$p_U(x) \leq \frac{1}{1+\delta} < 1 \text{ iga } x \in U \text{ puhul},$$

s.t. $U \subset \{x \in X \mid p_U(x) < 1\}$. Lause 5.6($c$) põhjal järeldub siit, et vaadeldavad hulgad langevad kokku.

Kui U on kinnine ning $p_U(x) \leq 1$, siis suvalise $\mu \in (0,1)$ korral on $p_U(\mu x) = \mu p_U(x) \leq \mu < 1$, s.t., $\mu x \in \{z \in X \mid p_U(z) < 1\} \subset U$. Moodustame pere $(\mu x)_{\mu \in (0,1)}$ ja paneme tähele, et $\mu x \to 1x = x$ tänu skalaariga korrutamise pidevusele TVR-s X. Kuna $\mu x \in U$ ($\mu \in (0,1)$), siis $x \in \overline{U} = U$. Me tõestasime sisalduvuse $\{x \in X \mid p_U(x) \leq 1\} \subset U$, kust lause 5.6($c$) põhjal tuleneb nende hulkade võrdus. ■

6 Hahn-Banachi teoreem

6.1 Hahn-Banachi teoreem reaalse vektorruumi puhul

Kõigepealt lepime kokku kahe olulise tähistuse osas, mis puudutavad lineaarseid funktsionaale topoloogilises vektorruumis.

TVR-i kaasruum. Vektorruumi X **algebraliseks kaasruumiks** nimetatakse kõigi lineaarsete funktsionaalide $f : X \to \mathbb{K}$ hulka, seda tähistame edaspidi sümboliga X^*. Lihtne on veenduda, et X^* on vektorruum, kui funktsionaalide liitmine ja skalaariga korrutamine defineerida punktiviisi, s.t.

$$(f_1 + f_2)(x) := f_1(x) + f_2(x), \quad (\lambda f_1)(x) := \lambda f_1(x) \quad (f_1, f_2 \in X^*,\ \lambda \in \mathbb{K}).$$

(kontrollida!)✠. Kui X on TVR, siis kõigi pidevate lineaarsete funktsionaalide $f : X \to \mathbb{K}$ hulka tähistame X' ning nimetame TVR-i X **topoloogiliseks kaasruumiks** ehk (topoloogiliste vektorruumide kontekstis) lihtsalt **kaasruumiks.** Selge, et $X' \subset X^*$, vahetu kontroll näitab, et X' on vektorruumi X^* vektoralamruum (veenduda!)✠.

Lineaarsete funktsionaalide pidevuse kontrollimiseks on kasulik järgmine lause.

Lause 6.1 *Lineaarne funktsionaal f TVR-s X on pidev parajasti siis, kui ruumis X leidub selline nulliümbrus V, milles f on tõkestatud, s.t.*

$$\exists M > 0 : |f(x)| \le M \text{ iga } x \in V \text{ korral.}$$

Tõestus. Olgu f lineaarne funktsionaal TVR-s X. Kui f on pidev punktis 0, siis pidevuse definitsiooni kohaselt leidub iga $\varepsilon > 0$ puhul selline nulliümbrus V, et $|f(x)| \le \varepsilon$ iga $x \in V$ korral (põhjendada!)✠. Seega on f tõkestatud nulliümbruses V.

Vastupidi, kui mingi nulliümbruse V jaoks leidub niisugune $M > 0$, et $|f(x)| \le M$ iga $x \in V$ korral, siis tähistame fikseeritud $\varepsilon > 0$ puhul $U := \frac{\varepsilon}{M} V$ ning märgime, et U on nulliümbrus TVR-s X. Iga $x = \frac{\varepsilon}{M} u \in U$ korral, kus $u \in U$, kehtib

$$|f(x)| = \frac{\varepsilon}{M} |f(u)| \le \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon.$$

Tähendab, f on pidev punktis 0, kuid siis on ta pidev kogu ruumis X (vrd. art. 2.2, ülesanne 6). ■

Funktsionaali ahend ja jätk. Kui X_0 on vektorruumi X vektoralamruum ja $f_0 \in X_0^*$ (s.t. f_0 on lineaarne funktsionaal vektoralamruumis X_0), siis funktsionaali $f \in X^*$ omadusega

$$\forall x \in X_0 : f(x) = f_0(x)$$

nimetatakse funktsionaali f_0 *jätkuks* (vektorruumi X). Funktsionaali f_0 nimetatakse sel juhul funktsionaali f *ahendiks* alamruumis X_0, seda asjaolu märgime $f_0 = f|_{X_0}$.

Käesoleva **peatüki eesmärgiks** on tõestada Hahn-Banachi teoreem, millel topoloogiliste vektorruumide teoorias on võtmeroll. Seejuures vaatleme me eraldi juhte $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ja $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Teoreem 6.2 ***(Hahn-Banachi teoreem juhul*** $\mathbb{K} = \mathbb{R}$***).*** *Olgu X reaalne vektorruum ja X_0 tema vektoralamruum. Olgu $p : X \to \mathbb{R}$ sublineaarne funktsionaal. Kui funktsionaal $f_0 \in X_0^*$ rahuldab tingimust*

$$f_0(x) \le p(x) \quad (x \in X_0),$$

siis leidub selline $f \in X^*$, et

$$f(x) = f_0(x) \quad (x \in X_0) \quad \text{ja} \quad f(x) \le p(x) \quad (x \in X).$$

Tõestus. Tõestuse *idee* on järgmine. Me vaatleme kõigi selliste järjestatud paaride (L, g) hulka $\mathcal{M}$, kus 1) $L \subset X$ on hulka X_0 sisaldav vektoralamruum ja 2) $g : L \to \mathbb{R}$ on funktsionaali f_0 niisugune jätk, mis rahuldab tingimust $g(x) \le p(x) \quad (x \in L)$. Selles hulgas defineerime (loomulikul viisil) järjestuse ja veendume, et ta sisaldab järjestuse suhtes maksimaalse elemendi (Y, h). Osutub, et $Y = X$ ja h ongi otsitav jätk f.

Niisiis, olgu $\mathcal{M}$ kõigi selliste järjestatud paaride (L, g) hulk, kus $L \subset X$ on hulka X_0 sisaldav vektoralamruum ja $g : L \to \mathbb{R}$ on selline lineaarne funktsionaal, et $g|_{X_0} = f_0$ ja $g(x) \le p(x) \quad (x \in L)$. Kuna $(X_0, f_0) \in \mathcal{M}$, siis $\mathcal{M} \neq \emptyset$. Defineerime hulgas $\mathcal{M}$ **järjestuse** seosega

$$(L, g) \ge (M, r) :\Leftrightarrow L \supset M \text{ ja } g|_M = r$$

(kontrollida järjestusaksioomide täidetust!)✠. Selle järjestuse suhtes leidub hulgas $\mathcal{M}$ maksimaalne element. Et selles veenduda, näitame, et iga **täielikult järjestatud alamhulk $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}$ on ülalt tõkestatud.**

Tähistame $L_0 := \cup\{L \mid (L, g) \in \mathcal{M}_0\}$ ja paneme tähele, et L_0 on vektoralamruum. Tõepoolest, kui $x, y \in L_0$, siis leiduvad paarid $(L, g), (M, r) \in \mathcal{M}_0$ omadusega $x \in L$, $y \in M$. Kuna paarid (L, g) ja (M, r) on järjestuse mõttes võrreldavad, siis on vektoralamruumid L ja M võrreldavad sisalduvuse mõttes. Olgu $M \subset L$, siis $x, y \in L$, mistõttu $x + y$, $\lambda x \in L \subset L_0$ iga $\lambda \in \mathbb{R}$ puhul. Seega on L_0 vektoralamruum. Edasi, kui $x \in L_0$, siis $x \in L$, kus (L, g) on hulga $\mathcal{M}_0$ mingi element. Defineerime funktsionaali

$$g_0 : L_0 \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto g(x)$$

ja märgime, et $g_0(x)$ ei sõltu paari $(L, g) \in \mathcal{M}_0$ valikust: kui ka $(M, r) \in \mathcal{M}_0$ on selline, et $x \in M$, siis paaride (L, g) ja (M, r) võrreldavuse tõttu kehtib $g(x) = r(x)$. Funktsionaal g_0 on lineaarne, ta on funktsionaali f_0 jätk ja $g_0(x) \le p(x) \quad (x \in L_0)$. Seega on (L_0, g_0) hulga $\mathcal{M}_0$ ülemine tõke. Zorni lemma põhjal leidub hulgas $\mathcal{M}$ maksimaalne element (Y, h). Teoreemi tõestuseks *on vaja näidata, et $Y = X$, sel juhul h on otsitav jätk funktsionaalile f_0.*

Olgu $x_0 \in X$ suvaline punkt, moodustame hulga $Y_1 := \{x = \lambda x_0 + y \mid \lambda \in \mathbb{R}, y \in Y\}$. Tegemist on vektorruumi X alamruumiga, kusjuures iga $x \in Y_1$ korral on tema komponendid λ ja y üheselt määratud (kontrollida!).✠ *Näitame, et $Y_1 = Y$*, see tähendabki seost $Y = X$.

Olgu $y', y'' \in Y$, siis

$$h(y') + h(y'') = h(y' + y'') \le p(y' + y'') \le p(x_0 + y') + p(y'' - x_0)$$

ehk

$$h(y'') - p(y'' - x_0) \le -h(y') + p(x_0 + y').$$

Seega kehtib võrratus

$$A := \sup_{y''\in Y} \left(h\left(y''\right) - p\left(y'' - x_0\right)\right) \leq \inf_{y'\in Y} \left(-h\left(y'\right) + p\left(x_0 + y'\right)\right) =: B.$$

Võtame suvalise $t_0 \in [A, B]$ ja defineerime alamruumil Y_1 funktsionaali h_1 seosega

$$h_1(x) := \lambda t_0 + h(y) \qquad (x = \lambda x_0 + y \in Y_1).$$

Paneme tähele, et $h_1 \in Y_1^*$: kui $x_1 = \lambda_1 x_0 + y_1$ ja $x_2 = \lambda_2 x_0 + y_2$ on hulgast Y_1, siis

$$x_1 + x_2 = (\lambda_1 + \lambda_2)\, x_0 + (y_1 + y_2)\,, \;\; \mu x_1 = (\mu\lambda_1)\, x_0 + (\mu y_1)\,,$$

mistõttu

$$\begin{aligned} h_1(x_1 + x_2) &= (\lambda_1 + \lambda_2)\, t_0 + h(y_1 + y_2) \\ &= \lambda_1 t_0 + h(y_1) + \lambda_2 t_0 + h(y_2) = h_1(x_1) + h_2(x_2)\,, \\ h_1(\mu x_1) &= \mu\lambda_1 t_0 + h(\mu y_1) = \mu\left(\lambda_1 t_0 + h(y_1)\right) = \mu h_1(x_1)\,. \end{aligned}$$

Ilmselt kehtib $h_1|_Y = h$, näitame, et $h_1(x) \leq p(x)$ iga $x \in Y_1$ puhul. Selleks vaatleme eraldi kolme juhtu:
1) $\lambda = 0$, s.t. $x \in Y$, siis $h_1(x) = h(x) \leq p(x)$;
2) $\lambda > 0$, siis

$$\begin{aligned} h_1(x) &= \lambda t_0 + h(y) \leq \lambda B + h(y) \leq \lambda\left(-h\left(\frac{y}{\lambda}\right) + p\left(x_0 + \frac{y}{\lambda}\right)\right) + h(y) \\ &= \lambda\left(-\frac{1}{\lambda}h(y) + \frac{1}{\lambda}p(\lambda x_0 + y)\right) + h(y) = p(\lambda x_0 + y) = p(x)\,; \end{aligned}$$

3) $\lambda < 0$, siis

$$\begin{aligned} h_1(x) &= \lambda t_0 + h(y) \leq \lambda A + h(y) \\ &\leq \lambda\left(h\left(-\frac{y}{\lambda}\right) - p\left(-x_0 - \frac{y}{\lambda}\right)\right) + h(y) \quad [\text{tähistame } \mu := -\lambda] \\ &= -\mu\left(h\left(\frac{y}{\mu}\right) - p\left(-x_0 + \frac{y}{\mu}\right)\right) + h(y) \\ &= -\mu\left(\frac{1}{\mu}h(y) - \frac{1}{\mu}p(-\mu x_0 + y)\right) + h(y) \\ &= p(\lambda x_0 + y) = p(x)\,. \end{aligned}$$

Niisiis, $(Y_1, h_1) \in \mathcal{M}$. Kui oletada, et leidub $x_0 \in Y_1 \diagdown Y$, siis $(Y_1, h_1) \gneqq (Y, h)$, mis oleks vastuolus elemendi (Y, h) maksimaalsusega. Järelikult $Y = X$ ning teoreem on tõestatud. ∎

Järeldus 6.3 *Olgu X reaalne vektorruum. Iga sublineaarse funktsionaali $p : X \to \mathbb{R}$ puhul leidub selline funktsionaal $f \in X^*$, et $f(x) \leq p(x)$ $(x \in X)$.*

Tõestus. Tõestuseks võtame $X_0 := \{0\}$ ja rakendame Hahn-Banachi teoreemi. ∎

6.2 Hahn-Banachi teoreem komplekse vektorruumi puhul

Kui X on vektorruum üle korpuse $\mathbb{C}$, siis mõistame me skalaariga korrutamise all selles ruumis kompleksarvudega korrutamist. Jättes liitmise ruumis X samaks, kuid rakendades skalaaridega korrutamisel ainult reaalarve, saame reaalse vektorruumi, mille me tähistame $X_{\mathbb{R}}$. Hulkadena (ja Abeli rühmadena) langevad X ning $X_{\mathbb{R}}$ kokku, vektorruumidena on nad erinevad. Näiteks suvalise $x \in X \diagdown \{0\}$ korral on ix mõlema vektorruumi element, kuid ruumis $X_{\mathbb{R}}$ ei ole ta elemendi x kordne. Selliselt konstrueeritud reaalset vektorruumi vajame me järgneva teoreemi tõestamisel.

Teoreem 6.4 ***(Hahn-Banachi teoreem juhul*** $\mathbb{K} = \mathbb{R}$***).*** *Olgu X vektorruum üle korpuse $\mathbb{K}$, kus $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ või $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, ja olgu $p : X \to \mathbb{R}$ mingi poolnorm. Olgu $X_0 \subset X$ vektoralamruum ning $f_0 \in X_0^*$ omadusega*

$$|f_0(x)| \leq p(x) \quad (x \in X_0).$$

Siis leidub selline $f \in X^*$, et

$$f(x) = f_0(x) \quad (x \in X_0) \ \text{ja} \ |f(x)| \leq p(x) \quad (x \in X).$$

Tõestus. Vaatleme algul juhtu $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Kuna $f_0(x) \leq |f_0(x)| \leq p(x) \quad (x \in X_0)$, siis teoreemi 6.2 põhjal saame leida $f \in X^*$, mis on funktsionaali f_0 jätk ning rahuldab tingimust $f(x) \leq p(x) \quad (x \in X)$. Sel juhul $f(x) = -f(-x) \geq -p(-x) = -p(x)$ ehk $-p(x) \leq f(x) \leq p(x) \quad (x \in X)$, seega $|f(x)| \leq p(x) \quad (x \in X)$.

Olgu nüüd X *kompleksne* vektorruum. Tähistame $\varphi_0(x) := \operatorname{Re} f_0(x)$, siis

$$\begin{aligned} f_0(x) &= \operatorname{Re} f_0(x) + i \operatorname{Im} f_0(x) = \operatorname{Re} f_0(x) - i \operatorname{Re}(i f_0(x)) \\ &= \operatorname{Re} f_0(x) - i \operatorname{Re}(f_0(ix)) = \varphi_0(x) - i\varphi_0(ix) \quad (x \in X_0). \end{aligned}$$

Eelduse kohaselt

$$|\varphi_0(x)| = |\operatorname{Re} f_0(x)| \leq |f_0(x)| \leq p(x) \quad (x \in X_0).$$

Vaadeldes funktsionaali $\varphi_0 : X_{0\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$, saame väite esimese osa põhjal leida jätku $\varphi : X_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ omadusega $|\varphi(x)| \leq p(x) \quad (x \in X)$. Moodustame lineaarse funktsionaali

$$f : X \to \mathbb{C}, x \mapsto \varphi(x) - i\varphi(ix)$$

ja märgime, et $f(x) = f_0(x)$ iga $x \in X_0$ korral.

Jääb veenduda, et $|f(x)| \leq p(x) \quad (x \in X)$. Kuna $\left\{\frac{|f(x)|}{f(x)} \mid f(x) \neq 0\right\}$sisaldub hulgas $\{e^{it} \mid t \in \mathbb{R}\}$, mis on ühikringjoon komplekstasandil $\mathbb{C}$, siis saab iga fikseeritud $x \in X$ korral leida niisuguse $t \in \mathbb{R}$, et $e^{it} f(x) = |f(x)|$ (juhul $f(x) = 0$ võib t olla suvaline). Seega $f(e^{it}x) = e^{it} f(x) \in \mathbb{R}$ ning järelikult

$$\begin{aligned} |f(x)| &= e^{it} f(x) = f\left(e^{it}x\right) = \varphi\left(e^{it}x\right) \leq p\left(e^{it}x\right) \\ &= \left|e^{it}\right| p(x) = p(x) \quad (x \in X). \end{aligned}$$

Teoreem on tõestatud. ■

6.3 Eraldamisteoreemid

Hüpertasand ja poolruumid TVR-s. Hahn-Banachi teoreemi tegelik tähendus topoloogiliste vektorruumide teoorias ilmneb eraldamisteoreemides.

Olgu X reaalne vektorruum ning $f \in X^{*\cdot} \setminus \{0\}$. Tähistame reaalarvu α puhul

$$[f = \alpha] := \{x \in X \mid f(x) = \alpha\}, \quad [f \leq \alpha] := \{x \in X \mid f(x) \leq \alpha\},$$

samal põhimõttel defineerime ka $[f \geq \alpha]$, $[f < \alpha]$, $[f > \alpha]$. Hulka $[f = \alpha]$ nimetatakse (funktsionaaliga f ja skalaariga α määratud) **hüpertasandiks.** Iga hüpertasand defineerib nn. poolruumid $[f \leq \alpha]$ ja $[f \geq \alpha]$ ning ranged poolruumid $[f < \alpha]$ ja $[f > \alpha]$. Öeldakse, et hüpertasand $[f = \alpha]$ **eraldab alamhulgad** A ja B vektorruumis X, kui kehtib kas $A \subset [f \leq \alpha]$ ja $B \subset [f \geq \alpha]$ või $B \subset [f \leq \alpha]$ ja $A \subset [f \geq \alpha]$. Kui selles definitsioonis on poolruumid võimalik asendada rangete poolruumidega, siis öeldakse, et hüpertasand eraldab hulgad A ja B rangelt.

Edaspidi ütleme ka, et **funktsionaal** f **eraldab (rangelt) hulgad** A ja B, mõeldes seejuures, et hüpertasand $[f = \alpha]$ mingi $\alpha \in \mathbb{R}$ korral eraldab (rangelt) A ja B.

Topoloogilises vektorruumis on probleem püstitatud teravamalt: *Millistel tingimustel saab mittelõikuvaid alamhulki eraldada* ***pidevate*** *lineaarsete funktsionaalidega?* Nagu näitab järgmine lause, tähendab see alamhulkade eraldamist kinniste hüpertasanditega.

Lause 6.5 *Reaalses TVR-s X on hüpertasand $H = [f = \alpha]$ kas kinnine või tihe, s.t. $\overline{H} = X$. Seejuures on H kinnine parajasti siis, kui f on pidev.*

Tõestus. Olgu $z \in H$, siis $H = z + H_0$, kus $H_0 := [f = 0]$. Seega piisab tõestada väide juhul $\alpha = 0$ (vrd. lause 2.1). Pideva funktsionaali f korral on H_0 kinnine (vrd. ülesanne 1). Kui H_0 on tihe ruumis X, siis f ei saa olla pidev, sest siis oleks $f = 0$.

Eeldame, et H_0 on kinnine ja näitame, et siis $f \in X'$. Fikseerime $u \in X$ omadusega $f(u) = 1$. Olgu $(x_\alpha)_{\alpha \in \Gamma}$ nullelemendiks koonduv pere ruumis X, peame veenduma, et $f(x_\alpha) \to 0$. Kui $f(x_\alpha) \nrightarrow 0$, siis saab valida niisuguse osapere $(y_\beta)_{\beta \in \Delta} \subset (x_\alpha)$, et $|f(y_\beta)| > \varepsilon$ iga $\beta \in \Delta$ ja mingi $\varepsilon > 0$ puhul. Võtame $z_\beta := u - \frac{f(u)}{f(y_\beta)} y_\beta$ ja paneme tähele, et $z_\beta \in H_0$ ja $z_\beta \to u$ ruumis X. Järelikult (vrd. lause 1.3(a)) $u \in \overline{H_0} = H_0$, mis on vastuolus elemendi u valikuga. Seega $f(x_\alpha) \to 0$ ja f on pidev.

Lõpuks eeldame, et f ei ole pidev, ja näitame, et siis $\overline{H_0} = X$. Valime sellise pere $(x_\alpha)_{\alpha \in \Gamma}$ ja $\varepsilon > 0$, et $x_\alpha \to 0$, kuid $|f(x_\alpha)| > \varepsilon$ $(\alpha \in \Gamma)$. Suvalise fikseeritud $x \in X$ puhul võtame $w_\alpha := x - \frac{f(x)}{f(x_\alpha)} x_\alpha$, siis $w_\alpha \in H_0$ ja $w_\alpha \to x$ ruumis X. See tähendabki, et $\overline{H_0} = X$. ■

Ülesanne 1. Veenduda, et kui f on pidev lineaarne funktsionaal TVR-s X, siis $H_0 := [f = 0]$ on kinnine vektoralamruum.

Arvukatest **eraldamisteoreemidest** tõestame siinkohal järgmise väite, mis ilmekalt demonstreerib Hahn-Banachi teoreemi rolli seda tüüpi teoreemide tõestustes.

Teoreem 6.6 *Olgu E ja G TVR-i X kumerad alamhulgad. Eeldame, et $E \cap G = \emptyset$ ning G on lahtine. Siis leiduvad sellised $f \in X'$ ja reaalarv t, et*

$$\operatorname{Re} f(z) < t \leq \operatorname{Re} f(y) \quad \textit{iga } z \in G \ \textit{ ja } y \in E \ \textit{korral.}$$

Tõestus. Märgime kõigepealt, et, piisab, kui tõestame väite juhul $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Nimelt võib juhul $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ iga $f \in X^*$ esitada kujul

$$f(x) = \varphi(x) - i\varphi(ix) \quad (x \in X),$$

kus $\varphi(x) \in \mathbb{R}$, ning f on pidev parajasti siis, kui φ on pidev. Käesoleva väite tõestamiseks tulebki meil tegelikult kontrollida $\varphi = \operatorname{Re} f$ olemasolu.

Valime vabalt punktid $z_0 \in G$ ja $y_0 \in E$ ning tähistame $x_0 := y_0 - z_0$ ja $C := G - E + x_0$. Siis
1) C on kumer,
2) C on lahtine, sest $C = \cup\{G - u + x_0 \mid u \in E\}$ ja G on lahtine,
3) $x_0 \notin C$, sest vasatasel korral $0 \in G - E$, mis on võimalik vaid siis, kui $G \cap E \neq \emptyset$,
4) $0 = -x_0 + x_0 \in G - E + x_0$.
Seega on C lahtine kumer nulliümbrus TVR-s X, järelduse 5.7 ja teoreemi 5.9 põhjal on tema Minkowski funktsionaal $p := p_C$ pidev positiivne sublineaarne funktsionaal, seejuures $p(x_0) \geq 1$. Moodustame vektoralamruumi $X_0 := \{x \in X \mid x = \lambda x_0, \lambda \in \mathbb{R}\}$ ja defineerime selles lineaarse funktsionaali

$$f_0 : X_0 \to \mathbb{R},\ \lambda x_0 \mapsto \lambda.$$

Osutub, et $f_0(x) \leq p(x) \quad (x \in X_0)$. Tõepoolest, juhul $\lambda \geq 0$ on

$$f_0(\lambda x_0) = \lambda \leq \lambda p(x_0) = p(\lambda x_0),$$

juhul $\lambda < 0$ saame $f_0(\lambda x_0) = \lambda < p(\lambda x_0)$. Rakendades nüüd Hahn-Banachi teoreemi 6.2, jätkame funktsionaali f_0 lineaarselt kogu ruumi X nii, et jätk $f \in X^*$ rahuldaks tingimust $f(x) \leq p(x) \quad (x \in X)$. Seejuures $f \in X'$. Et selles venduda, paneme tähele, et $V := C \cap (-C)$ on nulliümbrus TVR-s X. Kuna $f(x) \leq p(x) < 1 \quad (x \in C)$, siis $f(x) > -1$ $(x \in (-C))$, seega $|f(x)| < 1$ iga $x \in V$ korral, lausest 6.1 saame funktsionaali f pidevuse.

Olgu nüüd $z \in G$ ja $y \in E$ suvalised elemendid, siis

$$f(z) - f(y) + 1 = f(z - y + x_0) \leq p(z - y + x_0) < 1,$$

sest $z - y + x_0 \in C$. Niisiis, $f(z) < f(y)$ suvaliste $z \in G$ ja $y \in E$ puhul. Kuna G on lahtine TVR-s X, siis on kujutishulk $f(G)$ lahtine reaalarvude ruumis $\mathbb{R}$ (vrd. ülesanne 2). Seepärast $f(z) < t \leq f(y)$ $(z \in G,\ y \in E)$, kus $t := \sup\{f(z) \mid z \in G\}$. Teoreem on tõestatud. ■

Ülesanne 2. Kui G on lahtine alamhulk TVR-s X ja $f \in X^*$, siis $f(G)$ on lahtine TVR-s $\mathbb{K}$.

Märkus. Teoreemi 6.6 tõestusest selgub muuhulgas järgmine tähelepanuväärne fakt: *kui TVR-s X on olemas mittetriviaalseid lahtisi kumeraid hulki, siis leidub selles ruumis määratud mittetriviaalseid pidevaid lineaarseid funktsionaale, s.o. funktsionaale* $f \in X' \setminus \{0\}$ (selgitada!)✠.

7 Lokaalselt kumerad ruumid

7.1 Lokaalselt kumera topoloogia kirjeldamine nulliümbruste baasi ja poolnormide abil

Topoloogiliste vektorruumide teooria jätab vaatamata oma elegantsusele paljus soovida, sisuka teooria loomiseks on topoloogilise vektorruumi mõiste liiga üldine. Tulles korraks tagasi eraldamisteoreemi 6.6 juurde, märgime, et selle näiliselt üldine iseloom on mõneti petlik, sest üldjuhul ei pruugi topoloogilises vektorruumis mittetriviaalseid kumeraid lahtisi alamhulki olla. Nende olemasoluks on vaja, et selles ruumis oleks mittetriviaalseid kumeraid nulliümbrusi. Eelmise peatüki lõpus toodud märkuse kohaselt on kumera nulliümbruse olemasolu tihedalt seotud mittetriviaalsete pidevate lineaarsete funktsionaalide olemasoluga vaadeldavas ruumis. Allpool näeme (vrd. art. 7.4, näide 3), et leidub selliseid TVR-e X, mille puhul $X' = \{0\}$.

Nendest märkustest lähtudes, vaatleme järgnevalt lokaalselt kumeraid ruume, nendele on pühendatud kogu ülejäänud osa käesolevast loengukursusest.

Lokaalselt kumer ruum. Definitsioon. TVR-i X nimetatakse *lokaalselt kumeraks ruumiks* (edaspidi lühidalt LKR), kui tal leidub kumeratest alamhulkadest koosnev nulliümbruste baas.

Olgu X LKR ja U suvaline nulliümbrus selles ruumis. Vastavalt lausele 2.6 leidub selline *tasakaalus kinnine* nulliümbrus U_1, et $U_1 \subset U$. Edasi valime *kumera* nulliümbruse V omadusega $V \subset U_1$ ja rakendades veel kord lauset 2.6, leiame *tasakaalus* nulliümbruse U_2, mis sisaldub hulgas V. Tähistame $W := \overline{\mathrm{conv} U_2}$, see on *kinnine absoluutselt kumer* nulliümbrus (põhjendada!✠, vrd. pt. 5, ülesanded 5 ja 4) ning

$$W \subset \overline{V} \subset \overline{U_1} = U_1 \subset U.$$

Niisiis, *lokaalselt kumeras ruumis sisaldab iga nulliümbrus kinnist absoluutselt kumerat nulliümbrust.* Seega oleme tõestanud järgmise olulise väite.

Lause 7.1 *Igas LKR-s leidub selline nulliümbruste baas, mis koosneb kinnistest absoluutselt kumeratest hulkadest.*

Lokaalselt kumera topoloogia defineerimine nulliümbruste prebaasi abil. Olgu $\mathfrak{B}_0$ mingi *neelavate absoluutselt kumerate* alamhulkade süsteem vektorruumis X, tähistame

$$\mathfrak{B} := \left\{ \varepsilon \bigcap_{i=1}^{n} V_i \mid \varepsilon > 0, \quad V_1, ..., V_n \in \mathfrak{B}_0, \; n \in \mathbb{N} \right\}. \tag{7.1}$$

Süsteemi $\mathfrak{B}$ elemendid (s.o. süsteemi $\mathfrak{B}_0$ elementide kõikvõimalike lõplike ühisosade kordsed positiivsete kordajatega) on samuti absoluutselt kumerad alamhulgad, vahetu kontroll näitab, et $\mathfrak{B}$ rahuldab teoreemi 2.5 tingimusi (NB1) - (NB4) (vt. ülesanne 1). Seega on $\mathfrak{B}$ mingi lokaalselt kumera topoloogia τ nulliümbruste baas vektoruumis X, süsteemi $\mathfrak{B}_0$

nimetatakse baasi $\mathfrak{B}$ **prebaasiks** ehk eelbaasiks. Pidades silmas lauset 2.7, on lihtne veenduda, et (X, τ) on eralduv LKR parajasti siis, kui

$$\cap \{\lambda V \mid \lambda > 0, \quad V \in \mathfrak{B}_0\} = \{0\}. \tag{7.2}$$

Tõepoolest, tingimusest (7.2) tuleneb topoloogia τ eralduvus tänu seosele

$$\cap \{W \mid W \in \mathfrak{B}\} \subset \cap \{\lambda V \mid \lambda > 0, \quad V \in \mathfrak{B}_0\},$$

teisalt, kui (X, τ) on eralduv, siis lause 2.7 kohaselt saab suvalise $x \in X \setminus \{0\}$ korral valida $\varepsilon > 0$ ja $V_1, ..., V_n \in \mathfrak{B}_0$ nii, et $x \notin \varepsilon \bigcap_{i=1}^n V_i$. Siit järeldub tingimus (7.2).

Niisiis kehtib järgmine lause.

Lause 7.2 *Iga absoluutselt kumerate neelavate alamhulkade süsteem $\mathfrak{B}_0$ vektorruumis X määrab selles lokaalselt kumera topoloogia, mis on eralduv parajasti siis, kui $\mathfrak{B}_0$ rahuldab tingimust* (7.2).

Ülesanne 1. Veenduda, et eelpool defineeritud süsteem $\mathfrak{B}$ rahuldab teoreemi 2.5 tingimusi (NB1) - (NB4).

Märkus 1^0. Kui almhulkade süsteem $\mathfrak{B}_0$ on lokaalselt kumera topoloogia τ prebaas vektorruumis X (s.t. seosega (7.1) määratud süsteem $\mathfrak{B}$ on τ-nulliümbruste baas), siis süsteemi $\mathfrak{B}$ iga alamsüsteem $\mathfrak{C}_0$, mis sisaldab süsteemi $\mathfrak{B}_0$, on samuti topoloogia τ prebaas, s.t.

$$\mathfrak{C} := \left\{ \varepsilon \bigcap_{i=1}^{n} V_i \mid \varepsilon > 0, \quad V_1, ..., V_n \in \mathfrak{C}_0, \ n \in \mathbb{N} \right\}$$

on τ-nulliümbruste baas. On selge, et $\mathfrak{C}$ on mingi lokaalselt kumera topoloogia τ' nulliümbruste baas. Lihtne on näha, et $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{C}$, seega $\tau \subset \tau'$. Vastupidise sisalduvuse tõestamiseks võtame suvalise $W \in \mathfrak{C}$ ja leiame $V \in \mathfrak{B}$ omadusega $V \subset W$. Paneme tähele, et kuna $W \in \mathfrak{C}$ ja $\mathfrak{C}_0 \subset \mathfrak{B}$, siis W on esitatav kujul

$$W = \varepsilon \bigcap_{i=1}^{n} \bigcap_{k=1}^{k_i} \varepsilon_i V_k^{(i)} \quad \Big(\varepsilon > 0, \ \varepsilon_i > 0, \, V_k^{(i)} \in \mathfrak{B}_0, \, k = 1, ..., k_i, \, i = 1, ..., n \Big).$$

Tänu hulkade $V_k^{(i)}$ tasakaalustatusele saame sisalduvuse

$$V := \varepsilon' \bigcap_{i=1}^{n} \bigcap_{k=1}^{k_i} V_k^{(i)} \subset W,$$

kus $\varepsilon' := \varepsilon \min \{\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n\}$. Seejuures $V \in \mathfrak{B}$.

Lokaalselt kumera topoloogia defineerimine poolnormide abil. Lokaalselt kumera ruumi üks tähelepanuväärsemaid omadusi on see, et tema topoloogiat saab kirjeldada ka analüütiliselt, nimelt poolnormide abil.

Lause 7.3 (a) *Iga poolnormide süsteem* $\{p_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ *vektorruumis* X *määrab selles ruumis lokaalselt kumera topoloogia* τ *nulliümbruste baasiga*

$$\mathfrak{B} := \{W_{\varepsilon,\gamma_1,...,\gamma_n} \mid \varepsilon > 0, \quad \gamma_1, ..., \gamma_n \in \Gamma, \ n \in \mathbb{N}\}, \tag{7.3}$$

kus

$$W_{\varepsilon,\gamma_1,...,\gamma_n} := \left\{x \in X \mid \max_{1\le i\le n} p_{\gamma_i}(x) \le \varepsilon\right\}.$$

Seejuures on poolnormid p_γ $(\gamma \in \Gamma)$ *pidevad topoloogias* τ*. Topoloogia* τ *on eralduv parajasti siis, kui poolnormide süsteem* $\{p_\gamma\}$ *eraldab punktid vektorrumis* X*, s.t. kui ta rahuldab tingimust*

$$\forall x \in X\setminus\{0\} \ \exists \gamma \in \Gamma : \ p_\gamma(x) \ne 0. \tag{7.4}$$

(b) *Iga lokaalselt kumera topoloogia saab määrata mingi poolnormide süsteemiga* $\{p_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$.

Tõestus. (a) Olgu vektorruumis X määratud poolnormide süsteem $\{p_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ ning olgu alamhulkade süsteem $\mathfrak{B}$ defineeritud seosega (7.3). Tähistame iga poolnormi p_γ puhul tema kinnise ühikkera sümboliga V_γ, s.t.

$$V_\gamma := \{x \in X \mid p_\gamma(x) \le 1\}.$$

Kuna V_γ on absoluutselt kumer neelav alamhulk (vrd. pt. 5, ülesanne 7), siis $\mathfrak{B}_0 := \{V_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ määrab vektorruumis X sellise lokaalselt kumera topoloogia, mille nulliümbruste baasi moodustavad alamhulgad

$$\varepsilon \bigcap_{i=1}^{n} V_{\gamma_i} = W_{\varepsilon,\gamma_1,...,\gamma_n} \quad (\varepsilon > 0, \quad \gamma_1, ..., \gamma_n \in \Gamma, \ n \in \mathbb{N}) \tag{7.5}$$

(vrd. lause 7.2). Seejuures rahuldab prebaas $\mathfrak{B}_0$ LKR-i (X, τ) eralduvuseks tarvilikku ja piisavat tingimust (7.2) parajasti siis, kui poolnormide süsteem $\{p_\gamma\}$ rahuldab tingimust (7.4):

$$\begin{aligned}(7.2) &\Leftrightarrow \forall x \in X\setminus\{0\} \ \exists \gamma \in \Gamma \ \ \exists \lambda > 0 : \quad x \notin \lambda V_\gamma \\ &\Leftrightarrow \forall x \in X\setminus\{0\} \ \exists \gamma \in \Gamma \ \ \exists \lambda > 0 : \quad p_\gamma(x) > \lambda \quad \Leftrightarrow \quad (7.4).\end{aligned}$$

Poolnormide p_γ $(\gamma \in \Gamma)$ pidevus järeldub teoreemist 5.9, sest p_γ on hulga V_γ Minkowski funktsionaal:

$$\begin{aligned}p_{V_\gamma}(x) &= \inf\{\mu > 0 \mid x \in \mu V_\gamma\} = \inf\{\mu > 0 \mid p_\gamma(x) \le \mu\} \\ &= \inf\left\{\mu > 0 \mid \frac{1}{\mu}p_\gamma(x) \le 1\right\} = p_\gamma(x) \quad (x \in X).\end{aligned}$$

(b) Olgu (X, τ) LKR ja olgu $\mathfrak{B}$ selle ruumi nulliümbruste baas, mis koosneb kinnistest absoluutselt kumeratest alamhulkadest. Moodustame hulkade $V \in \mathfrak{B}$ Minkowski funktsionaalid p_V, need on pidevad poolnormid, kusjuures $V = \{x \in X \mid p_V(x) \le 1\}$ (vrd. teoreem 5.9). Väite (a) kohaselt määrab see poolnormide süsteem $\{p_V\}_{V\in\mathfrak{B}}$ vektorruumis X lokaalselt kumera topoloogia τ_1 nulliümbruste baasiga

$$\mathfrak{B}_1 := \left\{\varepsilon \bigcap_{i=1}^{n} V_i \mid \varepsilon > 0, \quad V_1, ..., V_n \in \mathfrak{B}, \ n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Kuna $\mathfrak{B}$ on baasi $\mathfrak{B}_1$ prebaas, siis määravad $\mathfrak{B}$ ja $\mathfrak{B}_1$ ühe ja sama topoloogia, s.t. $\tau_1 = \tau$. Teoreem on tõestatud. ■

Märkus 2^0(oluline!). Edaspidi kasutame me väljendeid *"lokaalselt kumer topoloogia on määratud (pre)baasiga* $\mathfrak{B}$ " ja *"lokaalselt kumer topoloogia on määratud poolnormide süsteemiga* $\{p_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ " just selles tähenduses, nagu see on lausetes 7.2 ja 7.3 ja talle eelnenud kommentaaris.

Järgnevad väited, mis tulenevad otseselt lausest 7.3.

Lause 7.4 (*a*) *Olgu* $\{p_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ *ja* $\{q_\delta\}_{\delta\in\Delta}$ *kaks poolnormide süsteemi vektorruumis* X. *Kui* $\{p_\gamma\} \subset \{q_\delta\}$, *siis nende poolt määratud vastavad lokaalselt kumerad topoloogiad* τ *ja* τ' *rahuldavad seost* $\tau \subset \tau'$.

(*b*) *Olgu* (X, τ) *LKR ja olgu* $\mathcal{P}$ *kõigi pidevate poolnormide* $p : X \to \mathbb{R}$ *süsteem. Siis süsteemi* $\mathcal{P}$ *poolt määratud lokaalselt kumer topoloogia langeb kokku esialgse topoloogiaga* τ.

Tõestus. Väite (*a*) tõestuseks fikseerime suvalise τ-nulliümbruse W ning näitame, et ta on ka τ'-nulliümbrus. Kuna hulgad (7.5) moodustavad topoloogias τ nulliümbruste baasi, siis leiduvad sellised $\varepsilon > 0$ ja $\gamma_1, ..., \gamma_n \in \Gamma$, et $W_{\varepsilon,\gamma_1,...,\gamma_n} = \varepsilon \bigcap_{i=1}^n V_{\gamma_i} \subset W$. Eelduse kohaselt $p_{\gamma_1}, ..., p_{\gamma_n} \in \{q_\delta\}_{\delta\in\Delta}$, seetõttu on hulgad $V_{\gamma_1}, ..., V_{\gamma_n}$ ka τ'-nulliümbrused. Järelikult on $W_{\varepsilon,\gamma_1,...,\gamma_n}$ ja seega ka hulk W τ'-nulliümbrus.

Väite (*b*) tõestuseks tähistame poolnormide süsteemiga $\mathcal{P}$ määratud lokaalselt kumera topoloogia sümboliga τ_0 ja fikseerime mingi poolnormide süsteemi $\{p_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$, mis määrab lähtetopoloogia τ (vrd. lause 7.3(*b*)). Kuna kõik poolnormid $\{p_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ $(\gamma \in \Gamma)$ on lause 7.3(*a*) põhjal τ-pidevad, siis $\{p_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} \subset \mathcal{P}$ ja väite (*a*) kohaselt kehtib sisalduvus $\tau \subset \tau_0$. Vastupidise sisalduvuse kontrollimiseks paneme kõigepealt tähele, et iga $p \in \mathcal{P}$ puhul on hulk $V_p := \{x \in X \mid p(x) \le 1\}$ τ-nulliümbrus. Tõepoolest, kui tähistada $D := \{\lambda \in \mathbb{K} \mid |\lambda| < 1\}$ (lahtine ühikring kompleksarvude korpuses $\mathbb{C}$ või ühikvahemik reaalarvude korpuses $\mathbb{R}$), siis $p^{-1}(D)$ on LKR-s lahtine hulk ning

$$V_p \supset p^{-1}(D) \ni 0.$$

Seega on ka kõik hulgad $\varepsilon \bigcap_{i=1}^n V_{p_i}$ $(\varepsilon > 0,\ p_1, ..., p_n \in \mathcal{P},\ n \in \mathbb{N})$, mis moodustavad topoloogias τ_0 nulliümbruste baasi, τ-nulliümbrused. See tähendabki sisalduvust $\tau_0 \subset \tau$. ■

7.2 Koonduvus ja tõkestatus lokaalselt kumeras ruumis

Poolnormide abil kirjeldatud topoloogias on mugavam uurida perede (s.h. jadade) koonduvust ning alamhulkade tõkestatust.

Lause 7.5 *Olgu* X *LKR, mille topoloogia* τ *on määratud poolnormide süsteemiga* $\{p_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$.

(*a*) *Elementide pere* $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ *koondub punktiks* x *ruumis* X *parajasti siis, kui*

$$p_\gamma(x_\alpha - x) \to 0 \quad \textit{iga } \gamma \in \Gamma \textit{ korral.} \tag{7.6}$$

(*b*) *Alamhulk* $E \subset X$ *on tõkestatud ruumis* X *parajasti siis, kui iga poolnorm* p_γ *on sellel hulgal tõkestatud, s.t., kui*

$$\sup_{x \in E} p_\gamma(x) < \infty \quad \textit{iga } \gamma \in \Gamma \textit{ korral.} \tag{7.7}$$

Tõestus. (*a*) *Tarvilikkus.*.Kuna kõik poolnormid p_γ on τ-pidevad, siis eeldusest $x_\alpha - x \to 0$ järeldub $p_\gamma(x_\alpha - x) \to 0$ $(\gamma \in \Gamma)$.

Piisavus. Eeldame, et tingimus (7.6) on täidetud. Moodustame nulliümbruste baasi $\mathfrak{B}$ nii nagu lauses 7.3(a). Olgu $V = \{x \in X \mid \max_{1 \le i \le n} p_{\gamma_i}(x) \le \varepsilon\}$, kus $\varepsilon > 0$ ja $\gamma_1, ..., \gamma_n \in \Gamma$, baasi $\mathfrak{B}$ element. Iga $i = 1, ..., n$ puhul saame leida sellise indeksi $\alpha_i \in A$, et

$$\alpha \ge \alpha_i \Rightarrow p_{\gamma_i}(x_\alpha - x) \le \varepsilon.$$

Võttes $\alpha_0 \ge \alpha_i$ $(i = 1, ..., n)$, saame implikatsiooni

$$\alpha \ge \alpha_0 \Rightarrow \max_{1 \le i \le n} p_{\gamma_i}(x_\alpha - x) \le \varepsilon,$$

mis tähendab, et $x_\alpha - x \in V$ $(\alpha \ge \alpha_0)$. Niisiis, $x_\alpha \to x$ LKR-s X.

(*b*) *Tarvilikkus.* Olgu $E \subset X$ tõkestatud alamhulk. Tähistame suvalise $\gamma \in \Gamma$ korral

$$V_\gamma := \{x \in X \mid p_\gamma(x) \le 1\},$$

see on nulliümbrus tänu poolnormi p_γ pidevusele (selgitada!)✠. Kuna E on tõkestatud, siis saab leida niisuguse $\lambda > 0$, et $\lambda E \subset V_\gamma$, s.t.

$$\forall x \in E : \lambda p_\gamma(x) = p_\gamma(\lambda x) \le 1$$

ehk $p_\gamma(x) \le \frac{1}{\lambda}$ $(x \in E)$. Seega kehtib (7.7).

Piisavus. Eeldame, et kehtib tingimus (7.7). Olgu W suvaline τ-nulliümbrus, siis leiduvad sellised $\varepsilon > 0$ ja $\gamma_1, ..., \gamma_n \in \Gamma$, et $W_{\varepsilon,\gamma_1,...,\gamma_n} = \varepsilon \bigcap_{i=1}^n V_{\gamma_i} \subset W$. Kuna poolnormid $p_{\gamma_1}, ..., p_{\gamma_1}$ rahuldavad tingimust (7.7), siis leiduvad positiivsed arvud $M_1, ..., M_n$ omadusega $p_{\gamma_i}(x) \le M_i$ $(i = 1, ..., n;\ x \in E)$. Siit tuleneb

$$\max_{1 \le i \le n} p_{\gamma_i}(x) \le M := \max_{1 \le i \le n} M_i \quad (x \in E).$$

Olgu $\lambda := \frac{\varepsilon}{M}$, siis iga $z := \lambda x \in \lambda E$ korral

$$\max_{1 \le i \le n} p_{\gamma_i}(z) = \lambda \max_{1 \le i \le n} p_{\gamma_i}(x) \le \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon \ (x \in E),$$

s.t. $\lambda E \subset W_{\varepsilon,\gamma_1,...,\gamma_n} \subset W$. Näeme, et E on tõkestatud. ■

Lause 7.6 (*a*) *Kui* E *on tõkestatud alamhulk LKR-s* X, *siis ka tema absoluutselt kumer kate* absconv E *on tõkestatud.*

(*b*) *Kui* E *on täielikult tõkestatud alamhulk eralduvas LKR-s* X, *siis ka tema absoluutselt kumer kate* absconv E *on täielikult tõkestatud.*

Tõestus. (a) Olgu $\mathfrak{B}$ ruumi X nuliümbruste baas absoluutselt kumeratest hulkadest. Kui $E \subset X$ on tõkestatud, siis suvalise fikseeritud $V \in \mathfrak{B}$ korral leidub $\lambda > 0$, et $E \subset \lambda V$. Seega absconv $E \subset$ absconv $\lambda V = \lambda V$, s.t. absconv E on tõkestatud.

(b) Olgu $E \subset X$ täielikult tõkestatud ja olgu $V \in \mathfrak{B}$. Valime $U \in \mathfrak{B}$ omadusega $U + U \subset V$ ning $x_1, ..., x_n \in E$ nii, et $E \subset \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + U)$. Moodustame

$$H := \text{ absconv } \{x_1, ..., x_n\}$$

ja *näitame kõigepealt, et H on kompaktne alamhulk LKR-s X*. Selleks vaatleme normeeritud ruumi ℓ^n, s.o. $\mathbb{K}^n$ normiga $\|\zeta\|_1 := \sum_{k=1}^{n} |\zeta_k|$, kus $\zeta := (\zeta_1, ..., \zeta_n) \in \mathbb{K}^n$. Defineerime lineaarse kujutuse

$$\Phi : \ell^n \to X, \quad \mapsto \sum_{k=1}^{n} \zeta_k x_k.$$

See kujutus on pidev punktis 0: kui $\left(\zeta^{(\alpha)}\right)$ on selline elementide $\zeta^{(\alpha)} := \left(\zeta_1^{(\alpha)}, ..., \zeta_n^{(\alpha)}\right)$ pere normeeritud ruumis ℓ^n, mis koondub punktiks 0, siis arvpere $\zeta_k^{(\alpha)} \to 0$ iga $k = 1, ..., n$ korral, mistõttu

$$\Phi\left(\zeta^{(\alpha)}\right) = \sum_{k=1}^{n} \zeta_k^{(\alpha)} x_k \to 0 \text{ LKR-s } X.$$

Edasi paneme tähele, et $H = \Phi(B)$, kus $B := \{\zeta \in \ell^n \mid \|\zeta\|_1 \leq 1\}$ on lõplikumõõtmelise normeeritud ruumi ℓ^n kinnine ühikkera, seega kompaktne hulk. Kuna kompaktse hulga pidev kujutis on alati kompaktne, siis H on tõepoolest kompaktne hulk ruumis X.

Olgu $U_0 \subset U$ ruumi X nulliümbrus, moodustame hulga H lahtise katte $\cup \{z + U_0 \mid z \in H\}$, see sisaldab hulga kompaktsuse tõttu lõpliku osakatte $\cup \{z_l + U_0 \mid l = 1, ..., r\}$. Seega

$$\begin{aligned} \text{absconv } E \subset \text{ absconv } \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + U) &\subset \text{ absconv } \{x_1, ..., x_n\} + \text{ absconv } U \\ = H + U \subset \bigcup_{l=1}^{r} z_l + U_0 + U &\subset \bigcup_{l=1}^{r} z_l + V. \end{aligned}$$

Kokkuvõttes leidub suvalise nulliümbruse V puhul niisugune lõplik alamhulk $\{z_1, ..., z_r\} \subset$ absconv E, et absconv $E \subset \bigcup_{l=1}^{r} z_l + V$. See tähendabki, et absconv E on täielikult tõkestatud. ■

7.3 Metriseeruvad ja normeeruvad lokaalselt kumerad ruumid

Teoreemi 4.2 järgi on TVR X metriseeruv parajasti siis, kui ta on eralduv ja tal on loenduv nulliümbruste baas, seejuures saab tema topoloogia määrata pseudonormiga. Lihtne on kontrollida, et igas metriseeruvas LKR-s X on selline loenduv nulliümbruste baas $\mathfrak{B} = \{V_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, mis koosneb (kinnistest) absoluutselt kumeratest hulkadest (selgitada!)✠. Kuna poolnormide süsteem $\{p_{V_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, kus p_{V_n} on hulga V_n Minkowski funktsionaal, määrab ruumi X topoloogia (vrd. lause 7.3(b) tõestus), siis võime väita, et *iga metriseeruva lokaalselt kumera topoloogia saab määrata loenduva poolnormide süsteemiga.*

Olgu nüüd (X,τ) selline eralduv LKR, mille topoloogia on määratud mingi loenduva poolnormide süsteemiga $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Tähistame

$$d(x,y) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(x-y)}{1+p_n(x-y)} \quad (x,y\in X), \tag{7.8}$$

see on **nihke suhtes invariantne meetrika** vektorruumis X (kontrollida!)✠. Ta määrab metriseeruva topoloogia τ_1, kusjuures mingi elementide pere (x_α) ja elemendi x puhul

$$\lim_\alpha d(x_\alpha, 0) = 0 \Leftrightarrow \lim_\alpha p_n(x_\alpha) = 0 \quad (n\in\mathbb{N}) \tag{7.9}$$

(vt. ülesanne 4). Teisi sõnu, $x_\alpha \to 0$ **topoloogias** τ_1 **parajasti siis, kui** $x_\alpha \to 0$ **topoloogias** τ. Seega nii ühikoperaator $i : (X,\tau) \to (X,\tau_1)$ kui ka tema pöördoperaator i^{-1}on pidevad punktis 0, s.t. $\tau = \tau_1$.

Me oleme tõestanud järgmise olulise lause.

Lause 7.7 *Eralduv lokaalselt kumer ruum on metriseeruv parajasti siis, kui tema topoloogia saab määrata loenduva (või lõpliku) poolnormide süsteemiga.*

Ülesanne 2. Veenduda, et seosega (7.8) määratud funktsioon $d : X\times X \to \mathbb{R}$ rahuldab meetrika aksioome.

Ülesanne 4. Veenduda, et seosega (7.8) määratud meetrika d on nihke suhtes invariantne.

Ülesanne 4. Veenduda, et seos (7.9) on õige.

Näide 1. Vaatleme veel kord pt. 4, näites 1 käsitletud TVR-i $C(\mathbb{C})$. Kuna alamhulgad

$$V_{n,i} := \left\{ x = x(t) \mid |x(t)| \le \frac{1}{i}, \text{ kui } |t| \le n \right\} \quad (n,j\in\mathbb{N}),$$

mis moodustavad loenduva nulliümbruste baasi, on absoluutselt kumerad, siis on tegemist **metriseeruva lokaalselt kumera ruumiga.**

Normeeruvad LKR-d. Lihtne on näha (kontrollida!)✠, et kui eralduv lokaalselt kumer topoloogia τ vektorruumis X on määratud *lõpliku* poolnormide süsteemiga $\{p_1,...,p_m\}$, siis seosega

$$p : X \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \max_{1\le i\le m} p_i(x)$$

defineeritud funktsionaal p on norm ning (X,p) on normeeritud ruum. Sel juhul ütleme, et (X,τ) on *normeeruv*. Kerkib loomulik küsimus: *kuidas topoloogiliste vektorruumide hulgas normeeruvaid ruume ära tunda?* Vastuse sellele annab järgmine lause.

Lause 7.8 ***(Kolmogorovi teoreem).*** *Eralduv TVR (X,τ) on normeeruv parajasti siis, kui tal on tõkestatud kumeraid nulliümbrusi.*

Tõestus. *Tarvilikkus.* Normeeritud ruumi ühikkera on tõkestatud kumer nulliümbrus (vrd. pt. 5, ülesanne 8).

Piisavus. Olgu V kumer tõkestatud nulliümbrus eralduvas TVR-s X. Järelduse 2.4 kohaselt sisaldab V tasakaalus nulliümbrust V_1. Tähistame $U := \overline{\mathrm{conv}\, V_1}$, see on kinnine absoluutselt kumer nulliümbrus, seejuures tõkestatud (põhjendada!)✠. Hulga U Minkowski funktsionaal p_U on järelduse 5.7 põhjal poolnorm. Näitame, et p_U on norm, selleks on vaja kontrollida implikatsiooni

$$p_U(x) = 0 \Rightarrow x = 0. \tag{7.10}$$

Kõigepealt märgime, et kuna U on tõkestatud hulk, siis iga nulliümbruse W korral saab valida arvu $\varepsilon > 0$ omadusega $\varepsilon U \subset W$. Seega on $\{\varepsilon U \mid \varepsilon > 0\}$ τ-nulliümbruste baas, mistõttu (vrd. lause 2.7) $\cap \{\varepsilon U \mid \varepsilon > 0\} = \{0\}$. Niisiis, kui $x \neq 0$, siis leidub niisugune $\varepsilon > 0$, et $x \notin \varepsilon U$, millest järeldub $p_U(x) \neq 0$. Seega on implikatsioon (7.10) õige. Tähendab, (X, p_U) on normeeritud ruum ühikkeraga U (vrd. teoreem 5.9) ja kuna $\{\varepsilon U \mid \varepsilon > 0\}$ on τ-nulliümbruste baas, siis normi poolt määratud topoloogia langeb esialgse topoloogiaga kokku. ■

Järeldus 7.9 *Eralduv lokaalselt kumer ruum on normeeruv parajasti siis, kui tal on tõkestatud nulliümbrus.*

Siinkohal on vajalik juhtida tähelepanu **erinevusele normeeritud ruumi ja lokaalselt tõkestatud ruumi vahel** (vrd. pt. 4). Loomulikult on iga normeeritud ruum lokaalselt tõkestatud, täpsemalt öeldes, *lokaalselt tõkestatud ruum on normeeritud ruum parajasti siis, kui ta on lokaalselt kumer.* Seda, et mitte-lokaalselt kumeraid lokaalselt tõkestatud ruume tõepoolest eksisteerib, näitab järgmine näide.

Näide 2. Vaatleme vektorruumi ℓ^p, mille elementideks on arvjadad $x = (\xi_k)$ omadusega

$$|x| := \sum_k |\xi_k|^p < \infty,$$

olgu seejuures $0 < p < 1$. Reaalarvude $a, b \geq 0$ puhul kehtib võrratus $(a+b)^p \leq a^p + b^p$, millest saame seose

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Seosega $x \mapsto |x|$ määratud funktsionaal on pseudonorm vektorruumis ℓ^p (veenduda!)✠, seega on ℓ^p metriseeruv TVR meetrikaga

$$d(x, y) := |x - y| = \sum_k |\xi_k - \eta_k|^p \quad (x = (\xi_k) \in \ell^p,\ y = (\eta_k) \in \ell^p).$$

Saab näidata, et meetriline ruum ℓ^p on täielik. Meie jaoks on olulisem see fakt, et ℓ^p **ei ole lokaalselt kumer.** Vaatleme elemente $e_i := (0, ..., 0, 1, 0, ...)$ $(i \in \mathbb{N})$, kus i-s koordinaat on 1. Kuna $d(e_i, 0) = 1$ iga i korral, siis hulk $\{e_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ on ruumis ℓ^p tõkestatud, kuid tema kumer kate $\mathrm{conv}\{e_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ ei ole tõkestatud. Nimelt on kumerate kombinatsioonide $x_n := \frac{1}{n}(e_1 + ... + e_n)$ jada ruumis ℓ^p tõkestamata, kuna

$$|x_n| = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{n}\right)^p = \frac{n}{n^p} = n^{1-p} \to \infty \ (n \to \infty).$$

Lause 7.6(a) järgi ei ole ℓ^p LKR.

Märgime, et ruumid ℓ^p on juhul $0 < p < 1$ tähelepanuväärsed eeskätt kui mitte-lokaalselt kumerad metriseeruvad TVR-d. Hoopis olulisemad ja huvitavamad on ruumid ℓ^p, kui $1 \leq p < \infty$, sel juhul saame tuntud ja põhjalikult uuritud Banachi ruumid.

7.4 Lokaalselt kumera ruumi kaasruum

Eralduvate lokaalselt kumerate ruumide üks tähtsamaid eeliseid ülejäänud topoloogiliste vektorruumide ees on see, et neil on "palju" pidevaid lineaarseid funktsionaale. Vektorruumi X algebralise kaasruumi X^* alamruumi Y elementide rohkuse mõõduks on see, milliseid eraldamisteoreeme see alamruum rahuldab.

Definitsioon. Öeldakse, et alamruum $Y \subset X^*$ *eraldab punktid vektorruumis* X, kui suvaliste $x, y \in X$ korral, kus $x \neq y$, saab valida funktsionaali $f \in Y$ omadusega $f(x) \neq f(y)$.

Ilmselt on see tingimus samaväärne nõudega

$$\forall x \in X \setminus \{0\} \quad \exists f \in Y: \quad f(x) \neq 0.$$

See, kas topoloogilise vektorruumi topoloogiline kaasruum eraldab punktid, osutub põhimõttelise tähtsusega küsimuseks vaadeldavas teoorias. Meie eesmärk on näidata, et eralduva lokaalselt kumera ruumi korral on vastus sellele küsimusele positiivne. Lisaks sellele tõestame veel kaks meile edaspidi vajalikku eraldamisteoreemi.

Alustame järgmise olulise faktiga.

Lause 7.10 *Lineaarne funktsionaal f LKR-s X on pidev parajasti siis, kui leidub selline pidev poolnorm $p: X \to \mathbb{R}$, et $|f(x)| \leq p(x)$ iga $x \in X$ korral.*

Tõestus. Iseseisvalt (vt. ülesanne 5). ■

Selle väite abil on lihtne Hahn-Banachi teoreemist saada järgmine lause, mida võiks nimetada **funktsionaali pideva jätkamise printsiibiks** lokaalselt kumerates ruumides.

Lause 7.11 *Olgu X_0 LKR-i X vektoralamruum. Iga $f_0 \in X_0'$ korral leidub $f \in X'$ omadusega*

$$f(x) = f_0(x) \quad (x \in X_0).$$

Tõestus. Olgu $\mathfrak{B}$ absoluutselt kumeratest nulliümbrustest koosnev baas ruumis X, sel juhul $\mathfrak{B}_0 := \{U \cap X_0 \mid U \in \mathfrak{B}\}$ on alamruumi X_0 nulliümbruste baas. Kuna $f_0 \in X_0'$, siis lause 6.1 kohaselt leidub niisugune $V \in \mathfrak{B}$, et $|f_0(x)| \leq 1$ kõikide $x \in V \cap X_0$ puhul. Moodustame hulga V Minkowski funktsionaali p_V, see on pidev poolnorm (vrd. teoreem 5.9). Edasi, iga $x \in X_0$ jaoks saab leida $\alpha > 0$ omadusega $x \in \alpha V$, seega $|f_0(x)| = |f_0(\alpha v)| = \alpha |f_0(v)| \leq \alpha$, kus $x = \alpha v$, $v \in V \cap X_0$. Saame

$$|f_0(x)| \leq \inf\{\alpha > 0 \mid x \in \alpha V\} = p_V(x) \quad (x \in X_0).$$

Tõestuse lõpuleviimiseks rakendame teoreemi 6.4 ning jätkame funktsionaali f_0 kogu ruumile X nii, et saadud jätk $f \in X^*$ rahuldaks võrratust $|f(x)| \leq p_V(x)$ $(x \in X)$. Kuna p_V on pidev poolnorm, siis lause 7.10 põhjal $f \in X'$. ■

Tõestatud lause võimaldab anda vastuse eespool püstitatud küsimusele pidevate lineaarsete funktsionaalide rohkuse kohta lokaalselt kumeras ruumis.

Teoreem 7.12 *Eralduva LKR-i X kaasruum X' eraldab punktid ruumis X.*

Tõestus. Võtame suvalise punkti $x_0 \in X \setminus \{0\}$ ning pideva poolnormi $p : X \to \mathbb{R}$ omadusega $p(x_0) \neq 0$ (vrd. lause 7.3). Meie eesmärk on leida niisugune $f \in X'$, mille korral $f(x_0) \neq 0$. Moodustame alamruumi $X_0 := \{\lambda x_0 \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$ ning defineerime funktsionaali

$$f_0 : X_0 \to \mathbb{K}, \;\; \lambda x_0 \mapsto \; \lambda p(x_0).$$

Ilmselt on f_0 lineaarne, lause 7.10 kohaselt on ta ka pidev, sest

$$|f_0(\lambda x_0)| = |\lambda| \, p(x_0) = p(\lambda x_0) \quad (\lambda \in \mathbb{K}).$$

Rakendades lauset 7.11, leiame $f \in X'$, mis on funktsionaali f_0 jätk. Siis $f(x_0) = p(x_0) \neq 0$. ■

Ülesanne 5. Tõestada lause 7.10.
Ülesanne 6. Kui vektorruumis X on defineeritud kaks topoloogiat τ_1 ja τ_2 ning $\tau_1 \subset \tau_2$, siis $(X, \tau_1)' \subset (X, \tau_2)'$.

Näide 3. Vaatleme veel kord art. 4.3, näites 2 käsitletud kõigi lõigus $[a, b]$ Lebesgue'i mõttes mõõtuvate peaaegu kõikjal lõplike funktsioonide TVR-i $S[a, b]$. Me veendusime, et selle ruumi topoloogiline koonduvus langeb kokku funktsionaaljada mõõdu järgi koonduvusega lõigus $[a, b]$. Funktsiooniteooriast teame, et $S[a, b]$ on lihtsate funktsioonide hulga sulund mõõdu järgi koonduvuse mõttes, kus lihtsate funktsioonide all mõistame lõigu $[a, b]$ intervallide karakteristlike funktsioonide lineaarseid kombinatsioone. Olgu $f \in S[a, b]'$, eeldame, et $f \neq 0$. Märgime tähega H lõigu $[a, b]$ kõigi intervallide karakteristlike funktsioonide hulga. Kuna span H on tihe TVR-is $S[a, b]$, siis $f|_H \neq 0$. Seetõttu saame iga $n \in \mathbb{N}$ puhul valida intervalli $\Delta_n \subset [a, b]$ nii, et mes$\Delta_n < \frac{1}{n}$ ja tema karakteristlik funktsioon χ_{Δ_n} rahuldab tingimust $f(\chi_{\Delta_n}) =: \delta_n \neq 0$. Tähistame $x_n := \frac{1}{\delta_n}\chi_{\Delta_n}$ $(n \in \mathbb{N})$ ja paneme tähele, et $x_n \to 0$ mõõdu järgi, s.t. $x_n \to 0$ TVR-s $S[a, b]$. Funktsionaali f pidevuse tõttu $f(x_n) \to 0$ $(n \to \infty)$. Samal ajal

$$f(x_n) = f\left(\frac{1}{\delta_n}\chi_{\Delta_n}\right) = \frac{1}{\delta_n} f(\chi_{\Delta_n}) = 1 \;\; (n \in \mathbb{N}).$$

Saadud vastuolu annab tunnistust sellest, et *TVR-is $S[a, b]$ ei leidu ühtegi mittetriviaalset pidevat lineaarset funktsionaali, s.t. $S[a, b]' = \{0\}$.*

Näide 3 ütleb meile muuhulgas, et teoreem 7.12 ei ole ülekantav kõigile topoloogilistele vektorruumidele. Leidub metriseeruvaid (seega eralduvaid) topoloogilisi vektorruume, millel ainukeseks pidevaks lineaarseks funktsionaaliks on nullfunktsionaal. Selline situatsioon (ka mitte-eralduvate) lokaalselt kumerate ruumide puhul ei ole võimalik (vrd. märkus pt. 6 lõpus).

7.5 Veel kaks eraldamisteoreemi

Me tuletame teoreemist 6.6 veel kaks eraldamisteoreemi. Järgmine lause on siduvaks lüliks nende ja teoreemi 6.6 vahel.

Lause 7.13 *Kui E on LKR-i X kumer alamhulk ja $x_0 \in X \diagdown \overline{E}$, siis leidub selline funktsionaal $f \in X'$, et $f(x_0) \notin \overline{f(E)}$.*

Tõestus. Kuna x_0 ei kuulu alamhulga E sulundisse, siis vastavalt ülesande 2 väitele saame valida lahtise kumera nulliümbruse U omadusega $(x_0 + U) \cap E = \emptyset$ (põhjendada!)✠. Rakendame kumeratele hulkadele $G := x_0 + U$ ja E teoreemi 6.6 ning leiame funktsionaali $f \in X'$, mis rahuldab tingimust $f(x_0 + U) \cap f(E) = \emptyset$. Ilmselt on $f(x_0 + U)$ lahtine hulk ruumis $\mathbb{K}$ (vt. pt. 6, ülesanne 1), seetõttu saab punktile $f(x_0)$ leida ümbruse $B \subset f(x_0 + U)$. Niisiis, $B \cap f(E) = \emptyset$, järelikult $f(x_0) \notin \overline{f(E)}$. ■

Teoreem 7.14 *Olgu X LKR.*

(*a*) *Kui $E \subset X$ on absoluutselt kumer ja $x_0 \in X \diagdown \overline{E}$, siis leidub funktsionaal $f \in X'$ omadusega*

$$|f(x)| \leq 1 \quad (x \in E), \qquad f(x_0) > 1.$$

(*b*) *Olgu X_0 ruumi X vektoralamruum. Element $x_0 \in X$ on alamruumi X_0 puutepunkt parajasti siis, kui $f(x_0) = 0$ iga niisuguse funktsionaali $f \in X'$ korral, mis rahuldab tingimust $f|_{X_0} = 0$.*

Tõestus. (*a*) Antud eeldustel saab lause 7.14 kohaselt leida sellise funktsionaali $g \in X'$, mille puhul $g(x_0) \notin \overline{g(E)}$. Seejuures on $g(E)$ ning järelikult ka $\overline{g(E)}$ absoluutselt kumer alamhulk vektorruumis $\mathbb{K}$. Tähendab, $\overline{g(E)}$ on kas kinnine ring komplekstasandil (juhul $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) või reaaltelje lõik (juhul $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) keskpunktiga 0 (kontrollida!)✠. Kuna $g(x_0) \notin \overline{g(E)}$, siis $g(x_0) > \sup_{x \in E} |g(x)| =: \alpha$. Defineerime funktsionaali seosega

$$f := \begin{cases} \frac{|g(x_0)|}{\alpha g(x_0)} g, & \text{kui } \alpha \neq 0, \\ \frac{2}{g(x_0)} g, & \text{kui } \alpha = 0, \end{cases}$$

siis suvalise $x \in E$ puhul $|f(x)| = \frac{|g(x)|}{\alpha} \leq 1$, kui $\alpha \neq 0$, ning $|f(x)| = 0$, kui $\alpha = 0$. Samal ajal $f(x_0) > 1$. Niisiis on funktsionaalil f kõik nõutud omadused.

(*b*) *Tarvilikkus.* Olgu $x_0 \in \overline{X_0}$, siis leidub alamruumi X_0 elementide pere $(x_\alpha)_{\alpha \in \Gamma}$, mis koondub punktiks x_0 TVR-s X. Kui $f \in X'$ on nullfunktsionaal alamruumil X_0, siis $f(x_0) = \lim_\alpha f(x_\alpha) = 0$.

Piisavus. Oletame, et $x_0 \notin \overline{X_0}$ ja rakendame lauset 7.13. Selle kohaselt leidub $f \in X'$ omadusega $f(x_0) \notin \overline{f(X_0)}$. Järelikult peab $\overline{f(X_0)}$ olema ruumi $\mathbb{K}$ pärisalamruum, s.t. $\overline{f(X_0)} = \{0\}$, millest tuleneb $f|_{X_0} = 0$. Samal ajal $f(x_0) \neq 0$. ■

8 Vektorruumide duaalsed paarid

8.1 Duaalne paar

Järgmised kaks peatükki on pühendatud topoloogiliste vektorruumide duaalsusteooriale. Selle teooria lähteidee - *uurida topoloogilist vektorruumi tema kaasruumi abil* - on pärit klassikalisest funktsionaalanalüüsist. Siin vaadeldavas kontekstis saab see idee oluliselt üldisema käsitluse.

Vektorruumide duaalne paar. Olgu (X, τ) eralduv LKR. Nagu me eelmises peatükis veendusime, on tema kaasruumis X' piisavalt palju elemente, eraldamaks punktid ruumis X. Duaalsusteooria üks tüüpilisemaid ja fundamentaalsemaid ülesandeid on

(*) *kirjeldada kõiki lokaalselt kumeraid topoloogiaid τ' vektorruumil X, millele vastav kaasruum $(X, \tau')'$ on X'.*

Selle probleemi ning temaga seotud küsimuste uurimiseks vajaliku tehnilise aparatuuri ehitamist alustame duaalse paari mõiste sissetoomisest.

Definitsioon. Olgu X ja Y vektorruumid üle ühe ja sama skalaaride korpuse $\mathbb{K}$. Öeldakse, et vektorruumid X ja Y moodustavad *duaalse paari* $\langle X, Y\rangle$, kui eksisteerib selline bilineaarne funktsionaal

$$B : X \times Y \to \mathbb{K}, \quad (x, f) \mapsto B(x, f) =: \langle x, f\rangle,$$

mis eraldab punktid nii ruumis X kui ka ruumis Y, s.t. (vrd. sissejuhatus)

$$\forall x \in X \setminus \{0\} \quad \exists f \in Y : \quad \langle x, f\rangle \neq 0 \tag{8.1}$$

ja

$$\forall f \in Y \setminus \{0\} \quad \exists x \in X : \quad \langle x, f\rangle \neq 0. \tag{8.2}$$

Sel juhul kõneldakse ka, et bilineaarne funktsionaal B *korraldab duaalsuse* $\langle X, Y\rangle$.

Bilineaarse funktsionaali sümmeetriaomadustest tuleneb **duaalse paari sümmeetria**: kui B korraldab duaalsuse $\langle X, Y\rangle$, siis korraldab ta ka duaalsuse $\langle Y, X\rangle$.

Näide 1. Olgu $\ell^\infty := \left\{x = (\xi_k)_{k\in\mathbb{N}} \mid \sup_k |\xi_k| < \infty\right\}$ (kõigi tõkestatud jadade vektorruum) ja $\ell^1 := \{y = (\eta_k) \mid \sum_k |\eta_k| < \infty\}$ (kõigi absoluutselt koonduvate ridade vektorruum). Bilineaarne funktsionaal

$$B : \ell^\infty \times \ell^1 \to \mathbb{K}, \quad (x, y) \mapsto \sum_k \xi_k \eta_k$$

korraldab duaalsuse $\langle \ell^\infty, \ell^1\rangle$. Tõepoolest, rida $\sum_k \xi_k \eta_k$ koondub (absoluutselt) kõikide $x \in \ell^\infty$ ja $y \in \ell^1$ korral (kontrollida!)✠, seejuures on lineaarsed funktsionaalid

$$B_x : \ell^1 \to \mathbb{K}, \quad y \mapsto \sum_k \xi_k \eta_k \quad \text{ja} \quad B_y : \ell^\infty \to \mathbb{K}, \quad x \mapsto \sum_k \xi_k \eta_k$$

nullfunktsionaalid vaid sel juhul, kui elemendid x ja y on nullelemendid vastavalt ruumis ℓ^∞ ja ℓ^1 (veenduda!)✠.

Näide 2. Olgu L^2 kõigi lõigul $[a,b]$ Lebesgue'i mõttes integreeruva ruuduga reaalsete väärtustega funktsioonide $x = x(t)$ vektorruum, s.t.

$$L^2 = \left\{ x = x(t) \mid \int_a^b |x(t)|^2 \, dt < \infty \right\}.$$

Seejuures samastame vektorruumi punktidena need funktsioonid, mis sel lõigul langevad kokku peaegu kõikjal. Ruum L^2 on Hilberti ruum skalaarkorrutisega

$$B : L^2 \times L^2 \to \mathbb{K}, \quad (x,y) \to \int_a^b x(t)\, y(t)\, dt.$$

Ilmselt on B bilineaarne funktsionaal, kusjuures iga $x \in L^2 \diagdown \{0\}$ korral on $B(x,x) = \int_a^b |x(t)|^2 \, dt \neq 0$. See asjaolu garanteerib, et B korraldab duaalsuse $\langle L^2, L^2 \rangle$.

Näide 3 (väga oluline!). Iga vektorruum X ja tema algebraline kaasruum X^* moodustavad duaalse paari $\langle X, X^* \rangle$. Defineerime bilineaarse funktsionaali

$$B : X \times X^* \to \mathbb{K}, \ (x,f) \mapsto f(x)$$

ja näitame, et ta eraldab punktid nii ruumis X kui ka kaasruumis X^*. Tingimuse (8.2) kontroll on lihtne: kui $f \in X^*$ on selline funktsionaal, et $f(x) = 0$ iga $x \in X$ puhul, siis $f = 0$ vektorruumis X^*. Tingimuse (8.1) kontrollimiseks tõestame järgmise lause.

Lause 8.1 *Vektorruumi X algebraline kaasruum X^* eraldab punktid vektorruumis X.*

Tõestus. Fikseerime vektorruumis X mingi algebralise baasi E. Meenutame, et algebraline baas on selline lineaarselt sõltumatu alamhulk, mille lineaarne kate langeb kokku kogu vektorruumiga X. Teisi sõnu, iga elemendi $x \in X$ korral leiduvad $n \in \mathbb{N}$, elemendid $a_1, ..., a_n$ hulgast E ja skalaarid $\lambda_1, ..., \lambda_n$ nii, et

$$x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k, \tag{8.3}$$

kusjuures see esitus on ühene. Olgu $x_0 \in X \diagdown \{0\}$, siis baasis E leidub mingi element a, mis kuulub elemendi x esitusse (8.3), seejuures talle vastav kordaja on nullist erinev. Teisi sõnu, elemendi x_0 esituses (8.3) leidub selline $k_0 \in \{1, ..., n\}$, et $a = a_{k_0}$ ja $\lambda_{k_0} \neq 0$. Defineerime nüüd funktsionaali $f : X \to \mathbb{K}$ järgmiselt: suvalise $x \in X$ puhul on $f(x)$ baasielemendi a kordaja elemendi x esituses (8.3), kui a kuulub sellesse esitusse, kui ta ei kuulu, siis $f(x) := 0$. Saab näidata, et f on lineaarne, s.t. $f \in X^*$ (kontrollida!)✠. Seejuures $f(x_0) = \lambda_{k_0} \neq 0$. ∎

Näite 3 põhjal on selge, et *iga vektorruum X ja tema algebralise kaasruumi X^* iga selline vektoralamruum Y, mis eraldab punktid ruumis X, moodustavad duaalse paari.* Sel juhul bilineaarne funktsionaal

$$B : X \times Y \to \mathbb{K}, \ (x,f) \mapsto f(x) \tag{8.4}$$

korraldab duaalsuse $\langle X, Y \rangle$. Tõepoolest, iga $x \in X \diagdown \{0\}$ korral leidub $f \in Y$ omadusega $\langle x, f \rangle = f(x) \neq 0$, teisalt on iga $f \in Y \diagdown \{0\}$ puhul olemas punkt $x \in X$, et $f(x) \neq 0$.

Tegelikult kehtib ka **vastupidine väide:** *Iga duaalse paari* $\langle X, Y\rangle$ *korral saab vektorruumi* Y *samastada ruumi* X *algebralise kaasruumi mingi vektoralamruumiga ja vastupidi, vektorruumi* X *saab samastada ruumi* Y *algebralise kaasruumi vektoralamruumiga.* Veendume selles.

Olgu $\langle X, Y\rangle$ suvaline duaalne paar bilineaarse funktsionaaliga B. Tähistame iga $f \in Y$ korral

$$G_f(x) := \langle x, f\ \rangle \quad (x \in X),$$

siis G_f on lineaarne funktsionaal (veenduda)✠, s.t. $G_f \in X^*$. Defineerime kujutuse

$$\pi : Y \to X^*, \quad f \mapsto G_f,$$

lihtne kontroll näitab, et π on lineaarne (veenduda)✠. Veelgi enam, ta on ka üks-ühene: kui $f, g \in Y$ ja $f \neq g$, siis saab valida $x_0 \in X$ omadusega $\langle x_{0,}, f\rangle \neq \langle x_0, g\rangle$, mistõttu $\pi(f) \neq \pi(g)$. Kujutust π nimetatakse vektorruumi Y *kanooniliseks sisestuseks* vektorruumi X^*, ta korraldab üks-ühese vastavuse vektorruumide Y ja $\widehat{Y} := \pi(Y) \subset X^*$ vahel, säilitades seejuures vektorruumi tehted. Seega on Y ja $\widehat{Y}$ vektorruumidena samastatavad ja selles tähenduses kehtib sisalduvus $Y \subset X^*$, kusjuures Y eraldab punktid vektorruumis X (kontrollida!)✠. **Kokkuvõtteks,** me võime alati duaalse paari $\langle X, Y\rangle$ üht komponenti, vektorruumi Y vaadelda teise ruumi X algebralise kaasruumi X^* vektoralamruumina, mis eraldab punktid ruumis X. Täpselt samamoodi on X interpreteeritav ruumi Y^* vektoralamruumina, mis eraldab punktid ruumis Y.

Märkus (oluline). Edaspidi lähtume me just sellisest duaalse paari interpretatsioonist. Niisiis, *duaalse paari moodustavad vektorruumid* X *ja* Y, *kus* $Y \subset X^*$ *ja ta eraldab punktid ruumis* X. Bilineaarne funktsionaal (8.4) on sel juhul automaatselt määratud.

Ülesanne 1. Tähistame

$$\omega := \{x = (\xi_k) \mid \xi_k \in \mathbb{K} \ \ (k \in \mathbb{N})\}$$

(kõigi arvjadade vektorruum, vt. art. 4.3, näide 3) ja

$$\varphi := \{u \in \omega \mid \exists k_u \in \mathbb{N}\colon\ u_k = 0, \text{ kui } k > k_u\ \}$$

(kõigi lõplike jadade ruum). Defineerime bilineaarse funktsionaali B seosega

$$B : \omega \times \varphi \to \mathbb{K}, \ (x, u) \mapsto \sum_k u_k \xi_k.$$

Veenduda, et bilineaarne funktsionaal B korraldab duaalsuse $\langle \omega, \varphi\rangle$.

8.2 Nõrk topoloogia

Antud duaalsusega kooskõlas olev topoloogia. Vastavalt definitsioonile on duaalne paar (ehk duaalsus) puhtalgebraline mõiste, kuid ta mängib topoloogiliste vektorruumide teoorias olulist rolli. Märgime (see on oluline!), et kuna teoreemi 7.14 kohaselt eraldab eralduva LKR-i X topoloogiline kaasruum X' punktid ruumis X, siis sel juhul on $\langle X, X' \rangle$ duaalne paar.

Definitsioon. Olgu $\langle X, Y \rangle$ duaalne paar ja olgu vektorruumil X defineeritud lokaalselt kumer topoloogia τ. Kui $(X, \tau)' = Y$, siis öeldakse, et topoloogia τ on duaalsusega $\langle X, Y \rangle$ *kooskõlas* ehk *ühilduv*.

Meie eesmärgiks selles ja järgnevates peatükkides on *kirjeldada antud duaalsusega kooskõlas olevaid lokaalselt kumeraid topoloogiaid* ning uurida nende omadusi. Muuhulgas näitame, et sellised topoloogiad on alati olemas ning nende hulgas on nii nõrgim kui ka tugevaim.

On lihtne veenduda, et kui f on lineaarne funktsionaal vektorruumis X, siis seosega

$$p_f(x) := |\langle x, f \rangle| = |f(x)| \quad (x \in X) \tag{8.5}$$

määratud funktsionaal $p_f : X \to \mathbb{R}$ on poolnorm (kontrollida!)✠.

Definitsioon. Olgu $\langle X, Y \rangle$ duaalne paar. Poolnormide süsteemiga $\{p_f\}_{f \in Y}$ määratud lokaalselt kumerat topoloogiat vektorruumis X nimetatakse (duaalse paariga $\langle X, Y \rangle$ määratud) *nõrgaks topoloogiaks* ja tähistatakse $\sigma(X, Y)$.

Esitame siinkohal nõrga topoloogia mõned **lihtsamad omadused**, mis tulenevad vahetult definitsioonist.

1^0. *Nõrk topoloogia $\sigma(X, Y)$ on eralduv:* kuna Y eraldab punktid ruumis X, siis iga $x \in X \setminus \{0\}$ jaoks saab leida funktsionaali $f \in Y$ omadusega $p_f(x) = |f(x)| \neq 0$, väide järeldub lausest 7.3(a).

2^0. *Topoloogia $\sigma(X, Y)$ nulliümbruste baasi* moodustavad alamhulgad

$$W_{\varepsilon, f_1, \ldots, f_n} = \left\{ x \in X \mid \max_{1 \leq i \leq n} |f_i(x)| \leq \varepsilon \right\} \quad (\varepsilon > 0,\ f_1, \ldots, f_n \in Y,\ n \in \mathbb{N}),$$

see tuleneb vahetult lausest 7.3(a). Tegelikult saab seda baasi kirjeldada lihtsamalt: kuna Y on vektorruum, siis $W_{\varepsilon, f_1, \ldots, f_n} = W_{g_1, \ldots, g_n}$, kus $g_i := \frac{1}{\varepsilon} f_i \in Y \quad (i = 1, \ldots, n)$, seetõttu moodustavad sellesama baasi nulliümbrused $W_{f_1, \ldots, f_n} := W_{1, f_1, \ldots, f_n}$ $(f_1, \ldots, f_n \in Y,\ n \in \mathbb{N})$.

3^0. *Koonduvus topoloogias $\sigma(X, Y)$ on funktsionaalanalüüsi kursusest tuntud nõrk koonduvus* (vrd. lause 7.3(a)):

$$\begin{aligned} x_\alpha \to x\ (\sigma(X, Y)) &\Leftrightarrow \forall f \in Y : p_f(x_\alpha - x) \to 0 \\ &\Leftrightarrow \forall f \in Y : |f(x_\alpha - x)| \to 0 \\ &\Leftrightarrow \forall f \in Y : f(x_\alpha) \to f(x). \end{aligned}$$

Analoogiliselt kirjeldatakse *tõkestatust nõrga topoloogia suhtes:* alamhulk $E \subset X$ on tõkestatud LKR-s $(X, \sigma(X, Y))$ parajasti siis, kui (vrd. lause 7.3(b))

$$\forall f \in Y : \sup_{x \in E} |f(x)| < \infty.$$

4^0. *Vektorruumil* Y *on nõrk topoloogia* $\sigma(Y,X)$ määratud sellise poolnormide süsteemiga $\{p_x\}_{x\in X}$, kus

$$p_x(f) := |\langle x, f\rangle| = |f(x)| \quad (f \in Y).$$

Nulliümbruste baasiks on alamhulkade

$$W_{x_1,\dots,x_n} := \left\{ f \in Y \mid \max_{1\le i\le n} |f(x_i)| \le 1 \right\} \quad (x_1,\dots,x_n \in X,\ n \in \mathbb{N})$$

süsteem. Pere $(f_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$ koondub punktiks $f \in Y$ LKR-s $(Y, \sigma(Y,X))$ parajasti siis, kui

$$\forall x \in X : f_\alpha(x) \to f(x),$$

alamhulk $D \subset Y$ on $\sigma(Y,X)$-tõkestatud parajasti siis, kui

$$\forall x \in X : \sup\{|f(x)| \mid f \in D\} < \infty.$$

Ülesanne 2. Kirjeldada jada $\left(x^{(n)}\right)$ koonduvust LKR-s $(\ell^\infty, \sigma(\ell^\infty, \ell^1))$ (vt. näide 1). Kas jada $\left(x^{(n)}\right)$ on koonduv, kui

$$x^{(1)} := (1,0,0,\dots),\ x^{(2)} := (1,1,0,0,\dots),\dots,\ x^{(n)} := (1,1,\dots,1,0,0,\dots),\dots?$$

Ülesanne 3. Kas ülesandes 2 toodud jada $\left(x^{(n)}\right)$ on koonduv LKR-s $(\ell^1, \sigma(\ell^1, \ell^\infty))$?

Ülesanne 4. Näidata, et jada $x^{(n)} \to x$ topoloogias $\sigma(\omega, \varphi)$ parajasti siis, kui $\xi_k^{(n)} \to \xi_k$ protsessis $n \to \infty$ iga $k \in \mathbb{N}$ korral.

Nõrk täielik tõkestatus. Teatavasti on topoloogilises vektorruumis iga täielikult tõkestatud hulk tõkestatud (vt. art. 4.1), vastupidine väide on üldjuhul vale (piisab vaadelda suvalist lõpmatumõõtmelist normeeritud ruumi (selgitada!)✠). Me näitame järgnevalt, et nõrgas topoloogias langevad need kaks mõistet kokku.

Lause 8.2 *Olgu* $\langle X, Y\rangle$ *duaalne paar. Iga tõkestatud alamhulk* E *LKR-s* $(X, \sigma(X,Y))$ *on täielikult tõkestatud.*

Tõestus. Olgu $E \subset X$ nõrgas topoloogias $\sigma(X,Y)$ tõkestatud alamhulk. Võtame $\sigma(X,Y)$-nulliümbruste baasist suvalise nulliümbruse (vrd. 2^0)

$$U = \left\{ x \in X \mid \max_{1\le i\le n} |f_i(x)| \le 1 \right\},$$

kus $f_1,\dots,f_n \in Y$. Meie eesmärk on leida punktid $x_1,\dots,x_r \in E$ omadusega $E \subset \bigcup_{i=1}^r (x_i + U)$. Defineerime lineaarse kujutuse

$$T : X \to m_n, \quad x \mapsto (f_1(x),\dots,f_n(x))$$

ja tähistame tähega B kinnise ühikkera kõigi n-mõõtmeliste vektorite $z = (\varsigma_1,\dots,\varsigma_n)$ normeeritud ruumis m_n, s.t.

$$B = \left\{ z = (\varsigma_1,\dots,\varsigma_n) \mid \|z\| := \max_{1\le i\le n} |\varsigma_i| \le 1 \right\}$$

(vrd. art. 4.2 algus). Selge, et $U = T^{-1}(B)$. Võtame suvalise $z \in T(X)$ ning leiame $x \in X$, mille korral $T(x) = z$, siis $x + U = T^{-1}(z + B)$. Tõepoolest,

$$\begin{aligned} y \in T^{-1}(z+B) &\Leftrightarrow T(y) = z + v,\ v \in B \\ &\Leftrightarrow T(y) - T(x) \in B \Leftrightarrow y - x \in T^{-1}(B) \\ &\Leftrightarrow y \in x + U. \end{aligned}$$

Tähistame $A := T(E)$. Kuna E on $\sigma(X, Y)$-tõkestatud, siis saab valida $\lambda > 0$ omadusega $\lambda E \subset U$, mistõttu $\lambda A = T(\lambda E) \subset T(U) \subset B$. Niisiis on A tõkestatud alamhulk lõplikumõõtmelises normeeritud ruumis m_n ning seega suhteliselt kompaktne (selgitada!)✠, järelikult ka täielikult tõkestatud (selgitada!)✠. Valime vektorid $z_1, ..., z_r \in A$ nii, et $A \subset \bigcup_{i=1}^{r}(z_i + B)$, ja neile vastavad punktid $x_1, ..., x_r \in E$ omadusega $T(x_i) = z_i \quad (i = 1, ..., r)$. Siis

$$E \subset T^{-1}(A) \subset T^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{r}(z_i + B)\right) = \bigcup_{i=1}^{r} T^{-1}(z_i + B) = \bigcup_{i=1}^{r}(x_i + U),$$

millega lause on tõestatud. ■

Nõrga topoloogia omaduste täpsemaks kirjeldamiseks vajame järgmist lemmat.

Lause 8.3 *Olgu $f, f_1, ..., f_n$ lineaarsed funktsionaalid, mis on määratud vektorruumis X. Selleks, et kehtiks seos $f \in span\{f_1, ..., f_n\}$, on tarvilik ja piisav tingimus*

$$f_i(x) = 0 \quad (i = 1, ..., n) \ \Rightarrow \ f(x) = 0. \tag{8.6}$$

Tõestus. *Tarvilikkus.* Olgu $f \in \text{span}\{f_1, ..., f_n\}$, eeldame, et $f_i(x) = 0 \quad (i = 1, ..., n)$ mingi $x \in X$ korral. Kuna sel juhul $f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$, siis on $f(x) = 0$, s.t. kehtib implikatsioon (8.6).

Piisavuse tõestamiseks kasutame induktsioonimeetodit. Olgu kõigepealt $n = 1$, eeldame, et tingimus (8.6) on täidetud, s.t.

$$f_1(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0. \tag{8.7}$$

Kui $f_1 = 0$, siis ka $f = 0$, tähendab, $f = f_1$. Kui $f_1 \neq 0$, siis leidub selline $z \in X$, et $f_1(z) = 1$. Iga $x \in X$ puhul $f_1(x - f_1(x)z) = 0$, mistõttu eelduse (8.7) kohaselt $f(x - f_1(x)z) = 0$ ehk $f = \lambda f_1$, kus $\lambda := f(z)$. Seega väide kehtib juhul $n = 1$.

Eeldame nüüd, et väide kehtib juhul $n-1$, s.t. implikatsioonist $f_i(x) = 0 \ (i = 1, ..., n-1) \Rightarrow f(x) = 0$ järeldub $f \in \text{span}\{f_1, ..., f_{n-1}\}$. Näitame, et väide kehtib siis ka juhul n s.t. tingimusest (8.6) tuleneb $f \in \text{span}\{f_1, ..., f_n\}$. Ilmselt on see nii, kui mingi $f_i = 0$ (selgitada!)✠, seetõttu vaatleme juhtu kus $f_n \neq 0$. Leiame $z \in X$, et $f_n(z) = 1$, ja moodustame funktsionaalid

$$g := f - f(z) f_n, \ g_i := f_i - f_i(z) f_n \quad (i = 1, ..., n-1),$$

siis $g_i \in \text{span}\{f_1, ..., f_n\}$ $(i = 1, ..., n-1)$. Nüüd veendume, et

$$g_i(x) = 0 \quad (i = 1, ..., n-1) \ \Rightarrow \ g(x) = 0.$$

Kui see implikatsioon on õige, siis induktsiooni eelduse kohaselt $g \in \operatorname{span}\{g_1, ..., g_{n-1}\}$ ja järelikult

$$f = g + f(z) f_n \in \operatorname{span} \{g_1, ..., g_{n-1}, f_n\} \subset \operatorname{span}\{f_1, ..., f_n\}.$$

Niisiis, olgu $x \in X$ selline element, et $g_i(x) = 0$ $(i = 1, ..., n-1)$. Tähistame $y := x - f_n(x) z$, siis

$$f_i(y) = f_i(x) - f_n(x) f_i(z) = g_i(x) = 0 \ \ (i = 1, ..., n-1),$$
$$f_n(y) = f_n(x) - f_n(x) f_n(z) = f_n(x) - f_n(x) = 0.$$

Tingimuse (8.6) kohaselt $f(y) = 0$, seetõttu saamegi, et $g(x) = 0$ iga sellise elemendi x puhul, mil $g_i(x) = 0$ $(i = 1, ..., n-1)$. Lemma on tõestatud. ■

Teoreem 8.4 *Topoloogia $\sigma(X, Y)$ on kooskõlas duaalsusega $\langle X, Y\rangle$, s.t. $(X, \sigma(X, Y))' = Y$.*

Tõestus. Lihtne on näha, et $Y \subset (X, \sigma(X, Y))'$. Tõepoolest, kui $f \in Y$, siis seosega (8.5) määratud poolnorm p_f on pidev topoloogias $\sigma(X, Y)$ (vrd. lause 7.3(a)), millest lause 7.10 põhjal järeldub ka funktsionaali f pidevus nõrgas topoloogias $\sigma(X, Y)$.

Vastupidise sisalduvuse $(X, \sigma(X, Y))' \subset Y$ tõestamiseks olgu $f \in (X, \sigma(X, Y))'$. Tähistame $V := \{x \in X \mid |f(x)| \le 1\} = f^{-1}(D)$, kus $D := \{\lambda \in \mathbb{K} \mid |\lambda| \le 1\}$ on ühikkera Banachi ruumis $\mathbb{K}$. Kuna f on pidev, siis V on $\sigma(X, Y)$-nulliümbrus (selgitada!)✠, seega peab leiduma nulliümbruste baasis ümbrus $W := W_{f_1,...,f_n}$ (vrd. märkus 2^0) omadusega $W \subset V$. Teiste sõnadega,

$$V \supset \left\{x \in X \mid \max_{1\le i\le n} |f_i(x)| \le 1\right\} = \bigcap_{i=1}^{n} V_i,$$

kui tähistada $V_i := f_i^{-1}(D)$ $(i = 1, ..., n)$. Näitame, et funktsionaalid $f, f_1, ..., f_n$ rahuldavad implikatsiooni (8.6), siis lemma 8.3 põhjal $f \in \operatorname{span}\{f_1, ..., f_n\} \subset Y$ ja me saame, et $(X, \sigma(X, Y))' \subset Y$.

Oletame vastupidist: olgu $x_0 \in X$ element omadusega $f(x_0) \ne 0$, $f_1(x_0) = ... = f_n(x_0) = 0$. Siis leidub arv $\alpha > 0$ omadusega $|f(\alpha x_0)| = \alpha |f(x_0)| > 1$, järelikult $\alpha x_0 \notin V$. Samal ajal $f_i(\alpha x_0) = \alpha f_i(x_0) = 0$ iga $i = 1, ..., n$ puhul, mistõttu $\alpha x_0 \in \bigcap_{i=1}^{n} V_i \subset V$. Saadud vastuolu näitabki, et funktsionaalid $f, f_1, ..., f_n$ rahuldavad tingimust (8.6). ■

Teoreem 8.5 *Nõrk topoloogia $\sigma(X, Y)$ on nõrgim duaalsusega $\langle X, Y\rangle$ kooskõlas olevatest lokaalselt kumeratest topoloogiatest.*

Tõestus. Võtame vektorruumis X suvalise lokaalselt kumera topoloogia τ omadusega $(X, \tau)' = Y$ ja fikseerime $W := \bigcap_{i=1}^{n} V_i$ topoloogia $\sigma(X, Y)$ nulliümbruste baasist, kus $V_i := f_i^{-1}(D)$, $f_1, ..., f_n \in Y$ $(i = 1, ..., n)$, $D := \{\lambda \in \mathbb{K} \mid |\lambda| \le 1\}$. Siis funktsionaalid $f_1, ..., f_n$ on τ-pidevad, mistõttu $V_1, ..., V_n$ ning järelikult ka W on τ-nulliümbrused. Tähendab, $\sigma(X, Y) \subset \tau$. ■

Järeldus 8.6 *Kui (X, τ) on eralduv LKR ja $X' := (X, \tau)'$, siis topoloogia τ on kooskõlas duaalsusega $\langle X, X'\rangle$ ja $\tau \supset \sigma(X, X')$.*

Nõrga topoloogiaga seoses teeme veel ühe **olulise märkuse.**

5^0. Olgu (X, τ) LKR, mille topoloogia τ on määratud poolnormide süsteemiga $\{p_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$. *Vektoralamruumis* $X_0 \subset X$ *indutseeritud topoloogia määratakse samade poolnormidega*, täpsemalt öeldes, nende ahendite süsteemiga $\left\{p_{\gamma|X_0}\right\}_{\gamma\in\Gamma}$. Olgu $X' := (X, \tau)'$ ja $X_0' := \left(X_0, \tau_{|X_0}\right)'$, paneme tähele, et

$$X_0' = \left\{f_{|X_0} \mid f \in X'\right\}. \tag{8.8}$$

Tõepoolest, ühelt poolt on sisalduvus $\left\{f_{|X_0} \mid f \in X'\right\} \subset X_0'$ ilmne, teisalt saab iga pideva lineaarse funktsionaali $g : X_0 \to \mathbb{K}$ pidevalt jätkata kogu ruumile X (vrd. lause 7.11), niisiis leidub $f \in X'$ omadusega $f_{|X_0} = g$.

Vaatleme vektoralamruumil X_0 kahte nõrka topoloogiat $\sigma(X_0, X_0')$ ja $\sigma(X, X')_{|X_0}$. Esimene on määratud poolnormide süsteemiga $\{p_g\}_{g\in X_0'}$ ja teine süsteemiga $\left\{p_{f|X_0}\right\}_{f\in X'}$. Pidades silmas võrdust (8.8), on selge, et need kaks süsteemi määravad ühe ja sama topoloogia, s.t.

$$\sigma(X_0, X_0') = \sigma(X, X')\,|_{X_0}\,.$$

8.3 Polaarid

Selle artikli eesmärk on duaalsusteooria tehnilise aparatuuri täiustamine. Me alustame aga ühe selle teooria olulise teoreemiga, mis kirjeldab **kumerate alamhulkade sulundeid antud duaalsusega kooskõlas olevate topoloogiates**. Teoreemi tõestamisel kasutame järgmist lihtsalt kontrollitavat fakti.

Ülesanne 5. Kontrollida, et kui hulgas X on defineeritud topoloogiad τ_1 ja τ_2 ning $\tau_1 \subset \tau_2$, siis alamhulga $E \subset X$ puhul $\overline{E}^{\tau_2} \subset \overline{E}^{\tau_1}$.

Teoreem 8.7 *Olgu $\langle X, Y\rangle$ duaalne paar. Kumera alamhulga $E \subset X$ sulund on sama hulk kõigis selle duaalsusega kooskõlas olevates lokaalselt kumerates topoloogiates.*

Tõestus. Olgu τ lokaalselt kumer topoloogia vektorruumis X omadusega $(X, \tau)' = Y$. Väite tõestuseks piisab veenduda, et $\overline{E}^{\tau} = \overline{E}^{\sigma(X,Y)}$. Kuna $\sigma(X, Y) \subset \tau$ (vrd. teoreem 8.5), siis $\overline{E}^{\tau} \subset \overline{E}^{\sigma(X,Y)}$ (vrd. ülesanne 5). Vastupidise sisalduvuse näitamiseks võtame suvalise $z \in X \diagdown \overline{E}^{\tau}$ ning leiame vastavalt lausele 7.10 funktsionaali $f \in X'$ omadusega $f(z) \notin \overline{f(E)}$, kus sulund on võetud LKR-s $\mathbb{K}$. Seega $2\delta := \inf_{x\in E} |f(z) - f(x)| > 0$ (põhjendada!)✠ ehk $|f(z) - f(x)| \geq 2\delta > 0$ iga $x \in E$ korral. Kuna f on $\sigma(X, Y)$-pidev funktsionaal, siis

$$U := \{x \in X \mid |f(x)| \leq \delta\}$$

on $\sigma(X, Y)$-nulliümbrus ja $z + U$ on punkti z ümbrus nõrgas topoloogias $\sigma(X, Y)$. Seejuures $(z + U) \cap E = \emptyset$: kui $x \in z + U$, siis $x - z \in U$, mistõttu $|f(z) - f(x)| = |f(x - z)| \leq \delta$ ja seega $x \notin E$. Tähendab, $z \notin \overline{E}^{\sigma(X,Y)}$. ■

Järeldus 8.8 *Kõigil antud duaalsusega $\langle X, Y\rangle$ kooskõlas olevatel lokaalselt kumeratel topoloogiatel on ruumis X ühed ja samad kinnised kumerad hulgad.*

Tõestus. Iseseisvalt!✠ ■

Polaarid. Definitsioon. Olgu $\langle X, Y\rangle$ duaalne paar ja $E \subset X$. Alamhulka

$$E^0 := \{f \in Y \mid \forall x \in E : \ |f(x)| \leq 1\}$$

vektorruumis Y nimetatakse hulga E *polaariks* duaalsuse $\langle X, Y\rangle$ suhtes.

Analoogiliselt defineeritakse hulga $G \subset Y$ polaar G^0 vektorruumis X:

$$G^0 := \{x \in X \mid \forall f \in G : \ |f(x)| \leq 1\}.$$

Polaari mõiste osutub tõhusaks instrumendiks duaalsusteoorias. Märgime järgmisi polaariga seotud omadusi.

Ülesanne 6. Näidata, et $E \subset F \Rightarrow F^0 \subset E^0$.
Ülesanne 7. Näidata,et $(\lambda E)^0 = \frac{1}{\lambda} E^0$ $(\lambda \in \mathbb{K} \diagdown \{0\})$.
Ülesanne 8. Näidata, et $\left(\bigcup_{\alpha\in\Gamma} E_\alpha\right)^0 = \bigcap_{\alpha\in\Gamma} E_\alpha^0$.
Ülesanne 9. Tõestada, et E^0 on $\sigma(Y, X)$-kinnine absoluutselt kumer hulk.
Ülesanne 10. Vektoralamruumi $X_0 \subset X$ korral

$$(X_0)^0 = X_0^\perp := \{f \in Y \mid \forall x \in X_0 : \ f(x) = 0\}.$$

Lause 8.9 *Olgu $\mathfrak{B}$ nulliümbruste baas LKR-s (X, τ). Ruumi X kaasruum X' langeb kokku ühendiga $\cup \{U^0 \mid U \in \mathfrak{B}\}$, kus polaarid on võetud duaalsuse $\langle X, X^*\rangle$ suhtes.*

Tõestus. Väide järeldub tõsiasjast, et lineaarne funktsionaal $f : X \to \mathbb{K}$ on pidev parajasti siis, kui leidub nulliümbrus $U \in \mathfrak{B}$ omadusega $|f(x)| \leq 1$ $(x \in U)$. ■

Bipolaarid. Polaari moodustamise operatsiooni võib rakendada järjest rohkem kui üks kord. Olgu $\langle X, Y\rangle$ ja $\langle Y, Z\rangle$ duaalsed paarid, kus $X \subset Z \subset Y^*$. Hulka $E^{00} := (E^0)^0$, kus esimene polaar on võetud duaalsuse $\langle X, Y\rangle$ ja teine $\langle Y, Z\rangle$ suhtes, nimetatakse hulga E *bipolaariks* (vaadeldavate duaalsuste suhtes).

Ülesanne 11. Näidata, et $E \subset E^{00}$.

Lause 8.10 ***(teoreem bipolaarist).*** *Olgu $\langle X, Y\rangle$ ja $\langle Y, Z\rangle$ duaalsed paarid, kus $X \subset Z \subset Y^*$. Alamhulga $E \subset X$ bipolaar E^{00} vektorruumis Z langeb kokku ruumis Z võetud $\sigma(Z, Y)$-kinnise absoluutselt kumera kattega, s.t $E^{00} = \overline{absconvE}^{\sigma(Z,Y)}$.*

Tõestus. Tähistame $C := \overline{\text{absconv}E}^{\sigma(Z,Y)}$, seejuures vaatleme hulka E vektorruumi Z alamhulgana. Ilmselt on C $\sigma(Z, Y)$-kinnine absoluutselt kumer hulk (vrd. lause 5.3). Seosest $E \subset E^{00}$ ja ülesandest 9 saame sisalduvuse $E^{00} \supset C$ (kontrollida!)✠. Vastupidise sisalduvuse tõestamiseks võtame suvalise $G \in Z \diagdown C$ ning näitame, et $G \notin E^{00}$. Vastavalt teoreemile 7.14(a) leiame elemendi $\varphi \in (Z, \sigma(Z, Y))'$, mis rahuldab tingimust

$$|\varphi(F)| \leq 1 \ \ (F \in \text{absconv } E), \ \ \varphi(G) > 1.$$

Kuna $\varphi \in Y$ ja $F, G \in Z \subset Y^*$, võime sama tingimuse kirjutada kujul

$$\exists f \in Y : |F(f)| \leq 1 \ \ (F \in \text{absconv } E), \quad G(f) > 1.$$

Kui pidada silmas, et $E \subset \text{absconv } E \subset X$, saame $|f(x)| \leq 1 \ \ (x \in E)$, mis tähendab, et $f \in E^0$. Seosest $G(f) > 1$ järeldub seega $G \notin E^{00}$. Niisiis, $E^{00} \subset C$ ja kokkuvõttes $E^{00} = C$. ■

Märkus. Enamasti kasutame me teoreemi bipolaarist juhul $Z = X$. Kui X on eralduv LKR, siis alamhulga $E \subset X$ bipolaari E^{00} all mõistame me duaalsuste $\langle X, X' \rangle$ ja $\langle X', X \rangle$ suhtes võetud bipolaari, s.t.

$$E^{00} = \{x \in X \mid \text{kui } f \in X' \text{ ja iga } z \in E \text{ korral } |f(z)| \leq 1, \text{ siis } |f(x)| \leq 1\}.$$

Järeldus 8.11 *Eralduva LKR-i* (X, τ) *alamhulga* E *bipolaar* E^{00} *on hulga* E *absoluutselt kumera katte sulund LKR-s* X*, s.t.* $E^{00} = \overline{absconvE}^{\tau}$.

Järeldus 8.12 *Kui* E *on eralduva LKR-i* X *alamhulk, siis* $E^{000} = E^0$.

9 Polaartopoloogiad

9.1 Võrdpidevad hulgad ja $\mathfrak{S}$-topoloogiad

Polaaride abil on antud duaalse paari $\langle X, Y\rangle$ korral mugav defineerida lokaalselt kumeraid topoloogiaid nii ruumis X kui ka ruumis Y. **Idee** on järgmine. Me fikseerime vektorruumis Y mingi selliste alamhulkade S süsteemi $\mathfrak{S}$, et nende polaarid S^0 oleksid vektorruumis X neelavad hulgad. Kuna polaarid on alati absoluutselt kumerad, siis sel juhul on süsteem $\{S^0 \mid S \in \mathfrak{S}\}$ mingi lokaalselt kumera topoloogia nulliümbruste prebaas (vrd. art. 7.1). Seejuures huvitab meid eeskätt kaks küsimust. Esiteks, *kuidas valida süsteem S nii, et saadud topoloogia oleks eralduv*, ja teiseks, *millistel eeldustel on see topoloogia duaalsusega $\langle X, Y\rangle$ kooskõlas?*

Kuid kõigepealt **kirjeldame hulki $S \subset Y$, mille polaarid $S^0 \subset X$ on neelavad alamhulgad.**

Lause 9.1 *Olgu $\langle X, Y\rangle$ duaalne paar. Alamhulga $B \subset Y$ polaar B^0 on neelav hulk vektorruumis X parajasti siis, kui B on $\sigma(Y, X)$-tõkestatud.*

Tõestus. Paneme tähele, et suvaliste $x \in X$ ja $\lambda > 0$ korral kehtib samasus

$$\lambda x \in B^0 \Leftrightarrow \forall f \in B : |f(x)| \leq \frac{1}{\lambda} =: M.$$

Teiste sõnadega, polaar B^0 neelab elemendi $x \in X$ parajasti siis, kui

$$\exists M > 0 : |f(x)| \leq M \text{ iga } f \in B \text{ korral,}$$

s.t. kui poolnorm p_x (vrd. art. 8.2, märkus 4^0) on hulgas B tõkestatud. Järelikult neelab B^0 iga elemendi $x \in X$ (s.t. B^0 on neelav) parajasti siis, kui kõik poolnormid p_x $(x \in X)$ on hulgas B tõkestatud (s.t. kui B on $\sigma(Y, X)$-tõkestatud). ■

Lause 9.1 on aluseks talle eelnenud märkuses kirjeldatud meetodile topoloogiate konstrueerimiseks. Seejuures on nii saadud topoloogiate eeliseks see, et nad on lihtsalt kirjeldatavad nii geomeetriliselt (s.t. nulliümbruste baasi abil) kui ka analüütiliselt (s.o. poolnormide keeles).

Polaartopoloogiad. Olgu $\mathfrak{S}$ vektorruumi Y mingi $\sigma(Y, X)$-tõkestatud alamhulkade süsteem, tähistame $\mathfrak{B}_0 := \{S^0 \mid S \in \mathfrak{S}\}$. Tegemist on neelavate absoluutselt kumerate alamhulkade süsteemiga vektorruumis X, mistõttu süsteem

$$\mathfrak{B} := \left\{ \varepsilon \bigcap_{i=1}^{n} S_i^0 \mid \varepsilon > 0,\ S_1, ..., S_n \in \mathfrak{S},\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

on teatava lokaalselt kumera topoloogia $\mathcal{T}_{\mathfrak{S}}$ nulliümbruste baas vektorruumis X (vrd. art. 7.1). Topoloogiat $\mathcal{T}_{\mathfrak{S}}$ nimetatakse *süsteemiga $\mathfrak{S}$ määratud polaartopoloogiaks* ehk *ühtlase koonduvuse topoloogiaks süsteemi $\mathfrak{S}$ alamhulkadel.* Üldiselt nimetame selliselt konstrueeritud topoloogiaid *polaartopoloogiateks* ehk *$\mathfrak{S}$-topoloogiateks.*

Mõned tähelepanekud seoses baasiga $\mathfrak{B}$. ***Esiteks***, on selge, et tänu seosele $S^0 = S^{000}$ topoloogia $\mathcal{T}_{\mathfrak{S}}$ nulliümbruste baas $\mathfrak{B}$ ei muutu, kui asendame esialgses etteantud süsteemis $\mathfrak{S}$ hulgad S nende bipolaaridega $S^{00} = \overline{\text{absconv} S}^{\sigma(Y,X)}$. Seega ***võime alati eeldada, et hulgad $S \in \mathfrak{S}$ on absoluutselt kumerad ja $\sigma(Y,X)$-kinnised.***

Teiseks, nulliümbruste baas $\mathfrak{B}$ (ja seega ka topoloogia $\mathcal{T}_{\mathfrak{S}}$) ei muutu, kui süsteem $\mathfrak{S}$ asendada süsteemiga $\widehat{\mathfrak{S}} := \{\alpha S \mid \alpha > 0,\, S \in \mathfrak{S}\}$, sest $\mathfrak{B}_0 \subset \{\alpha S^0 \mid \alpha > 0,\, S \in \mathfrak{S}\} \subset \mathfrak{B}$ (vrd. pt. 7, märkus 1^0). Analoogiliselt võime vaadeldava süsteemi $\mathfrak{S}$ asendada lõplike ühendite süsteemiga $\{S_1 \cup ... \cup S_n \mid S_1, ..., S_n \in \mathfrak{S},\, n \in \mathbb{N}\}$. Niisiis ***võime vajaduse korral eeldada, et süsteem $\mathfrak{S}$ rahuldab tingimusi***

(PT₁) $S_1, S_2 \in \mathfrak{S} \Rightarrow \exists\, S \in \mathfrak{S} : S_1 \cup S_2 \subset S$,

(PT₂) $S \in \mathfrak{S},\, \lambda > 0 \Rightarrow \lambda S \in \mathfrak{S}$.

Tingimusi **(PT₁)** ja **(PT₂)** rahuldava süsteemi $\mathfrak{S}$ eeliseks on see, et sel juhul $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_0$, tähendab, prebaas $\mathfrak{B}_0$ on tegelikult topoloogia $\mathcal{T}_{\mathfrak{S}}$ nulliümbruste baas.

Püstitame nüüd küsimuse **polaartopoloogia $\mathcal{T}_{\mathfrak{S}}$ eralduvusest.** Selleks on tarvilik ja piisav tingimus (vt. lause 7.3)

$$\forall x \in X \diagdown \{0\} \;\; \exists S \in \mathfrak{S} \;\; \exists \lambda > 0 : \quad x \notin \lambda S^0,$$

mille võib esitada mitmel erineval kujul:

$$\begin{aligned} &\forall x \in X \diagdown \{0\}\, \exists S \in \mathfrak{S}\; \exists \lambda > 0\; \exists f \in S : \;\; |f(x)| > \lambda \\ &\quad \Leftrightarrow \forall x \in X \diagdown \{0\}\, \exists f \in \cup \{S \mid S \in \mathfrak{S}\} : f(x) \neq 0 \\ &\quad \Leftrightarrow H_0 := \cup \{S \mid S \in \mathfrak{S}\} \text{ eraldab punktid vektorruumis } X. \end{aligned}$$

Osutub, et viimane tingimus on samaväärne nõudega

(PT₃) $\overline{\text{span} \cup \{S \mid S \in \mathfrak{S}\}}^{\sigma(Y,X)} = Y.$

Tõepoolest, TEOREEMI 7.13 (b) põhjal (veenduda!)✠

$$\begin{aligned} \overline{\text{span} H_0}^{\sigma(Y,X)} &\neq Y \\ &\Leftrightarrow \exists x \in X \diagdown \{0\} \quad \forall f \in \text{span} H_0 : \;\; F_x(f) = 0 \;\; [\text{siin } F_x(f) := f(x)] \\ &\Leftrightarrow \exists x \in X \diagdown \{0\} \quad \forall f \in H_0 : \;\; f(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow H_0 \text{ ei eralda punkte ruumis } X. \end{aligned}$$

Niisiis, ***tingimus* (PT₃) *on tarvilik ja piisav polaartopoloogia $T_{\mathfrak{S}}$ eralduvuseks.***

$\mathcal{T}_{\mathfrak{S}}$ kirjeldamine poolnormide abil. Lause 7.3(a) põhjal on topoloogia $\mathcal{T}_{\mathfrak{S}}$ määratud poolnormide süsteemiga $\{p_{S^0}\}_{S \in \mathfrak{S}}$, kus p_{S^0} on hulga S^0 Minkowski funktsionaal. Seejuures

$$\begin{aligned} p_{S^0}(x) &= \inf \left\{\mu > 0 \mid x \in \mu S^0\right\} = \inf \{\mu > 0 \mid \forall f \in S : |f(x)| \leq \mu\} \\ &= \inf \left\{\mu > 0 \mid \frac{1}{\mu} \sup_{f \in S} |f(x)| \leq 1\right\} \\ &= \sup_{f \in S} |f(x)| \quad (x \in X). \end{aligned}$$

Niisiis on $\mathcal{T}_{\mathfrak{S}}$ määratud poolnormide süsteemiga $\left\{p^{(S)}\right\}_{S\in\mathfrak{S}}$, kus

$$p^{(S)}(x) := \sup_{f\in S}|f(x)| \quad (x\in X).$$

Siit selgub ka, *miks topoloogiat $T_{\mathfrak{S}}$ nimetatakse ühtlase koonduvuse topoloogiaks*:

$$\begin{aligned} x_\alpha \to x \ (\mathcal{T}_{\mathfrak{S}}) &\Leftrightarrow \forall S\in\mathfrak{S} : p^{(S)}(x_\alpha - x)\to 0 \\ &\Leftrightarrow \forall S\in\mathfrak{S} : \sup_{f\in S}|f(x_\alpha)-f(x)|\to 0 \\ &\Leftrightarrow \forall S\in\mathfrak{S} : f(x_\alpha)\to f(x) \text{ ühtlaselt hulgal } S. \end{aligned}$$

Märkused. 1^0. Rõhutame veel kord asjaolu, et hulkade $S\in\mathfrak{S}$ $\sigma(Y,X)$-tõkestatus on vajalik, sest vastasel juhul ei oleks S^0 neelav hulk. Siit selgub ka, et **tugevaim duaalse paariga $\langle X,Y\rangle$ määratud polaartopoloogia** vektorruumis X on määratud kõigi $\sigma(Y,X)$-tõkestatud alamhulkade süsteemiga $\mathfrak{S}_b$ vektorruumis Y. Arusaadavalt rahuldab süsteem $\mathfrak{S}_b$ tingimusi $\mathbf{(PT_1)}-\mathbf{(PT_3)}$. Vastavat polaartopoloogiat $\mathcal{T}_{\mathfrak{S}_b}$ vektorruumis X nimetatakse *tugevaks topoloogiaks* ja tähistatakse $\beta(X,Y)$. Kuna ilmselt kehtib seos (põhjendada!)✠ $\mathfrak{S}_1\subset\mathfrak{S}_2 \Rightarrow \mathcal{T}_{\mathfrak{S}_1}\subset\mathcal{T}_{\mathfrak{S}_2}$, siis on $\beta(X,Y)$ tõepoolest tugevam kõikidest polaartopoloogiatest, mida on võimalik duaalse paariga $\langle X,Y\rangle$ määrata.

2^0. Ka **nõrk topoloogia $\sigma(X,Y)$ on polaartopoloogia**, nimelt on $\sigma(X,Y) = \mathcal{T}_{\mathfrak{S}}$, kus $\mathfrak{S}$ on kõigi ühe-elemendiliste alamhulkade süsteem $\{\{f\}\mid f\in Y\}$. Arutelust, mis eelnes tingimuste $\mathbf{(PT_1)}$ ja $\mathbf{(PT_2)}$ formuleerimisele, järeldub, et sellesama topoloogia saame siis, kui $\mathfrak{S}$ on kõigi lõplike alamhulkade $S\subset Y$ süsteem, sel juhul on ka nõuded $\mathbf{(PT_1)}$ ja $\mathbf{(PT_2)}$ rahuldatud.

3^0 **(väga oluline!)**. Pole raske näha, et **iga eralduvat lokaalselt kumerat topoloogiat τ vektorruumis X võib vaadelda polaartopoloogiana.** Olgu $\mathfrak{B}$ eralduva LKR-i (X,τ) nulliümbruste baas, mis koosneb kinnistest absoluutselt kumeratest hulkadest (vrd. lause 7.1). Sel juhul $U=U^{00}$ (vt. järeldus 8.12), ning $\tau=\mathcal{T}_{\mathfrak{S}}$, kus $\mathfrak{S} := \{U^0\mid U\in\mathfrak{B}\}$ ja polaarid võetakse duaalsuse $\langle X,X'\rangle$ suhtes. Sellega seoses on põhjust kõnelda **võrdpidevatest hulkadest.**

Definitsioon. Olgu (X,τ) TVR. Alamhulka $S\subset X'$ nimetatakse *võrdpidevaks* (ehk täpsemalt *τ-võrdpidevaks*), kui on täidetud tingimus

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists U\in\mathfrak{B} :\ |f(x)|\le\varepsilon \quad (x\in U,\ f\in S).$$

Me anname järgmise lausega polaaride abil võrdpidevuse mõistele lihtsa kirjelduse.

Lause 9.2 *Eralduva LKR-i X puhul on alamhulk $S\subset X'$ võrdpidev parajasti siis, kui ta sisaldub mingi τ-nulliümbruse U polaaris U^0, mis on võetud duaalsuse $\langle X,X'\rangle$ suhtes.*

Tõestus. Iseseisvalt (vt. ülesanne 1). ■

Lausest 9.2 ja märkusest 3^0 tuleneb järgmine **põhimõttelise tähtsusega teoreem.**

Teoreem 9.3 *Iga eralduv lokaalselt kumer topoloogia τ vektorruumis X on ühtlase koonduvuse topoloogia kõigil τ-võrdpidevatel alamhulkadel.*

Tõestus. Olgu $\mathfrak{B}$ ruumi X nulliümbruste baas, mis koosneb kinnistest absoluutselt kumeratest hulkadest. Tähistame sümboliga $\mathfrak{S}_\tau$ kõigi τ-võrdpidevate alamhulkade süsteemi ja $\mathfrak{S}^0 := \{U^0 \mid U \in \mathfrak{B}\}$. Teatavasti $\tau = \mathcal{T}_{\mathfrak{S}^0}$ (vrd. märkus 3^0), lause 9.2 põhjal $\mathfrak{S}^0 \subset \mathfrak{S}_\tau$ (iga nulliümbruse polaar kaasruumis on võrdpidev), seetõttu $\tau \subset \mathcal{T}_{\mathfrak{S}_\tau}$.

Teiselt poolt, kui $S \in \mathfrak{S}_\tau$, siis leidub $U \in \mathfrak{B}$ omadusega $S \subset U^0$ (vrd lause 9.2). Seega

$$\forall S \in \mathfrak{S}_\tau \ \exists U \in \mathfrak{B} : S^0 \supset U^{00} = U,$$

tähendab, $\mathcal{T}_{\mathfrak{S}_\tau} \subset \tau$. Kokkuvõttes saame $\mathcal{T}_{\mathfrak{S}_\tau} = \tau$. ■

Võrdpidevate hulkadega tuleb meil tegemist ka edaspidi, seetõttu märgime mõned nende **olulisemad omadused**, mille tõestused jäävad lugejale harjutusülesanneteks. Me eeldame järgnevates ülesannetes, et (X, τ) on eralduv LKR.

Ülesanne 1. Tõestada, et alamhulk $S \subset X'$ on võrdpidev parajasti siis, kui duaalsuse $\langle X, X' \rangle$ suhtes võetud polaar S^0 on τ-nulliümbrus.

Ülesanne 2. Näidata, et iga lõplik alamhulk $S \subset X'$ on võrdpidev.

Ülesanne 3. Veenduda, et võrdpideva hulga alamhulk on võrdpidev.

Ülesanne 4. Veenduda, et kui $S \subset X'$ on võrdpidev, siis ka S^{00} on võrdpidev.

Ülesanne 5. Tõestada, et kui $S \subset X'$ on võrdpidev, siis ka $\overline{S}^{\,\sigma(X',X)}$ ja absconv S on võrdpidevad.

Ülesanne 6. Tõestada, et iga võrdpidev alamhulk $S \subset X'$ on $\sigma(X', X)$-tõkestatud.

9.2 Mackey topoloogia

Eelmise peatüki algul püstitasime endale ülesande kirjeldada neid lokaalselt kumeraid topoloogiaid, mis on antud duaalsusega kooskõlas. Me oleme varustanud end sobiva uurimisaparatuuriga polaaride ja polaartopoloogiate näol ning oleme nüüd valmis seda ülesannet lahendama. Seejuures vajame me kahte järgmist lauset.

Lause 9.4 *Iga vektorruumi X korral on tema algebraline kaasruum X^* nõrgas topoloogias $\sigma(X^*, X)$ täielik LKR.*

Tõestus. Olgu $(f_\alpha)_{\alpha \in \Gamma}$ suvaline $\sigma(X^*, X)$-Cauchy pere ruumis X^*, s.t. (vrd. art. 3.2)

$$\forall \varepsilon > 0 \ \forall x \in X \ \exists \alpha_0 \in \Gamma : \alpha, \alpha' \geq \alpha_0 \Rightarrow |f_\alpha(x) - f_{\alpha'}(x)| \leq \varepsilon.$$

Seega on arvpere $(f_\alpha(x))$ iga fikseeritud $x \in X$ korral Cauchy pere ning seega koonduv. Tähistame $f(x) := \lim_\alpha f_\alpha(x)$ $(x \in X)$. On selge, et f on lineaarne, s.t. $f \in X^*$, ja $f_\alpha \to f$ $(\sigma(X^*, X))$. ■

Lause 9.5 ***(Alaoglu teoreem).*** *Eralduva LKR-i (X, τ) iga nulliümbruse U polaar U^0, mis on moodustatud duaalsuse $\langle X, X' \rangle$ suhtes, on $\sigma(X', X)$-kompaktne alamhulk ruumis X'.*

Tõestus. Me vaatleme duaalseid paare $\langle X, X' \rangle$ ja $\langle X, X^* \rangle$. Tähistame hulga U polaari nende duaalsuste suhtes vastavalt U^0 ja $U^\oplus$, ilmselt on $U^0 = U^\oplus \cap X'$. Paneme tähele, et $U^\oplus$ kui kinnine alamhulk täielikus LKR-s $(X^*, \sigma(X^*, X))$ on selles ruumis täielik. Kuna $U^{\oplus\oplus}$ sisaldab neelava hulga U, siis lause 9.1 põhjal on $U^\oplus$ tõkestatud LKR-s $(X^*, \sigma(X^*, X))$, lause 8.2 kohaselt on $U^\oplus$ täielikult tõkestatud. Teoreemist 3.3 saame, et $U^\oplus$ on $\sigma(X^*, X)$-kompaktne. Näitame, et tegelikult $U^0 = U^\oplus$. Sisalduvuse $U^\oplus \subset U^0$ kontrollimiseks märgime, et kui $f \in U^\oplus$, siis f on tõkestatud τ-nulliümbruses (selgitada!)✠, lause 6.1 põhjal on ta τ-pidev, s.t. $f \in X'$. Me näitasime, et $U^\oplus \subset X'$, järelikult $U^0 = U^\oplus$. Kuna $\sigma(X^*, X)\,|_{X'} = \sigma(X', X)$, siis U^0 on topoloogias $\sigma(X', X)$ kompaktne. Lause on tõestatud. ■

Mackey topoloogia. Olgu $\langle X, Y \rangle$ suvaline duaalne paar. Tähistame

$$\mathfrak{S}_0 := \{S \subset Y \mid S \text{ on } \sigma(Y, X)\text{-kompaktne ja absoluutselt kumer}\}$$

ning veendume, et $\mathfrak{S}_0$ *rahuldab artiklis 9.1 fikseeritud nõudeid* $\mathbf{(PT_1)}$–$\mathbf{(PT_3)}$. Siis $\mathcal{T}_{\mathfrak{S}_0}$ ***on eralduv lokaalselt kumer topoloogia ja*** $\mathfrak{B}_0 := \{S^0 \mid S \in \mathfrak{S}_0\}$ ***on tema nulliümbruste baas***.

Tingimuse $\mathbf{(PT_1)}$ kontrollimiseks olgu $S_1, S_2 \in \mathfrak{S}_0$, moodustame hulga $S := (S_1^0 \cap S_2^0)^0$. Ilmselt S on absoluutselt kumer ja sisaldab hulka $S_1 \cup S_2$, seega absconv $S_1 \cup S_2 \subset S$. Lause 5.5 põhjal on absconv $S_1 \cup S_2$ $\sigma(Y, X)$-kompaktne hulk, niisiis on tingimus $\mathbf{(PT_1)}$ süsteemi $\mathfrak{S}_0$ puhul täidetud.

Tingimus $\mathbf{(PT_2)}$ on täidetud, sest λS on iga $S \in \mathfrak{S}_0$ ja $\lambda > 0$ korral absoluutselt kumer $\sigma(Y, X)$-kompaktne hulk.

Tingimuse $\mathbf{(PT_3)}$ tõestamiseks paneme tähele, et kuna $\{f\}^0$ on iga $f \in Y$ puhul $\sigma(X, Y)$-nulliümbrus (selgitada!)✠, siis absoluutselt kumer hulk $\{f\}^{00}$ on lause 9.5 põhjal $\sigma(Y, X)$-kompaktne. Seega $\{f\}^{00} \in \mathfrak{S}_0$ ning seostest $Y = \cup\left\{\{f\}^{00} \mid f \in Y\right\} \subset \cup\{S \mid S \in \mathfrak{S}_0\} \subset Y$ saame $\cup\{S \mid S \in \mathfrak{S}_0\} = Y$.

Lisaks märgime, et $S = S^{00}$ iga $S \in \mathfrak{S}_0$ korral (põhjendada!)✠.

Lause 9.6 $\sigma(X, Y) \subset \mathcal{T}_{\mathfrak{S}_0}$.

Tõestus. Teatavasti on $\sigma(X, Y)$ polaartopoloogia $\mathcal{T}_{\mathfrak{S}_\sigma}$, kus

$$\mathfrak{S}_\sigma := \left\{S^{00} \mid S \subset Y \text{ on lõplik hulk}\right\}$$

(vrd. märkus 2^0). Kuna S^0 on $\sigma(X, Y)$-nulliümbrus, siis on S^{00} Alaoglu teoreemi kohaselt $\sigma(Y, X)$-kompaktne. Seega $\mathfrak{S}_\sigma \subset \mathfrak{S}_0$, mistõttu $\sigma(X, Y) \subset \mathcal{T}_{\mathfrak{S}_0}$. ■

Definitsioon. Polaartopoloogiat $\mathcal{T}_{\mathfrak{S}_0}$ nimetatakse (duaalse paariga $\langle X, Y \rangle$ määratud) *Mackey topoloogiaks* vektorruumis X ja tähistatakse $\tau(X, Y)$.

Mackey topoloogia tähtsus selgub järgnevast lausest, mis on duaalsuseteooria üks olulisemaid väiteid.

Teoreem 9.7 ***(Mackey-Arensi teoreem).*** *Eralduv lokaalselt kumer topoloogia τ vektorruumis X on antud duaalsusega $\langle X, Y \rangle$ kooskõlas parajasti siis, kui $\sigma(X, Y) \subset \tau \subset \tau(X, Y)$. Seejuures leidub süsteemi $\mathfrak{S}_0$ selline alamsüsteem $\mathfrak{S}$, et $\tau = \mathcal{T}_{\mathfrak{S}}$.*

Tõestus. *Tarvilikkus.* Olgu $(X,\tau)' = Y$. Ühelt poolt $\sigma(X,Y) \subset \tau$ teoreemi 8.5 põhjal, teisalt langeb τ kokku polaartopoloogiaga $\mathcal{T}_{\mathfrak{S}}$, kus $\mathfrak{S} := \{U^0 \mid U \in \mathfrak{B}\}$ ja $\mathfrak{B}$ on τ-nulliümbruste baas (vrd. märkus 3^0). Märgime, et hulgad $U^0 \in \mathfrak{S}$ on Alaoglu teoreemi kohaselt $\sigma(X,Y)$-kompaktsed. Seega lausest 9.5 saame $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{S}_0$, mis tähendab sisalduvust $\tau \subset \tau(X,Y)$. Ühtlasi tõestasime ka väite teise osa, s.t. me leidsime $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{S}_0$ omadusega $\tau = \mathcal{T}_{\mathfrak{S}}$.

Piisavus. Olgu $\sigma(X,Y) \subset \tau \subset \tau(X,Y)$, siis (vrd. pt. 7, ülesanne 6)

$$Y = (X, \sigma(X,Y))' \subset X' := (X,\tau)' \subset (X, \tau(X,Y))'$$

Näitame, et $H := (X, \tau(X,Y))' = Y$, sel juhul kehtib ka seos $X' = Y$, mida me tahame tõestada.

Kõigepealt paneme tähele, et iga $S \in \mathfrak{S}_0$ on tänu oma $\sigma(X,Y)$-kompaktsusele $\sigma(H,X)$-kinnine. Et selles veenduda, võtame hulga S elementide pere $(f_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$, mis on $\sigma(H,X)$-koonduv mingiks punktiks $f \in H$, ja näitame, et $f \in S$. Hulga S $\sigma(X,Y)$-kompaktsuse tõttu leidub osapere $(g_\beta)_{\beta\in\Delta}$ omadusega $g_\beta \to g$ $(\sigma(X,Y))$, kus $g \in S$. Kuna $\sigma(H,X)|_Y = \sigma(Y,X)$, siis $g_\beta \to g$ $(\sigma(H,X))$. Koonduva pere iga osapere koondub üheks ja samaks piirväärtuseks, seetõttu $f = g \in S$.

Hulga $S \in \mathfrak{S}_0$ $\sigma(H,X)$-kinnisuse tõttu saame

$$S^{00} = \overline{\text{absconv}\, S}^{\sigma(H,X)} = \overline{S}^{\sigma(H,X)} = S \subset Y.$$

Lausest 8.8 järeldub, et $H = \cup\{S^{00} \mid S \in \mathfrak{S}\} \subset Y$, s.t. $H = Y$. Teoreem on tõestatud. ■

Mackey-Arensi teoreemist saame vahetute järeldustena järgmised kaks väidet.

Järeldus 9.8 *Mackey topoloogia $\tau(X,Y)$ on tugevaim lokaalselt kumer topoloogia vektorruumis X, mis on duaalsusega $\langle X,Y\rangle$ kooskõlas.*

Järeldus 9.9 *Eralduv lokaalselt kumer topoloogia τ vektorruumis X on duaalsusega $\langle X,Y\rangle$ kooskõlas parajasti siis, kui ta on esitatav polaartopoloogiana $\mathcal{T}_{\mathfrak{S}}$, kus $\mathfrak{S}$ on vektorruumi Y mingi absoluutselt kumerate $\sigma(Y,X)$-kompaktsete alamhulkade süsteem.*

9.3 Mackey teoreem tõkestatud hulkadest

Selle **artikli eesmärgiks** on tõestada järgmine tähtis väide.

Teoreem 9.10 ***(Mackey teoreem).*** *Eralduva LKR-i X alamhulk E on tõkestatud parajasti siis, kui ta on nõrgalt (s.t. $\sigma(X,X')$-) tõkestatud.*

Mackey teoreemist tuleneb lihtsalt (kontrollida!)✠

Järeldus 9.11 *Antud duaalsusega $\langle X,Y\rangle$ kooskõlas olevatel lokaalselt kumeratel topoloogiatel vektorruumis X on ühed ja samad tõkestatud hulgad.*

Mackey teoreemi tõestuseks vajalikku eeltööd alustame **järgmiste tähelepanekutega**.

(I) Olgu V vektorruumi X absoluutselt kumer alamhulk. *Näitame, et*

$$\operatorname{span} V = \bigcup_{n=1}^{\infty} nV \ . \tag{9.1}$$

Õieti on vaja kontrollida sisalduvust $\operatorname{span} V \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} nV$, vastupidise sisalduvuse kehtivuses ei ole kahtlust. Niisiis, olgu $x = \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_m x_m \in \operatorname{span} V$, $\alpha_1, ..., \alpha_m \in \mathbb{K} \diagdown \{0\}$, $x_1, ..., x_m \in V$. Sel juhul

$$x = \sum_{k=1}^{m} |\alpha_k| \frac{\alpha_k}{|\alpha_k|} x_k = \sum_{k=1}^{m} |\alpha_k| \, z_k,$$

kusjuures $z_k := \frac{\alpha_k}{|\alpha_k|} x_k \in V$, sest V on tasakaalus hulk. Hulga V kumeruse tõttu

$$x \in r \left(\frac{|\alpha_1|}{r} V + ... + \frac{|\alpha_m|}{r} V \right) \subset rV,$$

kus $r := |\alpha_1| + ... + |\alpha_m|$. Valides nüüd $n_0 \in \mathbb{N}$ nii, et $n_0 \geq r$, saame

$$x \in rV \subset n_0 V \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} nV.$$

(II) Tähistame $X_V := \operatorname{span} V$, see on vektorruumi X vektoralamruum, milles V on neelav hulk. Seetõttu on tema Minkowski funktsionaal p_V poolnorm vektorruumil X_V. Defineerime poolnormiga p_V vektorruumis X_V lokaalselt kumera topoloogia τ_V, siis $\{\varepsilon V \mid \varepsilon > 0\}$ on selle nulliümbruste baas. *LKR (X_V, τ_V) on eralduv parajasti siis, kui p_V on norm* (kontrollida!)✠.

(III) Eeldame veel lisaks, et *X oli juba algselt eralduv LKR topoloogiaga τ, milles V on tõkestatud alamhulk, ja näitame, et siis (X_V, p_V) on normeeritud ruum.* Olgu $\tau_0 := \tau \,|_{X_V}$. Kui $\mathfrak{B}$ on mingi nulliümbruste baas ruumis (X, τ), siis $\mathfrak{B}_0 := \{U \cap X_V \mid U \in \mathfrak{B}\}$ on τ_0-nulliümbruste baas. Kuna V on τ-tõkestatud, siis iga $U \in \mathfrak{B}$ puhul saab leida $\varepsilon > 0$ omadusega $\varepsilon V \subset U$. See tähendab, et $\tau_0 \subset \tau_V$, millest järeldub topoloogia τ_V eralduvus. Järeldusest 7.8 tuleneb, et (X_V, τ_V) on normeeruv.

(IV) Eeldame lõpuks veel rohkem. *Olgu V kompaktne alamhulk LKR-s (X, τ), näitame, et sel juhul on (X_V, p_V) Banachi ruum.* Olgu (x_n) suvaline Cauchy jada normeeritud ruumis (X_V, p_V) , tema tõkestatuse tõttu leidub $M > 0$, et $p_V(x_n) \leq M$ $(n \in \mathbb{N})$. Tähistame $z_n := \frac{1}{M} x_n$ $(n \in \mathbb{N})$, ilmselt on ka (z_n) Cauchy jada normeeritud ruumis (X_V, p_V) (põhjendada!)✠, samal ajal $p_V(z_n) = \frac{1}{M} p_V(x_n) \leq 1$, mistõttu $z_n \in V$ (põhjendada!)✠. Leiame $N \in \mathbb{N}$ omadusega

$$n, m \geq N \Rightarrow z_n \in z_m + \varepsilon V.$$

Hulga V kompaktsuse tõttu LKR-s (X, τ) saab jadast (z_n) eraldada niisuguse osapere $\left(z_{n_\gamma}\right)$, mis koondub selles ruumis, olgu $z := \lim_\gamma z_{n_\gamma}$, siis $z \in V$. Kuna $z_m + \varepsilon V$ on kinnine alamhulk LKR-s (X, τ) (selgitada!)✠, siis sellest, et $z_{n_\gamma} \in z_m + \varepsilon V$ $(n_\gamma, m \geq N)$, järeldub $z \in z_m + \varepsilon V$ $(m \geq N)$. Niisiis,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ : m \geq N \Rightarrow z_m \in z + \varepsilon V$$

ehk $z_m \to z$, seega $x_m \to x := Mz \in X_V$ normeeritud ruumis (X_V, p_V). Tähendab, (X_V, p_V) on Banachi ruum.

Võtame eelneva arutelu kokku järgmises lauses.

Lause 9.12 *Iga absoluutselt kumer kompaktne alamhulk V eralduvas LKR-s X määrab Banachi ruumi (X_V, p_V), kus X_V on hulga V lineaarne kate ja p_V on selle hulga Minkowski funktsionaal vektorruumil X_V. Seejuures on normi p_V poolt määratud topoloogia tugevam, kui ruumi X poolt indutseeritud topoloogia.*

Selle lause abil tõestame järgnevalt artikli algul sõnastatud **Mackey teoreemi**. Seejuures kasutame ühte funktsionaalanalüüsi põhiprintsiipidest, nimelt Banachi ruumide teooriast tuntud ühtlase tõkestatuse printsiipi. See väidab, et kui X ja Z on Banachi ruumid ja $\mathfrak{A}$ on mingi selline pidevate lineaarsete kujutuste $A : X \to Z$ hulk, mis on punktiviisi tõkestatud, s.t.

$$\text{iga } x \in X \text{ korral on hulk } \{A(x) \mid A \in \mathfrak{A}\} \text{ ruumis } Z \text{ tõkestatud,}$$

siis $\sup \{\|A\| \mid A \in \mathfrak{A}\} < \infty$.

Teoreemi 9.10 tõestus. Seose $\sigma(X, X') \subset \tau$ tõttu on iga τ-tõkestatud alamhulk vektorruumis X ka $\sigma(X, X')$-tõkestatud. Näitame, et kehtib vastupidine implikatsioon. Olgu $E \subset X$ topoloogias $\sigma(X, X')$ tõkestatud, s.t.

$$\forall f \in X' \; \exists M > 0 : |f(x)| \leq M \quad (x \in E). \tag{9.2}$$

Olgu $\mathfrak{B}$ kinnistest absoluutselt kumeratest hulkadest koosnev τ-nulliümbruste baas. Alaoglu teoreemi põhjal on $V := U^0$ iga $U \in \mathfrak{B}$ korral kompaktne absoluutselt kumer alamhulk LKR-s $(X', \sigma(X', X))$. Tähistame $H := \operatorname{span} V = (X')_V$, normiga p_V on H lause 9.12 kohaselt Banachi ruum.

Edasi märgime, et iga fikseeritud $x \in X$ puhul on $\sigma(X', X)$-pideva lineaarse funktsionaali

$$F_x : X' \to \mathbb{K}, \;\; f \mapsto f(x)$$

ahend $\varphi_x := F_x|_H$ pidev topoloogias $\sigma(H, X) = \sigma(X', X)|_H$. Kuna normi poolt määratud topoloogia on tugevam kui $\sigma(H, X)$, siis $\varphi_x \in H' := (H, p_V)'$. Moodustame Banachi ruumis H määratud funktsionaalide hulga $\{\varphi_x\}_{x \in E}$ ja paneme tähele, et tingimus (9.2) tähendab selle hulga punktiviisi tõkestatust. Ühtlase tõkestatuse printsiip Banachi ruumides annab hulga $\{\varphi_x\}_{x \in E}$ ühtlase, s.o. normi järgi tõkestatuse. Seega leidub selline $M > 0$, et

$$\sup_{f \in V} |f(x)| = \sup_{f \in V} |\varphi_x(f)| \leq M \quad (x \in E)$$

ehk

$$\frac{1}{M} |f(x)| \leq 1 \quad (f \in V, \; x \in E),$$

niisiis, $\frac{1}{M} E \subset V^0 = U^{00} = U$. Tähendab, E on tõkestatud topoloogias τ. Teoreem on tõestatud.

Mackey teoreemi üheks rakenduseks on järgmine tähelepanuväärne lause.

Lause 9.13 *Kui LKR (X, τ) on metriseeruv, siis $\tau = \tau(X, X')$.*

Tõestus. Kuna $\sigma(X, X') \subset \tau \subset \tau(X, X')$ (vt. teoreem 9.7), siis on vaja tõestada vaid sisalduvus $\tau \supset \tau(X, X')$. Moodustame absoluutselt kumeratest τ-nulliümbrustest baasi $\mathfrak{B} = \{V_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ omadusega $V_{n+1} \subset V_n$. Olgu V absoluutselt kumer $\tau(X, X')$- nulliümbrus, näitame, et $V_n \subset V$ sobivalt valitud n puhul.

Oletame vastuväiteliselt, et $V_n \not\subseteq V$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral. Siis $V_n \not\subseteq nV$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral, sest vastasel juhul saaksime seose $V \supset \frac{1}{n}V_n \supset V_m$ mingi sobivalt võetud m puhul. Valime punktid $x_n \in V_n \diagdown nV \quad (n \in \mathbb{N})$, siis $x_n \to 0$ (τ), järelikult on jada (x_n) τ-tõkestatud. Mackey teoreemi kohaselt on (x_n) tõkestatud topoloogias $\tau(X, X')$. Seetõttu leidub $\delta > 0$ omadusega $\delta\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset V$ ehk $x_n \in \delta^{-1}V \quad (n \in \mathbb{N})$. Viimane tingimus on ilmselt vastuolus jada (x_n) valikuga: juhul $n > \delta^{-1}$ on $x_n \in \delta^{-1}V \subset nV$. Niisiis leidub tõepoolest iga $\tau(X, X')$-nulliümbruse V jaoks $V_n \in \mathfrak{B}$ omadusega $V_n \subset V$, mis lõppkokkuvõttes tähendab, et $\tau = \tau(X, X')$. ∎

10 Tünniruumid ja F-ruumid

10.1 Tugev topoloogia ja tünniruum

Veel tugevast topoloogiast. Nagu me eespool märkisime, on antud duaalse paari $\langle X, Y \rangle$ puhul lihtne leida **tugevaimat polaartopoloogiat** vektorruumis X. See on ühtlase koonduvuse topoloogia **kõigil** $\sigma(Y, X)$-tõkestatud alamhulkadel, mida me nimetame ***tugevaks topoloogiaks*** ja tähistame $\beta(X, Y)$ (vt. art. 9.1). Arusaadavalt kehtivad seosed

$$\sigma(X, Y) \subset \tau(X, Y) \subset \beta(X, Y).$$

Antud LKR-i (X, τ) puhul huvitab meid, ***millistel tingimustel langeb*** τ ***kokku tugeva topoloogiaga*** $\beta(X, X')$.

Tähistame sümboliga $\mathfrak{S}_b$ **kõigi** $\sigma(Y, X)$-tõkestatud alamhulkade $S \subset Y$ süsteemi. Tugeva topoloogia nulliümbruste baasiks on

$$\mathfrak{B} := \left\{ S^0 \mid S \in \mathfrak{S}_b \right\}$$

(põhjendada!)✠. Hulgad S^0 on $\sigma(X, Y)$-kinnised, absoluutselt kumerad ja neelavad (selgitada!)✠. Seejuures kuulub iga nimetatud kolme omadusega alamhulk $U \subset X$ süsteemi $\mathfrak{B}$ (veenduda!)✠. Niisiis: ***tugeva topoloogia*** $\beta(X, Y)$ ***saab määrata nulliümbruste baasiga, mis koosneb kõikidest*** $\sigma(X, Y)$***-kinnistest absoluutselt kumeratest neelavatest alamhulkadest vektorruumis*** X. Sellised hulgad mängivad lokaalselt kumerates ruumides äärmiselt olulist rolli.

Tünniruum. **Definitsioon.** Kinnist absoluutselt kumerat neelavat alamhulka U LKR-s X nimetatakse *tünniks.* LKR-i X, milles iga tünn on nulliümbrus, nimetatakse *tünniruumiks.*

Märgime, et lause 7.1 kohaselt ***leidub igas lokaalselt kumeras ruumis tünnidest koosnev nulliümbruste baas***. Esitame tünnide kohta veel mõned **olulised väited,** mis on lihtsalt kontrollitavad.

Ülesanne 1. Näidata, et alamhulk U LKR-s X on tünn parajasti siis, kui ta on neelav ning $U^{00} = U$, kus bipolaar on moodustatud duaalsuse $\langle X, X' \rangle$ suhtes.
Ülesanne 2. Veenduda, et alamhulk U LKR-s X on tünn parajasti siis, kui leidub selline $\sigma(X', X)$-tõkestatud hulk $S \subset X'$, et $U = S^0$.
Ülesanne 3. Tõestada, et kõigil antud duaalsusega $\langle X, Y \rangle$ kooskõlas olevatel vektorruumis X defineeritud lokaalselt kumeratel topoloogiatel on ühed ja samad tünnid.

Lause 10.1 *Eralduva LKR-i* (X, τ) *korral on järgmised väited samaväärsed:*
(*i*) (X, τ) *on tünniruum,*
(*ii*) *iga* $\sigma(X', X)$*-tõkestatud alamhulk* $S \subset X'$ *on* τ*-võrdpidev,*
(*iii*) $\tau = \beta(X, X')$,
(*iv*) $\tau = \tau(X, X') = \beta(X, X')$,
(*v*) $\tau = \tau(X, X')$ *ja* $\beta(X, X')$ *on duaalsusega* $\langle X, X' \rangle$ *kooskõlas.*

Tõestus. $(i) \Rightarrow (ii)$: Kui X on tünniruum ja alamhulk $S \subset X'$ on $\sigma(X', X)$-tõkestatud, siis S^0 on tünn LKR-s X (vrd. ülesanne 2). Seega on S^0 τ-nulliümbrus, LAUSE 9.2 kohaselt on S τ-võrdpidev.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Kuna alati kehtivad seosed $\tau \subset \tau(X, X') \subset \beta(X, X')$ (selgitada!)✠, siis piisab veenduda, et eeldusel (ii) kehtib sisalduvus $\beta(X, X') \subset \tau$. Olgu U suvaline $\beta(X, X')$-nulliümbrus, leiame $S \in \mathfrak{S}_b$, mille puhul $S^0 \subset U$ (selgitada!)✠. Kuna S on $\sigma(X', X)$-tõkestatud, siis eelduse (ii) järgi on ta τ-võrdpidev, järelikult on S^0 τ-nulliümbrus. Tähendab, iga $\beta(X, X')$-nulliümbruse U jaoks leidub τ-nulliümbrus V omadusega $V \subset U$, seega $\beta(X, X') \subset \tau$.

Implikatsioonide $(iii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (v) \Rightarrow (iii)$ kehtivus on ilmne, kui pidada silmas Mackey-Arensi teoreemi 9.7. Kuna iga tünn LKR-s (X, τ) on $\beta(X, X')$-nulliümbrus (vrd. enne definitsiooni toodud kommentaar), siis kehtib $(iii) \Rightarrow (i)$. Teoreem on tõestatud. ■

Võrdpidevad hulgad pidevate lineaarsete kujutuste ruumis. Lause 10.1 implikatsioon $(i) \Rightarrow (ii)$ on õige ka üldisemas kontekstis, kui pidevate lineaarsete funktsionaalide asemel vaadelda samade omadustega kujutusi. Olgu X ja Z TVR-d. Tähistame sümboliga $L(X, Z)$ kõigi pidevate lineaarsete kujutuste $A : X \to Z$ vektorruumi. Lineaarne kujutus $A : X \to Z$ on pidev parajasti siis, kui

$$\forall V \in \mathfrak{B}_Z \; \exists U \in \mathfrak{B}_X : A(U) \subset V,$$

kus $\mathfrak{B}_X$ ja $\mathfrak{B}_Z$ on nulliümbruste baas vastavalt ruumis X ja Z. Alamhulka $\mathfrak{A} \subset L(X, Z)$ nimetatakse *võrdpidevaks*, kui

$$\forall V \in \mathfrak{B}_Z \; \exists U \in \mathfrak{B}_X : A(U) \subset V \text{ iga } A \in \mathfrak{A} \text{ korral.}$$

Lihtne on näha, et erijuhul $Z = \mathbb{K}$ saame võrdpidevuse mõiste selles tähenduses, nagu me ta defineerisime artiklis 9.1.

Ülesanne 4. Veenduda, et iga võrdpidev hulk $\mathfrak{A} \subset L(X, Z)$ on punktiviisi tõkestatud, s.t. hulk $\{A(x) \mid A \in \mathfrak{A}\}$ on tõkestatud ruumis Z iga $x \in X$ korral.

Teoreem 10.2 ***(ühtlase tõkestatuse printsiip).*** *Olgu (X, τ) tünniruum ja olgu (Z, τ') mingi LKR. Iga punktiviisi tõkestatud hulk $\mathfrak{A} \subset L(X, Z)$ on võrdpidev.*

Tõestus. Olgu $\mathfrak{A} \subset L(X, Z)$ punktiviisi tõkestatud alamhulk. Moodustame ruumis Z kinnistest absoluutselt kumeratest nulliümbrustest koosneva baasi $\mathfrak{B}_Z$. Võtame $V \in \mathfrak{B}_Z$ ning tähistame

$$U := \cap \left\{A^{-1}(V) \mid A \in \mathfrak{A}\right\}.$$

Piisab veenduda, et U on tünn LKR-s X, sel juhul on ta τ-nulliümbrus ning kuna

$$A(U) \subset A\left(A^{-1}(V)\right) \subset V \text{ iga } A \in \mathfrak{A} \text{ korral,}$$

siis oleme tõestanud, et $\mathfrak{A}$ on võrdpidev.

Ilmselt on hulk U absoluutselt kumer ning τ-kinnine (põhjendada!)✠. Kui $x \in X$, siis $\{A(x) \mid A \in \mathfrak{A}\}$ on τ'-tõkestatud, mistõttu leidub $\lambda > 0$ omadusega

$$\forall A \in \mathfrak{A} : \; A(x) \in \lambda V,$$

s.t. $x \in \lambda U$. Niisiis on U ka neelav ning seega tünn. ■

Teoreem 10.3 *Olgu A_n $(n \in \mathbb{N})$ pidevad lineaarsed kujutused tünniruumist (X, τ) LKR-i (Z, τ'). Kui iga $x \in X$ korral eksisteerib ruumis Z piirväärtus $A(x) := \lim_n A_n(x)$, siis $A \in L(X, Z)$.*

Tõestus. Kujutuse $A : X \to Z$ lineaarsuses ei ole kahtlust. Kuna kujutuste jada (A_n) on punktiviisi koonduv, siis on ta ka punktiviisi tõkestatud ning teoreemi 10.2 järgi võrdpidev. Olgu V kinnine nulliümbrus LKR-s Z, leiame $U \in \mathfrak{B}_X$ omadusega $A_n(U) \subset V$ $(n \in \mathbb{N})$. Siis iga $x \in U$ korral seostest $A_n(x) \to A(x)$ ja $A_n(x) \in V$ saame $A(x) \in \overline{V} = V$. Kokkuvõttes

$$\forall V \in \mathfrak{B}_Z \; \exists U \in \mathfrak{B}_X : A(U) \subset V,$$

s.t. $A \in L(X, Z)$. ■

10.2 F-ruumid. Lahtise kujutuse printsiip

Teatavasti (vrd. lause 7.7) on LKR (X, τ) metriseeruv parajasti siis, kui topoloogia τ saab määrata loenduva või lõpliku poolnormide süsteemiga $\{p_n\}$, sel juhul on seosega

$$d(x, y) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(x-y)}{1 + p_n(x-y)} \quad (x, y \in X)$$

defineeritud meetrika vektorruumis X, mis määrab topoloogia τ. Seetõttu võib nulliümbruste baasiks LKR-s võtta süsteemi $\left\{\frac{1}{n}B \mid n \in \mathbb{N}\right\}$, kus

$$B := \{x \in X \mid d(0, x) \leq 1\}. \tag{10.1}$$

Ülesanne 5. Veenduda, et B on tünn.

F-ruum. Definitsioon. Täielikku metriseeruvat lokaalselt kumerat ruumi nimetame *F-ruumiks* ehk *Frechet' ruumiks.*

F-ruumide omaduste uurimist alustame järgmise lemmaga.

Lemma 10.4 *Olgu X ja Z F-ruumid ning olgu $A : X \to Z$ lineaarne sürjektiivne kujutus. Iga tünni $U \subset X$ korral leidub ruumis Z nulliümbrus V omadusega $V \subset \overline{A(U)}$.*

Tõestus. Kuna U on absoluutselt kumer neelav alamhulk vektorruumis X, siis (vrd. (9.1))

$$\operatorname{span} U = \bigcup_{n=1}^{\infty} nU = X,$$

mistõttu

$$Z = A(X) = A\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} nU\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} nA(U) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} n\overline{A(U)} \subset Z,$$

s.t.

$$Z = \bigcup_{n=1}^{\infty} n\overline{A(U)}.$$

Kasutame meetriliste ruumide teooriast tuntud **Baire'i teoreemi:** kuna täielik meetriline ruum Z on esitatud oma kinniste alamhulkade $n\overline{A(U)}$ loenduva ühendina, siis mingi $m \in \mathbb{N}$ puhul on hulgal $m\overline{A(U)}$ sisepunkt. Siis on ka hulgal $\overline{A(U)}$ olemas sisepunkt y_0. Valime absoluutselt kumera nulliümbruse V LKR-s Z omadusega $y_0 + V \subset \overline{A(U)}$. Pidades silmas seoseid $V = -V$ ja $\overline{A(U)} = -\overline{A(U)}$, saame $-y_0 + V = -y_0 - V \subset -\overline{A(U)} = \overline{A(U)}$, mistõttu iga $y \in V$ korral

$$y = \frac{y + y_0}{2} + \frac{y - y_0}{2} \in \frac{1}{2}\overline{A(U)} + \frac{1}{2}\overline{A(U)} \subset \overline{A(U)}.$$

Niisiis, $V \subset \overline{A(U)}$. ∎

Tõestatud lemmast tuleneb vahetult järgmine fakt.

Lause 10.5 *Iga F-ruum X on tünniruum.*

Tõestus. Võtame lemmas 10.4 $Z := X$ ja $A := i$ (ühikkujutus). Siis iga tünn $U \subset X$ sisaldab nulliümbrust V, järelikult on ka U ise nulliümbrus. ∎

Järgnevalt tõestame lemma 10.4 abil F-ruumide jaoks **lahtise kujutuse printsiibi,** mis teatavasti on üks funktsionaalanalüüsi põhiprintsiipidest.

Teoreem 10.6 ***(lahtise kujutuse printsiip).*** *Pidev lineaarne sürjektiivne kujutus A F-ruumist (X, τ) F-ruumi (Z, τ') on lahtine, s.t. ta teisendab iga τ-lahtise alamhulga $G \subset X$ τ'-lahtiseks hulgaks $A(G)$.*

Tõestus. I. Näitame, et

$$\forall U \in \mathfrak{B}_X \ \exists V \in \mathfrak{B}_Z : V \subset A(U)\,, \tag{10.2}$$

kus $\mathfrak{B}_X$ ja $\mathfrak{B}_Z$ on vastavalt ruumi X ja Z nulliümbruste baas absoluutselt kumeratest hulkadest, seejuures eeldame, et $\mathfrak{B}_Z := \{V_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ on omadusega $V_{n+1} \subset V_n$ $(n \in \mathbb{N})$ (vrd. (4.1)).

Olgu $U \in \mathfrak{B}_X$. Kuna kinnised kerad εB $(\varepsilon > 0)$ moodustavad τ-nulliümbruste baasi (vrd. (10.1)), siis saab leida sellise $\varepsilon > 0$, et $\varepsilon B \subset U$. Tähistame $\varepsilon_k := \frac{\varepsilon}{2^k}$ ning moodustame kerad $\varepsilon_k B =: B_k$ $(k \in \mathbb{N})$. Rakendame lemmat 10.4: kuna B_k on tünn (vrd. ülesanne 5), siis iga $k \in \mathbb{N}$ puhul leidub $n_k \in \mathbb{N}$ omadusega $V_{n_k} \subset \overline{A(B_k)}$, seejuures valime $n_k > n_{k-1}$. Tähistame $V := V_{n_1}$ ja näitame, et $V \subset A(U)$, s.t.

$$\forall y \in V \ \exists x \in U : y = A(x)\,.$$

Olgu $y \in V \subset \overline{A(B_1)}$, siis

$$(y + V_{n_2}) \cap A(B_1) \neq \emptyset,$$

järelikult leidub $y_1 \in A(B_1)$ omadusega

$$y - y_1 \in V_{n_2} \subset \overline{A(B_2)}.$$

Viimasest seosest järeldub sellise elemendi $y_2 \in A(B_2)$ olemasolu, mis rahuldab tingimust

$$y - y_1 - y_2 \in V_{n_3} \subset \overline{A(B_3)}$$

jne. Nii jätkates saame elementide jada (y_m) omadustega

$$y_m \in A(B_m), \quad y - \sum_{k=1}^{m} y_k \in V_{n_{m+1}} \quad (m \in \mathbb{N}).$$

Kuna $V_{n_{m+1}} \subset V_{n_m}$, siis $\sum_{k=1}^{m} y_k \to y$ $(m \to \infty)$ (põhjendada!)✠, s.t. $\sum_{k=1}^{\infty} y_k = y$.

Fikseerime nüüd iga $k \in \mathbb{N}$ korral $x_k \in B_k$ nii, et $y_k = A(x_k)$, seejuures

$$\sum_k d(x_k, 0) \le \sum_k \varepsilon_k = \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \varepsilon,$$

millest tuleneb rea $\sum_k x_k$ koonduvus F-ruumis X. Tõepoolest,

$$d\left(\sum_{k=1}^{m} x_k - \sum_{k=1}^{l} x_k, 0\right) = d\left(\sum_{k=l+1}^{m} x_k, 0\right) \le \sum_{k=l+1}^{\infty} d(x_k, 0) \to 0 \ \ (m \ge l, \ l \to \infty),$$

niisiis on $\left(\sum_{k=1}^{m} x_k\right)_{m \in \mathbb{N}}$ Cauchy jada F-ruumis X ja seega koonduv. Tähistame $x := \sum_{k=1}^{\infty} x_k \in X$ ning paneme tähele, et

$$d(x, 0) = d\left(\lim_m \sum_{k=1}^{m} x_k, 0\right) \le \lim_m \sum_{k=1}^{m} d(x_k, 0) \le \sum_k \varepsilon_k = \varepsilon,$$

seega $x \in \varepsilon B \subset U$. Seejuures

$$A(x) = A\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} A(x_k) = y.$$

II. Veendume, et A on lahtine kujutus. Olgu $G \subset X$ τ-lahtine alamhulk ja y suvaline element kujutishulgas $A(G)$. Võtame $x \in G$, mille korral $A(x) = y$. Kuna x on hulga G sisepunkt, siis saab leida nulliümbruse $U \in \mathfrak{B}_X$ omadusega $x + U \subset G$, järelikult

$$A(G) \supset A(x + U) = A(x) + A(U) = y + A(U).$$

Rakendame tõestuse esimeses osas tõestatud väidet (10.2) ning leiame $V \in \mathfrak{B}_Z$ omadusega $V \subset A(U)$, sel juhul $y + V \subset y + A(U) \subset A(G)$. Tähendab, y on hulga $A(G)$ sisepunkt, mis ütleb, et $A(G)$ on lahtine hulk.

Teoreem on tõestatud. ∎

10.3 Teoreem kinnisest graafikust

Lahtise kujutuse printsiibi abil on lihtne tõestada järgmist teoreemi.

Teoreem 10.7 ***(teoreem pöördkujutuse pidevusest).*** *Olgu X ja Z F-ruumid. Kui kujutus $A \in L(X, Z)$ on pööratav, siis $A^{-1} \in L(Z, X)$.*

Tõestus. Teatavasti on pööratava lineaarse kujutuse pöördkujutus lineaarne, seega on meil vaja kontrollida vaid kujutuse $A^{-1}: Z \to X$ pidevust. Olgu $G \subset X$ lahtine hulk. Kuna $A: X \to Z$ on pidev sürjektiivne kujutus, siis saame rakendada lahtise kujutuse printsiipi, mille kohaselt $(A^{-1})^{-1}(G) = A(G)$ on lahtine hulk ruumis Z. Tähendab, kujutuse A^{-1} suhtes on lahtiste hulkade originaalid lahtised, mis tähendabki selle kujutuse pidevust. ∎

Meenutame, et vektorruumide X ja Z **otsekorrutis**

$$X \times Z := \{(x, y) \mid x \in X,\ y \in Z\}$$

on vektorruum koordinaaditi defineeritud tehetega:

$$(x, y) + (x', y') := (x + x', y + y'), \quad \lambda(x, y) := (\lambda x, \lambda y) \quad (\lambda \in \mathbb{K}).$$

Olgu järgnevas (X, τ) ja (Z, τ') F-ruumid, mille topoloogia τ ja τ' on määratud vastavalt poolnormide süsteemiga $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ja $\{q_m\}_{m \in \mathbb{N}}$. Defineerime funktsionaalid

$$r_{nm}: X \times Z \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto p_n(x) + q_m(y) \quad (n, m \in \mathbb{N}),$$

vahetu kontroll näitab, et need on poolnormid, kusjuures

$$r_{nm}((x, y)) = 0\ \ (n, m \in \mathbb{N}) \quad \Leftrightarrow \quad (x, y) = 0_{X \times Z}$$

(kontrollida!)✠. Seega määrab poolnormide süsteem $\{r_{nm}\}_{n,m \in \mathbb{N}}$ vektorruumis $X \times Z$ **metriseeruva** lokaalselt kumera topoloogia. Paneme tähele, et (vrd. lause 7.5(a))

$$\begin{aligned}(x_k, y_k) \to (x, y)\ \ (k \to \infty) &\Leftrightarrow (x_k - x, y_k - y) \to 0\ \ (k \to \infty)\\ &\Leftrightarrow r_{nm}((x_k - x, y_k - y)) \to 0\ \ (n, m \in \mathbb{N},\ k \to \infty)\\ &\Leftrightarrow p_n((x_k - x)) \to 0, \quad q_m(y_k - y) \to 0\ \ (n, m \in \mathbb{N},\ k \to \infty)\\ &\Leftrightarrow x_k \to x\ \ (\tau), \quad y_k \to y\ \ (\tau') \quad (k \to \infty).\end{aligned}$$

Niisiis tähendab koonduvus LKR-s $X \times Z$ koonduvust koordinaatide järgi. Täpselt samuti veendutakse, et $((x_k, y_k))$ on Cauchy jada ruumis $X \times Z$ parajasti siis, kui (x_k) ja (y_k) on Cauchy jada vastavalt ruumis X ja Z. Kuna mõlemad need ruumid on täielikud, siis leiduvad $x \in X$ ja $y \in Z$, et $x_k \to x\ (\tau)$ ning $y_k \to y\ (\tau')$ $(k \to \infty)$, järelikult $(x_k, y_k) \to (x, y)$ ruumis $X \times Z$. Me tõestasime, et $X \times Z$ on täielik.

Kokkuvõttes võime öelda: ***F-ruumide*** X ***ja*** Z ***otsekorrutis*** $X \times Z$ ***on F-ruum***.

Vaatleme projektsioone

$$T_X: X \times Z \to X, \quad (x, y) \mapsto x; \quad T_Z: X \times Z \to Z, \quad (x, y) \mapsto y.$$

Selge, et T_X ja T_Z on lineaarsed kujutused, nad on ka pidevad (kontrollida!)✠, s.t. $T_X \in L(X \times Z, X)$, $T_Z \in L(X \times Z, Z)$.

Kujutuse graafik. Olgu $A: X \to Z$ lineaarne kujutus. Alamhulka

$$\mathrm{gr}\ A := \{(x, A(x)) \mid x \in X\}$$

nimetatakse kujutuse A graafikuks. Kui $\mathrm{gr}\ A = \overline{\mathrm{gr}\ A}$ F-ruumis $X \times Z$, siis öeldakse, et A on *kinnine kujutus*.

Ülesanne 6. Veenduda, et iga pidev lineaarne kujutus on kinnine.

Teoreem 10.8 ***(teoreem kinnisest graafikust).*** *Kui A on lineaarne kinnine kujutus F-ruumist X F-ruumi Z, siis A on pidev.*

Tõestus. Kuna gr A on F-ruumi $X \times Z$ kinnine alamruum, siis on ta samuti F-ruum. Vaatleme kujutuste T_X ja T_Z ahendeid $\widehat{T}_X := T_X \left|_{\text{gr } A}\right.$ ja $\widehat{T}_Z := T_Z \left|_{\text{gr } A}\right.$ ning paneme tähele, et $\widehat{T}_X$ on pööratav kujutus: iga $x \in X$ korral on originaal $(x, A(x))$ üheselt määratud. Seejuures on pöördkujutus $\widehat{T}_X^{-1} : X \to X \times Z$ teoreemi 10.7 põhjal pidev ja lineaarne ning

$$A(x) = \widehat{T}_Z((x, A(x))) = \widehat{T}_Z\left(\widehat{T}_X^{-1}(x)\right) = \widehat{T}_Z \circ \widehat{T}_X^{-1}(x) \quad (x \in X),$$

s.t. $A = \widehat{T}_Z \circ \widehat{T}_X^{-1}$. Kuna mõlemad komponendid $\widehat{T}_Z$ ja $\widehat{T}_X^{-1}$ on pidevad, siis on ka $\widehat{T}_Z \circ \widehat{T}_X^{-1}$ pidev. Tähendab, $A \in L(X, Z)$. Teoreem on tõestatud. ■

Märkus. Lineaarse kujutuse $A : X \to Z$, kus (X, τ) ja (Z, τ') on LKR-d, graafik on kinnine parajasti siis, kui kehtib järgmine implikatsioon (kontrollida!)✠:

$$[x_\gamma \to x \ \ (\tau) \ \text{ ja } A(x_\gamma) \to y \ \ (\tau')] \Rightarrow y = A(x).$$

Niisiis võib öelda, et graafiku kinnisus ei garanteeri koonduva pere kujutiste pere koonduvust, kuid ta välistab võimaluse, et see koonduks "valeks" piirväärtuseks. Seega on graafiku kinnisus lineaarse kujutuse puhul oluliselt nõrgem tingimus kui selle kujutuse pidevus. Krestomaatiline näide kinnise graafikuga tõkestamata (s.o. mittepidevast) lineaarsest kujutusest normeeritud ruumide korral on diferentseerimisoperaator

$$D : X \to C[a, b], \, x \mapsto x',$$

kus X on kõigi lõigus $[a, b]$ pidevalt diferentseeruvate funktsioonide $x = x(t)$ alamruum Banachi ruumis $C[a, b]$.

11 Projektiivsed piirid

Käesolevas ja järgnevas kahes peatükis käsitleme me meetodeid, mis võimaldavad antud lokaalselt kumerate ruumide baasil konstrueerida uusi. Põhimõtteliselt jagunevad need meetodid kahte (teatavas mõttes duaalsesse) klassi. Vastavalt neile nimetatakse konstrueeritud topoloogiat *induktiivseks* või *projektiivseks.*

11.1 Projektiivse piiri topoloogia

LKR-de projektiivne piir. Me eeldame selles artiklis, et X on vektorruum ja (X_γ, τ_γ) on LKR-d ning $v_\gamma : X \to X_\gamma$ on lineaarsed kujutused ($\gamma \in \Gamma$).

Definitsioon. Nõrgimat lokaalselt kumerat topoloogiat τ_{proj} vektorruumis X, mille suhtes kõik kujutused v_γ on pidevad, nimetatakse (LKR-de X_γ ja kujutustega v_γ määratud) *projektiivse piiri topoloogiaks.* LKR-i (X, τ_{proj}) nimetame sel juhul LKR-de (X_γ, τ_γ) ($\gamma \in \Gamma$) *projektiivseks piiriks* (kujutuste v_γ suhtes).

Veendume, et ***selline topoloogia on olemas ja üheselt määratud.*** Olgu $\mathfrak{B}_\gamma$ absoluutselt kumeratest nulliümbrustest koosnev baas LKR-s X_γ, üldisust kitsendamata eeldame, et $\lambda U \in \mathfrak{B}_\gamma$ iga $\lambda > 0$ ja $U \in \mathfrak{B}_\gamma$ puhul. Vaatleme vektorruumis X alamhulki

$$V := \bigcap_{\gamma \in H} v_\gamma^{-1}(U_\gamma), \tag{11.1}$$

kus $U_\gamma \in \mathfrak{B}_\gamma$ ning $H \neq \varnothing$ on hulga Γ suvaline lõplik alamhulk. Vahetu kontroll näitab, et need on absoluutselt kumerad neelavad hulgad (veenduda!)✠ ja moodustavad seetõttu nulliümbruste prebaasi $\mathfrak{B}$ mingi lokaalselt kumera topoloogia τ jaoks vektorruumis X. Kuna aga süsteem $\mathfrak{B}$ sisaldab kõigi oma elementide lõplikud ühisosad ja kordsed, siis on $\mathfrak{B}$ topoloogia τ nulliümbruste baas (vrd. art. 7.1). Kujutus $v_\gamma : (X, \tau) \to (X_\gamma, \tau_\gamma)$ on pidev iga $\gamma \in \Gamma$ korral, sest hulgad $v_\gamma^{-1}(U_\gamma)$ ($U_\gamma \in \mathfrak{B}_\gamma$) on τ-nulliümbrused. Kui τ_1 on suvaline selline lokaalselt kumer topoloogia vektorruumis X, mille suhtes kujutused v_γ on pidevad, siis peavad hulgad $v_\gamma^{-1}(U_\gamma)$ ($U_\gamma \in \mathfrak{B}_\gamma$), aga siis ka iga hulk $V \in \mathfrak{B}$ olema τ_1-nulliümbrused. See tähendab, et $\tau \subset \tau_1$.

Märkus (oluline!). Projektiivse piiri topoloogia omaduste järgneval uurimisel **kasutame (seda spetsiaalselt märkimata) eelnevas arutluses sissetoodud tähistusi.**

Vastuse küsimusele **projektiivse piiri eralduvusest** annab järgmine lause.

Lause 11.1 *Eralduvate LKR-de (X_γ, τ_γ) ($\gamma \in \Gamma$) projektiivne piir (X, τ_{proj}) on eralduv LKR parajasti siis, kui kujutused v_γ rahuldavad tingimust*

$$\bigcap_{\gamma \in \Gamma} v_\gamma^{-1}(\{0\}) = \{0\}.$$

Tõestus. Kuna (X_γ, τ_γ) on eralduv LKR, siis lause 2.7 põhjal kehtib seos $\bigcap_{U_\gamma \in \mathfrak{B}_\gamma} U_\gamma = \{0\}$ iga $\gamma \in \Gamma$ korral, seetõttu

$$\bigcap_{V \in \mathfrak{B}} V = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} \bigcap_{U_\gamma \in \mathfrak{B}_\gamma} v_\gamma^{-1}(U_\gamma) = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} v_\gamma^{-1}(\{0\}).$$

Väide järeldub nüüd vahetult lausest 2.7. ■

Järgnevalt kirjeldame projektiivsel piiril määratud **lineaarsete kujutuste pidevust.**

Lause 11.2 *Olgu* Z *mingi LKR ja* (X, τ_{proj}) *LKR-de* (X_γ, τ_γ) $(\gamma \in \Gamma)$ *projektiivne piir. Lineaarne kujutus* $A : Z \to X$ *on pidev parajasti siis, kui kujutused* $v_\gamma \circ A : Z \to X_\gamma$ *on iga* $\gamma \in \Gamma$ *korral pidevad.*

Tõestus. Kui A on pidev, siis ka kujutused $v_\gamma \circ A$ on pidevad kui pidevate kujutuste kompositsioonid. Vastupidi, kui kujutused $v_\gamma \circ A : Z \to X_\gamma$ on iga $\gamma \in \Gamma$ korral pidevad, siis hulk $(v_\gamma \circ A)^{-1}(U_\gamma)$ on iga $U_\gamma \in \mathfrak{B}_\gamma$ ja $\gamma \in \Gamma$ korral nulliümbrus ruumis Z. Tähendab, iga $V \in \mathfrak{B}$ korral, mis on esitatud kujul (11.1), on hulk

$$A^{-1}(V) = A^{-1}\left(\bigcap_{\gamma \in H} v_\gamma^{-1}(U_\gamma)\right) = \bigcap_{\gamma \in H} (v_\gamma \circ A)^{-1}(U_\gamma)$$

ruumi Z nulliümbrus (peame silmas, et H on lõplik hulk!). Seega on A pidev kujutus. ■

Lause 11.3 *Alamhulk* $E \subset X$ *on* τ_{proj}*-tõkestatud parajasti siis, kui hulk* $v_\gamma(E)$ *on tõkestatud LKR-s* X_γ *iga* $\gamma \in \Gamma$ *korral.*

Tõestus. Iseseisvalt (vt. ülesanne 1). ■

Kõige olulisemat projektiivse piiri topoloogia erijuhtu - korrutistopoloogiat - käsitleme üksikasjalikumalt järgmises artiklis. Siinkohal vaatleme viite lihtsamat juhtu, millest kaks viimast on põhimõttelise tähendusega.

Näide 1. Olgu X_0 LKR-i (X, τ) vektoralamruum. Alamruumi topoloogia τ_0 on projektiivse piiri topoloogia, kus seda tekitav LKR-de süsteem $\{X_\gamma\}$ koosneb ühest elemendist, nimelt LKR-st X, ja vastavaks lineaarseks kujutuseks on sisestus $i : X_0 \to X, \quad x \mapsto x$. Sel juhul koosneb projektiivse piiri nulliümbruste baas hulkadest $V := i^{-1}(U) = U \cap X_0$ $(U \in \mathfrak{B}_X$; $\mathfrak{B}_X$ on ruumi X nulliümbruste baas), mis tõepoolest moodustavad alamruumi topoloogia τ_0 nulliümbruste baasi.

Näide 2. Olgu $\langle X, Y \rangle$ duaalne paar. Nõrk topoloogia $\sigma(X, Y)$ vektorruumil X on LKR-dega $X_f := \mathbb{K}$ ja kujutustega $f : X \to \mathbb{K}$ $(f \in Y)$ määratud projektiivse piiri topoloogia. Ühelt poolt on $(X, \sigma(X, Y))' = Y$, seega iga $f \in Y$ on $\sigma(X, Y)$-pidev, teisalt on $\sigma(X, Y)$ vektorruumi X nõrgim lokaalselt kumer topoloogia omadusega $(X, \sigma(X, Y))' = Y$.

Näide 3. Olgu vektorruumil X määratud lokaalselt kumerad topoloogiad τ_γ $(\gamma \in \Gamma)$. Defineerime sellel ruumil projektiivse piiri topoloogia τ_{proj} LKR-de (X, τ_γ) ja lineaarsete kujutuste $v_\gamma := i$ $(\gamma \in \Gamma)$ suhtes, kus $i : X \to X$ on ühikkujutus. Lihtne on näha, et $\mathfrak{B} := \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \mathfrak{B}_\gamma$ on topoloogia τ_{proj} nulliümbruste prebaas, kus $\mathfrak{B}_\gamma$ on τ_γ-nulliümbruste baas ruumis X (veendumine!)✠.

Näide 4. Olgu LKR-i X topoloogia τ määratud poolnormide süsteemiga $\{p_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$. Hulgad

$$V := \varepsilon \bigcap_{i=1}^{n} V_{\gamma_i} \quad (\varepsilon > 0, \quad \gamma_1, ..., \gamma_n \in \Gamma, \ n \in \mathbb{N}),$$

kus $V_\gamma := \{x \in X \mid p_\gamma(x) \leq 1\}$, moodustavad sel juhul τ-nulliümbruste baasi $\mathfrak{B}$. Paneme tähele, et τ on nõrgim lokaalselt kumer topoloogia vektorruumis X, mille suhtes kõik poolnormid p_γ $(\gamma \in \Gamma)$ on pidevad. Tõepoolest, kui τ_1 on mingi niisugune topoloogia, siis V_γ on τ_1-nulliümbrus iga $\gamma \in \Gamma$ korral, mistõttu ka iga $V \in \mathfrak{B}$ on τ_1-nulliümbrus. Tähendab, $\tau \subset \tau_1$.

Edasi, iga fikseeritud $\gamma \in \Gamma$ korral määrab poolnorm p_γ vektorruumis X lokaalselt kumera topoloogia τ_γ. Seejuures poolnormi p_γ pidevus mingi lokaalselt kumera topoloogia τ' suhtes on samaväärne ühikkujutuse $i : (X, \tau') \to (X, \tau_\gamma)$ pidevusega (kontrollida!)✠. Seetõttu on lähtetopoloogia τ LKR-de (X, τ_γ) $(\gamma \in \Gamma)$ projektiivse piiri topoloogia ühikkujutuse i suhtes. Niisiis, ***iga LKR on esitatav poolnormeeritud ruumide projektiivse piirina***.

Näide 5. Olgu (X, τ) eralduv LKR ja olgu $\mathcal{P}$ kõigi τ-pidevate poolnormide $p : X \to \mathbb{R}$ süsteem. Siis topoloogia τ on määratud poolnormide süsteemiga $\mathcal{P}$. Moodustame iga $p \in \mathcal{P}$ korral faktorruumi $X_p := X/p^{-1}(\{0\})$, mille elementideks on ekvivalentsusseose

$$x \sim y :\Leftrightarrow p(x - y) = 0 \ \ (x, y \in X)$$

järgi moodustatud ekvivalentsiklassid $\mathbf{x} = x + p^{-1}(\{0\})$. Lihtne on näha, et kui $x \sim y$ siis $p(x) = p(y)$. Teadaolevalt on tegemist vektorruumiga, defineerime sellel normi

$$\|\mathbf{x}\|_p := \inf_{z\in\mathbf{x}} p(z) \quad (\mathbf{x} \in X_p)$$

siis $\|\mathbf{x}\|_p = p(x)$ iga $x \in \mathbf{x}$ korral (kontrollida!)✠. Edasi defineerime nn. kanoonilised kujutused

$$k_p : X \to X_p, \ x \mapsto \mathbf{x} = x + p^{-1}(\{0\}) \quad (p \in \mathcal{P}).$$

Need kujutused on lineaarsed ja $\bigcap_{p\in\mathcal{P}} k_p^{-1}(\{0\}) = \{0\}$.

Määrame vektorruumis X projektiivse piiri topoloogia τ_{proj} normeeritud ruumide X_p ja kujutuste k_p suhtes. Siis, 1) τ on nõrgim lokaalselt kumer topoloogia vektorruumis X, mille suhtes kõik poolnormid $p \in \mathcal{P}$ on pidevad (vrd. näide 4), ja 2) kujutuse

$$k_p : (X, \tau') \to \left(X_p, \|\|_p\right) \tag{11.2}$$

pidevus tähendab poolnormi p τ'-pidevust, kus τ' on mingi lokaalselt kumer topoloogia vektorruumis X. Nimelt tähendab implikatsioon

$$x_\alpha \to 0 \ \ (\tau') \Rightarrow p(x_\alpha) \to 0$$

ühelt poolt poolnormi p τ'-pidevust, kuid kuna $\|k_p(x)\|_p = \|\mathbf{x}\|_p = p(x)$ $(x \in X)$, siis on see samaväärne tingimusega

$$x_\alpha \to 0 \ \ (\tau') \Rightarrow \|k_p(x_\alpha)\|_p \to 0,$$

mis tähendabki kujutuse (11.2) pidevust. Kokkuvõttes, $\tau = \tau_{proj}$. Niisiis, ***iga eralduv lokaalselt kumer ruum on esitatav normeeritud ruumide projektiivse piirina***.

Ülesanne 1. Tõestada lause 11.3.

11.2 Lokaalselt kumerate ruumide otsekorrutis

Olgu Γ mingi indeksite hulk ja olgu X_γ iga $\gamma \in \Gamma$ korral vektorruum üle ühe ja sama skalaaride korpuse $\mathbb{K}$. Moodustame **otsekorrutise**

$$X := \prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma := \{x = (x_\gamma) \mid \forall\gamma \in \Gamma : x_\gamma \in X_\gamma\}.$$

Definitsiooni järgi on otsekorrutise elementideks (mitte tingimata suunatud) pered $x = (x_\gamma)$, mille elemente x_γ me tavaliste vektorite ja jadade eeskujul nimetame *koordinaatideks.* Kujutusi

$$\pi_\gamma : \prod_{\nu\in\Gamma} X_\nu \to X_\gamma, \quad (x_\nu) \mapsto x_\gamma \quad (\gamma \in \Gamma)$$

nimetatakse *projektsioonideks.* Hulk $\prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ on vektorruum, kui defineerida

$$(x_\gamma) + (y_\gamma) := (x_\gamma + y_\gamma), \quad \lambda(x_\gamma) := (\lambda x_\gamma) \quad (\lambda \in \mathbb{K}),$$

seejuures on projektsioonid π_γ $(\gamma \in \Gamma)$ lineaarsed (kontrollida!)✠. Kuna vektorruumi $\prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ nullelemendiks on pere, mille γ-s koordinaat on ruumi X_γ nullelement, siis kehtib seos

$$\bigcap_{\gamma\in\Gamma} \pi_\gamma^{-1}\left(0_{X_\gamma}\right) = \{0_X\}. \tag{11.3}$$

Defineerime veel kujutused

$$j_\gamma : X_\gamma \to X, \ \ x_\gamma \mapsto (z_\nu)_{\nu\in\Gamma}, \text{ kus } z_\nu = x_\gamma, \text{ kui } \nu = \gamma, \text{ ja } z_\nu = 0, \text{ kui } \nu \neq \gamma$$

$(\gamma \in \Gamma)$ ning kontrollime nende järgmisi omadusi.

Ülesanne 2. Näidata, et kujutus j_γ $(\gamma \in \Gamma)$ on lineaarne ja üks-ühene.
Ülesanne 3. Veenduda, et $\pi_\gamma \circ j_\gamma = i_{X_\gamma}$ (ühikkujutus) ja $\pi_\nu \circ j_\gamma = 0_{L(X_\gamma, X_\nu)}$, kui $\nu \neq \gamma$.
Ülesanne 4. Veenduda, et $\pi_\gamma \big|_{j_\gamma(X_\gamma)} = j_\gamma^{-1}$.

Korrutistopoloogia. Eeldame järgnevas, et (X_γ, τ_γ) $(\gamma \in \Gamma)$ on LKR-d ja defineerime otsekorrutisel X projektiivse piiri topoloogia projektsioonide $\pi_\gamma : X \to X_\gamma$ suhtes. Seda topoloogiat nimetatakse *korrutistopoloogiaks,* tähistame teda tähega τ_Π. Olgu $\mathfrak{B}_\gamma$ LKR-i X_γ nulliümbruste baas, siis hulkade $\pi_\gamma^{-1}(U_\gamma)$ $(U_\gamma \in \mathfrak{B}_\gamma, \gamma \in \Gamma)$ kõikvõimalikud lõplikud ühisosad moodustavad τ_Π-nulliümbruste baasi $\mathfrak{B}$ LKR-s X. Niisiis,

$$\mathfrak{B} = \left\{ \bigcap_{\gamma\in H} \pi_\gamma^{-1}(U_\gamma) \mid U_\gamma \in \mathfrak{B}_\gamma, \ H \subset \Gamma \text{ on lõplik alamhulk} \right\}.$$

Korrutistopoloogia olemuse paremaks mõistmiseks on kasulik järgmine fakt, mis tuleneb vahetult projektsioonide π_γ $(\gamma \in \Gamma)$ pidevusest (vrd. projektiivse piiri topoloogia definitsioon).

Lause 11.4 *Otsekorrutise X elementide suunatud pere $(x^\alpha)_{\alpha\in A}$ koondub elemendiks x korrutistopoloogias τ_Π parajasti siis, kui $lim_\alpha \pi_\gamma(x^\alpha) = \pi_\gamma(x)$ iga $\gamma \in \Gamma$ korral.*

Tõestus. Iseseisvalt!✠ ∎

Lause 11.5 *Suunatud pere* $(x^\alpha)_{\alpha\in A}$ *on Cauchy pere otsekorrutises* (X, τ_Π) *parajasti siis, kui* $(\pi_\gamma(x^\alpha))_{\alpha\in A}$ *on Cauchy pere ruumis* (X_γ, τ_γ) $(\gamma \in \Gamma)$.

Tõestus. Iseseisvalt!✠ ∎

Otsekorrutise üldiste omaduste uurimist alustame järgmise kahe väitega, mis tulenevad vahetult lausetest 11.2 ja 11.3.

Lause 11.6 *Kui* Z *on LKR, siis lineaarne kujutus* $A : Z \to (X, \tau_\Pi)$ *on pidev parajasti siis, kui kujutus* $\pi_\gamma \circ A : Z \to X_\gamma$ *on pidev iga* $\gamma \in \Gamma$ *korral*

Tõestus. Isesisvalt (vrd. lause 11.2)✠. ∎

Lause 11.7 *Alamhulk* $E \subset X$ *on* τ_Π*-tõkestatud parajasti siis, kui tema projektsioon* $\pi_\gamma(E)$ *on tõkestatud LKR-s* X_γ *iga* $\gamma \in \Gamma$ *korral.*

Tõestus. Isesisvalt (vrd. lause 11.3)✠. ∎

Lause 11.8 *LKR* (X, τ_Π) *on eralduv parajasti siis, kui kõik LKR-d* X_γ $(\gamma \in \Gamma)$ *on eralduvad.*

Tõestus. *Tarvilikkus.* Kui oletada, et mingi $\gamma \in \Gamma$ korral $a \in X_\gamma \setminus \{0\}$ kuulub ühisossa $\bigcap_{U\in\mathfrak{B}_\gamma} U$, siis peaks element $j_\gamma(a)$, mis on nullist erinev vektorruumis X, kuuluma kõikidesse nulliümbrustesse $V \in \mathfrak{B}$ ruumis X (põhjendada!)✠. Tähendab, (X, τ_Π) ei ole eralduv.

Piisavus tuleneb vahetult lausest 11.1 (vrd. seos (11.3)). ∎

Lause 11.9 *Otsekorrutise* (X, τ_Π) *kinnine alamhulk* E *on täielik parajasti siis, kui tema projektsioon* $\pi_\gamma(E)$ *on täielik LKR-s* X_γ *iga* $\gamma \in \Gamma$ *korral.*

Tõestus. *Tarvilikkus.* Eeldame, et E on täielik alamhulk korrutisruumis X. Olgu $(a^\alpha)_{\alpha\in A} \subset \pi_{\gamma_0}(E)$ Cauchy pere LKR-s X_{γ_0}, vaatleme peret $(j_{\gamma_0}(a^\alpha))_{\alpha\in A}$ ruumis X. Kuna $\pi_{\gamma_0}(j_{\gamma_0}(a^\alpha)) = a^\alpha$ ja $\pi_\gamma(j_{\gamma_0}(a^\alpha)) = 0$ $(\alpha \in A,\ \gamma \neq \gamma_0)$, siis $(j_{\gamma_0}(a^\alpha))$ on Cauchy pere hulgas E (vrd. lause 11.7). Seega $(j_{\gamma_0}(a^\alpha))$ koondub ruumis X mingiks punktiks $z \in E$, tänu projektsiooni π_{γ_0} pidevusele kehtib $a^\alpha \to \pi_{\gamma_0}(z) \in \pi_{\gamma_0}(E)$. Tähendab, $\pi_{\gamma_0}(E)$ on täielik hulk.

Piisavus. Olgu E selline kinnine alamhulk ruumis (X, τ_Π), et tema projektsioon $\pi_\gamma(E)$ on täielik hulk ruumis (X_γ, τ_γ) iga $\gamma \in \Gamma$ korral. Suvalise Cauchy pere $(z^\alpha)_{\alpha\in A} \subset E$ puhul on $(\pi_\gamma(z^\alpha))_{\alpha\in A} \subset \pi_\gamma(E)$ Cauchy pere ruumis (X_γ, τ_γ). Seega leiduvad punktid $z_\gamma \in \pi_\gamma(E)$ $(\gamma \in \Gamma)$, et $\pi_\gamma(z^\alpha) \to z_\gamma$ ruumis X_γ, seejuures $z^\alpha \to z = (z_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ (τ_Π). Kuna E on kinnine hulk, siis $z \in E$.

Lause on tõestatud. ∎

Järeldus 11.10 *Täielike lokaalselt kumerate ruumide otsekorrutis on täielik lokaalselt kumer ruum.*

Lause 11.11 *LKR-de* (X_γ, τ_γ) $(\gamma \in \Gamma)$ *projektiivne piir* (X_0, τ_{proj}) *mingite lineaarsete kujutuste* $v_\gamma : X_0 \to X_\gamma$ *suhtes, mis rahuldavad tingimust*

$$\bigcap_{\gamma\in\Gamma} v_\gamma^{-1}(\{0\}) = \{0\},$$

on topoloogiliselt ja algebraliselt isomorfne nende ruumide otsekorrutise (X, τ_Π) *mingi alamruumiga.*

Tõestus. Defineerime lineaarse kujutuse

$$T : X_0 \to \prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma, \quad x \mapsto (v_\gamma(x)),$$

siis $v_\gamma = \pi_\gamma \circ T$ $(\gamma \in \Gamma)$. Kuna kujutused v_γ on pidevad, siis $T \in L(X_0, X)$ (vrd. lause 11.2). Seejuures

$$T^{-1}(\{0\}) = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} v_\gamma^{-1}(\{0\}) = \{0\},$$

s.t. $T : X_0 \to T(X_0)$ on üks-ühene kujutus. Saame $v_\gamma \circ T^{-1} = \pi_\gamma$, millest järeldub $T^{-1} \in L(T(X_0), X_0)$ (vrd. lause 11.2). Kokkuvõttes oleme näidanud, et projektiivne piir X_0 ning otsekorrutise X alamruum $T(X_0)$ on algebraliselt ja topoloogiliselt isomorfsed. ■

Pidades silmas näidet 5, saame lausest 11.11 järgmise järelduse.

Järeldus 11.12 *Iga eralduv lokaalselt kumer ruum on topoloogiliselt ja algebraliselt isomorfne normeeritud ruumide otsekorrutise alamruumiga.*

Selle artikli lõpuks märgime veel eelpool defineeritud kujutuste j_γ olulist rolli lokaalselt kumerate ruumide otsekorrutise puhul.

Lause 11.13 *Olgu* X *LKR-de* X_γ $(\gamma \in \Gamma)$ *otsekorrutis, mis on varustatud korrutistopoloogiaga* τ_Π*. Siis kujutus* j_γ *korraldab iga* $\gamma \in \Gamma$ *korral LKR-i* X_γ *ja LKR-i* (X, τ_Π) *alamruumi* $j_\gamma(X_\gamma)$ *vahel topoloogilise ja algebralise isomorfismi. Kui kõik LKR-d* X_γ $(\gamma \in \Gamma)$ *on eralduvad, siis* $j_\gamma(X_\gamma)$ *on kinnine alamruum ruumis* (X, τ_Π).

Tõestus. Ülesande 3 kohaselt $\pi_\upsilon \circ j_\gamma \in L(X_\gamma, X_\upsilon)$ $(\gamma, \upsilon \in \Gamma)$, lause 11.2 põhjal on $j_\gamma \in L(X_\gamma, X)$. Ülesandest 4 saame, et $j_\gamma^{-1} \in L(j_\gamma(X_\gamma), X_\gamma)$. Seega on j_γ topoloogiline ja algebraline isomorfism. Lõpuks, kui LKR-d X_γ $(\gamma \in \Gamma)$ on eralduvad, siis $\pi_\upsilon^{-1}(\{0\})$ on kinnine hulk ruumis X (põhjendada!)✠, mistõttu ka hulk $j_\gamma(X_\gamma) = \bigcap_{\upsilon\in\Gamma, \upsilon\neq\gamma} \pi_\upsilon^{-1}(\{0\})$ on kinnine. ■

Märkus. Lause 11.13 lubab meil samastada LKR-dena X_γ ja $j_\gamma(X_\gamma)$ $(\gamma \in \Gamma)$. Seega võime edaspidi vaadelda LKR-e X_γ otsekorrutise (X, τ_Π) alamruumidena, millel on parajasti üks ühine punkt 0. Kui ruumid X_γ on eralduvad, siis on nad kinnised alamruumid ruumis X. Märgime veel, et kui $\Delta \subset \Gamma$, siis $\prod_{\gamma\in\Delta} X_\gamma$ on ruumi (X, τ_Π) alamruum, seejuures kinnine, kui kõik ruumid X_γ on eralduvad.

12 Induktiivsed piirid. Bornoloogilised ruumid

12.1 Induktiivse piiri topoloogia

LKR-de induktiivne piir. Me eeldame siin, et X **on vektorruum ja** (X_γ, τ_γ) **on LKR-d ning** $u_\gamma : X_\gamma \to X$ **on lineaarsed kujutused** $(\gamma \in \Gamma)$ **omadusega**

$$X = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} u_\gamma (X_\gamma).$$

Definitsioon. Tugevaimat lokaalselt kumerat topoloogiat τ_{ind} vektorruumis X, mille suhtes kõik kujutused u_γ on pidevad, nimetatakse (LKR-de X_γ ja kujutustega u_γ määratud) *induktiivse piiri topoloogiaks.* LKR-i (X, τ_{ind}) nimetame sel juhul LKR-de (X_γ, τ_γ) $(\gamma \in \Gamma)$ *induktiivseks piiriks* (kujutuste u_γ suhtes).

Induktiivse piiri topoloogia uurimisel on põhiküsimus: ***Millised ruumide*** X_γ ***omadused on pärandatavad, s.o. kanduvad üle ruumile*** (X, τ_{ind})? Mainime kohe *kahte omadust, kus vastus on negatiivne, need on* ***eralduvus*** *ja* ***metriseeruvus***. Seejuures F-ruumide induktiivne piir ei ole üldjuhul F-ruum. Ebameeldiva asjaoluna tuleb märkida veel seda, et üldjuhul puudub sellise poolnormide pere efektiivne kirjeldus, mis määrab induktiivse piiri topoloogia. Sellest hoolimata mängivad induktiivsed piirid väga olulist rolli nii teoorias kui ka paljudes rakendustes.

Me alustame **induktiivsete piiride lähemat uurimist** topoloogia τ_{ind} täpsema kirjeldusega.

Lause 12.1 *Absoluutselt kumer neelav alamhulk* $U \subset X$ *on* τ_{ind}*-nulliümbrus parajasti siis, kui* $u_\gamma^{-1}(U)$ *on nulliümbrus ruumis* (X_γ, τ_γ) *iga* $\gamma \in \Gamma$ *korral.*

Tõestus. *Tarvilikkus.* Kui U on τ_{ind}-nulliümbrus, siis $u_\gamma^{-1}(U)$ on τ_γ-nulliümbrus kujutuse u_γ pidevuse tõttu.

Piisavus. Olgu τ_U poolnormiga p_U (hulga U Minkowski funktsionaal) määratud lokaalselt kumer topoloogia, sel juhul $\{\lambda U \mid \lambda > 0\}$ on τ_U-nulliümbruste baas. Kui $u_\gamma^{-1}(U)$ on nulliümbrus ruumis (X_γ, τ_γ), siis kujutus $u_\gamma : (X_\gamma, \tau_\gamma) \to (X, \tau_U)$ on pidev. Seega $\tau_U \subset \tau_{ind}$, s.t. U on τ_{ind}-nulliümbrus. ■

Lause 12.2 *Kui* $\mathfrak{B}_\gamma$ *on LKR-i* X_γ *absoluutselt kumeratest nulliümbrustest koosnev baas* $(\gamma \in \Gamma)$*, siis*

$$\mathfrak{B} := \left\{ absconv \bigcup_{\gamma \in \Gamma} u_\gamma (V_\gamma) \mid V_\gamma \in \mathfrak{B}_\gamma \right\}$$

on nulliümbruste baas LKR-s (X, τ_{ind}).

Tõestus. Kõigepealt paneme tähele, et iga hulk $U :=$ absconv $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} u_\gamma (V_\gamma) \in \mathfrak{B}$ on τ_{ind}-nulliümbrus. See tuleneb lausest 12.1, sest iga $\delta \in \Gamma$ korral $V_\delta \subset u_\delta^{-1}(u_\delta(V_\delta)) \subset u_\delta^{-1}\left(\text{absconv} \bigcup_{\gamma \in \Gamma} u_\gamma (V_\gamma)\right) = u_\delta^{-1}(U)$.

Näitame, et $\mathfrak{B}$ on τ_{ind}-nulliümbruste baas. Olgu $U \subset X$ suvaline absoluutselt kumer τ_{ind}-nulliümbrus. Iga $\gamma \in \Gamma$ korral on $u_\gamma^{-1}(U)$ siis τ_γ-nulliümbrus, seega saab valida $V_\gamma \in \mathfrak{B}_\gamma$

omadusega $V_\gamma \subset u_\gamma^{-1}(U)$, kust $u_\gamma(V_\gamma) \subset U$. Seetõttu $U \supset V :=$ absconv $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} u_\gamma(V_\gamma)$ ning $V \in \mathfrak{B}$. Tähendab, $\mathfrak{B}$ on τ_{ind}-nulliümbruste baas. ■

Lause 12.1 lubab meil tõestada ka järgmise väite.

Lause 12.3 *Tünniruumide induktiivne piir on tünniruum.*

Tõestus. Olgu (X, τ_{ind}) LKR-de (X_γ, τ_γ) $(\gamma \in \Gamma)$ induktiivne piir kujutuste $u_\gamma : X_\gamma \to X$ suhtes. Kui U on tünn LKR-s (X, τ_{ind}), siis $u_\gamma^{-1}(U)$ on tünn ruumis X_γ (kontrollida!)✠ ning seega τ_γ-nulliümbrus. Lause 12.1 põhjal on U τ_{ind}-nulliümbrus. Tähendab, (X, τ_{ind}) on tünniruum. ■

Lause 12.4 *Olgu (Z, τ) mingi LKR ja (X, τ_{ind}) LKR-de (X_γ, τ_γ) $(\gamma \in \Gamma)$ induktiivne piir. Lineaarne kujutus $A : X \to Z$ on pidev parajasti siis, kui kujutus $A \circ u_\gamma : X_\gamma \to Z$ on iga $\gamma \in \Gamma$ korral pidev. Lineaarsete kujutuste hulk $\mathfrak{A} \subset L(X, Z)$ on võrdpidev parajasti siis, kui $\{A \circ u_\gamma \mid A \in \mathfrak{A}\} \subset L(X_\gamma, Z)$ on võrdpidev iga $\gamma \in \Gamma$ korral.*

Tõestus. Selge, et kui A on pidev, siis ka kompositsioon $A \circ u_\gamma$ on pidev. Kui eeldada kujutuste $A \circ u_\gamma$ pidevust iga $\gamma \in \Gamma$ korral, siis seosest

$$u_\gamma^{-1}\left(A^{-1}(V)\right) = (A \circ u_\gamma)^{-1}(V) \tag{12.1}$$

tuleneb, et $A^{-1}(V)$ on τ_{ind}-nulliümbrus iga τ-nulliümbruse V puhul. See tähendabki kujutuse $A : (X, \tau_{ind}) \to (Z, \tau)$ pidevust.

Hulga $\mathfrak{A} \subset L(X, Z)$ võrdpidevuseks peab $\cap \{A^{-1}(V) \mid A \in \mathfrak{A}\}$ olema nulliümbrus ruumis (X, τ_{ind}). Seose (12.1) ja lause 12.1 tõttu on selleks tarvilik ja piisav, et alamhulk $\cap \left\{(A \circ u_\gamma)^{-1}(V) \mid A \in \mathfrak{A}\right\}$ oleks τ_γ-nulliümbrus, s.t., et $\{A \circ u_\gamma \mid A \in \mathfrak{A}\} \subset L(X_\gamma, Z)$ oleks võrdpidev iga $\gamma \in \Gamma$ korral. ■

Viimane lause annab meile võimaluse kirjeldada **induktiivse piiri topoloogiat polaartopoloogiana.** Selleks on mugav kasutada kaaskujutuse mõistet. Olgu $\langle X, X' \rangle$ ja $\langle Z, Z' \rangle$ duaalsed paarid. Lineaarse kujutuse $A : X \to Z$ *kaaskujutuseks* nimetatakse kujutust

$$A' : Z' \to X^*, \;\; g \mapsto g \circ A,$$

teiste sõnadega, $\langle x, A'(g) \rangle = \langle A(x), g \rangle$ $(x \in X, \; g \in Z')$. Ilmselt on $A' : Z' \to X^*$ lineaarne kujutus. Vahetu kontroll näitab, et $A'(Z') \subset X'$ parajasti siis, kui $A : (X, \sigma(X, X')) \to (Z, \sigma(Z, Z'))$ on pidev (veenduda!)✠.

Meenutame veel tõsiasja, et iga eralduv lokaalselt kumer topoloogia τ vektorruumis Z langeb kokku polaartopoloogiaga $\mathcal{T}_{\mathfrak{S}}$, kus $\mathfrak{S}$ on kõigi τ-võrdpidevate alamhulkade $S \subset (Z, \tau)$ süsteem (vrd. teoreem 9.3).

Lause 12.5 *Kui LKR-d (X_γ, τ_γ) ja (X, τ_{ind}) on eralduvad, siis τ_{ind} on polaartopoloogia $\mathcal{T}_{\mathfrak{S}}$, kus $\mathfrak{S}$ on kõigi selliste hulkade $S \subset (X, \tau_{ind})'$ süsteem, mille puhul $u_\gamma'(S) \subset X_\gamma'$ on τ_γ-võrdpidev $(\gamma \in \Gamma)$.*

Tõestus. Lause 12.4 kohaselt on $S \subset (X, \tau_{ind})'$ τ_{ind}-võrdpidev parajasti siis, kui iga $\gamma \in \Gamma$ korral $u'_\gamma(S) = \{f \circ u_\gamma \mid f \in S\}$ on τ_γ-võrdpidev. Väide järeldub lausele eelnenud märkusest. ■

Induktiivse piiri ja projektiivse piiri mõistete duaalsus selgub järgmisest lausest.

Lause 12.6 *Olgu X_γ iga $\gamma \in \Gamma$ korral LKR ja olgu kaasruum $X'_\gamma := (X_\gamma, \tau_\gamma)'$ varustatud polaartopoloogiaga $\mathcal{T}_{\mathfrak{S}_\gamma}$, kus $\mathfrak{S}_\gamma$ on mingi $\sigma\left(X_\gamma, X'_\gamma\right)$-tõkestatud alamhulkade süsteem. Olgu (X, τ_{ind}) ruumide X_γ induktiivne piir kujutuste $u_\gamma : X_\gamma \to X$ suhtes. Siis polaartopoloogia $\mathcal{T}_{\mathfrak{S}}$ kaasruumis $X' := (X, \tau)'$, kus $\mathfrak{S} := \{\bigcup_{k=1}^n u_{\gamma_k}(S_{\gamma_k}) \mid S_{\gamma_k} \in \mathfrak{S}_{\gamma_k},\ k = 1, ...n;\ n \in \mathbb{N}\}$, on LKR-de $\left(X'_\gamma, \mathcal{T}_{\mathfrak{S}_\gamma}\right)$ projektiivne piir kaaskujutuste u'_γ suhtes.*

Tõestus. Kuna $u_\gamma \in L(X_\gamma, X)$, siis $u'_\gamma : X' \to X'_\gamma$ $(\gamma \in \Gamma)$. Defineerime kaasruumis X' projektiivse piiri topoloogia τ_{proj} LKR-de $\left(X'_\gamma, \mathcal{T}_{\mathfrak{S}_\gamma}\right)$ ja kujutuste u'_γ suhtes. See on nõrgim lokaalselt kumer topoloogia, mille suhtes kujutused u'_γ on pidevad, s.t., milles $u'^{-1}_\gamma\left(S^0_\gamma\right)$ on nulliümbrused. Kuna $u'^{-1}_\gamma\left(S^0_\gamma\right) = u_\gamma(S_\gamma)^0$ (kontrollida!)✠, siis $\tau = \mathcal{T}_{\mathfrak{S}}$ (põhjendada!)✠. ■

12.2 Bornoloogilised ruumid

Tõkestatud kujutused. Olgu (X, τ) ja (Z, τ') LKR-d ning $A : X \to Z$ lineaarne kujutus. Kui A on pidev, siis on ta ka tõkestatud, s.t. ta teisendab iga τ-tõkestatud hulga $E \subset X$ τ'-tõkestatud hulgaks $A(E)$ ruumis Z. Tõepoolest, kui V on mingi nulliümbrus ruumis Z, siis kujutuse A pidevuse tõttu leidub selline nulliümbrus U ruumis X, et $U \subset A^{-1}(V)$, ning tänu hulga E tõkestatusele saame $\lambda E \subset U \subset A^{-1}(V)$ mingi $\lambda > 0$ korral. Siit tuleneb $\lambda A(E) = A(\lambda E) \subset V$, seega $A(E)$ on tõkestatud.

Kui X ja Z on normeeritud ruumid, siis kehtib teatavasti ka vastupidine väide: iga tõkestatud lineaarne kujutus on pidev. Need faktid on lähtekohaks järgmisele probleemiasetusele: ***kirjeldada selliseid LKR-e*** X, ***mille puhul iga tõkestatud lineaarne kujutus*** $A : X \to Z$ o***n pidev suvalise LKR-i*** Z ***korral***.

Bornoloogiline ruum. Definitsioon. LKR-i (X, τ) nimetatakse *bornoloogiliseks ruumiks,* kui iga selline absoluutselt kumer alamhulk $U \subset X$, mis neelab kõik τ-tõkestatud hulgad, on τ-nulliümbrus.

Meenutame (vrd. art. 2.2), et väljendiga "U neelab hulga A" tähistame me (eeldusel, et U on tasakaalus) väidet "leidub selline $\lambda > 0$, et $\lambda A \subset U$". Märgime veel, et kuna iga lõplik alamhulk on tõkestatud, siis definitsioonis toodud omadusega hulk U on kindlasti neelav. Samal ajal ei pruugi U olla tünn, sest me ei eelda tema kinnisust.

Järgmine lause näitab, et bornoloogiliste ruumide klass sisaldab parajasti kõik soovitud omadusega lokaalselt kumerad ruumid.

Lause 12.7 *LKR-i (X, τ) puhul on järgmised väited samaväärsed:*
(a) (X, τ) on bornoloogiline ruum,
(b) iga tõkestatud lineaarne kujutus $A : X \to Z$ on iga LKR-i (Z, τ') korral pidev.

Tõestus. $(a) \Rightarrow (b)$: Eeldame, et A on tõkestatud lineaarne kujutus bornoloogilisest ruumist X LKR-i Z. Olgu V absoluutselt kumer nulliümbrus ruumis Z. näitame, et $A^{-1}(V)$ on τ-nulliümbrus, siis A on pidev. Olgu E tõkestatud alamhulk ruumis X. Kuna A on tõkestatud kujutus, siis $A(E)$ on ruumis Z tõkestatud ning seega $A(E) \subset \lambda V$ mingi $\lambda > 0$ korral, millest tuleneb $E \subset \lambda A^{-1}(V)$. Näeme, et absoluutselt kumer alamhulk $A^{-1}(V)$ neelab iga τ-tõkestatud alamhulga, olles seetõttu nulliümbrus bornoloogilises ruumis X. Niisiis on A pidev kujutus.

$(b) \Rightarrow (a)$: Olgu $U \subset X$ selline absoluutselt kumer alamhulk, mis neelab iga tõkestatud hulga ruumis X. Sel juhul on ta neelav ning tema Minkowski funktsionaal p_U on poolnorm vektorruumis X (vrd. järeldus 5.7). Vaatleme selles ruumis lisaks esialgsele topoloogiale τ veel poolnormiga p_U määratud lokaalselt kumerat topoloogiat τ_U, mille nulliümbruste baasiks on süsteem $\{\varepsilon U \mid \varepsilon > 0\}$. Paneme tähele, et iga τ-tõkestatud hulk $B \subset X$ on τ_U-tõkestatud (kontrollida!)✠, see tähendab ühikkujutuse $i : (X, \tau) \to (X, \tau_U)$ tõkestatust ja seega eelduse (b) kohaselt ka pidevust, mistõttu U on τ-nulliümbrus. ■

Märgime bornoloogilise ruumi üht olulist omadust: ***kui** (X, τ) **on eralduv bornoloogiline ruum, siis** τ **on Mackey topoloogia*** $\tau(X, X')$, kus $X' := (X, \tau)'$. Selle väite kontrollimiseks märgime, et ühikkujutus $i : (X, \tau) \to (X, \tau(X, X'))$ on tõkestatud, sest topoloogiatel τ ja $\tau(X, X')$ on Mackey teoreemi järelduse 9.11 kohaselt ühed ja samad tõkestatud hulgad. Lause 12.7 põhjal on i pidev kujutus, mistõttu $\tau \supset \tau(X, X')$. Kuna $\tau(X, X')$ on tugevaim neist lokaalselt kumeratest topoloogiatest, mis on duaalsusega $\langle X, X' \rangle$ kooskõlas (vrd. järeldus 9.8), siis kehtib ka vastupidine sisalduvus, ning kokkuvõttes võrdus $\tau = \tau(X, X')$.

Teatavasti (vt. lause 9.13) jääb siin tõestatud väide õigeks, kui selles asendada sõna *bornoloogiline* sõnaga *metriseeruv*. Nende **kahe mõiste vahekorda** selgitab järgmine lause.

Lause 12.8 *Iga metriseeruv lokaalselt kumer ruum on bornoloogiline.*

Tõestus. Olgu (X, τ) metriseeruv LKR nulliümbruste baasiga $\mathfrak{B} := \{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, mis rahuldab tingimust $U_{n+1} \subset U_n \ (n \in \mathbb{N})$. Oletame vastuväiteliselt, et X ei ole bornoloogiline. Siis leiduvad LKR Z ja tõkestatud kujutus $A : X \to Z$, mis ei ole pidev. Sel juhul saame leida ruumis Z nulliümbruse V, mille korral $A^{-1}(V)$ ei ole τ-nulliümbrus. Järelikult saab iga $n \in \mathbb{N}$ jaoks valida elemendi $x_n \in U_n$ omadusega $A(x_n) \notin nV$ (põhjendada!, vrd. lause 9.13 tõestus)✠. Ilmselt on (x_n) tõkestatud jada, kuid $(A(x_n))$ ei ole tõkestatud. Saadud vastuolu ütleb, et A on pidev, s.t. X on bornoloogiline ruum. ■

Induktiivsete piiride kontekstis on oluline järgmine fakt.

Lause 12.9 *Bornoloogiliste ruumide induktiivne piir on bornoloogiline ruum.*

Tõestus. Olgu (X, τ_{ind}) bornoloogiliste ruumide (X_γ, τ_γ) $(\gamma \in \Gamma)$ induktiivne piir kujutuste $u_\gamma : X_\gamma \to X$ suhtes ja olgu $A : X \to Z$ tõkestatud lineaarne kujutus, kus (Z, τ') on LKR. Kui E on tõkestatud hulk ruumis X_γ, siis tänu kujutuse u_γ pidevusele ning A tõkestatusele on $(A \circ u_\gamma)(E) = A(u_\gamma(E))$ tõkestatud hulk ruumis Z. Niisiis on $A \circ u_\gamma : X_\gamma \to Z$ iga $\gamma \in \Gamma$ korral tõkestatud kujutus ja seega eelduse kohaselt pidev. Lause 12.4 põhjal on A pidev, mis tähendab ruumi (X, τ_{ind}) bornoloogilisust. ■

Lausetest 12.8 ja 12.9 tuleneb, et ***metriseeruvate LKR-de induktiivne piir on bornoloogiline ruum***. Selle artikli **põhitulemus**, mille me järgnevalt esitame, ütleb, et see väide on teatavas mõttes pööratav.

Teoreem 12.10 *Eralduv LKR (X, τ) on bornoloogiline parajasti siis, kui ta on normeeritud ruumide induktiivne piir. Täielik eralduv LKR (X, τ) on bornoloogiline parajasti siis, kui ta on Banachi ruumide induktiivne piir.*

Teoreem 12.10 järeldub vahetult järgmisest üldisemast lausest.

Lause 12.11 *Olgu (X, τ) eralduv LKR. Vektorruumis X on olemas tugevaim lokaalselt kumer topoloogia τ', millel on topoloogiaga τ ühed ja samad tõkestatud hulgad. Seejuures on (X, τ') bornoloogiline ruum ja ta on esitatav vektorruumi X vektoralamruumidest moodustatud normeeritud ruumide induktiivse piirina. Topoloogiad τ ja τ' langevad kokku parajasti siis, kui (X, τ) on bornoloogiline ruum. Kui (X, τ) on täielik LKR, siis (X, τ') on Banachi ruumide induktiivne piir.*

Tõestus. Tähistame tähega $\mathcal{S}$ kõigi kinniste tõkestatud absoluutselt kumerate alamhulkade süsteemi ruumis (X, τ). Suvalise $A \in \mathcal{S}$ korral olgu X_A tema lineaarne kate vektorruumis X, s.o. $X_A := \operatorname{span} A$. Hulga A Minkowski funktsionaal p_A on norm vektorruumis X_A. Me teame (vt. lause 9.12 tõestus), et normi p_A poolt määratud topoloogia τ_A on tugevam, kui indutseeritud topoloogia $\tau|_{X_A}$ alamruumil X_A, seetõttu sisestused

$$u_A : (X_A, \tau_A) \to (X, \tau), \ \ x \mapsto x \quad (A \in \mathcal{S})$$

on pidevad ning $X = \bigcup_{A \in \mathcal{S}} X_A = \bigcup_{A \in \mathcal{S}} u_A(X_A)$. Olgu τ' induktiivse piiri topoloogia vektorruumis X LKR-de (X_A, τ_A) ja kujutuste u_A suhtes $(A \in \mathcal{S})$. Seejuures (X, τ') kui metriseeruvate lokaalselt kumerate ruumide induktiivne piir on bornoloogiline ruum. Kuna iga absoluutselt kumera τ-nulliümbruse U korral $u_A^{-1}(U) = X_A \cap U$ on τ_A-nulliümbrus ruumis X_A, siis lause 12.1 põhjal $\tau' \supset \tau$. Kui τ on seejuures bornoloogiline topoloogia, siis ühikkujutus $i : (X, \tau) \to (X, \tau')$ on pidev, mistõttu saame $\tau' = \tau$.

Näitame, et kui (X, τ) on täielik LKR, siis (X_A, τ_A) on Banachi ruum iga $A \in \mathcal{S}$ puhul. Olgu (x_n) suvaline Cauchy jada normeeritud ruumis X_A, siis on ta τ-Cauchy jada ruumis X, mistõttu ta koondub selles ruumis mingiks punktiks a. Cauchy jada definitsiooni kohaselt

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \in \mathbb{N} : m, n \geq N \Rightarrow x_m - x_n \in \varepsilon A.$$

Kuna εA on τ-kinnine hulk, siis $a - x_n \in \varepsilon A \ \ (n \geq N)$, millest tuleneb $a \in x_n + \varepsilon A \subset X_A$ ja $x_n \to a\,(\tau_A)$. Tähendab, (X_A, τ_A) on täielik. ■

Märkused. 1^0**.** Me võiksime lause 12.11 tõestuses kõigi kinniste tõkestatud absoluutselt kumerate alamhulkade süsteemi $\mathcal{S}$ asendada selle süsteemi suvalise fundamentaalsüsteemiga, s.o. niisuguse alamsüsteemiga $\mathcal{S}_0$, et iga $A \in \mathcal{S}$ jaoks leidub $B \in \mathcal{S}_0$ omadusega $B \supset A$. Siit tuleneb, et kui LKR-s (X, τ) on **loenduv** tõkestatud alamhulkade fundamentaalsüsteem, siis saab ta esitada **loenduva** normeeritud ruumide pere induktiivse piirina (vrd. art. 13.3).

2^0**.** Bornoloogilise ruumi ja tünniruumi mõisted ei ole võrreldavad. Saab tuua näiteid bornoloogilistest ruumidest, mis ei ole tünniruumid ja vastupidi. Lausetest 12.3 ja 12.11 aga saame, et ***iga täielik eralduv bornoloogiline ruum on tünniruum*** (kontrollida!)✠.

13 Induktiivse piiri erijuhud: faktorruum, otsesumma, range induktiivne piir

13.1 Faktorruumid

Olgu X vektorruum ning M tema vektoralamruum. Defineerime ruumi X elementide vahel **ekvivalentsusseose**

$$x \sim y :\Leftrightarrow x - y \in M$$

ja tähistame X/M vastavate ekvivalentsiklasside hulga. Selle elemente tähistame tähtedega $\mathbf{x}, \mathbf{y}, ...$ Lihtne on veenduda, et X/M on vektorruum✠, kui defineerida

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} := \{x + y \mid x \in \mathbf{x},\, y \in \mathbf{y}\} \text{ ja } \lambda\mathbf{x} := \{\lambda x \mid x \in \mathbf{x}\} \quad (\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}) .$$

Juhul $\lambda = 0$ defineerime $0\mathbf{x} := M$. Ekvivalentsiklass M osutub vektorruumi X/M nullelemendiks: kuna iga $z \in \mathbf{x}+M$ korral $z = x + u$ $(x \in \mathbf{x}, u \in M)$, siis $z - x = u \in M$, s.t. $z \sim x$ ehk $\mathbf{x}+M = \mathbf{x}$.

Ekvivalentsiklassid $\mathbf{x} \in X/M$ katavad kogu vektorruumi X ning ei lõiku omavahel. Seetõttu määrab iga $x \in X$ üheselt elemendi $x + M \in X/M$. Defineerime kujutuse

$$k : X \to X/M, \quad x \mapsto x + M,$$

see on lineaarne ja sürjektiivne✠.

Vektorruumi X/M nimetatakse vektorruumi X **faktorruumiks** vektoralamruumi M järgi. Kujutust k nimetatakse faktorruumi X/M *kanooniliseks kujutuseks.*

Faktortopoloogia. Olgu nüüd (X, τ) LKR nulliümbruste baasiga $\mathfrak{B}$, mis koosneb absoluutselt kumeratest hulkadest. Moodustame alamhulkade süsteemi

$$\mathfrak{B}' := \{k(U) \mid U \in \mathfrak{B}\}$$

vektorruumis X/M ja näitame, et see on mingi lokaalselt kumera topoloogia nulliümbruste baas. Tõepoolest, hulgad $k(U)$ on absoluutselt kumerad ja neelavad (kontrollida!)✠, peale selle on $\mathfrak{B}'$ kinnine lõplike ühisosade ja kordsete võtmise suhtes (vrd. pt. 7). Nimelt saab suvaliste $U_1, U_2 \in \mathfrak{B}$ puhul valida $U \in \mathfrak{B}$ omadusega $U \subset U_1 \cap U_2$, mistõttu $k(U) \subset k(U_1) \cap k(U_2)$, teisalt kehtib $(\lambda k(U) = k(\lambda U) \in \mathfrak{B}'$ iga $\lambda \in \mathbb{K}$ ja $U \in \mathfrak{B}$ korral.

Nulliümbruste baasiga $\mathfrak{B}'$ määratud lokaalselt kumerat topoloogiat τ' vektorruumil X/M nimetatakse *faktortopoloogiaks.* Kuna $U \subset k^{-1}(k(U))$, siis kanooniline kujutus $k : (X, \tau) \to (X/M, \tau')$ on pidev .

Lause 13.1 *Faktortopoloogia τ' on eralduv parajasti siis, kui M on kinnine alamruum LKR-s (X, τ).*

Tõestus. *Tarvilikkus.* Kui $(X/M, \tau')$ on eralduv, siis ühe-elelemendiline hulk $\{0_{X/M}\}$ on τ'-kinnine. Kujutuse k pidevuse tõttu on $M = k^{-1}(\{0\})$ kinnine ruumis X.

Piisavus. Olgu $M = \overline{M}$ ruumis X. Kui $\mathbf{x} \in (X/M) \setminus \{0\}$, siis iga $x \in \mathbf{x}$ korral kehtib $x \notin M$ (põhjendada!)✠. Seetõttu leidub $U \in \mathfrak{B}$ omadusega $(x + U) \cap M = \emptyset$, millest järeldub $x \notin M+U$ (vastasel korral oleks $x=m-u$ mingite $m \in M$ ja $u \in U$ korral ning $x+u \in (x+U) \cap M$), seega $\mathbf{x}=k(x) \notin k(M+U)=k(U)$. Järelikult $\cap \{k(U) \mid U \in \mathfrak{B}\} = \{0\}$, lause 2.7 kohaselt on topoloogia τ' eralduv. ■

Faktortopoloogia **kirjeldamiseks poolnormide abil** tuleb kasutada hulkade $k(U) \in \mathfrak{B}'$ Minkowski funktsionaale. Pidades silmas, et

$$\mathbf{x} \in \lambda k(U) \Leftrightarrow \exists x \in \mathbf{x} : x \in \lambda U$$

(veenduda!)✠, saame seose

$$p_{k(U)}(\mathbf{x}) = \inf_{x \in \mathbf{x}} \inf \{\lambda > 0 \mid x \in \lambda U\} = \inf \{p_U(x) \mid x \in \mathbf{x}\}$$

iga $\mathbf{x} \in X/M$ puhul. Kui X on normeeritud ruum, siis

$$\|\mathbf{x}\| := \inf \{\|x\|_X \mid x \in \mathbf{x}\}$$

on norm (eeldusel, et M on kinnine alamruum) vektorrumis X/M.

Käesoleva peatüki kontekstis on oluline see fakt, et **faktortopoloogiat võib vaadelda induktiivse piiri topoloogiana**: topoloogia τ' on tugevaim lokaalselt kumer topoloogia vektorruumil X/M, mille suhtes kujutus $k : X \to X/M$ on pidev. Tõepoolest, kui τ_1 on niisugune lokaalselt kumer topoloogia vektorruumis X/M, et $k : (X,\tau) \to (X/M,\tau_1)$ on pidev, siis iga $V \in \mathfrak{B}_{\tau_1}$ korral $k^{-1}(V)$ on τ-nulliümbrus, seega leidub selline $U \in \mathfrak{B}_\tau$, et $U \subset k^{-1}(V)$, millest tuleneb $k(U) \subset k(k^{-1}(V)) = V$. Tähendab, iga τ_1-nulliümbrus on τ'-nulliümbrus ehk $\tau_1 \subset \tau'$. (Märgime, et $k(k^{-1}(\mathbf{z})) = \mathbf{z}$ ($\mathbf{z} \in X/M$).)

Kui vektoralamruum M ei ole kinnine ruumis X, siis lause 13.1 kohaselt ei ole LKR $(X/M,\tau')$ eralduv, sõltumata sellest, kas ruum X on eralduv või mitte. Seega oleme saanud kinnitust eelmise peatüki algul esitatud väitele, et ***eralduvus ei ole induktiivsetele piiridele pärandatav omadus***.

Lausest 12.3 saame faktorruumide järgmise omaduse.

Lause 13.2 *TünniruumiX/M faktorruumkinnise alamruumi M järgi on tünniruum.*

Lineaarsed kujutused faktorruumis. Olgu $T : X \to Z$ lineaarne kujutus, kus X ja Z on vektorruumid. Eeldame, et $M \subset T^\perp := \{x \in X \mid T(x) = 0\}$. Siis $T = S \circ k$, kus

$$S : X/M \to Z, \quad \mathbf{x} \mapsto T(x) \quad (x \in \mathbf{x})$$

(peame silmas, et kui $x - x' \in M$, siis $T(x) = T(x')$). Kui X ja Z on sealjuures LKR-d, siis lause 12.4 põhjal on T pidev parajasti siis, kui S on pidev. Erijuhul saame järgmise väite.

Lause 13.3 *Iga lineaarne kujutus T LKR-st X LKR-i Z on esitatav kujul $T = S \circ k$, kus S on üksühene lineaarne kujutus faktorruumist $X/T^\perp$ ruumi Z ja k on faktorruumi $X/T^\perp$ kanooniline kujutus. Kujutus T on pidev parajasti siis, kui S on pidev.*

Tõestatud lause abil saame kirjeldada **faktorruumi kaasruumi**. Kehtib järgmine väide.

Lause 13.4 *Faktorruumi X/M topoloogiline kaasruum $(X/M, \tau')'$ on (algebraliselt) isomorfne alamruumi M annullaatoriga $M^{\perp} := \left\{ f \in X' \mid \forall x \in \dot{M} : f(x) = 0 \right\}$ kaasruumis X'.*

Tõestus. Olgu $g \in (X/M, \tau')'$, siis $f := g \circ k \in X'$, seejuures $f(x) = g(k(x)) = g\left(0_{X/M}\right) = 0$ iga $x \in M$ puhul, s.t. $f \in M^{\perp}$. Vastupidi, kui $f \in M^{\perp}$, siis võrdusest $k(x) = k(y)$ järeldub $f(x) = f(y)$, mistõttu võime defineerida $g(\mathbf{x}) := f(x)$ iga $x \in \mathbf{x}$ korral. Lause 13.3 põhjal $g \in (X/M, \tau')'$, seejuures on g funktsionaaliga f üheselt määratud. ∎

Lõpuks juhime tähelepanu **vektoralamruumi ja faktorruumi mõistete duaalsusele**. Olgu $\langle X, Y \rangle$ duaalne paar ja olgu M ruumi X vektoralamruum. Moodustame faktorruumi $Y/M^{\perp}$ (siin $M^{\perp} := \{f \in Y \mid \forall x \in M : f(x) = 0\}$) ning defineerime bilineaarse funktsionaali

$$B : M \times \left(Y/M^{\perp}\right) \to \mathbb{K}, \quad (x, \mathbf{f}) \mapsto \langle x, \mathbf{f} \rangle := f(x), \text{ kus } f \in \mathbf{f}$$

(NB! $f(x)$ on antud $x \in M$ jaoks konstantne väärtus iga $f \in \mathbf{f}$ korral!). Lihtne kontroll näitab, et kui $\langle x, \mathbf{f} \rangle = 0$ iga $\mathbf{f} \in Y/M^{\perp}$ korral, siis $x = 0$. Seega on $\left\langle M, Y/M^{\perp} \right\rangle$ duaalne paar.

Lause 13.5 $\sigma\left(M, Y/M^{\perp}\right) = \sigma(M, Y) = \sigma(X, Y)|_M$.

Tõestus. Olgu $f_1, ..., f_n$ ruumi Y elemendid ja olgu $\mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_n \in Y/M^{\perp}$ neile vastavad ekvivalentsiklassid. Kuna $|\langle x, \mathbf{f}_i \rangle| = |\langle x, f_i \rangle|$ $(x \in M,\ f_i \in \mathbf{f}_i,\ i = 1, ..., n)$, siis nulliümbruste baasid topoloogiates $\sigma(M, Y)$ ja $\sigma\left(M, Y/M^{\perp}\right)$, mis koosnevad vastavalt hulkadest $W_{f_1,...,f_n} = \{x \in M \mid \max_{1 \le i \le n} |\langle x, f_i \rangle| \le 1\}$ ja $W_{\mathbf{f}_1,...,\mathbf{f}_n} = \{x \in M \mid \max_{1 \le i \le n} |\langle x, \mathbf{f}_i \rangle| \le 1\}$, langevad kokku (vrd. art. 8.1). ∎

13.2 Topoloogilised otsesummad

Vektorruumide otsesumma. Olgu X_γ $(\gamma \in \Gamma)$ vektorruumid, moodustame nende otsekorrutise $X := \prod_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$ ja selle alamhulga $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$, täpsemalt $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} j_\gamma(X_\gamma)$, kus kujutus $j_\gamma : X_\gamma \to X$, $x_\gamma \mapsto (z_\nu)_{\nu \in \Gamma}$ on suvalise $\gamma \in \Gamma$ korral defineeritud seosega

$$z_\nu := \begin{cases} x_\gamma, & \text{kui } \nu = \gamma, \\ 0, & \text{kui } \nu \ne \gamma, \end{cases}$$

(vt. art. 11.2). Hulga $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} j_\gamma(X_\gamma)$ lineaarset katet

$$\bigoplus_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma := \operatorname{span} \bigcup_{\gamma \in \Gamma} j_\gamma(X_\gamma)$$

nimetatakse vektorruumide X_γ (algebraliseks) *otsesummaks*. Vastavalt sellele definitsioonile moodustavad otsesumma $\bigoplus_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$ need elemendid otsekorrutisest $\prod_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$, millel on lõplik arv nullist erinevaid koordinaate. Iga element $x \in \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$ on esitatav kujul

$$x = \sum_{\gamma \in \Delta} \pi_\gamma(x), \text{ kus } \pi_\gamma : \prod_{\nu \in \Gamma} X_\nu \to X_\gamma, \quad (x_\nu) \mapsto x_\gamma \quad (\gamma \in \Gamma) \tag{13.1}$$

ja $\Delta \subset \Gamma$ on mingi lõplik alamhulk.

Ülesanne 1. Veenduda, et lõpliku hulga Γ korral on $\bigoplus_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma = \prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$.

Otsesumma topoloogia. Olgu järgnevas (X_γ, τ_γ) $(\gamma \in \Gamma)$ LKR-d, tähistame $X := \prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ ja $X_0 := \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$. Varustame vektorruumi X korrutistopoloogiaga τ_Π, mille me defineerisime artiklis 11.2. Sealsamas tõestasime ka, et $j_\gamma(X_\gamma)$ kui LKR-i (X, τ_Π) alamruum on isomorfne LKR-ga (X_γ, τ_γ), seega võime öelda (samastades X_γ ja $j_\gamma(X_\gamma)$), et ***korrutistopoloogia*** τ_Π ***indutseerib alamruumil*** X_γ ***selle lähtetopoloogia*** τ_γ, s.t. $\tau_\Pi\big|_{X_\gamma} = \tau_\gamma$ $(\gamma \in \Gamma)$. Osutub, et korrutistopoloogia ei ole üldjuhul tugevaim lokaalselt kumer topoloogia selle omadusega. Tugevaima topoloogia saame siis, kui defineerime vektorruumil X_0 LKR-de X_γ induktiivse piiri topoloogia sisestuste j_γ suhtes. Tähistame selle topoloogia $\tau_\oplus$. LKR-i $(X_0, \tau_\oplus)$ nimetatakse LKR-de (X_γ, τ_γ) *(topoloogiliseks) otsesummaks*, topoloogiat $\tau_\oplus$ *otsesumma topoloogiaks.* Definitsiooni kohaselt on $\tau_\oplus \supset \tau_\Pi|_{X_0}$. Seejuures kehtib järgmine väide.

Lause 13.6 *Iga lõpliku alamhulga* $\Delta \subset \Gamma$ *korral on* $\tau_\Pi\Big|_{\bigoplus_{\gamma\in\Delta} X_\gamma} = \tau_\oplus\Big|_{\bigoplus_{\gamma\in\Delta} X_\gamma}$.

Tõestus. Olgu $\Delta \subset \Gamma$ mingi n elemendist koosnev alamhulk ning olgu $U \subset X_0$ suvaline kumer $\tau_\oplus$-nulliümbrus. Kuna $U \cap X_\gamma = j_\gamma^{-1}(U)$ on vastavalt lausele 12.1 τ_γ-nulliümbrus, siis

$$V := \frac{1}{n} \bigcap_{\gamma\in\Delta} \pi_\gamma^{-1}(U \cap X_\gamma)$$

on τ_Π-nulliümbrus ruumis X (vrd. art. 12.1). Iga $x \in V$ ja $\gamma \in \Delta$ korral kehtib $\pi_\gamma(x) \in \frac{1}{n}U$, seetõttu $x = \sum_{\gamma\in\Delta} \pi_\gamma(x) \in \frac{1}{n}U + ... + \frac{1}{n}U \subset U$ tänu hulga U kumerusele. Niisiis,

$$V \cap \bigoplus_{\gamma\in\Delta} X_\gamma \subset U \cap \bigoplus_{\gamma\in\Delta} X_\gamma,$$

mis ütleb, et $\tau_\Pi\Big|_{\bigoplus_{\gamma\in\Delta} X_\gamma} \supset \tau_\oplus\Big|_{\bigoplus_{\gamma\in\Delta} X_\gamma}$. Kuna üldiselt kehtib vastupidine sisalduvus, siis saamegi, et alamruumil $\bigoplus_{\gamma\in\Delta} X_\gamma$ langevad topoloogiad τ_Π ja $\tau_\oplus$ kokku. ■

Rõhutame, et ***lõpmatu alamhulga*** Δ ***puhul lause 13.6 ei kehti***. Nimelt, kui fikseerida τ_γ-nulliümbrused $U_\gamma \neq X_\gamma$ $(\gamma \in \Delta)$, siis $V := \bigcap_{\gamma\in\Delta} \pi_\gamma^{-1}(U_\gamma)$ ei ole τ_Π-nulliümbrus, kuid on $\tau_\oplus$-nulliümbrus, sest iga $x \in V$ korral kehtib

$$j_\gamma^{-1}(x) = \pi_\gamma(x) \in \pi_\gamma \circ \pi_\gamma^{-1}(U_\gamma) = U_\gamma \ \ (\gamma \in \Delta).$$

Topoloogilise otsesumma eralduvus. Nagu me eespool märkisime, ei ole eralduvus induktiivsete piiride puhul üldjuhul pärandatav omadus. Järgmine lause näitab, et otsesummad moodustavad selles suhtes meeldiva erandi.

Lause 13.7 *Topoloogiline otsesumma* $(X_0, \tau_\oplus)$ *on eralduv parajasti siis, kui iga ruum* X_γ *on eralduv. Sel juhul on alamruumid* X_γ *kinnised otsesummas* $(X_0, \tau_\oplus)$.

Tõestus. Kui $(X_0, \tau_\oplus)$ on eralduv, siis ka X_γ on eralduv, sest $\tau_\oplus$ indutseerib alamruumil X_γ selle lähtetopoloogia τ_γ. Kui kõik ruumid (X_γ, τ_γ) on eralduvad, siis ka korrutistopoloogia τ_Π vektorruumil X on eralduv (vrd. lause 11.8) ja seega ka $\tau_\Pi |_{X_0}$ on eralduv topoloogia. Kuna $\tau_\oplus \supset \tau_\Pi |_{X_0}$, siis on ka $\tau_\oplus$ eralduv. Lause 11.13 põhjal on alamruum X_γ kinnine topoloogias τ_Π, ammugi siis tugevamas topoloogias $\tau_\oplus$. ■

Lause 13.8 *Olgu otsesumma $(X_0, \tau_\oplus)$ eralduv LKR. Alamhulk $E \subset X_0$ on tõkestatud ruumis X_0 parajasti siis, kui ta sisaldub ruumide X_γ tõkestatud alamhulkade mingis lõplikus otsesummas.*

Tõestus. *Tarvilikkus.* Olgu $E \subset X_0 := \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$ $\tau_\oplus$-tõkestatud alamhulk. Kuna iga $\gamma \in \Gamma$ korral $\pi_\gamma : (X_0, \tau_\oplus) \to (X_\gamma, \tau_\gamma)$ on pidev kujutus, siis $\pi_\gamma(E)$ on τ_γ-tõkestatud alamhulk. Näitame, et $\pi_\gamma(E) \neq \{0\}$ ainult lõpliku arvu indeksite γ korral, siis pidades silmas, et $E \subset \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} \pi_\gamma(E)$, saamegi väite.

Oletame vastuväiteliselt, et $\pi_\gamma(E) \neq \{0\}$ enam kui lõpliku arvu γ korral. Siis saame valida indeksite jada (γ_n) ja elementide jada (x_n) omadusega $x_n \in \pi_{\gamma_n}(E)$ ja $x_n \neq 0$. Kuna LKR-d X_γ on eralduvad (vrd. lause 13.6), siis leiduvad absoluutselt kumerad nulliümbrused $U_{\gamma_n} \subset X_{\gamma_n}$ omadusega $x_n \notin nU_{\gamma_n}$ $(n \in \mathbb{N})$. Võtame $U_\gamma := X_\gamma$, kui $\gamma \neq \gamma_n$, ning moodustame $\tau_\oplus$-nulliümbruse $U :=$ absconv $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} j_\gamma(U_\gamma)$. Kuna $\pi_{\gamma_n}(U) \subset U_{\gamma_n}$ $(n \in \mathbb{N})$ (põhjendada!)✠, siis nU ei sisalda hulka E ühegi n korral. See on vastuolus eeldusega hulga E tõkestatusest.

Piisavus. Kui $E \subset E_{\gamma_1} + ... + E_{\gamma_n}$, (täpsemalt $E \subset j_{\gamma_1}(E_{\gamma_1}) + ... + j_{\gamma_n}(E_{\gamma_n})$), kus E_{γ_k} on tõkestatud alamhulk ruumis X_{γ_k} $(k = 1, ..., n)$, siis E on tõkestatud lõplikus otsesummas $\bigoplus_{k=1}^n X_{\gamma_k}$ ning seega ka ruumis $(X_0, \tau_\oplus)$. ■

Järeldus 13.9 *Eralduvas topoloogilises otsesummas $(X_0, \tau_\oplus)$ on kinnine alamhulk E kompaktne parajasti siis, kui ta sisaldub ruumide X_γ kompaktsete alamhulkade mingis lõplikus summas.*

Tõestus. *Tarvilikkus.* Olgu E kompaktne alamhulk otsesummas $(X_0, \tau_\oplus)$. Nagu lause 13.8 tõestuses selgus, on E sel juhul lõpliku arvu projektsioonide $\pi_\gamma(E)$ otsesumma kinnine alamhulk, seejuures on $\pi_\gamma(E)$ kompaktsed hulgad.

Piisavus tuleneb sellest, et kompaktsete alamhulkade lõplik summa topoloogilises vektorruumis ja kompaktse hulga kinnine alamhulk on kompaktsed. ■

Otsekorrutise ja otsesumma mõistete duaalsus ilmneb järgmises teoreemis.

Teoreem 13.10 (a) *Topoloogilise otsesumma $(X_0, \tau_\oplus)$ kaasruum X_0' on algebraliselt isomorfne kaasruumide X_γ' otsekorrutisega, s.t. $(X_0, \tau_\oplus)' = \prod_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma'$.*

(b) *Topoloogilise otsekorrutise (X, τ_Π) kaasruum X' on algebraliselt isomorfne kaasruumide X_γ' otsesummaga, s.t. $(X, \tau_\Pi)' = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma'$.*

Tõestus. (a) Lause 12.4 kohaselt on lineaarne funktsionaal $f : X_0 \to \mathbb{K}$ pidev parajasti siis, kui tema ahendid $f_\gamma := f\,|_{X_\gamma} = f \circ j_\gamma$ $(\gamma \in \Gamma)$ on pidevad. Defineerime kujutuse

$$T : X_0' \to \prod_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma', \; f \mapsto (f_\gamma),$$

tänu kujutuste j_γ lineaarsusele on see lineaarne. Kui $(g_\gamma) \in \prod_{\gamma\in\Gamma} X'_\gamma$ on fikseeritud, defineerime funktsionaali

$$g : X_0 \to \mathbb{K},\ \ x \mapsto \sum_{\gamma\in\Gamma} g_\gamma(x_\gamma)$$

(NB! see summa sisaldab lõpliku arvu nullist erinevaid liidetavaid!), siis 1) $T(g) = (g_\gamma)$ ja 2) kui mingi $h \in X'_0$ puhul $T(h) = (g_\gamma)$, siis $h = g$ (kontrollida!)✠. Seega korraldab T vektorruumide X'_0 ja $\prod_{\gamma\in\Gamma} X'_\gamma$ vahel isomorfismi.

(b) Olgu $f \in X'$, lause 6.1 kohaselt on f tõkestatud mingil τ_Π-nulliümbrusel $U := \bigcap_{\gamma\in\Delta} \pi_\gamma^{-1}(U_\gamma)$, kus U_γ on nulliümbrus ruumis X_γ ning $\Delta \subset \Gamma$ on lõplik alamhulk. Seejuures $f_\gamma := f \circ j_\gamma = f\,\big|_{X_\gamma} = 0$ iga $\gamma \in \Gamma\diagdown\Delta$ korral (põhjendada!)✠, lause 12.4 põhjal $f_\gamma \in X'_\gamma$ $(\gamma \in \Gamma)$. Kujutus

$$T : X' \to \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} X'_\gamma,\ \ f \mapsto (f_\gamma)$$

on isomorfism vektorruumide X' ja $\bigoplus_{\gamma\in\Gamma} X'_\gamma$ vahel (kontrollida!)✠. ■

Olgu $\langle X_\gamma, Y_\gamma\rangle$ $(\gamma \in \Gamma)$ vektorruumide duaalsed paarid, moodustame otsekorrutise $X := \prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ ja otsesumma $Y_0 := \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} Y_\gamma$. Bilineaarse funktsionaaliga

$$B : X \times Y_0 \to \mathbb{K}, \quad (x, f) \mapsto \sum_{\gamma\in\Gamma} f_\gamma(x_\gamma)$$

(peame silmas, et see summa sisaldab lõpliku arvu nullist erinevaid liidetavaid) moodustavad X ja Y_0 duaalse paari (kontrollida!)✠. Kehtib järgmine lause.

Lause 13.11 *Nõrk topoloogia $\sigma(X, Y_0)$ on nõrkade topoloogiate $\sigma(X_\gamma, Y_\gamma)$ $(\gamma \in \Gamma)$ korrutistopoloogia.*

Tõestus. Olgu ξ mingi selline lokaalselt kumer topoloogia vektorruumil X, mille puhul lineaarne funktsionaal

$$f : X \to \mathbb{K},\ x \mapsto \sum_{\gamma\in\Gamma} u_\gamma(x_\gamma)$$

on pidev iga $(u_\gamma) \in Y_0$ korral. Kuna vaadeldavas summas on lõplik arv nullist erinevaid liidetavaid, siis f on pidev parajasti siis, kui $u_\gamma \circ \pi_\gamma : (X, \xi) \to \mathbb{K}$ on pidev iga $u_\gamma \in Y_\gamma$ ja $\gamma \in \Gamma$ korral. Teisi sõnu,

$$f \in (X, \xi)' \Leftrightarrow \forall\gamma \in \Gamma : \pi_\gamma : (X, \xi) \to (X_\gamma, \sigma(X_\gamma, Y_\gamma)) \text{ on pidev.}$$

Järelikult $\xi = \sigma(X, Y_0)$ parajasti siis, kui ξ on nõrgim lokaalselt kumer topoloogia, mille suhtes kõik projektsioonid π_γ on pidevad, s.t. ξ on on nõrkade topoloogiate $\sigma(X_\gamma, Y_\gamma)$ korrutistopoloogia. ■

13.3 Ranged induktiivsed piirid

Olgu X vektorruum ning olgu (X_n) tema vektoralamruumide selline jada, mis rahuldab tingimusi

$$X_n \subsetneqq X_{n+1} \ \ (n \in \mathbb{N}) \ \text{ ja } X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n.$$

Seejuures eeldame veel, et (X_n, τ_n) on LKR ning

$$\tau_n = \tau_{n+1}|_{X_n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Teiste sõnadega, me eeldame, et (X_n, τ_n) on LKR-i (X_{n+1}, τ_{n+1}) alamruum. Olgu τ_{ind} LKR-de (X_n, τ_n) ja sisestustega $i_n : X_n \to X$ määratud induktiivse piiri topoloogia vektorruumis X, s.o. tugevaim lokaalselt kumer topoloogia, mille korral sisestused $i_n : (X_n, \tau_n) \to (X, \tau_{ind})$ on pidevad $(n \in \mathbb{N})$. LKR-i (X, τ_{ind}) nimetatakse alamruumide (X_n, τ_n) *rangeks induktiivseks piiriks.*

Topoloogia τ_{ind} **omaduste uurimiseks** vajame järgmist lemmat.

Lause 13.12 *Olgu X_0 LKR-i X alamruum. Alamruumi X_0 iga absoluutselt kumera nulliümbruse V jaoks leidub ruumis X absoluutselt kumer nulliümbrus U omadusega $V = U \cap X_0$. Kui $x_0 \in X \diagdown \overline{X_0}$, siis saab U valida nii, et $x_0 \notin U$.*

Tõestus. Kuna X_0 on LKR-i X alamruum, siis saab leida ruumis X nulliümbruse W omadusega $W \cap X_0 \subset V$. Tähistame $U := \text{absconv}(V \cup W)$, kindlasti on see nulliümbrus ruumis X ning $V \subset U \cap X_0$. Vastupidise sisalduvuse tõestamiseks fikseerime suvalise $z = \lambda x + \mu y \in U \cap X_0$, kus $x \in V$, $y \in W$ ja $|\lambda| + |\mu| \leq 1$. Kui $\mu = 0$, siis $z = \lambda x \in V$ hulga V tasakaalustatuse tõttu. Kui $\mu \neq 0$, saame $y = \frac{1}{\mu} z - \frac{\lambda}{\mu} x \in X_0 - X_0 = X_0$, seega $y \in W \cap X_0 \subset V$ ja siit $z \in V$.

Kui $x_0 \in X \diagdown \overline{X_0}$, siis võib eelnenud tõestuses W nii valida, et $(x_0 - W) \cap X_0 = \emptyset$, mis garanteeribki $x_0 \notin U$. Tõepoolest, seosest $x_0 \in U$ tuleneks, et $x_0 = \lambda x + \mu y$, kus $x \in V$, $y \in W$ ning $|\lambda| + |\mu| \leq 1$, kuid siis saaksime $x_0 - \mu y = \lambda x \in X_0$, mis on võimatu, sest $x_0 - \mu y \in x_0 - W$.

Lemma on tõestatud. ∎

Lause 13.13 $\tau_{ind}|_{X_n} = \tau_n \ (n \in \mathbb{N})$.

Tõestus. Definitsiooni kohaselt on $\tau_{ind}|_{X_n} \subset \tau_n$, tõestame vastupidise sisalduvuse. Olgu fikseeritud $n \in \mathbb{N}$ korral V_n suvaline absoluutselt kumer nulliümbrus ruumis X_n, näitame, et on olemas τ_{ind}-nulliümbrus $U \subset X$ omadusega $U \cap X_n = V_n$.

Kuna $\tau_n = \tau_{n+1}|_{X_n}$, siis lemma 13.12 järgi leidub selline absoluutselt kumer τ_{n+1}-nulliümbrus $V_{n+1} \subset X_{n+1}$, et $V_{n+1} \cap X_n = V_n$. Edasi leiame absoluutselt kumera τ_{n+2}-nulliümbrus $V_{n+2} \subset X_{n+2}$, et $V_{n+2} \cap X_n \subset V_{n+2} \cap X_{n+1} = V_{n+1}$ jne. Induktsioonimeetodil on võimalik suvalise $r \in \mathbb{N}$ puhul defineerida absoluutselt kumer τ_{n+r}-nulliümbrus $V_{n+r} \subset X_{n+r}$ omadusega

$$V_{n+r+1} \cap X_{n+r} = V_{n+r}.$$

Tähistame $U := \bigcup_{r=0}^{\infty} V_{n+r}$, siis U on absoluutselt kumer neelav alamhulk, kusjuures $U \cap X_{n+r} = V_{n+r}$ $(r \geq 0)$, mistõttu $U \cap X_{n+r}$ on τ_{n+r}-nulliümbrus iga $r \geq 0$ korral. Seega on U τ_{ind}-nulliümbrus (vrd. lause 12.1). ■

Erinevalt üldistest induktiivsetest piiridest on **eralduvus range induktiivse piiri topoloogia suhtes pärandatav omadus**.

Lause 13.14 *Kui X_n on iga $n \in \mathbb{N}$ korral eralduv LKR, siis (X, τ_{ind}) on eralduv.*

Tõestus. Rakendame lauset 2.7. Olgu $x \in X \diagdown \{0\}$, siis $x \in X_n$ mingi n korral ja leidub selline τ_n-nulliümbrus $V_n \subset X_n$, et $x \notin V_n$. Nagu me lause 13.13 tõestuses veendusime, leidub τ_{ind}-nulliümbrus $U \subset X$ omadusega $U \cap X_n = V_n$, seejuures $x \notin U$. ■

Kui E on tõkestatud alamhulk LKR-s X_n mingi n korral, siis $E \subset X$ ja on lause 13.13 põhjal τ_{ind}-tõkestatud. Nagu näitab järgnev lause, on kõik τ_{ind}-tõkestatud hulgad ruumis X just niimoodi kirjeldatavad.

Lause 13.15 *Olgu (X, τ_{ind}) selliste LKR-de X_n range induktiivne piir, mille puhul X_n on ruumi X_{n+1} kinnine alamruum $(n \in \mathbb{N})$. Kui alamhulk $E \subset X$ on τ_{ind}-tõkestatud, siis sisaldub ta ruumis X_n mingi n korral ja on selles tõkestatud.*

Tõestus. Oletame vastuväiteliselt, et τ_{ind}-tõkestatud alamhulk $E \subset X$ ei sisaldu üheski ruumidest X_n. Siis saab leida hulga E elementide jada (y_n) ja indeksite jada (k_n) omadusega $y_n \in X_{k_{n+1}} \diagdown X_{k_n}$. Kuna X_{k_n} on eralduv ja seejuures kinnine alamruum LKR-s $X_{k_{n+1}}$, siis vastavalt lemmale 13.12, saame iga $n \in \mathbb{N}$ puhul induktiivselt moodustada absoluutselt kumerate hulkade jada (V_{k_n}), kus V_{k_n} on τ_{k_n}-nulliümbrus, $V_{k_{n+1}} \cap X_{k_n} = V_{k_n}$ ja $y_n \notin nV_{k_{n+1}}$. Tähistame $U := \bigcup_{n=1}^{\infty} V_{k_n}$, see on τ_{ind}-nulliümbrus (vrd. lause 13.13 tõestus) ja $\frac{1}{n} y_n \notin U$ $(n \in \mathbb{N})$ (veenduda!)✠, mis on vastuolus eeldusega hulga E τ_{ind}-tõkestatusest. Tähendab, E sisaldub ühes ruumidest X_n. Kuna $\tau_{ind}|_{X_n} = \tau_n$, siis on E τ_n-tõkestatud. ■

Järeldus 13.16 *Kui (X, τ_{ind}) on selliste LKR-de X_n range induktiivne piir, mille puhul X_n on ruumi X_{n+1} kinnine alamruum $(n \in \mathbb{N})$, siis ta ei ole metriseeruv.*

Tõestus. Olgu $\{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ suvaline niisugune τ_{ind}-nulliümbruste loenduv süsteem ruumis X, mille puhul $U_{n+1} \subset U_n$. Iga $n \in \mathbb{N}$ korral valime elemendi $x_n \in U_n \diagdown X_n$, niimoodi saame jada (x_n), lause 13.15 järgi ei ole see τ_{ind}-tõkestatud. Samal ajal on $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ iga hulga U_n poolt neelatav, seega ei ole $\{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ τ_{ind}-nulliümbruste baas. Niisiis, ruumis (X, τ_{ind}) ei ole loenduvat nulliümbruste baasi, s.t. ta ei ole metriseeruv. ■

Märkus. Saab tõestada, et täielike lokaalselt kumerate ruumide range induktiivne piir on täielik. F-ruumide (Banachi ruumide) jada ranget induktiivset piiri nimetatakse *LF-ruumiks (LB-ruumiks).*

Näide. Olgu

$$X_n := \{x = x(t) \mid x : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \text{ on pidev ja } x(t) = 0 \text{ iga } t \in \mathbb{R} \diagdown [-n, n] \text{ korral}\}$$

ja

$$\|x\|_\infty := \sup_{t \in \mathbb{R}} |x(t)| \quad (x \in X_n,\ n \in \mathbb{N}).$$

Normiga $\| \|_\infty$ on X_n Banachi ruum. Moodustame kõigi hulgal $\mathbb{R}$ defineeritud kompleksssete funktsioonide vektorruumis ühendi $X := \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, see on kõigi kompaktse kandjaga pidevate funktsioonide $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ vektorruum. Varustame selle induktiivse piiri topoloogiaga τ_{ind} ja paneme tähele, et tegemist on range induktiivse piiriga, kus X_n on kinnine alamruum ruumis X_{n+1} (põhjendada!)✠. Järelduse 13.16 ja näitele eelnenud märkuse kohaselt on (X, τ_{ind}) täielik mittemetriseeruv LKR. Alamhulk $E \subset X$ on τ_{ind}-tõkestatud parajasti siis, kui ta koosneb niisugustest funktsioonidest, millel on ühine kompaktne kandja ja mis on ühtlaselt tõkestatud hulgal $\mathbb{R}$.

Vaatleme vektorruumil X normiga $\| \|_\infty$ määratud topoloogiat τ_∞. Kuna ühikkujutus $i : (X_n, \tau_n) \to (X, \tau_\infty)$ on iga $n \in \mathbb{N}$ puhul pidev, siis ka $i : (X, \tau_{ind}) \to (X, \tau_\infty)$ on pidev, s.t., $\tau_{ind} \supset \tau_\infty$. Paneme tähele, et alamhulk $\{x \in X \mid \|x\|_\infty \leq 1\}$ on τ_∞-tõkestatud, kuid ei ole τ_{ind}-tõkestatud (põhjendada!)✠, niisiis on τ_{ind} rangelt tugevam topoloogiast τ_∞, kuigi mõlemad indutseerivad alamruumidel X_n ühe ja sama topoloogia τ_n.

Märgime, et selles näites vaadeldud LKR-i (X, τ_{ind}) kaasruum mängib olulist rolli mõõduteoorias, tema elemente $\mu \in (X, \tau_{ind})'$ nimetatakse *Radoni mõõtudeks* hulgal $\mathbb{R}$.