# MATEMAATILINE ANALÜÜS IV

MTPM.06.033 Loengukursus
Tartu Ülikooli
matemaatika-informaatikateaduskonna
üliõpilastele
2006/2007. õppeaasta

Toivo Leiger

# Sisukord

# 1 Eukleidiline ruum $\mathbb{R}^m$

Olgu $\mathbf{X} = (x_1, ..., x_m)$ mingi $m$ reaalarvust koosnev *järjestatud* süsteem ning olgu $D$ mingi selliste süsteemide hulk. Kui igale elemendile $\mathbf{X} \in D$ on teatava eeskirja järgi seatud vastavusse (üheselt määratud) reaalarv

$$w =: f(\mathbf{X}) =: f(x_1, ..., x_m),$$

siis öeldakse, et hulgas $D$ on määratud *$m$ muutuja funktsioon $f$*. Hulka $D$ nimetatakse funktsiooni $f$ *määramispiirkonnaks,* muutujaid $x_1, ..., x_m$ tema *argumentideks*. Funktsiooni $f$ *muutumispiirkond* on kõigi reaalarvude hulk $\mathbb{R}$, *väärtuste hulk* on $f(D) = \{f(\mathbf{X}) \mid x \in D\}$.

Üheks $m$ muutuja funktsiooni **näiteks** on funktsioon

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad (x_1, x_2, ..., x_m) \mapsto \frac{x_1 + x_2 + ... + x_m}{m},$$

s.o. funktsioon, mis suvalisele $m$ reaalarvust koosnevale süsteemile seab vastavusse nende arvude aritmeetilise keskmise. Selle funktsiooni määramispiirkonnaks $D$ võib võtta *kõigi* nende süsteemide hulga.

## 1.1 Eukleidiline ruum $\mathbb{R}^m$

**Vektorruum** $\mathbb{R}^m$. $m$ muutuja funktsiooni omaduste uurimiseks ja määramispiirkonna kirjeldamiseks on mugav kasutada kursusest *Algebra ja geomeetria* tuntud eukleidilise ruumi mõistet. Tähistame

$$\mathbb{R}^m := \{\mathbf{X} := (x_1, ..., x_m) \mid x_1, ..., x_m \in \mathbb{R}\},$$

see on *kõigi* $m$-mõõtmeliste vektorite ruum. Vektoreid $\mathbf{X} = (x_1, ..., x_m)$ nimetame ruumi $\mathbb{R}^m$ *punktideks*, arve $x_1, ..., x_m$ vektori $\mathbf{X}$ *koordinaatideks*. Vektorite liitmine ja skalaariga korrutamine on defineeritud *koordinaaditi*: suvaliste $\mathbf{X} = (x_1, ..., x_m)$ ja $\mathbf{X}' = (x_1', ..., x_m')$ ning $\lambda \in \mathbb{R}$ korral defineeritakse

$$\mathbf{X} + \mathbf{X}' := (x_1 + x_1', ..., x_m + x_m') \text{ ja } \lambda\mathbf{X} := (\lambda x_1, ..., \lambda x_m).$$

Seejuures on täidetud järgmised *vektorruumi aksioomid*:
**1**$^0$ $\mathbf{X} + \mathbf{X}' = \mathbf{X}' + \mathbf{X}$ *(liitmise kommutatiivsus),*
**2**$^0$ $\mathbf{X} + (\mathbf{X}' + \mathbf{X}'') = (\mathbf{X} + \mathbf{X}') + \mathbf{X}'' =: \mathbf{X} + \mathbf{X}' + \mathbf{X}''$ *(liitmise assotsiatiivsus),*
**3**$^0$ leidub selline punkt $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^m$, et $\mathbf{X} + \mathbf{0} = \mathbf{X}$ iga $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^m$ korral *(nullelemendi olemasolu),*
**4**$^0$ iga $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^m$ korral leidub $\mathbf{X}' \in \mathbb{R}^m$, et $\mathbf{X} + \mathbf{X}' = \mathbf{0}$ *(vastandelemendi olemasolu),*
**5**$^0$ $1\mathbf{X} = \mathbf{X}$,
**6**$^0$ $\lambda(\mu\mathbf{X}) = (\lambda\mu)\mathbf{X}(= \lambda\mu\mathbf{X})$ *(skalaariga korrutamise assotsiatiivsus),*
**7**$^0$ $(\lambda + \mu)\mathbf{X} = \lambda\mathbf{X} + \mu\mathbf{X}$ *(distributiivsus),*
**8**$^0$ $\lambda(\mathbf{X} + \mathbf{X}') = \lambda\mathbf{X} + \lambda\mathbf{X}'$ *(distributiivsus).*
Lihtne on veenduda, et nullelement $\mathbf{0}$ on vektor $(0, ..., 0)$ ja vektori $\mathbf{X} = (x_1, ..., x_m)$ vastandelement on vektor $-\mathbf{X} := (-x_1, ..., -x_m)$.

**Norm ruumis** $\mathbb{R}^m$. Meie kursuse seisukohalt on eriti oluline asjaolu, et ruumis $\mathbb{R}^m$ on iga kahe punkti $\mathbf{X} = (x_1, ..., x_m)$ ja $\mathbf{X}' = (x_1', ..., x_m')$ korral defineeritud nende *skalaarkorrutis*

$$(\mathbf{X}, \mathbf{X}') := \sum_{k=1}^{m} x_k x_k',$$

mille abil omakorda defineeritakse vektori $\mathbf{X}$ pikkus ehk punkti $\mathbf{X}$ *norm*

$$\|\mathbf{X}\| := \sqrt{(\mathbf{X},\mathbf{X})} = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} x_k^2}.$$

**Lemma 1.1** ***(Cauchy-Bunjakovski-Schwarzi võrratus).*** *Iga kahe vektori* $\mathbf{X}$ *ja* $\mathbf{X}'$ *korral kehtib võrratus*

$$|(\mathbf{X},\mathbf{X}')| \leq \|\mathbf{X}\| \cdot \|\mathbf{X}'\|. \tag{1.1}$$

*Seejuures kehtib võrdus parajasti siis, kui üks vektor on teise kordne.*

**Tõestus.** Kui $\mathbf{X}' = \mathbf{0}$, siis seose (1.1) mõlemad pooled on võrdsed nulliga (veenduda!)✠. Olgu $\mathbf{X}' \neq \mathbf{0}$ ning olgu $\lambda \in \mathbb{R}$, siis

$$\begin{aligned} 0 \leq \sum_{k=1}^{m} (x_k - \lambda x_k')^2 &= \sum_{k=1}^{m} x_k^2 - 2\lambda \sum_{k=1}^{m} x_k x_k' + \lambda^2 \sum_{k=1}^{m} x_k'^2 \qquad (1.2) \\ &= \|\mathbf{X}\|^2 - 2\lambda (\mathbf{X},\mathbf{X}') + \lambda^2 \|\mathbf{X}'\|^2. \end{aligned}$$

Selle ruutpolünoomi nullkohad leitakse valemiga

$$\lambda = \frac{(\mathbf{X},\mathbf{X}') \pm \sqrt{(\mathbf{X},\mathbf{X}')^2 - \|\mathbf{X}\|^2 \cdot \|\mathbf{X}'\|^2}}{\|\mathbf{X}'\|^2} \tag{1.3}$$

(kontrollida!)✠. Võrratuse (1.2) kohaselt peab kehtima seos $(\mathbf{X},\mathbf{X}')^2 \leq \|\mathbf{X}\|^2 \cdot \|\mathbf{X}'\|^2$ (selgitada!)✠, millest järeldub (1.1).

Selge, et kui $\mathbf{X} = \lambda \mathbf{X}'$, siis $|(\mathbf{X},\mathbf{X}')| = |\lambda| \|\mathbf{X}'\|^2 = \|\mathbf{X}\| \cdot \|\mathbf{X}'\|$. Vastupidi, kui $|(\mathbf{X},\mathbf{X}')| = \|\mathbf{X}\| \cdot \|\mathbf{X}'\|$, siis $\lambda_0 := \frac{(\mathbf{X},\mathbf{X}')}{\|\mathbf{X}'\|^2}$ on ruutpolünoomi (1.2) ainuke nullkoht (vrd. (1.3)), seega $\sum_{k=1}^{m} (x_k - \lambda_0 x_k')^2 = 0$ ehk $\mathbf{X} = \lambda_0 \mathbf{X}'$. ■

**Lemma 1.2** ***(kolmnurga võrratus).*** *Iga kahe vektori* $\mathbf{X}$ *ja* $\mathbf{X}'$ *korral kehtib võrratus*

$$\|\mathbf{X} + \mathbf{X}'\| \leq \|\mathbf{X}\| + \|\mathbf{X}'\|. \tag{1.4}$$

*Seejuures kehtib võrdus parajasti siis, kui üks vektor on teise mittenegatiivne kordne.*

**Tõestus.** Iseseisvalt!✠ ■

Lisaks lemmas 1.2 toodud kolmnurga võrratusele rahuldab norm $\|\ \|$ vektorruumis $\mathbb{R}^m$ ka teisi *normi aksioome*. Nimelt, kehtivad väited
**(N1)** $\|\mathbf{X}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{X} = \mathbf{0}$,
**(N2)** $\|\lambda \mathbf{X}\| = |\lambda| \|\mathbf{X}\|$ iga $\lambda \in \mathbb{R}$ korral,
**(N3)** $\|\mathbf{X} + \mathbf{X}'\| \leq \|\mathbf{X}\| + \|\mathbf{X}'\|$.
Punktide $\mathbf{X}$ ja $\mathbf{X}'$ vaheline *kaugus* on

$$\begin{aligned} d(\mathbf{X},\mathbf{X}') := \|\mathbf{X} - \mathbf{X}'\| &= \sqrt{(x_1 - x_1')^2 + ... + (x_m - x_m')^2} \\ &= \sqrt{\sum_{k=1}^{m} (x_k - x_k')^2}. \qquad (1.5) \end{aligned}$$

Valem (1.5) kahe punkti vahelise kauguse arvutamiseks on meile hästi tuntud juhul $m = 3$ (s.o. kolmemõõtmelises ruumis) ja juhul $m = 2$ (s.o. tasandil). Ka arvsirget $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ võime vaadelda eukleidilise ruumina $\mathbb{R}^1$, sel juhul kehtib samuti valem (1.5) (kontrollida!)✠.

**Sirged ruumis** $\mathbb{R}^m$. Teatavasti saab kahemõõtmelises ruumis $\mathbb{R}^2$ (s.o. $xy$-tasandil) punkti $\mathbf{A} = (a, b)$ läbivat sirget kirjeldada parameetriliste võrranditega

$$x = a + tz,\ y = b + tw \quad (t \in (-\infty, \infty))$$

(tingimusel, et $\mathbf{Z} = (z, w) \neq \mathbf{0}$) ehk vektorkujul

$$\mathbf{X} = \mathbf{A} + t\mathbf{Z} \quad (t \in (-\infty, \infty)). \tag{1.6}$$

Vektorit $\mathbf{Z} = (z, w)$ nimetatakse sirge (1.6) *suunavektoriks.*

Olgu $\mathbf{A} = (a, b)$ ja $\mathbf{A}' = (a', b')$ kaks punkti ruumis $\mathbb{R}^2$. Kui võtame $\mathbf{Z} := \mathbf{A}' - \mathbf{A}$, siis võrrandist (1.6) saame punktidega $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{A}'$ määratud sirge

$$\mathbf{X} = \mathbf{A} + t\,(\mathbf{A}' - \mathbf{A}) = t\mathbf{A}' + (1 - t)\,\mathbf{A} \ \ (t \in (-\infty, \infty)).$$

Analoogiliselt defineeritakse eukleidilises ruumis $\mathbb{R}^m$ sirge

$$\mathbf{X} = \mathbf{A} + t\mathbf{Z} \quad (t \in (-\infty, \infty)) \tag{1.7}$$

läbi punkti $\mathbf{A} = (a_1, ..., a_m)$ suunaga $\mathbf{Z} = (z_1, ..., z_m) \neq \mathbf{0}$. Punktihulka

$$\mathbf{X} = \mathbf{A} + t\mathbf{Z} \quad (t \in [\alpha, \beta])$$

nimetame lõiguks sirgel (1.7). Seejuures on

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}] := \{\mathbf{A} + t\,(\mathbf{B} - \mathbf{A}) \mid t \in [0, 1]\} = \{t\mathbf{B} + (1 - t)\,\mathbf{A} \mid t \in [0, 1]\}$$

*sirglõik* otspunktidega $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$.

**Jooned ruumis** $\mathbb{R}^m$. Sirgete kõrval kõneldakse üldisemalt ka joontest (ehk kõveratest) ruumis $\mathbb{R}^m$. Kahemõõtmelises ruumis (s.o. tasandil) kirjeldatakse sageli jooni parameetriliste võrranditega. Näiteks on ringjoon keskpunktiga $\mathbf{0}$ ning raadiusega $r$ määratud võrranditega

$$x = r\cos t,\ y = r\sin t \quad (t \in [0, 2\pi]).$$

Teisi sõnu, see joon on lõigus $[0, 2\pi]$ määratud vektorfunktsiooni

$$\mathbf{F} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ \ t \mapsto (r\cos t, r\sin t)$$

väärtuste hulk. Analoogiliselt võime kirjeldada jooni suvalises eukleidilises ruumis $\mathbb{R}^m$.

Olgu iga $t \in [\alpha, \beta]$ korral defineeritud punkt $(\varphi_1(t), ..., \varphi_m(t)) \in \mathbb{R}^m$, seega on määratud kujutus

$$\mathbf{F} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^m,\ \ t \mapsto (\varphi_1(t), ..., \varphi_m(t)).$$

Sellist kujutust $\mathbf{F}$ nimetame reaalse argumendiga (ehk parameetriga) *vektorfunktsiooniks* ning punktide hulka

$$\{(\varphi_1(t), ..., \varphi_m(t)) \mid t \in [\alpha, \beta]\}$$

(vektorfunktsiooniga $F$ defineeritud) *jooneks* ruumis $\mathbb{R}^m$. Kui kõik koordinaatfunktsioonid $\varphi_1, ..., \varphi_m$ on pidevad lõigus $[\alpha, \beta]$, siis ütleme, et vektorfunktsioon $\mathbf{F}$ ja talle vastav joon ruumis $\mathbb{R}^m$ on pidevad.

## 1.2 Ruumi $\mathbb{R}^m$ topoloogiast

**Punkti ümbrused.** Meenutame, et punkti $a \in \mathbb{R}$ $\varepsilon$-ümbruseks ruumis $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$ nimetasime hulka

$$\begin{aligned} U_\varepsilon(a) &:= (a-\varepsilon, a+\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-a| < \varepsilon\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}^1 \mid d(x,a) < \varepsilon\right\}. \end{aligned}$$

Analoogilisel viisil defineerime punkti $\mathbf{A} = (a_1, ..., a_m)$ ümbrused ruumis $\mathbb{R}^m$: hulka

$$\begin{aligned} U_\varepsilon(\mathbf{A}) &:= \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^m \mid \|\mathbf{X} - \mathbf{A}\| < \varepsilon\} \\ &= \left\{(x_1, x_2, ..., x_m) \mid \sqrt{(x_1-a_1)^2 + ... + (x_m-a_m)^2} < \varepsilon\right\} \end{aligned}$$

nimetatakse punkti $\mathbf{A}$ *lahtiseks $\varepsilon$-ümbruseks* ning hulka

$$\begin{aligned} \overline{U}_\varepsilon(\mathbf{A}) &:= \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^m \mid \|\mathbf{X} - \mathbf{A}\| \leq \varepsilon\} \\ &= \left\{(x_1, x_2, ..., x_m) \mid \sqrt{(x_1-a_1)^2 + ... + (x_m-a_m)^2} \leq \varepsilon\right\} \end{aligned}$$

selle punkti *kinniseks $\varepsilon$-ümbruseks.* Tihtipeale nimetatakse neid hulki ka vastavalt lahtiseks ja kinniseks *keraks* keskpunktiga $\mathbf{A}$ ja raadiusega $\varepsilon$.

**Alamhulga sise- ja rajapunktid**. Olgu $D \subset \mathbb{R}^m$ suvaline mittetühi alamhulk. Punkti $\mathbf{A} \in D$ nimetatakse hulga $D$ *sisepunktiks*, kui tema *mingi* $\varepsilon$-ümbrus sisaldub hulgas $D$, s.t.

$$\text{leidub selline } \varepsilon > 0, \text{ et } U_\varepsilon(\mathbf{A}) \subset D.$$

Kui punkti $\mathbf{A}$ *iga* $\varepsilon$-ümbrus lõikub nii hulgaga $D$ kui ka hulgaga $\mathbb{R}^m \setminus D$, siis ütleme, et punkt $\mathbf{A}$ on hulga $D$ *rajapunkt.* Teisi sõnu, $\mathbf{A}$ on hulga $D$ rajapunkt parajasti siis, kui

$$D \cap U_\varepsilon(\mathbf{A}) \neq \varnothing \text{ ja } (\mathbb{R}^m \setminus D) \cap U_\varepsilon(\mathbf{A}) \neq \varnothing \text{ iga } \varepsilon > 0 \text{ korral.}$$

Hulga $D$ kõigi rajapunktide hulka nimetatakse selle hulga *rajaks* ja tähistatakse $\partial D$. Kui $\mathbf{B} \in D$, siis $\mathbf{B}$ on kas hulga $D$ sise- või rajapunkt (selgitada!)✠.

Hulga $D$ raja- ning sisepunktid moodustavad uue hulga $\overline{D} := D \cup \partial D$, mida nimetatakse hulga $D$ *sulundiks*, sulundi punkte nimetatakse hulga $D$ *puutepunktideks.*

**Lahtised hulgad.** Ruumi $\mathbb{R}^m$ alamhulka $D$ nimetatakse *lahtiseks*, kui iga tema punkt on sisepunkt, s.t. kui

$$\text{iga } \mathbf{A} \in D \text{ korral leidub selline } \varepsilon > 0, \text{ et } U_\varepsilon(\mathbf{A}) \subset D.$$

Kui hulk $D$ sisaldab kõiki oma rajapunkte (s.t. $\partial D \subset D$), siis nimetatakse hulka $D$ *kinniseks.* Seega on $D$ kinnine parajasti siis, kui kehtib implikatsioon

$$[\forall \varepsilon > 0 : D \cap U_\varepsilon(\mathbf{A}) \neq \varnothing] \Rightarrow \mathbf{A} \in D$$

(selgitada!)✠.

**Lause 1.3** *Iga lahtine kera $U_\varepsilon(\mathbf{A})$ on lahtine hulk.*

**Tõestus.** Olgu $\mathbf{B} \in U_\varepsilon(\mathbf{A})$, näitame, et $\mathbf{B}$ on hulga $U_\varepsilon(\mathbf{A})$ sisepunkt. Kuna $\mathbf{A}$ on hulga $U_\varepsilon(\mathbf{A})$ sisepunkt, siis piisab vaadelda juhtu $\mathbf{B} \neq \mathbf{A}$. Sel juhul $r := \|\mathbf{B} - \mathbf{A}\| > 0$ (vrd. **(N1)**). Peame leidma niisuguse positiivse arvu $\delta$, et $U_\delta(\mathbf{B}) \subset U_\varepsilon(\mathbf{A})$ (selgitada!)✠. Võtame $\delta := \varepsilon - r$, siis iga $\mathbf{X} \in U_\delta(\mathbf{B})$ korral $\|\mathbf{X} - \mathbf{A}\| \leq \|\mathbf{X} - \mathbf{B}\| + \|\mathbf{B} - \mathbf{A}\| < \delta + r = \varepsilon - r + r = \varepsilon$, seega $\mathbf{X} \in U_\varepsilon(\mathbf{A})$. Tähendab, $U_\delta(\mathbf{B}) \subset U_\varepsilon(\mathbf{A})$. ■

**Risttahukad.** Lisaks keradele $U_\varepsilon(\mathbf{A})$ ja $\overline{U}_\varepsilon(\mathbf{A})$ ruumis $\mathbb{R}^m$ vaatleme me oma kursuses ka alamhulki, millele tasandil $\mathbb{R}^2$ vastavad ristkülikud ja ruumis $\mathbb{R}^3$ risttahukad. Olgu $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_m$ positiivsed arvud ja $\mathbf{A} = (a_1, ..., a_m)$ mingi punkt ruumis $\mathbb{R}^m$. Tähistame

$$K_{\varepsilon_1,...,\varepsilon_m}(\mathbf{A}) := \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^m \mid |x_k - a_k| < \varepsilon_k \quad (k = 1, ..., m)\}$$

ja

$$\overline{K}_{\varepsilon_1,...,\varepsilon_m}(\mathbf{A}) := \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^m \mid |x_k - a_k| \leq \varepsilon_k \quad (k = 1, ..., m)\}.$$

Hulki $K_{\varepsilon_1,...,\varepsilon_m}(\mathbf{A})$ ja $\overline{K}_{\varepsilon_1,...,\varepsilon_m}(\mathbf{A})$ nimetatakse vasatavalt *lahtiseks ja kinniseks risttahukaks* keskpunktiga $\mathbf{A}$. Kui $\varepsilon_1 = ... = \varepsilon_m =: \varepsilon$, siis kõneldakse lahtisest ja kinnisest *kuubist* keskpunktiga $\mathbf{A}$. Neid tähistame edaspidi vastavalt $K_\varepsilon(\mathbf{A})$ ja $\overline{K}_\varepsilon(\mathbf{A})$.

Tähelepanuväärne on järgmine fakt.

**Lause 1.4** (*a*) *Iga risttahuka $K_{\varepsilon_1,...,\varepsilon_m}(\mathbf{A})$ korral leidub kera $U_\varepsilon(\mathbf{A})$, mis sisaldub selles risttahukas, s.t. $U_\varepsilon(\mathbf{A}) \subset K_{\varepsilon_1,...,\varepsilon_m}(\mathbf{A})$.*
(*b*) *Iga kera $U_\varepsilon(\mathbf{A})$ korral leidub selline risttahukas $K_{\varepsilon_1,...,\varepsilon_m}(\mathbf{A})$, mis sisaldub selles keras, s.t. $K_{\varepsilon_1,...,\varepsilon_m}(\mathbf{A}) \subset U_\varepsilon(\mathbf{A})$.*

**Tõestus.** Iseseisvalt!✠ ■

**Sidusad hulgad ja piirkond.** Ühe muutuja funktsioonide analüütiliste omaduste (pidevus, diferentseeruvus, integreeruvus jne.) uurimisel eeldasime me enamasti, et funktsiooni määramispiirkonnaks on mingi (lõplik või lõpmatu) intervall, s.o. vahemik, poollõik või lõik. Mitmemõõtmelises ruumis vastavad intervallidele sidusad alamhulgad.

**Definitsioon.** Hulka $D \subset \mathbb{R}^m$ nimetame *sidusaks*, kui iga tema kahte punkti $\mathbf{X}$ ja $\mathbf{X}'$ saab ühendada mingi pideva joonega, mis täielikult paikneb hulgas $D$.

Selle definitsiooni kohaselt on $D$ sidus hulk parajasti siis, kui suvaliste punktide $\mathbf{X}, \mathbf{X}' \in D$ korral saab defineerida niisuguse vektorfunktsiooni

$$x_1 = \varphi_1(t), ..., \; x_m = \varphi_m(t) \quad (t \in [\alpha, \beta]),$$

kus 1) koordinaatfunktsioonid $\varphi_1, ..., \varphi_m$ on lõigus $[\alpha, \beta]$ pidevad, 2) $\mathbf{X} = (\varphi_1(\alpha), ..., \varphi_m(\alpha))$, $\mathbf{X}' = (\varphi_1(\beta), ..., \varphi_m(\beta))$ ning 3) $(\varphi_1(t), ..., \varphi_m(t)) \in D$ kõikide $t \in [\alpha, \beta]$ korral. Lihtsamalt öeldes, sidus hulk koosneb ühest, mittesidus hulk aga mitmest tükist.

**Definitsioon.** Hulka $D \subset \mathbb{R}^m$, mille iga punkt on kas tema sisepunkt või sisepunktide hulga puutepunkt, nimetame edaspidi *piirkonnaks.*

Lahtine piirkond koosneb ainult oma sisepunktidest.

**Tõkestatud hulgad.** Alamhulka $G \subset \mathbb{R}^m$ nimetatakse *tõkestatuks*, kui ta sisaldub mingis keras. Seega on hulk $G$ tõkestatud parajasti siis, kui leiduvad punkt $\mathbf{A} = (a_1, ..., a_m)$ ja arv $r > 0$, et $G \subset U_r(A)$.

## 1.3 Jadad ruumis $\mathbb{R}^m$

Vaatleme ruumis $\mathbb{R}^m$ punktide jada $\left(\mathbf{X}^{(n)}\right)$, s.o. vektorite jada

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}^{(1)} &= \left(x_1^{(1)}, ..., x_m^{(1)}\right), \\
\mathbf{X}^{(2)} &= \left(x_1^{(2)}, ..., x_m^{(2)}\right), \\
\mathbf{X}^{(3)} &= \left(x_1^{(3)}, ..., x_m^{(3)}\right), \\
&... \\
\mathbf{X}^{(n)} &= \left(x_1^{(n)}, ..., x_m^{(n)}\right). \\
&... .
\end{aligned} \tag{1.8}$$

**Koonduvus.** Öeldakse, et jada $\left(\mathbf{X}^{(n)}\right)$ *koondub ruumis* $\mathbb{R}^m$ *punktiks* $\mathbf{A} = (a_1, ..., a_m)$, kui punktide $\mathbf{X}^{(n)}$ ja $\mathbf{A}$ vaheline kaugus protsessis $n \to \infty$ läheneb nullile, s.t. kui

$$\lim_n \left\|\mathbf{X}^{(n)} - \mathbf{A}\right\| = 0. \tag{1.9}$$

Seda koonduvust tähistame kas $\lim_n \mathbf{X}^{(n)} = \mathbf{A}$ või $\mathbf{X}^{(n)} \to \mathbf{A}$. Pidades silmas koonduvuse definitsiooni arvjadade korral, saame tingimuse (1.9) kirjutada kujul

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : \ n \geq N \Rightarrow \left\|\mathbf{X}^{(n)} - \mathbf{A}\right\| < \varepsilon \tag{1.10}$$

(põhjendada!)✠ ehk

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : \ n \geq N \Rightarrow \sqrt{\left(x_1^{(n)} - a_1\right)^2 + ... + \left(x_m^{(n)} - a_m\right)^2} < \varepsilon.$$

Arvestades seda, et

$$\left\|\mathbf{X}^{(n)} - \mathbf{A}\right\| < \varepsilon \Leftrightarrow \mathbf{X}^{(n)} \in U_\varepsilon(\mathbf{A})$$

(selgitada!)✠, saame tingimusest (1.10) järgmise väite.

**Lause 1.5** *Võrdus* $\lim_n \mathbf{X}^{(n)} = \mathbf{A}$ *kehtib ruumis* $\mathbb{R}^m$ *parajasti siis, kui punkti* $\mathbf{A}$ *iga ümbruse* $U_\varepsilon(A)$ *puhul leidub selline indeks* $N$*, et* $\mathbf{X}^{(n)} \in U_\varepsilon(\mathbf{A})$ *iga* $n \geq N$ *korral.*

Olgu antud mingi vektorite jada (1.8). Iga $k = 1, 2, ..., m$ puhul saame koordinaatide jada $\left(x_k^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, seega on määratud $m$ arvjada

$$\begin{aligned}
&\left(x_1^{(1)}, ..., x_1^{(n)}, ...\right), \\
&\left(x_2^{(1)}, ..., x_2^{(n)}, ...\right), \\
&... \\
&\left(x_m^{(1)}, ..., x_m^{(n)}, ...\right).
\end{aligned}$$

Kerkib üles loomulik küsimus: *kuidas on seotud omavahel vektorite jada* $\left(\mathbf{X}^{(n)}\right)$ *koonduvus ja koordinaatide jadade* $\left(x_1^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *, ...,* $\left(x_m^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *koonduvus?* Sellele küsimusele annab vastuse järgmine lause.

**Lause 1.6** *Jada* $\left(\mathbf{X}^{(n)}\right)$ *koondub ruumis* $\mathbb{R}^m$ *punktiks* $\mathbf{A}$ *parajasti siis, kui* $x_k^{(n)} \to a_k$ $(n \to \infty)$ *iga* $k = 1, 2, ..., m$ *korral.*

**Tõestus.**

$$
\begin{aligned}
\lim_n \mathbf{X}^{(n)} = \mathbf{A} \Leftrightarrow \lim_n \left\|\mathbf{X}^{(n)} - \mathbf{A}\right\| = 0 \Leftrightarrow \lim_n \sqrt{\sum_{k=1}^m \left(x_k^{(n)} - a_k\right)^2} = 0 \\
\Leftrightarrow \sqrt{\lim_n \sum_{k=1}^m \left(x_k^{(n)} - a_k\right)^2} = 0 \Leftrightarrow \lim_n \sum_{k=1}^m \left(x_k^{(n)} - a_k\right)^2 = 0 \\
\Leftrightarrow \sum_{k=1}^m \lim_n \left(x_k^{(n)} - a_k\right)^2 = 0 \\
\Leftrightarrow \lim_n \left(x_k^{(n)} - a_k\right)^2 = 0 \quad (k = 1, ..., m) \\
\Leftrightarrow \lim_n \left(x_k^{(n)} - a_k\right) = 0 \quad (k = 1, ..., m) \\
\Leftrightarrow \lim_n x_k^{(n)} = a_k \quad (k = 1, ..., m)
\end{aligned}
$$

(põhjendada kõiki samasusi!)✠. ■

**Tõkestatud jadad.** Punktide jada $\left(\mathbf{X}^{(n)}\right)$ nimetame tõkestatuks, kui tema liikmete hulk $\left\{\mathbf{X}^{(n)} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ on tõkestatud. Analoogiliselt arvjadadega kehtib ka siin järgmine väide.

**Lause 1.7** *Iga koonduv jada on tõkestatud.*

**Tõestus.** Isesisvalt!✠. ■

Järgnevalt veendume, et kehtima jääb ruumis $\mathbb{R}^m$ ka teine tõkestatud jadade oluline omadus, nimelt **Bolzano-Weierstrassi teoreem.**

**Lause 1.8** *Iga ruumis* $\mathbb{R}^m$ *tõkestatud jada sisaldab koonduva osajada.*

**Tõestus.** Me tõestame väite juhul $m = 2$. Olgu $\left(\mathbf{X}^{(n)}\right)$ ruumis $\mathbb{R}^2$ tõkestatud punktide jada. Siis leiduvad punkt $\mathbf{A} = (a, b)$ ja arv $r > 0$, et jada kõik liikmed $\mathbf{X}^{(n)} = (x_n, y_n)$ $(n \in \mathbb{N})$ paiknevad keras $U_r(\mathbf{A})$. Teiste sõnadega,

$$\sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2} < r \quad (n \in \mathbb{N})$$

ehk

$$(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2 < r^2 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Siit järelduvad võrratused

$$|x_n - a| < r \text{ ja } |y_n - b| < r \quad (n \in \mathbb{N})$$

(põhjendada!)✠, need võime kirjutada üles kujul

$$a - r < x_n < a + r \text{ ja } b - r < y_n < b + r \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{1.11}$$

Tingimustest (1.11) selgub, et mõlemad arvjadad $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ja $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on tõkestatud (selgitada!)✠. Jada $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tõkestatusest järeldub vastavalt Bolzano-Weierstrassi teoreemile, et leidub koonduv osajada $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, olgu $c := \lim_k x_{n_k}$. Edasi vaatleme jada $(y_n)$ *vastavat* osajada $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, ta on tõkestatud, seega on ka tal mingi koonduv osajada $\left(y_{n_{k_i}}\right)_{i\in\mathbb{N}}$, tähistame $d := \lim_i y_{n_{k_i}}$.

Moodustame punktide jada $\left(\mathbf{X}^{(n_{k_i})}\right)_{i\in\mathbb{N}}$, see on esialgse jada $\left(\mathbf{X}^{(n)}\right)$ osajada. Kuna $x_{n_{k_i}} \to c$ (põhjendada!)✠ ning $y_{n_{k_i}} \to d$, siis lause 1.6 kohaselt koondub jada $\left(\mathbf{X}^{(n_{k_i})}\right)$ punktiks $\mathbf{C} := (c, d)$ ruumis $\mathbb{R}^2$. ■

Eelnevast tõestusest on ka selge, kuidas tõestada väidet juhul $m = 3, 4, ....$ Nimelt tuleb $m$ korda rakendada arvjadade Bolzano-Weierstrassi teoreemi, tulemuseks on koonduv punktide jada, mis on esialgse jada osajada.

Märgime selle paragrahvi lõpuks veel ühte koonduvate jadadega seotud olulist fakti.

**Lause 1.9** *Alamhulk $D \subset \mathbb{R}^m$ on kinnine parajasti siis, kui ta sisaldab iga selle hulga punktidest moodustatud koonduva jada piirväärtuse.*

**Tõestus.** *Tarvilikkus.* Olgu $D$ kinnine alamhulk ja olgu $\left(\mathbf{X}^{(n)}\right)$ hulga $D$ punktide niisugune jada, mis koondub punktiks $\mathbf{A}$ ruumis $\mathbb{R}^m$. Näitame, et siis $\mathbf{A} \in D$. Selleks veendume, et punkti $\mathbf{A}$ iga ümbrus sisaldab hulga $D$ punkte. See tähendaks, et $\mathbf{A}$ on kas hulga $D$ sise- või rajapunkt, ja kuna $D$ on kinnine, siis $\mathbf{A} \in D$.

Olgu $U_\varepsilon(\mathbf{A})$ punkti $\mathbf{A}$ suvaline ümbrus ruumis $\mathbb{R}^m$. Et $\mathbf{X}^{(n)} \to \mathbf{A}$, siis leidub selline indeks $N$, et $\mathbf{X}^{(n)} \in U_\varepsilon(\mathbf{A})$ iga $n \geq N$ korral. Tähendab, $\mathbf{X}^{(n)} \in U_\varepsilon(\mathbf{A}) \cap D \ \ (n \geq N)$, seega $U_\varepsilon(\mathbf{A}) \cap D \neq \varnothing$.

*Piisavus.* Eeldame, et hulga $D$ puhul kehtib implikatsioon

$$\left[\mathbf{X}^{(n)} \in D \ \ (n \in \mathbb{N}),\, \mathbf{X}^{(n)} \to \mathbf{A}\right] \Rightarrow \ \mathbf{A} \in D. \tag{1.12}$$

Olgu $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^m$ hulga $D$ suvaline rajapunkt, siis $U_{\frac{1}{n}}(\mathbf{A}) \cap D \neq \varnothing$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral. Valime suvaliselt $\mathbf{X}^{(n)} \in U_{\frac{1}{n}}(\mathbf{A}) \cap D$ $(n \in \mathbb{N})$, sel juhul $\mathbf{X}^{(n)} \to \mathbf{A}$ (põhjendada!)✠, eelduse (10.10) põhjal $\mathbf{A} \in D$. Seega sisaldab $D$ kõik oma rajapunktid, s.t. ta on kinnine hulk. ■

Lausest 1.9 järeldub lihtsalt järgmine väide.

**Järeldus 1.10** *Kinnine kera $\overline{U}_\delta(\mathbf{A})$ on kinnine hulk ruumis $\mathbb{R}^m$.*

**Tõestus.** Iseseisvalt!✠ ■

# 2 Pidevad mitme muutuja funktsioonid

## 2.1 Mitme muutuja funktsiooni piirväärtus

Alustuseks meenutame ühe muutuja funktsiooni piirväärtuse definitsiooni. Kui $a$ on funktsiooni $f$ määramispiirkonna $D$ kuhjumispunkt, siis $\lim_{x\to a} f(x)$ on defineeritud järgmiselt:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} f(x) = A &:\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : [0 < |x-a| < \delta,\ x \in D] \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : x \in D \cap U_\delta(a) \diagdown \{a\} \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.\end{aligned}$$

**Mitme muutuja funktsiooni piirväärtus.** Olgu järgnevalt $f$ mingi $m$ muutuja funktsioon määramispiirkonnaga $D \subset \mathbb{R}^m$ (lühidalt, $f : D \to \mathbb{R}$) ning olgu $\mathbf{A} = (a_1, ..., a_m)$ hulga $D$ kuhjumispunkt, s.t. punkti $\mathbf{A}$ iga ümbrus, millest on välja jäetud punkt $\mathbf{A}$ ise, lõikab määramispiirkonda $D$. Niisiis,

$$\forall\delta > 0 : (U_\delta(\mathbf{A}) \diagdown \{\mathbf{A}\}) \cap D \neq \varnothing.$$

**Definitsioon.** Arvu $b$ nimetatakse $m$ muutuja funktsiooni $f$ *piirväärtuseks punktis* $\mathbf{A}$, kui iga positiivse arvu $\varepsilon$ korral leidub selline positiivne arv $\delta$, et määramispiirkonna $D$ iga punkti $\mathbf{X}$ korral, mis rahuldab tingimust $0 < \|\mathbf{X} - \mathbf{A}\| < \delta$, kehtib võrratus $|f(\mathbf{X}) - b| < \varepsilon$. Sel juhul kirjutame $\lim_{\mathbf{X}\to\mathbf{A}} f(\mathbf{X}) = b$.

Niisiis,

$$\begin{aligned}\lim_{\mathbf{X}\to\mathbf{A}} f(\mathbf{X}) = b &\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : [0 < \|\mathbf{X} - \mathbf{A}\| < \delta,\ \mathbf{X} \in D] \Rightarrow |f(\mathbf{X}) - b| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \mathbf{X} \in D \cap U_\delta(\mathbf{A}) \diagdown \{\mathbf{A}\} \Rightarrow |f(\mathbf{X}) - b| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \mathbf{X} \in D \cap U_\delta(\mathbf{A}) \diagdown \{\mathbf{A}\} \Rightarrow b - \varepsilon < f(\mathbf{X}) < b + \varepsilon.\end{aligned}$$

**Näide 1.** Veendume, et

$$\lim_{\mathbf{X}\to(1,2)} \left(x^2 + 3y\right) = 7.$$

Selleks kirjutame

$$\begin{aligned}\left|\left(x^2 + 3y\right) - 7\right| &= \left|\left(x^2 - 1\right) + 3(y-2)\right| = |(x-1)(x+1) + 3(y-2)| \\ &\leq |(x-1)|\,|x+1| + 3\,|y-2|. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Olgu $\varepsilon > 0$, nõuame, et otsitav $\delta > 0$ oleks väiksem kui 1. Kui kehtib tingimus $\|\mathbf{X} - (1,2)\| < \delta$, siis $|x-1| \leq \|\mathbf{X} - (1,2)\| < 1$, mistõttu $|x+1| < 3$ (selgitada!)✠. Samuti kehtib võrratus $|y-2| < 1$ ning võrratusest (2.1) saame, et

$$\left|\left(x^2 + 3y\right) - 7\right| < 2\,\|\mathbf{X} - (1,2)\|.$$

Võtame $\delta < \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{6}\right\}$, siis tingimusest $\|\mathbf{X} - (1,2)\| < \delta$ järeldub $|(x^2 + 3y) - 7| < \varepsilon$. Seega $\lim_{\mathbf{X}\to(1,2)} (x^2 + 3y) = 7$.

**Lause 2.1** *Arv $b$ on $m$ muutuja funktsiooni $f$ piirväärtus punktis $\mathbf{A} = (a_1, ..., a_m)$ parajasti siis, kui iga punktiks $\mathbf{A}$ koonduva vektorite jada $\left(\mathbf{X}^{(n)}\right) \subset D$ korral funktsiooni väärtuste jada $\left(f\left(\mathbf{X}^{(n)}\right)\right)$ koondub arvuks $b$.*

**Tõestus.** Peame veenduma, et $\lim_{\mathbf{X}\to\mathbf{A}} f(\mathbf{X}) = b$ parajasti siis, kui on täidetud tingimus

$$\left[\mathbf{X}^{(n)} \in D,\, \mathbf{X}^{(n)} \to \mathbf{A}\right] \Rightarrow f\left(\mathbf{X}^{(n)}\right) \to b. \tag{2.2}$$

*Tarvilikkus.* Eeldame, et $\lim_{\mathbf{X}\to\mathbf{A}} f(\mathbf{X}) = b$, ja näitame, et siis kehtib (2.2). Olgu täidetud implikatsiooni (2.2) eeldus, s.t. $\mathbf{X}^{(n)} \in D$ $(n \in \mathbb{N})$ ning $\mathbf{X}^{(n)} \to \mathbf{A}$. (Kuna $\mathbf{A}$ on hulga $D$ kuhjumispunkt, siis selliseid jadasid $\left(\mathbf{X}^{(n)}\right)$ leidub. Nimelt kehtib iga $n \in \mathbb{N}$ korral $\left(U_{\frac{1}{n}}(\mathbf{A}) \diagdown \{\mathbf{A}\}\right) \cap D \neq \varnothing$ ja kui valida $\mathbf{X}^{(n)} \in \left(U_{\frac{1}{n}}(\mathbf{A}) \diagdown \{\mathbf{A}\}\right) \cap D$, siis $\mathbf{X}^{(n)} \to \mathbf{A}$ (veenduda!)✠.) Peame näitama, et $f\left(\mathbf{X}^{(n)}\right) \to b$.

Olgu $\varepsilon > 0$ suvaline. Piirväärtuse definitsiooni kohaselt leidub $\delta > 0$, et

$$[\mathbf{X} \in D,\, 0 < \|\mathbf{X} - \mathbf{A}\| < \delta] \Rightarrow |f(\mathbf{X}) - b| < \varepsilon. \tag{2.3}$$

Kuna $\mathbf{X}^{(n)} \to \mathbf{A}$, siis leidub selline indeks $N \in \mathbb{N}$, et $\left\|\mathbf{X}^{(n)} - \mathbf{A}\right\| < \delta$ iga $n \geq N$ korral. Tingimusest (2.3) saame $\left|f\left(\mathbf{X}^{(n)}\right) - b\right| < \varepsilon$, kui $n \geq N$, seega $\lim_n f\left(\mathbf{X}^{(n)}\right) = b$. Implikatsioon (2.2) kehtib.

*Piisavus.* Eeldame, et (2.2) kehtib. Oletame vastuväiteliselt, et $b \neq \lim_{\mathbf{X}\to\mathbf{A}} f(\mathbf{X})$, s.t.

$$\exists \varepsilon_0 > 0\ \forall \delta > 0\ \exists \mathbf{X}_\delta \in D \diagdown \{\mathbf{A}\} : 0 < \|\mathbf{X}_\delta - \mathbf{A}\| < \delta, \quad |f(\mathbf{X}_\delta) - b| \geq \varepsilon_0.$$

Kui $\delta := \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$, siis saame jada $\left(\mathbf{X}^{(n)}\right)$, et $0 < \left\|\mathbf{X}^{(n)} - \mathbf{A}\right\| < 1/n$ ja $\left|f\left(\mathbf{X}^{(n)}\right) - b\right| \geq \varepsilon_0$ $(n \in \mathbb{N})$. Seejuures

$$\mathbf{X}^{(n)} \to \mathbf{A} \text{ ja } f\left(\mathbf{X}^{(n)}\right) \nrightarrow b$$

(põhjendada!)✠, mis on vastuolus meie eeldusega (2.2). Kuna meie vastuväiteline oletus $b \neq \lim_{\mathbf{X}\to\mathbf{A}} f(\mathbf{X})$ viib vastuolule, siis on ta vale. ■

Mitme muutuja funktsiooni piirväärtuse definitsiooni antud punktis saab esitada **ümbruste keeles**: $\lim_{\mathbf{X}\to\mathbf{A}} f(\mathbf{X}) = b$ parajasti siis, kui

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : f\left(U_\delta(\mathbf{A}) \diagdown \{\mathbf{A}\}\right) \subset U_\varepsilon(b) = (b - \varepsilon, b + \varepsilon). \tag{2.4}$$

Vaatleme lisaks veel tingimust

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \rho > 0 : f\left(K_\rho(\mathbf{A}) \diagdown \{\mathbf{A}\}\right) \subset U_\varepsilon(b), \tag{2.5}$$

kus $K_\rho(\mathbf{A}) = \{\mathbf{X} = (x_1, ..., x_m) \in \mathbb{R}^m \mid |x_k - a_k| < \rho\ (k = 1, ..., m)\}$ on $m$-mõõtmeline kuup keskpunktiga $\mathbf{A} = (a_1, ..., a_m)$. Arvestades lauset 1.4, saame antud $\delta > 0$ korral valida $\rho > 0$ nii, et $K_\rho(\mathbf{A}) \subset U_\delta(\mathbf{A})$, niisiis tingimusest (2.5) järeldub tingimus (2.4). Sama väide ütleb, et antud $\rho > 0$ puhul leidub $\delta > 0$ omadusega $U_\delta(\mathbf{A}) \subset K_\rho(\mathbf{A})$, mis tähendab implikatsiooni (2.4) $\Rightarrow$ (2.5). Kokkuvõttes oleme saanud veel ühe tarviliku ja piisava tingimuse selleks, et kehtiks võrdus $\lim_{\mathbf{X}\to\mathbf{A}} f(\mathbf{X}) = b$, nimelt tingimuse (2.5)

**Lõpmatu piirväärtus.** Olgu $A$ funktsiooni $f : D \to \mathbb{R}$ määramispiirkonna kuhjumispunkt. Kirjutame

$$\lim_{\mathbf{X}\to\mathbf{A}} f(\mathbf{X}) = \infty,$$

kui iga $M > 0$ korral leidub selline $\delta > 0$, et

$$[0 < \|\mathbf{X} - \mathbf{A}\| < \delta,\, \mathbf{X} \in D] \Rightarrow f(\mathbf{X}) > M.$$

Analoogiliselt defineeritakse $\lim_{\mathbf{X}\to\mathbf{A}} f(\mathbf{X}) = -\infty$.

**Näide 2.** Olgu
$$f(x,y) := \frac{1}{x+2y+1}.$$
Näitame kõigepealt, et piirväärtust $\lim_{\mathbf{X}\to(1,-1)} f(x,y)$ ei eksisteeri. Võtame punkti $\mathbf{A} := (1,-1)$ suvalise ümbruse $U_\delta(\mathbf{A})$ ning fikseerime $x = 1$. Vaatleme punkte $\mathbf{X} = (1,y)$, kus $y \in (-1-\delta, -1+\delta)$. Selge, et need punktid kuuluvad ümbrusse $U_\delta(\mathbf{A})$, s.t. nad rahuldavad tingimust $\|\mathbf{X}-\mathbf{A}\| < \delta$. Samal ajal $\lim_{y\to-1-} f(1,y) = -\infty$ ning $\lim_{y\to-1+} f(1,y) = \infty$, mistõttu lõpmatut piirväärtust punktis $\mathbf{A}$ funktsioonil $f$ ei eksisteeri.

Seevastu $\lim_{\mathbf{X}\to(1,-1)} |f(x,y)| = \infty$. Tõepoolest, kuna
$$|x+2y+1| = |(x-1)+2(y+1)| \le \sqrt{5}\,\|\mathbf{X}-\mathbf{A}\|$$
(põhjendada!)✠, siis $|f(x,y)| \ge \frac{1}{\sqrt{5}\|\mathbf{X}-\mathbf{A}\|}$, mistõttu suvalise $M > 0$ puhul
$$0 < \|\mathbf{X}-\mathbf{A}\| < \frac{1}{M\sqrt{5}} =: \delta \Rightarrow \|\mathbf{X}-\mathbf{A}\| > M.$$

**Piirväärtus protsessis $\|\mathbf{X}\| \to \infty$.** Olgu funktsiooni $f : D \to \mathbb{R}$ määramispiirkond $D$ **tõkestamata** hulk. Kirjutame
$$\lim_{\|\mathbf{X}\|\to\infty} f(\mathbf{X}) = b,$$
kui iga $\varepsilon > 0$ korral leidub selline $K > 0$, et
$$[\|\mathbf{X}\| \ge K,\ \mathbf{X} \in D] \Rightarrow |f(\mathbf{X}) - b| < \varepsilon.$$

**Näide 3.** Näitame, et
$$\lim_{\|\mathbf{X}\|\to\infty} \cos\frac{1}{x^2+2y^2} = 1.$$
Olgu $\varepsilon > 0$. Kuna koosinusfunktsioon on nullpunktis pidev, siis leidub niisugune $\delta > 0$, et $|\cos z - 1| < \varepsilon$, kui $|z| < \delta$ (selgitada!)✠. Võrratusest
$$\frac{1}{x^2+2y^2} \le \frac{1}{\|\mathbf{X}\|^2}$$
(selgitada!)✠ saame eeldusel $\|\mathbf{X}\| > \frac{1}{\sqrt{\delta}}$, et $\frac{1}{x^2+2y^2} < \delta$, millest tuleneb $\left|\cos\frac{1}{x^2+2y^2} - 1\right| < \varepsilon$. Niisiis, $\lim_{\|\mathbf{X}\|\to\infty} \cos\frac{1}{x^2+2y^2} = 1$.

## 2.2 Mitme muutuja funktsiooni pidevus

Meenutame, et ühe muutuja funktsiooni $f$ nimetatakse pidevaks määramispiirkonna punktis $a$, mis samal ajal on määramispiirkonna kuhjumispunkt, kui $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, s.t. kui on täidetud tingimus

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

ehk

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : f(U_\delta(a)) \subset U_\varepsilon(f(a)).$$

Analoogiliselt defineeritakse järgnevalt mitme muutuja funktsiooni $f : D \to \mathbb{R}$ pidevus mingis määramispiirkonna $D$ punktis $\mathbf{A} = (a_1, ..., a_m)$.

**Definitsioon.** Olgu $\mathbf{A}$ $m$ muutuja funktsioon $f : D \to \mathbb{R}$ määramispiirkonna $D$ selline punkt, mis samal ajal on hulga $D$ kuhjumispunkt.Öeldakse, et $f$ on *pidev punktis* $\mathbf{A} \in D$, kui

$$\lim_{\mathbf{X}\to\mathbf{A}} f(\mathbf{X}) = f(\mathbf{A}),$$

s.t.

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \|\mathbf{X} - \mathbf{A}\| < \delta \Rightarrow |f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{A})| < \varepsilon$$

ehk

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : f(U_\delta(\mathbf{A})) \subset U_\varepsilon(f(\mathbf{A}))$$

(rõhutame, et siin $U_\delta(\mathbf{A}) \subset \mathbb{R}^m$ ja $U_\varepsilon(f(\mathbf{A})) \subset \mathbb{R}$). Kui $f$ on pidev alamhulga $Q \subset D$ igas punktis, siis ütleme, et ta on *pidev hulgas* $Q$.

**Näide 4.** Näitame, et seosega

$$f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$$

määratud funktsioon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ on pidev suvalises punktis $\mathbf{A} = (a, b) \in \mathbb{R}^2$, s.t.

$$\lim_{\mathbf{X}\to\mathbf{A}} f(x, y) = f(\mathbf{A}) = 1 - a^2 - b^2.$$

Selleks paneme tähele, et

$$\begin{aligned} |f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{A})| &= \left|\left(1 - x^2 - y^2\right) - \left(1 - a^2 - b^2\right)\right| \\ &\le \left|x^2 - a^2\right| + \left|y^2 - b^2\right| = |(x - a)|\,|(x + a)| + |(y - b)|\,|(y + b)| \\ &\le \|\mathbf{X} - \mathbf{A}\| \left(|(x + a)| + |(y + b)|\right). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Olgu $\varepsilon > 0$, nõuame, et $0 < \delta \le 1$. Kui $\|\mathbf{X} - \mathbf{A}\| < \delta$, siis $|x| < |a| + 1$ ja $|y| < |b| + 1$ (selgitada!)✠, seega saame seosest (2.6)

$$|f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{A})| < M \|\mathbf{X} - \mathbf{A}\|, \text{ kus } M := 2(|a| + |b| + 1)$$

(kontrollida!)✠. Võtame $\delta := \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{M}\right\}$, siis tingimusest $0 < \|\mathbf{X} - \mathbf{A}\| < \delta$ järeldub $|f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{A})| < \varepsilon$, s.t. funktsioon $f$ on pidev punktis $\mathbf{A}$.

**Lause 2.2** *$m$ muutuja funktsioon $f : D \to \mathbb{R}$ on pidev punktis $\mathbf{A} \in D$ parajasti siis, kui on täidetud tingimus*

$$D \ni \mathbf{X}^{(n)} \to \mathbf{A} \quad \textit{(ruumis } \mathbb{R}^m\textit{)} \Rightarrow f\left(\mathbf{X}^{(n)}\right) \to f(\mathbf{A}) \quad \textit{(ruumis } \mathbb{R}\textit{)}.$$

**Tõestus.** Iseseisvalt!✠ (Kasutada lauset 2.1). ■

**Tehted pidevate funktsioonidega.** Sarnaselt ühe muutuja funktsioonidega defineeritakse mitme muutuja funktsioonide *summad, korrutised ja jagatised.* Kui $f$ ja $g$ on $m$ muutuja funktsioonid määramispiirkonnaga $D \subset \mathbb{R}^m$, siis defineerime

$$\begin{aligned}
(f+g)(\mathbf{X}) &:= f(\mathbf{X}) + g(\mathbf{X}), \\
(fg)(\mathbf{X}) &:= f(\mathbf{X})\, g(\mathbf{X}), \\
\left(\frac{f}{g}\right)(\mathbf{X}) &:= \frac{f(\mathbf{X})}{g(\mathbf{X})} \text{ (eeldusel } g(\mathbf{X}) \neq 0) \quad (\mathbf{X} \in D).
\end{aligned}$$

Vahetu kontroll näitab, et kui funktsioonid $f$ ja $g$ on pidevad punktis $\mathbf{A} \in D$, siis ka funktsioonid $f+g$, $fg$ ja $\frac{f}{g}$ on selles punktis pidevad (veenduda!)✠.

**Liitfunktsioon, tema pidevus.** Defineerime nüüd mitme muutuja funktsioonide kompositsiooni ehk liitfunktsiooni. Olgu $w = f(u_1, ..., u_l)$ $l$ muutuja funktsioon määramispiirkonnaga $Q$, kus argumendid $u_1, ..., u_l$ on $m$ muutuja funktsioonid:

$$\begin{aligned}
u_1 &= \varphi_1(x_1, ..., x_m), \\
u_2 &= \varphi_2(x_1, ..., x_m), \\
&\ldots \\
u_l &= \varphi_l(x_1, ..., x_m).
\end{aligned}$$

Eeldame, et funktsioonidel $\varphi_1, ..., \varphi_l$ on ühine määramispiirkond $D$ ning iga $\mathbf{X} \in D$ korral $(\varphi_1(\mathbf{X}), ..., \varphi_l(\mathbf{X})) \in Q$. Siis saab defineerida $m$ muutuja funktsiooni $F : D \to \mathbb{R}$, mis on määratud seosega

$$\begin{aligned}
F(\mathbf{X}) &:= F(x_1, ..., x_m) := f(\varphi_1(\mathbf{X}), ..., \varphi_l(\mathbf{X})) \\
&= f(\varphi_1(x_1, ..., x_m), ..., \varphi_l(x_1, ..., x_m)).
\end{aligned}$$

Funktsiooni $F$ nimetame funktsioonide $f, \varphi_1, ..., \varphi_l$ *kompositsiooniks* ehk *liitfunktsiooniks.*

**Lause 2.3** *Kui funktsioonid $\varphi_1, ..., \varphi_l$ on pidevad punktis $\mathbf{A} = (a_1, ..., a_m) \in D$ ja funktsioon $f$ on pidev punktis $\mathbf{B} := (\varphi_1(\mathbf{A}), ..., \varphi_l(\mathbf{A}))$, siis kompositsioon $F$ on pidev punktis $\mathbf{A}$.*

**Tõestus.** Tähistame $b_i := \varphi_i(\mathbf{A})$ $(i = 1, ..., l)$. Kuna funktsioonid $\varphi_i$ on punktis $\mathbf{A}$ pidevad, siis

$$\lim_{\mathbf{X} \to A} \varphi_i(\mathbf{X}) = b_i,$$

teisi sõnu, kui $\mathbf{X} \to \mathbf{A}$, siis $u_i \to b_i$ $(i = 1, ..., l)$ ehk $(u_1, ..., u_l) \to \mathbf{B}$ ruumis $\mathbb{R}^l$. Seega

$$\begin{aligned}
\lim_{\mathbf{X} \to \mathbf{A}} F(\mathbf{X}) &= \lim_{\mathbf{X} \to \mathbf{A}} f(\varphi_1(\mathbf{X}), ..., \varphi_l(\mathbf{X})) = \lim_{(u_1, ..., u_l) \to \mathbf{B}} f(u_1, ..., u_l) \\
&= f(\mathbf{B}) = f(\varphi_1(\mathbf{A}), ..., \varphi_l(\mathbf{A})) = F(\mathbf{A}),
\end{aligned}$$

kusjuures teine võrdus tuleneb eeldusest funktsiooni $f$ pidevuse kohta punktis $\mathbf{B}$. Saadud võrdus $\lim_{\mathbf{X} \to \mathbf{A}} F(\mathbf{X}) = F(\mathbf{A})$ tähendabki kompositsiooni $F$ pidevust punktis $\mathbf{A}$. ■

## 2.3 Kinnises tõkestatud piirkonnas pidevate mitme muutuja funktsioonide omadused

Eelpool toodud definitsiooni kohaselt nimetatakse tõkestatuks hulka, mis sisaldub mingis keras $U_r(\mathbf{A})$. Mitme muutuja funktsioonidel, mis on määratud ja pidevad mingis kinnises *tõkestatud hulgas*, on sarnaselt lõigus pidevate ühe muutuja funktsioonidega mitmed tähelepanuväärsed omadusd.

**Lause 2.4** ***(Weierstrassi teoreem funktsiooni tõkestatusest).*** *Kinnises tõkestatud piirkonnas $D \subset \mathbb{R}^m$ pidev $m$ muutuja funktsioon $f$ on selles hulgas tõkestatud, s.t.*

$$\exists M > 0 : |f(\mathbf{X})| \le M \quad \textit{iga } \mathbf{X} \in D \quad \textit{korral.}$$

**Tõestus.** Kehtigu kõik lause eeldused, s.t. $f$ on kinnises tõkestatud piirkonnas $D \subset \mathbb{R}^m$ pidev funktsioon. Oletame vastuväiteliselt, et $f$ ei ole hulgas $D$ tõkestatud, s.t.

$$\forall M > 0 \ \exists \mathbf{X}_M \in D : |f(\mathbf{X}_M)| > M.$$

Siis iga $n \in \mathbb{N}$ jaoks saab valida hulgas $D$ punkti $\mathbf{X}^{(n)}$ omadusega $\left|f\left(\mathbf{X}^{(n)}\right)\right| > n$. Punktide jada $\left(\mathbf{X}^{(n)}\right)$ on tõkestatud (põhjendada!)✠, Bolzano-Weierstrassi teoreemi (vt. lause 1.8) kohaselt sisaldab ta koonduva osajada $\left(\mathbf{X}^{(n_i)}\right)$. Olgu $\mathbf{A} := \lim_i \mathbf{X}^{(n_i)}$, siis lause 1.9 kohaselt saame $\mathbf{A} \in D$. Funktsiooni $f$ pidevusest tuleneb $f\left(\mathbf{X}^{(n_i)}\right) \to f(\mathbf{A})$ (vrd. lause 2.2), niisiis on $\left(f\left(\mathbf{X}^{(n_i)}\right)\right)$ koonduv arvjada, seega tõkestatud. Samal ajal kehtib vastavalt punktide $\mathbf{X}^{(n)}$ valikule võrratus $\left|f\left(\mathbf{X}^{(n_i)}\right)\right| > n_i \ge i$, mille kohaselt jada $\left(f\left(\mathbf{X}^{(n_i)}\right)\right)$ ei ole tõkestatud. Saadud vastuolu tähendab, et $f$ peab olema hulgas $D$ tõkestatud funktsioon. ■

**Lause 2.5** ***(Weierstrassi teoreem funktsiooni ekstremaalsetest väärtustest).*** *Kinnises tõkestatud piirkonnas $D \subset \mathbb{R}^m$ pidev $m$ muutuja funktsioon $f$ saavutab selles hulgas oma suurima ja vähima väärtuse.*

**Tõestus.** Tõestame suurima väärtuse olemasolu. Lause 2.4 põhjal on funktsiooni väärtuste hulk $\{f(\mathbf{X}) \mid \mathbf{X} \in D\}$ tõkestatud, pidevuse aksioomi kohaselt eksisteerib tal ülemine raja $M$. Oletame vastuväiteliselt, et

$$f(\mathbf{X}) \ne M \text{ kõikide } \mathbf{X} \in D \text{ korral,}$$

ja defineerime piirkonnas $D$ uue funktsiooni $g$ seosega

$$g(\mathbf{X}) := \frac{1}{M - f(\mathbf{X})}.$$

Funktsioon $g$ on piirkonnas $D$ pidev (põhjendada!)✠, järelikult leidub selline arv $K > 0$, et $\frac{1}{M - f(\mathbf{X})} \le K$ ehk $f(\mathbf{X}) \le M - \frac{1}{K}$ iga $\mathbf{X} \in D$ puhul. Viimane võrratus on vastuolus faktiga, et $M$ on hulga $\{f(\mathbf{X}) \mid \mathbf{X} \in D\}$ ülemine raja. See vastuolu kinnitab meie vastuväitelise oletuse paikapidamatust. Lause on tõestatud. ■

**Definitsioon.** Piirkonnas $D \subset \mathbb{R}^m$ määratud $m$ muutuja funktsiooni $f$ nimetatakse *ühtlaselt pidevaks* selles piirkonnas, kui iga $\varepsilon > 0$ jaoks leidub niisugune $\delta > 0$, et kui $\mathbf{X}, \mathbf{X}' \in D$ ning $\|\mathbf{X} - \mathbf{X}'\| < \delta$, siis $|f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{X}')| < \varepsilon$.

Ühe muutuja funktsioonide korral väidab Cantori teoreem, et lõigus pidev funktsioon on selles lõigus ühtlaselt pidev. Analoogiline väide kehtib ka mitme muutuja funktsioonide puhul.

**Lause 2.6** ***(Cantori teoreem funktsioonide ühtlasest pidevusest).*** *Kinnises tõkestatud piirkonnas $D \subset \mathbb{R}^m$ pidev $m$ muutuja funktsioon $f$ on hulgas $D$ ühtlaselt pidev.*

**Tõestus.** Olgu funktsioon $f$ kinnises tõkestatud piirkonnas $D \subset \mathbb{R}^m$ pidev. Oletame vastuväiteliselt, et ta ei ole selles hulgas ühtlaselt pidev. Siis saab leida niisuguse $\varepsilon_0 > 0$, et iga $n \in \mathbb{N}$ korral leiduvad punktid $\mathbf{X}^{(n)}, \mathbf{X}'^{(n)} \in D$ omadusega

$$\left\|\mathbf{X}^{(n)} - \mathbf{X}'^{(n)}\right\| < \frac{1}{n}, \quad \text{kuid } \left|f\left(\mathbf{X}^{(n)}\right) - f\left(\mathbf{X}'^{(n)}\right)\right| \geq \varepsilon_0 \tag{2.7}$$

(selgitada!)✠. Kuna jada $\left(\mathbf{X}^{(n)}\right)$ on tõkestatud (põhjendada!)✠, siis Bolzano-Weierstrassi teoreemi järgi sisaldab ta koonduva osajada $\left(\mathbf{X}^{(n_i)}\right)$. Olgu $A := \lim_i \mathbf{X}^{(n_i)}$, siis $A \in D$ (selgitada!)✠. Edasi paneme tähele, et

$$\left\|\mathbf{X}^{(n_i)} - \mathbf{X}'^{(n_i)}\right\| < \frac{1}{n_i} \leq \frac{1}{i} \quad (i \in \mathbb{N}),$$

seetõttu

$$\left\|\mathbf{X}'^{(n_i)} - \mathbf{A}\right\| \leq \left\|\mathbf{X}'^{(n_i)} - \mathbf{X}^{(n_i)}\right\| + \left\|\mathbf{X}^{(n_i)} - \mathbf{A}\right\| < \frac{1}{i} + \left\|\mathbf{X}^{(n_i)} - \mathbf{A}\right\| \to 0 \quad (i \to \infty),$$

niisiis $\mathbf{X}'^{(n_i)} \to \mathbf{A}$. Kuna $f$ on pidev funktsioon, siis

$$\lim_i f\left(\mathbf{X}'^{(n_i)}\right) = \lim_i f\left(\mathbf{X}^{(n_i)}\right) = f(\mathbf{A})$$

(selgitada!)✠, järelikult $\lim_i \left(f\left(\mathbf{X}^{(n_i)}\right) - f\left(\mathbf{X}'^{(n_i)}\right)\right) = 0$. Piirväärtuse definitsiooni kohaselt saab valida indeksi $N$ omadusega

$$i \geq N \Rightarrow \left|f\left(\mathbf{X}^{(n_i)}\right) - f\left(\mathbf{X}'^{(n_i)}\right)\right| < \varepsilon_0,$$

kuid see on vastuolus punktide $\mathbf{X}^{(n)}$ ja $\mathbf{X}'^{(n)}$ valikuga (vrd. (2.7)). Lause on tõestatud. ■

Bolzano-Cauchy teoreemi kohaselt saavutab lõigus pidev ühe muutuja funktsioon iga väärtuse oma ekstremaalsete väärtuste vahel. Erinevalt eelpool tõestatud Cantori ja Weierstrassi teoreemidest ei ole Bolzano-Cauchy teoreem ülekantav kõigile kinnises tõkestatud piirkonnas pidevatele funktsioonidele. Näiteks, funktsioon

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{kui } x \in [0,1], \\ 1, & \text{kui } x \in [2,3], \end{cases}$$

on pidev kinnises tõkestatud piirkonnas $D = [0,1] \cup [2,3]$, kuid ta ei saavuta ühtegi väärtust ekstremaalsete väärtuste 0 ja 1 vahel. Väide jääb aga kehtima, kui lisaks hulga $D$ kinnisusele ja tõkestatusele eeldada veel tema sidusust.

**Lause 2.7** ***(Bolzano-Cauchy teoreem funktsiooni vahepealsetest väärtustest).*** *Sidusas kinnises tõkestatud piirkonnas $D \subset \mathbb{R}^m$ pidev funktsioon $f$ saab iga väärtuse $b$ oma vähima väärtuse $m := \min\{f(\mathbf{X}) \mid \mathbf{X} \in D\}$ ja suurima väärtuse $M := \max\{f(\mathbf{X}) \mid \mathbf{X} \in D\}$ vahel.*

**Tõestus.** Lause 2.5 põhjal saab $f$ väärtused $m$ ja $M$, olgu $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in D$ sellised punktid, et $m = f(\mathbf{A})$ ja $M = f(\mathbf{B})$. Sidususe eelduse kohaselt leidub niisugune pidev joon hulgas $D$, mis ühendab punktid $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$. Olgu see joon määratud parameetriliste võrranditega

$$x_1 = \varphi_1(t), ..., \ x_m = \varphi_m(t) \quad (t \in [\alpha, \beta]),$$

olgu $\mathbf{A} = (\varphi_1(\alpha), ..., \varphi_m(\alpha))$ ja $\mathbf{B} = (\varphi_1(\beta), ..., \varphi_m(\beta))$ ning $(\varphi_1(t), ..., \varphi_m(t)) \in D$, kui $t$ paikneb arvude $\alpha$ ja $\beta$ vahel, konkreetsuse mõttes olgu $\alpha \leq t \leq \beta$. Kui moodustame liitfunktsiooni $g$ seosega

$$g(t) := f(\varphi_1(t), ..., \varphi_m(t)),$$

siis, kuna kõik komponendid $f, \varphi_1, ..., \varphi_m$ on pidevad, saame lõigus $[\alpha, \beta]$ pideva *ühe muutuja* funktsiooni (kontrollida!)✠. Ilmselt on

$$m = \min\{g(t) \mid t \in [\alpha, \beta]\} \text{ ja } M = \max\{g(t) \mid t \in [\alpha, \beta]\}$$

(põhjendada!)✠. Funktsiooni $g$ puhul kehtib Bolzano-Cauchy teoreem, selle kohaselt leidub iga $b \in [m, M]$ korral argument $t_1 \in [\alpha, \beta]$, et $b = g(t_1)$. Seega, kui tähistada $\mathbf{X}_1 := (\varphi_1(t_1), ..., \varphi_m(t_1))$, siis $\mathbf{X}_1 \in D$ ja

$$b = g(f(\varphi_1(t_1), ..., \ \varphi_m(t_1))) = f(\mathbf{X}_1).$$

Väide on tõestatud. ■

# 3 Mitme muutuja funktsioonide diferentseerimine

## 3.1 Mitme muutuja funktsiooni osatuletised

Üleminekul ühe muutuja funktsioonidelt $m$ muutuja funktsioonidele, kus $m = 2, 3, ...$, kerkib üles **kvalitatiivselt uusi probleeme**, eeskätt just seoses diferentsiaal- ja integraalarvutusega. Tähelepanuväärne on, et nende probleemide olemus ei sõltu oluliselt ruumi dimensioonist, kuigi suurema $m$ puhul on probleemid tehniliselt keerulisemad. Nendel kaalutlustel *piirdume me järgnevas enamasti kahe muutuja funktsioonide vaatlemisega.*

**Osatuletised.** Olgu $\mathbf{A} = (a, b)$ kahe muutuja funktsiooni $w = f(x, y)$ määramispiirkonna $D \subset \mathbb{R}^2$ *sise*punkt. Kui fikseerida teine muutuja $y = b$, siis seosega

$$f_1(x) := f(x, b).$$

on määratud ühe muutuja funktsioon $f_1$ (nn. *osafunktsioon*) määramispiirkonnaga

$$D_1 := \{x \in \mathbb{R} \mid (x, b) \in D\}.$$

Kuna $\mathbf{A}$ on hulga $D$ sisepunkt, siis leidub tal ümbrus $U_\delta(\mathbf{A})$, mis sisaldub hulgas $D$. Funktsioon $f_1$ on seega määratud punkti $a \in \mathbb{R}$ ümbruses $(a - \delta, a + \delta)$ (kontrollida!)✠. Kui funktsioonil $f_1$ on punktis $a$ tuletis

$$f_1'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}, \tag{3.1}$$

siis seda nimetatakse kahe muutuja funktsiooni $f$ *osatuletiseks punktis* $\mathbf{A} = (a, b)$ *muutuja* $x$ *järgi* ning tähistatakse

$$\frac{\partial f(a, b)}{\partial x} \text{ või } \frac{\partial f(\mathbf{A})}{\partial x} \quad (\text{samuti ka } f_x(a, b) \text{ või } f_x(\mathbf{A})).$$

Seega

$$\frac{\partial f(a, b)}{\partial x} = \frac{df(x, b)}{dx}\, |_{x=a} = f'(x, b)\, |_{x=a}.$$

Analoogiliselt, kui fikseerida esimese muutuja väärtus $x = a$, saame ühe muutuja $y$ osafunktsiooni

$$f_2(x) := f(a, x),$$

see on määratud punkti $b$ ümbruses $(b - \delta, b + \delta)$. Kui eksisteerib tuletis

$$f_2'(b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a, b + h) - f(a, b)}{h}, \tag{3.2}$$

siis seda arvu nimetatakse funktsiooni $f$ *osatuletiseks punktis* $\mathbf{A}$ *muutuja* $y$ *järgi* ning tähistatakse

$$\frac{\partial f(a, b)}{\partial y} \text{ või } \frac{\partial f(\mathbf{A})}{\partial y} \quad (\text{samuti ka } f_y(a, b) \text{ või } f_y(\mathbf{A})).$$

**Näide 1.** Olgu $f(x, y) := e^{xy} + \sin(xy)$. Siis $f$ on määratud kogu $xy$-tasandil $\mathbb{R}^2$ ning

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = y\left(e^{xy} + \cos(xy)\right) \quad \text{ja} \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = x\left(e^{xy} + \cos(xy)\right).$$

**Osatuletiste olemasolu ei garanteeri funktsiooni pidevust. Näide 2.** Seosega

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{kui } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{kui } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

määratud funktsioonil $f$ on punktis $\mathbf{0}$ mõlema muutuja järgi osatuletised (veenduda!)✠, kuid ta ei ole selles punktis pidev. Nimelt koondub punktide $\mathbf{X}_n := \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ jada $(\mathbf{X}_n)$ punktiks $\mathbf{0}$ (selgitada!)✠, kuid

$$f(\mathbf{X}_n) = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{2} \text{ iga } n \text{ korral,}$$

seega $f(\mathbf{X}_n) \nrightarrow 0 = f(\mathbf{0})$. Lause 2.2 kohaselt ei ole $f$ punktis $\mathbf{0}$ pidev.

**Osatuletiste geomeetriline tähendus**. Olgu $D \subset \mathbb{R}^2$ kahe muutuja funktsiooni $z = f(x,y)$ määramispiirkond. Punktide hulka

$$\{(x, y, f(x,y)) \mid (x,y) \in D\}$$

kolmemõõtmelises ruumis $\mathbb{R}^3$ nimetatakse funktsiooni $f$ *graafikuks*. Funktsiooni $f$ graafikut nimetatakse tavaliselt *pinnaks*, seost $z = f(x,y)$ selle pinna võrrandiks.

Olgu $\mathbf{A} = (a,b)$ määramispiirkonna $D$ punkt. Moodustame tasandi $y = b$, see on tasand, mis läheb läbi punkti $\mathbf{A}$ ja on paralleelne $xz$-tasandiga. Ta lõikab pinda $z = f(x,y)$, tähistame nende lõikejoone sümboliga $l_1$. Lihtne on näha, et $l_1$ on osafunktsiooni $f_1$ graafik tasandil $y = b$. Kui punktis $\mathbf{A}$ eksisteerib osatuletis $\frac{\partial f(a,b)}{\partial x} = f_1'(a)$, siis see on joone $l_1$ puutuja tõusunurga tangens punktis $\mathbf{A}' = (a, b, f(a,b))$ (selgitada!)✠.

Samamoodi, kui lõigata pinda $z = f(x,y)$ tasandiga $x = a$, siis lõikejoon $l_2$ on muutuja $y$ osafunktsiooni $f_2$ graafik ning osatuletis $\frac{\partial f(a,b)}{\partial y}$ on punktis $\mathbf{A}' = (a, b, f(a,b))$ joonele võetud puutuja tõusunurga tangens.

## 3.2 Mitme muutuja funktsiooni diferentseeruvus

Funktsioonide uurimisel on nii teoreetilisest kui ka praktilisest seisukohast lähtudes oluline küsimus, *milline on funktsiooni väärtuste muutumise iseloom argumendi vaadeldaval muutumisel.* Ühe muutuja funktsioonide puhul tuuakse selle probleemi käsitlemiseks sisse sobivad mõisted pidevus ja diferentseeruvus. Kui pidevus on üldtopoloogiline mõiste, mistõttu selle defineerimine on ka mitme muutuja funktsioonide puhul lihtne, siis diferentseeruvusega on asi keerulisem. Eelmises punktis tõime näite 2 funktsioonist $f$, millel on ruumis $\mathbb{R}^2$ olemas osatuletised, kuid mis ei ole punktis $\mathbf{0}$ pidev. Samas teame, et ühe muutuja funktsioonide puhul on diferentseeruvus oluliselt tugevam tingimus kui pidevus. Niisiis, puhtformaalselt võttes võime väita, et osatuletiste olemasolu ei ole see omadus, mis vastaks ühe muutuja funktsioonide diferentseeruvusele. Sisuliselt asjale lähenedes märgime, et osatuletised kirjeldavad funktsiooni käitumist antud punkti ümbruses vaid ühe konkreetse argumendi muutumisel. Seejuures ei anna nad mingit informatsiooni funktsiooni väärtuste muutumise kohta argumentide samaaegsel muutumisel.

Mitme muutuja funktsiooni diferentseeruvuse mõiste defineerimisel lähtume nn. diferentsiaalarvutuse põhilemmast: *ühe muutuja funktsioon $g$ on punktis $a$ diferentseeruv parajasti* *siis, kui leidub selline punktis $a$ pidev funktsioon $G$, et $g(x) = g(a) + G(x)(x-a)$, sel juhul $g'(a) = G(a)$.*

Olgu $f : D \to \mathbb{R}$ kahe muutuja funktsioon ja olgu $\mathbf{A} = (a,b)$ määramispiirkonna $D$ sisepunkt. Tähistame sümboliga $\Delta f$ funktsiooni $f$ muudu punktis $\mathbf{A}$, mis vastab argumentide muutudele $h_1$ ja $h_2$, s.t.

$$\Delta f := f(\mathbf{A} + (h_1, h_2)) - f(\mathbf{A}) = f(a + h_1, b + h_2) - f(a, b).$$

**Definitsioon.** Funktsiooni $f$ nimetatakse *diferentseeruvaks punktis* $\mathbf{A} = (a,b)$, kui
1) tema muut $\Delta f$ avaldub kujul

$$\Delta f = Mh_1 + Nh_2 + \alpha, \tag{3.3}$$

kus $M$ ja $N$ on arvud, mis ei sõltu argumentide muutudest $h_1$ ja $h_2$, ning
2) $\alpha = \alpha(h_1, h_2)$ on kõrgemat järku lõpmata väike suurus kui $\|(h_1, h_2)\| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$, s.t.

$$\lim_{(h_1,h_2)\to\mathbf{0}} \frac{\alpha(h_1, h_2)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0. \tag{3.4}$$

Avaldist $d_{\mathbf{A}} f := Mh_1 + Nh_2$ nimetatakse funktsiooni $f$ *täisdiferentsiaaliks* punktis $\mathbf{A}$.

Definitsiooni tingimusi (3.3) ja (3.4) kokku võttes võime öelda, et funktsioon $f$ on punktis $\mathbf{A}$ diferentseeruv parajasti siis, kui leiduvad sellised arvud $M$ ja $N$, et

$$\lim_{\mathbf{X}\to\mathbf{A}} \frac{f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{A}) - M(x-a) - N(y-b)}{\|\mathbf{X} - \mathbf{A}\|} = 0.$$

**Lause 3.1** *Punktis* $\mathbf{A}$ *diferentseeruv funktsioon* $f$ *on selles punktis pidev.*

**Tõestus.** Eelduse kohaselt on täidetud tingimused (3.3) ja (3.4), peame näitama, et $\lim_{\mathbf{X}\to\mathbf{A}} f(\mathbf{X}) = f(\mathbf{A})$ ehk $\lim_{\mathbf{X}\to\mathbf{A}} (f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{A})) = 0$. Tähistame $h_1 := x-a$ ja $h_2 := y-b$. Kuna $\mathbf{X} \to \mathbf{A}$, siis $h_1 \to 0$ ja $h_2 \to 0$. Seose (3.4) põhjal $\lim_{(h_1,h_2)\to\mathbf{0}} \alpha = 0$ (põhjendada!)✠, mistõttu seosest (3.3) saame

$$\lim_{\mathbf{X}\to\mathbf{A}} (f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{A})) = \lim_{(h_1,h_2)\to\mathbf{0}} \Delta f = 0.$$

Lause on tõestatud. ■

**Lause 3.2** *Kui funktsioon* $f$ *on punktis* $\mathbf{A}$ *diferentseeruv, siis on tal selles punktis osatuletised ning muut* $\Delta f$ *esitub kujul*

$$\Delta f = \frac{\partial f(A)}{\partial x} h_1 + \frac{\partial f(A)}{\partial y} h_2 + \alpha. \tag{3.5}$$

**Tõestus.** Eeldame, et funktsioon $f$ on punktis $\mathbf{A}$ diferentseeruv. Kui võtta seoses (3.3) $h_2 := 0$ ja $h_1 \neq 0$, siis eksisteerib piirväärtus

$$\frac{\partial f(\mathbf{A})}{\partial x} = \lim_{h_1\to 0} \frac{f(a + h_1, a) - f(a, b)}{h_1} = M \lim_{h_1\to 0} \frac{h_1}{h_1} + 0 + \lim_{h_1\to 0} \frac{\alpha}{h_1} = M.$$

Analoogiliselt veendutakse, et $\frac{\partial f(\mathbf{A})}{\partial y} = N$. ■

**Täisdiferentsiaal.** Kui funktsioon $f$ on punktis $\mathbf{A}$ diferentseeruv, siis lause 3.2 kohaselt avaldub tema täisdiferentsiaal $d_{\mathbf{A}}f$ kujul

$$d_{\mathbf{A}}f = \frac{\partial f(\mathbf{A})}{\partial x}h_1 + \frac{\partial f(\mathbf{A})}{\partial y}h_2 =: \frac{\partial f(\mathbf{A})}{\partial x}dx + \frac{\partial f(\mathbf{A})}{\partial y}dy.$$

Seega

$$\Delta f = d_{\mathbf{A}}f + \alpha.$$

Nagu teame, ei garanteeri osatuletiste $\frac{\partial f(\mathbf{A})}{\partial x}$ ja $\frac{\partial f(\mathbf{A})}{\partial y}$ olemasolu üldjuhul veel funktsiooni $f$ diferentseeruvust punktis $\mathbf{A}$ (selgitada!)✠. Küll aga garanteerib selle, nagu selgub järgmisest lausest, **pidevate** osatuletiste olemasolu.

**Lause 3.3** *Kui funktsioonil $f$ on punktis $\mathbf{A} = (a, b)$ pidevad osatuletised $\frac{\partial f}{\partial x}$ ja $\frac{\partial f}{\partial y}$, siis $f$ on punktis $\mathbf{A}$ diferentseeruv.*

**Tõestus.** Eeldame, et funktsioonil $f$ on osatuletised $\frac{\partial f}{\partial x}$ ja $\frac{\partial f}{\partial y}$, mis on punktis $\mathbf{A}$ pidevad. Rakendame ühe muutuja funktsiooni Lagrange'i keskväärtusteoreemi, selle abil saab funktsiooni $f$ muudu esitada kujul

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(a + h_1, b + h_2) - f(a, b)\\ &= f(a + h_1, b + h_2) - f(a, b + h_2) + f(a, b + h_2) - f(a, b)\\ &= \frac{\partial f(a + \theta_1 h_1, b + h_2)}{\partial x}h_1 + \frac{\partial f(a, b + \theta_2 h_2)}{\partial y}h_2,\end{aligned}$$

kus $\theta_1, \theta_2 \in (0, 1)$ (selgitada!)✠. Kui tähistada

$$\alpha_1 := \frac{\partial f(a + \theta_1 h_1, b + h_2)}{\partial x} - \frac{\partial f(a, b)}{\partial x},\ \ \alpha_2 := \frac{\partial f(a, b + \theta_2 h_2)}{\partial y} - \frac{\partial f(a, b)}{\partial y},$$

siis saame seose

$$\Delta f = \frac{\partial f(a, b)}{\partial x}h_1 + \frac{\partial f(a, b)}{\partial y}h_2 + \alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2.$$

See on avaldis (3.3), väite tõestuseks on vaja veenduda, et $\lim_{(h_1,h_2)\to\mathbf{0}} \frac{\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0$.

Paneme tähele, et

$$\left|\frac{\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}\right| \le |\alpha_1| \frac{|h_1|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} + |\alpha_2| \frac{|h_2|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \le |\alpha_1| + |\alpha_2|$$

ning (tänu osatuletiste pidevusele)

$$\begin{aligned}\lim_{(h_1,h_2)\to\mathbf{0}} \alpha_1 &= \lim_{(h_1,h_2)\to\mathbf{0}} \left(\frac{\partial f(a + \theta_1 h_1, b + h_2)}{\partial x} - \frac{\partial f(a, b)}{\partial x}\right) = 0,\\ \lim_{(h_1,h_2)\to\mathbf{0}} \alpha_2 &= \lim_{(h_1,h_2)\to\mathbf{0}} \left(\frac{\partial f(a, b + \theta_2 h_2)}{\partial y} - \frac{\partial f(a, b)}{\partial y}\right) = 0\end{aligned}$$

(põhjendada!)✠. Seega $\left|\frac{\alpha_1 h_1+\alpha_2 h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\right| \to 0$ protsessis $(h_1, h_2) \to \mathbf{0}$. Lause on tõestatud. ■

Lause 3.3 ütleb, et kui kahe muutuja funktsioonil on antud punktis $\mathbf{A} = (a, b)$ **pidevad** osatuletised, siis need kirjeldavad funktsiooni käitumist mitte ainult sirgetel $x = a$ ja $y = b$, vaid selle punkti teatavas ümbruses.

**Osatuletiste pidevus ei ole tarvilik tingimus funktsiooni diferentseeruvuseks.** **Näide 3.** Olgu

$$f(x,y) := \begin{cases} (x-y)^2 \sin \frac{1}{x-y}, & \text{kui } x \neq y, \\ 0, & \text{kui } x = y. \end{cases}$$

Siis

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2(x-y)\sin\frac{1}{x-y} - \cos\frac{1}{x-y} \quad (x \neq y)$$

ning

$$\frac{\partial f(x,x)}{\partial x} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x,x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2 \sin\frac{1}{h} - 0}{h} = 0,$$

millest järeldub, et osatuletis $\frac{\partial f}{\partial x}$ ei ole pidev punktis $\mathbf{0}$ (tegelikult kogu sirgel $x = y$). Analoogiliselt kontrollitakse, et $\frac{\partial f}{\partial y}$ ei ole punktis $\mathbf{0}$ pidev. Nimelt,

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -2(x-y)\sin\frac{1}{x-y} + \cos\frac{1}{x-y} \quad (x \neq y)$$

ja $\frac{\partial f(y,y)}{\partial y} = 0$ (kontrollida!)✠.

Näitame, et $f$ on punktis $\mathbf{0}$ diferentseeruv. Tõepoolest,

$$\frac{f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{0}) - \frac{\partial f(\mathbf{0})}{\partial x}x - \frac{\partial f(\mathbf{0})}{\partial y}y}{\|X\|} = \begin{cases} \frac{(x-y)^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\frac{1}{x-y}, & \text{kui } x \neq y, \\ 0, & \text{kui } x = y \end{cases}$$

(kontrollida!)✠, võrratuse

$$\left|\frac{(x-y)^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\frac{1}{x-y}\right| \leq \frac{2(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 2\sqrt{x^2+y^2} \quad \left(x^2 \neq y^2\right)$$

tõttu saame

$$\lim_{\mathbf{X}\to\mathbf{0}}\frac{f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{0}) - \frac{\partial f(\mathbf{0})}{\partial x}x - \frac{\partial f(\mathbf{0})}{\partial y}y}{\|\mathbf{X}\|} = 0$$

(veenduda!)✠.

**Graafiku puutujatasand.** Eeldame, et funktsioon $f$ on punktis $\mathbf{A}$ diferentseeruv. Tähistades $\mathbf{X} = (x, y) := (a + h_1, b + h_2)$ (s.t. $x := a + h_1$ ja $y := b + h_2$), $c := f(a, b)$ ja $z := f(x, y)$, saame tingimuse (3.3) kirjutada kujul

$$z = c + M(x-a) + N(y-b) + \alpha, \tag{3.6}$$

kus $\lim_{\mathbf{X}\to\mathbf{A}} \frac{\alpha}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} = 0$. Võrrand

$$z = c + M(x-a) + N(y-b) \tag{3.7}$$

kirjeldab teatavat tasandit, millel paikneb punkt $\mathbf{A}' := (a,b,c)$ (kontrollida!)✠. Lause 3.2 kohaselt $M = \frac{\partial f(a,b)}{\partial x}$ ja $N = \frac{\partial f(a,b)}{\partial y}$, seega määrab seos (3.6) (ehk (3.3)) üheselt tasandi (3.7). Seda tasandit nimetatakse funktsiooni $f$ *graafiku puutujatasandiks punktis* $\mathbf{A}'$. Esitame puutujatasandi definitsiooni.

**Definitsioon.** Kahe muutuja funktsiooni $z = f(x,y)$ graafiku puutujatasandiks punktis $\mathbf{A}' := (a,b,c)$ nimetatakse sellist tasandit, mille applikaadi (s.o. $z$-koordinaadi) ja funktsiooni väärtuse vahe on protsessis $\mathbf{X} \to \mathbf{A}$, kus $\mathbf{X} = (x,y)$ ja $\mathbf{A} = (a,b)$, kõrgemat järku lõpmata väike kui $\|\mathbf{X}-\mathbf{A}\| = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ .

Puutujatasandi võrrandist (3.7) saame muuhulgas, et $d_{\mathbf{A}}f = \frac{\partial f(\mathbf{A})}{\partial x}h_1 + \frac{\partial f(\mathbf{A})}{\partial y}h_m = z - c$. Seega *kirjeldab funktsiooni $f$ täisdiferentsiaal punktis $\mathbf{A} = (a,b)$ funktsiooni graafikule punktis $\mathbf{A}' := (a,b,f(a,b))$ võetud puutujatasandi applikaadi muutu, mis vastab argumentide muutudele $h_1$ ja $h_2$.*

$m$**-muutuja funktsiooni osatuletised ja diferentseeruvus.** Analoogiliselt kahe muutuja funktsioonidega defineeritakse $m$ muutuja funktsiooni $w = f(x_1,...,x_m)$ osatuletised $\frac{\partial f}{\partial x_1},...,\frac{\partial f}{\partial x_m}$. Öeldakse, et $f$ on punktis $\mathbf{A} = (a_1,...,a_m)$ diferentseeruv, kui kehtib võrdus

$$\Delta f := f(a_1+h_1,...,a_m+h_m) - f(a_1,...,a_m) = \frac{\partial f(\mathbf{A})}{\partial x_1}h_1 + ... + \frac{\partial f(\mathbf{A})}{\partial x_m}h_m + \alpha,$$

kus $\lim_{(h_1,...,h_m)\to\mathbf{0}} \frac{\alpha}{\sqrt{h_1^2+...+h_2^2}} = 0$. Avaldist

$$d_{\mathbf{A}}f := \frac{\partial f(\mathbf{A})}{\partial x_1}h_1 + ... + \frac{\partial f(\mathbf{A})}{\partial x_m}h_m =: \frac{\partial f(\mathbf{A})}{\partial x_1}dx_1 + ... + \frac{\partial f(\mathbf{A})}{\partial x_m}dx_m$$

nimetatakse funktsiooni $f$ täisdiferentsiaaliks punktis $\mathbf{A}$.

**Definitsioon.** Kui funktsioonil $f : D \to \mathbb{R}$, kus $D \subset \mathbb{R}^m$ on lahtine piirkond, on hulgas $D$ pidevad osatuletised $\frac{\partial f}{\partial x_1},...,\frac{\partial f}{\partial x_m}$, siis öeldakse, et funktsioon $f$ on piirkonnas $D$ *pidevalt diferentseeruv.*

## 3.3 Liitfunktsiooni diferentseerimine

Olgu $w = f(u,v)$ kahe muutuja funktsioon määramispiirkonnaga $Q$, kus argumendid $u,v$ on omakorda kahe muutuja funktsioonid

$$u = \varphi_1(x,y), \ v = \varphi_2(x,y).$$

Eeldame, et funktsioonidel $\varphi_1$ ja $\varphi_2$ on ühine määramispiirkond $D$ ning $(\varphi_1(\mathbf{X}), \varphi_2(\mathbf{X})) \in Q$ iga $\mathbf{X} \in D$ korral. Defineerime hulgas $D$ liitfunktsiooni $F$ seosega

$$F(x,y) := f(\varphi_1(\mathbf{X}), \varphi_2(\mathbf{X})) = f(\varphi_1(x,y), \varphi_2(x,y)). \tag{3.8}$$

**Lause 3.4** *Kui funktsioonidel $\varphi_1$ ja $\varphi_2$ on punktis $\mathbf{A} = (a, b)$ osatuletised $\frac{\partial\varphi_1(\mathbf{A})}{\partial x}$ ja $\frac{\partial\varphi_2(\mathbf{A})}{\partial x}$ ning funktsioon $f$ on punktis $\mathbf{B} := (\varphi_1(\mathbf{A}), \varphi_2(\mathbf{A}))$ diferentseeruv, siis liitfunktsioonil $F$ on punktis $\mathbf{A}$ osatuletis*

$$\frac{\partial F(\mathbf{A})}{\partial x} = \frac{\partial f(\mathbf{B})}{\partial u}\frac{\partial\varphi_1(\mathbf{A})}{\partial x} + \frac{\partial f(\mathbf{B})}{\partial v}\frac{\partial\varphi_2(\mathbf{A})}{\partial x}.$$

**Tõestus.** Olgu $h_1$ argumendi $x$ muut punktis $\mathbf{A}$. Tähistame

$$\Delta u := \varphi_1(a + h_1, b) - \varphi_1(a, b), \quad \Delta v := \varphi_2(a + h_1, b) - \varphi_2(a, b)$$

ja $\Delta F := F(a + h_1, b) - F(a, b)$. Seejuures

$$\begin{aligned}\Delta F &= f(\varphi_1(a + h_1, b), \varphi_2(a + h_1, b)) - f(\varphi_1(a, b), \varphi_2(a, b)) \\ &= f(b_1 + \Delta u, b_2 + \Delta v) - f(b_1, b_2) = \Delta f,\end{aligned}$$

kus $\mathbf{B} := (b_1, b_2)$. Paneme tähele, et

$$\lim_{h_1\to 0} \Delta u = \lim_{h_1\to 0} \Delta v = 0 \tag{3.9}$$

(põhjendada!)✠. Kuna funktsioon $f$ on punktis $\mathbf{B}$ diferentseeruv, siis (vrd. (3.5))

$$\Delta F = \Delta f = \frac{\partial f(B)}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial f(B)}{\partial v}\Delta v + \alpha,$$

kus

$$\lim_{(\Delta u, \Delta v)\to \mathbf{0}} \frac{\alpha}{\sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2}} = 0. \tag{3.10}$$

Seega

$$\frac{\Delta F}{h_1} = \frac{\partial f(\mathbf{B})}{\partial u}\frac{\Delta u}{h_1} + \frac{\partial f(\mathbf{B})}{\partial v}\frac{\Delta v}{h_1} + \frac{\alpha}{h_1} \tag{3.11}$$

ning kuna eksisteerib

$$\begin{aligned}\lim_{h_1\to 0}\frac{\sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2}}{h_1} &= \lim_{h_1\to 0}\sqrt{\left(\frac{\Delta u}{h_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta v}{h_1}\right)^2} = \sqrt{\left(\lim_{h_1\to 0}\frac{\Delta u}{h_1}\right)^2 + \left(\lim_{h_1\to 0}\frac{\Delta v}{h_1}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi_1(\mathbf{A})}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_2(\mathbf{A})}{\partial x}\right)^2},\end{aligned}$$

siis (eeldusel, et $\sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2} \neq 0$) tingimustest (3.9) ja (3.10) järeldub

$$\begin{aligned}\lim_{h_1\to 0}\frac{\alpha}{h_1} &= \lim_{h_1\to 0}\frac{\alpha}{\sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2}}\frac{\sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2}}{h_1} = \lim_{h_1\to 0}\frac{\alpha}{\sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2}}\lim_{h_1\to 0}\frac{\sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2}}{h_1} \\ &= \lim_{(\Delta u, \Delta v)\to \mathbf{0}}\frac{\alpha}{\sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2}}\lim_{h_1\to 0}\frac{\sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2}}{h_1} = 0\end{aligned}$$

(selgitada!)✠. Võrdusest (3.11) saame

$$\begin{aligned}\frac{\partial F(\mathbf{A})}{\partial x} &= \lim_{h_1\to 0}\frac{\Delta F}{h_1} = \frac{\partial f(\mathbf{B})}{\partial u}\lim_{h_1\to 0}\frac{\Delta u}{h_1} + \frac{\partial f(\mathbf{B})}{\partial v}\lim_{h_1\to 0}\frac{\Delta v}{h_1} \\ &= \frac{\partial f(\mathbf{B})}{\partial u}\frac{\partial\varphi_1(\mathbf{A})}{\partial x} + \frac{\partial f(\mathbf{B})}{\partial v}\frac{\partial\varphi_2(\mathbf{A})}{\partial x}.\end{aligned}$$

Lause on tõestatud. ■

Analoogiliselt veendutakse, et kehtib valem

$$\frac{\partial F(\mathbf{A})}{\partial y}=\frac{\partial f(\mathbf{B})}{\partial u}\frac{\partial \varphi_1(\mathbf{A})}{\partial y}+\frac{\partial f(\mathbf{B})}{\partial v}\frac{\partial \varphi_2(\mathbf{A})}{\partial y},$$

kui on olemas osatuletised $\frac{\partial \varphi_1(\mathbf{A})}{\partial y}$ ja $\frac{\partial \varphi_2(\mathbf{A})}{\partial y}$ ning funktsioon $f$ on punktis $\mathbf{B}$ diferentseeruv.

**Lause 3.5** *Kui funktsioonid $\varphi_1$ ja $\varphi_2$ on punktis $\mathbf{A}$ diferentseeruvad ning funktsioon $f$ on diferentseeruv punktis $\mathbf{B}=(\varphi_1(\mathbf{A}),\varphi_2(\mathbf{A}))$, siis liitfunktsioon $F$ on punktis $\mathbf{A}$ diferentseeruv.*

**Tõestus.** Olgu $h_1$ ja $h_2$ funktsiooni $F$ argumentide muudud punktis $\mathbf{A}=(a,b)$. Meie eesmärk on veenduda, et

$$\begin{aligned}\Delta F &:= F(a+h_1,b+h_2)-F(a,b)\\ &=\frac{\partial F(\mathbf{A})}{\partial x}h_1+\frac{\partial F(\mathbf{A})}{\partial y}h_2+\beta,\end{aligned}$$

kus $\lim_{(h_1,h_2)\to\mathbf{0}}\frac{\beta}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=0$. Tähistame (erinevalt eelmise tõestuse tähistustest!)

$$\Delta u:=\varphi_1(a+h_1,b+h_2)-\varphi_1(a,b),\ \Delta v:=\varphi_2(a+h_1,b+h_2)-\varphi_2(a,b).$$

Funktsioonide $\varphi_1$ ja $\varphi_2$ diferentseeruvusest tulenevad seosed

$$\Delta u=\frac{\partial \varphi_1(\mathbf{A})}{\partial x}h_1+\frac{\partial \varphi_1(\mathbf{A})}{\partial y}h_2+\alpha_1,\ \Delta v=\frac{\partial \varphi_2(\mathbf{A})}{\partial x}h_1+\frac{\partial \varphi_2(\mathbf{A})}{\partial y}h_2+\alpha_2, \tag{3.12}$$

kus

$$\lim_{(h_1,h_2)\to\mathbf{0}}\frac{\alpha_1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=0,\quad \lim_{(h_1,h_2)\to\mathbf{0}}\frac{\alpha_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=0. \tag{3.13}$$

Punktis $\mathbf{B}$ võtame funktsiooni $f$ argumentide muutudeks $\Delta u$ ja $\Delta v$, tänu eeldusele diferentseeruvusest saame

$$\Delta F=\Delta f=\frac{\partial f(\mathbf{B})}{\partial u}\Delta u+\frac{\partial f(\mathbf{B})}{\partial v}\Delta v+\alpha, \tag{3.14}$$

kusjuures

$$\lim_{(\Delta u,\Delta v)\to\mathbf{0}}\frac{\alpha}{\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}}=0. \tag{3.15}$$

Asendame $\Delta u$ ja $\Delta v$ seostest (3.12) valemisse (3.14):

$$\begin{aligned}\Delta F&=\frac{\partial f(\mathbf{B})}{\partial u}\left(\frac{\partial \varphi_1(\mathbf{A})}{\partial x}h_1+\frac{\partial \varphi_1(\mathbf{A})}{\partial y}h_2+\alpha_1\right)+\frac{\partial f(\mathbf{B})}{\partial v}\left(\frac{\partial \varphi_2(\mathbf{A})}{\partial x}h_1+\frac{\partial \varphi_2(\mathbf{A})}{\partial y}h_2+\alpha_2\right)+\alpha\\ &=\left(\frac{\partial f(\mathbf{B})}{\partial u}\frac{\partial \varphi_1(\mathbf{A})}{\partial x}+\frac{\partial f(\mathbf{B})}{\partial v}\frac{\partial \varphi_2(\mathbf{A})}{\partial x}\right)h_1+\left(\frac{\partial f(\mathbf{B})}{\partial u}\frac{\partial \varphi_1(\mathbf{A})}{\partial y}+\frac{\partial f(\mathbf{B})}{\partial v}\frac{\partial \varphi_2(\mathbf{A})}{\partial y}\right)h_2+\beta\\ &=\frac{\partial F(\mathbf{A})}{\partial x}h_1+\frac{\partial F(\mathbf{A})}{\partial y}h_2+\beta,\end{aligned}$$

kus

$$\beta := \frac{\partial f(\mathbf{B})}{\partial u}\alpha_1 + \frac{\partial f(\mathbf{B})}{\partial v}\alpha_2 + \alpha.$$

Väite tõestuseks on vaja veenduda, et

$$\lim_{(h_1,h_2)\to\mathbf{0}} \frac{\beta}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0.$$

Kõigepealt paneme tähele, et (vrd. (3.12))

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\Delta u}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\right| &\le \left|\frac{\partial \varphi_1(\mathbf{A})}{\partial x}\right| \frac{|h_1|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} + \left|\frac{\partial \varphi_1(A)}{\partial y}\right| \frac{|h_2|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} + \frac{|\alpha_1|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \\
&\le \left|\frac{\partial \varphi_1(\mathbf{A})}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial \varphi_1(\mathbf{A})}{\partial y}\right| + \frac{|\alpha_1|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}, \\
\left|\frac{\Delta v}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\right| &\le \left|\frac{\partial \varphi_2(\mathbf{A})}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial \varphi_2(\mathbf{A})}{\partial y}\right| + \frac{|\alpha_2|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}},
\end{aligned}$$

seega seose (3.13) põhjal on $\frac{\Delta u}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$ ja $\frac{\Delta v}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$ protsessis $(h_1, h_2) \to \mathbf{0}$ tõkestatud (selgitada!)✠. Tähendab, ka $\frac{\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$ on selles protsessis tõkestatud, järelikult

$$\lim_{(h_1,h_2)\to\mathbf{0}} \frac{\alpha}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{(h_1,h_2)\to\mathbf{0}} \frac{\alpha}{\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}} \frac{\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0$$

tingimuse (3.15) tõttu. Seepärast (vrd. (3.13))

$$\begin{aligned}
&\lim_{(h_1,h_2)\to\mathbf{0}} \frac{\beta}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \\
&= \frac{\partial f(\mathbf{B})}{\partial u} \lim_{(h_1,h_2)\to\mathbf{0}} \frac{\alpha_1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} + \frac{\partial f(\mathbf{B})}{\partial v} \lim_{(h_1,h_2)\to\mathbf{0}} \frac{\alpha_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} + \lim_{(h_1,h_2)\to\mathbf{0}} \frac{\alpha}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0.
\end{aligned}$$

Lause on tõestatud. ■

**Järeldus 3.6** *Kui ühe muutuja funktsioonid $u = \varphi_1(x)$ ja $v = \varphi_2(x)$ on punktis $a \in \mathbb{R}$ diferentseeruvad ning kahe muutuja funktsioon $w = f(u, v)$ on diferentseeruv punktis $\mathbf{B} := (\varphi_1(a), \varphi_2(a))$, siis seosega $F(x) := f(\varphi_1(x), \varphi_2(x))$ määratud ühe muutuja funktsioon $F$ on diferentseeruv punktis $a$. Seejuures*

$$F'(a) = \frac{\partial f(\mathbf{B})}{\partial u}\varphi_1'(a) + \frac{\partial f(\mathbf{B})}{\partial v}\varphi_2'(a). \tag{3.16}$$

**Lause 3.7** ***(keskväärtusteoreem).*** *Olgu funktsioon $f$ pidev punktides $\mathbf{A} = (a, b)$ ja $\mathbf{A}' = (a', b')$ ning diferentseeruv neid punkte ühendaval sirglõigul $[\mathbf{A}, \mathbf{A}']$. Siis leidub selline punkt $\mathbf{C} = (c, d) \in [\mathbf{A}, \mathbf{A}']$, et*

$$f(\mathbf{A}') - f(\mathbf{A}) = \frac{\partial f(\mathbf{C})}{\partial x}(a' - a) + \frac{\partial f(\mathbf{C})}{\partial y}(b' - b) = (d_{\mathbf{C}} f)(\mathbf{A}' - \mathbf{A}).$$

**Tõestus.** Lõik $[\mathbf{A}, \mathbf{A}']$ on esitatav võrrandiga $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t) = t\mathbf{A}' + (1-t)\mathbf{A}$ $(0 \le t \le 1)$ (vt. pt. 1). Moodustame ühe muutuja liitfunktsiooni $F(t) := f(\mathbf{X}(t))$, see on lõigus $[0,1]$ pidev ja vahemikus $(0,1)$ diferentseeruv. Kuna

$$x(t) = ta' + (1-t)a \text{ ja } y(t) = tb' + (1-t)b,$$

siis valemi (3.16) kohaselt

$$F'(t) = \frac{\partial f(\mathbf{X}(t))}{\partial x}(a' - a) + \frac{\partial f(\mathbf{X}(t))}{\partial y}(b' - b) \quad (0 < t < 1).$$

Ühe muutuja funktsiooni keskväärtusteoreemi põhjal leidub $t_0 \in (0,1)$ omadusega $F'(t_0) = F(1) - F(0)$. Võtame $\mathbf{C} := \mathbf{X}(t_0)$, siis

$$\begin{aligned} f(\mathbf{A}') - f(\mathbf{A}) &= F(1) - F(0) = F'(t_0) \\ &= \frac{\partial f(\mathbf{C})}{\partial x}(a' - a) + \frac{\partial f(\mathbf{C})}{\partial y}(b' - b). \end{aligned}$$

Lause on tõestatud. ■

**Liitfunktsiooni täisdiferentsiaal.** Vaatleme (nii nagu käesoleva punkti alguses) seosega (3.8) määratud kahe muutuja liitfunktsiooni $F$. Eeldame, et funktsioonid $\varphi_1$ ja $\varphi_2$ on punktis $\mathbf{A} \in D$ ning funktsioon $f$ punktis $\mathbf{B} := (\varphi_1(\mathbf{A}), \varphi_2(\mathbf{A}))$ diferentseeruvad. Lause 3.5 kohaselt eksisteerib

$$\begin{aligned} d_{\mathbf{A}}F &= \frac{\partial F(\mathbf{A})}{\partial x}dx + \frac{\partial F(\mathbf{A})}{\partial y}dy \\ &= \left(\frac{\partial f(\mathbf{B})}{\partial u}\frac{\partial \varphi_1(\mathbf{A})}{\partial x} + \frac{\partial f(\mathbf{B})}{\partial v}\frac{\partial \varphi_2(\mathbf{A})}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial f(\mathbf{B})}{\partial u}\frac{\partial \varphi_1(\mathbf{A})}{\partial y} + \frac{\partial f(\mathbf{B})}{\partial v}\frac{\partial \varphi_2(\mathbf{A})}{\partial y}\right)dy \\ &= \frac{\partial f(\mathbf{B})}{\partial u}\left(\frac{\partial \varphi_1(\mathbf{A})}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi_1(\mathbf{A})}{\partial y}dy\right) + \frac{\partial f(\mathbf{B})}{\partial v}\left(\frac{\partial \varphi_2(\mathbf{A})}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi_2(\mathbf{A})}{\partial y}dy\right) \\ &= \frac{\partial f(\mathbf{B})}{\partial u}d\varphi_1(\mathbf{A}) + \frac{\partial f(\mathbf{B})}{\partial v}d\varphi_2(\mathbf{A}) \end{aligned}$$

ehk lühemalt

$$dF = \frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv. \tag{3.17}$$

See on sama valem, mille me saaksime funktsiooni $f$ täisdiferentsiaali jaoks juhul, kui $u$ ja $v$ oleksid sõltumatud muutujad. Seetõttu öeldakse, et **täisdiferentsiaali kuju on invariantne muutujate vahetuse suhtes.**

**Näide 4.** Kuna $\Delta f = df + \alpha$, kusjuures $\alpha$ on protsessis $(h_1, h_2) \to \mathbf{0}$ kõrgemat järku lõpmatu väike suurus kui $\sqrt{h_1^2 + h_2^2}$, siis saab **täisdiferentsiaali abil arvutada funktsiooni ligikaudseid väärtusi.** Olgu vaja arvutada $\sqrt{1{,}02^3 + 1{,}97^3}$. Vaatleme funktsiooni $f(x,y) := \sqrt{x^3 + y^3}$, punkt $\mathbf{A} := (1,2)$ on tema määramispiirkonna sisepunkt. Olgu $h_1 :=$

$0,02$, $h_2 := -0,03$, siis

$$\begin{aligned}\sqrt{1,02^3 + 1,97^3} &= f(a+h_1, b+h_2) = f(a,b) + \Delta f \\ &\approx \sqrt{1^3+2^3} + \frac{\partial f(\mathbf{A})}{\partial x} h_1 + \frac{\partial f(\mathbf{A})}{\partial y} h_2 \\ &= 3 + \left[\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+y^3}} 0,02 - \frac{3y^2}{2\sqrt{x^3+y^3}} 0,03\right]_{\substack{x=1\\y=2}} = 2,95\end{aligned}$$

Sõnastame mõned eespool tõestatud väited ka **üldisel juhul.** Olgu $w = f(u_1, ..., u_l)$ hulgas $Q \subset \mathbb{R}^l$ määratud $l$ muutuja funktsioon, kusjuures $u_k = \varphi_k(x_1, ..., x_m)$ on iga $k = 1, ..., l$ korral määratud hulgas $D \subset \mathbb{R}^m$ ja $(\varphi_1(x_1, ..., x_m), ..., \varphi_l(x_1, ..., x_m)) \in Q$ iga $(x_1, ..., x_m) \in D$ korral.

$1^0$. *Kui eksisteerivad osatuletised* $\frac{\partial \varphi_k(\mathbf{A})}{\partial x_i}$ $(k = 1, ..., l)$ *ja* $f$ *on punktis* $\mathbf{B} := (\varphi_1(\mathbf{A}), ..., \varphi_l(\mathbf{A}))$ *diferentseeruv, siis kehtib valem*

$$\frac{\partial F(\mathbf{A})}{\partial x_i} = \frac{\partial f(\mathbf{B})}{\partial u_1}\frac{\partial \varphi_1(\mathbf{A})}{\partial x_i} + .... + \frac{\partial f(\mathbf{B})}{\partial u_l}\frac{\partial \varphi_l(\mathbf{A})}{\partial x_i}.$$

$2^0$. *Kui funktsioonid* $\varphi_k$ *on diferentseeruvad punktis* $\mathbf{A}$ *ja funktsioon* $f$ *on diferentseeruv punktis* $\mathbf{B}$*, siis funktsioon* $F$ *on samuti punktis* $\mathbf{A}$ *diferentseeruv.*

## 3.4 Tuletis antud suunas. Gradient

Olgu kolme muutuja funktsioon $w = f(x,y,z)$ määratud punkti $\mathbf{A} = (a,b,c)$ mingis ümbruses

$$U_\delta(\mathbf{A}) = \left\{\mathbf{X} = (x,y,z) \mid \|\mathbf{X} - \mathbf{A}\| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} < \delta\right\}$$

ja olgu $\mathbf{A}_1$ mingi fikseeritud punkt selles ümbruses. Tõmbame läbi punktide $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{A}_1$ sirge, millel loeme positiivse suunaks vektori $\overrightarrow{\mathbf{AA}_1} =: \overrightarrow{\mathbf{l}}$ suuna. Fikseerime sellel sirgel mingi punkti $\mathbf{X}$, tähistame

$$|\mathbf{AX}| := \begin{cases} \|\mathbf{X} - \mathbf{A}\|, & \text{kui } \overrightarrow{\mathbf{AX}} \text{ suund ühtib vektori } \overrightarrow{\mathbf{l}} \text{ suunaga,} \\ -\|\mathbf{X} - \mathbf{A}\| & \text{vastupidisel juhul.}\end{cases}$$

**Definitsioon.** Kui eksiteerib piirväärtus

$$\lim_{\mathbf{X}\to A} \frac{f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{A})}{|\mathbf{AX}|} =: \frac{\partial f(\mathbf{A})}{\partial \mathbf{l}},$$

siis seda nimetatakse funktsiooni $f$ *tuletiseks punktis* $\mathbf{A}$ *suunas* $\overrightarrow{\mathbf{l}}$.

Kui vektori $\overrightarrow{\mathbf{l}}$ suund ühtib $x$-telje ($y$-telje, $z$-telje) suunaga, siis tuletis selles suunas on osatuletis muutuja $x$ (muutuja $y$, muutuja $z$) järgi (põhjendada!)✠.

Tuletise $\frac{\partial f(\mathbf{A})}{\partial \mathbf{l}}$ arvutamiseks tähistame tähtedega $\alpha, \beta$ ja $\gamma$ nurgad, mille vektor $\overrightarrow{\mathbf{l}}$ moodustab vastavalt $x$-, $y$- ja $z$-teljega. Tähistame veel $t := |\mathbf{AX}|$. Pidades silmas, et $x - a$,

$y-b$ ja $z-c$ on vektori $\overrightarrow{\mathbf{AX}}$ projektsioon vastavalt $x$-, $y$- ja $z$-teljele (kontrollida!)✠, saame võrdused

$$x-a=t\cos\alpha,\ y-b=t\cos\beta,\ z-c=t\cos\gamma.$$

Me saame funktsiooni $f$ esitada ühe muutuja funktsioonina seosega

$$F(t):=f(a+t\cos\alpha,b+t\cos\beta,c+t\cos\gamma),$$

seejuures

$$F'(0)=\lim_{t\to 0}\frac{F(t)-F(0)}{t}=\lim_{\mathbf{X}\to\mathbf{A}}\frac{f(\mathbf{X})-f(\mathbf{A})}{|\mathbf{AX}|}=\frac{\partial f(\mathbf{A})}{\partial\mathbf{l}}.$$

Teisalt on $F$ liitfunktsioon, selle diferentseerimise reeglite kohaselt

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(\mathbf{A})}{\partial l}&=F'(0)=\frac{\partial f(\mathbf{A})}{\partial x}x'(t)+\frac{\partial f(\mathbf{A})}{\partial y}y'(t)+\frac{\partial f(\mathbf{A})}{\partial z}z'(t) \\ &=\frac{\partial f(\mathbf{A})}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f(\mathbf{A})}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f(\mathbf{A})}{\partial z}\cos\gamma.\end{aligned}\tag{3.18}$$

Märgime $\overrightarrow{\mathbf{e}}:=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$, see on vektori $\overrightarrow{\mathbf{l}}$ suunaline ühikvektor.

**Definitsioon.** Kolme muutuja funktsiooni $w=f(x,y,z)$ *gradiendiks* punktis $\mathbf{A}=(a,b,c)$ nimetatakse kolmemõõtmelist vektorit $\left(\frac{\partial f(\mathbf{A})}{\partial x},\frac{\partial f(\mathbf{A})}{\partial y},\frac{\partial f(\mathbf{A})}{\partial z}\right)=:\overrightarrow{\mathbf{grad}}\,f(\mathbf{A})$.

Võrdusest (3.18) saame

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(\mathbf{A})}{\partial\mathbf{l}}&=\left(\overrightarrow{\mathbf{grad}}\,f(\mathbf{A}),\overrightarrow{\mathbf{e}}\right)\ \text{(skalaarkorrutis)}\\ &=\left|\overrightarrow{\mathbf{grad}}\,f(\mathbf{A})\right|\left|\overrightarrow{\mathbf{e}}\right|\cos\varphi,\end{aligned}$$

kus $\varphi$ on nurk vektorite $\overrightarrow{\mathbf{grad}}\,f(\mathbf{A})$ ja $\overrightarrow{\mathbf{e}}$ vahel. Niisiis,
1) tuletise $\frac{\partial f(\mathbf{A})}{\partial\mathbf{l}}$ väärtus on maksimaalne parajasti siis, kui $\varphi=0$, s.t. kui vektori $\overrightarrow{\mathbf{l}}$ suund ühtib gradiendi suunaga,
2) juhul $\overrightarrow{\mathbf{l}}=\overrightarrow{\mathbf{grad}}\,f(\mathbf{A})$ kehtib võrdus $\frac{\partial f(\mathbf{A})}{\partial\mathbf{l}}=\left|\overrightarrow{\mathbf{grad}}f(\mathbf{A})\right|$.
Teiste sõnadega, $\overrightarrow{\mathbf{grad}}\,f(\mathbf{A})$ *määrab suuna, mille suhtes punktis* $\mathbf{A}$ *võetud tuletis on maksimaalne, seejuures see maksimaalne väärtus on gradiendi pikkus.*

# 4 Kõrgemat järku osatuletised ja täisdiferentsiaalid. Taylori valem

## 4.1 Segaosatuletised

Kui kahe muutuja funktsioonil $f$ on määramispiirkonna $D$ igas punktis $\mathbf{X} = (x, y)$ osatuletised $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ ja $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$, siis funktsioonid $\frac{\partial f}{\partial x}$ ja $\frac{\partial f}{\partial y}$ on määratud hulgas $D$ ning neil kui kahe muutuja funktsioonidel võivad samuti olla muutjate $x$ ja $y$ järgi osatuletised

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) =: \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} =: f_{x^2}, \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) =: \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} =: f_{xy},$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) =: \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} =: f_{yx}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) =: \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} =: f_{y^2}.$$

Saadud osatuletisi nimetatakse funktsiooni $f$ *teist järku osatuletisteks*, seejuures $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ ja $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ kannavad nimetust *segaosatuletised*.

**Lause 4.1** ***(Schwartzi teoreem segaosatuletistest).*** *Olgu $\mathbf{A} = (a, b)$ kahe muutuja funktsiooni $f$ määramispiirkonna $D$ sisepunkt. Eeldame, et funktsioon $f$ ja tema osatuletised $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ ja $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ on määratud punkti $\mathbf{A}$ mingis ümbruses. Kui segaosatuletised $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ ja $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ on punktis $\mathbf{A}$ pidevad, siis on nad võrdsed, s.t.*

$$\frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial y \partial x}.$$

**Tõestus.** Eeldame, et segaosatuletised $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ ja $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ on punktis $\mathbf{A}$ pidevad, ja näitame, et nad on selles punktis võrdsed. Anname muutujatele $x$ ja $y$ punktis $\mathbf{A}$ muudud vastavalt $h_1$ ja $h_2$ ning vaatleme avaldist

$$\Delta := f(a + h_1, b + h_2) - f(a, b + h_2) - f(a + h_1, b) + f(a, b).$$

Kui tähistada

$$F(x) := f(x, b + h_2) - f(x, b) \text{ ja } G(y) := f(a + h_1, y) - f(a, y),$$

võime kirjutada

$$\Delta = F(a + h_1) - F(a) = G(b + h_2) - G(b).$$

Olgu $U_\delta(\mathbf{A}) \subset D$ punkti $\mathbf{A}$ selline ümbrus, milles eksisteerivad osatuletised $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ ja $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. Arvestades osatuletise definitsiooni (vt. valemid (3.1) ja (3.2)), saame Lagrange'i keskväärtusteoreemi kohaselt leida niisugused arvud $\theta_1, \theta_2 \in (0, 1)$, et

$$\Delta = F'(a + \theta_1 h_1) h_1 = G'(b + \theta_2 h_2) h_2$$

ehk üksikasjalikumalt lahti kirjutatuna

$$\Delta = \left(\frac{\partial f(a + \theta_1 h_1, b + h_2)}{\partial x} - \frac{\partial f(a + \theta_1 h_1, b)}{\partial x}\right) h_1 \tag{4.1}$$
$$= \left(\frac{\partial f(a + h_1, b + \theta_2 h_2)}{\partial y} - \frac{\partial f(a, b + \theta_2 h_2)}{\partial y}\right) h_2.$$

[Meenutame, et Lagrange'i keskväärtusteoreemi järgi kehtib (mingi sobivalt valitud $\theta \in (0,1)$ puhul) võrdus $\varphi(a+h)-\varphi(a) = \varphi'(a+\theta h)h$, kui ühe muutuja funktsioon $\varphi$ on lõigus $[a, a+h]$ pidev ning vahemikus $(a, a+h)$ diferentseeruv.] Rakendame seostele (4.1) veel kord Lagrange'i valemit, saame

$$\Delta = \frac{\partial^2 f(a+\theta_1 h_1, b+\theta_2' h_2)}{\partial y \partial x} h_1 h_2 = \frac{\partial^2 f(a+\theta_1' h_1, b+\theta_2 h_2)}{\partial x \partial y} h_1 h_2,$$

kus $\theta_1', \theta_2' \in (0,1)$. Järelikult

$$\frac{\partial^2 f(a+\theta_1 h_1, b+\theta_2' h_2)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f(a+\theta_1' h_1, b+\theta_2 h_2)}{\partial x \partial y}.$$

Kuna mõlemad segaosatuletised selles seoses on pidevad, siis

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x \partial y} &= \lim_{(h_1,h_2)\to\mathbf{0}} \frac{\partial^2 f(a+\theta_1 h_1, b+\theta_2' h_2)}{\partial x \partial y} = \lim_{(h_1,h_2)\to\mathbf{0}} \frac{\partial^2 f(a+\theta_1' h_1, b+\theta_2 h_2)}{\partial y \partial x} \\ &= \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y \partial x}.\end{aligned}$$

Lause on tõestatud. ■

**Lause 4.2** *Olgu kahe muutuja funktsioon $f$ ja osatuletised $\frac{\partial f}{\partial x}$ ja $\frac{\partial f}{\partial y}$ määratud punkti $\mathbf{A} = (a,b)$ mingis ümbruses. Kui mõlemad funktsioonid $\frac{\partial f}{\partial x}$ ja $\frac{\partial f}{\partial y}$ on punktis $\mathbf{A}$ diferentseeruvad, siis*

$$\frac{\partial^2 f(\mathbf{A})}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(\mathbf{A})}{\partial y \partial x}.$$

**Tõestus.** Olgu $h_1$ ja $h_2$ funktsiooni $f$ argumentide muudud punktis $\mathbf{A} = (a,b)$, tähistame

$$\Delta := f(a+h_1, b+h_2) - f(a, b+h_2) - f(a+h_1, b) + f(a,b).$$

Lagrange'i keskväärtusvalemi abil saame (vrd. (6.10))

$$\begin{aligned}\Delta &= \left(\frac{\partial f(a+\theta_1 h_1, b+h_2)}{\partial x} - \frac{\partial f(a+\theta_1 h_1, b)}{\partial x}\right) h_1 \\ &= \left(\frac{\partial f(a+h_1, b+\theta_2 h_2)}{\partial y} - \frac{\partial f(a, b+\theta_2 h_2)}{\partial y}\right) h_2, \qquad (4.2)\end{aligned}$$

kus $\theta_1, \theta_2 \in (0,1)$. Võtame $h_1 = h_2 =: t$, sel juhul

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial f(a+\theta_1 t, b+t)}{\partial x} - \frac{\partial f(a,b)}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial f(a+\theta_1 t, b)}{\partial x} - \frac{\partial f(a,b)}{\partial x}\right) \\ &= \left(\frac{\partial f(a+t, b+\theta_2 t)}{\partial y} - \frac{\partial f(a,b)}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial f(a, b+\theta_2 t)}{\partial y} - \frac{\partial f(a,b)}{\partial y}\right).\end{aligned}$$

Kasutame nüüd asjaolu, et osatuletised on diferentseeruvad punktis **A**, sellest tulenevad seosed

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(a+\theta_1 t, b+t)}{\partial x} - \frac{\partial f(a,b)}{\partial x} &= \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2}\theta_1 t + \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y \partial x} t + \alpha_1, \\
\frac{\partial f(a+\theta_1 t, b)}{\partial x} - \frac{\partial f(a,b)}{\partial x} &= \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2}\theta_1 t + \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y \partial x} \cdot 0 + \alpha_2, \\
\frac{\partial f(a+t, b+\theta_2 t)}{\partial y} - \frac{\partial f(a,b)}{\partial y} &= \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x \partial y} t + \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y^2}\theta_2 t + \alpha_3, \\
\frac{\partial f(a, b+\theta_2 t)}{\partial y} - \frac{\partial f(a,b)}{\partial y} &= \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x \partial y} \cdot 0 + \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y^2}\theta_2 t + \alpha_4,
\end{aligned}$$

kus $\alpha_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ on lõpmata väikesed suurused vastavalt omadusega

$$\begin{aligned}
0 &\leftarrow \frac{\alpha_1}{\sqrt{\theta_1^2 t^2 + t^2}} = \frac{\alpha_1}{|t|}\frac{1}{\sqrt{\theta_1^2 + 1}}, \text{ s.t. } \lim_{t\to 0}\frac{\alpha_1}{|t|} = 0, \\
0 &\leftarrow \frac{\alpha_2}{\sqrt{\theta_1^2 t^2 + 0}} = \frac{\alpha_2}{|t|}\frac{1}{\theta_1}, \text{ s.t. } \lim_{t\to 0}\frac{\alpha_2}{|t|} = 0, \\
0 &\leftarrow \frac{\alpha_3}{\sqrt{t^2 + \theta_2^2 t^2}} = \frac{\alpha_3}{|t|}\frac{1}{\sqrt{1 + \theta_2^2}}, \text{ s.t. } \lim_{t\to 0}\frac{\alpha_3}{|t|} = 0, \\
0 &\leftarrow \frac{\alpha_2}{\sqrt{0 + \theta_2^2 t^2}} = \frac{\alpha_2}{|t|}\frac{1}{\theta_2}, \text{ s.t. } \lim_{t\to 0}\frac{\alpha_2}{|t|} = 0.
\end{aligned}$$

Võrduse (4.2) saab nüüd esitada kujul

$$\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x \partial y} t + \alpha_1 - \alpha_2 = \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y \partial x} t + \alpha_3 - \alpha_4.$$

Protsessis $t \longrightarrow 0$ saamegi võrduse $\frac{\partial^2 f(\mathbf{A})}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(\mathbf{A})}{\partial y \partial x}$. ■

Tõestatud lause abil saame järgmise üldisema tulemuse.

**Lause 4.3** *Olgu $m$ muutuja funktsioonil $w = f(x_1, ..., x_m)$ punktis $\mathbf{A} = (a_1, ..., a_m)$ osatuletised, mis on $n$ korda diferentseeruvad, s.t. kõik osatuletised kuni $n-1$ järguni on punktis* **A** *diferentseeruvad. Siis selles punktis võetud $n$-dat järku segaosatuletis ei sõltu diferentseerimise järjekorrast.*

**Tõestus.** Piisab näidata, et kehtib võrdus

$$\frac{\partial^n f(\mathbf{A})}{\partial x_{i_n} ... \partial x_{i_{k+1}} \partial x_{i_k} ... \partial x_{i_1}} = \frac{\partial^n f(\mathbf{A})}{\partial x_{i_n} ... \partial x_{i_k} \partial x_{i_{k+1}} ... \partial x_{i_1}}, \tag{4.3}$$

s.t., et tohib vahetada kahe järjestikuse diferentseerimise järjekorda. Vaatleme funktsiooni

$$\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_{k-1}} ... \partial x_{i_1}},$$

see on kaks korda diferentseeruv, algul muutuja $x_{i_k}$ ning siis $x_{i_{k+1}}$ järgi. Kui lugeda ülejäänud muutujad fikseerituks, siis saame rakendada lauset 4.2, mis annab võrduse $\frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{i_{k+1}} \partial x_{i_k} ... \partial x_{i_1}} = \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k+1}} ... \partial x_{i_1}}$. Sellest omakorda saame seose (4.3) . ■

## 4.2 Kõrgemat järku täisdiferentsiaalid

Eeldame, et kahe muutuja funktsioon $w = f(x, y)$ on oma määramispiirkonnas $D$ diferentseeruv, siis igas punktis $\mathbf{X} \in D$ eksisteerib täisdiferentsiaal

$$d_{\mathbf{X}} f = \frac{\partial f(\mathbf{X})}{\partial x} dx + \frac{\partial f(\mathbf{X})}{\partial y} dy.$$

**Osatuletised $\frac{\partial f}{\partial x}$ ja $\frac{\partial f}{\partial y}$ on muutujate $x$ ja $y$ funktsioonid, muudud $h_1 = dx$ ja $h_2 = dy$ võivad olla suvalised.** *Kui nad fikseerida, saame täisdiferentsiaali vaadelda samuti muutujate $x$ ja $y$ funktsioonina*, tähistame selle $df$ ehk $df(\mathbf{X})$. On selge, et $df$ on punktis $\mathbf{X}$ diferentseeruv parajasti siis, kui osatuletised $\frac{\partial f}{\partial x}$ ja $\frac{\partial f}{\partial y}$ on selles punktis diferentseeruvad (peame silmas, et $dx$ ja $dy$ on vabalt valitavad!). Sel juhul on olemas täisdiferentsiaal $d(df) =: d^2 f$, mida nimetatakse funktsiooni $f$ *teist järku* (ehk *teiseks*) *täisdiferentsiaaliks,* ja me ütleme, et funktsioon $f$ on punktis $\mathbf{X}$ kaks korda diferentseeruv. Niisiis,

$$\begin{aligned} d^2 f(\mathbf{X}) &= \left(d\frac{\partial f(\mathbf{X})}{\partial x}\right) dx + \left(d\frac{\partial f(\mathbf{X})}{\partial y}\right) dy \\ &= \left(\frac{\partial^2 f(\mathbf{X})}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 f(\mathbf{X})}{\partial x \partial y} dy\right) dx + \left(\frac{\partial^2 f(\mathbf{X})}{\partial y \partial x} dx + \frac{\partial^2 f(\mathbf{X})}{\partial y^2} dy\right) dy \\ &= \frac{\partial^2 f(\mathbf{X})}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 f(\mathbf{X})}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f(\mathbf{X})}{\partial y^2} dy^2 \end{aligned}$$

(kontrollida!)✠. Analoogiliselt saadakse *kolmandat järku* (ehk *kolmas*) *täisdiferentsiaal*

$$d^3 f(\mathbf{X}) = \frac{\partial^3 f(\mathbf{X})}{\partial x^3} dx^3 + 3\frac{\partial^3 f(\mathbf{X})}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3\frac{\partial^3 f(\mathbf{X})}{\partial x \partial y^2} dx dy^2 + \frac{\partial^3 f(\mathbf{X})}{\partial y^3} dy^3$$

(veenduda!)✠. Samamoodi on võimalik saada valemid suvalist järku täisdiferentsiaali jaoks, eeldusel, et ta eksisteerib, s.t. eksisteerivad vastavad osatuletised. Üldiselt,

$$d^n f(\mathbf{X}) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\partial^n f(\mathbf{X})}{\partial x^{n-k} \partial y^k} dx^{n-k} dy^k =: \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^n f\right](\mathbf{X})$$

(meenutame, et $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}$).

**Liitfunktsiooni kõrgemat järku täisdiferentsiaalid.** Olgu funktsioonid $f, \varphi_1, \varphi_2$ ja $F$ defineeritud nii nagu eelmise peatüki punktis 3.3: olgu $w = f(u, v)$ kahe muutuja funktsioon määramispiirkonnaga $Q$, kus argumendid $u, v$ on omakorda kahe muutuja funktsioonid

$$u = \varphi_1(x, y), \; v = \varphi_2(x, y).$$

Seejuures eeldatatakse, et funktsioonidel $\varphi_1$ ja $\varphi_2$ on ühine määramispiirkond $D$ ning iga $\mathbf{X} \in D$ korral $(\varphi_1(\mathbf{X}), \varphi_2(\mathbf{X})) \in Q$. Liitfunktsioon $F : D \to \mathbb{R}$ on määratud seosega

$$F(x, y) := f(\varphi_1(\mathbf{X}), \varphi_2(\mathbf{X})) = f(\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y)).$$

Me teame (vt. valem (3.17)), et liitfunktsiooni $F$ täisdiferentsiaal on esitatav kujul $dF = \frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv$, kusjuures $du = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}dy$ ja $dv = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}dy$ on muutujate $x$ ja $y$ funktsioonid. Seega

$$\begin{aligned} d^2F &= d\,(dF) = d\left(\frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv\right) \\ &= \left(d\frac{\partial f}{\partial u}\right)du + \frac{\partial f}{\partial u}d^2u + \left(d\frac{\partial f}{\partial v}\right)dv + \frac{\partial f}{\partial v}d^2v \\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}du + \frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}dv\right)du + \frac{\partial f}{\partial u}d^2u + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}du + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}dv\right)dv + \frac{\partial f}{\partial v}d^2v \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}du^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}dudv + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}dv^2 + \frac{\partial f}{\partial u}d^2u + \frac{\partial f}{\partial v}d^2v \end{aligned}$$

(veenduda!)✠, tähendab,

$$d^2F = d^2f + \frac{\partial f}{\partial u}d^2u + \frac{\partial f}{\partial v}d^2v.$$

Näeme, et üldjuhul, erinevalt esimest järku täisdiferentsiaalist **teist järku täisdiferentsiaali üldkuju ei ole invariantne muutuja vahetuse suhtes.** Invariantne on ta (s.t. kehtib võrdus $d^2F = d^2f$) juhul, kui $d^2u = d^2v = 0$, s.t. juhul, kui funktsioonid $\varphi_1$ ja $\varphi_2$ on lineaarsed. Tõepoolest, kui

$$\varphi_1(x,y) = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}, \quad \varphi_2(x,y) = a_{21}x + a_{22}y + a_{23},$$

siis $du = a_{11}dx + a_{12}dy,\ \ dv = a_{21}dx + a_{22}dy$ ja $d^2u = d^2v = 0$.

## 4.3 Taylori valem

Meenutame kõigepealt Taylori valemit ühe muutuja funktsiooni puhul. Kui funktsioon $y = f(t)$ on punktis $a$ $n$ korda diferentseeruv, siis punktil $a$ leidub selline ümbrus $U_\delta(a)$, et iga $t \in U_\delta(a)$ korral kehtib võrdus

$$f(t) = f(a) + f'(a)(t-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(t-a)^2 + ... + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(t-a)^n + \alpha_n,$$

kus $\lim_{t\to a}\frac{\alpha_n}{(t-a)^n} = 0$. Tähistame $h := t - a$, siis saame Taylori valemi kujul

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2!}f''(a)h^2 + ... + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)h^n + \alpha_n, \quad \lim_{h\to 0}\frac{\alpha_n}{h^n} = 0. \tag{4.4}$$

Kui eeldada, et $f$ on punkti $a$ mingis ümbruses $n+1$ korda diferentseeruv, siis saab jääkliikme $\alpha_n$ esitada Lagrange'i kujul

$$\alpha_n = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h)h^{n+1} \ \ \text{mingi } \theta \in (0,1) \text{ korral.} \tag{4.5}$$

Olgu nüüd kahe muutuja funktsioon $w = f(x,y)$ punktis $\mathbf{A} = (a,b)$ $n$ korda diferentseeruv, siis leidub selline ümbrus $U_\delta(\mathbf{A})$, milles eksisteerib $d^{n-1}f$. Olgu argumentide muudud $h_1$ ja $h_2$ sellised, et $\mathbf{B} := (a+h_1, b+h_2) \in U_\delta(\mathbf{A})$, s.t.

$$\rho := \|(h_1,h_2)\| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2} = \|\mathbf{B} - \mathbf{A}\| < \delta.$$

Moodustame ühe muutuja liitfunktsiooni

$$F(t) := f\left(a + t\frac{h_1}{\rho}, b + t\frac{h_2}{\rho}\right)$$

ja paneme tähele, et
1) kui $t \in [-\rho, \rho]$, siis $\left(a + \frac{t}{\rho}h_1, b + \frac{t}{\rho}h_2\right) \in U_\delta(\mathbf{A})$ (põhjendada!)✠,
2) kuna funktsioonid $x = \varphi_1(t) := a + t\frac{h_1}{\rho}$ ja $y = \varphi_2(t) := b + t\frac{h_2}{\rho}$ on lõpmata palju kordi diferentseeruvad ja $f$ on $n$ korda punktis $\mathbf{A}$ diferentseeruv, siis ühemuutuja funktsioon $F$ on $n$ korda diferentseeruv punktis $t = 0$ (vrd. järeldus 3.6),
3) kuna funktsioonid $\varphi_1$ ja $\varphi_2$ on lineaarsed, siis liitfunktsiooni $F$ kõrgemat järku täisdiferentsiaalide valemid on muutuja vahetuse suhtes invariantsed (vrd. märkus eelmise punkti lõpus), niisiis

$$d^iF(0) = d^if(x,y)\mid_{t=0} \quad (i = 1, 2, ..., n),$$

4) kui $t = 0$, siis $x = a$ ja $y = b$, seetõttu

$$d^iF(0) = d^if(\mathbf{A}) = \left[\left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^i f\right](\mathbf{A}), \tag{4.6}$$

kusjuures $dx = \frac{h_1}{\rho}dt$, $dy = \frac{h_2}{\rho}dt$.
Maclaurini valemi kohaselt (see on Taylori valem punktis $a = 0$) saame juhul $h := \rho$ seose (vrd. (4.4))

$$F(\rho) = F(0) + F'(0)\rho + \frac{1}{2!}F''(0)\rho^2 + ... + \frac{1}{n!}F^{(n)}(0)\rho^n + \alpha_n, \text{ kus } \lim_{\rho\to 0}\frac{\alpha_n}{\rho^n} = 0. \tag{4.7}$$

Võttes $dt := \rho$, saame valemist (4.6) iga $i = 1, ..., n$ puhul $F^{(i)}(0)\rho^i = d^iF(0) = d^if(a,b)$, kusjuures $dx = h_1$ ja $dy = h_2$. Kuna $F(0) = f(\mathbf{A})$ ning $F(\rho) = f(\mathbf{B})$, siis valemist (4.7) saame

$$f(\mathbf{B}) = f(\mathbf{A}) + df(\mathbf{A}) + \frac{1}{2!}d^2f(\mathbf{A}) + ... + \frac{1}{n!}d^nf(\mathbf{A}) + \alpha_n, \text{ kus } \lim_{\mathbf{B}\to\mathbf{A}}\frac{\alpha_n}{\|\mathbf{B}-\mathbf{A}\|^n} = 0. \tag{4.8}$$

Valemit (4.8) nimetatakse funktsiooni $w = f(x,y)$ Taylori valemiks punktis $\mathbf{A}$.

Kui eeldada, et $f$ on $n+1$ korda diferentseeruv punkti $\mathbf{A}$ mingis ümbruses, siis $F$ on punkti $t = 0$ ümbruses $n+1$ korda diferentseeruv ja valemi (4.5) kohaselt

$$\alpha_n = \frac{1}{(n+1)!}F^{(n+1)}(\theta\rho)\rho^{n+1} \quad (\theta \in (0,1)).$$

Võtame (nagu eespool valemi (4.8) tuletamisel) $dt := \rho$, siis $\alpha_n = \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}F(\theta\rho)$ ehk

$$\alpha_n = \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(a + \theta h_1, b + \theta h_2). \tag{4.9}$$

Eelneva arutluse kokkuvõtteks sõnastame järgmise teoreemi.

**Teoreem 4.4** ***(kahe muutuja funktsiooni Taylori valem).*** *Kui funktsioon* $w = f(x,y)$ *on punkti* $\mathbf{A} = (a,b)$ *mingis ümbruses* $U_\delta(\mathbf{A})$ $n+1$ *korda diferentseeruv, siis suvalise punkti* $\mathbf{B}$ *korral sellest ümbrusest kehtib valem* (4.8), *kus jääkliige* $\alpha_n$ *on esitatav kujul* (4.9).

Üldiselt kehtib $m$ muutja funktsioonide korral järgmine väide.

**Teoreem 4.5** ***(m muutuja funktsiooni Taylori valem).*** *Eeldame, et* $m$ *muutuja funktsioon* $w = f(x,...,x_m)$ *on punktis* $\mathbf{A} = (a_1,...,a_m)$ $n$ *korda diferentseeruv ja* $\mathbf{X} = (a_1+h_1,...,a_m+h_m)$ *on mingi punkt punkti* $\mathbf{A}$ *sellisest ümbrusest* $U_\delta(\mathbf{A})$, *milles eksisteerib* $d^{n-1}f$. *Siis kehtib Taylori valem*

$$f(\mathbf{X}) = f(\mathbf{A}) + df(\mathbf{A}) + \frac{1}{2!}d^2f(\mathbf{A}) + ... + \frac{1}{n!}d^nf(\mathbf{A}) + \alpha_n,$$

*kus* $\lim_{\mathbf{X}\to\mathbf{A}} \frac{\alpha_n}{\|\mathbf{X}-\mathbf{A}\|^n} = 0$ *ja* $d^if(\mathbf{A}) := \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_1}h_1 + ... + \frac{\partial}{\partial x_m}h_m\right)^i f\right](\mathbf{A})$ $(i = 1,...,n)$. *Kui funktsioon* $f$ *on punkti* $\mathbf{A}$ *mingis ümbruses* $U_\delta(\mathbf{A})$ $n+1$ *korda diferentseeruv, siis jääkliige* $\alpha_n$ *avaldub kujul*

$$\alpha_n = \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(\mathbf{X}), \text{ kus } \mathbf{X} \text{ on teatav punkt lõigus } [\mathbf{A},\mathbf{X}].$$

**Lagrange'i valem.** Juhul $n = 0$ (s.t. eeldusel, et funktsioon $f$ on punkti $\mathbf{A}$ mingis ümbruses $U_\delta(\mathbf{A})$ diferentseeruv) saame Taylori valemist (4.8) Lagrange´i valemi

$$f(\mathbf{B}) - f(\mathbf{A}) = \frac{\partial f(\mathbf{X})}{\partial x}h_1 + \frac{\partial f(\mathbf{X})}{\partial y}h_2, \text{ kus } \mathbf{X} := (a+\theta h_1, b+\theta h_2) \text{ mingi } \theta \in (0,1) \text{ korral} \tag{4.10}$$

(veenduda!)✠. (Siin $\mathbf{B} := (a+h_1, b+h_2) \in U_\delta(\mathbf{A})$ ning punkt $\mathbf{X}$ asub punkte $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$ ühendavas sirglõigus $[\mathbf{A},\mathbf{B}]$.)

Lagrange'i valemi abil tõestame järgmise olulise väite.

**Lause 4.6** *Olgu funktsioon* $w = f(x,y)$ *diferentseeruv lahtises piirkonnas* $D$. *Funktsioon* $f$ *on konstantne hulgas* $D$ *parajasti siis, kui*

$$\frac{\partial f(\mathbf{X})}{\partial x} = \frac{\partial f(\mathbf{X})}{\partial y} = 0 \text{ iga } \mathbf{X} \in D \text{ korral.} \tag{4.11}$$

**Tõestus.** *Tarvilikkus.* Kui $f$ on konstantne funktsioon, siis $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ hulgas $D$.

*Piisavus.* Eeldame, et tingimus (4.11) on täidetud, ning näitame, et $f$ on hulgas $D$ konstantne funktsioon. Fikseerime suvaliselt punkti $\mathbf{A} = (a,b) \in D$, olgu $\mathbf{X} = (x,y)$ hulga $D$ suvaline punkt. Ühendame need kaks punkti mingi *murdjoonega* $\mathbf{AX}_1\mathbf{X}_2...\mathbf{X}_{m-1}\mathbf{X}$, mis paikneb hulgas $D$ (hulga $D$ sidususe tõttu on see võimalik). Olgu punkti $\mathbf{X}_i$ koordinaadid $x_i$ ja $y_i$, s.t. $\mathbf{X}_i = (x_i, y_i)$ $(i = 1,...,m-1)$. Valemi (4.10) kohaselt saab igas lõigus $\mathbf{AX}_1$,

$\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2, ..., \mathbf{X}_{m-1}\mathbf{X}$ fikseerida punkti $\mathbf{Z}_1, ..., \mathbf{Z}_m$ nii, et kehtivad seosed

$$\begin{aligned} f(\mathbf{X}_1) - f(\mathbf{A}) &= \frac{\partial f(\mathbf{Z}_1)}{\partial x} h_1^{(1)} + \frac{\partial f(\mathbf{Z}_1)}{\partial y} h_2^{(1)}, \\ f(\mathbf{X}_2) - f(\mathbf{X}_1) &= \frac{\partial f(\mathbf{Z}_2)}{\partial x} h_1^{(2)} + \frac{\partial f(\mathbf{Z}_2)}{\partial y} h_2^{(2)}, \\ &... \\ f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{X}_{m-1}) &= \frac{\partial f(\mathbf{Z}_m)}{\partial x} h_1^{(m)} + \frac{\partial f(\mathbf{Z}_m)}{\partial y} h_2^{(m)}, \end{aligned}$$

(siin $h_1^{(i)}$ ja $h_1^{(i)}$ on vektori $\overrightarrow{\mathbf{X}_{i-1}\mathbf{X}_i}$ koordinaadid, kui tähistada $\mathbf{X}_0 := A$ ja $\mathbf{X}_m := \mathbf{X}$). Eelduse (4.11) tõttu saame nendest seostest, et

$$f(\mathbf{A}) = f(\mathbf{X}_1) = f(\mathbf{X}_2) = ... = f(\mathbf{X}).$$

Kuna $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{X}$ olid valitud suvaliselt hulgas $D$, siis $f$ on tõepoolest konstantne funktsioon. ■

# 5 Ilmutamata funktsioonid

## 5.1 Ühe muutuja ilmutamata funktsioonid

Pideva ühe muutuja funktsiooni $y = f(x)$ graafik $xy$-tasandil on pidev joon. Üldiselt esitatakse tasandilist joont analüütilises geomeetrias võrrandiga

$$F(x, y) = 0, \tag{5.1}$$

kus $F$ on mingis hulgas $D \subset \mathbb{R}^2 = \{\mathbf{X} = (x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ määratud kahe muutuja funktsioon. Kõige lihtsamad sellekohased näited on sirge ja ringjoon, mis on defineeritud vastavalt võrranditega

$$ax + by + c = 0$$

ja

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0. \tag{5.2}$$

Küsimus on selles, **kas joont** (5.1) **on võimalik mingi funktsiooni** $f$ **abil esitada nn. "ilmutatud kujul" antud võrrandiga** $y = f(x)$. Sirge puhul on see ilmselt võimalik (eeldusel, et kordaja $b$ on nullist erinev), ringjoone puhul aga üldjuhul mitte.

**Ilmutamata funktsiooni mõiste.** Läheneme püstitatud probleemile üldisemalt. Olgu $F$ mingi kahe muutuja funktsioon määramispiirkonnaga $D$. Lähtudes võrrandist (5.1), fikseerime selles muutuja $x$ väärtuse $\xi$. Saame ühe tundmatuga võrrandi $F(\xi, y) = 0$, sellel võib olla, aga võib ka mitte olla lahendeid. Esimesel juhul on võimalik, et on kas üks lahend või rohkem lahendeid. Tähistame

$$X := \{\xi \in \mathbb{R} \mid \exists! y \in \mathbb{R} : (\xi, y) \in D \text{ ja } F(\xi, y) = 0\}$$

(siin $\exists!$ tähendab *"leidub parajasti üks"*), siis iga $x \in X$ korral leidub selline üheselt määratud arv $y =: f(x)$, et kehtib võrdus (5.1). Nii saame ühe muutuja funktsiooni $f$ määramispiirkonnaga $X$. Sel juhul öeldakse, et *võrrand* (5.1) *määrab funktsiooni* $f : X \to \mathbb{R}$ *ilmutamata kujul*.

Antud võrrandi (5.1) puhul küsime me kõigepealt: **Kas võrrand** (5.1) **määrab ilmutamata funktsiooni** $f$**?** Teiseks, kui ilmutamata funktsioon olemas, siis **millistel eeldustel (funktsiooni** $F$ **suhtes) on ta pidev või diferentseeruv?**

Lihtne **näide** ringjoone võrrandist (5.2) ütleb, et *üldise probleemiasetuse* juures on positiivne vastus esimesele küsimusele üldjuhul vähetõenäone: kui funktsiooni $F(x, y) := x^2 + y^2 - r^2$ vaadelda tema "mõistlikus" määramispiirkonnas $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -r \leq x, y \leq r\}$ (kui $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus D$, siis võrrandil (5.2) ei ole üldse lahendeid), siis koosneb hulk $X$ võrrandi (5.2) puhul kahest arvust $r$ ja $-r$. Seevastu, kui võtta määramispiirkonnaks

$$D_1 := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -r \leq x \leq r,\ 0 \leq y \leq r\right\}$$

või

$$D_2 := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -r \leq x \leq r,\ -r \leq y \leq 0\right\},$$

siis on vastus esimesele küsimusele positiivne, kusjuures ilmutamata funktsiooni $f_1(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ (vastavalt $f_2(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}$) määramispiirkonnaks on lõik $[-r, r]$. Seejuures on need funktsioonid lõpmata palju kordi diferentseeruvad.

Seda näidet silmas pidades püüame eelpool püstitatud probleeme lahendada **lokaalselt.** Fikseerime punkti $\mathbf{A} = (a, b)$, mis rahuldab võrrandit (5.1) (s.t. $F(a, b) = 0$), ning püüame leida niisugust **ristkülikut**

$$K_{\delta,\sigma}(\mathbf{A}) := \{\mathbf{X} = (x, y) \mid a - \delta < x < a + \delta,\ b - \sigma < y < b + \sigma\},$$

et iga $x \in (a - \delta, a + \delta)$ puhul leidub parajasti üks $f(x) := y \in (b - \sigma, b + \sigma)$ omadusega $F(x, y) = 0$. Sel juhul ütleme, et *võrrand* (5.1) *määrab ristkülikus* $K_{\delta,\sigma}(\mathbf{A})$ *ilmutamata funktsiooni* $f : (a - \delta, a + \delta) \to \mathbb{R}$.

**Teoreem 5.1** ***(ilmutamata funktsioonide põhiteoreem).*** *Eeldame, et kahe muutuja funktsioon* $w = F(x, y)$ *rahuldab punktis* $\mathbf{A} = (a, b)$ *järgmisi tingimusi:*

*$1^0$ punktil* $\mathbf{A}$ *on niisugune ümbrus* $U_\theta(\mathbf{A})$*, milles funktsioon* $F$ *on pidev ja tal on selles ümbruses pidev osatuletis* $\frac{\partial F}{\partial y}$*,*

*$2^0$* $F(\mathbf{A}) = 0$*,*

*$3^0$* $\frac{\partial F(\mathbf{A})}{\partial y} \neq 0$.

*Siis leiduvad sellised arvud* $\delta, \sigma > 0$*, et võrrand* (5.1) *määrab ristkülikus* $K_{\delta,\sigma}(\mathbf{A})$ *ilmutamata funktsiooni* $y = f(x)$*, mis on pidev vahemikus* $(a - \delta, a + \delta)$*.*

*Kui lisaks eeldustele $1^0$ - $3^0$ on täidetud tingimus*

*$4^0$ hulgas* $U_\theta(\mathbf{A})$ *on funktsioonil* $F$ *pidev osatuletis* $\frac{\partial F}{\partial x}$*,*

*siis funktsioon* $f$ *on vahemikus* $(a - \delta, a + \delta)$ *pidevalt diferentseeruv ning*

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial F(x, f(x))}{\partial x}}{\frac{\partial F(x, f(x))}{\partial y}}. \tag{5.3}$$

**Tõestus.** Eeldame, et tingimused $1^0$ - $3^0$ on täidetud, olgu konkreetsuse mõttes $\frac{\partial F(\mathbf{A})}{\partial y} > 0$. Kuna $\frac{\partial F}{\partial y}$ on pidev, siis leidub punktil $\mathbf{A}$ selline ümbrus $U_{\theta_1}(\mathbf{A}) \subset U_\theta(\mathbf{A})$, et $\frac{\partial F(\mathbf{X})}{\partial y} > 0$ iga $\mathbf{X} = (x, y) \in U_{\theta_1}(\mathbf{A})$ korral (põhjendada!)✠. Valime $\sigma > 0$ nii väikese, et kinnine ruut $\overline{K}_\sigma(\mathbf{A}) := \{(x, y) \mid a - \sigma \leq x \leq a + \sigma,\ b - \sigma \leq y \leq b + \sigma\}$ sisalduks ringis $U_\theta(\mathbf{A})$ (põhjendada niisuguse valiku võimalikkust!)✠. Siis iga fikseeritud $\xi \in [a - \sigma, a + \sigma]$ puhul on ühe muutuja funktsioon $F(\xi, y)$ lõigus $[b - \sigma, b + \sigma]$ rangelt kasvav (põhjendada!)✠. Erijuhul, kui $\xi = a$, saame seosega $g(y) := F(a, y)$ määratud kasvava funktsiooni $g : [b - \sigma, b + \sigma] \to \mathbb{R}$. Kuna eelduse $2^0$ põhjal $g(b) = 0$, siis $g(b - \sigma) < 0$ ja $g(b + \sigma) > 0$.

Moodustame nüüd funktsioonid $v_1$ ja $v_2$ seostega $v_1(x) := F(x, b - \sigma)$ ja $v_2(x) := F(x, b + \sigma)$. Mõlemad on lõigus $[a - \sigma, a + \sigma]$ pidevad (põhjendada!)✠, kusjuures $v_1(a) = g(b - \sigma) < 0$ ja $v_2(a) = g(b + \sigma) > 0$. Seetõttu leiduvad punktil $a$ sellised ümbrused $U_{\delta_1}(a) = (a - \delta_1, a + \delta_1)$ ning $U_{\delta_2}(a) = (a - \delta_2, a + \delta_2)$, et $v_1(x) < 0$ iga $x \in U_{\delta_1}(a)$ korral ning $v_2(x) > 0$ iga $x \in U_{\delta_2}(a)$ korral (põhjendada!)✠. Tähistame $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ ja moodustame ristküliku $K_{\delta,\sigma}(\mathbf{A})$.

Näitame *esiteks*, et võrrand $F(x, y) = 0$ määrab ristkülikus $K_{\delta,\sigma}(\mathbf{A})$ ilmutamata funktsiooni. Olgu $\xi$ suvaline punkt vahemikus $(a - \delta, a + \delta)$, vaatleme $xy$-tasandil vertikaalset lõiku, mille otspunktid on $(\xi, b-\sigma)$ ja $(\xi, b+\sigma)$, ning sellel määratud argumendist $y$ sõltuvat funktsiooni $F(\xi, y) =: g_\xi(y)$. Funktsioon $g_\xi$ on lõigus $[b-\sigma, b+\sigma]$ pidev (põhjendada!)✠ ja lõigu otspunktides on tal erimärgilised väärtused. Bolzano-Cauchy teoreemi põhjal leidub selline punkt $\eta \in (b-\sigma, b+\sigma)$, et $F(\xi, \eta) = g_\xi(\eta) = 0$. Seejuures on $\eta$ üheselt määratud, see tuleneb faktist, et $g_\xi$ on rangelt kasvav funktsioon. Seega saame funktsiooni $y = f(x)$, mis on määratud vahemikus $(a-\delta, a+\delta)$ ja seab igale arvule $\xi \in (a-\delta, a+\delta)$ vastavusse arvu $\eta \in (b-\sigma, b+\sigma)$. Definitsiooni kohaselt tähendab see, et võrrand $F(x, y) = 0$ määrab ilmutamata funktsiooni $f$ ristkülikus $K_{\delta,\sigma}(\mathbf{A})$. Paneme tähele, et $f(a) = b$ (selgitada!)✠.

*Teiseks* näitame, et ilmutamata funktsioon $f$ on pidev vahemikus $(a-\delta, a+\delta)$. Kõigepealt veendume, et $f$ on pidev punktis $a$. See tuleneb vahetult eelnenud arutelust. Nimelt jääb see arutelu kehtima iga väiksema ristküliku puhul, mille keskpunktiks on $\mathbf{A}$. Seega, kui võtame $\sigma$ asemel suvalise positiivse arvu $\varepsilon$, kus $\varepsilon < \sigma$, siis valime (samamoodi nagu eespool) positiivse $\delta' \leq \delta$ nii, et iga $x \in (a-\delta', a+\delta')$ korral vastaks talle üheselt määratud $y \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ omadusega $F(x, y) = 0$. Selge, et $y = f(x)$ (põhjendada!)✠. Niisiis,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta' > 0 : x \in (a-\delta', a+\delta') \Rightarrow f(x) \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon),$$

s.t. $f$ on pidev punktis $a$.

Kui $x$ on suvaline punkt vahemikust $(a-\delta, a+\delta)$, siis kordame eelnevat arutelu, asendades punkti $\mathbf{A}$ punktiga $\mathbf{X} := (x, f(x))$. Lihtne on veenduda, et kuna $\mathbf{X}$ on lahtise hulga $U_{\theta_1}(\mathbf{A})$ punkt, siis leidub tal ümbrus $U_{\theta'}(\mathbf{X}) \subset U_{\theta_1}(\mathbf{A})$ ning selles ümbruses on täidetud tingimused $1^0$ - $3^0$. Eelneva arutelu põhjal on $f$ pidev suvalises punktis $x \in (a-\delta, a+\delta)$.

*Kolmandaks* näitame, et kui kehtivad tingimused $1^0$ - $4^0$, siis ilmutamata funktsioon $f$ on vahemikus $(a-\delta, a+\delta)$ diferentseeruv. Olgu $x$ vahemiku $(a-\delta, a+\delta)$ suvaline punkt ja olgu $h$ argumendi muut punktis $x$, talle vastab funktsiooni muut $\Delta y := f(x+h) - f(x)$. Kuna $y + \Delta y = f(x+h)$, siis $F(x+h, y+\Delta y) = 0$.

Vaatleme kahe muutuja funktsiooni $F$ muutu punktis $(x, y)$, mis vastab argumentide muutudele $h$ ja $\Delta y$ :

$$\Delta F = F(x+h, y+\Delta y) - F(x, y) = 0 - 0 = 0.$$

Teisalt saame Lagrange'i keskväärtusteoreemi abil sobivalt valitud $\theta_1, \theta_2 \in (0,1)$ korral

$$\begin{aligned} 0 &= (F(x+h, y+\Delta y) - F(x, y+\Delta y)) + (F(x, y+\Delta y) - F(x, y)) \\ &= \frac{\partial F(x+\theta_1 h, y+\Delta y)}{\partial x} h + \frac{\partial F(x, y+\theta_2 \Delta y)}{\partial y} \Delta y, \end{aligned}$$

(kontrollida!)✠, millest tuleneb

$$\frac{\Delta y}{h} = -\frac{\frac{\partial F(x+\theta_1 h, y+\Delta y)}{\partial x}}{\frac{\partial F(x, y+\theta_2 \Delta y)}{\partial y}}. \tag{5.4}$$

Kui $h \to 0$, siis $\Delta y \to 0$ ja funktsioonide $\frac{\partial F}{\partial x}$ ning $\frac{\partial F}{\partial y}$ pidevuse tõttu

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta y}{h} = -\frac{\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}} = -\frac{\frac{\partial F(x,f(x))}{\partial x}}{\frac{\partial F(x,f(x))}{\partial y}}$$

(peame silmas, et $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} \neq 0$ ja $y = f(x)$). Seejuures on tuletis $f'$ pidev punktis $x$ (põhjendada)✠. ■

**Märkus.** Kui eeldada, et teoreemi 5.1 eelduses $1^0$ on osatuletis $\frac{\partial F}{\partial y}$ asendatud osatuletisega $\frac{\partial F}{\partial x}$ ja eelduse $3^0$ asemel võtta tingimus

$3^{00}$ $\frac{\partial F(\mathbf{A})}{\partial x} \neq 0$,

siis määrab võrrand (5.1) ristkülikus $K_{\delta,\sigma}(\mathbf{A})$ pideva ilmutamata funktsiooni $x = \varphi(y)$, mis pideva osatuletise $\frac{\partial F}{\partial y}$ olemasolu korral on vahemikus $(b-\sigma, b+\sigma)$ pidevalt diferentseeruv. Seejuures

$$\varphi'(y) = -\frac{\frac{\partial F(\varphi(y),y)}{\partial y}}{\frac{\partial F(\varphi(y),y)}{\partial x}}. \tag{5.5}$$

## 5.2 Joone iseärased punktid, nende liigid

Tasandilist joont nimetatakse *siledaks*, kui tal on pidevalt muutuv puutuja. Kui joon on antud võrrandiga $y = f(x)$ $(x \in [a,b])$, siis tema siledus tähendab funktsiooni $f'$ pidevust. Teisi sõnu, võrrandiga $y = f(x)$ määratud joon on sile parajasti siis, kui funktsioon $f$ on pidevalt diferentseeruv.

**Joone puutuja.** Olgu kahe muutuja funktsiooni $F$ korral punktis $\mathbf{A}$ täidetud teoreemi 1 tingimused $1^0$ ja $2^0$ ning veel kas $3^0$ või $3^{00}$. Sel juhul määrab võrrand (5.1) punkti $\mathbf{A}$ läbiva sileda joone, mille saab esitada kas võrrandiga $y = f(x)$ (kui on täidetud $3^0$) või $x = \varphi(y)$ (kui kehtib $3^{00}$). Kui $\mathbf{X} = (x,y)$ on selle joone punkt, siis selles punktis joonele võetud puutuja võrrand on vastavalt

$$Y - y = f'(x)(X - x) \text{ või } X - x = \varphi'(y)(Y - y)$$

(siin on $X$ ja $Y$ *puutuja* suvalise punkti koordinaadid). Need kaks võrrandit saab esitada seoste (5.3) ja (5.5) abil ühe võrrandiga:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}(Y - y) = 0 \tag{5.6}$$

(kontrollida!)✠.

**Joone harilikud ja iseärased punktid.** Joone $F(x,y) = 0$ neid punkte $\mathbf{X} = (x,y)$, kus on täidetud kas $3^0$ või $3^{00}$ (s.t. osatuletised $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}$ ja $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}$ ei ole mõlemad võrdsed nulliga), nimetatakse selle joone *harilikeks punktideks*. Joonel on igas tema harilikus punktis puutuja, mille saab esitada võrrandiga (5.6). Joone neid punkte $\mathbf{X} = (x,y)$, mille korral $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = 0$, nimetatakse tema *iseärasteks punktideks*.

**Näide 1.** Leiame ringjoone $x^2 + y^2 = r^2$ puutuja võrrandi. Tähistame $F(x,y) := x^2 + y^2 - r^2$, siis

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = 2x \text{ ja } \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 2y,$$

seega ei ole ringjoonel iseäraseid punkte. Vastavalt valemile (5.6) saame ringjoone punktis $\mathbf{X}$ puutuja esitada võrrandiga

$$2x(X - x) + 2y(Y - y) = 0$$

ehk $xX - x^2 + yY - y^2 = 0$, s.t.
$$xX + yY = r^2.$$

**Uurime järgnevas võrrandit** (5.1) **selle võrrandiga määratud joone iseärase punkti ümbruses.** Niisiis, olgu $\mathbf{A} = (a, b)$ joone $F(x, y) = 0$ iseärane punkt, s.t. $\frac{\partial F(\mathbf{A})}{\partial y} = \frac{\partial F(\mathbf{A})}{\partial x} = 0$, siis teoreem 5.1 ei kehti. Me *eeldame lisaks, et funktsioon* $F$ *on punktis* $\mathbf{A}$ *kaks korda diferentseeruv ning* $d^2F(\mathbf{A}) \neq 0$.

Kui oletada, et võrrand (5.1) määrab punkti $\mathbf{A}$ läbiva sileda joone, mida saab kirjeldada parameetriliste võrranditega $x = x(t)$, $y = y(t)$, siis $F(x(t), y(t)) = 0$ ja võrrandi vasakut poolt saab vaadelda muutuja $t$ liitfunktsioonina, tähistame $g(t) := F(x(t), y(t))$. *Oletame* veelgi enam, *et funktsioonid* $x = x(t)$ *ja* $y = y(t)$ *on kaks korda diferentseeruvad* ning arvutame
$$d^2g = g''(t)\,dt^2 = d^2F + \frac{\partial F}{\partial x}d^2x + \frac{\partial F}{\partial y}d^2y$$
(vrd. pt. 4, punkt 4.2). Kohal $\mathbf{A}$ on parempoolses avaldises teine ja kolmas liige võrdsed nulliga, seega saame seose
$$d^2g = d^2_{\mathbf{A}}F = \frac{\partial^2 F(\mathbf{A})}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 F(\mathbf{A})}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 F(\mathbf{A})}{\partial y^2}dy^2.$$
Tähistame $B := \frac{\partial^2 F(\mathbf{A})}{\partial x^2}$, $C := \frac{\partial^2 F(\mathbf{A})}{\partial x \partial y}$ ja $D := \frac{\partial^2 F(\mathbf{A})}{\partial y^2}$ ning vaatleme tingimust
$$Bdx^2 + 2Cdxdy + Ddy^2 = 0,$$
Kordajad $B, C$ ja $D$ ei ole kõik nullid, sest me eeldasime, et $d^2F(\mathbf{A}) \neq 0$. Olgu näiteks $D \neq 0$, tähistame $m := \frac{dy}{dx}$ (see on vaadeldava joone puutuja $x$-telje suhtes võetud tõusunurga tangens), siis saame võrrandi
$$B + 2Cm + Dm^2 = 0. \tag{5.7}$$
Sellel võrrandil on põhimõtteliselt kaks lahendit $m_1$ ja $m_2$, need võivad olla kas
1) kompleksed (s.t. mittereaalsed), kui võrrandi diskriminant $d := C^2 - BD < 0$,
2) reaalsed ja erinevad, kui $d > 0$, või
3) reaalsed ja võrdsed, kui $d = 0$.
Geomeetriliselt kõneldes tähendab see, et kui võrrand $F(x, y) = 0$ määrab sileda joone, siis sellel joonel on vaadeldavas iseärases punktis $\mathbf{A}$ kaks puutujat, mis võivad olla ka imaginaarsed (juht 1)) või kokkulangevad (juht 3)).

**Vaatleme lähemalt juhtu** $d > 0$. Niisiis, me eeldame, et võrrandil (5.7) on kaks erinevat reaalset lahendit $m_1$ ja $m_2$. Avaldiste lihtsustamiseks eeldame, et $\mathbf{A} = (0, 0)$ (see ei ole kitsendus, sobiva muutujavahetusega on seda võimalik saavutada). Taylori valemi kohaselt
$$\begin{aligned} F(x, y) = F(\mathbf{0}) &+ \left(\frac{\partial F(\mathbf{0})}{\partial x}x + \frac{\partial F(\mathbf{0})}{\partial y}y\right) \\ &+ \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 F(\mathbf{0})}{\partial x^2}x^2 + 2\frac{\partial^2 F(\mathbf{0})}{\partial x \partial y}xy + \frac{\partial^2 F(\mathbf{0})}{\partial y^2}y^2\right) + \alpha \end{aligned}$$

(selgitada!)✠, kus $\lim_{(x,y)\to\mathbf{0}}\frac{\alpha}{x^2+y^2}=0$. Pidades silmas, et $F(\mathbf{0})=\frac{\partial F(\mathbf{0})}{\partial x}=\frac{\partial F(\mathbf{0})}{\partial y}=0$, saame võrduse

$$F(x,y)=\frac{1}{2}\left(Bx^2+2Cxy+Dy^2\right)+\alpha. \tag{5.8}$$

Toome seosega

$$y=(m_1+z)\,x \tag{5.9}$$

sisse uue muutja $z$, siis $x\neq 0$ korral

$$\begin{aligned}F(x,(m_1+z)\,x)&=\frac{1}{2}x^2\left(B+2C(m_1+z)+D(m_1+z)^2\right)+\alpha\\&=x^2\left(Cz+Dz\left(m_1+\frac{z}{2}\right)+\frac{\alpha}{x^2}\right)\\&=x^2\chi(x,z)\end{aligned} \tag{5.10}$$

(kontrollida!)✠, kus

$$\chi(x,z):=Cz+Dz\left(m_1+\frac{z}{2}\right)+\frac{\alpha}{x^2}.$$

Kui vaadata funktsiooni $\chi$ argumente $x$ ja $z$ sõltumatute muutujatena, siis

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha}{x^2+y^2}\frac{x^2+y^2}{x^2}=\lim_{(x,y)\to\mathbf{0}}\frac{\alpha}{x^2+y^2}\left(1+(m_1+z)^2\right)=0$$

(peame silmas, et kui $x\to 0$, siis $y=(m_1+z)\,x\to 0$). Seega, kui defineerime $\chi(\mathbf{0}):=\lim_{(x,z)\to\mathbf{0}}\chi(x,z)=0$, siis funktsioon $\chi$ on pidev punktis $\mathbf{0}$ ja ka selle punkti teatavas ümbruses (selgitada!)✠.

Rakendame nüüd Taylori valemit funktsioonile $\frac{\partial F}{\partial y}$ punktis $\mathbf{0}$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}&=\frac{\partial F(\mathbf{0})}{\partial y}+\frac{\partial^2 F(\mathbf{0})}{\partial y\partial x}x+\frac{\partial^2 F(\mathbf{0})}{\partial y^2}y+\beta\\&=Cx+Dy+\beta,\end{aligned}$$

kus $\lim_{(x,y)\to\mathbf{0}}\frac{\beta}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$ (selgitada!)✠. Siit saame liitfunktsiooni diferentseerimise reeglite kohaselt (vrd. (5.10))

$$\frac{\partial\chi(x,z)}{\partial z}=\frac{1}{x^2}\frac{\partial F(x,(m_1+z)\,x)}{\partial y}x=\frac{1}{x}\left(Cx+D(m_1+z)\,x+\beta\right)$$

ehk

$$\frac{\partial\chi(x,z)}{\partial z}=C+D(m_1+z)+\frac{\beta}{x},$$

seejuures $\lim_{x\to 0}\frac{\beta}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\beta}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}=\lim_{(x,y)\to\mathbf{0}}\frac{\beta}{\sqrt{x^2+y^2}}\sqrt{1+1+(m_1+z)^2}=0$. Järelikult, kui defineerime $\frac{\partial\chi(\mathbf{0})}{\partial z}:=\lim_{(x,z)\to 0}\frac{\partial\chi(x,z)}{\partial z}=C+D(m_1+z)$, siis $\frac{\partial\chi}{\partial z}$ on pidev punktis $\mathbf{0}$ ning seega ka selle punkti mingis ümbruses.

Võrrandist (5.7) tuleneb $m_1+m_2=-2\frac{C}{D}$ (selgitada!)✠, siit

$$\frac{\partial\chi(\mathbf{0})}{\partial z}=-\frac{D}{2}(m_1+m_2)+Dm_1=\frac{D}{2}(m_1-m_2)\neq 0.$$

Rakendame funktsioonile $\chi$ teoreemi 5.1 ning sellele järgnevat märkust, nende põhjal määrab ta punkti $\mathbf{0}$ ümbruses muutuja $z$ argumendi $x$ pideva funktsioonina, s.t. $z = z_1(x)$, kusjuures $z_1(0) = 0$. Arvestades seost (5.9), saame võrrandile $F(x, y) = 0$ ühe pideva lahendi kujul $y = (m_1 + z_1(x))\, x$. Kuna

$$y'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{y}{x} = m_1 + \lim_{x \to 0} z_1(x) = m_1,$$

siis selle lahendi $y = (m_1 + z_1(x))\, x$ graafikul on punktis $\mathbf{0}$ puutuja, mille tõusunurga tangens on $m_1$.

Võttes seoses (5.9) $m_1$ asemel $m_2$ ning korrates sama arutelu, saame võrrandile $F(x, y) = 0$ teise pideva lahendi $y = (m_1 + z_2(x))\, x$, mille puutuja tõusunurga tangens punktis $\mathbf{0}$ on $m_2$.

**Kokkuvõtteks.** Kui võrrandi (5.7) diskriminant $d$ on positiivne, siis joone $F(x, y) = 0$ iseärasel punktil $\mathbf{A}$ on selline ümbrus, milles võrrand $F(x, y) = 0$ määrab kaks erinevat siledat ilmutamata funktsiooni, kusjuures punktis $\mathbf{A}$ on nende funktsioonide graafikutel erinevad puutujad. Seda punkti $\mathbf{A}$ nimetatakse joone $F(x, y) = 0$ *sõlmpunktiks.*

**Vaatleme ka juhtu** $d < 0$. Siis saab võrdus $Bx^2 + 2Cxy + Dy^2 = 0$ kehtida vaid punktis $\mathbf{0}$ (selgitada!)✠. Teeme seoses (5.8) muutujate vahetuse $x = r\cos\theta,\ \ y = r\sin\theta$, saame võrduse

$$F(x, y) = \frac{1}{2} r^2 \left(B\cos^2\theta + 2C\cos\theta\sin\theta + D\sin^2\theta\right) + \alpha,$$

milles sulgudes olev avaldis on muutuja $\theta$ suhtes lõigus $[0, 2\pi]$ pidev funktsioon. Olgu

$$k := \frac{1}{4} \min\left|B\cos^2\theta + 2C\cos\theta\sin\theta + D\sin^2\theta\right|,$$

siis $k \neq 0$. Kui $r > 0$ on nii väike, et $\frac{|\alpha|}{r^2} < k$ (põhjendada sellise valiku võimalikkust!)✠, siis

$$\begin{aligned} |F(x, y)| &\geq \frac{1}{2} r^2 \left|B\cos^2\theta + 2C\cos\theta\sin\theta + D\sin^2\theta\right| - |\alpha| \\ &> 2kr^2 - kr^2 = kr^2. \end{aligned}$$

Tähendab, punktil $\mathbf{0}$ leidub selline ümbrus, kus võrrandil $F(x, y) = 0$ on vaid null-lahend. Sel juhul nimetatakse punkti $\mathbf{0}$ joone $F(x, y) = 0$ *isoleeritud punktiks.*

**Juhul** $d = 0$ saab näidata, et $\mathbf{A}$ on kas isoleeritud punkt või koosneb vaadeldav joon punkti $\mathbf{A}$ ümbruses kahest siledast kõverast, millel on punktis $\mathbf{A}$ ühine puutuja. Viimasel juhul nimetatakse punkti $\mathbf{A}$ joone $F(x, y) = 0$ *tagasipöördepunktiks.*

## 5.3 Mitme muutuja ilmutamata funktsioonid

Olgu kolme muutuja funktsioon $z = F(x, y, z)$ määratud risttahukas

$$\begin{aligned} &K_{\delta_1, \delta_2, \delta}(\mathbf{A}) := \\ &\left\{\mathbf{X} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a - \delta_1 < x < a + \delta_1,\ b - \delta_2 < y < b + \delta_2,\ a_3 - \delta < z < a_3 + \delta\right\} \end{aligned}$$

keskpunktiga $\mathbf{A} = (a, b, c)$. Kui võrrandil

$$F(x, y, z) = 0 \tag{5.11}$$

on iga punkti $(x, y)$ korral ristkülikust

$$K_{\delta_1,\delta_2}(\mathbf{A}') := \{(x, y) \mid a - \delta_1 < x < a + \delta_1,\ b - \delta_2 < y < b + \delta_2\}$$

olemas üheselt määratud lahend $z = f(x, y)$, siis öeldakse, et võrrand (5.11) määrab risttahukas $K_{\delta_1,\delta_2,\delta_3}(\mathbf{A})$ muutuja $z$ muutujate $x$ ja $y$ ilmutamata funktsioonina ehk, teisiti väljendudes, kahe muutuja funktsioon $f$ on ilmutamata kujul antud võrrandiga (5.11).

**Teoreem 5.2** *Eeldame, et kolme muutuja funktsioon $w = F(x, y, z)$ rahuldab punktis $\mathbf{A} = (a, b, c)$ järgmisi tingimusi:*

*$1^0$ punktil $\mathbf{A}$ leidub niisugune ümbrus $U_\theta(\mathbf{A})$, milles funktsioon $F$ on pidev ja tal on selles ümbruses pidev osatuletis $\frac{\partial F}{\partial z}$,*

*$2^0$ $F(\mathbf{A}) = 0$,*

*$3^0$ $\frac{\partial F(\mathbf{A})}{\partial z} \neq 0$.*

*Siis saab leida sellise risttahuka $K_{\delta_1,\delta_2,\delta}(\mathbf{A}) \subset U_\theta(\mathbf{A})$, milles võrrand (5.11) määrab pideva ilmutamata funktsiooni $z = f(x, y)$, kusjuures $f(a, b) = c$.*

*Kui lisaks eeldustele $1^0$ - $3^0$ on täidetud veel tingimus*

*$4^0$ hulgas $U_\theta(\mathbf{A})$ on funktsioonil $F$ pidev osatuletis $\frac{\partial F}{\partial x}$,*

*siis on funktsioonil $f$ ristkülikus $K_{\delta_1,\delta_2}(\mathbf{A}')$ pidev osatuletis*

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F(x,y,f(x,y))}{\partial x}}{\frac{\partial F(x,y,f(x,y))}{\partial z}}. \tag{5.12}$$

*Kui lisaks eeldustele $1^0$ - $3^0$ on täidetud tingimus*

*$5^0$ hulgas $U_\theta(\mathbf{A})$ on funktsioonil $F$ pidev osatuletis $\frac{\partial F}{\partial y}$,*

*siis on funktsioonil $f$ ristkülikus $K_{\delta_1,\delta_2}(\mathbf{A}')$ pidev osatuletis*

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F(x,y,f(x,y))}{\partial y}}{\frac{\partial F(x,y,f(x,y))}{\partial z}}. \tag{5.13}$$

Võrrand (5.11) määrab ruumis $\mathbb{R}^3$ teatava pinna. Kui selle pinna igas punktis on olemas *pidevalt muutuv* puutujatasand, siis öeldakse, et see pind on *sile*. Ilmutatud kujul võrrandiga $z = f(x, y)$ esitatud pind on sile, kui eksisteerivad pidevad osatuletised $\frac{\partial f}{\partial x}$ ja $\frac{\partial f}{\partial y}$. Sellele pinnale punktis $\mathbf{X} = (x, y, z)$ võetud puutujatasandi võrrand on

$$Z - z = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}(Y - y),$$

kus $X, Y$ ja $Z$ on puutujatasandi suvalise punkti koordinaadid. Pidades silmas seoseid (5.12), on siit lihtne saada puutujatasandi võrrandiks

$$\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial y}(Y - y) + \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z}(Z - z) = 0 \tag{5.14}$$

(kontrollida!)✠. Pinna $F(x, y, z) = 0$ neid punkte, kus kõik osatuletised $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ ja $\frac{\partial F}{\partial z}$ ei ole korraga nullid, nimetatakse harilikeks, ülejäänud iseärasteks punktideks. **Kokkuvõttes:** pinnal $F(x, y, z) = 0$ on igas tema harilikus punktis puutujatasand (5.14).

## 5.4 Võrrandisüsteemiga määratud ilmutamata funktsioonid

Ruumis $\mathbb{R}^3$ võib mingi joon olla antud kahe pinna lõikejoonena (näiteks on sirge kahe tasandi lõikejoon). Seega saab ruumilise kõvera esitada üldjuhul võrrandisüsteemiga

$$\begin{cases} F(x,y,z) = 0, \\ G(x,y,z) = 0, \end{cases} \tag{5.15}$$

kus $F$ ja $G$ on mingis lahtises hulgas määratud kolme muutuja funktsioonid.

Olgu antud süsteem (5.15) ning rahuldagu punkt $\mathbf{A} = (a,b,c)$ seda süsteemi. Kui iga $x \in (a-\delta, a+\delta)$ korral on ristkülikus

$$K_{\delta',\delta''}\left(\mathbf{A}''\right) := \{(y,z) \mid b-\delta' < y < b+\delta', \quad c-\delta'' < z < c+\delta''\}$$

keskpunktiga $\mathbf{A}'' := (b,c)$ olemas selle süsteemi ühene lahend

$$y =: f(x), \quad z =: g(x),$$

siis öeldakse, et *võrrandisüsteem* (5.15) *määrab risttahukas*

$$K_{\delta,\delta',\delta''}(\mathbf{A}) := \{(x,y,z) \mid a-\delta < x < a+\delta, \quad b-\delta' < y < b+\delta', \quad c-\delta'' < z < c+\delta''\}$$

*muutujad $y$ ja $z$ muutuja $x$ ilmutamata funktsioonina.* Meie eesmärk on kindlaks teha, millistel tingimustel funktsioonide $F$ ja $G$ osas sellised ilmutamata funktsioonid $f$ ja $g$ olemas on.

Vaatleme osatuletiste maatriksit

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{pmatrix}$$

ja tähistame punkti $\mathbf{A} = (a,b,c)$ korral determinandi

$$J(\mathbf{A}) := \begin{vmatrix} \frac{\partial F(\mathbf{A})}{\partial y} & \frac{\partial F(\mathbf{A})}{\partial z} \\ \frac{\partial G(\mathbf{A})}{\partial y} & \frac{\partial G(\mathbf{A})}{\partial z} \end{vmatrix}.$$

**Teoreem 5.3** *Eeldame, et kolme muutuja funktsioonid $F$ ja $G$ rahuldavad punktis $\mathbf{A} = (a,b,c)$ järgmisi tingimusi:*

*$1^0$ punktil $\mathbf{A}$ on niisugune ümbrus $U_\theta(\mathbf{A})$, milles funktsioonid $F$ ja $G$ on pidevad ja neil on pidevad osatuletised $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$, $\frac{\partial G}{\partial y}$ ja $\frac{\partial G}{\partial z}$,*

*$2^0$ $F(\mathbf{A}) = 0$ ja $G(\mathbf{A}) = 0$,*

*$3^0$ $J(\mathbf{A}) \neq 0$.*

*Siis leidub selline risttahukas $K_{\delta,\delta',\delta''}(\mathbf{A})$, milles võrrandisüsteem* (5.15) *määrab pidevad ilmutamata funktsioonid $y = f(x)$ ja $z = g(x)$, kusjuures $f(a) = b$ ja $g(a) = c$.*

*Kui lisaks eeldustele $1^0$ - $3^0$ on täidetud veel tingimus*

*$4^0$ hulgas $U_\theta(\mathbf{A})$ on funktsioonidel $F$ ja $G$ pidevad osatuletised $\frac{\partial F}{\partial x}$ ja $\frac{\partial G}{\partial x}$,*
*siis on funktsioonid $f$ ja $g$ on vahemikus $(a-\delta, a+\delta)$ diferentseeruvad ning*

$$f'(x) = \frac{\frac{\partial F(\mathbf{X})}{\partial z}\frac{\partial G(\mathbf{X})}{\partial x} - \frac{\partial F(\mathbf{X})}{\partial x}\frac{\partial G(\mathbf{X})}{\partial z}}{J(\mathbf{X})}, \quad g'(x) = \frac{\frac{\partial F(\mathbf{X})}{\partial x}\frac{\partial G(\mathbf{X})}{\partial y} - \frac{\partial F(\mathbf{X})}{\partial y}\frac{\partial G(\mathbf{X})}{\partial x}}{J(\mathbf{X})}, \tag{5.16}$$

*kus* $\mathbf{X} := (x, f(x), g(x)) \in K_{\delta,\delta',\delta''}(\mathbf{A})$.

**Tõestus.** Kuna $J(\mathbf{A}) \neq 0$, siis on selle determinandi teise veeru elementidest vähemalt üks nullist erinev, olgu $\frac{\partial F(\mathbf{A})}{\partial z} \neq 0$. Vaatleme võrrandit $F(x,y,z) = 0$ teoreemi 5.2 kontekstis, selle teoreemi tingimused $1^0$ - $3^0$ ja $5^0$ on täidetud (kontrollida!)✠. Teoreemi 5.2 kohaselt saab moodustada niisuguse risttahuka $K_{\sigma_1,\sigma_2,\sigma}(\mathbf{A}) \subset U_\theta(\mathbf{A})$, milles võrrand $F(x,y,z) = 0$ määrab muutuja $z$ muutjate $x$ ja $y$ pideva ilmutamata funktsioonina $z = \varphi(x,y)$ ristkülikus $K_{\sigma_1,\sigma_2}(\mathbf{A}')$, kus $\mathbf{A}' := (a,b)$. See funktsioon rahuldab tingimust $\varphi(a,b) = c$ ja tal on hulgas $K_{\sigma_1,\sigma_2}(\mathbf{A}')$ pidev osatuletis

$$\frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F(\mathbf{Q})}{\partial y}}{\frac{\partial F(\mathbf{Q})}{\partial z}}, \tag{5.17}$$

kus $\mathbf{Q} := (x,y,\varphi(x,y))$. Vaadeldavas risttahukas $K_{\sigma_1,\sigma_2,\sigma}(\mathbf{A})$ võime seega süsteemi (5.15) võrrandi $F(x,y,z) = 0$ asendada võrrandiga $z = \varphi(x,y)$, siis saame süsteemiga (5.15) samaväärse süsteemi

$$\begin{cases} z = \varphi(x,y), \\ G(x,y,z) = 0. \end{cases}$$

Asendame muutuja $z$ esimesest võrrandist teise ja tähistame $\Psi(x,y) := G(x,y,\varphi(x,y))$, siis oleme esialgse süsteemi teisendanud kujule

$$\begin{cases} z = \varphi(x,y), \\ \Psi(x,y) = 0. \end{cases}$$

Veendume, et kahe muutuja funktsioon $\Psi$ rahuldab teoreemi 5.1 eeldusi $1^0$ - $3^0$. Esiteks, kuna $\varphi$ ja $G$ on pidevad funktsioonid, siis funktsioon $\Psi$ on pidev hulgas $K_{\sigma_1,\sigma_2}(\mathbf{A}')$ veelgi enam, tal on pidev osatuletis $\frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ (selgitada!)✠. Seejuures saame seosest (5.17)

$$\frac{\partial \Psi(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{\frac{\partial F(\mathbf{Q})}{\partial z}} \left( \frac{\partial G(\mathbf{Q})}{\partial y}\frac{\partial F(\mathbf{Q})}{\partial z} - \frac{\partial G(\mathbf{Q})}{\partial z}\frac{\partial F(\mathbf{Q})}{\partial y} \right) = -\frac{J(\mathbf{Q})}{\frac{\partial F(\mathbf{Q})}{\partial z}}, \tag{5.18}$$

kus $\mathbf{Q} = (x,y,\varphi(x,y))$. Teiseks, $\Psi(a,b) = G(a,b,\varphi(a,b)) = G(a,b,c) = 0$ ja, kolmandaks,

$$\frac{\partial \Psi(a,b)}{\partial y} = -\frac{J(\mathbf{A})}{\frac{\partial F(\mathbf{A})}{\partial z}} \neq 0$$

(vrd. (5.18)). Teoreemi 5.1 põhjal saab leida niisuguse ristküliku $K_{\delta,\delta'}(\mathbf{A}') \subset K_{\sigma_1,\sigma_2}(\mathbf{A}')$, milles $\frac{\partial \Psi}{\partial y}$ on nullist erinev ja võrrand $\Psi(x,y) = 0$ määrab ilmutamata funktsiooni $y = f(x)$. See on vahemikus $(a-\delta, a+\delta)$ pidev ning rahuldab tingimust $b = f(a)$. Võtame $\delta'' := \sigma$ ja moodustame risttahuka $K_{\delta,\delta',\delta''}(\mathbf{A})$. Selles on esialgne võrrandisüsteem (5.15) samaväärne süsteemiga

$$\begin{cases} z = \varphi(x,y), \\ y = f(x). \end{cases}$$

Asendades muutuja $y$ teisest võrrandist esimesse, saame eelmisega samaväärse süsteemi

$$\begin{cases} y = f(x), \\ z = g(x), \end{cases}$$

kus $g(x) := \varphi(x, f(x))$ $(x \in (a-\delta, a+\delta))$. Seejuures on $f$ ja $g$ vahemikus $(a-\delta, a+\delta)$ pidevad ning rahuldavad tingimust $f(a) = b$ ja $g(a) = c$ (kontrollida!)✠. Esimene osa väitest on tõestatud.

Teise osa tõestuseks eeldame, et kehtib veel ka tingimus $4^0$, s.t. hulgas $U_\theta(\mathbf{A})$ on olemas pidevad osatuletised $\frac{\partial F}{\partial x}$ ja $\frac{\partial G}{\partial x}$. Rakendades (nii nagu eespool) võrrandile $F(x,y,z) = 0$ teoreemi 5.2, paneme tähele, et nüüd on täidetud ka selle teoreemi eeldus $4^0$, mistõttu lisaks valemile (5.17) kehtib ilmutamata funktsiooni $z = \varphi(x,y)$ jaoks ka valem

$$\frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F(\mathbf{Q})}{\partial x}}{\frac{\partial F(\mathbf{Q})}{\partial z}},$$

kus $\mathbf{Q} = (x, y, \varphi(x,y)) \in K_{\sigma_1,\sigma_2,\sigma}(\mathbf{A})$. Arvutame

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Psi(x,y)}{\partial x} &= \frac{\partial G(\mathbf{Q})}{\partial x} + \frac{\partial G(\mathbf{Q})}{\partial z}\frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial x}\\ &= \frac{1}{\frac{\partial F(\mathbf{Q})}{\partial z}}\left(\frac{\partial G(\mathbf{Q})}{\partial x}\frac{\partial F(\mathbf{Q})}{\partial z} - \frac{\partial G(\mathbf{Q})}{\partial z}\frac{\partial F(\mathbf{Q})}{\partial x}\right).\end{aligned}$$

Võrrandi $\Psi(x,y) = 0$ jaoks on nüüd täidetud ka teoreemi 5.1 tingimus $4^0$, mistõttu ilmutamata funktsioon $f$, mille see võrrand määrab, on oma määramispiirkonnas $(a-\delta, a+\delta)$ diferentseeruv ning

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial \Psi(x,f(x))}{\partial x}}{\frac{\partial \Psi(x,f(x))}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial G(\mathbf{X})}{\partial x}\frac{\partial F(\mathbf{X})}{\partial z} - \frac{\partial G(\mathbf{X})}{\partial z}\frac{\partial F(\mathbf{X})}{\partial x}}{J(\mathbf{X})}$$

(vrd. (5.18)), kus $\mathbf{X} := (x, f(x), \varphi(x, f(x))) \in K_{\delta,\delta',\delta''}(\mathbf{A})$. Siit tuleneb ka funktsiooni $g$ diferentseeruvus ja valem

$$\begin{aligned}g'(x) &= \frac{\partial \varphi(x,f(x))}{\partial x} + \frac{\partial \varphi(x,f(x))}{\partial y}f'(x) = -\frac{\frac{\partial F(\mathbf{X})}{\partial x}}{\frac{\partial F(\mathbf{X})}{\partial z}} - \frac{\frac{\partial F(\mathbf{X})}{\partial y}}{\frac{\partial F(\mathbf{X})}{\partial z}}\frac{\frac{\partial G(\mathbf{X})}{\partial x}\frac{\partial F(\mathbf{X})}{\partial z} - \frac{\partial G(\mathbf{X})}{\partial z}\frac{\partial F(\mathbf{X})}{\partial x}}{J(\mathbf{X})}\\ &= \frac{\frac{\partial F(\mathbf{X})}{\partial x}\frac{\partial G(\mathbf{X})}{\partial y} - \frac{\partial F(\mathbf{X})}{\partial y}\frac{\partial G(\mathbf{X})}{\partial x}}{J(\mathbf{X})}\end{aligned}$$

(kontrollida!)✠. Teoreem on tõestatud. ■

Me sõnastame järgnevalt analoogilise väite **võrrandisüsteemiga määratud ilmutamata mitme muutuja funktsioonide** jaoks. Selleks vajame **funktsionaaldeterminante.**

Olgu antud $m$ funktsiooni

$$\begin{aligned}w_1 &= f_1(x_1, ..., x_m),\\ w_2 &= f_2(x_1, ..., x_m),\\ &\ldots\\ w_m &= f_m(x_1, ..., x_m).\end{aligned}$$

Moodustame nn. **Jacobi maatriksi**

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m}\\ \ldots & & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m}\end{pmatrix},$$

tema determinanti nimetatakse funktsionaaldeterminandiks, Jacobi determinandiks ehk **jakobiaaniks** ja tähistatakse $\frac{D(f_1,...,f_m)}{D(x_1,...,x_m)}$.

**Teoreem 5.4** *Vaatleme süsteemi*

$$\begin{cases} F_1\left(x_1,...,x_m;y_1,...,y_n\right)=0, \\ F_2\left(x_1,...,x_m;y_1,...,y_n\right)=0, \\ \quad\quad ... \\ F_n\left(x_1,...,x_m;y_1,...,y_n\right)=0, \end{cases} \tag{5.19}$$

*kus* $m+n$ *muutuja funktsioonid* $F_1,...,F_n$ *rahuldavad punktis* $\mathbf{A}=(a_1...,a_m;b_1,...,b_n)$ *järgmisi tingimusi:*

*$1^0$ punktil* $\mathbf{A}$ *on ruumis* $\mathbb{R}^{m+n}$ *niisugune ümbrus* $U_\theta\left(\mathbf{A}\right)$, *milles funktsioonid* $F_1,...,F_n$ *on pidevad ja neil on muutujate* $y_1,...,y_n$ *järgi pidevad osatuletised* $\frac{\partial F_i}{\partial y_j}$ $(i,j=1,...,n)$,

*$2^0$* $F_i\left(\mathbf{A}\right)=0$ $(i=1,...,n)$,

*$3^0$* $J\left(\mathbf{A}\right)=\frac{D(F_1,...,F_n)}{D(y_1,...,y_n)}\neq 0$.

*Siis saab leida punkti* $\mathbf{A}$ *sellise ümbruse, milles võrrandisüsteem* (5.19) *määrab muutujad* $y_1,...,y_n$ *muutujate* $x_1,...,x_m$ *ilmutamata funktsioonidena, s.t.*

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1\left(x_1,...,x_m\right), \\ y_2 &= f_2\left(x_1,...,x_m\right), \\ &... \\ y_n &= f_n\left(x_1,...,x_m\right), \end{aligned}$$

*kusjuures* $b_i=f_i\left(a_1,...,a_m\right)$ $(i=1,...,n)$ *ja funktsioonid* $f_1,...,f_n$ *on punkti* $(a_1,...,a_m)$ *teatavas ümbruses pidevad.*

*Kui lisaks eeldustele $1^0$ - $3^0$ on täidetud veel tingimus*

*$4^0$ hulgas* $U_\theta\left(\mathbf{A}\right)$ *on funktsioonidel* $F_1,...,F_n$ *muutujate* $x_1,...,x_m$ *järgi pidevad osatuletised* $\frac{\partial F_i}{\partial x_l}$ $(i=1,...,n;\ l=1,...,m)$,

*siis funktsioonidel* $f_1,...,f_n$ *on punkti* $(a_1,...,a_m)$ *teatavas ümbruses pidevad osatuletised* $\frac{\partial f_i}{\partial x_l}$ $(i=1,...,n;\ l=1,...,m)$.

# 6 Mitme muutuja funktsioonide ekstreemumid

## 6.1 Mitme muutuja funktsioonide lokaalsed ekstreemumid

**Lokaalse ekstreemumi mõiste.** Ütleme, et $m$ muutuja funktsioonil $w = f(x_1, ..., x_m)$ on tema määramispiirkonna punktis $\mathbf{A} = (a_1, ..., a_m)$ *lokaalne maksimum (lokaalne miinimum),* kui punkti $\mathbf{A}$ mingi ümbruse $U_\delta(\mathbf{A})$ puhul on täidetud tingimus

$$f(\mathbf{X}) \leq f(\mathbf{A}) \quad (f(\mathbf{X}) \geq f(\mathbf{A})) \text{ iga } \mathbf{X} \in U_\delta(\mathbf{A}) \text{ korral.}$$

**Tarvilik tingimus lokaalse ekstreemumi olemasoluks.** Olgu funktsioonil $f$ punktis $\mathbf{A}$ lokaalne ekstreemum (s.o. maksimum või miinimum). Lihtne on veenduda, et *kui tal on selles punktis mingi $i$ korral olemas osatuletis $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, siis $\frac{\partial f(\mathbf{A})}{\partial x_i} = 0$.* Tõepoolest, moodustame ühe muutuja funktsiooni

$$\varphi(x) := f(a_1, ..., a_{i-1}, x, a_{i+1}, ..., a_m),$$

see on punktis $a_i$ diferentseeruv ja tal on selles punktis lokaalne ekstreemum (selgitada!)✠. Selge, et $\frac{\partial f(\mathbf{A})}{\partial x_i} = \varphi'(a_i) = 0$.

**Funktsiooni statsionaarne punkt.** Kui funktsioonil $f$ on tema ekstreemumpunktis $\mathbf{A}$ olemas kõik osatuletised $\frac{\partial f(\mathbf{A})}{\partial x_i}$ $(i = 1, ..., m)$, siis

$$\frac{\partial f(\mathbf{A})}{\partial x_1} = \frac{\partial f(\mathbf{A})}{\partial x_2} = ... = \frac{\partial f(\mathbf{A})}{\partial x_m} = 0. \tag{6.1}$$

Kui mingis punktis $\mathbf{A} \in D$ on täidetud tingimus (6.1), siis ütleme, et $\mathbf{A}$ on funktsiooni $f$ *statsionaarne punkt.*

Samal ajal *ei pruugi funktsioonil statsionaarses punktis ekstreemumit olla.* Lihtne **näide** selle kohta on funktsioon $w = xy$ ainukese statsionaarse punktiga $\mathbf{0}$, milles funktsiooni väärtus on 0, kuid mille igas ümbruses on funktsioonil nii positiivseid kui ka negatiivseid väärtusi. Me püüame järgnevalt välja selgitada, *millised on need piisavad tingimused, mis garanteerivad kahe muutuja funktsiooni ekstreemumi olemasolu tema statsionaarses punktis.* Nende tingimuste kirjeldamisel on mugav kasutada lineaarsest algebrast tuntud ruutvorme.

**Positiivselt (negatiivselt) määratud ruutvormid.** Kui arvud $a_{ki}$ $(k, i = 1, ..., m)$ moodustavad sellise maatriksi $\mathcal{A} = (a_{ki})$, et $a_{ki} = a_{ik}$, siis seosega

$$\Phi(\mathbf{X}) = \sum_{k,i=1}^{m} a_{ki} x_k x_i$$

määratud $m$ muutuja funktsiooni $\Phi$ nimetatakse *ruutvormiks.* Öeldakse, et ruutvorm $\Phi$ on *positiivselt määratud,* kui $\Phi(\mathbf{X}) \geq 0$ iga $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^m$ korral ning $\Phi(\mathbf{X}) = 0$ ainult siis, kui $\mathbf{X} = 0$. Analoogiliselt defineeritakse *negatiivselt määratud* ruutvorm. Ruutvormi, mis on kas positiivselt või negatiivselt määratud, nimetatakse *määratud ruutvormiks.* Kui leiduvad sellised $\mathbf{X}$ ja $\mathbf{X}'$, et $\Phi(\mathbf{X}) > 0$ ja $\Phi(\mathbf{X}') < 0$, siis öeldakse, et ruutvorm $\Phi$ on *määramata.*

Saab tõestada nn. **Silwesteri kriteeriumi**, mille kohaselt ruutvorm $\Phi$ on 1) positiivselt määratud parajasti siis, kui maatriksi $\mathcal{A}$ kõik peamiinorid on positiivsed, s.t. kehtivad võrratused

$$a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0, ..., \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2m} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mm} \end{vmatrix} > 0, \tag{6.2}$$

ja 2) negatiivselt määratud, kui

$$a_{11} < 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} < 0, ..., \quad (-1)^m \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2m} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mm} \end{vmatrix} > 0. \tag{6.3}$$

Kõik ruutvormid on pidevad funktsioonid (põhjendada!)✠

**Piisavad tingimused lokaalse ekstreemumi olemasoluks statsionaarses punktis.** Olgu $\mathbf{A} = (a_1, ..., a_m) \in D$ mingi $m$ muutuja funktsiooni $f : D \to \mathbb{R}$ statsionaarne punkt. Me rakendame järgnevalt Taylori valemit (vt. teoreem 4.5) juhul $n = 2$. Seetõttu eeldame, et $f$ on punktis $\mathbf{A}$ kaks korda diferentseeruv ning punktil $\mathbf{A}$ leidub selline ümbrus $U_\theta(\mathbf{A})$, milles eksisteerib täisdiferentsiaal $df$. Andes argumentidele $a_1, ..., a_m$ muudud $h_1, ..., h_m$ nii, et $\mathbf{X} := (a_1 + h_1, ..., a_m + h_m) \in U_\theta(\mathbf{A})$, saame Taylori valemi kohaselt

$$f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{A}) = df(\mathbf{A}) + \frac{1}{2} d^2 f(\mathbf{A}) + \alpha_2,$$

kus

$$\lim_{(h_1,...,h_m)\to\mathbf{0}} \frac{\alpha_2}{h_1^2 + ... + h_m^2} = 0. \tag{6.4}$$

Kuna $\mathbf{A}$ on statsionaarne punkt, siis $df(\mathbf{A}) = 0$ (selgitada!)✠, niisiis kehtib võrdus

$$f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{A}) = \frac{1}{2} d^2 f(\mathbf{A}) + \alpha_2 \quad (\mathbf{X} \in U_\theta(\mathbf{A})). \tag{6.5}$$

Seejuures on $d^2 f(\mathbf{A}) = \sum_{k,i=1}^m \frac{\partial^2 f(\mathbf{A})}{\partial x_k \partial x_i} h_k h_i$ (kontrollida!)✠ ning $a_{ki} := \frac{\partial^2 f(\mathbf{A})}{\partial x_k \partial x_i} = \frac{\partial^2 f(\mathbf{A})}{\partial x_i \partial x_k} =: a_{ik}$ (selgitada!)✠. Niisiis, **teine diferentsiaal on ruutvorm**.

*Eeldame* ***esiteks,*** *et see ruutvorm*

$$\Phi(h_1, ..., h_m) := \sum_{k,i=1}^m a_{ki} h_k h_i \tag{6.6}$$

*on määratud.* Tähistame $r := \sqrt{h_1^2 + ... + h_m^2}$, $u_k := \frac{h_k}{r}$ $(k = 1, ..., m)$ ja $\mathbf{T} := (u_1, ..., u_m)$, siis

$$\sum_{k=1}^m u_k^2 = 1 \tag{6.7}$$

ning

$$d^2 f(\mathbf{A}) = r^2 \sum_{k,i=1}^{m} a_{ki} u_k u_i =: r^2 \Phi(\mathbf{T}).$$

Tingimus (6.7) tähendab, et punkt $\mathbf{T}$ asub ruumi $\mathbb{R}^m$ sfääril $S(0,1) = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^m \mid \|\mathbf{X}\| = 1\}$ keskpunktiga $\mathbf{0}$ ja raadiusega 1. See on kinnine ja tõkestatud hulk ruumis $\mathbb{R}^m$ (põhjendada!)✠. Weierstrassi teoreemi 2.5 kohaselt saavutab pidev funktsioon $\Phi$ selles hulgas oma minimaalse väärtuse, s.t. leidub $\min\{|\Phi(\mathbf{T})| \mid \|\mathbf{T}\| = 1\} =: 2\mu$. Kuna ruutvorm $\Phi$ on määratud, siis $\mu > 0$ (selgitada!)✠.

Seose (11.3) kohaselt saame valida $r > 0$ nii väikese, et $\frac{|\alpha_2|}{r^2} < \mu$. Teisalt, $\frac{1}{2}|d^2 f(\mathbf{A})| = \frac{1}{2}r^2 |\Phi(\mathbf{T})| > \mu r^2$. Arvestades neid kahte võrratust, võime väita, et kui võtta $r > 0$ piisavalt väike (s.t. valida punkti $\mathbf{A}$ piisavalt väike ümbrus), siis seose (11.3) põhjal on vahel $f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{A})$ sama märk, mis ruutvormil $\Phi$. Kui $\Phi(\mathbf{T}) > 0$, siis $|\Phi(\mathbf{T})| = \Phi(\mathbf{T})$, seega $\Phi(\mathbf{T}) > 2\mu$, mistõttu

$$f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{A}) = \frac{1}{2} r^2 \Phi(\mathbf{T}) + \alpha_2 > \mu r^2 - \mu r^2 = 0.$$

Kui $\Phi(\mathbf{T}) < 0$, siis $|\Phi(\mathbf{T})| = -\Phi(\mathbf{T})$, seega $\Phi(\mathbf{T}) < -2\mu$ ning

$$f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{A}) = \frac{1}{2} r^2 \Phi(\mathbf{T}) + \alpha_2 < -\mu r^2 + \mu r^2 = 0.$$

See tähendab, et *funktsioonil $f$ on statsionaarses punktis $\mathbf{A}$ lokaalne miinimum, kui ruutvorm $\Phi$ on positiivselt määratud, ja lokaalne maksimum, kui $\Phi$ on negatiivselt määratud.*

***Teiseks*** *vaatleme juhtu, kui ruutvorm $\Phi$ ei ole määratud.* Sel juhul saab valida $\mathbf{T}' := (h'_1, ..., h'_m)$ ning $\mathbf{T}'' := (h''_1, ..., h''_m)$ nii, et $\Phi(\mathbf{T}') > 0$ ja $\Phi(\mathbf{T}'') < 0$. Olgu $\mathbf{Q}' := \mathbf{A} + s\mathbf{T}' = (a_1 + sh'_1, ..., a_m + sh'_m)$ ning $\mathbf{Q}'' := \mathbf{A} + s\mathbf{T}'' = (a_1 + sh''_1, ..., a_m + sh''_m)$, kus $s > 0$. Võtame seoses (6.5) punkti $\mathbf{X}$ asemel vastavalt $\mathbf{Q}'$ ja $\mathbf{Q}''$, saame

$$f(\mathbf{Q}') - f(\mathbf{A}) = \frac{1}{2} s^2 \Phi(\mathbf{T}') + \alpha'_2 \text{ ning } f(\mathbf{Q}'') - f(\mathbf{A}) = \frac{1}{2} s^2 \Phi(\mathbf{T}'') + \alpha''_2,$$

kus

$$\lim_{s \to 0} \frac{\alpha'_2}{s^2} = 0 \text{ ja } \lim_{s \to 0} \frac{\alpha''_2}{s^2} = 0$$

(selgitada!)✠. Tähendab,

$$\lim_{s \to 0} \frac{f(\mathbf{Q}') - f(\mathbf{A})}{s^2} = \frac{1}{2}\Phi(\mathbf{T}') > 0 \text{ ja } \lim_{s \to 0} \frac{f(\mathbf{Q}'') - f(\mathbf{A})}{s^2} = \frac{1}{2}\Phi(\mathbf{T}'') < 0.$$

Siit järeldub, et punkti $\mathbf{A}$ igas ümbruses on punkte $\mathbf{Q}'$ ja $\mathbf{Q}''$, mille puhul $f(\mathbf{Q}') - f(\mathbf{A}) > 0$ ning $f(\mathbf{Q}'') - f(\mathbf{A}) < 0$. Seega ei ole punktis $\mathbf{A}$ lokaalset ekstreemumit.

Võtame eelneva arutelu kokku järgmises teoreemis.

**Teoreem 6.1** *Kaks korda diferentseeruval funktsioonil $w = f(x_1, ..., x_m)$ on oma statsionaarses punktis $\mathbf{A} = (a_1, ..., a_m)$ lokaalne maksimum, kui ruutvorm* (6.6) *on negatiivselt määratud. Kui ruutvorm* (6.6) *on positiivselt määratud, siis on funktsioonil $f$ punktis $\mathbf{A}$ lokaalne miinimum. Kui ruutvorm* (6.6) *on määramata, siis funktsioonil $f$ ekstreemumit punktis $\mathbf{A}$ ei ole.*

Eelpooltoodud Silwesteri kriteeriumi kohaselt on funktsioonil $f$ statsionaarses punktis $\mathbf{A}$ lokaalne maksimum, kui ruutvorm (6.6) rahuldab tingimust (6.3), ning lokaalne miinimum, kui kehtib (6.2). Kahe muutuja funktsiooni puhul saame järgmise väite.

**Järeldus 6.2** *Kaks korda diferentseeruval kahe muutuja funktsioonil* $w = f(x, y)$ *on statsionaarses punktis* $\mathbf{A} = (a, b)$ *lokaalne ekstreemum, kui* $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$. *Juhul* $a_{11} > 0$ *on funktsioonil* $f$ *selles punktis lokaalne miinimum, juhul* $a_{11} < 0$ *aga lokaalne maksimum. Kui* $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$, *siis funktsioonil* $f$ *punktis* $\mathbf{A}$ *ekstreemumit ei ole.*

**Tõestus.** Iseseisvalt!✠. ■

## 6.2 Tinglik ekstreemum

Praktiliste ekstreemumi leidmise ülesannetena on kõige sagedasemad sedalaadi probleemid, kus tuleb leida mitme muutuja funktsiooni ekstreemum teatavaid lisatingimusi rahuldavate punktide hulgas. Täpsemalt, olgu $w = f(x_1, ..., x_m)$ mingi $m$ muutuja funktsioon ja olgu antud teatav tingimuste komplekt

$$\begin{cases} F_1(x_1, ..., x_m) = 0, \\ F_2(x_1, ..., x_m) = 0, \\ \qquad ... \\ F_r(x_1, ..., x_m) = 0, \end{cases} \tag{6.8}$$

kus $r < m$. Olgu $\mathbf{A} = (a_1, ..., a_m)$ niisugune punkt funktsiooni $f$ määramispiirkonnas, mis rahuldab tingimust (6.8) (s.t. $F_i(a_1, ..., a_m) = 0$ iga $i = 1, ..., r$ korral). Kui punktil $\mathbf{A}$ leidub selline ümbrus $U_\delta(\mathbf{A})$ et

$$f(\mathbf{A}) \leq f(\mathbf{X}) \text{ iga } \mathbf{X} \in U_\delta(\mathbf{A}) \text{ puhul, mis rahuldab tingmust (6.8),}$$

siis ütleme, et funktsioonil $f$ on punktis $\mathbf{A}$ (seostega (6.8) määratud) *tinglik miinimum.* Analoogiliselt defineeritakse *tinglik maksimum.*

Kui **näiteks** kolme muutuja funktsiooni $w = f(x, y, z)$ määramispiirkond sisaldab kera $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ ja on fikseeritud tingimus $F_1(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$, siis vastava tingliku ekstreemumi leidmine tähendab funktsiooni $f$ ekstremaalse väärtuse leidmist sfääri $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ pinnal.

Me leiame järgnevalt **Lagrange'i määramata kordajate meetodi** abil **tarvilikud tingimused** tingliku ekstreemumi olemasoluks. Olgu antud $m$ muutuja funktsioon $w = f(x_1, ..., x_m)$ ning tingimused (6.8). Eeldame, et
1) funktsioonil $f$ on punktis $\mathbf{A} = (a_1, ..., a_m)$ tinglik ekstreemum tingimustel (6.8),
2) funktsioonidel $f, F_1, ..., F_r$ on pidevad osatuletised punkti $\mathbf{A}$ mingis ümbruses $U_\sigma(\mathbf{A})$ kõigi muutujate $x_1, ..., x_m$ järgi,
3) osatuletiste maatriksil

$$\left(\frac{\partial F_k(\mathbf{A})}{\partial x_i}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1(\mathbf{A})}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1(\mathbf{A})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_1(\mathbf{A})}{\partial x_m} \\ \frac{\partial F_2(\mathbf{A})}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2(\mathbf{A})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_2(\mathbf{A})}{\partial x_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_r(\mathbf{A})}{\partial x_1} & \frac{\partial F_r(\mathbf{A})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_r(\mathbf{A})}{\partial x_m} \end{pmatrix}$$

on selliseid $r$ järku determinante, mis on nullist erinevad; olgu konkreetsuse mõttes

$$J(\mathbf{A}) := \frac{D(F_1, ..., F_r)}{D(x_{s+1}, ..., x_m)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1(\mathbf{A})}{\partial x_{s+1}} & \frac{\partial F_1(\mathbf{A})}{\partial x_{s+2}} & ... & \frac{\partial F_1(\mathbf{A})}{\partial x_m} \\ \frac{\partial F_2(\mathbf{A})}{\partial x_{s+1}} & \frac{\partial F_2(\mathbf{A})}{\partial x_{s+2}} & ... & \frac{\partial F_2(\mathbf{A})}{\partial x_m} \\ ... & ... & ... & ... \\ \frac{\partial F_r(\mathbf{A})}{\partial x_{s+1}} & \frac{\partial F_r(\mathbf{A})}{\partial x_{s+2}} & ... & \frac{\partial F_r(\mathbf{A})}{\partial x_m} \end{vmatrix} \neq 0, \text{ kus } s := m - r.$$

Rakendame teoreemi 5.4, selle kohaselt leidub punkti $\mathbf{A}$ niisugune ümbrus $U_\delta(\mathbf{A}) \subset U_\sigma(\mathbf{A})$, milles võrrandid (6.8) määravad muutujad $x_{s+1}, ..., x_m$ muutujate $x_1, ..., x_s$ pidevate funktsioonidena:

$$\begin{gathered} x_{s+1} = \varphi_1(x_1, ..., x_s), \\ x_{s+2} = \varphi_2(x_1, ..., x_s), \\ ... \\ x_m = \varphi_r(x_1, ..., x_s). \end{gathered}$$

Tähistame

$$\varphi(x_1, ..., x_s) := f(x_1, ..., x_s, \varphi_1(x_1, ..., x_s), ..., \varphi_r(x_1, ..., x_s)),$$

eelduse 2) põhjal on funktsioonil $\varphi$ punkti $\mathbf{A}' := (a_1, ..., a_s)$ teatavas ümbruses pidevad osatuletised kõigi muutujate $x_1, ..., x_s$ järgi (põhjendada!)✠.

Kuna eelduse 1) kohaselt on funktsioonil $\varphi$ lokaalne ekstreemum punktis $\mathbf{A}'$ (selgitada!)✠, siis on $\mathbf{A}'$ funktsiooni $\varphi$ statsionaarne punkt, seega $d\varphi(\mathbf{A}') = 0$. Arvestades asjaolu, et liitfunktsiooni esimest järku täisdiferentsiaali kuju on invariantne muutuja vahetuse suhtes, saame võrduse $df(\mathbf{A}) = d\varphi(\mathbf{A}')$ (selgitada!)✠. Tähendab, $df(\mathbf{A}) = 0$, kusjuures **muutujaid** $x_{s+1}, ..., x_m$ **tuleb siin vaadelda argumentide** $x_1, ..., x_s$ **funktsioonidena**.

Moodustame abifunktsiooni

$$\Phi(\mathbf{X}) := f(\mathbf{X}) + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k F_k(\mathbf{X}), \tag{6.9}$$

kus $\mathbf{X} = (x_1, ..., x_s, \varphi_1(x_1, ..., x_s), ..., \varphi_r(x_1, ..., x_s))$ ning kordajad $\lambda_1, ..., \lambda_r$ määrame nii, et $\frac{\partial \Phi(\mathbf{A})}{\partial x_i} = 0$, kui $i = s+1, ..., m$, s.t.

$$\frac{\partial f(\mathbf{A})}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \frac{dF_k(\mathbf{A})}{\partial x_i} = 0 \ \ (i = s+1, ..., m).$$

Selleks tuleb lahendada mittehomogeenne lineaarne võrrandisüsteem

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \frac{dF_k(\mathbf{A})}{\partial x_{s+1}} = -\frac{\partial f(\mathbf{A})}{\partial x_{s+1}}, \\ ... \\ \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \frac{dF_k(\mathbf{A})}{\partial x_m} = -\frac{\partial f(\mathbf{A})}{\partial x_m}, \end{cases}$$

selle determinandiks on $J(\mathbf{A})$, mis eelduse kohaselt on nullist erinev. Seetõttu leidub süsteemil tõepoolest lahend $(\lambda_1, ..., \lambda_r)$.

Seosest (6.9) tuleneb

$$d\Phi(\mathbf{A}) = df(\mathbf{A}) + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k dF_k(\mathbf{A}) = 0,$$

(võrrandeid (6.8) diferentseerides saame $dF_k = 0$ $(k = 1, ..., r)$), teisalt kehtib alati

$$d\Phi(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \Phi(\mathbf{X})}{\partial x_i} dx_i,$$

seega (peame silmas, et $\frac{\partial \Phi(\mathbf{A})}{\partial x_i} = 0$ $(i = s+1, ..., m)$)

$$0 = d\Phi(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \Phi(\mathbf{A})}{\partial x_i} dx_i. \tag{6.10}$$

Kuna $dx_k = h_k$ on sõltumatud suurused, siis võrdusest (6.10) järeldub $\frac{\partial \Phi(\mathbf{A})}{\partial x_i} = 0$ $(i = 1, ..., s)$. (Näiteks võrduse $\frac{\partial \Phi(\mathbf{A})}{\partial x_1} = 0$ kontrollimiseks võtame $h_1 \neq 0$ ning $h_2 = ... = h_s = 0$ ja seosest (6.10) saame $0 = d\Phi(\mathbf{A}) = \frac{\partial \Phi(\mathbf{A})}{\partial x_1} h_1$, seega $\frac{\partial \Phi(\mathbf{A})}{\partial x_1} = 0$.) Kokkuvõttes,

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{A})}{\partial x_i} = 0 \text{ kõikide } i = 1, ..., m \text{ korral,}$$

s.t. $\mathbf{A}$ on funktsiooni $\Phi$ statsionaarne punkt.

Võtame eelneva arutelu kokku järgnevas teoreemis.

**Teoreem 6.3** *Olgu $m$ muutuja funktsioonil $w = f(x_1, ..., x_m)$ punktis $\mathbf{A}$ tinglik ekstreemum tingimusel* (6.8)*, kusjuures funktsioonidel $f, F_1, ..., F_m$ on selle punkti ümbruses pidevad osatuletised kõigi muutujate $x_1, ..., x_m$ järgi. Sel juhul on täidetud üks järgmistest tingimustest:*
*(a) $\mathbf{A}$ on seosega* (6.9) *määratud funktsiooni $\Phi$ statsionaarne punkt,*
*(b) maatriksi $\left(\frac{\partial F_k(\mathbf{A})}{\partial x_i}\right)$ kõik $r$-järku determinandid on võrdsed nulliga.*

Selle väite illustreerimiseks vaatleme järgmisi näiteid.

**Näide 1.** Leida kahe muutuja funktsiooni $f(x, y) = x^3 + y^3$ ekstreemum tingimusel $x + y = 2$.

Moodustame funktsiooni $\Phi(x, y) := x^3 + y^3 + \lambda(x^3 + y^3 - 2)$ ja arvutame

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 3x^2 + \lambda, \ \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 3y^2 + \lambda.$$

Funktsiooni $\Phi$ statsionaarse punkti leidmiseks tuleb lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} 3x^2 + \lambda = 0, \\ 3y^2 + \lambda = 0 \end{cases}$$

koos võrrandiga $x+y = 2$. Süsteemist saame $x^2 = y^2$, arvestades võrrandit $x+y = 2$, jõuame statsionaarse punktini $\mathbf{A} := (1, 1)$. Kuna see on funktsiooni $\Phi$ ainuke statsionaarne punkt ja maatriksi $\left(\frac{\partial \Phi(\mathbf{A})}{\partial x}, \frac{\partial \Phi(\mathbf{A})}{\partial y}\right) = (1, 1)$ mõlemad esimest järku determinandid on nullist erinevad, siis punktis $\mathbf{A}$ on tõepoolest funktsioonil $f(x, y) = x^3 + y^3$ tingimusel $x + y = 2$ ekstreemum väärtusega 2. Tegemist on tingliku *miinimumiga* (kontrollida!)✠.

**Näide 2.** Leida sellise silindri mõõtmed, mille ruumala on 1 ja üldpinna pindala oleks minimaalne.

Olgu $x$ otsitava silindri põhja raadius ning $y$ silindri kõrgus. Siis pinna pindala on $\mu(x,y) = 2\pi xy + 2\pi x^2 = 2\pi x(x+y)$ ja silindri ruumala on $\pi x^2 y$. Niisiis tuleb meil minimiseerida funktsioon $\mu$ tingimusel $\pi x^2 y = 1$.

Moodustame Lagrange'i funktsiooni $\Phi(x,y) = x^2 + xy + \lambda(\pi x^2 y - 1)$. Selle statsionaarse punkti leidmiseks leiame

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 2x + y + 2\pi\lambda xy, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = x + \pi\lambda x^2$$

ning lahendame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 2x + y + 2\pi\lambda xy = 0, \\ x + \pi\lambda x^2 = 0 \end{cases}$$

koos võrrandiga $\pi x^2 y = 1$. Pidades silmas, et $x \neq 0$, $y \neq 0$, võime süsteemi teise võrrandi kirjutada kujul $2y + 2\pi\lambda xy = 0$, seega annab süsteem võrduse $2x = y$. Ruumala tingimusest saame $2\pi x^3 = 1$, niisiis,

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}, \quad y = 2\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}.$$

Punkt $\mathbf{A} := \left(\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}, 2\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}\right)$ on funktsiooni $\Phi$ ainuke statsionaarne punkt, kuna funktsioonil $\mu$ miinimum eksisteerib (põhjendada!)✠, siis see saab olla vaid punktis $\mathbf{A}$.

**Näide 3.** Leida funktsiooni $f(x,y,z) = xyz$ suurim ja vähim väärtus ringjoonel $\Delta$, mille tekib sfääri

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9 \tag{6.11}$$

ja tasandi

$$x + y + z = 5 \tag{6.12}$$

lõikumisel.

Märgime kõigepealt, et sfäär (6.11) ja tasand (6.12) tõepoolest lõikuvad: tuntud valemi järgi on tasandi $Ax + By + Cz + D = 0$ kaugus nullpunktist võrdne arvuga $\frac{|D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, niisiis on tasandi (6.12) kaugus nullpunktist $\frac{5}{\sqrt{3}}$, mis on väiksem kui sfääri (6.11) raadius 3. Teiseks paneme tähele, et kuna hulk $\Delta$ on kinnine (põhjendada!)✠ ja tõkestatud, siis saavutab pidev funktsioon $f$ sellel hulgal oma suurima ja vähima väärtuse, seega on ülesanne korrektselt püstitatud.

Lihtne on näha, et otsitavad suurim ja vähim väärtus on funktsiooni $f$ tinglikud ekstreemumid tingimustel (6.11) ja (6.12). Nende leidmiseks kasutame eelpool käsitletud Lagrange'i meetodit. Selleks peame eelnevalt veenduma, et vajalikud eeldused 1) - 3) on rahuldatud. On selge, et nii funktsioonil $f$ kui ka seoseid (6.11) ja (6.12) määravatel funktsioonidel $F_1(x,y,z) := x^2 + y^2 + z^2 - 9$ ja $F_2(x,y,z) := x + y + z - 5$ on pidevad osatuletised kõigi muutujate järgi. Teiseks, osatuletiste maatriksi

$$\frac{D(F_1, F_2)}{D(x,y,z)} = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

determinandid on

$$2\,(x-y)\,,\quad 2\,(x-z)\quad \text{ja}\quad 2\,(y-z)\,,$$

need saavad olla korraga nullid vaid siis, kui $x=y=z$, kuid nende võrranditega määratud sirgel ei ole ühiseid punkte ringjoonega $\Delta$ (selgitada!)✠. Niisiis, me võime rakendada Lagrange'i meetodit.

Lagrange'i funktsiooni $\Phi\,(x,y,z) := xyz+\lambda_1\,(x^2+y^2+z^2-9)+\lambda_2\,(x+y+z-5)$ järgi saame järgmise võrrandisüsteemi:

$$\begin{cases} yz+2\lambda_1 x+\lambda_2=0\\ xz+2\lambda_1 y+\lambda_2=0\\ xy+2\lambda_1 z+\lambda_2=0\end{cases} \tag{6.13}$$

(kontrollida!)✠. Selle lahendamiseks kasutame seostest (6.11) ja (6.12) tulenevat võrdust

$$yz+xz+xy=\frac{1}{2}\left[(x+y+z)^2-\left(x^2+y^2+z^2\right)\right]=8$$

(kontrollida!)✠, mistõttu süsteemist saame

$$10\lambda_1+3\lambda_2=-8. \tag{6.14}$$

Edasi, lahutades süsteemi (6.13) esimesest võrrandist teise, teisest kolmanda ja kolmandast esimese, saame

$$\begin{cases} (z-2\lambda_1)\,(y-x)=0\\ (x-2\lambda_1)\,(z-y)=0\\ (y-2\lambda_1)\,(x-z)=0\end{cases}.$$

Siin ei saa vahed $y-x$, $z-y$ ja $x-z$ kõik olla nullist erinevad, kuid neist vaid üks saab võrduda nulliga (selgitada!)✠.

*Vaatleme kõigepealt juhtu* $x-y=0$, siis $2\lambda_1=x=y$ (kontrollida!)✠ ning (tänu seosele (6.12)) $z=5-2x$. Süsteemi (6.13) esimene võrrand saab kuju $5x-2x^2+x^2+\lambda_2=0$ ehk

$$\lambda_2=x^2-5x.$$

Seosest (6.14) saame võrrandi

$$3x^2-10x+8=0$$

mille lahenditeks on $x_1=2$ ja $x_2=4/3$. Pidades silmas eelpool fikseeritud seoseid $y=x$ ning $z=5-2x$, jõuame kahe võimaliku ekstreemumpunktini: $(2,2,1)$ ja $(4/3,4/3,7/3)$.

*Eeldades, et* $z-y=0$, ja korrates sama arutelu, saame punktid $(2,1,2)$ ja $(4/3,7/3,4/3)$, *juhul* $x-z=0$ aga punktid $(1,2,2)$ ja $(7/3,4/3,4/3)$. Nüüd on lihtne veenduda, et funktsioon $f$ saavutab ringjoonel $\Delta$ oma suurima väärtuse $\frac{112}{27}$ punktides $(4/3,4/3,7/3)$, $(4/3,7/3,4/3)$ ja $(7/3,4/3,4/3)$ ning vähima väärtuse 4 punktides $(2,2,1)$, $(2,1,2)$ ja $(1,2,2)$.

# 7 Joonintegraalid

## 7.1 Joone kaare pikkus

**Jooned ruumis** $\mathbb{R}^m$. Olgu igale arvule $t$ lõigust $[\alpha, \beta]$ seatud vastavusse ruumi $\mathbb{R}^m$ punkt $(\varphi_1(t), ..., \varphi_m(t))$, siis on määratud kujutus

$$\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^m, \ \ t \mapsto (\varphi_1(t), ..., \varphi_m(t)),$$

mida me nimetame reaalse argumendiga (ehk parameetriga) *vektorfunktsiooniks.* Punktide hulka

$$\{(\varphi_1(t), ..., \varphi_m(t)) \mid t \in [\alpha, \beta]\}$$

nimetame (vektorfunktsiooniga $\gamma$ defineeritud) *jooneks* ruumis $\mathbb{R}^m$. Tavaliselt antakse see joon *parameetriliste võrranditega*

$$\left\{ \begin{array}{c} x_1 = \varphi_1(t) \\ ... \\ x_m = \varphi_m(t) \end{array} \right. \quad (t \in [\alpha, \beta]). \tag{7.1}$$

Joont (7.1) nimetatakse **pidevaks**, kui kõik *koordinaatfunktsioonid* $\varphi_1, ..., \varphi_m$ on pidevad lõigus $[\alpha, \beta]$. Kui funktsioonid $\varphi_1, ..., \varphi_m$ on lõigus $[\alpha, \beta]$ pidevalt diferentseeruvad ja tuletised $\varphi_1'(t), ..., \varphi_m'(t)$ ei ole korraga nullid selle lõigu üheski punktis $t$, siis joont (7.1) nimetatakse **siledaks.**

Me vaatleme järgnevas **pidevaid jooni ruumis** $\mathbb{R}^2$ ehk $xy$-tasandil. Seejuures eeldame tavaliselt, et neil ei ole *kordseid punkte*, s.t. erinevate argumendi väärtuste $t_1$ ja $t_2$ korral lõigust $[\alpha, \beta]$ neile vastavd joone punktid $(\varphi_1(t_1), \varphi_2(t_1))$ ja $(\varphi_1(t_2), \varphi_2(t_2))$ on erinevad. Selliseid pidevaid jooni nimetatakse **lihtsateks kaarteks**. Enamus praktikas tähtsust omavaid jooni on esitatavad **lihtsate kaarte lõplike ühendina.**

**Lepime kokku**, et kaart otspunktidega **A** ja **B** tähistame edaspidi $AB$.

Olgu antud lihtne kaar $L = AB$ võrranditega

$$x = \varphi_1(t), \quad y = \varphi_2(t) \qquad (t \in [\alpha, \beta]), \tag{7.2}$$

kus $\mathbf{A} = (\varphi_1(\alpha), \varphi_2(\alpha))$ ning $\mathbf{B} = (\varphi_1(\beta), \varphi_2(\beta))$. Jaotame lõigu $[\alpha, \beta]$ osadeks punktidega

$$\alpha = t_0 < t_1 < ... < t_{n-1} < t_n = \beta, \tag{7.3}$$

tähistame selle alajaotuse $T[t_0, ..., t_n]$. Olgu $\lambda$ osalõikude $[t_0, t_1], [t_1, t_2], ..., [t_{n-1}, t_n]$ pikkuste maksimaalne väärtus, s.t.

$$\lambda = \max_{1 \le i \le n} (t_i - t_{i-1}).$$

Tähistame $\mathbf{X}_i := (\varphi_1(t_i), \varphi_2(t_i))$ $(i = 0, ..., n)$, need on lõigu jaotuspunktidele vastavad joone punktid. Ühendame sirglõiguga omavahel iga kaks järjestikust punkti $\mathbf{X}_{i-1}$ ja $\mathbf{X}_i$ $(i = 1, ..., n)\, m$, saame kaare $AB$ *kõõlmurdjoone* $\pi = \mathbf{X}_0\mathbf{X}_1...\mathbf{X}_{n-1}\mathbf{X}_n$ (siin $\mathbf{X}_0 = \mathbf{A}$ ja $\mathbf{X}_n = \mathbf{B}$). Selle murdjoone pikkuse märgime tähega $p$.

**Definitsioon.** Ütleme, et võrranditega (7.2) antud joon on *tükati sile*, kui ta on pidev ning leidub lõigu $[\alpha, \beta]$ selline alajaotus (7.3), mille puhul kõik kaared $X_{i-1}X_i$ $(i = 1, ..., n)$, kus $\mathbf{X}_i := (\varphi_1(t_i), \varphi_2(t_i))$, on siledad.

**Definitsioon.** Kui eksisteerib $\lim_{\lambda\to 0} p$, siis seda piirväärtust nimetame *kaare* $AB$ *pikkuseks.* Kui kaarel on olemas lõplik pikkus, siis nimetatakse teda *sirgestuvaks.*

Paneme tähele, et jaotuse peenendamisel kõõlmurdjoone pikkus $p$ ei kahane (selgitada!)✠.

**Lause 7.1** *Pideva joone kaar on sirgestuv parajasti siis, kui tema kõõlmurdjoonte pikkused on tõkestatud.*

**Tõestus.** *Tarvilikkus.* Eeldame, et eksisteerib $\lim_{\lambda\to 0} p =: s$. Sel juhul iga $\varepsilon > 0$ korral leidub selline $\delta > 0$, et kui $\lambda < \delta$, siis $p \in (s - \varepsilon, s + \varepsilon)$. Niisiis, kui $\lambda < \delta$, siis $p < M := s + \varepsilon$. Veendume, et sama hinnang kehtib ka juhul $\lambda \geq \delta$. Olgu antud selline jaotus $T[t_0, ..., t_n]$, et tema maksimaalse lõigu pikkus $\lambda$ ei ole väiksem arvust $\delta$, olgu $p$ talle vastava murdjoone pikkus. Peenendame seda jaotust uute punktide juurdevõtmise teel niimoodi, et uue jaotuse korral maksimaalse osalõigu pikkus $\lambda' < \delta$ , seega siis uuele jaotusele vastav murdjoone pikkus $p'$ on väiksem kui $M$. Kuna jaotuse peenendamisel murdjoone pikkus ei saa kahaneda, siis $p \leq p' < M$.

*Piisavus.* Kui kaare $AB$ kõikvõimalike kõõlmurdjoonte pikkused on ülalt tõkestatud, siis nendel pikkustel on olemas ülemine raja $\sup p =: L$. Näitame, et $L = \lim_{\lambda\to 0} p$.

Olgu $\varepsilon$ suvaline positiivne arv. Leiame kaare $AB$ sellise kõõlmurdjoone $Q_0Q_1...Q_l(Q_0 = A, Q_l = B)$, et tema pikkus $q$ oleks suurem kui $L - \frac{\varepsilon}{2}$. Olgu $\alpha = t'_0 < t'_1 < ... < t'_l = \beta$ sellele murdjoonele vastav alajaotus lõigus $[\alpha, \beta]$. Arvestades funktsiooni $\sqrt{\varphi_1(t)^2 + \varphi_2(t)^2}$pidevust, saame Cantori teoreemi põhjal leida niisuguse $\delta > 0$, et

$$[|t - t'| < \delta,\ t, t' \in [\alpha, \beta]] \Rightarrow \sqrt{(\varphi_1(t) - \varphi_1(t'))^2 + (\varphi_2(t) - \varphi_2(t'))^2} < \frac{\varepsilon}{4(l-1)}$$

(selgitada!)✠. Olgu $X_0X_1...X_n(X_0 = A, X_n = B)$ kaare $AB$ mingi selline kõõlmurdjoon, mis vastab lõigu $[\alpha, \beta]$ teatavale alajaotusele (7.3) omadusega $\lambda < \delta$.

Teeme lõigus $[\alpha, \beta]$ alajaotuse punktidega $t_0, ..., t_n$ ja $t'_0, ..., t'_l$. See määrab uue kõõlmurdjoone $Z_0, Z_1, ..., Z_s$, mille tippudeks on punktid $X_0, X_1, ..., X_n$ja $Q_1, ..., Q_{l-1}$. Iga tipu $Q_i$ juurdevõtmisel murdjoonele $X_0X_1...X_n$ tekib selle teatava lüli $X_{k-1}X_k := [\mathbf{X}_{k-1}\mathbf{X}_k]$ asemele kaks uut lüli $X_{k-1}Q_i$ ning $Q_iX_k$, seejuures

$$|X_{k-1}Q_i| = \sqrt{(\varphi_1(t_{k-1}) - \varphi_1(t'_i))^2 + (\varphi_2(t_{k-1}) - \varphi_2(t'_i))^2},$$
$$|Q_iX_k| = \sqrt{(\varphi_1(t'_i) - \varphi_1(t_k))^2 + (\varphi_2(t'_i) - \varphi_2(t_k))^2},$$

kus $|XQ|$ tähistab lõigu $[\mathbf{X}, \mathbf{Q}]$ pikkust. Kuna $|t_{k-1} - t'_i| < t_k - t_{k-1} \leq \lambda < \delta$ ja $|t'_i - t_k| < t_k - t_{k-1} \leq \lambda < \delta$, siis $|X_{k-1}Q_i| < \frac{\varepsilon}{4(l-1)}$ ja $|Q_iX_k| < \frac{\varepsilon}{4(l-1)}$. Olgu kõõlmurdjoonte $X_0X_1...X_n$ ja $Z_0, Z_1, ..., Z_s$ pikkused vastavalt $p$ ja $r$, siis

$$r - p < (l-1)\frac{2\varepsilon}{4(l-1)} = \frac{\varepsilon}{2}$$

(selgitada!)✠. Teiselt poolt, $r \geq q > L - \frac{\varepsilon}{2}$ ehk

$$L - r < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Järelikult, kui $\lambda < \delta$, siis

$$|L - p| = L - p = (L - r) + (r - p) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

s.t. $\lim_{\lambda \to 0} p = L$. ■

Esitame kaare pikkuse kaks tähtsat omadust.

**Omadus 7.2** ***(kaare pikkuse monotoonsus).*** *Sirgestuva kaare $AB$ iga osakaar $A'B'$ on sirgestuv, seejuures osakaare pikkus ei ületa kogu kaare pikkust.*

**Tõestus.** Olgu $\pi'$ osakaare $A'B'$ mingi kõõlmurdjoon pikkusega $p'$. Moodustame ka osakaarte $AA'$ ja $B'B$ kõõlmurdjooned, saame kogu kaare $AB$ kõõlmurdjoone $\pi$ pikkusega $p$. Lause 7.1 kohaselt leidub selline positiivne arv $M$, et kaare $AB$ iga kõõlmurdjoone pikkus on väiksem kui $M$, seega $p \leq M$. On selge, et $p' < p$, järelikult $p' < M$. Tähendab, kaare $A'B'$ kõõlmurdjoonte pikkused on tõkestatud, lause 7.1 põhjal on $A'B'$ sirgestuv kaar. ■

**Omadus 7.3** ***(kaare pikkuse aditiivsus).*** *Kui kaar $AB$ on sirgestuv, siis tema pikkus on võrdne kaarte $AC$ ja $CB$ pikkuste summga, kus* **C** *on suvaline punkt kaarel $AB$.*

**Tõestus.** Moodustame kaarte $AC$ ja $CB$ kõõlmurdjooned $\pi'$ ja $\pi''$, olgu nende pikkused vastavalt $p'$ ja $p''$. Siis nende murdjoonte ühend $\pi := \pi' \cup \pi''$ on kaare $AB$ kõõlmurdjoon pikkusega $p := p' + p''$. Eelduse kohaselt eksisteerib $s := \lim_{\lambda \to 0} p$, omaduse 7.2 põhjal leiduvad $s' := \lim_{\lambda \to 0} p'$ ja $s'' := \lim_{\lambda \to 0} p''$, siit järeldub $s = s' + s''$. ■

Järgnevalt tõestame olulise tehnilise lause, mis edaspidi võimaldab meil kaare pikkust arvutada integraali abil. **NB!** Kaare $AB$ pikkust tähistame siin ja edaspidi sümboliga $|AB|$.

**Lause 7.4** *Olgu kaar $AB$ antud võrranditega* (7.2)*, kus funktsioonid $\varphi_1$ ja $\varphi_2$ on lõigus $[\alpha, \beta]$ pidevalt diferentseeruvad. Siis joon $AB$ on sirgestuv ning iga $t \in [\alpha, \beta]$ korral eksisteerib*

$$s(t) := |AX|, \text{ kus } X = (\varphi_1(t), \varphi_2(t)).$$

*Seejuures funktsioon $s : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ on diferentseeruv ja*

$$s'(t) = \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \varphi_2'(t)^2}.$$

**Tõestus. A.** Eelduse kohaselt eksisteerivad tuletised $\varphi_1'$ ja $\varphi_2'$, mis on lõigus $[\alpha, \beta]$ pidevad funktsioonid. Siis ka absoluutväärtustega $|\varphi_1'(t)|$ ja $|\varphi_2'(t)|$ määratud funktsioonid on pidevad ning Weierstrassi teoreemi kohaselt saavutavad selles lõigus ekstremaalsed väärtused

$$M_l := \max_{t \in [\alpha, \beta]} |\varphi_l'(t)|, \quad m_l := \min_{t \in [\alpha, \beta]} |\varphi_l'(t)| \quad (l = 1, 2).$$

Lähtume lõigu $[\alpha, \beta]$ jaotusest (7.3) ja moodustame vastava kõõlmurdjoone $\pi = X_0X_1...X_n$, s. t. $\mathbf{X}_i = (\varphi_1(t_i), \varphi_2(t_i))$ $(i = 0, 1, ..., n)$, kusjuures $\mathbf{X}_0 = \mathbf{A}$ ning $\mathbf{X}_n = \mathbf{B}$. Selle murdjoone pikkus on

$$p = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\varphi_1(t_i) - \varphi_1(t_{i-1}))^2 + (\varphi_2(t_i) - \varphi_2(t_{i-1}))^2}. \tag{7.4}$$

Lagrange'i valemi kohaselt leiduvad iga $i = 1, ..., n$ korral vahemikus $(t_{i-1}, t_i)$ punktid $\xi_i$ ja $\eta_i$, et

$$\varphi_1(t_i) - \varphi_1(t_{i-1}) = \varphi_1'(\xi_i)\,\Delta t_i, \quad \varphi_2(t_i) - \varphi_2(t_{i-1}) = \varphi_2'(\eta_i)\,\Delta t_i,$$

kus $\Delta t_i := t_i - t_{i-1}$. Valemist (7.4) saame seega

$$p = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\varphi_1'(\xi_i)^2 + \varphi_2'(\eta_i)^2}\Delta t_i.$$

Kuna

$$\sqrt{m_1^2 + m_2^2} \leq \sqrt{\varphi_1'(\xi_i)^2 + \varphi_2'(\eta_i)^2} \leq \sqrt{M_1^2 + M_2^2}$$

(selgitada!)✠, siis

$$\sqrt{m_1^2 + m_2^2}\sum_{i=1}^{n} \Delta t_i \leq \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\varphi_1'(\xi_i)^2 + \varphi_2'(\eta_i)^2}\Delta t_i \leq \sqrt{M_1^2 + M_2^2}\sum_{i=1}^{n} \Delta t_i,$$

s. t.

$$\sqrt{m_1^2 + m_2^2}\,(\beta - \alpha) \leq p \leq \sqrt{M_1^2 + M_2^2}\,(\beta - \alpha). \tag{7.5}$$

Siit järeldub, et kõõlmurdjoonte pikkused on tõkestatud, niisiis on joon $AB$ sirgestuv, tal on pikkus $s = \lim_{\lambda \to 0} p$. Valemist (7.5) saame protsessis $\lambda \to 0$ võrratused

$$\sqrt{m_1^2 + m_2^2} \leq \frac{s}{\beta - \alpha} \leq \sqrt{M_1^2 + M_2^2}. \tag{7.6}$$

**B.** Olgu $t \in [\alpha, \beta]$ suvaline ja olgu $\mathbf{X} := (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ talle vastav punkt joonel $AB$, seejuures kaar $AX$ on sirgestuv (põhjendada!)✠, tähistame sümboliga $s(t)$ tema pikkuse. Niimoodi defineerisime funktsiooni $s : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, näitame, et ta on diferentseeruv.

Anname argumendile $t$ muudu $h$, olgu $\mathbf{Q} := (\varphi_1(t + h), \varphi_2(t + h))$. Kui $h > 0$, siis $\mathbf{Q}$ paikneb joonel $AB$ punktide $\mathbf{X}$ ja $\mathbf{B}$ vahel, juhul $h < 0$ aga punktide $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{X}$ vahel. Esimesel juhul saame omadusest 7.3 võrduse $|AX| + |XQ| = |AQ|$, teisel $|AQ| + |XQ| = |AX|$. Seejuures $|AX| = s(t)$ ja $|AQ| = s(t + h)$, järelikult

$$|XQ| = \begin{cases} \Delta s, \text{ kui } h > 0, \\ -\Delta s, \text{ kui } h < 0, \end{cases}$$

seega

$$\frac{|XQ|}{|h|} = \frac{\Delta s}{h}.$$

Rakendades kaarele $XQ$ võrratusi (7.6), saame

$$\sqrt{m_1^{*2} + m_2^{*2}} \leq \frac{\Delta s}{h} \leq \sqrt{M_1^{*2} + M_2^{*2}}, \tag{7.7}$$

kus $M_l^* := \max\left|\varphi_l'(t)\right|$, $m_l^* := \min\left|\varphi_l'(t)\right|$ $(l = 1, 2)$ ja maksimum ning miinimum on võetud lõigus otspunktidega $t$ ja $t + h$ (kontrollida!)✠. Seejuures $\lim_{h\to 0} M_1^* = \lim_{h\to 0} m_1^* = \left|\varphi_1'(t)\right|$ ja $\lim_{h\to 0} M_2^* = \lim_{h\to 0} m_2^* = \left|\varphi_2'(t)\right|$ (see tuleneb funktsioonide $\varphi_1'$ ja $\varphi_2'$ pidevusest punktis $t$ (selgitada!)✠), seega

$$\lim_{h\to 0}\sqrt{M_1^{*2} + M_2^{*2}} = \lim_{h\to 0}\sqrt{m_1^{*2} + m_2^{*2}} = \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \varphi_2'(t)^2}$$

ning seostest (7.7) saame

$$s'(t) = \lim_{h\to 0}\frac{\Delta s}{h} = \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \varphi_2'(t)^2}.$$

Lause on tõestatud. ■

**Järeldus 7.5** *Lause* 7.4 *eeldustel saab joone* $AB$ *pikkuse arvutada valemist*

$$|AB| = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \varphi_2'(t)^2}dt.$$

**Tõestus.** Newton-Leibnizi valemist saame

$$\int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \varphi_2'(t)^2}dt = \int_\alpha^\beta s'(t)\,dt = s(\beta) - s(\alpha) = |AB| - 0 = |AB|.$$

■

**Järeldus 7.6** *Iga tükati siledal joonel on lõplik pikkus.*

**Tõestus.** Iseseisvalt!✠. ■

## 7.2 Esimest liiki joonintegraal

Olgu **sirgestuv** joon $L = AB$ antud võrranditega (7.2) ja olgu **sellel joonel** määratud kahe muutuja funktsioon $w = f(x, y)$. Moodustame lõigu $[\alpha, \beta]$ jaotuse $T[t_0, ..., t_n]$, olgu $\mathbf{X}_0 = \mathbf{A} = (\varphi_1(\alpha), \varphi_2(\alpha))$, $\mathbf{X}_i = (\varphi_1(t_i), \varphi_2(t_i))$ $(i = 1, ..., n-1)$ ja $\mathbf{X}_n = \mathbf{B} = (\varphi_1(\beta), \varphi_2(\beta))$. Need punktid jaotavad joone $AB$ $n$ kaareks $AX_1, X_1X_2, ..., X_{n-1}B$, kaar $X_{i-1}X_i$ määratakse võrranditega (7.2), kus $t \in [t_{i-1}, t_i]$. Valime igas lõigus $[t_{i-1}, t_i]$ suvaliselt punkti $\tau_i$, olgu $\mathbf{Q}_i := (\varphi_1(\tau_i), \varphi_2(\tau_i))$, see punkt asub kaarel $X_{i-1}X_i$. Moodustame summa

$$\sigma := \sum_{i=1}^n f(\mathbf{Q}_i)\, s_i,$$

kus $s_i := |X_{i-1}X_i|$ on kaare $X_{i-1}X_i$ pikkus. Nagu eespool, olgu ka edaspidi $\lambda$ lõikude $[t_{i-1}, t_i]$ $(i = 1, ..., n)$ maksimaalne pikkus.

**Definitsioon.** Kui eksisteerib $\lim_{\lambda\to 0}\sigma$, siis seda piirväärtust nimetatakse funktsiooni $f$ *esimest liiki joonintegraaliks* (ehk joonintegraaliks kaare pikkuse järgi) üle joone $L$ ning tähistatakse $\int_L f(x, y)\, ds$ või lühemalt $\int_L f ds$. Integraali $\int_L$ asemel kirjutame tihti ka $\int_{AB}$.

Selle definitsiooni kohaselt on arv $J$ funktsiooni $f$ esimest liiki joonintegraal üle $L$ parajasti siis, kui iga $\varepsilon > 0$ puhul leidub selline $\delta > 0$, et kui alajaotuse (7.3) kõik osalõigud on lühemad kui $\delta$, siis $|\sigma - J| < \varepsilon$. Sileda joone korral annab tema arvutamiseks valemi järgmine lause.

**Lause 7.7** *Olgu võrranditega* (7.2) *antud sile joon* $L = AB$*, millel on määratud pidev funktsioon* $w = f(x, y)$*. Siis eksisteerib esimest liiki joonintegraal* $\int_L f ds$*, seejuures kehtib võrdus*

$$\int_L f ds = \int_\alpha^\beta f(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \varphi_2'(t)^2} dt.$$

**Tõestus.** Tähistame $\Phi(t) := f(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \quad (t \in [\alpha, \beta])$, siis $f(\mathbf{Q}_i) = \Phi(\tau_i)$ iga $i = 1, ..., n$ korral. Järelduse 7.5 kohaselt $s_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \varphi_2'(t)^2} dt$, seega saame integraalsummale kuju

$$\sigma = \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Phi(\tau_i) \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \varphi_2'(t)^2} dt.$$

Vaatleme integraali $\int_\alpha^\beta \Phi(t) \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \varphi_2'(t)^2} dt =: I$. Kuna integraalialune funktsioon on pidev (veenduda!)✠, siis see integraal tõepoolest eksisteerib. Riemanni integraali aditiivsuse omaduse tõttu

$$I = \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Phi(t) \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \varphi_2'(t)^2} dt,$$

niisiis

$$\sigma - I = \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\Phi(\tau_i) - \Phi(t)) \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \varphi_2'(t)^2} dt.$$

Funktsioon $\sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \varphi_2'(t)^2}$ on lõigus $[\alpha, \beta]$ pidev, seega on ta tõkestatud, s.t. $M := \sup_{t \in [\alpha,\beta]} \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \varphi_2'(t)^2}$ on lõplik. Funktsioon $\Phi$ kui pidev funktsioon on Cantori teoreemi põhjal ühtlaselt pidev lõigus $[\alpha, \beta]$. Olgu $\varepsilon$ suvaline positiivne arv. Ühtlase pidevuse definitsiooni kohaselt saab valida $\delta > 0$ niiviisi, et kui $t, t' \in [\alpha, \beta]$ ja $|t - t'| < \delta$, siis $|\Phi(t) - \Phi(t')| < \frac{\varepsilon}{M(\beta-\alpha)}$. Siit järeldub, et kui lõigu $[\alpha, \beta]$ jaotuses kõikide osalõikude pikkused on väiksemad kui $\delta$, siis kõikide $t, \tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$ korral $|\Phi(\tau_i) - \Phi(t)| < \frac{\varepsilon}{M(\beta-\alpha)}$ ning

$$|\sigma - I| < \varepsilon.$$

Teisi sõnu, $\lim_{\lambda \to 0} \sigma = I$. Lause on tõestatud. ■

**Märkus 1.** Selgitame esimest liiki joonintegraali **füüsikalist sisu.** Olgu võrranditega (7.2) määratud lihtne *materiaalne* joon $AB$, mille mass jaotub joonel vastavalt funktsioonile $w = f(x, y)$, s.t. punktis $\mathbf{X} \in AB$ on joone massi tihedus $f(\mathbf{X})$. Selleks, et arvutada kogu joone massi, jaotame ta väikesteks osadeks $AX_1$, $X_1X_2$, ..., $X_{n-1}B$. Kui osakaared on küllalt väikesed, võime eeldada, et neil on massi tihedus konstantne ja osakaare $X_{i-1}X_i$ ligikaudse massi saame, kui korrutame tema pikkuse $s_i$ selle konstantse tihedusega, s.o. arvuga $f(\mathbf{Q}_i)$ kus $\mathbf{Q}_i \in X_{i-1}X_i$. Kogu joone $AB$ ligikaudne mass võrdub sel juhul integraalsummaga $\sigma$, tema täpne mass aga piirväärtusega $\lim_{\lambda \to 0} \sigma = \int_L f ds$.

## 7.3 Teist liiki joonintegraal

Olgu **pidev** joon $L = AB$ antud võrranditega (7.2), kus $\mathbf{A} = (\varphi_1(\alpha), \varphi_2(\alpha))$ ja $\mathbf{B} = (\varphi_1(\beta), \varphi_2(\beta))$. Olgu sellel joonel määratud kahe muutuja funktsioon $w = f(x, y)$.

Moodustame lõigu $[\alpha, \beta]$ alajaotuse $T[t_0, ..., t_n]$, olgu $\mathbf{X}_0 = \mathbf{A}$, $\mathbf{X}_i = (\varphi_1(t_i), \varphi_2(t_i))$ $(i = 1, ..., n-1)$ ja $\mathbf{X}_n = \mathbf{B}$. Need punktid jaotavad joone $L$ $n$ kaareks $AX_1$, $X_1X_2, ...,$ $X_{n-1}B$, mis vastvad osalõikudele $[\alpha, t_1], [t_1, t_2], ...,$ $[t_{n-1}, \beta]$. Valime igas osalõigus $[t_{i-1}, t_i]$ suvaliselt punkti $\tau_i$, olgu $\mathbf{Q}_i := (\varphi_1(\tau_i), \varphi_2(\tau_i))$, see punkt asub kaarel $X_{i-1}X_i$. Moodustame summad

$$\sigma_1 := \sum_{i=1}^{n} f(\mathbf{Q}_i)\,\Delta x_i \text{ ja } \ \sigma_2 := \sum_{i=1}^{n} f(\mathbf{Q}_i)\,\Delta y_i,$$

kus $\Delta x_i := \varphi_1(t_i) - \varphi_1(t_{i-1})$ ning $\Delta y_i := \varphi_2(t_i) - \varphi_2(t_{i-1})$. Märgime, et $\Delta x_i$ ja $\Delta y_i$ on kaare $X_{i-1}X_i$ projektsioonid vastavalt $x$- ja $y$-teljele. Olgu $\lambda$ lõikude $[t_{i-1}, t_i]$ $(i = 1, ..., n)$ maksimaalne pikkus.

**Definitsioon.** Kui eksisteerivad $\lim_{\lambda\to 0} \sigma_1$ ja $\lim_{\lambda\to 0} \sigma_2$, siis neid piirväärtusi nimetatakse funktsiooni $f$ *teist liiki joonintegraalideks* (ehk joonintegraalideks koordinaatide järgi) üle joone $L$ ning tähistatakse vastavalt $\int_L f(x, y)\,dx$ ja $\int_L f(x, y)\,dy$ või lühemalt $\int_L f dx$ ja $\int_L f dy$. Integraali $\int_L$ asemel kirjutame mõnikord ka $\int_{AB}$.

Definitsiooni kohaselt on arv $J_1$ funktsiooni $f$ teist liiki joonintegraal koordinaadi $x$ järgi üle joone $L$ parajasti siis, kui iga $\varepsilon > 0$ puhul leidub selline $\delta > 0$, et kui alajaotuse (7.3) kõik osalõigud on lühemad kui $\delta$, siis $|\sigma_1 - J_1| < \varepsilon$. Analoogiline kommentaar on õige ka koordinaadi $y$ järgi võetud integraali juurde.

Tavaliselt esineb rakendustes teist liiki integraalide summa kujul $\int_L F dx + \int_L G dy$, mida tähistatakse lühidalt

$$\int_L F dx + G dy.$$

Pidades silmas, et $\Delta x_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varphi_1'(t)\,dt$ ja $\Delta y_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varphi_2'(t)\,dt$ $(i = 1, ..., n)$ (selgitada!)✠, siis saab analoogiliselt lausega 7.7 tõestada järgmise lause, mis annab valemid teist liiki joonintegraalide arvutamiseks tavalise Riemanni integraali abil.

**Lause 7.8** *Olgu võrranditega* (7.2) *antud sile joon $L$, millel on määratud pidev funktsioon $w = f(x, y)$. Siis eksisteerivad teist liiki joonintegraalid $\int_L f dx$ ja $\int_L f dy$, seejuures kehtivad võrdused*

$$\int_L f dx = \int_\alpha^\alpha f(\varphi_1(t), \varphi_2(t))\,\varphi_1'(t)\,dt \text{ ja } \int_L f dy = \int_\alpha^\alpha f(\varphi_1(t), \varphi_2(t))\,\varphi_2'(t)\,dt.$$

**Tõestus.** Selle väite tõestus kordab sõna-sõnalt lause 7.7 tõestust, kui selles funktsioon $\sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \varphi_2'(t)^2}$ asendada vastavalt funktsiooniga $\varphi_1'(t)$ või $\varphi_2'(t)$ (veenduda!)✠. ■

**Märkused. 2**. Lause 7.8 puhul saab nõuet joone sileduse kohta nõrgendada. Lause tõestus jääb integraali $\int_L f dx$ jaoks kehtima, kui eeldada, et funktsioon $\varphi_1$ on lõigus $[\alpha, \beta]$

pidevalt diferentseeruv. Integraali $\int_L f dy$ puhul piisab eeldusest, et $\varphi_2$ on pidevalt diferentseeruv.

**3.** Kui lausete 7.7 ja 7.8 eeldused kas joone või integraalialuse funktsiooni suhtes on rikutud lõpliku arvu joone $L$ punktide korral, siis saab jagada joone lõplikuks arvuks kaarteks $L_1, , , ., L_r,$ mis kõik rahuldavad nende lausete eeldusi. Sel juhul eksisteerivad integraalid $\int_{L_1}, ..., \int_{L_r}$ ja, arvestades joonintegraalide aditiivsuse omadust (see tuleneb Riemanni integraali aditiivsuset ning lausetes 7.7 ja 7.8 tõestatud valemitest (kontrollida!)✠), saame $\int_L = \int_{L_1} + ... + \int_{L_r}$ kõikide eelpool vaadeldud joonintegraalide puhul. Eriti kehtib see juhul, kui funktsioon $f$ on pidev ning joon $L$ **on tükati sile**, s.t. koosneb lõplikust arvust siledatest kaartest.

**4.** Oluline **erinevus esimest ja teist liiki joonintegraalide vahel** seisneb selles, et

$$\int_{AB} f ds = \int_{BA} f ds, \text{ kuid } \int_{AB} f dx = -\int_{BA} f dx \text{ ja } \int_{AB} f dy = -\int_{BA} f dy.$$

Esimest liiki integraali korral on toodud võrdus ilmne, sest $|X_{i-1}X_i| = |X_iX_{i-1}| = s_i$ iga $i$ korral. Seevastu teist liiki joonintegraalid on tundlikud integreerimissuuna vahetuse suhtes. Tõepoolest, integraalsummades $\sigma_1 = \sum_{i=1}^n f(\mathbf{Q}_i)\Delta x_i$ ja $\sigma_2 = \sum_{i=1}^n f(\mathbf{Q}_i)\Delta y_i$ saame integreerimissuuna muutmisel $\Delta x_i$ ja $\Delta y_i$ asemel vastavalt $-\Delta x_i$ ja $-\Delta y_i$, millest tuleneb märgi muutus ülaltoodud valemites (kontrollida!)✠.

**5.** Kui võrranditega (7.2) määratud joon $L = AB$, üle mille me joonintegraali defineerime, on **kinnine joon** (ehk kinnine kontuur) $L$, siis $\mathbf{A} = (\varphi_1(\alpha), \varphi_2(\alpha)) = (\varphi_1(\beta), \varphi_2(\beta)) = \mathbf{B}$. Võtame vabalt joonel punkti $\mathbf{C}$ ning fikseerime integreerimissuuna (ühe kahest võimalikust). Integraali aditiivsust arvestades saame $\int_L = \int_{AC} + \int_{CA}$ eeldusel, et parempoolsed integraalid eksisteerivad. Lihtne on veenduda, et $\int_L$ ei sõltu punktide $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{C}$ valikust (kontrollida!)✠, küll aga sõltub ta teist liiki joonintegraali puhul integreerimissuuna valikust. Lepime kokku lugeda **positiivseks suunaks** see, mille korral liikumisel kontuuri sisemus jääb vasakule (nn. "kellaosuti liikumisele vastupidine" suund), ning eeldame, et integraalis $\int_L$ üle kinnise joone $L$ integreerimissuunaks on valitud positiivne suund. Esimest liiki joonintegraali puhul ei oma suunavalik tähtsust, teist liiki integraalide puhul on vaja vastupidises suunas integreerimisel võtta integraali märgi ette miinusmärk.

## 7.4 Ruumiline joonintegraal

Olgu joon $L = AB$ kolmemõõtmelises ruumis $\mathbb{R}^3$ antud võrranditega

$$x = \varphi_1(t), \; y = \varphi_2(t), \; z = \varphi_3(t) \quad (t \in [\alpha, \beta]),$$

kusjuures $\mathbf{A} = (\varphi_1(\alpha), \varphi_2(\alpha), \varphi_3(\alpha))$ ja $\mathbf{B} = (\varphi_1(\beta), \varphi_2(\beta), \varphi_3(\beta))$. Eeldame, et joonel ei ole kordseid punkte: erinevatele parameetri $t \in [\alpha, \beta]$ väärtustele vastavad loone erinevad punktid. Nii nagu tasandilise joone korral moodustame lõigu $[\alpha, \beta]$ alajaotuse $T[t_0, ..., t_n]$, olgu $\lambda := \max_{1 \le i \le n}(t_i - t_{i-1})$. Tähistame $\mathbf{X}_i := (\varphi_1(t_i), \varphi_2(t_i), \varphi_3(t_i))$ $(i = 0, ..., n)$, need on lõigu jaotuspunktidele vastavad joone punktid. Ühendame sirglõiguga omavahel iga kaks järjestikust punkti $\mathbf{X}_{i-1}$ ja $\mathbf{X}_i$ $(i = 1, ..., n)$, saame kaare $AB$ kõõlmurdjoone $\pi = X_0X_1...X_n$, seejuures $\mathbf{X}_0 = \mathbf{A}$ ja $\mathbf{X}_n = \mathbf{B}$. Selle murdjoone pikkuse märgime tähega $p$. Joone $AB$ pikkuseks loeme arvu $s := \lim_{\lambda \to 0} p$, kui see eksisteerib. Sel juhul ütleme, et joon $AB$ on sirgestuv. Saab näidata (analoogiliselt tasandilise juhuga), et kui funktsioonidel $\varphi_1$, $\varphi_2$ ja $\varphi_3$ on olemas pidevad tuletised, siis joon on sirgestuv ja

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \varphi_2'(t)^2 + \varphi_3'(t)^2} dt.$$

Olgu sellel joonel määratud kolme muutuja funktsioon $w = f(x, y, z)$. Olgu $s_i$ kaare $X_{i-1}X_i$ pikkus, valime igal kaarel $X_{i-1}X_i$ suvaliselt mingi punkti $\mathbf{Q}_i$ $(i = 1, ..., n)$ ja moodustame integraalsumma

$$\sigma := \sum_{i=1}^{n} f(\mathbf{Q}_i) s_i.$$

Kui eksisteerib piirväärtus $\lim_{\lambda \to 0} \sigma =: \int_L f ds$, siis seda nimetatakse funktsiooni $f$ esimest liiki joonintegraaliks üle ruumilise joone $L$.

Moodustame summad

$$\sigma_1 := \sum_{i=1}^{n} f(\mathbf{Q}_i) \Delta x_i, \sigma_2 := \sum_{i=1}^{n} f(\mathbf{Q}_i) \Delta y_i \text{ ja } \sigma_3 := \sum_{i=1}^{n} f(\mathbf{Q}_i) \Delta z_i,$$

kus $\Delta x_i := \varphi_1(t_i) - \varphi_1(t_{i-1})$, $\Delta y_i := \varphi_2(t_i) - \varphi_2(t_{i-1})$ ja $\Delta z_i := \varphi_3(t_i) - \varphi_3(t_{i-1})$. Piirväärtusi

$$\lim_{\lambda \to 0} \sigma_1 =: \int_L f dx, \quad \lim_{\lambda \to 0} \sigma_2 =: \int_L f dy_2, \quad \lim_{\lambda \to 0} \sigma_3 =: \int_L f dz$$

nimetatakse funktsiooni $f$ teist liiki joonintegraalideks üle ruumilise joone $L$.

Defineeritud integraalide arvutamiseks kehtivad valemid (tõestada!)✠

$$\int_L f ds = \int_{\alpha}^{\beta} \Phi(t) \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \varphi_2'(t)^2 + \varphi_3'(t)^2} dt,$$
$$\int_L f dx = \int_{\alpha}^{\beta} \Phi(t) \varphi_1'(t) dt, \int_L f dy = \int_{\alpha}^{\beta} \Phi(t) \varphi_2'(t) dt, \quad \int_L f dz = \int_{\alpha}^{\beta} \Phi(t) \varphi_3'(t) dt,$$

kus $\Phi(t) := f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t))$.

Rakendustes esineb tavaliselt teist liiki joonintegraalide summa

$$\int_L F dx_1 + G dx_2 + H dx_3 := \int_L F dx_1 + \int_L G dx_2 + \int_L H dx_3.$$

# 8 Kahekordne integraal

## 8.1 Kahekordne integraal üle ristküliku

Olgu $R := [a, b] \times [c, d]$ ristkülik tasandil $\mathbb{R}^2$, s.t.

$$R = \{\mathbf{X} = (x, y) \mid a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d\}.$$

*Rõhutame, et kõneldes allpool ristkülikutest, peame me silmas just selliseid, mille küljed on koordinaattelgedega paralleelsed.* Olgu $T[x_0, ..., x_n]$ ning $T[y_0, ..., y_r]$ vastavalt lõikude $[a, b]$ ja $[c, d]$ alajaotused

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b \text{ ja } c = y_0 < y_1 < ... < y_r = d.$$

Siis ristkülik $R$ jaotub *osaristkülikuteks* $R_{kl} := [x_{k-1}, x_k] \times [y_{l-1}, y_l]$ $(k = 1, ..., n;\ l = 1, ..., r)$. Niimoodi saadud **ristküliku $R$ alajaotuse** tähistame $T = T[R_{kl}]$, arvu

$$\lambda(T) := \max_{1 \leq k \leq n,\ 1 \leq l \leq r} \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_l)^2}, \text{ kus } \Delta x_k := x_k - x_{k-1} \text{ ja } \Delta y_l := y_l - y_{l-1},$$

nimetame alajaotuse $T[R_{kl}]$ *diameetriks.*

Olgu $f : R \to \mathbb{R}$ funktsioon. Moodustame (fikseeritud alajaotuse $T$ korral) *integraalsumma*

$$\sigma(T) := \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{r} f(\xi_k, \eta_l) \Delta x_k \Delta y_l,$$

kus punkt $\mathbf{X}_{kl} = (\xi_k, \eta_l)$ on mingi suvaliselt valitud punkt osaristkülikust $R_{kl}$.

**Definitsioon 1.** Arvu $I$ nimetatakse funktsiooni $f$ *kahekordseks Riemanni integraaliks* üle ristküliku $R$, kui iga $\varepsilon > 0$ korral leidub niisugune $\delta > 0$, et iga alajaotuse $T[R_{kl}]$ korral, mille diameeter $\lambda(T)$ on väiksem kui $\delta$, kehtib punktide $\mathbf{X}_{kl} = (\xi_k, \eta_l) \in R_{kl}$ suvalise valiku korral võrratus

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{r} f(\xi_k, \eta_l) \Delta x_k \Delta y_l - I \right| < \varepsilon.$$

Sel juhul kirjutatakse

$$\lim_{\lambda(T) \to 0} \sigma(T) = I,$$

kahekordset integraali tähistatakse

$$I = \int\int_R f(x, y)\, dxdy \text{ ehk, lühemalt, } \int\int_R f d\mu. \tag{8.1}$$

Kui integraal (8.1) eksisteerib, siis ütleme, et funktsioon $f$ on (Riemanni mõttes) ristkülikus $R$ *integreeruv.*

Sarnaselt ühe muutuja funktsioonidega on ka kahe muutuja funktsiooni puhul integreeruvuseks **tarvilik tingimus** tema tõkestatus.

**Lause 8.1** *Iga ristkülikus $R$ integreeruv funktsioon $f$ on selles ristkülikus tõkestatud.*

**Tõestus.** Olgu $f : R \to \mathbb{R}$ integreeruv. Siis leidub ristküliku $R$ selline alajaotus $T\left[R_{kl}\right]$, et

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{r} f\left(\xi_k,\eta_l\right)\Delta x_k \Delta y_l - I\right| < 1 \text{ suvaliste } \mathbf{X}_{kl} \in R_{kl} \text{ puhul.}$$

Kui $\mathbf{A}_{kl}$ ja $\mathbf{B}_{kl}$ on mingid punktid osaristkülikust $R_{kl}$, siis

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{r} f\left(\mathbf{A}_{kl}\right)\Delta x_k \Delta y_l - I\right| < 1 \text{ ja } \left|\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{r} f\left(\mathbf{B}_{kl}\right)\Delta x_k \Delta y_l - I\right| < 1,$$

mistõttu

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{r} f\left(\mathbf{A}_{kl}\right)\Delta x_k \Delta y_l - \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{r} f\left(\mathbf{B}_{kl}\right)\Delta x_k \Delta y_l\right| < 2 \tag{8.2}$$

(selgitada!)✠. Olgu $\mathbf{A}_{kl} = \mathbf{B}_{kl}$ kõikide indeksite $k$ ja $l$ korral, väljaarvatud juht $k = l = 1$, siis tingimusest (8.2) saame võrratuse

$$\left|f\left(\mathbf{A}_{11}\right) - f\left(\mathbf{B}_{11}\right)\right| < \frac{2}{\Delta x_1 \Delta y_1},$$

millest tuleneb tingimus $\left|f\left(\mathbf{A}_{11}\right)\right| < \frac{2}{\Delta x_1 \Delta y_1} + \left|f\left(\mathbf{B}_{11}\right)\right|$. Fikseerides punkti $\mathbf{B}_{11} \in R_{11}$, saame suvalise $\mathbf{X} \in R_{11}$ jaoks hinnangu

$$\left|f\left(\mathbf{X}\right)\right| < M := \frac{2}{\Delta x_1 \Delta y_1} + \left|f\left(\mathbf{B}_{11}\right)\right|,$$

niisiis on funktsioon $f$ osaristkülikus $R_{11}$ tõkestatud. Analoogiliselt kontrollitakse tõkestatust ka ülejäänud osaristkülikutes $R_{kl}$. ■

Olgu $f : R \to \mathbb{R}$ tõkestatud funktsioon, siis antud alajaotuse $T = T\left[R_{kl}\right]$ puhul eksisteerivad

$$M_{kl} := \sup_{\mathbf{X}\in R_{kl}} f\left(\mathbf{X}\right) \quad \text{ja} \quad m_{kl} := \inf_{\mathbf{X}\in R_{kl}} f\left(\mathbf{X}\right)$$

suvaliste $k = 1, ..., n$ ja $l = 1, ..., r$ korral. Moodustame **Darboux' ülem- ja alamsumma**

$$S\left(T\right) := \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{r} M_{kl}\Delta x_k \Delta y_l \quad \text{ning} \quad s\left(T\right) := \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{r} m_{kl}\Delta x_k \Delta y_l,$$

seejuures

$$s\left(T\right) \le \sigma\left(T\right) \le S\left(T\right)$$

(selgitada!)✠ ning

$$\begin{aligned}
\sup_{\substack{\mathbf{X}_{kl}\in R_{kl} \\ 1\le k\le n,\ 1\le l\le r}} \sigma\left(T\right) &= \sup_{\substack{\mathbf{X}_{kl}\in R_{kl} \\ 1\le k\le n,\ 1\le l\le r}} \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{r} f\left(\mathbf{X}_{kl}\right)\Delta x_k \Delta y_l \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{r} \sup_{\mathbf{X}_{kl}\in R_{kl}} f\left(\mathbf{X}_{kl}\right)\Delta x_k \Delta y_l = S\left(T\right), \\
\inf_{\substack{\mathbf{X}_{kl}\in R_{kl} \\ 1\le k\le n,\ 1\le l\le r}} \sigma\left(T\right) &= \inf_{\substack{\mathbf{X}_{kl}\in R_{kl} \\ 1\le k\le n,\ 1\le l\le r}} \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{r} f\left(\mathbf{X}_{kl}\right)\Delta x_k \Delta y_l \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{r} \inf_{\mathbf{X}_{kl}\in R_{kl}} f\left(\mathbf{X}_{kl}\right)\Delta x_k \Delta y_l = s\left(T\right).
\end{aligned} \tag{8.3}$$

Darboux' summade põhilised omadused on samad, mis tavalise (ühekordse) Riemanni integraali puhul.

**Omadus 8.2** *Alajaotuse peenendamisel (s.o. antud alajaotuselt teisele üleminekul uute jaotuspunktide $x_i$ ja/või $y_j$ lisamise teel) ei saa ülemsumma kasvada ega alamsumma kahaneda.*

**Tõestus.** Olgu $S(T)$ antud alajaotusele $T[R_{kl}]$ vastav ülemsumma. Lisame alajaotusse $T[x_0, ..., x_n]$ uue jaotuspunkti $x'$, siis leidub selline $i$, et $x' \in (x_{i-1}, x_i)$. Saame uue alajaotuse $T'$, millele vastab ülemsumma

$$S(T') = \sum_{k=1,\ k\neq i}^{n} \sum_{l=1}^{r} M_{kl}\Delta x_k \Delta y_l + \sum_{l=1}^{r} M_{il}^1 (x' - x_{i-1}) \Delta y_l + \sum_{l=1}^{r} M_{il}^2 (x_i - x') \Delta y_l,$$

kus $M_{il}^1 := \sup_{\mathbf{X}\in[x_{i-1},x']\times[y_{l-1},y_l]} f(\mathbf{X})$ ning $M_{il}^2 := \sup_{\mathbf{X}\in[x',x_i]\times[y_{l-1},y_l]} f(\mathbf{X})$. Selge, et $M_{il}^1 \leq M_{il}$ ja $M_{il}^1 \leq M_{il}$ iga $l = 1, ..., r$ puhul, seega

$$\begin{aligned} S(T') &\leq \sum_{k=1,\ k\neq i}^{n} \sum_{l=1}^{r} M_{kl}\Delta x_k \Delta y_l + \sum_{l=1}^{r} M_{il} (x' - x_{i-1}) \Delta y_l + \sum_{l=1}^{r} M_{il} (x_i - x') \Delta y_l \\ &= S(T). \end{aligned}$$

Analoogiliselt veendutakse, et $s(T') \geq s(T)$. ■

**Omadus 8.3** *Ükski alamsumma ei ole suurem ühestki ülemsummast.*

**Tõestus.** Olgu $T = T[R_{kl}]$ ja $T' = [R_{ij}]$ ristküliku $R$ kaks alajaotust. Näitame, et $s(T') \leq S(T)$. Moodustame uue alajaotuse $T''$, mille määravad kõik jaotuste $T$ ja $T'$ jaotuspunktid. Selge, et $T''$ on peenem kui $T$ ja $T'$. Omaduse 8.2 kohaselt

$$s(T') \leq s(T'') \leq S(T'') \leq S(T).$$

Väide on tõestatud. ■

Omaduse 8.3 põhjal on kõikvõimalike alamsummade hulk $\{s(T)\}$ ülalt tõkestatud ja kõikvõimalike ülemsummade hulk alt tõkestatud. Pidevuse aksioomi kohaselt leiduvad

$$\sup s(T) =: I_* \text{ ja } \inf S(T) =: I^*,$$

kus **rajad on võetud üle ristküliku $R$ kõikvõimalike jaotuste** $T$. Siis

$$s(T) \leq I_* \leq I^* \leq S(T) \tag{8.4}$$

(põhjendada!)✠.

Järgnev teoreem, mida nimetatakse integreeruvuse kriteeriumiks, võimaldab funktsioonide integreeruvuse probleemi taandada Darboux' summade uurimisele.

**Teoreem 8.4** ***(integreeruvuse kriteerium).*** *Tõkestatud funktsioon $f : R \to \mathbb{R}$ on ristkülikus $R$ integreeruv parajasti siis, kui* $\lim_{\lambda(T)\to 0} (S(T) - s(T)) = 0,$ *s.t.*

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \lambda(T) < \delta \Rightarrow S(T) - s(T) < \varepsilon. \tag{8.5}$$

**Tõestus.** *Tarvilikkus.* Eeldame, et $f$ on ristkülikus $R$ integreeruv, olgu $\varepsilon > 0$ suvaline. Leiame $\delta > 0$, et kehtiks $|I - \sigma(T)| < \frac{\varepsilon}{2}$ iga alajaotuse $T$ korral, mille diameeter on väiksem kui $\delta$, s.t.

$$\lambda(T) < \delta \Rightarrow I - \frac{\varepsilon}{2} < \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{r} f(\mathbf{X}_{kl}) \Delta x_k \Delta y_l < I + \frac{\varepsilon}{2}$$

suvalise valiku $\mathbf{X}_{kl} \in R_{kl}$ $(k = 1, ..., n;\ l = 1, ..., r)$ korral. Pidades silmas seoseid (8.3), saame siit

$$I - \frac{\varepsilon}{2} \leq s(T) \leq S(T) \leq I + \frac{\varepsilon}{2},$$

niisiis, $\lim_{\lambda(T)\to 0} S(T) = I$ ja $\lim_{\lambda(T)\to 0} s(T) = I$. Seega $\lim_{\lambda(T)\to 0} (S(T) - s(T)) = 0$.

*Piisavus.* Eeldame, et $\lim_{\lambda(T)\to 0} (S(T) - s(T)) = 0$. Siis seostest (8.4) järeldub võrdus $I_* = I^*$, tähistame tähega $I$ nende ühise väärtuse. Seega $s(T) \leq I \leq S(T)$ iga alajaotuse $T$ puhul. Olgu $\varepsilon > 0$. Leiame sellise $\delta > 0$, et kui $\lambda(T) < \delta$, siis $S(T) - s(T) < \varepsilon$. Kuna nii arv $I$ kui ka summa $\sigma(T)$ asuvad summade $s(T)$ ja $S(T)$ vahel, siis kehtib implikatsioon

$$\lambda(T) < \delta \Rightarrow |\sigma(T) - I| < \varepsilon$$

(selgitada!)✠, mis tähendab, et $\lim_{\lambda(T)\to 0} \sigma(T) = I$. Seega on funktsioon $F$ integreeruv ristkülikus $R$. ■

**Märkus 1.** Kui tähistame

$$\omega_{kl} := M_{kl} - m_{kl}$$

(seda arvu nimetatakse funktsiooni $f$ võnkumiseks ristkülikus $R_{kl}$), siis implikatsiooni (8.5) saame kirjutada kujul

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \lambda(T) < \delta \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{r} \omega_{kl} \Delta x_k \Delta y_l < \varepsilon.$$

**Järeldus 8.5** *Tõkestatud funktsioon $f : R \to \mathbb{R}$ on ristkülikus $R$ integreeruv parajasti siis, kui iga $\varepsilon > 0$ korral saab leida sellise alajaotuse $T$, et $S(T) - s(T) < \varepsilon$.*

**Tõestus.** *Tarvilikkus* järeldub vahetult teoreemist 8.4.

*Piisavus.* Kui iga $\varepsilon > 0$ puhul leidub alajaotus $T$ omadusega $S(T) - s(T) < \varepsilon$, siis sostest (8.4) järeldub $I_* = I^* = \int\int_R f(x, y)\, dxdy$ (vrd. teoreemi 8.4 tõestus). ■

**Järeldus 8.6** *Kui funktsioon $f$ on integreeruv ristkülikus $R = [a, b] \times [c, d]$, siis on ta integreeruv ka igas ristkülikus $R_1 = [a_1, b_1] \times [c_1, d_1]$, mis sisaldub ristkülikus $R$.*

**Tõestus.** Olgu $\varepsilon > 0$. Teoreemi 8.4 kohaselt saame leida sellise $\delta > 0$, et kui alajaotus $T$ rahuldab tingimust $\lambda(T) < \delta$, siis $S(T) - s(T) < \varepsilon$. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et $a_1$ ja $b_1$ on alajaotuse $T[x_0, ..., x_n]$ ning $c_1$ ja $d_1$ on alajaotuse $T[y_0, ..., y_r]$ jaotuspunktid (vastasel korral läheme üle sobivale peenemale alajaotusele $T'$, siis $S(T') - s(T') \leq S(T) - s(T) < \varepsilon$ (selgitada!)✠). Niisiis, olgu $a_1 = x_i$, $b_1 = x_j$, $c_1 = y_p$ ja $d_1 = y_q$, sel juhul

$$\sum_{k=i+1}^{j} \sum_{l=p+1}^{q} \omega_{kl} \Delta x_k \Delta y_l < \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{r} \omega_{kl} \Delta x_k \Delta y_l < \varepsilon.$$

Järelduse 8.5 põhjal on $f : R_1 \to \mathbb{R}$ integreeruv. ■

**Järeldus 8.7** *Olgu $R$ ja $R_0$ ristkülikud, kusjuures $R_0 \subset R$. Kui funktsioon $f$ on integreeruv ristkülikus $R$ ning $f(\mathbf{X}) = 0$ iga $\mathbf{X} \in R \setminus R_0$ korral, siis*

$$\int\int_R f(x,y)\,dxdy = \int\int_{R_0} f(x,y)\,dxdy.$$

**Tõestus.** Iseseisvalt!✠ ■

**Teoreem 8.8** *Kui funktsioon $f : R \to \mathbb{R}$ on ristkülikus $R$ pidev, siis on ta integreeruv.*

**Tõestus.** Olgu $\varepsilon > 0$. Kuna $f$ on Cantori teoreemi kohaselt ristkülikus $R$ ühtlaselt pidev (põhjendada!)✠, siis leidub selline $\delta > 0$, et

$$[\mathbf{X}, \mathbf{X}' \in R,\ \|\mathbf{X} - \mathbf{X}'\| < \delta] \Rightarrow |f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{X}')| < \frac{\varepsilon}{\mu}, \tag{8.6}$$

kus $\mu$ on ristküliku $R$ pindala, s.t. $\mu := (b-a)(d-c)$. Olgu $T$ ristküliku $R$ selline alajaotus, et $\lambda(T) < \delta$. Funktsiooni $f$ pidevuse tõttu saab leida punktid $\mathbf{X}_{kl}, \mathbf{X}'_{kl} \in R_{kl}$ omadusega

$$f(\mathbf{X}_{kl}) = M_{kl} = \sup_{\mathbf{X} \in R_{kl}} f(\mathbf{X}), \quad f(\mathbf{X}'_{kl}) = m_{kl} := \inf_{\mathbf{X} \in R_{kl}} f(\mathbf{X}) \quad (k = 1, ..., n;\ l = 1, ..., r)$$

(põhjendada!)✠. Seega

$$S(T) - s(T) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{r} (f(\mathbf{X}_{kl}) - f(\mathbf{X}'_{kl}))\,\Delta x_k \Delta y_l. \tag{8.7}$$

Kuna $\lambda(T) < \delta$, siis $\|\mathbf{X}_{kl} - \mathbf{X}'_{kl}\| < \delta$ ning tingimustest (8.6) ja (8.7) tuleneb $S(T) - s(T) < \frac{\varepsilon}{\mu} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{r} \Delta x_k \Delta y_l = \varepsilon$ (selgitada!)✠. Teoreemi 8.4 kohaselt on $f$ integreeruv ristkülikus $R$. ■

## 8.2 Kahekordne integraal üle suvalise tõkestatud piirkonna

Olgu nüüd $D \subset \mathbb{R}^2$ tõkestatud hulk, milles on määratud funktsioon $f$. Valime niisuguse ristküliku $R = [a,b] \times [c,d]$, et $D \subset R$, ja defineerime uue funktsiooni $F : R \to \mathbb{R}$ seosega

$$F(\mathbf{X}) := \begin{cases} f(\mathbf{X}), & \text{kui } X \in D, \\ 0, & \text{kui } X \in R \setminus D. \end{cases} \tag{8.8}$$

**Definitsioon 2.** Funktsiooni $f : D \to \mathbb{R}$ nimetame integreeruvaks hulgas $D$, kui funktsioon $F$ on ristkülikus $R$ integreeruv. Sel juhul

$$\int\int_D f(x,y)\,dxdy := \int\int_R F(x,y)\,dxdy.$$

**Märkused. 2.** Integraali $\int\int_D f(x,y)\,dxdy$ väärtus ei sõltu ristküliku $R$ valikust: kui antud funktsiooni $f : D \to \mathbb{R}$ puhul defineerime lisaks funktsioonile $F$, mis on antud seosega (8.8), veel funktsiooni

$$F_1(\mathbf{X}) := \begin{cases} f(\mathbf{X}), & \text{kui } \mathbf{X} \in D, \\ 0, & \text{kui } \mathbf{X} \in R_1 \setminus D, \end{cases} \tag{8.9}$$

kus $R_1$ on samuti hulka $D$ sisaldav ristkülik, siis $\int\int_R F(x,y)\,dxdy = \int\int_{R_1} F_1(x,y)\,dxdy$. **Põhjenduseks** paneme tähele, et $D$ sisaldub sel juhul **ristkülikus** $R \cap R_1 =: R_0$ ning järelduse 8.7 põhjal

$$\int\int_R F(x,y)\,dxdy = \int\int_{R_0} F(x,y)\,dxdy = \int\int_{R_0} F_1(x,y)\,dxdy = \int\int_{R_1} F_1(x,y)\,dxdy.$$

**3.** Olgu $D$ ja $D_1$ tõkestatud hulgad ruumis $\mathbb{R}^2$, kusjuures $D \subset D_1$. Kui $f : D \to \mathbb{R}$ on integreeruv, siis seosega

$$g(\mathbf{X}) := \begin{cases} f(\mathbf{X}), & \text{kui } \mathbf{X} \in D, \\ 0, & \text{kui } \mathbf{X} \in D_1 \diagdown D, \end{cases}$$

määratud funktsioon $g : D_1 \to \mathbb{R}$ on integreeruv hulgas $D_1$ ja vastavad integraalid on võrdsed. **Põhjenduseks** võtame ristküliku $R$, mis sisaldab hulka $D_1$ ning paneme tähele, et kui defineerida $F : R \to \mathbb{R}$ ning $G : R \to \mathbb{R}$ vastavalt seosele (8.8), saame

$$\int\int_D f(x,y)\,dxdy = \int\int_R F(x,y)\,dxdy = \int\int_R G(x,y)\,dxdy = \int\int_{D_1} g(x,y)\,dxdy.$$

Me esitame järgnevalt rea kahekordse integraali omadusi, millest osa jätame lugejale isesisvaks tõestamiseks. Märgime, et tõestused on sarnased vastavate väidete tõestustega tavalise Riemanni integraali korral.

**Omadus 8.9** *Kui funktsioonid $f : D \to \mathbb{R}$ ning $g : D \to \mathbb{R}$ on integreeruvad, siis ka $f + g : D \to \mathbb{R}$ on integreeruv ning*

$$\int\int_D (f(x,y) + g(x,y))\,dxdy = \int\int_D f(x,y)\,dxdy + \int\int_D g(x,y)\,dxdy.$$

**Tõestus.** Olgu $T = T[R_{kl}]$ ristküliku $R \supset D$ mingi alajaotus ja olgu $F : R \to \mathbb{R}$ ning $G : R \to \mathbb{R}$ funktsioonid, mis on määratud vastavalt seostega (8.8) ja

$$G(\mathbf{X}) := \begin{cases} g(\mathbf{X}), & \text{kui } \mathbf{X} \in D, \\ 0, & \text{kui } \mathbf{X} \in R \diagdown D. \end{cases}$$

Siis funktsiooni $F+G$ integraalsumma $\sigma_{F+G}(T)$ on funktsioonide $F$ ja $G$ integraalsummade $\sigma_F(T)$ ja $\sigma_G(T)$ summa:

$$\begin{aligned} \sigma_{F+G}(T) &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{r} (F(\mathbf{X}_{kl}) + G(\mathbf{X}_{kl}))\,\Delta x_k \Delta y_l \\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{r} F(\mathbf{X}_{kl})\,\Delta x_k \Delta y_l + \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{r} G(\mathbf{X}_{kl})\,\Delta x_k \Delta y_l = \sigma_F(T) + \sigma_G(T). \end{aligned}$$

Olgu $\varepsilon > 0$, leiame sellised $\delta_1 > 0$ ja $\delta_2 > 0$, et

$$\lambda(T) < \delta_1 \Rightarrow \left|\sigma_F(T) - \int\int_D f(x,y)\,dxdy\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$
$$\lambda(T) < \delta_2 \Rightarrow \left|\sigma_G(T) - \int\int_D g(x,y)\,dxdy\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Võttes nüüd $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$, saame eeldusel $\lambda(T) < \delta$ tingimuse

$$\begin{aligned}
&\left|\sigma_{F+G}(T) - \left(\int\int_D f(x,y)\,dxdy + \int\int_D g(x,y)\,dxdy\right)\right| \\
&= \left|\left(\sigma_F(T) - \int\int_D f(x,y)\,dxdy\right) + \left(\sigma_G(T) - \int\int_D g(x,y)\,dxdy\right)\right| \\
&\le \left|\sigma_F(T) - \int\int_D f(x,y)\,dxdy\right| + \left|\sigma_G(T) - \int\int_D g(x,y)\,dxdy\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Seega

$$\begin{aligned}
\int\int_D (f(x,y) + g(x,y))\,dxdy &= \int\int_R (F(x,y) + G(x,y))\,dxdy = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sigma_{F+G}(T) \\
&= \lim_{\lambda(T)\to 0} \sigma_F(T) + \lim_{\lambda(T)\to 0} \sigma_G(T) \\
&= \int\int_D f(x,y)\,dxdy + \int\int_D g(x,y)\,dxdy.
\end{aligned}$$

Väide on tõestatud. ■

**Omadus 8.10** *Kui funktsioon $f : D \to \mathbb{R}$ on integreeruv, siis ka $cf : D \to \mathbb{R}$ on iga konstandi $c \in \mathbb{R}$ puhul integreeruv ning*

$$\int\int_D cf(x,y)\,dxdy = c\int\int_D f(x,y)\,dxdy.$$

**Tõestus.** Iseseisvalt!✠ ■

**Omadus 8.11** *Kui funktsioon $f$ on integreeruv nii hulgas $D_1$ kui ka hulgas $D_2$, kusjuures $D_1 \cap D_2 = \varnothing$, siis $f$ on integreeruv hulgas $D_1 \cup D_2$ ja*

$$\int\int_{D_1\cup D_2} f(x,y)\,dxdy = \int\int_{D_1} f(x,y)\,dxdy + \int\int_{D_2} f(x,y)\,dxdy.$$

**Tõestus.** Olgu $R$ ristkülik omadusega $D_1 \cup D_2 \subset R$ ning olgu funktsioonid $g_i : R \to \mathbb{R}$ määratud seosega

$$g_i(\mathbf{X}) = \begin{cases} f(\mathbf{X}), & \text{kui } \mathbf{X} \in D_i, \\ 0, & \text{kui } \mathbf{X} \notin R\diagdown D_i \end{cases} \quad (i = 1, 2).$$

Peame silmas, et eelduse $D_1 \cap D_2 = \varnothing$ tõttu

$$(g_1 + g_2)(\mathbf{X}) = g_1(\mathbf{X}) + g_2(\mathbf{X}) = f(\mathbf{X}) \text{ iga } \mathbf{X} \in D_1 \cup D_2 \text{ korral.} \tag{8.10}$$

Rakendame eelnevat märkust 3, selle kohaselt on funktsioonid $g_i$ $(i = 1, 2)$ hulgas $D_1 \cup D_2$ integreeruvad ja $\int\int_{D_1 \cup D_2} g_i(x, y)\, dxdy = \int\int_{D_i} g_i(x, y)\, dxdy$. Omadusest 8.9 saame tänu seosele (8.10)

$$\begin{aligned}\int\int_{D_1\cup D_2} f(x,y)\,dxdy &= \int\int_{D_1\cup D_2} (g_1(x,y) + g_2(x,y))\,dxdy \\ &= \int\int_{D_1} f(x,y)\,dxdy + \int\int_{D_2} f(x,y)\,dxdy.\end{aligned}$$

Väide on tõestatud. ■

**Omadus 8.12** *Kui funktsioonid $f : D \to \mathbb{R}$ ning $g : D \to \mathbb{R}$ on integreeruvad ja $f(\mathbf{X}) \leq g(\mathbf{X}) \quad (\mathbf{X} \in D)$, siis*

$$\int\int_D f(x,y)\,dxdy \leq \int\int_D g(x,y)\,dxdy.$$

**Tõestus.** Iseseisvalt!✠ ■

**Omadus 8.13** *Kui funktsioon $f : D \to \mathbb{R}$ on integreeruv, siis ka seosega $|f|(\mathbf{X}) := |f(\mathbf{X})|$ määratud funktsioon $|f| : D \to \mathbb{R}$ on integreeruv ning*

$$\left|\int\int_D f(x,y)\,dxdy\right| \leq \int\int_D |f(x,y)|\,dxdy.$$

**Tõestus.** Isesisvalt!✠ ■

**Omadus 8.14** *Kui funktsioonid $f : D \to \mathbb{R}$ ning $g : D \to \mathbb{R}$ on integreeruvad, siis ka nende korrutis $fg : D \to \mathbb{R}$ on integreeruv.*

**Tõestus.** Me esitame siinkohal tõestuse juhul kui $D$ on mingi ristkülik $R$. Lihtne on veenduda, et siis kehtib väide ka suvalise tõkestatud hulga $D$ korral (selgitada!)✠.

Eelduse kohaselt on funktsioonid $f$ ja $g$ hulgas $R$ integreeruvad, seega on nad tõkestatud: leiduvad arvud $M > 0$ ja $K > 0$, et $|f(\mathbf{X})| \leq M$ ning $|g(\mathbf{X})| \leq K$ iga $\mathbf{X} \in R$ puhul. Seejuures $|f(\mathbf{X})\,g(\mathbf{X})| \leq MK \quad (\mathbf{X} \in R)$, tähendab, funktsioonide $f$ ja $g$ korrutis $fg$ on tõkestatud funktsioon hulgas $R$. Olgu $T[R_{kl}]$ ristküliku $R$ mingi alajaotus, meie *eesmärk* on veenduda, et

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{r} \omega_{kl}(fg)\,\Delta x_k \Delta y_l = 0,$$

kus $\omega_{kl}(fg)$ tähistab funktsiooni $fg$ võnkumist osaristkülikus $R_{kl}$, seejuures (vt. märkus 1)

$$\begin{aligned}\omega_{kl}(fg) &= \sup_{\mathbf{X}\in R_{kl}} (f(\mathbf{X})\,g(\mathbf{X})) - \inf_{\mathbf{X}\in R_{kl}} (f(\mathbf{X})\,g(\mathbf{X})) \\ &= \sup_{\mathbf{X},\mathbf{X}'\in R_{kl}} (f(\mathbf{X})\,g(\mathbf{X}) - f(\mathbf{X}')\,g(\mathbf{X}')) \\ &= \sup_{\mathbf{X},\mathbf{X}'\in R_{kl}} |f(\mathbf{X})\,g(\mathbf{X}) - f(\mathbf{X}')\,g(\mathbf{X}')|.\end{aligned}$$

Me *näitame järgnevalt, et*

$$\omega_{kl}(fg) \leq M\omega_{kl}(g) + K\omega_{kl}(f) \quad (k = 1, ..., n;\ l = 1, ..., r), \tag{8.11}$$

kus $\omega_{kl}(f)$ ja $\omega_{kl}(g)$ on vastavalt funktsiooni $f$ ja $g$ võnkumised osaristkülikus $R_{kl}$. Sellest tuleneb väide, sest

$$\begin{aligned} 0 &\le \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{r}\omega_{kl}(fg)\,\Delta x_k\Delta y_l \\ &\le M\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{r}\omega_{kl}(g)\,\Delta x_k\Delta y_l + K\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{r}\omega_{kl}(fg)\,\Delta x_k\Delta y_l \to 0 \quad (\lambda(T)\to 0) \end{aligned}$$

(põhjendada!)✠, mis tähendab funktsiooni $fg$ integreeruvust ristkülikus $R$ (vrd. märkus 1).

Niisiis, olgu $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$ suvalised punktid osaristkülikus $R_{kl}$, siis seosest $f(\mathbf{A})\,g(\mathbf{A}) - f(\mathbf{B})\,g(\mathbf{B}) = f(\mathbf{A})\,(g(\mathbf{A}) - g(\mathbf{B})) + g(\mathbf{B})\,(f(\mathbf{A}) - f(\mathbf{B}))$ saame

$$|f(\mathbf{A})\,g(\mathbf{A}) - f(\mathbf{B})\,g(\mathbf{B})| \le M\,|g(\mathbf{A}) - g(\mathbf{B})| + K\,|f(\mathbf{A}) - f(\mathbf{B})|\,.$$

Järelikult

$$\begin{aligned} \omega_{kl}(fg) &= \sup_{\mathbf{A},\mathbf{B}\in R_{kl}} |f(\mathbf{A})\,g(\mathbf{A}) - f(\mathbf{B})\,g(\mathbf{B})| \\ &\le M\sup_{\mathbf{A},\mathbf{B}\in R_{kl}}|g(\mathbf{A}) - g(\mathbf{B})| + K\sup_{\mathbf{A},\mathbf{B}\in R_{kl}}|f(\mathbf{A}) - f(\mathbf{B})|\,, \end{aligned}$$

niisiis kehtib võrratus (8.11). Väide on tõestatud. ■

**Omadus 8.15** ***(keskväärtusteoreem).*** *Olgu funktsioonid $f$ ja $g$ integreeruvad ristkülikus $R$, olgu $f$ seejuures pidev ja $g$ mittenegatiivne. Siis leidub punkt $\mathbf{X}_0 \in R$ omadusega*

$$\int\!\!\int_R f(x,y)\,g(x,y)\,dxdy = f(\mathbf{X}_0)\int\!\!\int_R g(x,y)\,dxdy. \tag{8.12}$$

**Tõestus.** Tähistame $m := \min\{f(\mathbf{X}) \mid \mathbf{X}\in R\}$ ja $M := \max\{f(\mathbf{X}) \mid \mathbf{X}\in R\}$ (selgitada ekstremaalsete väärtuste olemasolu!)✠. Võrratustest $m \le f(\mathbf{X}) \le M$ saame

$$mg(\mathbf{X}) \le f(x,y)\,g(x,y) \le Mg(\mathbf{X}) \quad (\mathbf{X}\in R)\,.$$

Siis omaduse 8.12 põhjal

$$m\int\!\!\int_R g(x,y)\,dxdy \le \int\!\!\int_R f(x,y)\,g(x,y)\,dxdy \le M\int\!\!\int_R g(x,y)\,dxdy. \tag{8.13}$$

Kui $\int\int_D g(x,y)\,dxdy = 0$, siis $\int\int_D f(x,y)\,g(x,y)\,dxdy = 0$ ning võrdus (8.12) kehtib. Olgu $\int\int_D g(x,y)\,dxdy \ne 0$, siis $\int\int_D g(x,y)\,dxdy > 0$. Tähistades

$$c := \frac{\int\int_D f(x,y)\,g(x,y)\,dxdy}{\int\int_D g(x,y)\,dxdy},$$

saame võrratused $m \le c \le M$. Bolzano-Cauchy teoreemi 2.7 kohaselt leidub $\mathbf{X}_0 \in R$ omadusega $f(\mathbf{X}_0) = c$, seega kehtib (8.12). ■

**Järeldus 8.16** *Kui funktsioon $f$ on integreeruv ristkülikus $R$, siis leidub selline arv $c \in [m, M]$, et*

$$\int\int_R f(x,y)\,dxdy = c\mu(R),$$

*kus $\mu(R)$ on ristküliku $R$ pindala.*

**Tõestus.** Iseseisvalt!✠ ■

## 8.3 Kahekordse integraali taandamine ühekordsetele integraalidele

Kahekordse integraali $\int\int_D f(x,y)\,dxdy$ arvutamiseks taandatakse see tavaliselt kahe ühekordse integraali arvutamisele. See on siiski võimalik vaid teatavatel eeldustel hulga $D$ suhtes. Me vaatleme alljärgnevalt kahte juhtu.

**1.** Olgu $D = R = [a,b] \times [c,d]$. Teeme selles ristkülikus mingi alajaotuse $T = T[R_{kl}]$ nii nagu eelmistes punktides. Olgu $f : R \to \mathbb{R}$ tõkestatud funktsioon, tähistame $M_{kl} := \sup_{\mathbf{X}\in R_{kl}} f(\mathbf{X})$ ja $m_{kl} := \inf_{\mathbf{X}\in R_{kl}} f(\mathbf{X})$. Tõestame järgmise lause.

**Lause 8.17** *Kui funktsioon $w = f(x,y)$ on integreeruv ristkülikus $R := [a,b] \times [c,d]$ ja iga $\xi \in [a,b]$ korral eksisteerib ühekordne integraal $g_1(\xi) := \int_c^d f(\xi,y)\,dy$, siis kehtib valem*

$$\int\int_R f(x,y)\,dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy. \tag{8.14}$$

**Tõestus.** Kuna $m_{kl} \le f(\mathbf{X}) \le M_{kl}$ $(\mathbf{X} \in R_{kl})$, siis, pidades silmas tavalise Riemanni integraali omadusi, saame fikseeritud $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ puhul võrratused

$$m_{kl}\Delta y_l \le \int_{y_{l-1}}^{y_l} f(\xi_k, y)\,dy \le M_{kl}\Delta y_l \ \ (k = 1,...,n;\ l = 1,...,r)$$

(põhjendada!)✠. Neist tulenevad seosed

$$\sum_{l=1}^r m_{kl}\Delta y_l \le g_1(\xi_k) \le \sum_{l=1}^r M_{kl}\Delta y_l,$$

millest saame

$$s(T) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^r m_{kl}\Delta x_k \Delta y_l \le \sum_{k=1}^n g_1(\xi_k)\Delta x_k \le \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^r M_{kl}\Delta x_k \Delta y_l = S(T).$$

Paneme tähele, et $\sum_{k=1}^n g_1(\xi_k)\Delta x_k$ on ühe muutuja funktsiooni $g_1$ integraalsumma $\sigma_{g_1}$ alajaotuse $T[x_0,...,x_n]$ suhtes, aga $\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^r m_{kl}\Delta x_k \Delta y_l$ ning $\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^r M_{kl}\Delta x_k \Delta y_l$ on funktsiooni $f$ Darboux summad $s(T)$ ja $S(T)$ (selgitada!)✠, niisiis, $s(T) \le \sigma_{g_1} \le S(T)$.

Kui tähistada $\lambda' := \max\{\Delta x_k \mid k = 1,...,n\}$, siis $\lambda' < \lambda(T)$, seega kehtib implikatsioon $\lambda(T) \to 0 \Rightarrow \lambda' \to 0$. Tähendab, kuna $\lim_{\lambda(T)\to 0} s(T) = \lim_{\lambda(T)\to 0} S(T) = \int\int_R f(x,y)\,dxdy$, siis eksisteerib $\lim_{\lambda'\to 0} \sigma_{g_1} = \int_a^b g_1(x)\,dx$ ja kehtib võrdus (8.14). ■

Analoogiliselt tõestatakse järgmine väide.

**Lause 8.18** *Kui funktsioon $w = f(x, y)$ on integreeruv ristkülikus $R := [a, b] \times [c, d]$ ja iga $\eta \in [c, d]$ korral eksisteerib ühekordne integraal $g_2(\eta) := \int_a^b f(x, \eta)\, dx$, siis kehtib valem*

$$\int\int_R f(x, y)\, dxdy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\, dx. \tag{8.15}$$

**Järeldus 8.19** *Kui funktsioon $w = f(x, y)$ on integreeruv ristkülikus $R := [a, b] \times [c, d]$ ning eksisteerivad ühekordsed integraalid $\int_c^d f(\xi, y)\, dy$ $(\xi \in [a, b])$ ja $\int_a^b f(x, \eta)\, dx$ $(\eta \in [c, d])$, siis kehtib võrdus*

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\, dx.$$

**Tõestus.** Iseseisvalt!✠ ■

**Järeldus 8.20** *Kui funktsioon $w = f(x, y)$ on pidev ristkülikus $R := [a, b] \times [c, d]$, siis*

$$\int\int_R f(x, y)\, dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\, dx.$$

**Tõestus.** Iseseisvalt!✠ ■

**2.** Vaatleme nüüd üldisemat juhtu, kus integreerimispiirkonnaks $D$ on ülalt ja alt pidevate joontega $y = \varphi(x)$ ja $y = \psi(x)$ ning külgedelt sirgetega $x = a$ ja $x = b$ piiratud **kõvertrapets** $xy$-tasandil. Seejuures eeldame, et $\psi(x) \le \varphi(x)$ $(x \in [a, b])$.

**Lause 8.21** *Kui funktsioon $w = f(x, y)$ on integreeruv kõvertrapetsis $D$ ja iga $\xi \in [a, b]$ korral eksisteerib ühekordne integraal $g_1(\xi) := \int_{\psi(\xi)}^{\varphi(\xi)} f(\xi, y)\, dy$, siis kehtib valem*

$$\int\int_D f(x, y)\, dxdy = \int_a^b dx \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(x, y)\, dy.$$

**Tõestus.** Olgu $c$ ja $d$ sellised arvud, mis rahuldavad tingimusi $c \le \psi(x)$ ning $d \ge \varphi(x)$ iga $x \in [a, b]$ korral. Moodustame ristküliku $R := [a, b] \times [c, d]$, siis $D \subset R$. Defineerime hulgas $R$ funktsiooni $F$ seosega (8.8), $F$ on integreeruv ristkülikus $R$ ja $\int\int_R F(x, y)\, dxdy = \int\int_D f(x, y)\, dxdy$. Kuna integraal

$$\begin{aligned}\int_c^d F(\xi, y)\, dy &= \int_c^{\psi(\xi)} F(\xi, y)\, dy + \int_{\psi(\xi)}^{\varphi(\xi)} F(\xi, y)\, dy + \int_{\varphi(\xi)}^d F(\xi, y)\, dy \\ &= \int_{\psi(\xi)}^{\varphi(\xi)} f(\xi, y)\, dy\end{aligned}$$

eksisteerib iga $\xi \in [a, b]$ korral, siis lause 8.17 kohaselt

$$\int\int_D f(x, y)\, dxdy = \int\int_R F(x, y)\, dxdy = \int_a^b dx \int_{\psi(x_1)}^{\varphi(x_1)} f(x, y)\, dy$$

(selgitada!)✠. ■

Olgu integreerimispiirkond $D_1$ selline, mis ülalt ja alt on piiratud sirgetega $y = d$ ja $y = c$ ning külgedelt pidevate joontega $x = \chi(y)$ ja $x = \varkappa(y)$, kusjuures $\chi(y) \le \varkappa(y)$ $(y \in [c, d])$. Siis kehtib järgmine lause, mille tõestus on analoogiline lause 8.21 tõestusega.

**Lause 8.22** *Kui funktsioon* $w = f(x, y)$ *on integreeruv eelpool defineeritud kõvertrapetsis* $D_1$ *ja iga* $\eta \in [c, d]$ *korral eksisteerib ühekordne integraal* $g_2(\eta) := \int_{\chi(\eta)}^{\varkappa(\eta)} f(x, \eta)\, dx$*, siis kehtib valem*

$$\int\int_{D_1} f(x, y)\, dxdy = \int_c^d dy \int_{\chi(y)}^{\varkappa(y)} f(x, y)\, dx.$$

# 9 Mõõtuvad hulgad tasandil. Kahekordse integraali teine definitsioon

## 9.1 Mõõtuvad hulgad tasandil

**Tasandilise hulga pindala.** Olgu $D \subset \mathbb{R}^2$ tõkestatud hulk ning olgu $\chi_D : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ hulga $D$ karakteristlik funktsioon, s.t.

$$\chi_D(\mathbf{X}) := \begin{cases} 1, & \text{kui } \mathbf{X} \in D, \\ 0, & \text{kui } \mathbf{X} \notin D. \end{cases}$$

Teatavasti (vt. pt. 8) nimetatakse tõkestatud funktsiooni $f : D \to \mathbb{R}$ integreeruvaks hulgas $D$, kui seosega

$$F(\mathbf{X}) := \begin{cases} f(\mathbf{X}), & \text{kui } \mathbf{X} \in D, \\ 0, & \text{kui } \mathbf{X} \in R \diagdown D \end{cases} \tag{9.1}$$

määratud funktsioon $F$ on integreeruv mingis ristkülikus $R$, mis sisaldab hulka $D$. Seega sõltub funktsiooni $f$ integreeuvus funktsiooni $F$ omadustest, mis omakorda sõltuvad nii funktsiooni $f$ kui ka hulga $D$ omadustest.

Loomulik on nõuda hulgalt $D$, et tema karakteristlik funktsioon oleks integreeruv, s.t., et

$$\text{eksisteerib integraal } \int\int_D dxdy =: \mu(D). \tag{9.2}$$

Kui $D$ on ristkülik $R := [a,b] \times [c,d]$, siis suvalise alajaotuse $T = T[R_{kl}]$ korral

$$\mu(D) = \sigma(T) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{r} \Delta x_k \Delta y_l = (b-a)(d-c)$$

(vrd. pt. 8, punkti 8.1 algus), niisiis, $\mu(D)$ **on ristküliku** $R$ **pindala** $(b-a)(d-c)$.

**Definitsioon.** Tõkestatud alamhulka $D \subset \mathbb{R}^2$ omadusega (9.2) nimetatakse (Jordani mõttes) *mõõtuvaks hulgaks.* Arvu $\mu(D)$ nimetatakse hulga $D$ *pindalaks* ehk tema *Jordani mõõduks.*

Me teeme lihtsa näitega selgeks tõsiasja, et **mitte kõikidel tõkestatud hulkadel ei ole pindala.**

**Näide 1.** Olgu $R := [a,b] \times [c,d]$ mingi ristkülik ja olgu $D \subset R$ hulk, mis koosneb ristküliku $R$ neist punktidest, mille mõlemad koordinaadid on ratsionaalarvud. Moodustame funktsiooni $F : R \to \mathbb{R}$ seosega

$$F(\mathbf{X}) := \begin{cases} 1, & \text{kui } X \in D, \\ 0, & \text{kui } X \in R \diagdown D. \end{cases}$$

Tehes ristkülikus mingi alajaotuse $T = T[R_{kl}]$, paneme tähele, et iga osaristkülik $R_{kl}$ sisaldab nii punkte hulgast $D$ kui ka hulgast $R \diagdown D$ (põhjendada!)✠, mistõttu

$$m_{kl} := \inf_{\mathbf{X} \in R_{kl}} F(\mathbf{X}) = 0 \quad \text{ja} \quad M_{kl} := \sup_{\mathbf{X} \in R_{kl}} F(\mathbf{X}) = 1.$$

Seega $S(T) - s(T) = (b-a)(d-c) > 0$ iga alajaotuse $T$ puhul (kontrollida!)✠, seega integraali (9.2) ei eksisteeri (vrd. teoreem 8.4). Järelikult ei ole vaadeldav hulk $D$ mõõtuv.

**Nullmõõduga hulgad.** Mõõtuvat hulka $D \subset \mathbb{R}^2$, mille puhul $\mu(D) = 0$, nimetame edaspidi *nullmõõduga hulgaks.*

Olgu $D \subset \mathbb{R}^2$ tõkestatud alamhulk ning olgu $R$ teda sisaldav ristkülik, millel on fikseeritud mingi alajaotus $T = T[R_{kl}]$. Kuna hulga $D$ mõõtuvuse uurimiseks tuleb meil uurida tema karakteristliku funktsiooni $\chi_D : R \to \mathbb{R}$ integreeruvust, siis esitame kõigepealt selle funktsiooni Darboux' summade kaks omadust. Paneme tähele, et

$$M_{kl} := \sup_{\mathbf{X}\in R_{kl}} \chi_D(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1, & \text{kui } D \cap R_{kl} \neq \varnothing, \\ 0, & \text{kui } D \cap R_{kl} = \varnothing, \end{cases}$$

$$m_{kl} := \inf_{\mathbf{X}\in R_{kl}} \chi_D(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1, & \text{kui } (R\diagdown D) \cap R_{kl} = \varnothing, \\ 0, & \text{kui } (R\diagdown D) \cap R_{kl} \neq \varnothing, \end{cases}$$

mistõttu

$$M_{kl} - m_{kl} = \begin{cases} 1, & \text{kui } D \cap R_{kl} \neq \varnothing \text{ ja } (R\diagdown D) \cap R_{kl} \neq \varnothing, \\ 0 & \text{ülejäänud juhtudel.} \end{cases}$$

Siit tulenevad järgmised väited.

$1^0$. $S(T) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{r} M_{kl}\Delta x_k \Delta y_l = \sum\limits_{\substack{k,l \\ D\cap R_{kl}\neq\varnothing}} \Delta x_k \Delta y_l =: S^*(T) =:$ kõigi nende osaristkülikute pindalade summa, millel on ühiseid punkte hulgaga $D$.

$2^0$. Kui $\mu(D) = 0$, siis, pidades silmas, et $s(T) \leq \int\int_R f dxdy$ suvalise funktsiooni $f$ ja alajaotuse $T$ puhul, saame juhul $f = \chi_D$:

$$0 \leq s(T) \leq \mu(D) = 0, \text{ s.t. } s(T) = 0.$$

Niisiis, kui $\mu(D) = 0$, siis

$$S(T) - s(T) = S(T) = S^*(T).$$

Omadustest $1^0$ ja $2^0$ saame järgmise olulise lemma.

**Lemma 9.1** *Olgu $D \subset \mathbb{R}^2$ mõõtuv hulk ja olgu $R$ selline ristkülik, et $D \subset R$. Võrdus $\mu(D) = 0$ kehtib parajasti siis, kui on täidetud järgmine tingimus:*
*$(^*)$ iga $\varepsilon > 0$ korral leidub ristküliku $R$ selline alajaotus $T = T[R_{kl}]$, et nende osaristkülikute, millel on ühiseid punkte hulgaga $D$, pindalade summa $S^*(T)$ on väiksem kui $\varepsilon$.*

**Tõestus.** Kõigepealt paneme tähele, et suvalise alajaotuse $T = T[R_{kl}]$ puhul on $S^*$ võrdne karakteristliku funktsiooni $\chi_D$ Darboux' ülemsummaga $S(T)$. Tõepoolest,

$$M_{kl} := \sup_{X\in R_{kl}} \chi_D(X) = \begin{cases} 1, & \text{kui } R_{kl} \cap D \neq \varnothing, \\ 0, & \text{kui } R_{kl} \cap D = \varnothing, \end{cases}$$

seetõttu $S^* = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{r} M_{kl}\Delta x_k \Delta y_l = S(T)$.

*Tarvilikkus.* Eeldame, et $\mu(D) = 0$, siis omaduse $2^0$ põhjal $s(T) = 0$ iga alajaotuse $T$ korral. Olgu $\varepsilon > 0$. Rakendades integreeruvuse kriteeriumit (vt. teoreem 8.4), valime alajaotuse $T$ omadusega $S(T) - s(T) < \varepsilon$, seega omaduse $2^0$ kohaselt $S^*(T) < \varepsilon$.

*Piisavus.* Eeldame, et tingimus (*) kehtib, ja näitame, et $\mu(D) = 0$. Olgu $\varepsilon > 0$ ja olgu $T$ ristküliku $R$ selline alajaotus, et $S^*(T) < \varepsilon$. Sel juhul

$$0 \leq s(T) \leq S(T) = S^*(T) < \varepsilon,$$

millest tuleneb $S(T) - s(T) < \varepsilon$. Seega on funktsioon $\chi_D$ integreeruv ristkülikus $R$ (vrd. järeldus 8.5) ning

$$0 \leq s(T) \leq \int\int_R \chi_D(x,y)\,dxdy = \mu(D) \leq S(T) < \varepsilon.$$

Kuna $\varepsilon > 0$ on suvaline, siis saadud võrratustest $0 \leq \mu(D) < \varepsilon$ tuleneb $\mu(D) = 0$. ■

**Järeldus 9.2** *Kui $D$ on selline mõõtuv hulk, et $\mu(D) = 0$, ning $D_1 \subset D$, siis $\mu(D_1) = 0$.*

**Tõestus.** Iseseisvalt!✠ ■

**Järeldus 9.3** *Lõpliku arvu nullmõõduga hulkade ühend on nullmõõduga hulk.*

**Tõestus.** Iseseisvalt!✠ ■

Lemma 9.1 abil tõestame lisaks kahele eelnevale järeldusele veel kaks lauset, mille kohaselt sile joon ning pideva ühe muutuja funktsiooni graafik on nullmõõduga hulgad.

**Lause 9.4** *Olgu sile joon $L$ antud parameetriliste võrranditega*

$$x = \varphi_1(t), \quad y = \varphi_2(t) \qquad (t \in [\alpha, \beta]). \tag{9.3}$$

*Siis $L$ on nullmõõduga hulk.*

**Tõestus. (I)** Me *näitame kõigepealt, et leidub $M > 0$ omadusega*

$$\|\mathbf{X}(t_1) - \mathbf{X}(t_2)\| \leq M\,|t_1 - t_2| \quad (t_1, t_2 \in [\alpha, \beta]), \tag{9.4}$$

kus $\mathbf{X}(t) := (\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \;\; (t \in [\alpha, \beta])$.

Kuna funktsioonid $\varphi_1$ ja $\varphi_2$ on lõigus $[\alpha, \beta]$ pidevalt diferentseeruvad, siis eksisteerivad

$$M_1 := \max\{|\varphi_1'(t)| \mid t \in [\alpha, \beta]\} \text{ ning } M_2 := \max\{|\varphi_2'(t)| \mid t \in [\alpha, \beta]\}.$$

Olgu $t_1, t_2 \in [\alpha, \beta]$, $t_1 \neq t_2$. Lagrange'i keskväärtusteoreemi kohaselt leiduvad arvude $t_1$ ja $t_2$ vahel arvud $\tau_1$ ja $\tau_2$ nii, et

$$\begin{aligned} |\varphi_1(t_1) - \varphi_1(t_2)| &= |\varphi_1'(\tau_1)|\,|t_1 - t_2| \leq M_1\,|t_1 - t_2|, \\ |\varphi_2(t_1) - \varphi_2(t_2)| &= |\varphi_2'(\tau_2)|\,|t_1 - t_2| \leq M_2\,|t_1 - t_2| \end{aligned} \tag{9.5}$$

(selgitada!)✠. Tänu seostele (9.5) saame hinnangu

$$\begin{aligned} \frac{\|\mathbf{X}(t_1) - \mathbf{X}(t_2)\|}{|t_1 - t_2|} &= \sqrt{\left(\frac{\varphi_1(t_1) - \varphi_1(t_2)}{t_1 - t_2}\right)^2 + \left(\frac{\varphi_2(t_1) - \varphi_2(t_2)}{t_1 - t_2}\right)^2} \\ &\leq \sqrt{M_1^2 + M_2^2} =: M \quad (t_1, t_2 \in [\alpha, \beta]), \end{aligned}$$

niisiis kehtib võrratus (9.4).

**(II)** Jaotame lõigu $[\alpha, \beta]$ $n$ võrdse pikkusega osalõiguks punktidega $\alpha = t_0 < t_1 < ... < t_n = \beta$ ning valime igas osalõigus $[t_{k-1}, t_k]$ suvaliselt punkti $\tau_k$. Võrratuse (9.4) kohaselt kehtib iga $k = 1, ..., n$ ja suvaliste $t, t' \in [t_{k-1}, t_k]$ korral

$$\|\mathbf{X}(t) - \mathbf{X}(t')\| \leq M|t - t'| \leq \frac{M(\beta - \alpha)}{n} =: u_n. \tag{9.6}$$

Fikseerime joonel punktid $\mathbf{X}(t_k) =: \mathbf{X}_k$ ja moodustame nende ümber ringid raadiusega $u_n$ s.t. ringid $\overline{U}_{u_n}(\mathbf{X}_k)$. Tingimuse (9.6) tõttu sisaldab iga ring $\overline{U}_{u_n}(\mathbf{X}_k)$ $(k = 1, ..., n)$ koos oma keskpunktiga $\mathbf{X}_k$ ka naaberpunktid $\mathbf{X}_{k-1}$ ja $\mathbf{X}_{k+1}$, aga samuti ka kaared $X_{k-1}X_k$ ja $X_kX_{k+1}$. Niisiis katavad need ringid kogu joone $L$ (selgitada!)✠. Võtame iga ringi ümber ruudu $R_k := \overline{K}_{u_n}(\mathbf{X}_k)$ keskpunktiga $\mathbf{X}_k$ ja külje pikkusega $2u_n$. Pikendades kõigi ruutude $R_k$ külgi, saame ristküliku $R$ koos teatava alajaotusega $T = T[R_{kl}]$. Selles alajaotuses need osaristkülikud, millel on ühiseid punkte joonega $L$, on ruutude $R_k$ alamhulgad, mistõttu nende pindalade summa ei ületa ruutude $R_k$ pindalade summat:

$$S^*(T) \leq (n+1)u_n^2 = (n+1)\frac{M^2(\beta - \alpha)^2}{n^2}.$$

Kuna $\lim_n (n+1)\frac{M^2(\beta-\alpha)^2}{n^2} = 0$ (selgitada!)✠, siis iga etteantud $\varepsilon > 0$ korral leidub niisugune alajaotus $T = T[R_{kl}]$, et $S^*(T) < \varepsilon$. Lemma 9.1 kohaselt on $L$ nullmõõduga hulk. ■

**Järeldus 9.5** *Tükati sile joon on nullmõõduga hulk.*

**Tõestus.** Väide järeldub vahetult järeldusest 9.2 ja lausest 9.4 (kontrollida!)✠. ■

**Lause 9.6** *Lõigus $[a, b]$ pideva funktsiooni $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ graafik ruumis $\mathbb{R}^2$ on nullmõõduga hulk.*

**Tõestus.** Teatavasti paikneb funktsiooni $g$ graafik ristkülikus $R = [a, b] \times [m, M]$, kus

$$m := \min\{g(x) \mid x \in [a, b]\} \quad \text{ja} \quad M := \max\{g(x) \mid x \in [a, b]\}$$

(selgitada!)✠. Olgu $\varepsilon > 0$. Võtame sellise $r \in \mathbb{N}$, et

$$\alpha := \frac{M - m}{r} < \frac{\varepsilon}{2(b - a)}.$$

Kuna $g$ on lõigus $[a, b]$ ühtlaselt pidev, siis leidub $\delta > 0$ omadusega

$$[x, x' \in [a, b], \ |x - x'| < \delta] \Rightarrow |g(x) - g(x')| < \alpha.$$

Olgu $T$ ristküliku $R$ selline alajaotus, et $\Delta x_k < \delta$ $(k = 1, ..., n)$ ja $\Delta y_l := \frac{M-m}{r} = \alpha$ $(l = 1, ..., r)$. Sel juhul on nende osaristkülikute pindalade summa $S^*$, millel on ühiseid punkte funktsiooni $g$ graafikuga, väiksem kui

$$\sum_{k=1}^{n} 2\alpha \Delta x_k = 2(b - a)\alpha < \varepsilon.$$

Lemma 9.1 põhjal on graafiku pindala võrdne nulliga. ■

Järgnevalt tõestame käesoleva paragrahvi ühe kahest **põhitulemusest**.

**Teoreem 9.7** *Tõkestatud alamhulk* $D \subset \mathbb{R}^2$ *on mõõtuv parajasti siis, kui tema rajajoon* $\partial D$ *on nullmõõduga hulk.*

**Tõestus.** *Tarvilikkus.* Olgu $D$ mõõtuv hulk ja $R$ mingi ristkülik, mis sisaldab hulka $D$. Olgu $\varepsilon > 0$. Teeme ristkülikus $R$ sellise alajaotuse $T = T\left[R_{kl}\right]$, et hulga $D$ karakteristliku funktsiooni $\chi_D$ Darboux' summad rahuldaksid tingimust

$$S(T) - s(T) < \frac{\varepsilon}{4} \tag{9.7}$$

(vrd. järeldus 8.5). Peame silmas, et

$$\sum\nolimits_{k,l}^{*} \Delta x_k \Delta y_l = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{r} \left(M_{kl} - m_{kl}\right) \Delta x_k \Delta y_l = S(T) - s(T) < \frac{\varepsilon}{4},$$

kus $\sum^*$ tähistab summat, mis on võetud üle nende osaristkülikute $R_{kl}$, millel on ühiseid punkte nii hulgaga $D$ kui ka hulgaga $R \diagdown D$. (Paneme tähele, et ülejäänud juhtudel $M_{kl} - m_{kl} = 0$.) Hulga $D$ iga rajapunkt võib kuuluda ülimalt nelja osaristkülikusse, neist vähemalt üks on selline, mis lõikab nii hulka $D$ kui ka hulka $R \diagdown D$. Seetõttu

$$S^*(T) \leq 4 \sum\nolimits_{k,l}^{*} \Delta x_k \Delta y_l < \varepsilon.$$

Lemma 9.1 põhjal on $\mu(\partial D) = 0$.

*Piisavus.* Olgu $D$ selline tõkestatud hulk, et $\mu(\partial D) = 0$ ja olgu $\varepsilon > 0$. Vastavalt lemmale 9.1 teeme ristküliku $R \supset D$ niisuguse alajaotuse, et nende osaristkülikute pindalade summa, millel on ühiseid punkte rajajoonega $\partial D$, oleks väiksem kui $\varepsilon$. Vaatleme summasid $\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{r} (M_{kl} - m_{kl}) \Delta x_k \Delta y_l$ ja paneme tähele, et kui $R_{kl} \cap D \neq \varnothing$ ja $R_{kl} \cap (R \diagdown D) \neq \varnothing$, siis osaristkülik $R_{kl}$ sisaldab vähemalt ühte hulga $\partial D$ punkti (selgitada!)✠. Seetõttu

$$S(T) - s(T) = \sum\nolimits_{k,l}^{*} \Delta x_k \Delta y_l \leq S^*(T) < \varepsilon.$$

Järelduse 8.5 põhjal on funktsioon $\chi_D$ ristkülikus $R$ integreeruv, s.t. $D$ on mõõtuv hulk. ■

Järelduset 9.5 ning teoreemist 9.7 tuleneb järgmine edaspidiseks vajalik tähelepanek.

**Järeldus 9.8** *Tõkestatud hulk* $D \subset \mathbb{R}^2$, *mille rajajoon on tükati sile, on mõõtuv.*

Esitame veel mõned mõõtuvate hulkade omadused, mis järelduvad teoreemist 9.7.

**Järeldus 9.9** *Kui hulgad* $D_1$ *ja* $D_2$ *on mõõtuvad, siis on ka hulgad* $D_1 \cup D_2$, $D_1 \cap D_2$ *ja* $D_1 \diagdown D_2$ *mõõtuvad.*

**Tõestus.** Iseseisvalt!✠ ■

**Järeldus 9.10** *Kui* $D_1$ *ja* $D_2$ *on sellised mõõtuvad hulgad, et* $\mu(D_1 \cap D_2) = 0$, *siis*

$$\mu(D_1 \cup D_2) = \mu(D_1) + \mu(D_2),$$

**Tõestus.** Järelduse 9.9 põhjal on $D_1 \cup D_2$ mõõtuv hulk. Olgu $R$ selline ristkülik, et $D_1 \cup D_2 \subset R$. Kuna $\chi_{D_1 \cup D_2} = \chi_{D_1} + \chi_{D_2} - \chi_{D_1 \cap D_2}$ (selgitada!)✠, siis

$$\begin{aligned}\mu(D_1 \cup D_2) &= \int\int_R \chi_{D_1 \cup D_2}(x,y)\,dxdy = \int\int_R (\chi_{D_1} + \chi_{D_2} - \chi_{D_1 \cap D_2})(x,y)\,dxdy \\ &= \int\int_R \chi_{D_1}(x,y)\,dxdy + \int\int_R \chi_{D_2}(x,y)\,dxdy - \int\int_R \chi_{D_1 \cap D_2}(x,y)\,dxdy \\ &= \mu(D_1) + \mu(D_2) - \mu(D_1 \cap D_2) = \mu(D_1) + \mu(D_2).\end{aligned}$$

Väide on tõestatud. ■

Lõpuks tõestame teoreemi, mis annab meile parema ettekujutuse integreeruvatest kahe muutuja funktsioonidest.

**Teoreem 9.11** *Olgu $D \subset \mathbb{R}^2$ tõkestatud alamhulk, mille rajajoon $\partial D$ on tükati sile. Kui funktsiooni $f : D \to \mathbb{R}$ katkevuspunktide hulga pindala võrdub nulliga, siis $f$ on hulgas $D$ integreeruv.*

**Tõestus.** Märgime kõigepealt, et $\mu(\partial D) = 0$ lause 9.4 kohaselt. Olgu $R$ selline ristkülik, mis sisaldab hulka $D$ ja olgu funktsioon $F : R \to \mathbb{R}$ antud seosega (9.1). Paneme tähele, et funktsiooni $F$ katkevuspunktideks saavad olla vaid funktsiooni $f$ katkevuspunktid ja rajajoone $\partial D$ punktid (selgitada!)✠. Seega on nende punktide hulk $E \subset R$, kus $F$ ei ole pidev, nullmõõduga hulk.

Tähistame $M := \sup_{\mathbf{X} \in R} |F(\mathbf{X})| = \sup_{\mathbf{X} \in D} |f(\mathbf{X})|$ (põhjendada selle olemasolu!)✠ ja rakendame lemmat 9.1. Olgu $\varepsilon > 0$, võtame ristküliku $R$ sellise alajaotuse $T = T[R_{kl}]$, mille puhul nende osaristkülikute pindalade summa $S^*(T)$, millel on ühiseid punkte hulgaga $E$, oleks väiksem kui $\frac{\varepsilon}{2M+\mu(R)}$. Olgu $B$ nende osaristkülikute ühend, seega $\mu(E) = S^*(T)$, ja olgu $C$ nende osaristkülikute ühend, millel hulgaga $E$ ühiseid punkte ei ole. Sel juhul

$$\begin{aligned}S(T) - s(T) &= \sum\nolimits^B (M_{kl} - m_{kl})\,\Delta x_k \Delta y_l + \sum\nolimits^C (M_{kl} - m_{kl})\,\Delta x_k \Delta y_l \\ &=: \sum\nolimits^B + \sum\nolimits^C,\end{aligned}$$

kus $M_{kl} := \sup_{\mathbf{X} \in R_{kl}} F(\mathbf{X})$ ning $m_{kl} := \inf_{\mathbf{X} \in R_{kl}} F(\mathbf{X})$ ja summad $\sum^B$ ning $\sum^C$ on võetud vastavalt üle ristkülikute ühendite $B$ ja $C$. Siis

$$\sum\nolimits^B \le \sum\nolimits^B (|M_{kl}| + |m_{kl}|)\,\Delta x_k \Delta y_l \le 2MS^*(T) < \frac{2M\varepsilon}{2M + \mu(R)}.$$

Summale $\sum^C$ hinnangu saamiseks kasutame asjaolu, et funktsioon $F$ on hulgas $D \setminus E$ pidev. Kuna $C$ kui kinniste osaristkülikute lõplik ühend on kinnine tõkestatud hulk, siis Cantori teoreemi kohaselt on $F : C \to \mathbb{R}$ ühtlaselt pidev. Seepärast saame valida sellise $\delta > 0$, et

$$\mathbf{X}, \mathbf{X}' \in C,\ \|\mathbf{X} - \mathbf{X}'\| < \delta \Rightarrow |F(\mathbf{X}) - F(\mathbf{X}')| < \frac{\varepsilon\mu(R)}{2M + \mu(R)}.$$

Peenendades nüüd vajaduse korral alajaotust $T = T[R_{kl}]$ nii, et $\lambda(T) < \delta$, saame igas ühendisse $C$ kuuluvas osaristkülikus $R_{kl}$ leida punktid $\mathbf{X}_{kl}$ ja $\mathbf{X}'_{kl}$ omadusega $M_{kl} - m_{kl} = F(\mathbf{X}_{kl}) - F(\mathbf{X}'_{kl}) < \frac{\varepsilon}{2M+\mu(R)}$ (põhjendada!)✠. Niisiis,

$$\sum\nolimits^C < \frac{\varepsilon}{2M + \mu(R)}\mu(C) < \frac{\varepsilon\mu(R)}{2M + \mu(R)}.$$

Kokkuvõttes saame eeldusel $\lambda(T) < \delta$ hinnangu

$$S(T) - s(T) < \frac{(2M + \mu(R))\,\varepsilon}{2M + \mu(R)} = \varepsilon,$$

mis integreeruvuse kriteeriumi (vt. teoreem 8.4) kohaselt tähendabki funktsiooni $F : R \to \mathbb{R}$ ja seega ka funktsiooni $f : D \to \mathbb{R}$ integreeruvust. ■

**Järeldus 9.12** *Mõõtuvas hulgas tõkestatud funktsiooni integreeruvus ja integraali väärtus selles hulgas ei sõltu funktsiooni väärtustest hulga rajajoonel.*

**Tõestus.** Isesisvalt!✠ ■

## 9.2 Kahekordse integraali teine definitsioon

Olgu $D$ kinnine mõõtuv piirkond ruumis $\mathbb{R}^2$ (märgime, et siis $\mu(\partial D) = 0$) ja olgu selles piirkonnas määratud tõkestatud kahe muutuja funktsioon $w = f(x, y)$. Jaotame piirkonna $D$ lõpliku arvu tükati siledate joonte abil $m$ **kinniseks** osapiirkonnaks $D_1, ..., D_m$, *millel ei ole ühiseid sisepunkte*. Sel juhul **ütleme, et hulgas $D$ on fikseeritud alajaotus** $\widetilde{T} = \widetilde{T}[D_1, ..., D_m]$. Tähistame sümboliga $d_i$ hulga $D_i$ diameetri, s.t. $d_i := \sup_{\mathbf{X},\mathbf{X}' \in D_i} \|\mathbf{X} - \mathbf{X}'\|$, kus $\|\mathbf{X} - \mathbf{X}'\| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$ on punktide $\mathbf{X} = (x, y)$ ja $\mathbf{X}' = (x', y')$ vaheline kaugus. Valime igas hulgas $D_i$ suvaliselt punkti $\mathbf{X}_i$ ja moodustame *integraalsumma*

$$\sigma\left(\widetilde{T}\right) := \sum_{i=1}^{m} f(\mathbf{X}_i)\,\mu(D_i),$$

siin $\mu(D_i)$ on hulga $D_i$ pindala. Kui hulga $D$ alajaotust $\widetilde{T}[D_1, ..., D_m]$ peenendada nii, et maksimaalne diameeter $\lambda\left(\widetilde{T}\right) := \max_{1 \le i \le m} d_i$ läheneb nullile, siis püstitame küsimuse piirväärtuse $\lim_{\lambda(\widetilde{T}) \to 0} \sigma\left(\widetilde{T}\right)$ olemasolust.

**Definitsioon 2*.** Kui eksisteerib piirväärtus $\lim_{\lambda(\widetilde{T}) \to 0} \sigma\left(\widetilde{T}\right) =: \widetilde{I}$, s.t.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \lambda\left(\widetilde{T}\right) < \delta \Rightarrow \left|\sum_{i=1}^{m} f(\mathbf{X}_i)\,\mu(D_i) - \widetilde{I}\right| < \varepsilon \text{ punktide } \mathbf{X}_i \in D_i \text{ iga valiku korral,}$$

siis arvu $\widetilde{I}$ nimetatakse funktsiooni $f$ *kahekordseks integraaliks* üle hulga $D$.

Meie **eesmärk** on veenduda, et see definitsioon on samaväärne eelmise peatüki punktis 8.2 toodud kahekordse integraali definitsiooniga 2. Selleks tõestame järgmise lause.

**Lause 9.13** *Olgu $D$ kinnine mõõtuv piirkond ruumis $\mathbb{R}^2$. Tõkestatud funktsioon $f : D \to \mathbb{R}$ on definitsiooni $2^*$ mõttes integreeruv parajasti siis, kui ta on integreeruv definitsiooni 2 (vt. punkt 8.2) mõttes.*

**Tõestus.** *Tarvilikkus.* Olgu $\widetilde{I} = \int\int_D f(x,y)\,dxdy$ definitsiooni $2^*$ mõttes. Teeme ristkülikus $R$, mis sisaldab hulka $D$, alajaotuse $T = T[R_{kl}]$ osaristkülikuteks $R_{kl}$. Defineerime funktsiooni $F : R \to \mathbb{R}$ vastavalt valemile (9.1) ja võrdleme selle integraalsummat $\sigma(T)$ funktsiooni $f$ integraalsummaga $\sigma\left(\widetilde{T}\right)$ definitsiooni $2^*$ tähenduses. Need summad saavad erineda vaid nende liidetavate osas, mis vastavad rajajoonega $\partial D$ ühiseid punkte omavatele osaristkülikutele (selgitada!)✠. Selliste liidetavate summa protsessis $\lambda(T) \to 0$ läheneb nullile (peame silmas, et $\mu(\partial D) = 0$ ning funktsioon $f$ on tõkestatud), seega eeldusest $\widetilde{I} = \lim_{\lambda(\widetilde{T})\to 0} \sigma\left(\widetilde{T}\right)$ tuleneb $\widetilde{I} = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sigma(T)$. Saamegi, et funktsioon $f$ on integreeruv definitsiooni 2 tähenduses ja kahe integraali väärtused langevad kokku.

*Piisavus.* Eeldame, et eksisteerib kahekordne integraal $I = \int\int_D f(x,y)\,dxdy$ definitsiooni 2 mõttes. Olgu $\widetilde{T} = \widetilde{T}[D_1, ..., D_m]$ piirkonna $D$ mingi alajaotus definitsiooni $2^*$ kontekstis. Meie eesmärgiks on näidata, et $\lim_{\lambda(\widetilde{T})\to 0} \sigma\left(\widetilde{T}\right) = I$. Selleks moodustame Darboux' summad

$$S\left(\widetilde{T}\right) := \sum_{i=1}^{m} \widetilde{M}_i \mu(D_i) \quad \text{ja} \quad s\left(\widetilde{T}\right) := \sum_{i=1}^{m} \widetilde{m}_i \mu(D_i),$$

kus $\widetilde{M}_i := \sup_{\mathbf{X}\in D_i} f(\mathbf{X})$ ning $\widetilde{m}_i := \inf_{\mathbf{X}\in D_i} f(\mathbf{X})$, ja paneme tähele, et kuna $s\left(\widetilde{T}\right) \le \sigma\left(\widetilde{T}\right) \le S\left(\widetilde{T}\right)$, siis **piisab veenduda,** et $\lim_{\lambda(\widetilde{T})\to 0} S\left(\widetilde{T}\right) = \lim_{\lambda(\widetilde{T})\to 0} s\left(\widetilde{T}\right) = I$.

Olgu $\varepsilon$ suvaline positiivne arv ja $R$ ristkülik omadusega $D \subset R$. Olgu funktsioon $F : R \to \mathbb{R}$ defineeritud vastavalt valemile (9.1). Lähtudes integreeruvuse kriteeriumist (vt. teoreem 8.4) ja lemmast 9.1, teeme ristkülikus $R$ sellise alajaotuse $T = T[R_{kl}]$, et
1) oleks täidetud võrratus

$$S(T) - s(T) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{9.8}$$

(siin $S(T)$ ja $s(T)$ on funktsiooni $F$ Darboux' summad alajaotuse $T$ suhtes) ning
2) nende osaristkülikute pindalade summa, millel on ühiseid punkte hulga $D$ rajajoonega $\partial D$, oleks väiksem kui $\frac{\varepsilon}{6M}$, kus $M := \sup_{\mathbf{X}\in D} |f(\mathbf{X})|$.

Edasi vaatleme punktihulka $E$, mis koosneb rajajoonest $\partial D$ ja alajaotuse $T$ kõikide osaristkülikute rajajoontest. Kuna $\mu(E) = 0$ (põhjendada!)✠, siis saab moodustada teise alajaotuse $T^*$ selliselt, et nende osaristkülikute pindalade summa, millel on hulgaga $E$ ühiseid punkte, on väiksem kui $\frac{\varepsilon}{12M}$ (selgitada!)✠. Olgu $C_1$ see kujund, mille moodustavad hulgaga $E$ ühiseid punkte omavad alajaotuse $T^*$ osaristkülikud. Moodustame uue kujundi $C$ nii, et kehtiks seos $E \cap \partial C = \varnothing$ ja $\mu(C) < \frac{\varepsilon}{6M}$. (Kujundi $C$ valime nii, et tema rajajoon oleks paralleelne kujundi $C_1$ rajajoonega, kuid seejuures viimasele nii lähedal, et $C$ ja $C_1$ pindalad erineksid teineteisest vähem kui $\frac{\varepsilon}{12M}$ võrra.) Me *näitame järgnevalt, et*

$$\inf_{\mathbf{X}\in\partial C,\ \mathbf{X}'\in E} \|\mathbf{X} - \mathbf{X}'\| =: \delta > 0. \tag{9.9}$$

Oletame vastuväiteliselt, et $\delta = 0$. Sel juhul saab leida punktide jadad $(\mathbf{X}_j)$ hulgast $\partial C$ ja $\left(\mathbf{X}'_j\right)$ hulgast $E$ omadusega

$$\left\|\mathbf{X}_j - \mathbf{X}'_j\right\| \to 0 \quad (j \to \infty). \tag{9.10}$$

Kuna mõlemad jadad on tõkestatud, siis Bolzano-Weierstrassi teoreemi kohaselt sisaldavad nad mõlemad koonduva osajada, mistõttu mõlemal on samade indeksitega koonduv osajada vastavalt $(\mathbf{X}_{j_i})$ ja $\left(\mathbf{X}'_{j_i}\right)$ (selgitada!)✠. Olgu nende osajadade piirväärtused vastavalt $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$.

Hulgad $\partial C$ ja $E$ on kinnised (põhjendada!)✠, seetõttu sisaldavad nad kõigi oma koonduvate jadade piirväärtused, niisiis $\mathbf{A} \in \partial C$ ning $\mathbf{B} \in E$. Tingimusest (9.10) saame

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|\mathbf{A}-\mathbf{B}\| \leq \left\|(\mathbf{A}-\mathbf{X}_{j_i}) + \left(\mathbf{X}_{j_i}-\mathbf{X}'_{j_i}\right) + \left(\mathbf{X}'_{j_i}-\mathbf{B}\right)\right\| \\ &\leq \|\mathbf{A}-\mathbf{X}_{j_i}\| + \left\|\mathbf{X}_{j_i}-\mathbf{X}'_{j_i}\right\| + \left\|\mathbf{X}'_{j_i}-\mathbf{B}\right\| \to 0 \ \ (j\to\infty)\,, \end{aligned}$$

järelikult $\mathbf{A} = \mathbf{B}$. Kuid see võrdus on vastuolus tingimusega $E \cap \partial C = \varnothing$. Sellega on võrratus (9.9) tõestatud.

Eeldame nüüd, et alajaotus $\widetilde{T} = \widetilde{T}\,[D_1, ..., D_m]$ rahuldab tingimust $\lambda\left(\widetilde{T}\right) < \delta$ (vt. (9.9)), ja näitame, et

$$S\left(\widetilde{T}\right) < S(T) + \frac{\varepsilon}{2}, \quad s(T) - \frac{\varepsilon}{2} < s\left(\widetilde{T}\right). \tag{9.11}$$

Esimese võrratuse tõestuseks jätame Darboux' ülemsummast $S\left(\widetilde{T}\right) = \sum_{i=1}^m \widetilde{M}_i \mu(D_i)$ välja neile osapiirkondadele $D_i$ vastavad liidetavad, mis *ei paikne tervenisti mingis osaristkülikus* $R_{kl}$. Kuna $d_i \leq \lambda\left(\widetilde{T}\right) < \delta$, siis kõik sellised osapiirkonnad paiknevad kujundis $C$ (selgitada!)✠, seega on nende pindalade summa väiksem kui $\frac{\varepsilon}{6M}$. Niisiis,

$$S\left(\widetilde{T}\right) < \sum\nolimits^* \widetilde{M}_i \mu(D_i) + \frac{\varepsilon}{6}, \tag{9.12}$$

kus $\sum^*$ on summa, mis võetakse üle selliste osapiirkondade $D_i$, mis tervenisti paiknevad mingis osaristkülikus $R_{kl}$. Tähistame

$$\widehat{R_{kl}} := \bigcup\nolimits_{D_i \subset R_{kl}} D_i$$

(s.o. nende osapiirkondade $D_i$ ühend, mis piknevad ristkülikus $R_{kl}$), siis

$$S\left(\widetilde{T}\right) < \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^r M_{kl} \mu\left(\widehat{R_{kl}}\right) + \frac{\varepsilon}{6}, \tag{9.13}$$

kus $M_{kl} := \sup_{\mathbf{X} \in R_{kl}} F(\mathbf{X})$.

Vaatleme *esiteks* osaristkülikuid $R_{kl}$, mis tervenisti on hulgas $D$, siis $R_{kl} \diagdown \widehat{R_{kl}} \subset C$ (selgitada!)✠. Selliste hulkade $R_{kl} \diagdown \widehat{R_{kl}}$ pindalade summa on väiksem kui $\mu(C) < \frac{\varepsilon}{6M}$. *Teiseks*, nende osaristkülikute $R_{kl}$ puhul, mis lõikuvad rajajoonega $\partial D$, on hulkade $R_{kl} \diagdown \widehat{R_{kl}}$ pindalade summa väiksem kui vastavate osaristkülikute pindalade summa, seega samuti väiksem kui $\frac{\varepsilon}{6M}$. Neid kahte asjaolu arvestades saame

$$\left| S(T) - \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^r M_{kl} \mu\left(\widehat{R_{kl}}\right) \right| = \left| \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^r M_{kl} \left(\mu(R_{kl}) - \mu\left(\widehat{R_{kl}}\right)\right) \right| < \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} = \frac{\varepsilon}{3}$$

ja siit

$$\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^r M_{kl} \mu\left(\widehat{R_{kl}}\right) < S(T) + \frac{\varepsilon}{3}. \tag{9.14}$$

Võrratustest (9.13) ja (9.14) saamegi väidetava võrratuse

$$S\left(\widetilde{T}\right) < S(T) + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{6} = S(T) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Teine võrratus seostest (9.11) kontrollitakse analoogiliselt.

Võrratustest (9.11) tuleneb, et kui $\lambda\left(\widetilde{T}\right) < \delta$, siis $s(T) - \frac{\varepsilon}{2} < s\left(\widetilde{T}\right) \leq S\left(\widetilde{T}\right) < S(T) + \frac{\varepsilon}{2}$. Seose (9.8) kohaselt $I - s(T) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ ja $S(T) - I \leq \frac{\varepsilon}{2}$, tähendab,

$$I - s\left(\widetilde{T}\right) < \varepsilon \text{ ja } S\left(\widetilde{T}\right) - I < \varepsilon.$$

Seega $\lim_{\lambda(\widetilde{T})\to 0} S\left(\widetilde{T}\right) = \lim_{\lambda(\widetilde{T})\to 0} s\left(\widetilde{T}\right) = I$. ■

Lähtudes integreeruvuse definitsioonist 2*, tõestame järgmise olulise lause.

**Lause 9.14** *Olgu funktsioon $f : D \to \mathbb{R}$ integreeruv kinnises mõõtuvas piirkonnas $D$ ja olgu $D_0 \subset D$ samuti kinnine mõõtuv piirkond. Siis $f$ on ka piirkonnas $D_0$ integreeruv.*

**Tõestus.** Olgu $\widetilde{T}_0 = \widetilde{T}[D'_1, ..., D'_l]$ piirkonna $D_0$ alajaotus. Kuna $D$ ja $D_0$ mõlemad on mõõtuvad hulgad, siis ka $D \diagdown D_0$ on mõõtuv (paneme tähele, et tema rajajoone pindala võrdub nulliga). Teeme ka hulgas $D \diagdown D_0$ mingi alajaotuse, seega moodustub meil alajaotus $\widetilde{T} = \widetilde{T}[D_1, ..., D_m]$ piirkonnas $D$. Moodustame funktsiooni $f$ Darboux' summad alajaotuste $\widetilde{T}_0$ ja $\widetilde{T}$ järgi. Paneme tähele, et

$$S\left(\widetilde{T}_0\right) - s\left(\widetilde{T}_0\right) \leq S\left(\widetilde{T}\right) - s\left(\widetilde{T}\right) \tag{9.15}$$

(kontrollida!)✠. Lause 9.13 tõestusest selgus, et kui $f$ on piirkonnas $D$ integreeruv, siis

$$\lim_{\lambda(\widetilde{T})\to 0} S\left(\widetilde{T}\right) = \lim_{\lambda(\widetilde{T})\to 0} s\left(\widetilde{T}\right) = \int\int_D f(x,y)\,dxdy,$$

seega $S\left(\widetilde{T}\right) - s\left(\widetilde{T}\right) \to 0$, kui $\lambda\left(\widetilde{T}\right) \to 0$. Võrratusest (9.15) tuleneb $S\left(\widetilde{T}_0\right) - s\left(\widetilde{T}_0\right) \to 0$ $\left(\lambda\left(\widetilde{T}_0\right) \to 0\right)$, siit ja võrratustest

$$s\left(\widetilde{T}_0\right) \leq I_* := \sup s\left(\widetilde{T}_0\right) \leq \inf S\left(\widetilde{T}_0\right) =: I^* \leq S\left(\widetilde{T}_0\right),$$

kus ülemine ja alumine raja on võetud üle kõikvõimalike alajaotuste $\widetilde{T}_0$, saame

$$\lim_{\lambda(\widetilde{T}_0)\to 0} \sigma\left(\widetilde{T}_0\right) = \int\int_{D_0} f(x,y)\,dxdy = I_* = I^*$$

(selgitada!)✠. ■

Me lõpetame käesoleva paragrahvi lausega, mis üldistab tuntud väidet ülemise raja integraalist. Meenutame, et kui ühe muutuja funktsioon $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ on integreeruv, siis seosega

$$G(x) := \int_a^x g(t)\,dt \quad (x \in [a,b])$$

määratud funktsioon $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ on pidev, kusjuures võrdus $G'(x) = g(x)$ kehtib eeldusel, et $g$ on punktis $x$ pidev. Viimasest võrdusest on lihtne saada tuntud Newton-Leibnizi valemit.

Kahekordse integraali puhul on olukord sootuks keerulisem. Olgu funktsioon $f : D \to \mathbb{R}$ integreeruv piirkonnas $D$. Iga kinnise mõõtuva osapiirkonna $E \subset D$ puhul eksisteerib lause 9.14 kohaselt integraal $H(E) := \int\int_E f(x,y)\,dxdy$. Seega on määratud funktsioon $H$ piirkonna $D$ kõigi kinniste mõõtuvate osapiirkondade $E$ hulgas. Kui vaadelda protsessi, kus hulk $E$ **kõduneb (tõmbub kokku) punktiks X** (märgime seda protsessi $E \to \mathbf{X}$), siis seda saab kirjeldada tingimusega

$$\sup_{\mathbf{Q}\in E} \|\mathbf{Q} - \mathbf{X}\| \to 0.$$

**Definitsioon.** Kui eksisteerib piirväärtus

$$\frac{dH}{dE} := \lim_{E\to\mathbf{X}} \frac{H(E)}{\mu(E)},$$

kus $\mu(E)$ on piirkonna $E$ pindala, siis seda piirväärtust nimetatakse *funktsiooni $H$ tuletiseks piirkonna $E$ järgi kohal* $\mathbf{X}$.

Osutub, et sellel abstraktsel ja esimesel pilgul kunstlikult defineeritud mõistel on üpris loomulik füüsikaline ja matemaatiline sisu. **Füüsikaliselt** saab tuletist $\frac{dH}{dE}$ interpreteerida **massi tihedusena punktis $\mathbf{X} \in E$**, kui $H(E)$ on kujundi $E$ mass. **Matemaatiliselt** vastab järgmine väide tavalise Riemanni integraali sellele omadusele, mis kirjeldab teda ülemise raja funktsioonina.

**Lause 9.15** *Kui funktsioon $f$ on pidev punkti $\mathbf{X}$ mingis ümbruses, siis* $\frac{dH}{dE} = f(\mathbf{X})$.

**Tõestus.** Valime piirkonna $E$ selliselt, et $\mathbf{X} \in E$ ja $f$ on piirkonnas $E$ pidev. Keskväärtusteoreemi (vt. omadus 8.15) kohaselt $H(E) = c\mu(E)$, kus $m := \inf_{\mathbf{Q}\in E} f(\mathbf{Q}) \le c \le \sup_{\mathbf{Q}\in E} f(\mathbf{Q}) =: M$. Tänu funktsiooni $f$ pidevusele saame protsessis $E \to \mathbf{X}$, et $M \to f(\mathbf{X})$ ja $m \to f(\mathbf{X})$, mistõttu

$$\frac{dH}{dE} := \lim_{E\to\mathbf{X}} \frac{H(E)}{\mu(E)} = \lim_{E\to\mathbf{X}} c = f(\mathbf{X}).$$

Lause on tõestatud. ■

# 10 Greeni valem. Muutujate vahetus kahekordses integraalis

Selles paragrahvis seame endale kaks eesmärki. Esiteks, me üritame siduda omavahel joonintegraali ja kahekordse integraali, selleks tõestame esimeses punktis Greeni valemi. Teiseks, me uurime olulist ja üsna komplitseeritud probleemi muutuja vahetusest kahekordses integraalis ning tõestame sellekohase olulise valemi.

## 10.1 Greeni valem

Olgu $D$ **kinnine kõvertrapets**, mis on piiratud külgedelt sirgetega $x = a$ ja $x = b$ ning ülalt ja alt **siledate** joontega $L := AB$ ja $N := CE$, seejuures olgu need jooned määratud vastavalt võrranditega

$$y = \psi(x) \text{ ja } y = \chi(x), \text{ kus } \chi(x) \le \psi(x) \quad (x \in [a,b]).$$

Olgu $F : D \to \mathbb{R}$ **pidev** funktsioon, millel on olemas **pidev osatuletis** $\frac{\partial F}{\partial y}$. Arvutame

$$\begin{aligned}\int\int_D \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} dxdy &= \int_a^b dx \int_{\chi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} dy \\ &= \int_a^b (F(x,\psi(x)) - F(x,\chi(x)))\, dx \\ &= \int_a^b F(x,\psi(x))\, dx - \int_a^b F(x,\chi(x))\, dx \\ &= \int_{AB} F dx - \int_{CE} F dx.\end{aligned}$$

Põhjenduseks viimase võrduse juurde märgime, et see tuleneb lausest 7.8, kus joone võrrandid on vastavalt

$$x = x,\ y = \psi(x) \text{ ja } x = x,\ y = \chi(x) \qquad (x \in [a,b])$$

(kontrollida!)✠. Pidades silmas, et $\int_{AC} F dx = \int_{EB} F dx = 0$ (selgitada!)✠, saame

$$\int\int_D \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} dxdy = -\left(\int_{CE} F dx + \int_{EB} F dx + \int_{BA} F dx + \int_{AC} F dx\right),$$

ehk

$$\int\int_D \frac{\partial F}{\partial y} dxdy = -\int_{\partial D} F dx. \tag{10.1}$$

Siin on piirkonna $D$ rajajoonel $\partial D = \partial CEBA$ integreerimissuunaks võetud *positiivne suund* (vt. pt. 7, märkus 5).

Vaatleme nüüd üldisemat olukorda. Olgu $D$ **selline piirkond, mida saab jaotada lõplikuks arvuks vaadeldavat tüüpi kõvertrapetsiteks.** Järgnev arutelu näitab, et võrdus (10.1) jääb ka sel juhul kehtima.

Olgu $D$ mõõtuv piirkond rajajoonega $\partial D$. Eeldame, et piirkonna $D$ saab pideva joonega $MN$ jagada kaheks selliseks osapiirkonnaks $D_1$ ja $D_2$, mis on eelpool vaadeldud tüüpi kõvertrapetsid. Punktid **M** ja **N** jaotavad joone $\partial D$ kaheks kaareks $\Gamma_1$ ja $\Gamma_2$, seejuures on $\Gamma_1 \cup MN$ ja $\Gamma_2 \cup NM$ vastavalt piirkonna $D_1$ ja $D_2$ rajajoon. Eelneva arutelu kohaselt

$$\int\int_{D_1} \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} dxdy = -\int_{\Gamma_1} Fdx - \int_{MN} Fdx,$$
$$\int\int_{D_2} \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} dxdy = -\int_{\Gamma_2} Fdx - \int_{NM} Fdx = -\int_{\Gamma_2} Fdx + \int_{MN} Fdx.$$

Need valemid liites saame joonintegraali aditiivsuse põhjal valemi (10.1).

Analoogiline valem kehtib **teist tüüpi kõvertrapetsite** korral. Kui piirkond $D$ koosneb lõplikust arvust niisugustest kõvertrapetsitest, mis on pealt ja alt piiratud vastavalt sirgetega $y = d$ ja $y = c$ ning külgetelt siledate joontega $x = \delta(y)$ ja $x = \rho(y)$, siis analoogilise arutlusega jõuame valemini

$$\int\int_{D} \frac{\partial G(x,y)}{\partial x} dxdy = \int_{\partial D} Gdy, \tag{10.2}$$

kui $G : D \to \mathbb{R}$ on pidev funktsioon, millel on piirkonnas $D$ pidev osatuletis $\frac{\partial G}{\partial x}$. (NB! Selgitada, miks valemid (10.1) ja (10.2) erinevad märgi poolest!✠)

Valemite (10.1) ja (10.2) liitmisel saame *Greeni valemi*

$$\int\int_{D} \left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}\right) dxdy = \int_{\partial D} Fdx + Gdy. \tag{10.3}$$

**See valem kehtib iga piirkonna $D$ korral, mida saab pidevate joontega jagada kumbagi tüüpi lõplikuks arvuks kõvertrapetsiteks.**

**Märkused. 1.** Ilma tõestuseta märgime, et **valem** (10.3) **kehtib iga piirkonna** $D$ **puhul, millel on tükati sile rajajoon $\partial D$.**

**2.** Üheks kõige lihtsamaks Greeni valemi rakenduseks on vaadeldava **piirkonna pindala arvutamine.** Kui funktsioonid $F$ ja $G$ valemis (10.3) valida selliselt, et $\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} = 1$ kogu piirkonnas $D$, siis valemi (10.3) vasak pool kirjeldab selle piirkonna pindala $\mu(D)$. Võttes näiteks $F(x,y) = 0$ ja $G(x,y) = x$ iga $(x,y) \in D$ korral, saame valemi

$$\mu(D) = \int_{\partial D} xdy.$$

## 10.2 Integreerimisteest sõltumatud joonintegraalid

Olgu **lahtises sidusas piirkonnas** $D$ fikseeritud punktid **A** ja **B**. Selgitame välja, millistel eeldustel piirkonna $D$ ja pidevate funktsioonide $F : D \to \mathbb{R}$ ning $G : D \to \mathbb{R}$ suhtes joonintegraal

$$\int_{AB} Fdx + Gdy \tag{10.4}$$

sõltub ainult punktidest **A** ja **B** ning ei sõltu neid ühendavast joonest. Joone all mõistame me selles punktis **tükati siledat** joont.

Kõigepealt tõestame järgmise lemma.

**Lemma 10.1** *Joonintegraal* (10.4) *on sõltumatu punkte* **A** *ja* **B** *ühendavast integreerimisteest piirkonnas* $D$ *parajasti siis, kui iga lihtsa kinnise joone* $\Gamma \subset D$ *korral kehtib võrdus*

$$\int_\Gamma F dx + G dy = 0. \tag{10.5}$$

**Tõestus.** *Tarvilikkus.* Eeldame, et integraal (4) ei sõltu integreerimisteest, vaid ainult punktidest **A** ja **B**. Olgu $\Gamma \subset D$ lihtne kinnine joon. Valime sellel joonel kaks punkti **A** ja **B**, need jaotavad joone $\Gamma$ kaheks kaareks $\Gamma_1$ ja $\Gamma_2$, võtame neil mõlemal suuna punktist **A** punkti **B** poole. Meie eelduse kohaselt kehtib võrdus $\int_{\Gamma_1} = \int_{\Gamma_2}$. Joonintegraali aditiivsuse omadusest saame seose $\int_\Gamma = \int_{\Gamma_1} + \int_{\underleftarrow{\Gamma_2}} = \int_{\Gamma_1} - \int_{\Gamma_2} = 0$ (siin nool tähe $\Gamma_2$ all tähendab, et kaar $\Gamma_2$ on suunatud punktist **B** punkti **A** poole), s.t. kehtib võrdus (10.5).

*Piisavus.* Eeldame, et tingimus (10.5) on täidetud iga lihtsa kinnise joone $\Gamma \subset D$ puhul. Olgu punktid **A** ja **B** võetud piirkonnas $D$ suvaliselt ja olgu $\Gamma_1$ ning $\Gamma_2$ neid punkte ühendavad lihtsad jooned, nad moodustavad kinnise joone $\Gamma$.

Esiteks vaatleme juhtu, kus joontel $\Gamma_1$ ja $\Gamma_2$ ei ole ühiseid punkte peale **A** ja **B**. Siis $\Gamma$ on lihtne joon ja meie eelduse põhjal kehtib seos (10.5). Samal ajal $\int_\Gamma = \int_{\Gamma_1} - \int_{\Gamma_2}$ (vt. tarvilikkuse tõestus), niisiis $\int_{\Gamma_1} = \int_{\Gamma_2}$.

Teiseks vaatleme juhtu, kus joontel $\Gamma_1$ ja $\Gamma_2$ on peale **A** ja **B** veel ühised punktid $\mathbf{C}_1, ..., \mathbf{C}_{n-1}$, olgu need nummerdatud nii, et mööda joont $\Gamma_1$ (või $\Gamma_2$) liikudes on $\mathbf{C}_{k+1}$ punktist **A** kaugemal kui $\mathbf{C}_k$. Siis jagunevad mõlemad jooned $\Gamma_1$ ja $\Gamma_2$ $n$ kaareks $\Gamma_{11}, \Gamma_{12}, ..., \Gamma_{1n}$ ja $\Gamma_{21}, \Gamma_{22}, ..., \Gamma_{2n}$, mis paarikaupa moodustavad $n$ lihtsat kinnist joont. Arvestades vaadeldud juhtu, võime väita, et $\int_{\Gamma_{11}} = \int_{\Gamma_{21}}, \int_{\Gamma_{12}} = \int_{\Gamma_{22}}, ..., \int_{\Gamma_{1n}} = \int_{\Gamma_{2n}}$. Aditiivsuse omaduse kohaselt saame nende võrduste liitmisel võrduse $\int_{\Gamma_1} = \int_{\Gamma_2}$. ■

**Märkus 3.** Põhimõtteliselt on piisavuse tõestamisel veel kolmas võimalus, kus joontel $\Gamma_1$ ja $\Gamma_2$ on lõpmata palju ühised punkte. Ka sel juhul jääb väide kehtima, selle juhu tõestuse jätame vahele.

**Seome vaadeldava probleemi eelmises punktis tõestatud Greeni valemiga.** Eeldame, et piirkonnas $D$ pidevatel funktsioonidel $F$ ja $G$ on selles piirkonnas pidevad osatuletised $\frac{\partial G}{\partial x}$ ja $\frac{\partial F}{\partial y}$. Kui $\Gamma$ on lihtne kinnine joon piirkonnas $D$ ja $E$ on selle joonega piiratud piirkond, siis funktsioonid $F$, $G$, $\frac{\partial G}{\partial x}$ ja $\frac{\partial F}{\partial y}$ rahuldavad piirkonnas $E$ Greeni valemi kehtimiseks vajalikke tingimusi eeldusel, et $E \subset D$. Niisiis, me vajame lisaeeldust, et *piirkond $D$ sisaldab koos iga lihtsa kinnise joonega ka selle joonega ümbritsetud piirkonna.* Sellise omadusega piirkonda $D$ nimetatakse *ühelisidusaks.* Piltlikult väljendudes võib öelda, et ühelisidusad on sellised piirkonnad, milles ei ole "auke".

Kui eeldada, et $D$ on ühelisidus, siis Greeni valemi abil saame tingimuse (10.5) esitada kujul

$$\int\int_E \left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}\right) dxdy = 0.$$

Pole kahtlust, et see kehtib, kui

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} \quad \text{kogu piirkonnas } D.$$

Osutub, et see tingimus on ka tarvilik võrduse (10.5) kehtivuseks. Tähistame

$$H(E) := \int\int_E \left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}\right) dxdy$$

ja leiame funktsiooni $H$ tuletise piirkonna $D$ suvalises punktis $\mathbf{X}$. Lausest 9.15 saame $\frac{dH}{dE} = \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}$. Kuna iga $E \subset D$ puhul $H(E) = 0$, siis $\frac{dH}{dE} = 0$, niisiis, $\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y}$ kogu piirkonnas $D$.

Kokkuvõttes oleme tõestanud järgmise lause.

**Lause 10.2** *Olgu funktsioonid $F$ ja $G$ ning nende osatuletised $\frac{\partial G}{\partial x}$ ja $\frac{\partial F}{\partial y}$ pidevad lahtises ühelisidusas piirkonnas $D$. Joonintegraal* (10.4) *on sõltumatu punkte* $\mathbf{A}$ *ja* $\mathbf{B}$ *ühendavast integreerimisteest piirkonnas $D$ parajasti siis, kui $\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y}$ kogu piirkonnas $D$.*

**Lause 10.3** *Olgu funktsioonid $F$ ja $G$ ning nende osatuletised $\frac{\partial G}{\partial x}$ ja $\frac{\partial F}{\partial y}$ pidevad lahtises ühelisidusas piirkonnas $D$. Avaldis $Fdx + Gdy$ on mingi piirkonnas $D$ diferentseeruva kahe muutuja funktsiooni $w = f(x, y)$ täisdiferentsiaal parajasti siis, kui $\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y}$ kogu piirkonnas $D$.*

**Tõestus.** *Tarvilikkus.* Eeldame, et $Fdx+Gdy = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = df$, kus $f$ on piirkonnas $D$ diferentseeruv funktsioon. Siis $F = \frac{\partial f}{\partial x}$ ning $G = \frac{\partial f}{\partial y}$ (põhjendada!)✠, millest saame $\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ ning $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$. Eelduse kohaselt on $\frac{\partial G}{\partial x}$ ja $\frac{\partial F}{\partial y}$ pidevad, Schwartzi teoreemi (vt. §4, lause 1) põhjal $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$. Niisiis kehtib võrdus $\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y}$ piirkonnas $D$.

*Piisavus.* Eeldame, et seos $\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y}$ kehtib kogu piirkonnas $D$, meie eesmärgiks on leida funktsioon $f : D \to \mathbb{R}$ omadusega $df = Fdx + Gdy$.

Olgu $\mathbf{A}$ fikseeritud ja $\mathbf{X}$ muutuv punkt piirkonnas $D$. Vaatleme joonintegraali $\int_{AX} Fdx+ Gdy$. Lause 10.2 põhjal ei sõltu selle integraali väärtus integreerimisteest, vaid ainult punktist $\mathbf{X}$. Tähistame

$$f(\mathbf{X}) := \int_{AX} Fdx + Gdy,$$

seega on $f$ piirkonnas $D$ määratud kahe muutuja funktsioon. Näitame, et $df$ langeb kokku avaldisega $Fdx + Gdy$. Kui $h$ on argumendi $x$ muut punktis $\mathbf{X}$ ja tähistades $\mathbf{Q} := (x + h, y)$, saame

$$\begin{aligned} f(x+h, y) - f(x, y) &= \int_{AQ} Fdx + Gdy - \int_{AX} Fdx + Gdy \\ &= \int_{XQ} Fdx + Gdy \end{aligned}$$

(selgitada!)✠. Joon $XQ$ on $x$-teljega paralleelne sirglõik, seega $\int_{XQ} Gdy = 0$ ning keskväärtusteoreemi kohaselt

$$\int_{XQ} Fdx = \int_x^{x+h} F(t, y)\, dt = F(\xi, y)\, h,$$

kus $\xi$ on mingi punkt vahemikus $(x, x + h)$. Niisiis,

$$\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}=F(\xi,y)$$

ja kuna protsessis $h \to 0$ saame $\xi \to x$, siis tänu funktsiooni $F$ pidevusele

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}=\lim_{h\to 0}F(\xi,y)=F(x,y).$$

Analoogiliselt saadakse seos

$$\frac{\partial f}{\partial y}=G(x,y).$$

Lause on tõestatud. ■

## 10.3 Regulaarsed teisendused tasandil

Nagu paragrahvi algul öeldud, püüame me leida eeskirja, mille järgi toimub muutujate vahetus kahekordses integraalis. Kõigepealt meenutame muutuja vahetust ühekordsete integraalide arvutamisel. Olgu $x=\varphi(t)$ lõigus $[\alpha,\beta]$ diferentseeruv funktsioon, mille väärtused moodustavad lõigu $[a,b]$, kus $a:=\varphi(\alpha)$ ja $b:=\varphi(\beta)$. Kui funktsioonil $f$ on selles lõigus olemas algfunktsioon, siis kehtib valem

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

eeldusel, et selles valemis esinevad integraalid eksisteerivad. Meie **eesmärk** on leida analoogiline valem kahekordsete integraalide jaoks. Selleks vajame me nn. regulaarse teisenduse mõistet.

**I. Regulaarse teisenduse mõiste.** Olgu antud kaks koordinaattasandit: $uv$- ja $xy$-tasand. Olgu $uv$-tasandi mingis **kinnises piirkonnas** $\Delta$ defineeritud funktsioonid

$$x=\xi(u,v),\quad y=\eta(u,v)\quad (\mathbf{U}=(u,v)\in\Delta). \tag{10.6}$$

Nad seavad igale punktile $\mathbf{U}=(u,v)\in\Delta$ vastavusse punkti $\mathbf{X}=(x,y)$ $xy$-tasandil, tähistame selle **teisenduse** tähega $T$. Olgu $D:=T(\Delta)=\{(x,y)\mid(u,v)\in\Delta\}$.

**Definitsioon.** Kujutust $T:\Delta\to D$, mis on määratud seostega (10.6), nimetatakse *regulaarseks teisenduseks,* kui on täidetud järgmised tingimused:
1) $T$ on üks-ühene, s.t. iga punkti $\mathbf{X}=(x,y)\in D$ puhul leidub parajasti üks punkt $\mathbf{U}:=(u,v)\in\Delta$ omadusega $T(\mathbf{U})=\mathbf{X}$,
2) eksisteerivad osatuletised $\frac{\partial\xi}{\partial u}$, $\frac{\partial\xi}{\partial v}$, $\frac{\partial\eta}{\partial u}$ ja $\frac{\partial\eta}{\partial v}$, mis on pidevad hulgas $\Delta$,
3) jakobiaan

$$J(\mathbf{U}):=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}:=\begin{vmatrix}\frac{\partial\xi(\mathbf{U})}{\partial u} & \frac{\partial\xi(\mathbf{U})}{\partial v}\\ \frac{\partial\eta(\mathbf{U})}{\partial u} & \frac{\partial\eta(\mathbf{U})}{\partial v}\end{vmatrix}$$

on **nullist erinev** iga $\mathbf{U}\in\Delta$ korral.

Kuna regulaarne teisendus $T:\Delta\to D$ korraldab üks-ühese vastavuse hulkade $\Delta$ ja $D$ vahel, siis avalduvad ka $u$ ja $v$ muutujate $x$ ja $y$ funktsioonina:

$$u=u(x,y),\quad v=v(x,y). \tag{10.7}$$

**II. Näitame, et ka seostega** (10.7) **määratud pöördkujutus** $T^{-1}$ **on regulaarne.** Tingimus 1) on kujutuse $T^{-1}$ puhul ilmselt täidetud, tingimus 2) järeldub vahetult teoreemist 5.3 (kontrollida!)✠.

Kontrollime **tingimust 3).** Selleks vaatleme algul üldisemat situatsiooni, kus on antud funktsioonid $y_1 = y_1(v_1, v_2)$ ja $y_2 = y_2(v_1, v_2)$, kusjuures $v_1 = v_1(t_1, t_2)$ ning $v_2 = v_2(t_1, t_2)$ ning kõigil siintoodud funktsioonidel on mõlema argumendi suhtes olemas pidevad osatuletised. Vaatleme liitfunktsioone $Y_1(t_1, t_2) := y_1(v_1(t_1, t_2), v_2(t_1, t_2))$ ning $Y_2(t_1, t_2) := y_2(v_1(t_1, t_2), v_2(t_1, t_2))$. Arvutame korrutise

$$\frac{D(y_1, y_2)}{D(v_1, v_2)} \frac{D(v_1, v_2)}{D(t_1, t_2)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial v_1} & \frac{\partial y_1}{\partial v_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial v_1} & \frac{\partial y_2}{\partial v_2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial t_1} & \frac{\partial v_1}{\partial t_2} \\ \frac{\partial v_2}{\partial t_1} & \frac{\partial v_2}{\partial t_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial v_1}\frac{\partial v_1}{\partial t_1} + \frac{\partial y_1}{\partial v_2}\frac{\partial v_2}{\partial t_1} & \frac{\partial y_1}{\partial v_1}\frac{\partial v_1}{\partial t_2} + \frac{\partial y_1}{\partial v_2}\frac{\partial v_2}{\partial t_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial v_1}\frac{\partial v_1}{\partial t_1} + \frac{\partial y_2}{\partial v_2}\frac{\partial v_2}{\partial t_1} & \frac{\partial y_2}{\partial v_1}\frac{\partial v_1}{\partial t_2} + \frac{\partial y_2}{\partial v_2}\frac{\partial v_2}{\partial t_2} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial Y_1}{\partial t_1} & \frac{\partial Y_1}{\partial t_2} \\ \frac{\partial Y_2}{\partial t_1} & \frac{\partial Y_2}{\partial t_2} \end{vmatrix} = \frac{D(Y_1, Y_2)}{D(t_1, t_2)}$$

(kontrollida!)✠. Meie juhul saadud valemit rakendades saame, et

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} \frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \frac{D(x, y)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

niisiis $\frac{D(u,v)}{D(x,y)} \neq 0$ ja $\frac{D(u,v)}{D(x,y)} \neq 0$.

**III. Näitame, et regulaarne teisendus** $T$ **kujutab hulga** $\Delta$ **sisepunktid (rajapunktid) hulga** $D$ **sisepunktideks (rajapunktideks).** Olgu $\mathbf{U}_0 = (u_0, v_0)$ hulga $\Delta$ suvaline sisepunkt, siis leidub ümbrus $U_\delta(\mathbf{U}_0)$, mis sisaldub hulgas $\Delta$. Näitame, et punkt $\mathbf{X}_0 := (x_0, y_0) := T(\mathbf{U}_0)$ on hulga $D$ sisepunkt. Selleks kasutame teoreemi 5.4, kus võtame $m = n = 2$ ja

$$F_1(x, y, u, v) := x - \xi(u, v), \quad F_2(x, y, u, v) := y - \eta(u, v),$$

seejuures $(x, y)$ on hulga $D$ suvalise punkti koordinaadid. Meie eelduste põhjal on nimetatud teoreemi tingimused täidetud, kui võtame $\mathbf{A} := (x_0, y_0, u_0, v_0)$ (veenduda!)✠. Selle teoreemi kohaselt leidub punktil $\mathbf{X}_0$ niisugune ümbrus $U_\varepsilon(\mathbf{X}_0)$, milles seosed (10.7) määravad muutujad $u$ ja $v$ argumentide $x$ ja $y$ pidevate funktsioonidena. Seega on kõik punktid ümbrusest $U_\varepsilon(\mathbf{X}_0)$ hulga $\Delta$ punktide kujutised kujutuse $T$ suhtes, niisiis $U_\varepsilon(\mathbf{X}_0) \subset D$. Tähendab, $\mathbf{X}_0$ on hulga $D$ sisepunkt.

Analoogiliselt **säilitab ka pöördkujutus** $T^{-1}$**sisepunktid.**

Kui $\mathbf{U}_0$ on hulga $\Delta$ rajapunkt, siis peab $\mathbf{X}_0$ olema rajapunkt hulgas $D$, sest vastasel korral (s.t. juhul, kui $\mathbf{X}_0$ oleks sisepunkt) kujutaks regulaarne teisendus $T^{-1}$ sisepunkti $\mathbf{X}_0$ rajapunktiks $\mathbf{U}_0$, mis on eelpool tõestatuga vastuolus.

**IV. Veendume, et kui** $\Lambda$ **on lihtne (tükati) sile joon piirkonnas** $\Delta$**, siis** $L := T(\Lambda) \subset D$ **on samuti lihtne (tükati) sile joon.** Olgu $\Lambda$ sile joon, mis on antud parameetriliste võrranditega

$$u = u(t), \quad v = v(t) \quad (t \in [\alpha, \beta]). \tag{10.8}$$

Siis funktsioonidel $u$ ja $v$ on pidevad tuletised, mis ei ole korraga nullid ühegi $t \in [\alpha, \beta]$ puhul. Joone $L$ võrrandid on

$$x = x(t) = \xi(u(t), v(t)), \quad y = y(t) = \eta(u(t), v(t)) \quad (t \in [\alpha, \beta]). \tag{10.9}$$

Siit saame seosed

$$x'(t) = \frac{\partial \xi}{\partial u} u(t) + \frac{\partial \xi}{\partial v} v(t), \quad y'(t) = \frac{\partial \eta}{\partial u} u(t) + \frac{\partial \eta}{\partial v} v(t), \tag{10.10}$$

kusjuures tingimusest $\frac{D(x,y)}{D(u,v)} \neq 0$ järeldub, et ühegi $t \in [\alpha, \beta]$ korral ei ole $x'(t)$ ning $y'(t)$ korraga võrdsed nulliga (selgitada!)✠.

Lihtne on näha, et **kui $\Lambda$ on kinnine joon piirkonnas $\Delta$, siis $L$ on samuti kinnine** (selgitada!)✠. Allpool näeme, et see, kas kujutus $T$ säilitab ka **liikumise suuna**, sõltub jakobiaani $\frac{D(x,y)}{D(u,v)}$ märgist.

**V.** Anname vaadeldavale kujutusele $T$ piirkondade $\Delta$ ja $D$ vahel **geomeetrilise selgituse**. Seostega (10.6) kirjeldame me $xy$-tasandi piirkonna $D$ punkte koordinaatide $u$ ja $v$ abil. Kui fikseerida näiteks muutuja $v = v_0$, siis saame parameetrilised võrrandid

$$x = \xi(u, v_0), \quad y = \eta(u, v_0)$$

(parameetri rollis on $u$), mis kirjeldavad seda nn. *koordinaatjoont*, mis vastab sirgele $v = v_0$ $uv$-tasandil. Kuna $T$ on üksühene kujutus, siis *kahele erinevale $v$ väärtusele vastavad koordinaatjooned ei lõiku* (selgitada!)✠.

Analoogiliselt saame sirgele $u = u_0$ vastava koordinaatjoone

$$x = \xi(u_0, v), \quad y = \eta(u_0, v).$$

Andes nii koordinaatidele $u$ ja $v$ erinevaid väärtusi, saame piirkonnas $D$ uue koordinaatide võrgu.

**Näide 1 (oluline!).** Vaatleme kõige olulisemat muutuja vahetust - **üleminekut tavalistelt ristkoordinaatidelt $x$ ja $y$ polaarkoordinaatidele $r$ ja $\theta$.** Me vaatleme kujutust $T$ hulkade

$$\{(r,\theta) \mid r \geq 0,\ \theta \in [0, 2\pi]\} \text{ ja } \{(x,y) \mid x, y \in (-\infty, \infty)\}$$

vahel, mis on määratud võrranditega

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta. \tag{10.11}$$

Kahjuks **ei ole see kujutus üks-ühene**: $xy$-tasandi punktile $\mathbf{0} = (0,0)$ vastab $r\theta$-tasandil terve lõik $[0, 2\pi]$.

Vaatleme $r\theta$-tasandil kinnist ristkülikut $\Delta := [0, R] \times [0, 2\pi]$, kus $R > 0$. Olgu selle tipud (alustades punktist $(0,0)$ positiivses suunas) $\mathbf{O}, \mathbf{M}, \mathbf{N}$ ja $\mathbf{Z}$. Talle vastab $xy$-tasandil kinnine ring $D := S_R$ keskpunktiga $\mathbf{0}$ ja raadiusega $R$. Selle ringi rajajoon (s.o. ringjoon keskpunktiga $\mathbf{0}$ ja raadiusega $R$) vastab lõigule $MN$, mõlemale lõigule $OM$ ja $NZ$ vastab lõik $0A$, kus $\mathbf{A} := (R, 0)$. Lõigule $MO$ vastab ainult punkt $\mathbf{0}$. Näeme, et seostega (10.11) määratud vastavus hulkade $\Delta$ ja $D$ vahel ei ole üksühene.

Olukord muutub, kui nihutada ristküliku **OMNZ** külge $ZO$ (väikese) suuruse $\rho > 0$ võrra paremale ning külge $NZ$ (väikese) suuruse $\delta > 0$ võrra allapoole, saame uue ristküliku $\Delta' := \mathbf{O'MN'Z'}$. Lihtne on veenduda, et sellele vastab ring $S_R$, millest on välja jäetud ring keskpunktiga **0** ja raadiusega $\rho$ ning sektor **A0B**, mis vastab nurgale $\delta$. Tähistame selle piirkonna tähega $D'$. Teisendus $T : \Delta' \to D'$ on regulaarne. Vahetu kontroll näitab, et $\frac{D(x,y)}{D(r,\theta)} = r$ (veenduda!)✠.

**VI.** Järgnevalt uurime olulist küsimust **kuidas regulaarse teisenduse $T$ korral teiseneb vaadeldava piirkonna pindala.** Püüame avaldada piirkonna $D$ pindala kahekordse integraalina üle piirkonna $\Delta$. Olgu $D$ **mõõtuv** piirkond $xy$-tasandil **tükati sileda rajajoonega** $\partial D$. (Viimast eeldust läheb meil vaja selleks, et oleks võimalik rakendada Greeni valemit (vrd. märkus 1)). Vastaku talle $uv$-tasandil piirkond $\Delta$ rajajoonega $\partial\Delta$. Kuna $T^{-1}$ on regulaarne, siis ka $\partial\Delta$ on tükati sile joon, mistõttu $\Delta$ on mõõtuv hulk (vrd. pt. 9, järeldus 9.8). Arutluse lihtsustamiseks eeldame lisaks kujutuse $T$ regulaarsusele veel, et **funktsiooni $\eta$ segaosatuletised**

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial u\partial v} \text{ **ja** } \frac{\partial^2\eta}{\partial v\partial u} \text{ **on pidevad piirkonnas** } \Delta \tag{10.12}$$

(Schwarzi teoreemi kohaselt langevad need kokku (vrd. pt. 4, lause 4.1)).

Lähtume valemist $\mu(D) = \int_{\partial D} xdy$ (vt. märkus 2). **Esimese sammuna** läheme selles üle tavalisele Riemanni integraalile. Olgu rajajoon $\partial\Delta$ antud parameetriliste võrranditega (10.8), siis võrrandid (10.9) kirjeldavad joone $\partial D$. Seejuures **valime arvud $\alpha$ ja $\beta$ nii, et kui argument $t$ muutub arvust $\alpha$ arvuni $\beta$, siis punkt joonel $\partial D$ liiguks positiivses suunas.** Seostest (10.9) ja (10.10) saame

$$\mu(D) = \int_\alpha^\beta x(t)\, y'(t)\, dt = \int_\alpha^\beta \xi(u(t), v(t)) \left(\frac{\partial\eta}{\partial u}u'(t) + \frac{\partial\eta}{\partial v}v'(t)\right) dt. \tag{10.13}$$

**Teise sammuna** võrdleme saadud Riemanni integraali joonintegraaliga

$$\int_{\partial\Delta} \xi(u,v) \left(\frac{\partial\eta(u,v)}{\partial u}du + \frac{\partial\eta(u,v)}{\partial v}dv\right), \tag{10.14}$$

mis on võetud üle joone $\partial\Delta$ positiivses suunas. Selle arvutamiseks peaksime asendama $u$ ja $v$ võrranditest (10.8) funktsioonidega $u(t)$ ja $v(t)$, lihtne on näha, et saaksime integraali (10.13). On siiski üks probleem: me valisime arvud $\alpha$ ja $\beta$ nii, et liikudes punktist $\alpha$ punkti $\beta$ saaksime joonel $\partial D$ positiivse liikumissuuna, joonel $\partial\Delta$ võib sel juhul liikumissund olla kas positiivne või negatiivne. Teisi sõnu, **integraalid** (10.13) **ja** (10.14) **võivad erineda märgi poolest.** Seepärast kirjutame esialgu

$$\mu(D) = \pm\int_{\partial\Delta} \xi(u,v) \left(\frac{\partial\eta(u,v)}{\partial u}du + \frac{\partial\eta(u,v)}{\partial v}dv\right) \tag{10.15}$$

ja peame silmas, et kui positiivsele suunale joonel $\partial D$ vastab positiivne suund joonel $\partial\Delta$, siis tuleb võtta $+$, vastasel juhul $-$.

Lõpuks, **kolmanda sammuna** rakendame joonintegraali (10.14) teisendamiseks Greeni valemit (10.3), võttes selles

$$F(u,v) := \xi(u,v)\frac{\partial\eta(u,v)}{\partial u} \quad \text{ja} \quad G(u,v) := \xi(u,v)\frac{\partial\eta(u,v)}{\partial v}.$$

Kuna

$$\frac{\partial G}{\partial u} = \frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial \eta}{\partial v} + \xi \frac{\partial^2 \eta}{\partial u \partial v},$$
$$\frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial \xi}{\partial v}\frac{\partial \eta}{\partial u} + \xi \frac{\partial^2 \eta}{\partial v \partial u},$$

siis

$$\frac{\partial G}{\partial u} - \frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial \eta}{\partial v} - \frac{\partial \xi}{\partial v}\frac{\partial \eta}{\partial u} = \frac{D(x,y)}{D(u,v)}$$

ning Greeni valemi kohaselt

$$\mu(D) = \pm \int\int_{\Delta} \frac{D(x,y)}{D(u,v)} dudv.$$

Meie eeldustel on jakobiaan $J := \frac{D(x,y)}{D(u,v)}$ piirkonnas $\Delta$ pidev ning nullist erinev, seega säilitab ta märki (selgitada!)✠, sama märk on siis ka integraalil $\int\int_{\Delta} \frac{D(x,y)}{D(u,v)} dudv$. Seetõttu saame valemi

$$\mu(D) = \int\int_{\Delta} \left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right| dudv \tag{10.16}$$

(põhjendada!)✠. Kasutades kahekordse integraali keskväärtusteoreemi (vt. pt. 8, omadus 8.15), saame leida punkti $\mathbf{U}^* = (u^*, v^*) \in \Delta$ omadusega

$$\mu(D) = |J(u^*, v^*)| \, \mu(\Delta) \tag{10.17}$$

(kontrollida!)✠.

Märgime, et valemid (10.16) ja (10.17) kehtivad ka ilma lisaeelduseta (10.12).

**VII. Iseäraste punktide lokaliseerimine.** Enamasti on muutujate vahetused, mida praktikas kasutatakse, sellised, kus seostega (10.6) määratud kujutuse $T$ korral kõik regulaarsuse tingimused ei ole täidetud. Siiski osutub, et valem (10.16) jääb kehtima, kui need n.ö. iseärased punktid, mille puhul meie poolt tehtud eeldused on rikutud, saab nii piirkonnas $D$ kui ka piirkonnas $\Delta$ lokaliseerida selliselt, et **iga etteantud** $\varepsilon > 0$ **korral leidub alamhulk** $D_\varepsilon \subset D$, **mis sisaldab kõik hulga** $D$ **iseärased punktid, ning** $\mu(D_\varepsilon) < \varepsilon$ **ja** $\mu(T^{-1}(D_\varepsilon)) < \varepsilon$. Seejuures **eeldame, et jakobiaan** $J = \frac{D(x,y)}{D(u,v)}$ **on hulgas** $\Delta$ **tõkestatud**, s.t.

$$\exists\, M > 0 : |J(\mathbf{U})| \le M \text{ iga } \mathbf{U} \in \Delta \text{ puhul}$$

(see tingimus on täidetud, kui osatuletised $\frac{\partial \xi}{\partial u}, \frac{\partial \xi}{\partial v}, \frac{\partial \eta}{\partial u}$ ja $\frac{\partial \eta}{\partial v}$ on pidevad (selgitada!)✠).

Veendume selles. Suvalise fikseeritud $\varepsilon > 0$ korral kehtib valem

$$\mu(D \setminus D_\varepsilon) = \int\int_{\Delta \setminus T^{-1}(D_\varepsilon)} \left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right| dudv.$$

Seejuures

$$\int\int_{\Delta} - \int\int_{\Delta \setminus T^{-1}(D_\varepsilon)} = \int\int_{T^{-1}(D_\varepsilon)} \left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right| dudv \le M\varepsilon$$

ja protsessis $\varepsilon \to 0$ saame $\lim_{\varepsilon \to 0} \mu(D \setminus D_\varepsilon) = \int\int_{\Delta} \left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right| dudv$. Seega saame valemi (10.16).

**Näide 1 (jätk).** Tuleme tagasi eelpool vaadeldud näite 1 juurde polaarkoordinaatidele üleminekust. Lihtne on näha, et tänu märkusele 6 saame rakendada valemit (10.16) ning veenduda, et

$$\mu(D) = \int\int_{\Delta} r dr d\theta = \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\theta = \pi R^2.$$

## 10.4 Muutujate vahetus kahekordses integraalis

Eksisteerigu kahekordne integraal

$$I := \int\int_D f(x,y)\, dxdy,$$

kus $D$ on kinnine tõkestatud piirkond lihtsa tükati sileda rajajoonega $\partial D$ ning $f : D \to \mathbb{R}$ on **pidev** funktsioon. Olgu $\Delta$ piirkond $uv$-tasandil ja $T : \Delta \to D$ regularne teisendus, mis on määratud seostega (10.6). Eeldame, et **on rahuldatud kõik need tingimused, mida me kasutasime valemi** (10.16) **tuletamisel.**

Jaotame piirkonna $\Delta$ osadeks $\Delta_i$ $(i = 1, ..., n)$ tükati siledate joontega, siis piirkond $D$ jaotub osadeks $D_i := T(\Delta_i)$, nende rajajooned on samuti tükati siledad (põhjendada!)✠. Teisi sõnu, me saame piirkonna $\Delta$ alajaotuse $\widetilde{T}_\Delta = \widetilde{T}[\Delta_1, ..., \Delta_n]$ ning piirkonna $D$ alajaotuse $\widetilde{T}_D = \widetilde{T}[D_1, ..., D_n]$ (vrd. pt. 8, definitsioon 2*). Igas osapiirkonnas $D_i$ fikseerime suvaliselt mingi punkti $\mathbf{X}_i = (x_i, y_i)$ ja moodustame integraalsumma

$$\sigma\left(\widetilde{T}_D\right) = \sum_{i=1}^n f(\mathbf{X}_i)\, \mu(D_i). \tag{10.18}$$

Alajaotuse $\widetilde{T}_D$ peenendamisel, kui

$$\lambda\left(\widetilde{T}_D\right) := \max_{1\le i\le n} d(D_i) \to 0$$

(siin $d(D_i) := \sup_{\mathbf{X},\mathbf{X}'\in D_i} \|\mathbf{X} - \mathbf{X}'\|$ on hulga $D_i$ diameeter), siis $\sigma\left(\widetilde{T}_D\right) \to I$.

Rakendame igale piirkonnale $D_i$ valemit (10.17) ja leiame punktid $\mathbf{U}_i = (u_i, v_i) \in \Delta_i$ omadusega

$$\mu(D_i) = |J(u_i, v_i)|\, \mu(\Delta_i) \quad (i = 1, ..., n),$$

mistõttu integraalsumma (10.18) esitub kujul

$$\sigma\left(\widetilde{T}_D\right) = \sum_{i=1}^n f(\mathbf{X}_i)\, |J(\mathbf{U}_i)|\, \mu(\Delta_i).$$

Võttes siin $\mathbf{X}_i := T(\mathbf{U}_i)$ $(i = 1, ..., n)$, saame

$$\sigma\left(\widetilde{T}_D\right) = \sum_{i=1}^n f(\xi(u_i, v_i), \eta(u_i, v_i))\, |J(u_i, v_i)|\, \mu(\Delta_i),$$

see on integraali

$$I_1 = \int\int_{\Delta} f(\xi(u,v), \eta(u,v))\, |J(u,v)|\, dudv$$

integraalsumma. Kuna integraalialune funktsioon on pidev, siis integraal $I_1$ tõepoolest eksisteerib. Jääb veenduda, et $I = I_1$, s.t.

$$\lim_{\lambda\left(\widetilde{T}_D\right)\to 0} \sigma\left(\widetilde{T}_D\right) = \lim_{\lambda\left(\widetilde{T}_\Delta\right)\to 0} \sigma\left(\widetilde{T}_D\right).$$

Oletame vastuväiteliselt, et $I < I_1$. Võtame $\varepsilon := \frac{I_1 - I}{2}$ ja leiame $\delta > 0$ ja $\delta_1 > 0$ omadusega

$$\lambda\left(\widetilde{T}_D\right) < \delta \Rightarrow \left|\sigma\left(\widetilde{T}_D\right) - I\right| < \varepsilon \quad \text{ja} \quad \lambda\left(\widetilde{T}_\Delta\right) < \delta_1 \Rightarrow \left|\sigma\left(\widetilde{T}_D\right) - I_1\right| < \varepsilon.$$

Juhul $\lambda\left(\widetilde{T}_D\right), \lambda\left(\widetilde{T}_\Delta\right) < \min\{\delta, \delta_1\}$ saame võrratused

$$I - \varepsilon < \sigma\left(\widetilde{T}_D\right) < I + \varepsilon = I_1 - \varepsilon < \sigma\left(\widetilde{T}_D\right) < I_1 + \varepsilon,$$

mis kinnitavad vastuväitelise oletuse $I < I_1$ paikapidamatust. Samamoodi näidatakse, et $I_1 < I$ ei kehti.

Kokkuvõttes oleme tõestanud järgmise teoreemi.

**Teoreem 10.4** *Olgu $D$ tükati sileda rajajoonega kinnine tõkestatud piirkond $xy$-tasandil ja olgu funktsioon $f$ pidev hulgas $D$. Kui $\Delta$ on hulk, mille seostega* (10.6) *määratud regulaarne teisendus $T$ kujutab hulgaks $D$, siis kehtib võrdus*

$$\int\int_D f(x,y)\,dxdy = \int\int_\Delta f(\xi(u,v), \eta(u,v)) \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| dudv. \tag{10.19}$$

**NB!** Valem (10.19) jääb kehtima ka juhul, kui punktid, kus teisenduse $T$ regulaarsus on rikutud, saab lokaliseerida vastavalt eelmise punkti VII. osa nõuetele.

# 11 Kolmekordne integraal

## 11.1 Kolmekordse integraali mõiste

**Integraal üle risttahuka.** Olgu $R := [a, b] \times [c, d] \times [u, v]$ risttahukas ruumis $\mathbb{R}^3$, s.t.

$$R = \{\mathbf{X} = (x, y, z) \mid a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d,\ u \leq z \leq v\}.$$

Olgu $T[x_0, ..., x_n]$, $T[y_0, ..., y_r]$ ja $T[z_0, ..., z_s]$ vastavalt lõikude $[a, b]$, $[c, d]$ ja $[u, v]$ alajaotused

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b, \quad c = y_0 < y_1 < ... < y_r = d,\ u = z_0 < z_1 < ... < z_s = v..$$

Siis risttahukas $R$ jaotub *osaristtahukateks*

$$R_{klp} := [x_{k-1}, x_k] \times [y_{l-1}, y_l] \times [z_{p-1}, z_p] \quad (k = 1, ..., n;\ l = 1, ..., r;\ p = 1, ..., s).$$

Niimoodi saadud **alajaotuse** tähistame $T = T[R_{klp}]$, arvu

$$\lambda(T) := \max_{1 \leq k \leq n,\ 1 \leq l \leq r,\ 1 \leq p \leq s} \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_l)^2 + (\Delta z_p)^2},$$

kus $\Delta x_k := x_k - x_{k-1}$, $\Delta y_l := y_l - y_{l-1}$ ja $\Delta z_p := z_p - z_{p-1}$, nimetame alajaotuse $T[R_{klp}]$ *diameetriks.*

Olgu $f : R \to \mathbb{R}$ funktsioon. Moodustame (fikseeritud alajaotuse $T$ puhul) *integraalsumma*

$$\sigma(T) := \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{r} \sum_{p=1}^{s} f(\xi_k, \eta_l, \zeta_p)\, \Delta x_k \Delta y_l \Delta z_p,$$

kus punkt $\mathbf{X}_{klp} = (\xi_k, \eta_l, \zeta_p)$ on suvaline punkt osaristtahukast $R_{klp}$.

**Definitsioon.** Arvu $I$ nimetatakse funktsiooni $f$ *kolmekordseks Riemanni integraaliks* üle risttahuka $R$, kui iga $\varepsilon > 0$ korral leidub niisugune $\delta > 0$, et mistahes alajaotuse $T[R_{klp}]$, korral, mille diameeter $\lambda(T)$ on väiksem kui $\delta$, kehtib punktide $\mathbf{X}_{klp} = (\xi_k, \eta_l, \zeta_p) \in R_{klp}$ suvalise valiku korral võrratus

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{r} \sum_{p=1}^{s} f(\xi_k, \eta_l, \zeta_p)\, \Delta x_k \Delta y_l \Delta z_p - I \right| < \varepsilon.$$

Sel juhul kirjutatakse

$$\lim_{\lambda(T) \to 0} \sigma(T) = I,$$

kolmekordset integraali tähistatakse

$$\int\int\int_R f(x, y, z)\, dxdydz \text{ ehk, lühemalt, } \int\int\int_R f d\mu.$$

Kui see integraal eksisteerib, siis ütleme, et funktsioon $f$ on (Riemanni mõttes) risttahukas $R$ *integreeruv.*

Ka kolme muutuja funktsiooni integreeruvuseks on tarvilik tingimus tema tõkestatus. Nimelt kehtib järgmine väide.

**Lause 11.1** *Iga risttahukas $R$ integreeruv funktsioon $f$ on selles hulgas tõkestatud.*

Olgu $f : R \to \mathbb{R}$ tõkestatud funktsioon, siis antud alajaotuse $T = T[R_{klp}]$ puhul eksisteerivad

$$M_{klp} := \sup_{\mathbf{X}\in R_{klp}} f(\mathbf{X}) \quad \text{ja} \quad m_{klp} := \inf_{\mathbf{X}\in R_{klp}} f(\mathbf{X})$$

suvaliste $k = 1, ..., n,$ $l = 1, ..., r$ ja $p = 1, ..., s$ korral. Moodustame *Darboux' ülem- ja alamsumma*

$$S(T) := \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{r}\sum_{p=1}^{s} M_{klp}\Delta x_k \Delta y_l \Delta z_p \quad \text{ning} \quad s(T) := \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{r}\sum_{p=1}^{s} m_{klp}\Delta x_k \Delta y_l \Delta z_p,$$

seejuures

$$s(T) \le \sigma(T) \le S(T).$$

Tegelikult *ülemsumma $S(T)$ on integraalsumma $\sigma(T)$ ülemine raja*, sest punkti $\mathbf{X}_{klp} \in R_{klp}$ valikuga võib funktsiooni väärtuse $f(\mathbf{X}_{klp})$ saada kuitahes lähedale arvule $M_{klp}$. Analoogiliselt on alamsumma $s(T)$ integraalsumma $\sigma(T)$ alumine raja. Niisiis, fikseeritud alajaotuse $T$ puhul

$$S(T) = \sup \sigma(T) \quad \text{ja} \quad s(T) = \inf \sigma(T),$$

kus rajad võetakse üle kõikvõimalike valikute $\mathbf{X}_{klp} \in R_{klp}$ $(k = 1, ..., n;\ l = 1, ..., r;\ p = 1, ..., s)$.
Darboux' summade põhilised omadused on:
1) alajaotuse peenendamisel ei saa ülemsumma kasvada ega alamsumma kahaneda,
2) ükski alamsumma ei ole suurem ühestki ülemsummast.
Seejuures kehtib järgmine **integreeruvuse kriteerium**.

**Teoreem 11.2** *Tõkestatud funktsioon $f : R \to \mathbb{R}$ on risttahukas $R$ integreeruv parajasti siis, kui $\lim_{\lambda(T)\to 0}(S(T) - s(T)) = 0$, s.t.*

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \lambda(T) < \delta \Rightarrow S(T) - s(T) < \varepsilon.$$

Muuhulgas tuleneb teoreemist 11.2 järgmine oluline fakt.

**Teoreem 11.3** *Kui funktsioon $f : R \to \mathbb{R}$ on risttahukas $R$ pidev, siis on ta integreeruv.*

**Integraal üle suvalise hulga ruumis $\mathbb{R}^3$.** Olgu $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ tõkestatud hulk, milles on määratud funktsioon $f$. Valime niisuguse risttahuka $R = [a, b] \times [c, d] \times [u, v]$, et $\Omega \subset R$. Defineerime uue funktsiooni $F : R \to \mathbb{R}$ seosega

$$F(\mathbf{X}) := \begin{cases} f(\mathbf{X}), & \text{kui } X \in \Omega, \\ 0, & \text{kui } X \in R\diagdown\Omega. \end{cases}$$

Funktsiooni $f : \Omega \to \mathbb{R}$ nimetame integreeruvaks hulgas $D$, kui funktsioon $F$ on risttahukas $R$ integreeruv. Sel juhul

$$\int\int\int_{\Omega} f(x, y, z)\, dxdydz := \int\int\int_{R} F(x, y, z)\, dxdydz.$$

**Hulga ruumala ruumis $\mathbb{R}^3$. Definitsioon.** Tõkestatud alamhulka $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ nimetatakse (Jordani mõttes) *mõõtuvaks*, kui eksisteerib integraal

$$\int\int\int_{\Omega} \chi_{\Omega}(\mathbf{X})\, dxdydz =: \mu(\Omega),$$

kus

$$\chi_{\Omega}(\mathbf{X}) := \begin{cases} 1, & \text{kui } \mathbf{X} \in \Omega, \\ 0, & \text{kui } \mathbf{X} \notin \Omega \end{cases}$$

on hulga $\Omega$ karakteristlik funktsioon. Arvu $\mu(\Omega)$ nimetatakse sel juhul hulga $\Omega$ *ruumalaks* ehk *Jordani mõõduks.*

Kui $\Omega$ on risttahukas $R := [a,b] \times [c,d] \times [u,v]$, siis suvalise alajaotuse $T = T[R_{klp}]$ korral

$$\sigma(T) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{r}\sum_{p=1}^{s} \Delta x_k \Delta y_l \Delta z_p = (b-a)(d-c)(v-u),$$

seega on $\mu(R) = (b-a)(d-c)(v-u)$.

**Muutuja vahetus kolmekordses integraalis** põhineb *ruumiliste hulkade regulaarsele teisendusele.* Olgu $\Pi$ kinnine hulk ruumis $\mathbb{R}^3$, milles on defineeritud funktsioonid

$$x = \xi(u,v,w), \quad y = \eta(u,v,w), \quad z = \zeta(u,v,w). \tag{11.1}$$

Olgu $\Omega := \{(x,y,z) \mid (u,v,w) \in \Pi\}$. Seosed (11.1) määravad teatava teisenduse $T : \Pi \to \Omega$, mida nimetatakse regulaarseks, kui on täidetud järgmised tingimused:
1) $T$ on üks-ühene,
2) funktsioonidel (11.1) on hulgas $\Pi$ pidevad osatuletised kõigi argumentide järgi,
3) jakobiaan $J = \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}$ on nullist erinev, s.t.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\xi(\mathbf{U})}{\partial u} & \frac{\partial\xi(\mathbf{U})}{\partial v} & \frac{\partial\xi(\mathbf{U})}{\partial w} \\ \frac{\partial\eta(\mathbf{U})}{\partial u} & \frac{\partial\eta(\mathbf{U})}{\partial v} & \frac{\partial\eta(\mathbf{U})}{\partial w} \\ \frac{\partial\zeta(\mathbf{U})}{\partial u} & \frac{\partial\zeta(\mathbf{U})}{\partial v} & \frac{\partial\zeta(\mathbf{U})}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0$$

iga $\mathbf{U} \in \Pi$ korral. Ilma tõestuseta esitame siinkohal järgmise väite.

**Teoreem 11.4** *Olgu $\Omega$ kinnine mõõtuv hulk ning $\Pi := T^{-1}(\Omega)$, kus $T$ on seostega* (11.1) *määratud regulaarne teisendus. Kui funktsioon $w = f(x,y,z)$ on pidev hulgas $\Omega$, siis*

$$\int\int\int_{\Omega} f(x,y,z)\, dxdydz = \int\int\int_{\Pi} f(\xi,\eta,\zeta) \left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\right| dudvdw. \tag{11.2}$$

**Märkus 1.** Olgu $L \subset \Omega$ nende punktide hulk, kus teisendus $T$ ei ole regulaarne, eeldame, et $\mu(L) = 0$. Siis leiduvad mõõtuvad hulgad $W_n$, et $L \subset W_n$ $(n \in \mathbb{N})$ ja $\lim_n \mu(W_n) = 0$. Kui eeldada, et
1) $\lim_n \mu(\Gamma_n) = 0$, kus $\Gamma_n := T^{-1}(W_n)$, ja
2) jakobiaan $J = \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}$ on tõkestatud hulgas $\Pi$,
siis kehtib seos (11.2).

**Üleminek silindrilistele koordinaatidele** teostatakse teisendusega $T$, mis on määratud seostega

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ z = z \quad (r \geq 0,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ -\infty < z < \infty).$$

Kuna

$$J = \frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,z)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r,$$

siis on $T$ regulaarne igas hulgas $\Omega$, mis ei sisalda punkti 0, seega

$$\int\int\int_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz = \int\int\int_{\Pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\,rdrd\theta dz, \tag{11.3}$$

kui $f : \Omega \to \mathbb{R}$ on pidev funktsioon. Tegelikult kehtib see valem ka nende hulkade $\Omega$ puhul, mis sisaldavad nullpunkti. Nimelt, kui võtame hulgaks $W_n$ (vt. märkus 1) silindri

$$\left\{(x,y,z) \mid \sqrt{x^2+y^2} \leq \frac{1}{n},\ -\frac{1}{n} \leq z \leq \frac{1}{n}\right\},$$

siis $\Gamma_n := \left\{(r,\theta,z) \mid 0 \leq r \leq \frac{1}{n},\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ -\frac{1}{n} \leq z \leq \frac{1}{n}\right\}$ on risttahukas ja $\mu(\Gamma_n) = \frac{4\pi}{n^2} \to 0\ (n \to \infty)$. Seega on märkuse tingimus 1) täidetud. Tingimus 2) on täidetud igas tõkestatud hulgas $\Pi$. Märkuse 1 kohaselt kehtib valem (11.3) iga mõõtuva hulga $\Omega$ korral.

**Üleminek sfäärilistele koordinaatidele** toimub teisendusega $T$, mis on defineeritud seostega

$$x = r\sin\gamma\cos\theta,\ y = r\sin\gamma\sin\theta,\ z = r\cos\gamma\ \ (r \geq 0,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq \gamma \leq \pi),$$

sel juhul

$$J = \frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\gamma)} = \begin{vmatrix} \sin\gamma\cos\theta & \sin\gamma\sin\theta & \cos\gamma \\ r\cos\gamma\cos\theta & r\cos\gamma\sin\theta & -r\sin\gamma \\ -r\sin\gamma\sin\theta & r\sin\gamma\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = r^2\sin\gamma \geq 0.$$

Teisendus $T$ ei ole regulaarne $z$-teljel, kuid saab näidata, et valem

$$\int\int\int_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz = \int\int\int_{\Pi} f(r\sin\gamma\cos\theta, r\sin\gamma\sin\theta, r\cos\gamma)\,r^2\sin\gamma drd\theta d\gamma$$

kehtib suvalise mõõtuva hulga $\Omega$ korral.

## 11.2 Kolmekordse integraali arvutamine

Kolmekordse integraali arvutamine taandatakse tavaliselt kahekordse ja ühekordse integraali arvutamisele. Me esitame vastavad väited siinkohal ilma tõestusteta, põhimõtteliselt tõestatakse nad samamoodi, kui vastavad väited kahekordse integraali korral (vrd. pt. 8).

**1.** Olgu $R$ risttahukas kujul

$$R = [a, b] \times [c, d] \times [u, v]$$

tähistame $D_1 := [c, d] \times [u, v]$ ja $D_3 := [a, b] \times [c, d]$, need on risttahuka $R$ projektsioonid vastavalt $yz$- ning $xy$-tasandil. Kui funktsioon $w = f(x, y, z)$ on risttahukas $R$ integreeruv, siis kehtivad valemid

$$\int\int\int_R f(x, y, z)\, dxdydz = \int_a^b dx \int\int_{D_1} f(x, y, z)\, dydz,$$
$$\int\int\int_R f(x, y, z)\, dxdydz = \int\int_{D_3} dxdy \int_u^v f(x, y, z)\, dz$$

eeldusel, et kahekordne integraal $\int\int_{D_1} f(x, y, z)\, dydz$ eksisteerib iga $x \in [a, b]$ korral ja ühekordne integraal $\int_u^v f(x, y, z)\, dz$ iga $(x, y) \in D_3$ korral.

**2**. Vaatleme nüüd üldisemat situatsiooni. Olgu $\Omega$ kahe $x$-teljega ristuva tasandi $x = a$ ja $x = b$ vahel. Eeldame, et hulga $\Omega$ lõikamisel suvalise tasandiga $x = c$, mis on nende kahe tasandiga paralleelne ja asub nende vahel, tekib kujund, mille projektsioon $D_c$ $yz$-tasandil on mõõtuv. Sel juhul

$$\int\int\int_\Omega f(x, y, z)\, dxdydz = \int_a^b dx \int\int_{D_x} f(x, y, z)\, dydz.$$

**3.** Olgu hulgaks $\Omega$ veelgi üldisem kõversilinder, mis ülalt ja alt on piiratud pindadega $z = \varphi(x, y)$ ja $z = \psi(x, y)$, kus $\psi(x, y) \le \varphi(x, y)$ iga $(x, y)$ korral hulgast $D$, milleks projekteerub $xy$-tasandile kõversilinder $\Omega$. Seejuures eeldatakse, et iga $(x, y) \in D$ korral eksisteerib ühekordne integraal $\int_{\psi(x,y)}^{\varphi(x,y)} f(x, y, z)\, dz$. Siis

$$\int\int\int_\Omega f(x, y, z)\, dxdydz = \int\int_D dxdy \int_{\psi(x,y)}^{\varphi(x,y)} f(x, y, z)\, dz.$$

Erijuhul, kui $D$ on kõvertrapets, mis on piiratud joontega $x = a$, $x = b$, $y = \alpha(x)$ ja $y = \beta(x)$, kus $\beta(x) \le \alpha(x)$ iga $x \in [a, b]$ korral, saame kolmekordse integraali arvutamiseks valemi

$$\int\int\int_\Omega f(x, y, z)\, dxdydz = \int_a^b dx \int_{\beta(x)}^{\alpha(x)} dy \int_{\psi(x,y)}^{\varphi(x,y)} f(x, y, z)\, dz.$$

# 12 Pindintegraalid

## 12.1 Pinna puutujatasand

**Sile pind.** Pinda $\Omega$ ruumis $\mathbb{R}^3$ esitame järgnevas parameetriliste võrranditega

$$x = \varphi(u, v), \ y = \psi(u, v), \ z = \chi(u, v) \quad (\mathbf{U} = (u, v) \in \Delta), \tag{12.1}$$

kus $\Delta$ on mingi piirkond $uv$-tasandil. Eeldame, et funktsioonidel $\varphi, \psi$ ning $\chi$ **on hulgas $\Delta$ pidevad osatuletised mõlema argumendi järgi** ja moodustame maatriksi

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\chi}{\partial u} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial v} & \frac{\partial\psi}{\partial v} & \frac{\partial\chi}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

Kui pinna $\Omega$ punkti $\mathbf{X}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ puhul, mis vastab piirkonna $\Delta$ punktile $\mathbf{U}_0 = (u_0, v_0)$ (s.t. $\mathbf{X}_0 = (\varphi(u_0, v_0), \psi(u_0, v_0), \chi(u_0, v_0))$), selle maatriksi kõik teist järku determinandid

$$A := \begin{vmatrix} \frac{\partial\psi(\mathbf{U}_0)}{\partial u} & \frac{\partial\chi(\mathbf{U}_0)}{\partial u} \\ \frac{\partial\psi(\mathbf{U}_0)}{\partial v} & \frac{\partial\chi(\mathbf{U}_0)}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad B := \begin{vmatrix} \frac{\partial\chi(\mathbf{U}_0)}{\partial u} & \frac{\partial\varphi(\mathbf{U}_0)}{\partial u} \\ \frac{\partial\chi(\mathbf{U}_0)}{\partial v} & \frac{\partial\varphi(\mathbf{U}_0)}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad C := \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi(\mathbf{U}_0)}{\partial u} & \frac{\partial\psi(\mathbf{U}_0)}{\partial u} \\ \frac{\partial\varphi(\mathbf{U}_0)}{\partial v} & \frac{\partial\psi(\mathbf{U}_0)}{\partial v} \end{vmatrix}$$

ei ole korraga nullid, siis ütleme, et $\mathbf{X}_0$ on pinna *harilik punkt*. Kui $A = B = C = 0$, siis kõneldakse *iseärasest punktist*.

**Definitsioon.** Parameetriliste võrranditega (12.1) määratud pinda $\Omega$ nimetatakse *siledaks*, kui funktsioonidel $\varphi, \psi$ ning $\chi$ on hulgas $\Delta$ pidevad osatuletised mõlema argumendi järgi ja pinnal ei ole iseäraseid punkte.

Edaspidi eeldame tavaliselt, et vaadeldav pind on sile ja tal ei leidu kordseid punkte, s.t. hulkade $\Delta$ ja $\Omega$ punktide vahel on üksühene vastavus.

**Puutujatasand.** Olgu $\mathbf{X}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ pinna $\Omega$ harilik punkt, *eeldame, et näiteks* $C = C(\mathbf{U}_0) \neq 0$, kus $\mathbf{U}_0$ on pinna punktile $\mathbf{X}_0$ vastav punkt hulgas $\Delta$. Vaatleme võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} \varphi(u, v) - x = 0, \\ \psi(u, v) - y = 0 \end{cases} \tag{12.2}$$

ja rakendame sellele teoreemi ilmutama funktsioonidest (vt. teoreem 5.4). Selle kohaselt saab muutujad $u$ ja $v$ esitada muutujate $x$ ja $y$ funktsioonidena punkti $\mathbf{X}_0$ mingis ümbruses (kontrollida rakendatava teoreemi eelduste täidetust!)✠, seega

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y).$$

Asendame need $u$ ja $v$ avaldised võrrandisse $z = \chi(u, v)$, saame võrrandi

$$z = \Phi(x, y), \tag{12.3}$$

kus

$$\Phi(x, y) := \chi(u(x, y), v(x, y)). \tag{12.4}$$

Seejuures on funktsioonil $\Phi$ pidevad osatuletised mõlema muutuja järgi (põhjendada!)✠, seega on $\Phi$ punktis diferentseeruv kahe muutuja funktsioon (lause 3.3). **Kokkuvõttes,** *kui* $C = C(\mathbf{U}_0) \neq 0$, *siis saab pinda* (12.1) *esitada punkti* $\mathbf{X}_0$ *ümbruses võrrandiga* (12.3), tegemist on funktsiooni $\Phi$ graafikuga. Kuna $\Phi$ on diferentseeruv punktis $(x_0, y_0)$, siis on pinnal $\Phi$ punktis $\mathbf{X}_0$ olemas puutujatasand võrrandiga

$$Z - z_0 = \frac{\partial \Phi\,(x_0, y_0)}{\partial x}\,(X - x_0) + \frac{\partial \Phi\,(x_0, y_0)}{\partial y}\,(Y - y_0)\,,$$

kus $X, Y$ ja $Z$ on puutujatasandi punkti koordinaadid (vt. pt. 3, punkt 3.2).

**Anname sellele võrrandile lihtsama kuju.** Seosest (12.4) saame

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \chi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \chi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \chi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \chi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}. \tag{12.5}$$

Diferentseerime võrrandeid (12.2) muutujate $x$ ja $y$ järgi:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} - 1 = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = 0, \\
\frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} - 1 = 0.
\end{gathered}$$

Krameri valemite abil leiame (peame silmas, et $C \neq 0$)

$$\begin{gathered}
\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{C}\frac{\partial \psi}{\partial v}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{C}\frac{\partial \psi}{\partial u}, \\
\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{C}\frac{\partial \varphi}{\partial v}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{C}\frac{\partial \varphi}{\partial u},
\end{gathered}$$

seega (vrd. (12.5))

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{A}{C}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{B}{C},$$

mistõttu **puutujatasandi võrrand** punktis $\mathbf{X}_0$ saab kuju

$$A\,(X - x_0) + B\,(Y - y_0) + C\,(Z - z_0) = 0. \tag{12.6}$$

Kui hariliku punkti $\mathbf{X}_0$ puhul $C\,(\mathbf{U}_0) = 0$, kuid $A\,(\mathbf{U}_0) \neq 0$ (või $B\,(\mathbf{U}_0) \neq 0$), saame avaldada $u$ ja $v$ muutujate $y$ ja $z$ (vastavalt $x$ ja $z$) funktsioonidena. Igal juhul saame puutujatasandi kujul (12.6).

Niisiis, **siledal pinnal on igas tema punktis $X$ olemas pidevalt muutuv puutujatasand, seega ka pidevalt muutuv normaal** (s.o. puutujatasandiga risti olev sirge läbi punkti $\mathbf{X}$), mille sihi määrab ära vektor $(A, B, C)$ (peame silmas, et siin ja edaspidi $A, B$ ja $C$ on muutujate $u$ ja $v$ aga seega ka muutujate $x, y$ ja $z$ funktsioonid).

**Pindade klassifikatsioon.** Pinnad jagunevad kahte klassi, kahe ja ühe poolega pindadeks. Vaatleme (üldisemalt) pindu $\Omega$, mille igas punktis on olemas pidevalt muutuv puutujatasand, seega ka pidevalt muutuv normaal. Olgu sellisel pinnal fikseeritud mingi **kinnine pidev** joon $\Gamma$. Olgu $\mathbf{A}$ mingi punkt joonel $\Gamma$, fikseerime selles punktis (kahest võimalikust ühe) konkreetse normaali suuna. Olgu $\mathbf{X}$ punkt, mis lähtub punktist $\mathbf{A}$ ja liigub mööda joont $\Gamma$. Anname igas joone punktis $\mathbf{X}$ talle selle normaali suuna, milleks läheb üle punktis $\mathbf{A}$ valitud suund normaali pideval muutumisel punkti liikumisel piki kaart $AX$. Kui

**X**, läbinud joone $\Gamma$, jõuab tagasi punkti **A**, siis kontrollime tema normaali suunda punktis **A**. On võimalik, et see on sama, mis startimisel punktist **A**, seda võimalust on lihtne ette kujutada. On ka teine võimalus, et normaali suund on joone $\Gamma$ läbimisel muutunud vastupidiseks, selle võimaluse näiteks on tuntud **Möbiuse leht.**

**Definitsioon.** Pinda, kus mistahes (pinna rajajoont mittelõikava) kinnise joone läbimisel normaali suund ei muutu, nimetame *kahe poolega pinnaks,* teisi pindu aga *ühe poolega pindadeks.*

**Märkused. 1.** Oluline on märkida, et *kahe poolega pinnal on normaali suund üheselt määratud* järgmises mõttes. Kui pinna $\Omega$ mingis punktis **A** fikseerida normaali suund ja suvalises punktis $\mathbf{X} \in \Omega$ anda normaalile see suund, millega punktist **A** startinud normaal jõuab punkti **X** mööda mingit pidevat joont $AP$ liikudes, siis see suund ei sõltu neid punkte ühendavast joonest (põhjendada!)✠.

**2.** Oluline fakt on see, et **iga sile pind** $\Omega$ **on kahe poolega**. Olgu $\Omega$ sile pind ja olgu $\alpha, \beta$ ja $\gamma$ nurgad, mille moodustab pinna normaal punktis **X** vastavalt $x$-, $y$- ja $z$-teljega, siis

$$\cos\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos\beta = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \text{ ja}$$
$$\cos\gamma = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

(peame silmas, et $(A, B, C)$ ja $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ mõlemad on normaalisihilised vektorid). Sõltuvalt sellest, kumma märgi me ruutjuure ees valime, fikseerime me ühe kindla normaali suuna, seega ühe kindla pinna poole. *Lepime kokku lugeda positiivseks pooleks seda, mis on määratud pluss-märgiga ruutjuure ees.*

**3.** Kui pind $\Omega$ on antud võrrandiga $z = \Phi(x, y)$, siis $C = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ (selgitada!)✠. Pinna positiivsel poolel $\cos\gamma > 0$, seega moodustab normaal $z$-telje positiivse osaga teravnurga. Tavaliselt nimetatakse sel juhul pinna positiivset poolt **ülemiseks** pooleks.

**4.** Kui pind $\Omega$ on mingi tõkestatud ühelisidusa ruumilise piirkonna $\Xi$ rajapind, siis ütleme, et pind $\Omega$ on **kinnine**. Sel juhul on pinnal kaks poolt, **välimine** ja **sisemine** *pool.*

**5.** Olgu $\Omega$ kahe poolega pind rajajoonega $\Gamma$. Kui pinnal on valitud kindel pool, s.t. kindel normaali suund, siis määratakse ***rajajoonel liikumise positiivne suund***. Selleks loetakse suunda, milles mööda rajajoont liikuva sellise vaatleja suhtes, keda pinna normaal läbib jalgade poolt pea suunas, piirkond $\Omega$ jääb vasakule.

**6.** Olgu pind $\Omega$ jaotatud lõplikuks arvuks osadeks $\Omega_1, ..., \Omega_n$. Igal pinnatükil on määratud kindel pool ja seega rajajoone läbimise positiivne suund. Kui kahel pinnatükil on ühine rajajoone osa, siis sellel on **kummagi tüki järgi määratud erinev positiivne suund** (kontrollida!)✠.

## 12.2 Pinnatüki pindala

Olgu võrranditega (12.1), kus $\Delta$ on kinnine mõõtuv piirkond, määratud **sile pind** $\Omega$, eeldame, et **tal ei ole kordseid punkte.** Lisaks eeldame, et $\Omega$ on tõkestatud hulk ruumis $\mathbb{R}^3$, s.t. ta sisaldub selle ruumi mingis keras. Jaotame piirkonna $\Delta$ tükati siledate joontega $n$ kinniseks mõõtuvaks osapiirkonnaks $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n$, millel paarikaupa ei ole ühiseid sisepunkte.

Seega oleme piirkonnas $\Delta$ teinud alajaotuse, mille tähistame $\widetilde{T} = \widetilde{T}[\Delta_1, ..., \Delta_n]$ (vrd. pt. 9, punkt 9.2). Olgu $\lambda\left(\widetilde{T}\right)$ osapiirkondade $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n$ suurim diameeter (meenutame, et hulga $\Lambda$ diameetriks nimetame arvu $\sup_{\mathbf{Q},\mathbf{Q}'\in\Lambda} \|\mathbf{Q} - \mathbf{Q}'\|$).

Igale piirkonnale $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n$ vastab punktihulk pinnal, märgime need $\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_n$. Valime igas pinnaosas $\Omega_i$ punkti $\mathbf{X}_i$, **moodustame pinnale $\Omega$ punktis $X_i$ puutujatasandi,** projekteerime pinnatüki $\Omega_i$ sellele tasandile ning tähistame projektsiooni tähega $\Omega_i'$.

**Definitsioon.** Pinnatüki $\Omega$ *pindalaks* nimetatakse piirväärtust

$$\mu(\Omega) := \lim_{\lambda\left(\widetilde{T}\right)\to 0} \sum_{i=1}^{n} \mu(\Omega_i'). \tag{12.7}$$

Lõpliku pindalaga pinnatükki nimetatakse *mõõtuvaks.*

**Lause 12.1** ***(pinnatüki pindala arvutamine).*** *Tehtud eeldustel kehtib valem*

$$\mu(\Omega) = \int\int_{\Delta} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}dudv. \tag{12.8}$$

**Tõestus.** Kõigepealt märgime, et kuna valemis (12.8) integraali märgi all olev funktsioon on pidev, siis see integraal tõepoolest eksisteerib. Valime iga fikseeritud punkti $\mathbf{X}_i \in \Omega_i$ korral uue koordinaatteljestiku alguspunktiga $\mathbf{X}_i$, seejuures paiknegu $\xi$- ja $\eta$-telg punktis $\mathbf{X}_i$ võetud puutujatasandil ning $\zeta$-telg pinna normaali sihis. Olgu pinda $\Omega$ kirjeldavad võrrandid uues koordinaadistikus

$$\xi = \xi(u, v), \ \eta = \eta(u, v), \ \zeta = \zeta(u, v). \tag{12.9}$$

Kui $\mathbf{X} = (x, y, z)$ on pinna $\Omega$ suvaline punkt ja $\mathbf{X}'$ tema projektsioon punktis $\mathbf{X}_i$ võetud puutujatasandil, siis punkti $\mathbf{X}'$ koordinaadid uues teljestikus on $(\xi, \eta, 0)$. Teeme kahekordses integraalis

$$\mu(\Omega_i') = \int\int_{\Omega_i'} d\xi d\eta$$

muutujate vahetuse

$$\xi = \xi(u, v), \ \eta = \eta(u, v).$$

Saab näidata, et nende seostega määratud teisendus $T : \Delta_i \to \Omega_i'$ on regulaarne, kui valida $\lambda\left(\widetilde{T}\right)$ piisavalt väike (selle väite tõestuse jätame vahele!), seega

$$\mu(\Omega_i') = \int\int_{\Delta_i} |J(u, v)|\, dudv, \tag{12.10}$$

kus $J := \begin{vmatrix} \frac{\partial\xi}{\partial u} & \frac{\partial\xi}{\partial v} \\ \frac{\partial\eta}{\partial u} & \frac{\partial\eta}{\partial v} \end{vmatrix}$ (vt. valem (10.16)).

Edasiste arutluste hõlbustamiseks toome sisse järgmised vektorid. Pinna $\Omega$ suvalise punkti $\mathbf{X} = (x, y, z)$ puhul tähistame $\mathbf{r} := \overrightarrow{\mathbf{0X}}$, kus $\mathbf{0}$ on "vana" teljestiku nullpunkt. Seega $\mathbf{r} = (x, y, z) = (\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)) = \mathbf{r}(u, v)$. Defineerime

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}, \frac{\partial\psi}{\partial u}, \frac{\partial\chi}{\partial u}\right) \quad \text{ja} \quad \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}, \frac{\partial\psi}{\partial v}, \frac{\partial\chi}{\partial v}\right)$$

ning paneme tähele, et nende vektorkorrutis avaldub kujul

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (A, B, C) \tag{12.11}$$

(kontrollida!)✠. Edasi, olgu $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ ja $\mathbf{e}_3$ uute koordinaattelgede sihilised ühikvektorid, tähistame $\mathbf{r}_i := \overrightarrow{\mathbf{0X}_i}$, siis $\mathbf{r} = \mathbf{r}_i + \xi\mathbf{e}_1 + \eta\mathbf{e}_2 + \zeta\mathbf{e}_3$. Kuna vektori $\mathbf{r}_i$ koordinaadid on konstandid, siis uues koordinaadistikus saame $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial u}, \frac{\partial \eta}{\partial u}, \frac{\partial \zeta}{\partial u}\right) = \frac{\partial \xi}{\partial u}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial \eta}{\partial u}\mathbf{e}_2 + \frac{\partial \zeta}{\partial u}\mathbf{e}_3$ ja $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial v}, \frac{\partial \eta}{\partial v}, \frac{\partial \zeta}{\partial v}\right) = \frac{\partial \xi}{\partial v}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial \eta}{\partial v}\mathbf{e}_2 + \frac{\partial \zeta}{\partial v}\mathbf{e}_3$. Näitame, et *punktis* $\mathbf{X}_i$ *on* $\frac{\partial \zeta}{\partial u} = \frac{\partial \zeta}{\partial v} = 0$. Selleks fikseerime muutuja $v$, olgu $v := v_i$, kus $\mathbf{X}_i = (\xi(u_i, v_i), \eta(u_i, v_i), \zeta(u_i, v_i))$. Sel juhul kirjeldavad võrrandid (12.9) pinnal $\Omega$ asuvat siledat joont, mis läbib punkti $\mathbf{X}_i$. Sellel joonel on punktis $\mathbf{X}_i$ puutuja, mis asub puutujatasandil, ning see puutuja on määratud vektoriga $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$. Järelikult $\frac{\partial \zeta(u_i, v_i)}{\partial u} = 0$, analoogiliselt saadakse $\frac{\partial \zeta(u_i, v_i)}{\partial v} = 0$. See asjaolu teeb oluliselt lihtsamaks vektorite $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ ja $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ vektorkorrutise arvutamise punktis $\mathbf{X}_i$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} &= \left(\frac{\partial \xi}{\partial u}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial \eta}{\partial u}\mathbf{e}_2\right) \times \left(\frac{\partial \xi}{\partial v}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial \eta}{\partial v}\mathbf{e}_2\right) \\ &= \left(\frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial \eta}{\partial v} - \frac{\partial \eta}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial v}\right)\mathbf{e}_3 = J\mathbf{e}_3.\end{aligned}$$

Niisiis, punktis $\mathbf{X} = \mathbf{X}_i$ saame võrduse

$$|J| = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right|.$$

*Suvalise* $\mathbf{X} \in \Omega_i$ puhul tähistame $\gamma_i := |J| - \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right|$ ning paneme tähele, et $\gamma_i$ on kinnises tõkestatud piirkonnas $\Delta_i$ pidev, seega *ühtlaselt pidev* funktsioon (põhjendada!)✠. Suvalise $\varepsilon > 0$ puhul saame seetõttu leida $\delta > 0$, et kui $\lambda\left(\widetilde{T}\right) < \delta$, siis

$$|\gamma_i(\mathbf{X})| = |\gamma_i(\mathbf{X}) - \gamma_i(\mathbf{X}_i)| < \frac{\varepsilon}{\mu(\Delta)} \quad (i = 1, ..., n)$$

ja

$$\sum_{i=1}^{n} \int\int_{\Delta_i} |\gamma_i|\, dudv \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{\mu(\Delta)}\mu(\Delta_i) = \varepsilon$$

ning seega

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \int\int_{\Delta_i} |\gamma_i|\, dudv = 0. \tag{12.12}$$

Seoste $|J| = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| + \gamma_i$, (12.10) ning kahekordse integraali aditiivsuse omaduse tõttu

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \mu(\Omega_i') &= \sum_{i=1}^{n} \int\int_{\Delta_i} |J|\, dudv = \sum_{i=1}^{n} \int\int_{\Delta_i} \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| dudv + \sum_{i=1}^{n} \int\int_{\Delta_i} \gamma_i dudv \\ &= \int\int_{\Delta} \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| dudv + \sum_{i=1}^{n} \int\int_{\Delta_i} \gamma_i dudv,\end{aligned}$$

kust protsessis $\lambda\left(\widetilde{T}\right) \to 0$ valemite (12.7) ja (12.12) tõttu saame

$$\mu(\Omega) = \int\int_{\Delta} \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| dudv.$$

Tänu valemile (12.11) kehtib tõestatav valem (12.8). ■

Valemile (12.8) saab anda pisut teistsuguse kuju, kui tähistada

$$\begin{aligned} E &:= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial u}\right)^2, \\ F &:= \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial v} + \frac{\partial \chi}{\partial u}\frac{\partial \chi}{\partial v}, \\ G &:= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial v}\right)^2. \end{aligned}$$

Nimelt kehtib võrdus

$$A^2 + B^2 + C^2 = EG - F^2$$

(kontrollida!)✠, mistõttu valemist (12.8) saame

$$\mu(\Omega) = \int\int_{\Delta} \sqrt{EG - F^2} dudv. \tag{12.13}$$

Kui pind $\Omega$ on antud ilmutatud kujul võrrandiga $z = \Phi(x, y)$, siis, võttes võrrandid (12.1) kujul

$$x = x, \quad y = y, \quad z = \Phi(x, y) \qquad ((x, y) \in D),$$

saame $A = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \; B = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ ja $C = 1$ (kontrollida!)✠ ning

$$\mu(\Omega) = \int\int_{\Delta} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2} dxdy.$$

## 12.3 Pindintegraalid

Me lähtume pinna $\Omega$ osas samadest eeldustest, mis olid tehtud eelmises punktis. Niisiis, olgu pind $\Omega$ antud võrranditega (12.1), kus $\Delta$ on **kinnine** mõõtuv piirkond $uv$-tasandil, eeldame, et vastavus pinna $\Omega$ ja piirkonna $\Delta$ punktide vahel on üks-ühene. Teeme piirkonnas $\Delta$ alajaotuse $\widetilde{T} = \widetilde{T}[\Delta_1, ..., \Delta_n]$, selleks jaotame piirkonna $\Delta$ tükati siledate joontega $n$ kinniseks mõõtuvaks osapiirkonnaks $\Delta_1, ..., \Delta_n$, millel paarikaupa ei ole ühiseid sisepunkte. Olgu $\lambda\left(\widetilde{T}\right)$ osapiirkondade $\Delta_1, ..., \Delta_n$ suurim diameeter. Igale piirkonnale $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n$ vastab punktihulk pinnal, märgime need $\Omega_1, ..., \Omega_n$. Vastavalt tehtud eeldustele on pinnatükid $\Omega_1, ..., \Omega_n$ mõõtuvad (selgitada!)✠.

Olgu $w = f(x, y, z)$ pinnal $\Omega$ määratud kolme muutuja funktsioon. Valime igas pinnatükis $\Omega_i$ suvaliselt punkti $\mathbf{X}_i$ $(i = 1, ..., n)$ ja moodustame integraalsumma

$$\sigma\left(\widetilde{T}\right) := \sum_{i=1}^{n} f(\mathbf{X}_i)\, \mu(\Omega_i),$$

kus $\mu(\Omega_i)$ on pinnatüki $\Omega_i$ pindala.

**Definitsioon.** Kui eksisteerib piirväärtus

$$\lim_{\lambda(\widetilde{T})\to 0} \sigma\left(\widetilde{T}\right) =: \int\int_{\Omega} f(x,y,z)\, dxdydz =: \int\int_{\Omega} f d\mu,$$

siis seda nimetatakse funktsiooni $f$ *esimest liiki pindintegraaliks* (ehk pindintegraaliks pindala järgi) üle pinna $\Omega$.

**Lause 12.2** *Olgu funktsioon $w = f(x,y,z)$ pidev siledal kordsete punktideta pinnal $\Omega$, mis on määratud võrranditega* (12.1). *Sel juhul esimest liiki pindintegraal $\int\int_{\Omega} f(x,y,z)\, dxdydz$ eksisteerib ning*

$$\int\int_{\Omega} f(x,y,z)\, dxdydz = \int\int_{\Delta} f(\varphi(u,v), \psi(u,v), \chi(u,v)) \sqrt{A^2+B^2+C^2} dudv.$$

**Tõestus.** Olgu $u_i$ ja $v_i$ punktile $\mathbf{X}_i$ vastavad parameetrite väärtused ja $\mathbf{Q}_i := (u_i, v_i)$, s.t.

$$\mathbf{X}_i = (\varphi(\mathbf{Q}_i), \psi(\mathbf{Q}_i), \chi(\mathbf{Q}_i)) \quad (i = 1, ..., n).$$

Tähistame $\Phi(u,v) := f(\varphi(u,v), \varphi(u,v), \varphi(u,v))$, siis $\Phi(\mathbf{Q}_i) = f(\mathbf{X}_i)$. Pidades silmas eelmises punktis toodud valemit (12.10), saame

$$\sigma\left(\widetilde{T}\right) = \sum_{i=1}^{n} \Phi(\mathbf{Q}_i) \int\int_{\Delta_i} \sqrt{A^2+B^2+C^2} dudv = \sum_{i=1}^{n} \int\int_{\Delta_i} \Phi(\mathbf{Q}_i) \sqrt{A^2+B^2+C^2} dudv.$$

Vaatleme kahekordset integraali $\int\int_{\Delta} \Phi(u,v) \sqrt{A^2+B^2+C^2} dudv =: I$. Kuna funktsioon $\Phi(u,v) \sqrt{A^2+B^2+C^2}$ on piirkonnas $\Delta$ pidev (selgitada!)✠, siis integraal $I$ tõepoolest on olemas. Kahekordse integraali aditiivsuse omaduse kohaselt

$$I = \sum_{i=1}^{n} \int\int_{\Delta_i} \Phi(u,v) \sqrt{A^2+B^2+C^2} dudv,$$

niisiis

$$\sigma\left(\widetilde{T}\right) - I = \sum_{i=1}^{n} \int\int_{\Delta_i} (\Phi(\mathbf{Q}_i) - \Phi(u,v)) \sqrt{A^2+B^2+C^2} dudv. \tag{12.14}$$

Funktsioon $\sqrt{A^2+B^2+C^2}$ on piirkonnas $\Delta$ tõkestatud (selgitada!)✠, seetõttu eksisteerib $M := \sup_{\mathbf{Q}\in\Delta} \sqrt{A^2+B^2+C^2}$. Olgu $\varepsilon$ suvaline positiivne arv. Funktsiooni $\Phi$ ühtlase pidevuse tõttu piirkonnas $\Delta$ (selgitada!)✠ leidub niisugune $\delta > 0$, et kui $\mathbf{Q}, \mathbf{Q}' \in \Delta$ ja $\|\mathbf{Q} - \mathbf{Q}'\| < \delta$, siis $|\Phi(\mathbf{Q}) - \Phi(\mathbf{Q}')| < \frac{\varepsilon}{M\mu(\Delta)}$. Tehes piirkonnas $\Delta$ alajaotuse osapiirkondadeks $\Delta_1, ..., \Delta_n$ selliselt, et $\lambda < \delta$, saame iga $\mathbf{Q} \in \mathbf{\Delta}_i$ korral võrratuse $|\Phi(\mathbf{Q}_i) - \Phi(\mathbf{Q})| < \frac{\varepsilon}{M\mu(\Delta)}$, mistõttu seosest (12.14) tuleneb $\left|\sigma\left(\widetilde{T}\right) - I\right| < \varepsilon$. Teisi sõnu,

$$\lim_{\lambda(\widetilde{T})\to 0} \sigma\left(\widetilde{T}\right) = \int\int_{\Delta} \Phi(u,v) \sqrt{A^2+B^2+C^2} dudv.$$

Lause on tõestatud. ■

Enne teist liiki pindintegraali definitsiooni esitamist lepime kokku **pinnatüki projektsioonide pindalade** arvutamise osas koordinaattasanditel. Valime pinnal $\Omega$ positiivse poole ja tähistame $\Omega_i'$, $\Omega_i''$ ja $\Omega_i'''$ pinnatüki $\Omega_i$ projektsiooni vastavalt $xy$-, $yz$- ja $zx$-tasandil, olgu $S_i' := \mu(\Omega_i')$, $S_i'' := \mu(\Omega_i'')$ ja $S_i''' := \mu(\Omega_i''')$ nende projektsioonide pindalad. Vaatleme kõigepealt projektsiooni $xy$-tasandile. Me *loeme projektsiooni $\Omega_i'$ pindala $S_i'$ positiivseks, kui pinnatüki $\Omega_i$ normaal moodustab $z$-teljega teravnurga (s.t. $\gamma < \pi/2$), vastupidisel juhul loeme $S_i'$ negatiivseks.* Esimesel juhul $C > 0$, teisel juhul $C < 0$ (vrd. märkus 2).

*Eeldame, et pinnatüki $\Omega_i$ ulatuses moodustab normaal $z$-teljega kas tervanurga või nürinurga* (s.t. $\cos\gamma$ ei muuda märki). Vastavalt kahekordse integraali omadustele

$$|S_i'| = \int\int_{\Omega_i'} dxdy = \int\int_{\Delta_i} |C|\, dudv. \tag{12.15}$$

Põhjendame teist võrdust seostes (12.15). Projektsiooni $\Omega_i'$ ja pinnatüki $\Omega_i$ punktide vahel on üks-ühene vastavus (selgitada!)✠, seega on üks-ühene vastavus ka $\Omega_i'$ ja $\Delta_i$ punktide vahel. Kuna $C \neq 0$, siis on teisendus

$$x = \varphi(u,v), \quad y = \psi(u,v) \quad ((u,v) \in \Delta_i)$$

regulaarne (vrd. §10, punkt 3), seega selle teisendusega tehtud muutujate vahetus annabki teise võrduse seostes (12.15). Kuna kahekordne integraal $\int\int_{\Delta_i} Cdudv$ on positiivne parajasti siis, kui $C > 0$, siis saame seostest (12.15)

$$S_i' = \int\int_{\Delta_i} Cdudv.$$

Selle valemiga defineerime projektsiooni $\Omega_i'$ pindala ka siis, kui pinnatüki $\Omega_i$ normaal moodustab oma ühes osas $z$-teljega teravnurga ja mingis teises osas nürinurga. Analoogiliselt defineerime

$$S_i'' = \int\int_{\Delta_i} Adudv \ \text{ ning } \ S_i''' = \int\int_{\Delta_i} Bdudv.$$

Nüüd defineerime **teist liiki pindintegraalid**. Tähistame

$$\sigma_1\left(\widetilde{T}\right) := \sum_{i=1}^{n} f(\mathbf{X}_i)\, S_i', \quad \sigma_2\left(\widetilde{T}\right) := \sum_{i=1}^{n} f(\mathbf{X}_i)\, S_i'', \quad \sigma_3\left(\widetilde{T}\right) := \sum_{i=1}^{n} f(\mathbf{X}_i)\, S_i'''.$$

**Definitsioon.** Piirväärtusi

$$\lim_{\lambda(\widetilde{T})\to 0} \sigma_1\left(\widetilde{T}\right) =: \int\int_{\Omega} f(x,y,z)\, dxdy, \quad \lim_{\lambda(\widetilde{T})\to 0} \sigma_2\left(\widetilde{T}\right) =: \int\int_{\Omega} f(x,y,z)\, dydz,$$
$$\lim_{\lambda(\widetilde{T})\to 0} \sigma_3\left(\widetilde{T}\right) =: \int\int_{\Omega} f(x,y,z)\, dzdx \tag{12.16}$$

nimetatakse funktsiooni $f$ *teist liiki pindintegraalideks* (ehk pinintegraalideks projektsioonide järgi) üle pinna $\Omega$.

Definitsioonist ja sellele eelnevast arutelust järeldub, et *pinna poole muutmisel muutub märk teist liiki pindintegraali ees*, samal ajal esimest liiki pindintegraal ei sõltu pinna poole muutmisest.

**Lause 12.3** *Olgu $\Omega$ sile pind ja olgu kolme muutuja funktsioon $w = f(x,y,z)$ pidev pinnal $\Omega$. Siis eksisteerivad pindintegraalid* (12.16) *ning kehtivad valemid*

$$\int\int_\Omega f(x,y,z)\,dxdy = \int\int_\Delta \Phi(u,v)\,Cdudv, \quad \int\int_\Omega f(x,y,z)\,dydz = \int\int_\Delta \Phi(u,v)\,Adudv,$$
$$\int\int_\Omega f(x,y,z)\,dzdx = \int\int_\Delta \Phi(u,v)\,Bdudv,$$

*kus* $\Phi(u,v) := f(\varphi(u,v), \psi(u,v), \chi(u,v))$.

**Tõestus.** Kui asendada lause 12.2 tõestuses avaldis $\sqrt{A^2+B^2+C^2}$ vastavalt funktsioonidega $C$, $A$ ja $B$, siis kordab nimetatud tõestus sõna-sõnalt käesoleva lause tõestust. ■

**Märkused. 7.** Nii esimest kui ka teist liiki pindintegraalidel on kõik "tavalised" integraalide omadused, muuhulgas aditiivsuse omadus: kui pind $\Omega$ koosneb osadest $\Omega_1$ ja $\Omega_2$, siis pindintegraalide $\int\int_{\Omega_1}$ ja $\int\int_{\Omega_2}$ olemasolust järeldub integraali $\int\int_\Omega$ olemasolu, kusjuures $\int\int_\Omega = \int\int_{\Omega_1} + \int\int_{\Omega_2}$.

**8.** Eeldame, et $\Omega$ on selline silinderpind, mille moodustajad on risti $xy$-tasandiga. Siis $\int\int_\Omega f(x,y,z)\,dxdy = 0$ (selgitada!)✠.

Tavaliselt vaadeldakse teist liiki pindintegraali kolme integraali summa kujul:

$$\begin{aligned}&\int\int_\Omega Fdxy + Gdydz + Hdzdx\\ &:= \int\int_\Omega Fdxy + \int\int_\Omega Gdydz + \int\int_\Omega Hdzdx,\end{aligned}$$

seejuures eeldame, et $F$, $G$ ja $H$ on pinnal $\Omega$ pidevad funktsioonid.

## 12.4 Ostrogradski valem

Olgu $\Xi$ **kõversilinder** ruumis $\mathbb{R}^3$. Tähistame tähega $\Xi'$ kõversilindri $\Xi$ projektsiooni $xy$-tasandil ning tähega $\Omega_3$ kõversilindri külgpinna. Olgu $\Xi$ ülalt ja alt piiratud siledate pindadega $\Omega_1$ ja $\Omega_2$, mis on määratud vastavalt võrranditega $z = \rho(x,y)$ ja $z = \chi(x,y)$, kusjuures $\chi(x,y) \le \rho(x,y)$ $((x,y) \in \Xi')$. Olgu piirkonnas $\Xi$ määratud pidev funktsioon $w = H(x,y,z)$, millel on pidev osatuletis $\frac{\partial H}{\partial z}$. Kolmekordse integraali arvutamise valemite kohaselt

$$\begin{aligned}\int\int\int_{\Xi}\frac{\partial H}{\partial z}dxdydz &= \int\int_{\Xi'}dxdy\int_{\chi(x,y)}^{\rho(x,y)}\frac{\partial H}{\partial z}dz\\ &= \int\int_{\Xi'}H\left(x,y,\rho\left(x,y\right)\right)dxdy\\ &- \int\int_{\Xi'}H\left(x,y,\chi\left(x,y\right)\right)dxdy\\ &= \int\int_{\Omega_1}Hdxdy - \int\int_{\Omega_2}Hdxdy,\end{aligned}$$

kus pindintegraalid on võetud üle pindade $\Omega_1$ ja $\Omega_2$ *ülemise* (s.o. positiivse) poole. Seega saame võrduse

$$\int\int\int_{\Xi}\frac{\partial H}{\partial z}dxdydz = \int\int_{\Omega_1}Hdxdy + \int\int_{\underline{\Omega_2}}Hdxdy,$$

kus $\int\int_{\underline{\Omega_2}}$ tähendab, et see integraal on võetud üle pinna $\Omega_2$ *alumise poole*. Kuna kõversilindri külgpind $\Omega_3$ on risti $xy$-tasandiga, siis

$$\int\int_{\Omega_3}Hdxdy = 0,$$

seepärast võime kirjutada

$$\begin{aligned}\int\int\int_{\Xi}\frac{\partial H}{\partial z}dxdydz &= \int\int_{\Omega_1}Hdxdy + \int\int_{\underline{\Omega_2}}Hdxdy + \int\int_{\Omega_3}Hdxdy\\ &= \int\int_{\Omega}Hdxdy,\end{aligned}$$

kus $\Omega$ on ruumilise piirkonna $\Xi$ rajapind ning viimane pindintegraal on võetud üle pinna $\Omega$ *välimise* poole. Nii nagu Greeni valemi tõestamisel, saab ka siin veenduda, et saadud valem

$$\int\int\int_{\Xi}\frac{\partial H}{\partial z}dxdydz = \int\int_{\Omega}Hdxdy,$$

kus *pindintegraal on võetud üle pinna* $\Omega$ *välimise poole*, kehtib kõigi niisuguste piirkondade $\Xi$ korral, mida saab esitada lõpliku arvu selliste kõversilindrite ühendina, mille moodustajad on risti $xy$-tasandiga.

Analoogiliselt, kui $w = F\left(x,y,z\right)$ ja $w = G\left(x,y,z\right)$ on pidevad funktsioonid piirkonnas $\Xi$ ja neil on selles piirkonnas pidevad osatuletised $\frac{\partial F}{\partial x}$ ning $\frac{\partial G}{\partial y}$, kusjuures $\Xi$ saab esitada lõpliku arvu selliste kõversilindrite ühendina, mille moodustajad on risti vastavalt $yz$- ja $zx$-tasandiga, siis kehtivad valemid

$$\begin{aligned}\int\int\int_{\Xi}\frac{\partial F}{\partial x}dxdydz &= \int\int_{\Omega}Fdydz,\\ \int\int\int_{\Xi}\frac{\partial G}{\partial y}dxdydz &= \int\int_{\Omega}Gdzdx,\end{aligned}$$

ka siin võetakse pindintegraalid üle rajapinna $\Omega$ välimise poole. Liites saadud kolm valemit, saame **Ostrogradski valemi**

$$\int\int\int_{\Xi}\left(\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial y}+\frac{\partial H}{\partial z}\right)dxdydz=\int\int_{\Omega}Fdydz+Gdzdx+Hdxdy. \qquad (12.17)$$

Ta kehtib kõigi selliste ruumiliste piirkondade puhul, mida saab jaotada lõplikuks arvuks kõversilindriteks kõigil kolmel viisil: nii $x$-, $y$- kui ka $z$-teljega paralleelsete moodustajatega.

Me demonstreerime võimalust, kuidas Ostrogradski valemi abil saab arvutada keha ruumala. Valime funktsioonid $F$, $G$ ja $H$ nii, et

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial y}+\frac{\partial H}{\partial z}=1, \qquad (12.18)$$

siis võrduse (12.17) vasak pool kirjeldab keha $\Xi$ ruumala $\mu(\Xi)$, tähendab

$$\mu(\Xi)=\int\int_{\Omega}Fdydz+Gdzdx+Hdxdy,$$

kus **pindintegraal võetakse üle rajapinna välimise poole.** Paneme tähele, et tingimus (12.18) on täidetud järgmistel juhtudel:
$(a)$ $F(x,y,z):=x,\ \ G:=H:=0;$
$(b)$ $G(x,y,z):=y,\ \ F:=H:=0;$
$(c)$ $H(x,y,z):=z,\ \ F:=G:=0;$
$(d)$ $F(x,y,z):=\frac{1}{3}x,\ G(x,y,z):=\frac{1}{3}y,\ H(x,y,z):=\frac{1}{3}z.$
Vastavalt neile juhtudele saame ruumala arvutamiseks valemid

$$\begin{aligned}&\mu(\Xi)=\int\int_{\Omega}xdydz,\ \mu(\Xi)=\int\int_{\Omega}ydzdx,\\&\mu(\Xi)=\int\int_{\Omega}zdxdyja\mu(\Xi)=\frac{1}{3}\int\int_{\Omega}xdydz+ydzdx+zdxdy.\end{aligned}$$

## 12.5 Stokesi valem

Olgu pind $\Omega$ antud võrrandiga

$$z=\Phi(x,y)\quad((x,y)\in D),$$

kus $D$ on kinnine mõõtuv piirkond $xy$-tasandil. Olgu sellel pinnal määratud pidev kolme muutuja funktsioon $w=F(x,y,z)$, millel on pidevad osatuletised $\frac{\partial F}{\partial y}$ ja $\frac{\partial F}{\partial z}$. Me eeldame, et pind $\Omega$ on sile, siis eksisteerivad pidevad osatuletised $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ ja $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ kogu piirkonnas $D$. Olgu $\partial\Omega$ pinna $\Omega$ rajajoon ja $\partial D$ piirkonna $D$ rajajoon. Paneme tähele, et kui $\partial D$ on määratud võrranditega

$$x=\varphi(t),\ \ y=\psi(t)\quad(t\in[\alpha,\beta]),$$

siis ruumiline joon $\partial\Omega$ määratakse võrranditega

$$x=\varphi(t),\ \ y=\psi(t),\ z=\Phi(\varphi(t),\psi(t))\quad(t\in[\alpha,\beta]).$$

Eeldame, et $\partial D$ on sile joon, siis ka $\partial\Omega$ on sile (põhjendada!)✠.

Valime pinnal $\Omega$ ülemise poole. Olgu $\mathbf{X}' = (x, y)$ joone $\partial D$ punkt, mis läbib selle joone positiivses suunas. Siis talle vastav punkt $\mathbf{X} := (x, y, \Phi(x, y))$ joonel $\partial\Omega$ läbib selle joone samuti positiivses suunas (selgitada!)✠. Moodustame funktsiooni $F$ teist liiki joonintegraalid üle joonte $\partial\Omega$ ja $\partial D$, paneme tähele, et mõlemad joonintegraalid (üks ruumiline ja teine tasandiline) võrduvad ühe ja sama Riemanni integraaliga:

$$\int_{\partial\Omega} F dx = \int_{\alpha}^{\beta} F(\varphi(t), \psi(t), \Phi(\varphi(t), \psi(t))) \varphi(t)\, dt = \int_{\partial D} F(x, y, \Phi(x, y))\, dx$$

(kontrollida!)✠. Kui rakendame *tasandilisele* joonintegraalile Greeni valemit, siis saame

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} F dx &= \int_{\partial D} F(x, y, \Phi(x, y))\, dx = -\int\int_D \frac{\partial}{\partial y} F(x, y, \Phi(x, y))\, dxdy \\ &= -\int\int_D \left( \frac{\partial F(x, y, \Phi(x, y))}{\partial y} + \frac{\partial F(x, y, \Phi(x, y))}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) dxdy \\ &= \int\int_D \frac{\partial F(x, y, \Phi(x, y))}{\partial z} B dxdy - \int\int_D \frac{\partial F(x, y, \Phi(x, y))}{\partial y} C dxdy.\end{aligned}$$

Viimase võrduse põhjenduseks märgime, et

$$B = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} & \frac{\partial y}{\partial x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x} & 1 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad C = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial x} \\ \frac{\partial x}{\partial y} & \frac{\partial y}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Arvestades lauset 12.3, jõuame siit valemini

$$\int_{\partial\Omega} F dx = \int\int_{\Omega} \frac{\partial F}{\partial z} dzdx - \frac{\partial F}{\partial y} dxdy. \tag{12.19}$$

Valem jääb kehtima ka siis, kui pinda $\Omega$ saab siledate joontega jagada lõplikuks arvuks sellisteks siledateks tükkideks, mis on esitatavad võrrandiga $z = \Phi(x, y)$.

Olgu $w = G(x, y, z)$ ja $w = H(x, y, z)$ pinnal $\Omega$ pidevad funktsioonid, millel on pidevad osatuletised $\frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial z}, \frac{\partial H}{\partial x}$ ja $\frac{\partial H}{\partial y}$. Kui pind $\Omega$ koosneb lõplikust arvust siledatest tükkidest, mida saab kirjeldada võrranditega vastavalt $y = \Psi(x, z)$ ja $x = \Upsilon(y, z)$, siis analoogiliselt valemiga (12.19) kehtivad

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} G dy &= \int\int_{\Omega} \frac{\partial G}{\partial x} dxdy - \frac{\partial G}{\partial z} dydz, \\ \int_{\partial\Omega} H dz &= \int\int_{\Omega} \frac{\partial H}{\partial y} dydz - \frac{\partial H}{\partial x} dzdx,\end{aligned}$$

kus ruumilised joonintegraalid vasakul pool võrdusmärki on võetud mööda pinna rajajoont $\partial\Omega$ positiivses suunas. Nende kolme valemi liitmisel saame **Stokesi valemi**

$$\begin{aligned}&\int_{\partial\Omega} F dx + G dy + H dz \\ &= \int\int_{\Omega} \left( \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z} \right) dydz + \left( \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x} \right) dzdx + \left( \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} \right) dxdy.\end{aligned}$$

Rõhutame, et see valem kehtib kõigi selliste pindade $\Omega$ korral, mida saab siledate joontega jagada lõplikuks arvuks siledateks tükkideks nii, et neid tükke saab esitada võrranditega $z = \Phi(x, y)$, $y = \Psi(z, x)$ ja $x = \Upsilon(y, z)$.

## 12.6 Ruumilise joonintegraali sõltumatus integreerimisteest

Lepime kõigepealt kokku nimetada sidusat ruumilist piirkonda $\Xi$ *pinnaliselt ühelisidusaks*, kui läbi iga selles piirkonnas oleva kinnise joone saab panna pinna, mis asub täielikult selles piirkonnas ning mille rajajooneks on vaadeldav kinnine joon. Näiteks kontsentriliste kerade vaheline piirkond on pinnaliselt ühelisidus, seevastu piirkond, mis jääb kahe ühise teljega silindri vahele, ei rahulda seda tingimust.

Vaatleme ruumilist joonintegraali

$$\int_{AB} Fdx + Gdy + Hdz, \tag{12.20}$$

kus $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$ on punktid lahtises pinnaliselt ühelisidusas piirkonnas $\Xi$ ja $AB$ on mingi neid punkte ühendav joon. Meie eesmärk on veenduda, et tingimused

$$\frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial G}{\partial z}, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial H}{\partial x}, \quad \frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} \tag{12.21}$$

on tarvilikud ja piisavad selleks, et integraali (12.20) väärtus ei sõltu punkte $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$ ühendavast integreerimisteest. Tõestuse viime läbi kahes etapis.

$\mathbf{1}^0$. Näitame, et integraal (12.20) on integreerimisteest sõltumatu parajasti siis, kui

$$\int_L Fdx + Gdy + Hdz = 0 \text{ iga lihtsa kinnise joone } L \subset \Xi \text{ puhul.} \tag{12.22}$$

Tingimuse (12.22) *tarvilikkus* tõestatakse täpselt samuti, kui lemma 1 tarvilikkus paragrahvis 10. Eeldame, et integraal (12.20) ei sõltu integreerimisteest, vaid ainult punktidest $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$. Olgu $L \subset \Xi$ lihtne kinnine joon, valime sellel kaks punkti $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$, need jaotavad joone $L$ kaheks kaareks $L_1$ ja $L_2$. Kui võtame neil mõlemal suuna punktist $\mathbf{A}$ punkti $\mathbf{B}$ poole, siis eelduse kohaselt $\int_{L_1} = \int_{L_2}$. Ruumilise joonintegraali aditiivsuse omaduse kohaselt saame seose $\int_L = \int_{L_1} + \int_{\overleftarrow{L_2}} = \int_{L_1} - \int_{L_2} = 0$ (siin nool märgib integreerimise suunda punktist $\mathbf{B}$ punkti $\mathbf{A}$ poole), s.t. kehtib (12.22).

*Piisavuse* kontrollimiseks eeldame, et punktid $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$ on ühendatud piirkonnas $\Xi$ kahe lihtsa joonega $L_1$ ja $L_2$. Ruumilise juhu eeliseks tasandilise juhuga võrreldes on see, et me võime võtta piirkonnas $\Xi$ sellise kolmanda joone $L_3$, mis mõlema joonega $L_1$ ja $L_2$ lõikub vaid punktides $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$: kui võtta mingi jooni $L_1$ ja $L_2$ läbiv pind (mis pinnalise ühelisidususe eelduse kohaselt eksisteerib), siis valime suvalise punkte $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$ ühendava lihtsa joone väljaspool seda pinda. Eelduse (12.22) kohaselt kehtivad võrdused

$$\int_{L_1} + \int_{\overleftarrow{L_3}} = 0, \quad \int_{L_2} + \int_{\overleftarrow{L_3}} = 0,$$

millest saamegi soovitava võrduse $\int_{L_1} = \int_{L_2}$.

$\mathbf{2}^0$. Näitame, et tingimused (12.21) kehtivad parajasti siis, kui

$$\int\int_\Omega \left(\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x}\right) dzdx + \left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}\right) dxdy = 0, \tag{12.23}$$

Stokesi valemist saame siis ka tingimuste (12.21) ja (12.22) samaväärsuse.

Selge, et tingimustest (12.21) järeldub (12.23). Vastupidise implikatsiooni tõestamiseks eeldame, et kehtib võrdus (12.23) ja fikseerime suvalise punkti $\mathbf{A} = (a, b, c) \in \Xi$ ning sellise kinnise kera

$$\overline{U}_r(\mathbf{A}) := \left\{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\mathbf{X} - \mathbf{A}\| \leq r\right\}$$

(keskpunktiga $\mathbf{A}$ ja raadiusega $r$), mis asub piirkonnas $\Xi$. Võtame seoses (12.23) pinnaks $\Omega$ selle ringi $D_r$, mis tekib kera $\overline{U}_r(\mathbf{A})$ ja tasandi $z = c$ lõikumisel. Siis kaks esimest pindintegraali seoses (12.23) on võrdsed nulliga (põhjendada!)✠, mistõttu saame

$$\int\int_{D_r} \left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}\right) dxdy = 0,$$

kus $H(D_r) := \int\int_{D_r} \left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}\right) dxdy$ on kahekordne integraal. Leiame funktsiooni $H$ tuletise punktis $\mathbf{A}$, see on $\frac{dH}{dD_r} = \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}$ (vrd. §8, lause 14). Kuna $H(D_r) = 0$ iga $r > 0$ korral, siis $\frac{dH}{dD_r} = 0$ punktis $\mathbf{A}$, järelikult $\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y}$ kogu piirkonnas $\Xi$. Teised võrdused tingimuses (12.21) saadakse analoogiliselt.

# 13 Parameetrist sõltuvad integraalid

Selles paragrahvis vaatleme me funktsioone $F$, mis on esitatud kujul

$$F(x) := \int_c^d f(x,t)\,dt, \tag{13.1}$$

kus **integraal võib olla kas tavaline Riemanni integraal või päratu integraal.**

## 13.1 Parameetrist sõltuva Riemanni integraali omadused

Olgu funktsioon $f$ määratud kinnises ristkülikus

$$R := [a,b] \times [c,d] := \{(x,t) \mid a \le x \le b,\ c \le t \le d\}.$$

Eeldame, et funktsioon $f : R \to \mathbb{R}$ on pidev, siis osafunktsioon

$$f_x : [c,d] \to \mathbb{R},\ \ t \mapsto f(x,t) \tag{13.2}$$

on iga $x \in [a,b]$ korral samuti pidev, järelikult ka integreeruv. Seega on seosega (13.1) määratud funktsioon $F : [a,b] \to \mathbb{R}$. Järgnevalt **uurime selle funktsiooni pidevust, integreeruvust ja diferentseeruvust.**

**Lause 13.1** *Kui kahe muutuja funktsioon $f : R \to \mathbb{R}$ on pidev, siis ka funktsioon $F : [a,b] \to R$ on pidev.*

**Tõestus.** Fikseerime suvalise punkti $x_0 \in [a,b]$ ning näitame, et $F$ on selles punktis pidev. Olgu $\varepsilon > 0$ suvaline. Kuna Cantori teoreemi (vt. lause 2.6) kohaselt on $f$ ristkülikus $R$ ühtlaselt pidev, siis saab valida sellise $\delta > 0$, et kui $\mathbf{X} = (x,t)$ ja $\mathbf{X}_0 = (x_0,t_0)$ on ristküliku $R$ punktid omadusega $\|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0\| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (t-t_0)^2} < \delta$, siis kehtib võrratus

$$|f(x,t) - f(x_0,t_0)| < \frac{\varepsilon}{d-c}.$$

Seega, kui $|x - x_0| < \delta$, siis iga $t \in [c,d]$ korral $|f(x,t) - f(x_0,t)| < \frac{\varepsilon}{d-c}$ (kontrollida!)✠ ning

$$\begin{aligned}|F(x) - F(x_0)| &= \left|\int_c^d f(x,t)\,dt - \int_c^d f(x_0,t)\,dt\right| \le \int_c^d |f(x,t) - f(x_0,t)|\,dt \\ &\le \frac{\varepsilon}{d-c}(d-c) = \varepsilon.\end{aligned}$$

Niisiis on $F$ pidev punktis $x_0$. ■

**Lause 13.2** *Kui kahe muutuja funktsioon $f : R \to \mathbb{R}$ on pidev, siis*

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,t)\,dt\right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,t)\,dx\right) dt.$$

**Tõestus.** Rakendame järeldust 8.20. ■

**Lause 13.3** *Olgu funktsioon $f : R \to \mathbb{R}$ pidev ja olgu tal ristkülikus $R$ pidev osatuletis $\frac{\partial f}{dx}$. Siis funktsioon $F$ on lõigus $[a,b]$ pidevalt diferentseeruv ja*

$$F'(x) = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt. \tag{13.3}$$

**Tõestus.** Kõigepealt märgime, et $G(x) := \int_c^d \frac{\partial f}{dx}(x,t)\,dt$ eksisteerib iga $x \in [a,b]$ korral (põhjendada!)✠. Lauset 13.2 silmas pidades arvutame

$$\begin{aligned}\int_a^x G(u)\,du &= \int_a^x \left(\int_c^d \frac{\partial f}{\partial u}(u,t)\,dt\right)du = \int_c^d \left(\int_a^x \frac{\partial f}{\partial u}(u,t)\,du\right)dt \\ &= \int_c^d (f(x,t) - f(a,t))\,dt = F(x) - F(a),\end{aligned}$$

seega

$$F(x) = \int_a^x G(u)\,du + F(a) \quad (x \in [a,b]).$$

Siit saame

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_a^x G(u)\,du\right) = G(x) = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt,$$

kusjuures lause 13.1 põhjal on $F'$ pidev lõigus $[a,b]$ (selgitada!)✠. ■

Valemit (13.3) nimetatakse tihti **Leibnizi valemiks.**

## 13.2 Parameetrist sõltuvad päratud integraalid

Selles punktis vaatleme seosega (13.1) määratud funktsioone $F$, kus vastav **integraal on päratu.** Teatavasti on kahte tüüpi päratuid integraale: *lõpmatute rajadega integraal* ja *integraal tõkestamata funktsioonist* ehk vastavalt esimest ja teist liiki päratu integraal. Märgime, et **teist liiki päratu integraali $\int_c^d g(t)\,dt$ saab sobiva muutujavahetuse abil teisendada esimest liiki päratuks integraaliks.** Kui $g$ on punkti $d$ ümbruses tõkestamata ja pidev poollõigus $[c,d)$, siis defineerime $z := \frac{1}{d-t}$, kust $t = d - \frac{1}{z}$. Sel juhul $dt = \frac{dz}{z^2}$ ning me saame esialgse integraali kujul $\int_{\frac{1}{d-c}}^{\infty} g\left(d - \frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2}dz$. Lihtne on kontrollida, et kui koondub üks vaadeldavast kahest päratust integraalist, siis koondub ka teine.

Eelnevat märkust silmas pidades käsitleme me siin parameetrist $x \in [a,b]$ sõltuvat päratut integraali vaid kujul

$$F(x) := \int_c^\infty f(x,t)\,dt \tag{13.4}$$

ja **rõhutame tema väga olulist sarnasust funktsionaalridadega** $\sum_{k=0}^\infty f_k(x)$, seda nii probleemiasetuste kui ka lahendusmeetodite osas.

Olgu kahe muutuja funktsioon $f$ määratud hulgas

$$D := [a,b] \times [c,\infty) = \{(x,t) \mid a \le x \le b,\ c \le t < \infty\}$$

ja **olgu iga** $x \in [a,b]$ **korral päratu integraal** $\int_c^\infty f(x,t)\,dt$ **koonduv.** Siis ütleme, et päratu parameetrist sõltuv integraal (13.4) koondub (punktiviisi) lõigus $[a,b]$. Sel juhul $\lim_{l\to\infty}\int_l^\infty f(x,t)\,dt = 0$ iga $x \in [a,b]$ korral, s.t.

$$\forall x \in [a,b] \quad \forall \varepsilon > 0\ \exists l_0 = l_0(x,\varepsilon) > c : l > l_0 \Rightarrow \left|\int_l^\infty f(x,t)\,dt\right| < \varepsilon.$$

Sarnaselt funktsionaalridadele defineerime integraalide (13.4) jaoks **ühtlase koonduvuse parameetri** $x$ **suhtes.**

**Definitsioon.** Öeldakse, et parameetrist $x$ sõltuv päratu integraal (13.4) *koondub lõigus* $[a,b]$ *ühtlaselt*, kui

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists l_0 = l_0(\varepsilon) > c : l > l_0 \Rightarrow \left|\int_l^\infty f(x,t)\,dt\right| < \varepsilon \text{ iga } x \in [a,b] \text{ korral.}$$

Ilmselt on ühtlane koonduvus tugevam tingimus kui punktiviisi koonduvus (selgitada!)✠.

**Lause 13.4** ***(Weierstrassi koonduvustunnus).*** *Olgu* $g : [c,\infty) \to \mathbb{R}$ *selline ühe muutuja funktsioon, et päratu integraal* $\int_c^\infty g(t)\,dt$ *koondub. Kui*

$$|f(x,t)| \le g(t) \quad \textit{iga } x \in [a,b] \textit{ ja } t \in [c,\infty) \textit{ korral,} \tag{13.5}$$

*siis päratu integraal* (13.4) *koondub ühtlaselt lõigus* $[a,b]$.

**Tõestus.** Päratute integraalide võrdluslause põhjal tuleneb tingimusest (13.5), et integraal $\int_c^\infty |f(x,t)|\,dt$ koondub iga $x \in [a,b]$ korral (selgitada!)✠. Olgu $\varepsilon > 0$ suvaline. Integraali $\int_c^\infty g(t)\,dt$ koonduvusest järeldub, et leidub $l_0 > c$ omadusega

$$l \ge l_0 \Rightarrow \int_l^\infty g(t)\,dt < \varepsilon,$$

mistõttu

$$\left|\int_l^\infty f(x,t)\,dt\right| \le \int_l^\infty |f(x,t)|\,dt \le \int_l^\infty g(t)\,dt < \varepsilon \text{ iga } x \in [a,b] \text{ korral,}$$

kui $l \ge l_0$. Seega on päratu integraal $\int_c^\infty f(x,t)\,dt$ lõigus $[a,b]$ ühtlaselt koonduv. Lause on tõestatud. ■

Järgnevalt **tõestame selle paragrahvi põhitulemused,** mis kirjeldavad parameetrist sõltuva päratu integraali (13.4) pidevust, integreeruvust ja diferentseeruvust. Ilmneb täielik analoogia funktsionaalridade vastavate teoreemidega.

**Teoreem 13.5** ***(päratu parameetrist sõltuva integraali pidevus).*** *Olgu* $f : D \to \mathbb{R}$ *pidev kahe muutuja funktsioon ning koondugu integraal* (13.4) *ühtlaselt lõigus* $[a,b]$. *Siis funktsioon* $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ *on pidev.*

**Tõestus.** Näitame, et $F$ on pidev suvalises punktis $x_0 \in [a,b]$. Olgu $\varepsilon > 0$ suvaline. Hindame vahet $F(x) - F(x_0)$, kui $x \in [a,b]$:

$$\begin{aligned} |F(x) - F(x_0)| &= \left| \int_c^\infty (f(x,t)\,dt - f(x_0,t))\,dt \right| \\ &= \left| \int_c^d (f(x,t) - f(x_0,t))\,dt + \int_d^\infty f(x,t)\,dt - \int_d^\infty f(x_0,t)\,dt \right| \\ &\le \int_c^d |f(x,t) - f(x_0,t)|\,dt + \left| \int_d^\infty f(x,t)\,dt \right| + \left| \int_d^\infty f(x_0,t)\,dt \right|. \end{aligned} \tag{13.6}$$

Kasutades eeldust ühtlase koonduvuse kohta, saame leida niisuguse $l_0 > c$, et kui $l \ge l_0$, siis

$$\left| \int_l^\infty f(x,t)\,dt \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{iga } x \in [a,b] \text{ korral.}$$

Fikseerime $d \ge l_0$ ning moodustame ristküliku $R := [a,b] \times [c,d]$. Cantori teoreemi kohaselt on funktsioon $f$ hulgas $R$ ühtlaselt pidev (põhjendada!)✠. Seetõttu on võimalik valida niisugune $\delta > 0$, et

$$|f(x,t) - f(x_0,t)| < \frac{\varepsilon}{3(d-c)}, \text{ kui } |x - x_0| < \delta \text{ ja } t \in [c,d]$$

(põhjendada!)✠. Võrratusest (13.6) saame nüüd

$$|F(x) - F(x_0)| \le \int_c^d \frac{\varepsilon}{3(d-c)}\,dt + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \text{ kui } |x - x_0| < \delta.$$

(kontrollida!)✠. Seega on $F$ pidev punktis $x_0$. ■

**Teoreem 13.6 *(päratu parameetrist sõltuva integraali integreeruvus).*** *Olgu $f : D \to \mathbb{R}$ pidev kahe muutuja funktsioon ning koondugu integraal* (13.4) *ühtlaselt lõigus* $[a,b]$. *Siis funktsioon $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ on integreeruv ja*

$$\int_a^b \left( \int_c^\infty f(x,t)\,dt \right) dx = \int_c^\infty \left( \int_a^b f(x,t)\,dx \right) dt. \tag{13.7}$$

**Tõestus.** Teoreemi 13.5 kohaselt on funktsioon $F$ lõigus $[a,b]$ pidev, seega ka integreeruv, mistõttu vasakpoolne integraal seoses (13.7) eksisteerib. Kasutades lauset 13.2, saame suvalise $l > c$ korral seose

$$\begin{aligned} \int_c^l \left( \int_a^b f(x,t)\,dx \right) dt &= \int_a^b \left( \int_c^l f(x,t)\,dt \right) dx \\ &= \int_a^b \left( \int_c^\infty f(x,t)\,dt - \int_l^\infty f(x,t)\,dt \right) dx \\ &= \int_a^b \left( \int_c^\infty f(x,t)\,dt \right) dx - \int_a^b \left( \int_l^\infty f(x,t)\,dt \right) dx. \end{aligned} \tag{13.8}$$

Olgu $\varepsilon > 0$ suvaline. Integraali ühtlase koonduvuse kohaselt saame valida $l_0 > c$ nii, et

$$\left| \int_l^\infty f(x,t)\,dt \right| < \frac{\varepsilon}{b-a}, \text{ kui } l \geq l_0 \text{ ja } x \in [a,b]$$

(kontrollida!)✠. Siis

$$\left| \int_a^b \left( \int_l^\infty f(x,t)\,dt \right) dx \right| \leq \int_a^b \left| \int_l^\infty f(x,t)\,dt \right| dx < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} dt = \varepsilon,$$

tähendab, $\lim_{l\to\infty} \int_a^b \left( \int_l^\infty f(x,t)\,dt \right) dx = 0$. Seega saame protsessis $l \to \infty$ võrdustest (13.8) seose (13.7). Teoreem on tõestatud. ■

**Teoreem 13.7** ***(päratu parameetrist sõltuva integraali diferentseeruvus).*** *Olgu $f$ ja tema osatuletis $\frac{\partial f}{\partial x}$ pidevad kahe muutuja funktsioonid hulgas $D$ ning koondugu integraal* (13.4) *punktiviisi lõigus $[a,b]$. Kui integraal $\int_c^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$ koondub ühtlaselt lõigus $[a,b]$, siis funktsioon $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ on pidevalt diferentseeruv ja kehtib Leibnizi valem*

$$F'(x) = \int_c^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt.$$

**Tõestus.** Tähistame $G(x) := \int_c^\infty \frac{\partial f}{dx}(x,t)\,dt$ $(x \in [a,b])$ ja paneme tähele, et $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ on pidev funktsioon (selgitada!)✠. Seetõttu teoreemist 13.6 tuleneb

$$\begin{aligned}\int_a^x G(u)\,du &= \int_a^x \left( \int_c^\infty \frac{\partial f}{du}(u,t)\,dt \right) du = \int_c^\infty \left( \int_a^x \frac{\partial f}{du}(u,t)\,du \right) dt \\ &= \int_c^\infty (f(x,t) - f(a,t))\,dt = F(x) - F(a)\end{aligned}$$

ehk $F(x) = \int_a^x G(u)\,du + F(a) \quad (x \in [a,b])$. Diferentseerides saame

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x G(u)\,du = G(x) = \int_c^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt,$$

seejuures on $F' : [a,b] \to \mathbb{R}$ teoreemi 13.5 põhjal pidev funktsioon. ■

**Märkus.** Lisame siia märkuse *teist liiki* parameetrist sõltuvate päratute integraalide kohta. Olgu $D' := [a,b] \times [c,d)$ ja $f : D' \to \mathbb{R}$ selline kahe muutuja funktsioon, et päratu integraal $\int_c^d f(x,t)\,dt$ koondub iga $x \in [a,b]$ korral. Siis saame funktsiooni $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, mis on määratud seosega $F(x) := \int_c^d f(x,t)\,dt$. Me ütleme, et parameetrist $x$ sõltuv päratu integraal $\int_c^d f(x,t)\,dt$ on ühtlaselt koonduv lõigus $[a,b]$, kui

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 : d - \delta \leq l < d \Rightarrow \left| \int_l^d f(x,t)\,dt \right| < \varepsilon \text{ iga } x \in [a,b] \text{ korral.}$$

Sellest definitsioonist lähtudes võime tõestada teoreemidega 13.5 - 13.7 analoogilised väited teist liiki integraalide kohta. Alternatiivne võimalus nende tulemuste saamiseks on punkti alguses märgitud muutujavahetus, millega teisendatakse teist liiki päratud integraalid esimest liiki integraalideks.

## 13.3 Näited

**1.** Vaatleme integraali

$$F(\alpha) := \int_0^\infty e^{-\alpha t}\frac{\sin t}{t}dt, \tag{13.9}$$

seejuures *lepime kokku, et punktis* $t = 0$ *on integraalialuse funktsiooni väärtus 1* (s.t. tegemist on kõrvaldatud katkevusega; peame silmas, et $\lim_{t\to 0} e^{-\alpha t}\frac{\sin t}{t} = 1$). **Näitame, et see integraal koondub ühtlaselt parameetri** $\alpha$ **suhtes poolteljel** $[0,\infty)$.

Kõigepealt jõuame kaks korda ositi integreerides seoseni

$$\int e^{-\alpha t}\sin t dt = -\frac{e^{-\alpha t}(\alpha\sin t + \cos t)}{1+\alpha^2} + C =: L(\alpha,t) + C$$

(kontrollida!)✠, seejuures

$$|L(\alpha,t)| \leq \frac{1+\alpha}{1+\alpha^2} \leq 2 \quad (\alpha \geq 0,\ t \geq 0)$$

(veenduda!)✠. Hindame integraali $\int_l^\infty e^{-\alpha t}\frac{\sin t}{t}dt \quad (l > 0)$. Fikseeritud $\alpha \geq 0$ korral saame (jällegi ositi integreerides)

$$\left|\int_l^\infty e^{-\alpha t}\frac{\sin t}{t}dt\right| = \left|\frac{L(\alpha,t)}{t}\right|_l^\infty + \int_l^\infty \frac{L(\alpha,t)}{t^2}dt\Bigg| \leq \frac{|L(\alpha,l)|}{l} + \int_l^\infty \frac{|L(\alpha,t)|}{t^2}dt$$
$$\leq \frac{2}{l} + 2\int_l^\infty \frac{dt}{t^2} = \frac{4}{l}.$$

Siit tuleneb integraali $F(\alpha)$ ühtlane koonduvus poolteljel $[0,\infty)$. Nimelt, suvalise $\varepsilon > 0$ puhul valime $l_0 > \frac{4}{\varepsilon}$, siis kehtib võrratus

$$\left|\int_l^\infty e^{-\alpha t}\frac{\sin t}{t}dt\right| < \varepsilon \ \text{ suvalise } l \geq l_0 \text{ ja } \alpha \in [0,\infty) \text{ korral.}$$

**2.** Integraali (13.9) kasutame integraali

$$F := \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt$$

arvutamiseks, selleks rakendame teoreemi 13.5. Integraalialune funktsioon $e^{-\alpha t}\frac{\sin t}{t}$ on pidev hulgas $\{(\alpha,t) \mid \alpha \geq 0,\ t \geq 0\}$ (kontrollida!✠; meenutame kokkulepet väärtuse kohta juhul $t = 0$). Kuna integraal (13.9) koondub ühtlaselt poolteljel $[0,\infty)$, siis võib minna piirile integraali märgi all:

$$F = F(0) = \lim_{\alpha\to 0+} F(\alpha).$$

Et leida seda piirväärtust, peame kõigepealt leidma $F(\alpha)$, selleks arvutame esialgu $F'(\alpha)$. Teoreemi 13.7 abil (veenduda, et selle eeldused on täidetud!)✠ saame

$$F'(\alpha) = -\int_0^\infty e^{-\alpha t}\sin t dt = -\frac{1}{1+\alpha^2}$$

(kontrollida!)✠, niisiis

$$F(\alpha) = -\int \frac{d\alpha}{1+\alpha^2} = -\arctan\alpha + C. \tag{13.10}$$

Leiame konstandi $C$ väärtuse. Paneme tähele, et

$$|F(\alpha)| \leq \int_0^\infty \left| e^{-\alpha t}\frac{\sin t}{t}\right| dt \leq \int_0^\infty e^{-\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha}$$

iga $\alpha > 0$ korral, seega $\lim_{\alpha\to\infty}|F(\alpha)| = 0$ ehk $\lim_{\alpha\to\infty} F(\alpha) = 0$. Seosest (13.10) saame $C = \lim_{\alpha\to\infty}\arctan\alpha = \frac{\pi}{2}$. Niisiis,

$$F(\alpha) = \frac{\pi}{2} - \arctan\alpha,$$

millest tuleneb

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \lim_{\alpha\to 0+} F(\alpha) = \lim_{\alpha\to 0+}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\alpha\right) = \frac{\pi}{2}.$$

**3.** Vaatleme veel integraali

$$K(\beta) := \int_0^\infty \frac{\sin\beta t}{t} dt \quad (\beta\in\mathbb{R}).$$

Kui $\beta > 0$, saame muutujavahetusega $\beta t =: u$ võrduse $K(\beta) = \int_0^\infty \frac{\sin u}{u} du = \frac{\pi}{2}$, analoogiliselt saame juhul $\beta < 0$ võrduse $K(\beta) = -\frac{\pi}{2}$. Niisiis,

$$K(\beta) = \int_0^\infty \frac{\sin\beta t}{t} dt = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{kui } \beta > 0, \\ 0, & \text{kui } \beta = 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{kui } \beta < 0. \end{cases}$$

Selle valemi abil saame signum-funktsioonile $\operatorname{sgn}\beta$ esituse

$$\operatorname{sgn}\beta = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\beta t}{t} dt.$$

## 13.4 Euleri integraalid

Me vaatleme integraale

$$\mathbf{B}(a,b) := \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1} dt$$

ning

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt, \tag{13.11}$$

mida nimetatakse vastavalt *beetafunktsiooniks* ja *gammafunktsiooniks* ehk *Euleri esimest ja teist liiki integraaliks.* Allpool näeme, et beetafunktsiooni saab esitada gammafunktsiooni abil.

A. Beetafunktsiooni omadused

**1**$^0$. Kõigepealt leiame *funktsiooni* $\mathbf{B}(a,b)$ *määramispiirkonna*, s.t. need parameetrite väärtused, mil vastav päratu integraal koondub. Paneme tähele, et kui $a \geq 1$ ja $b \geq 1$, siis on tegemist tavalise Riemanni integraaliga. Juhul $a < 1$ on integreeritav funktsioon tõkestamata punkti 0 ümbruses, juhul $b < 1$ aga punkti 1 ümbruses. Seetõttu vaatleme integraalide summat $\int_0^{\frac{1}{2}} t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,dt$. Esimene integraal koondub (suvalise $b$ puhul) parajasti siis, kui koondub integraal $\int_0^{\frac{1}{2}} t^{a-1}dt$ (selgitada!)✠, s.t. juhul $a > 0$ (põhjendada!)✠. Analoogiline arutelu annab teise integraali koonduvuseks tarviliku ja piisava tingimuse $b > 0$. Niisiis, *beetafunktsioon* $\mathbf{B}(a,b)$ *koondub parajasti siis, kui* $a > 0$ *ja* $b > 0$. **Järgnevalt eeldamegi, et need tingimused on täidetud.**

**2**$^0$. Lihtne on veenduda, et $\mathbf{B}(a,b) = \mathbf{B}(b,a)$ (kontrollida!)✠.

**3**$^0$. Olgu $b > 1$. Ositi integreerides saame

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(a,b) &= \int_0^1 (1-t)^{b-1}\,d\frac{t^a}{a} = \left.\frac{t^a(1-t)^{b-1}}{a}\right|_0^1 + \frac{b-1}{a}\int_0^1 t^a(1-t)^{b-2}\,dt \\ &= \frac{b-1}{a}\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-2}\,dt - \frac{b-1}{a}\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,dt \\ &= \frac{b-1}{a}\mathbf{B}(a,b-1) - \frac{b-1}{a}\mathbf{B}(a,b)\end{aligned}$$

ehk

$$\mathbf{B}(a,b) = \frac{b-1}{a+b-1}\mathbf{B}(a,b-1) \quad (a > 0,\ b > 1).$$

Nii võib parameetri $b$ väärtust vähendades jõuda valemini

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(a,n) &= \frac{n-1}{a+n-1}\cdot\frac{n-2}{a+n-2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{a+1}\mathbf{B}(a,1) \\ &= \frac{(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1}{(a+n-1)(a+n-2)\ldots(a+1)\,a}\end{aligned} \tag{13.12}$$

(peame silmas, et $\mathbf{B}(a,1) = \int_0^1 t^{a-1}dt = \frac{1}{a}$). Seega

$$\mathbf{B}(m,n) = \frac{(n-1)!\,(m-1)!}{(m+n-1)!} \quad (m,n = 2,3,\ldots).$$

See valem kehtib ka juhul $m = 1$ või $n = 1$, kui defineerida $0! := 1$.

**4**$^0$. Leiame **beetafunktsiooni teise kuju.** Teeme muutujavahetuse $t := \frac{u}{1+u}$, siis $dt = \frac{du}{(1+u)^2}$ ja

$$\mathbf{B}(a,b) = \int_0^\infty \frac{u^{a-1}}{(1+u)^{a+b}}du. \tag{13.13}$$

Juhul $0 < a < 1$ saame valemi

$$\mathbf{B}(a,1-a) = \int_0^\infty \frac{u^{a-1}}{1+u}du.$$

**$5^0$. Seos kaht tüüpi Euleri integraalide vahel.** Lähtume seosest (13.11) ja teeme selles muutujavahetuse $t := su$, kus $s > 0$. Saame valemi

$$\frac{\mathbf{\Gamma}(\alpha)}{s^\alpha} = \int_0^\infty e^{-su} u^{\alpha-1} du. \tag{13.14}$$

Kirjutame selles $s$ asemel $1+s$ ning $\alpha$ asemel $a+b$ :

$$\frac{\mathbf{\Gamma}(a+b)}{(1+s)^{a+b}} = \int_0^\infty e^{-(1+s)u} u^{a+b-1} du.$$

Korrutame viimase võrduse mõlemat poolt arvuga $s^{a-1}$ ning integreerime muutuja $s$ järgi rajades 0-st $\infty$-ni:

$$\Gamma(a+b) \int_0^\infty \frac{s^{a-1}}{(1+s)^{a+b}} ds = \int_0^\infty ds \int_0^\infty e^{-(1+s)u} u^{a+b-1} s^{a-1} du.$$

Kui $a, b > 1$, siis parempoolses avaldises tohib muuta integreerimise järjekorda (selle fakti põhjendust me siin ei esita), sel juhul saame seost (13.14) kasutades

$$\begin{aligned}\Gamma(a+b)\,\mathbf{B}(a,b) &= \int_0^\infty e^{-u} u^{a+b-1} \left( \int_0^\infty e^{-us} s^{a-1} ds \right) du = \int_0^\infty e^{-u} u^{a+b-1} \frac{\Gamma(a)}{u^a} du \\ &= \Gamma(a) \int_0^\infty e^{-u} u^{b-1} du = \Gamma(a)\,\Gamma(b).\end{aligned}$$

Kokkuvõttes oleme saanud valemi

$$\mathbf{B}(a,b) = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \quad (a > 1,\ b > 1).$$

## B. Gammafunktsiooni omadused

**$1^0$.** Gammafunktsiooni **määramispiirkonna leidmiseks** kirjutame ta kahe päratu integraali summana $\int_0^1 e^{-t} t^{\alpha-1} dt + \int_1^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt$. Esimeses liidetavas on integreeritav funktsioon juhul $\alpha < 1$ punkti 0 ümbruses tõkestamata. Võrdluslause abil saab veenduda, et $\int_0^1 e^{-t} t^{\alpha-1} dt$ koondub parajasti siis, kui $\alpha > 0$ (selgitada!)✠. Teine integraal koondub suvalise $\alpha$ korral. Tõepoolest, kuna $\lim_{t\to\infty} e^{-t} t^{\alpha+1} = 0$ (kontrollida!)✠, siis leidub niisugune (parameetrist $\alpha$ sõltuv) konstant $M$, et $e^{-t} t^{\alpha+1} \le M$ ehk $e^{-t} t^{\alpha-1} \le \frac{M}{t^2}$ $(t \ge 1)$, mistõttu integraal $\int_1^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt$ koondub kõikide $\alpha \in \mathbb{R}$ puhul. Kokkuvõttes *koondub gammafunktsioon* $\Gamma(\alpha)$ *parajasti siis, kui* $\alpha > 0$. **Järgnevas eeldame, et see tingimus on täidetud.**

**$2^0$. Gammafunktsioonil on olemas suvalist järku pidev tuletis** $\Gamma^{(n)}(\alpha)$ määramispiirkonnaga $(0, \infty)$. Rakendame teoreemi 13.7. Integraalialust funktsiooni parameetri $\alpha$ järgi diferentseerides saame intervallis $(0,\infty)$ pideva funktsiooni $e^{-t} t^{\alpha-1} \ln t$, kusjuures integraal $\int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} \ln t dt$ koondub ühtlaselt igas lõigus $[\alpha_0, \alpha_1]$, kus $0 < \alpha_0 < \alpha_1$. Selle väite põhjenduseks vaatleme eraldi integraale $\int_0^1 e^{-t} t^{\alpha-1} \ln t dt$ ja $\int_1^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} \ln t dt$. Nende ühtlase koonduvuse tõestamiseks rakendame Weierstrassi tunnust 13.4. Esimene integraal koondub ühtlaselt lõigus $[\alpha_0, \alpha_1]$, sest

$$\left|e^{-t}t^{\alpha-1}\ln t\right| \leq t^{\alpha-1}\left|\ln t\right| \quad (a \geq \alpha_0,\ 0 < t \leq 1) \text{ ning } \int_0^1 t^{\alpha_0-1}\left|\ln t\right| dt \text{ koondub}$$

(selgitada!)✠. Teise integraali puhul saame fikseerida niisuguse konstandi $M > 0$, et

$$\left|e^{-t}t^{\alpha-1}\ln t\right| \leq e^{-t}t^{\alpha_1} \leq \frac{M}{t^2} \quad (a \leq \alpha_1,\ 1 \leq t < \infty).$$

Kuna integraal $\int_1^\infty \frac{dt}{t^2}$ koondub, siis $\int_1^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}\ln t dt$ koondub ühtlaselt lõigus $[\alpha_0, \alpha_1]$. Teoreemi 13.7 kohaselt on funktsioon $\Gamma$ igas punktis $\alpha \in (0, \infty)$ pidevalt diferentseeruv ja

$$\Gamma'(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}\ln t dt.$$

Analoogiliselt saame tuletised $\Gamma''(\alpha)$, $\Gamma'''(\alpha)$ jne., kusjuures

$$\Gamma^{(n)}(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}\ln^n t dt.$$

**$3^0$. Taandamisvalem.** Ositi integreerides saame

$$\Gamma(\alpha+1) = \int_0^\infty e^{-t}t^{\alpha}dt = -e^{-t}t^{\alpha}\Big|_0^\infty + \alpha\int_0^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}dt = \alpha\Gamma(\alpha)$$

(põhjendada!)✠, s.t.

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha) \text{ iga } \alpha > 0 \text{ korral.}$$

Seda valemit korduvalt rakendades jõuame gammafunktsiooni taandamisvalemini

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)\Gamma(\alpha-n+1), \text{ kus } \alpha > n-1.$$

Pidades silmas, et $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}dt = 1$ (veenduda!)✠, saame juhul $\alpha = n$ valemi

$$\Gamma(n+1) = n! \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Näeme, et gammafunktsiooni võib vaadelda faktoriaali üldistusena.

**$4^0$. Euler-Gaussi valem.** Teeme integraalis (13.11) muutujavahetuse $t = \ln\frac{1}{u}$, siis

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^1 \left(\ln\frac{1}{u}\right)^{\alpha-1} du$$

(kontrollida!)✠. Kasutame seost

$$\ln\frac{1}{u} = \lim_n n\left(1 - u^{\frac{1}{n}}\right)$$

(põhjendada!)✠, millest saame

$$\Gamma(\alpha) = \lim_n n^{\alpha-1} \int_0^1 \left(1 - u^{\frac{1}{n}}\right)^{\alpha-1} du.$$

Kui minna üle muutujale $w$ seosega $u = w^n$, jõuame seoseni

$$\Gamma(\alpha) = \lim_n n^{\alpha} \int_0^1 w^{n-1} (1-w)^{\alpha-1} dw = \lim_n n^{\alpha} \mathbf{B}(n, \alpha)$$

ehk (vrd. (13.12))

$$\Gamma(\alpha) = \lim_n n^{\alpha} \frac{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot (n-1)}{\alpha(\alpha+1)...(\alpha+n-1)}.$$

Seda valemit nimetatakse Euler-Gaussi valemiks.

**$5^0$. Gammafunktsiooni käigu uurimine.** Me teame juba, et funktsiooni $\Gamma$ määramispiirkond on $(0, \infty)$. Selles hulgas on $\Gamma$ pidev funktsioon ja tal on suvalist järku pidevad tuletised. Paneme tähele, et $\Gamma''(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} \ln^2 t dt > 0$ iga $\alpha \in (0, \infty)$ puhul (veenduda!)✠, seega on $\Gamma'$ kasvav funktsioon ning tal saab olla vaid üks nullkoht. Et see nullkoht $\alpha_0$ tõepoolest (arvude 1 ja 2 vahel) eksisteerib, selgub võrdusest $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$ ja Rolle'i teoreemist (selgitada!)✠. Et $\Gamma''(\alpha_0) > 0$, siis on funktsioonil $\Gamma$ punktis $\alpha_0$ globaalne miinimum (põhjendada!)✠. Teise tuletise positiivsus tähendab funktsiooni graafiku kumerust. Kuna

$$\lim_{\alpha \to 0+} \Gamma(\alpha) = \lim_{\alpha \to 0+} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha} = \infty$$

(selgitada!)✠, siis vertikaaltelg on gammafunktsiooni graafiku püstasümptoot. Saab näidata, et teisi asümptoote graafikul ei ole.

**Näited. 4.** Integraali $\int_0^\infty \frac{\sqrt[5]{t}}{(1+t)^2} dt$ saab esitada valemi (13.13) järgi kujul $\int_0^\infty \frac{t^{\frac{6}{5}-1}}{(1+t)^{\frac{6}{5}+\frac{4}{5}}} dt = \mathbf{B}\left(\frac{6}{5}, \frac{4}{5}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{6}{5}\right)\Gamma\left(\frac{4}{5}\right)}{\Gamma(2)} = \frac{1}{5}\Gamma\left(\frac{1}{5}\right)\Gamma\left(\frac{4}{5}\right)$ (kontrollida!)✠.

**5.** Integraali

$$F := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{a-1} \varphi \cos^{b-1} \varphi d\varphi$$

arvutamiseks teeme muutujavahetuse $t := \sin^2 \varphi$, saame (kontrollida!)✠

$$F = \frac{1}{2} \int_0^1 t^{\frac{a}{2}-a} (1-t)^{\frac{b}{2}-1} dt = \frac{1}{2} \mathbf{B}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{b}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+b}{2}\right)}.$$

# 14 Fourier' read

## 14.1 Trigonomeetriline süsteem

Funktsioonide esitamine mingi **koonduva funktsionaalrea summana** on levinud meetod funktsioonide omaduste uurimisel. Tavaliselt püütakse funktsiooni $f$ esitada kujul

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(x),$$

kus $\Phi := \{\varphi_k \mid k=0,1,...\}$ on mingi lihtsate või heade omadustega funktsioonide loenduv süsteem ning $(c_k)$ on teatav funktsiooniga $f$ määratud arvjada. Selline probleemiasetus on meile tuttav Taylori ridade puhul, sel juhul koosnes süsteem $\Phi$ funktsioonidest $1, x, x^2, x^3, ...$ ja esituses

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \quad (x \in D)$$

olid astmerea kordajad $c_k$ antud valemiga $c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{n!}$ $(n=0,1,2,...)$. Astmerea oluline eelis on, et tema koonduvuspiirkond $D$ on lihtsa struktuuriga hulk, puuduseks aga see, et niisuguse esitusega funktsioonide klass on suhteliselt kitsas. Seetõttu on kasutusel hulgaliselt teisi koonduvussüsteeme $\Phi$. Neist tuntuim ja kõige enam uuritud on *trigonomeetriline süsteem*

$$\{1, \ \cos x, \ \sin x, \ \cos 2x, \ \sin 2x, ...\}.$$

Olgu $f$ lõigus $[-\pi,\pi]$ määratud funktsioon. Seame endale eesmärgiks **leida tingimused, mil ta on esitatav summana**

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx, \tag{14.1}$$

kus $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, ...$ on mingid konstandid (summas $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ jäetakse sulud tavaliselt kirjutamata). Eeldame, et $f$ on lõigus $[-\pi,\pi]$ integreeruv funktsioon, ja korrutame võrduse (14.1) mõlemat poolt trigonomeetrilise süsteemi elementidega ning integreerime üle lõigu $[-\pi,\pi]$ (oletame, et see on võimalik). Kasutades tuntud seoseid

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos kx dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx dx = \pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos lx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin lx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin lx dx = 0 \ \ (k \neq l),$$

saame kordajate $a_k$ ja $b_k$ jaoks valemid

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \quad (k=0,1,2,...),$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \quad (k=1,2,...). \tag{14.2}$$

Need (puhtformaalselt saadud) seosed võtame aluseks funktsiooni Fourier' rea defineerimisel.

**Definitsioon.** Rida

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx+b_k\sin kx, \tag{14.3}$$

kus kordajad $a_0, a_k, b_k$ $(k\in\mathbb{N})$ on määratud seostega (14.2), nimetatakse funktsiooni $f$ *trigonomeetriliseks Fourier reaks* lõigus $[-\pi,\pi]$. Sel juhul kirjutame

$$f(x)\backsim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx+b_k\sin kx. \tag{14.4}$$

Fourier' ridade teoorias huvitab meid eeskätt küsimus, **milliste funktsioonide puhul tohime me seoses** (14.4) **kirjutada funktsiooni ja tema Fourier' rea summa vahele võrdusmärgi.** Kõigepealt aga **peame garanteerima, et selles seoses olev rida üldse eksisteerib,** s.t., et integraalid $\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kxdx$ ja $\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kxdx$ oleksid olemas (kas tavaliste Riemanni integraalidena või päratute integraalidena). Selleks on mitmeid piisavaid tingimusi, oma järgnevas arutluses lähtume me eeldusest, et $f$ **on lõigus** $[-\pi,\pi]$ **tükiti pidev.** Meenutame, et funktsiooni $\psi:[a,b]\to\mathbb{R}$ me nimetame *tükiti pidevaks*, kui 1) tal on lõigus $[a,b]$ ülimalt lõplik arv katkevuspunkte ning 2) neis katkevuspunktides on olemas lõplikud ühepoolsed piirväärtused. Riemanni integraali teooriast teame, et sel juhul on funktsioon $\psi$ lõigus $[a,b]$ Riemanni mõttes integreeruv.

Kuid ka tükiti pidevate funktsioonide puhul jääb lahtiseks küsimus, **kas rida seoses** (14.4) **koondub.** Kui vastus sellele küsimusele on positiivne, saame uurida probleemi, mille me püstitasime, nimelt, **kas rea summa on** $f(x)$.

**Perioodilised funktsioonid.** Kui funktsioon $f$ on määratud kogu arvsirgel $(-\infty,\infty)$ ja leidub selline arv $T$, et

$$f(x+T)=f(x)\ \text{ iga } x\in(-\infty,\infty)\ \text{ korral,}$$

siis öeldakse, et $f$ on *perioodiline funktsioon perioodiga* $T$ ehk $T$*-perioodiline funktsioon.* Lihtne on näha, et kui $f$ on $T$-perioodiline funktsioon ja funktsioon $\psi$ on defineeritud seosega $\psi(x):=f(cx)$, kus $c$ on mingi nullist erinev konstant, siis $\psi$ on samuti perioodiline funktsioon, seejuures perioodiga $\frac{T}{c}$ (kontrollida!)✠. Teiseks, kui $f$ ja $g$ on $T$-perioodilised funktsioonid, siis on seda ka funktsioonid $f+g$ ning $\lambda f$, kus $\lambda$ on mingi arv (kontrollida!)✠. Ilmselt on trigonomeetrilise süsteemi kõik elemendid $2\pi$-perioodilised funktsioonid (kontrollida!)✠. Sellest tulenevalt on ka kõik *trigonomeetrilised polünoomid*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}a_k\cos kx+b_k\sin kx\ \ (n=0,1,2,...)$$

$2\pi$-perioodilised (põhjendada!)✠. Seetõttu kehtib järgmine väide.

**Lause 14.1** *Kui trigonomeetriline rida* (14.3) *koondub lõigus* $[-\pi,\pi]$, *siis koondub ta igas punktis* $x\in(-\infty,\infty)$ *ning tema summa on* $2\pi$*-perioodiline funktsioon.*

**Tõestus.** Tähistame

$$s_n(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx,$$

kus $x \in (-\infty, \infty)$ ja kordajad $a_0, a_1, b_1, a_2, ...$ on antud trigonomeetrilise rea kordajad. Eelduse kohaselt

$$\lim_n s_n(x_0) =: s(x_0) \text{ eksisteerib iga } x_0 \in [-\pi, \pi] \text{ korral.}$$

Olgu $x \in (-\infty, \infty)$ suvaline, siis leiduvad $x_0 \in [-\pi, \pi]$ ja täisarv $k$, et $x = x_0 + 2k\pi$ (selgitada!)✠. Seejuures

$$s_n(x) = s_n(x_0 + 2k\pi) = s_n(x_0),$$

sest $s_n$ on $2\pi$-perioodiline funktsioon. Järelikult

$$s(x) = \lim_n s_n(x_0) = s(x_0).$$

Niisiis, rida (14.3) koondub hulgas $(-\infty, \infty)$ ja kuna

$$s(x + 2\pi) = \lim_n s_n(x + 2\pi) = \lim_n s_n(x) = s(x),$$

siis rea summa on $2\pi$-perioodiline funktsioon. ■

Märgime siinkohal perioodiliste funktsioonide ühte olulist omadust.

**Lause 14.2** *Kui $\psi$ on $2\pi$-perioodiline lõigus $[-\pi, \pi]$ integreeruv funtsioon, siis suvalise arvu $a$ korral kehtib võrdus*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \psi(x)\,dx = \int_a^{a+2\pi} \psi(x)\,dx.$$

**Tõestus.** Kui $c$ ja $d$ on suvalised arvud, siis, tähistades $\xi := x + 2\pi$, võime tänu seosele $\psi(\xi - 2\pi) = \psi(\xi)$ kirjutada

$$\int_c^d \psi(x)\,dx = \int_{c+2\pi}^{d+2\pi} \psi(\xi - 2\pi)\,d\xi = \int_{c+2\pi}^{d+2\pi} \psi(\xi)\,d\xi = \int_{c+2\pi}^{d+2\pi} \psi(x)\,dx,$$

kust erijuhul $c := -\pi$ ja $d := a$ saame $\int_{-\pi}^{a} \psi(x)\,dx = \int_{\pi}^{a+2\pi} \psi(x)\,dx$. Seetõttu

$$\begin{aligned}\int_a^{a+2\pi} \psi(x)\,dx &= \int_a^{-\pi} \psi(x)\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x)\,dx + \int_{\pi}^{a+2\pi} \psi(x)\,dx \\ &= \int_a^{-\pi} \psi(x)\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x)\,dx + \int_{-\pi}^{a} \psi(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x)\,dx.\end{aligned}$$

Lause on tõestatud. ■

## 14.2 Riemanni lemma. Dirichlet' integraal

Enne kui asume otsima vastust eespool esitatud küsimustele $(a)$ ja $(b)$, toome **kaks olulist fakti.** Kõigepealt tõestame lause, mis iseloomustab funktsiooni Fourier' kordajate $a_0, a_k, b_k$ $(k \in \mathbb{N})$ käitumist.

**Lause 14.3** *Kui funktsioon $f$ on lõigus $[-\pi, \pi]$ tükiti pidev, siis tema Fourier' kordajad, mis on määratud seostega* (14.2), *rahuldavad tingimusi*

$$\lim_k a_k = \lim b_k = 0.$$

Selle lause asemel tõestame järgmise pisut üldisema lemma.

**Lemma 14.4** ***(Riemanni lemma).*** *Kui funktsioon $f$ on lõigus $[a, b]$ tükiti pidev, siis kehtivad võrdused*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_a^b f(x)\cos\lambda x dx = 0, \quad \lim_{\lambda\to\infty} \int_a^b f(x)\sin\lambda x dx = 0. \tag{14.5}$$

**Tõestus.** Olgu $t_1, t_2, ..., t_m$ funktsiooni $f$ katkevuspunktid, kusjuures $t_1 < t_2 < ... < t_m$. Olgu $[\alpha, \beta]$ suvaline lõikudest $[a, t_1], [t_1, t_2], ..., [t_m, b]$. Kuna integraali väärtus ei sõltu integreeritava funktsiooni väärtusest otspunktides $\alpha$ ja $\beta$, siis loeme funktsiooni $f$ lõigus $[\alpha, \beta]$ pidevaks (selgitada!)✠. Seega eksisteerivad integraalid $\int_\alpha^\beta f(x)\cos\lambda x dx$ ja $\int_\alpha^\beta f(x)\sin\lambda x dx$, järelikult ka integraalid $\int_a^b f(x)\cos\lambda x dx$ ja $\int_a^b f(x)\sin\lambda x dx$. Näitame, et

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_\alpha^\beta f(x)\cos\lambda x dx = \lim_{\lambda\to\infty} \int_\alpha^\beta f(x)\sin\lambda x dx = 0,$$

siis kehtivad võrdused (14.5) (põhjendada!)✠.

Piirdume siinkohal tingimuse $\lim_{\lambda\to\infty} \int_\alpha^\beta f(x)\cos\lambda x dx = 0$ tõestusega, teine võrdus tõestatakse analoogiliselt. Olgu $\varepsilon > 0$, peame leidma sellise $N \in \mathbb{R}$, et $\left|\int_\alpha^\beta f(x)\cos kx dx\right| < \varepsilon$ iga $\lambda \geq N$ korral. Kuna funktsioon $f$ on lõigus $[\alpha, \beta]$ pidev, siis on ta tõkestatud, s.t. leidub $M > 0$, et

$$|f(x)| \leq M \text{ iga } x \in [\alpha, \beta] \text{ korral.}$$

Cantori teoreemi kohaselt on $f$ lõigus $[\alpha, \beta]$ ühtlaselt pidev, niisiis saab valida niisuguse $\delta > 0$, et kui $|x - x'| < \delta$ ja $x, x' \in [\alpha, \beta]$, siis

$$|f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2(\beta - \alpha)}. \tag{14.6}$$

Olgu $T[x_0, ..., x_n]$ lõigu $[\alpha, \beta]$ niisugune alajaotus $\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = \beta$, et $x_i - x_{i-1} < \delta$ $(i = 1, ..., n)$. Siis

$$\begin{aligned}\left|\int_\alpha^\beta f(x)\cos\lambda x dx\right| &= \left|\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\cos\lambda x dx\right| \\ &= \left|\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x) - f(x_i))\cos\lambda x dx + \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x_i)\cos\lambda x dx\right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x) - f(x_i)|\, dx + \sum_{i=1}^n |f(x_i)| \left|\int_{x_{i-1}}^{x_i} \cos\lambda x dx\right|.\end{aligned}$$

Kasutame hinnangut

$$\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i} \cos \lambda x dx\right| = \frac{1}{\lambda}\left|\sin \lambda x_i - \sin \lambda x_{i-1}\right| \leq \frac{2}{\lambda},$$

selle ja seose (14.6) abil saame

$$\left|\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \cos \lambda x dx\right| \leq \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{\varepsilon}{2(\beta-\alpha)} dx + \sum_{i=1}^{n} \frac{2M}{\lambda} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2nM}{\lambda}$$

(veenduda!)✠. Niisiis, kui $\lambda \geq \frac{4nM}{\varepsilon} =: N$, siis $\left|\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \cos \lambda x dx\right| < \varepsilon$. Seega

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \cos \lambda x dx = 0.$$

Lemma (ja seega ka lause 14.3) on tõestatud. ■

Teine fakt, mida me vajame trigonomeetriliste ridade koonduvuse uurimisel, on seotud **Fourier' rea osasumma integraalkujuga.** Vaatleme lõigus $[-\pi, \pi]$ tükiti pideva $2\pi$-perioodilise funktsiooni $f$ Fourier' rea (14.3) osasummat

$$s_n(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx,$$

kus Fourier' rea definitsiooni kohaselt kordajad $a_0, a_k, b_k$ $(k \in \mathbb{N})$ on määratud seostega (14.2). Asendame need avaldised osasumma valemisse:

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt \cos kx dt + \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \sin kx dt\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx)\right) dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\right) dt \end{aligned}$$

(kontrollida!)✠. Tähistame $D_n(u) := \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos ku$ ja näitame, et

$$D_n(u) = \frac{\sin(2n+1)\frac{u}{2}}{2\sin\frac{u}{2}}. \tag{14.7}$$

Tõepoolest, kuna

$$\begin{aligned} 2D_n(u)\cos u &= \cos u + 2\cos u \cos u + 2 \cos u \cos 2u + ... + \cos u \cos nu \\ &= \cos u + (1 + \cos 2u) + (\cos u + \cos 3u) + (\cos 2u + \cos 4u) + ... \\ &+ (\cos(n-1)u + \cos(n+1)u) \\ &= 1 + 2\cos u + 2\cos 2u + ... + 2\cos(n-1)u + \cos nu + \cos(n+1)u \\ &= 2D_n(u) - \cos nu + \cos(n+1)u, \end{aligned}$$

siis

$$D_n(u) = \frac{\cos nu - \cos(n+1)u}{2(1-\cos u)},$$

millest tänu seostele $\cos nu - \cos(n+1)u = 2\sin(2n+1)\frac{u}{2}\sin\frac{u}{2}$ ja $1 - \cos u = 2\sin^2\frac{u}{2}$ saamegi võrduse (14.7).

Avaldist $D_n(u)$ nimetatakse *Dirichlet' tuumaks*. Ilmselt on $D_n$ $2\pi$-perioodiline funktsioon (veenduda!)✠, seetõttu saame lause 14.2 kohaselt muutuja vahetusega $u := x-t$ osasummale $s_n(x)$ kuju

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-u)\,D_n(u)\,du = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)\,D_n(u)\,du \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x-u)\,D_n(u)\,du + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x-u)\,D_n(u)\,du \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x+u)\,D_n(u)\,du + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x-u)\,D_n(u)\,du. \end{aligned}$$

Saime valemi, mida nimetatakse *Dirichlet' integraaliks*:

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (f(x+u) + f(x-u))\,D_n(u)\,du. \tag{14.8}$$

Märgime, et kui võtta funktsiooniks $f$ konstantne funktsioon $f(x) = 1$, siis tema Fourier' rida on

$$1 + 0 + 0 + ...$$

(põhjendada!)✠ ning $s_n(x) = 1$ iga $n$ korral, mistõttu valemi (14.8) kohaselt

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} D_n(u)\,du = 1. \tag{14.9}$$

## 14.3 Trigonomeetrilise Fourier' rea koonduvus

Järgnevalt tõestame selle peatüki ühe põhitulemustest, mis on teoreetiliseks lähtepunktiks funktsioonide esitamisel Fourier' reana.

**Teoreem 14.5** *Olgu $f$ lõigus $[-\pi, \pi]$ tükiti pidev $2\pi$-perioodiline funktsioon. Kui punktis $x \in (-\infty, \infty)$ on olemas lõplikud ühepoolsed tuletised*

$$f'(x+) := \lim_{u\to 0+} \frac{f(x+u) - f(x+)}{u} \quad ja \quad f'(x-) := \lim_{u\to 0-} \frac{f(x+u) - f(x-)}{u},$$

*siis funktsiooni $f$ Fourier' rida koondub punktis $x \in (-\infty, \infty)$ summaks $\frac{f(x+)+f(x-)}{2}$.*

**Tõestus.** Eeldame, et fikseeritud punktis $x$ rahuldab $2\pi$-perioodiline tükiti pidev funktsioon $f$ eelpool toodud tingimusi, s.t. eksisteerivad lõplikud ühepoolsed tuletised $f'(x+)$ ja

$f'(x-)$. Lähtume valemist (14.9), korrutame selle mõlemat poolt arvuga $s(x) := \frac{f(x+)+f(x-)}{2}$ ja lahutame tulemuse võrdusest (14.8), sel juhul saame

$$\begin{aligned} s_n(x) - s(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (f(x+u) + f(x-u) - 2s(x)) D_n(u)\,du \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi ((f(x+u) - f(x+)) + (f(x-u) - f(x-))) D_n(u)\,du \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \Phi_x(u) D_n(u)\,du, \end{aligned} \tag{14.10}$$

kus $\Phi_x(u) := (f(x+u) - f(x+)) + (f(x-u) - f(x-))$. Seosest

$$\sin(2n+1)\frac{u}{2} = \sin nu \cos\frac{u}{2} + \cos nu \sin\frac{u}{2}$$

(kontrollida selle kehtivust!)✠ tuleneb

$$\Phi_x(u) D_n(u) = \frac{\Phi_x(u)}{2}\cos nu + h(u)\sin nu,$$

seosega $h(u) := \frac{\Phi_x(u)}{2\tan\frac{u}{2}}$ määratud funktsioon $h$ on poollõigus $(0,\pi]$ tükiti pidev (põhjendada!)✠. Peale selle eksisteerib lõplik piirväärtus

$$\begin{aligned} \lim_{u\to 0+} h(u) &= \lim_{u\to 0+}\left(\frac{f(x+u) - f(x+)}{u} - \frac{f(x-u) - f(x-)}{-u}\right)\lim_{u\to 0+}\frac{u}{2\tan\frac{u}{2}} \\ &= f'(x+) - f'(x-) \end{aligned}$$

(kontrollida!)✠. Niisiis on funktsioon $h$ lõigus $[0,\pi]$ tükiti pidev. Seosest (14.10) saame lause 14.3 põhjal

$$\lim_n (s_n(x) - s(x)) = \frac{1}{2\pi}\lim_n \int_0^\pi \Phi_x(u)\cos nu du + \frac{1}{2\pi}\lim_n\int_0^\pi h(u)\sin nu du = 0$$

ehk $\lim_n s_n(x) = s(x)$. Teoreem on tõestatud. ■

**Järeldus 14.6** *Kui punktis $x$ pideval $2\pi$-perioodilisel funktsioonil $f$ on punktis $x$ lõplikud ühepoolsed tuletised, siis tema Fourier' rida koondub selles punktis summaks $f(x)$.*

**Tõestus.** Iseseisvalt!✠ ■

## 14.4 Funktsioonide arendamine Fourier' reaks

*Me eeldame selles punktis kõikjal, et $f$ on lõigus $[-\pi,\pi]$ tükiti pidev funktsioon.* Kui ta on $2\pi$-perioodiline, siis teoreemi 14.5 kohaselt koondub tema Fourier' rida igas punktis $x$, kus eksisteerivad $f'(x+)$ ja $f'(x-)$. Fourier' kordajad arvutatakse valemite (14.2) järgi, s.t.

$$a_k := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx \quad (k = 0,1,2,...) \quad \text{ja} \quad b_k := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx \quad (k = 1,2,...).$$

**1$^0$. Kui $f$ on $2\pi$-perioodiline paarisfunktsioon,** s.t. $f(-x) = f(x)$, siis $b_k = 0$ iga $k = 1, 2, ...$ korral (kontrollida!)✠ ning Fourier' rida koosneb ainult koosinusliikmetest:

$$f(x) \backsim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx.$$

Seevastu **paaritu funktsiooni** $f$ puhul $a_n = 0$ $(k = 0, 1, ...)$ ja

$$f(x) \backsim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx.$$

**2$^0$.** Vaatleme nüüd funktsiooni $f$, mis on küll lõigus $[-\pi, \pi]$ tükiti pidev, **kuid ei ole perioodiline.** Et uurida tema Fourier' rea koonduvust, moodustame uue funktsiooni $g$, mis langeb poollõigus $(-\pi, \pi]$ kokku funktsiooniga $f$, s.t. $g(x) := f(x)$ iga $x \in (-\pi, \pi]$ korral, ning on $2\pi$-perioodiline, s.t. $g(x + 2\pi) = g(x)$ iga $x \in (-\infty, \infty)$ korral. Lõigus $[-\pi, \pi]$ erinevad funktsioonid $g$ ja $f$ maksimaalselt ühes punktis, seega on neil ühed ja samad Fourier' kordajad (selgitada!)✠, järelikult *on funktsioonidel $f$ ja $g$ sama Fourier' rida.* Rakendame teoreemi 14.5, selle kohaselt on funktsiooni $g$ Fourier' rea summa võrdne arvuga $s(x) = \frac{g(x+)+g(x-)}{2}$ iga punkti $x$ korral, kus leiduvad lõplikud ühepoolsed tuletised $g'(x+)$ ja $g'(x-)$. Vaatleme kõigepealt juhtu, kus $x$ on lõigu $[-\pi, \pi]$ sisepunkt. Sel juhul $g(x+) = f(x+)$, $g(x-) = f(x-)$, $g'(x+) = f'(x+)$ ning $g'(x-) = f'(x-)$, mistõttu $s(x) = \frac{f(x+)+f(x-)}{2}$. Kui $x = \pi$, siis $g(\pi+) = g(-\pi+) = f(-\pi+)$, $g(\pi-) = f(\pi-)$, $g'(\pi+) = f'(-\pi+)$, $g'(\pi-) = f'(\pi-)$ (kontrollida!)✠, seega $s(\pi) = \frac{f(-\pi+)+f(\pi-)}{2}$. Juhul $x = -\pi$ on $g(-\pi+) = f(-\pi+)$, $g(-\pi-) = g(\pi-) = f(\pi-)$, $g'(-\pi+) = f'(-\pi+)$, $g'(-\pi-) = f'(\pi-)$ (kontrollida!)✠, tähendab $s(-\pi) = \frac{f(-\pi+)+f(\pi-)}{2}$.

Erijuhul saame järgmised väited (kontrollida!)✠.

(*a*) *Kui $f$ on pidev punktis $x \in (-\pi, \pi)$ ja tal on selles punktis lõplikud ühepoolsed tuletised $f'(x+)$ ja $f'(x-)$, siis tema Fourier' rea summa on $f(x)$.*

(*b*) *Kui $x$ on lõigu $[-\pi, \pi]$ otspunkt ja funktsioon $f$ on selles punktis (ühepoolselt) pidev ning tal on mõlemas otspunktis vastav ühepoolne tuletis, siis Fourier rida koondub väärtuseks* $\frac{f(-\pi)+f(\pi)}{2}$.

**3$^0$.** Olgu funktsioon $f$ määratud lõigus $[0, \pi]$. Sel juhul saab teda arendada Fourier' ritta selles lõigus lõpmata mitmel viisil vastavalt sellele, kuidas me jätkame ta lõigule $[-\pi, \pi]$. Defineerime kõigepealt $f(x) := f(-x)$, kui $x \in [-\pi, 0)$, siis saame lõigus $[-\pi, \pi]$ paarisfunktsiooni. Seega koosneb tema Fourier' rida vaid koosinusliikmetest, kusjuures kordajad $a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \cos kx dx$ $(k = 0, 1, ...)$ sõltuvad vaid funktsiooni väärtustest lõigus $[0, \pi]$. Kui defineerime $f(x) := -f(-x)$ $(x \in [-\pi, 0))$ ning "parandame" funktsiooni punktis $x = 0$, võttes $f(0) := 0$ (rõhutame, et funktsiooni väärtuse muutmine ühes punktis ei muuda selle funktsiooni Fourier' kordajaid), siis saame lõigus $[-\pi, \pi]$ paaritu funktsiooni. Tema Fourier' rida sisaldab vaid siinusliikmeid. Nende kordajad $b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \sin kx dx$ $(k = 1, 2, ...)$ on määratud funktsiooni väärtustega lõigus $[0, \pi]$.

**4$^0$.** Olgu funktsioon $f$ määratud mingis lõigus $[-l, l]$, kus $l > 0$. Tähistame $t := \frac{\pi x}{l}$ ja $F(t) := f\left(\frac{lt}{\pi}\right)$, siis funktsioon $F$ on määratud lõigus $[-\pi, \pi]$. Seejuures, kui $f$ on $2l$-

perioodiline, siis $F$ on $2\pi$-perioodiline funktsioon (kontrollida!)✠. Saame seose

$$F(t) \backsim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt + b_k \sin kt,$$

kus $a_k := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\cos ktdt \ \ (k = 0,1,2,...)$ ja $b_k := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\sin ktdt \ \ (k = 1,2,...)$. Kui läheme tagasi esialgsele muutujale $x$, saame

$$f(x) \backsim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\frac{\pi}{l}x + b_k \sin k\frac{\pi}{l}x,$$

kus $a_k := \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos k\frac{\pi}{l}xdx \ \ (k = 0,1,2,...)$ ja $b_k := \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin k\frac{\pi}{l}xdx \ \ (k = 1,2,...)$ (kontrollida!)✠. Kui funktsioon $f$ on $2l$-perioodiline ja lõigus $[-l,l]$ tükiti pidev, siis teoreemi 14.5 põhjal koondub tema Fourier' rida summaks $\frac{f(x+)+f(x-)}{2}$ igas punktis $x$, kus eksisteerivad lõplikud ühepoolsed tuletised $f'(x+)$ ja $f'(x-)$.

**Näide.** Leiame funktsiooni $f(x) = x$ Fourier' rea lõigus $[-\pi,\pi]$. Kõigepealt jätkame selle funktsiooni kogu arvteljele nii, et saaksime $2\pi$-perioodilise funktsiooni, tähistame selle tähega $g$. Kuivõrd tegemist on paaritu funktsiooniga, siis $a_k = 0 \ (k = 0,1,...)$ ja

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin kxdx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin kxdx = -\frac{2}{\pi k}\int_0^{\pi} xd\cos kx \\ &= -\frac{2x}{\pi k}\cos kx\Big|_0^{\pi} + \frac{2}{\pi k}\int_0^{\pi}\cos kxdx = -\frac{2}{k}\cos k\pi + \frac{2}{\pi k^2}\sin kx\Big|_0^{\pi} \\ &= (-1)^{k+1}\frac{2}{k} \quad (k \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

Niisiis, funktsiooni $f$ Fourier' rida on $2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}\sin kx$. Teoreemi 14.5 põhjal kehtib võrdus

$$x = 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}\sin kx \text{ iga } x \in (-\pi,\pi) \text{ korral.}$$

Punktis $x = \pi$ on rea summa $s(\pi) = \frac{g(\pi+)+g(\pi-)}{2} = \frac{1}{2}\left(\lim_{u\to\pi-} g(u) + \lim_{u\to\pi+} g(u)\right) = \frac{1}{2}\left(\lim_{u\to\pi-} u + \lim_{u\to\pi+}(-u)\right) = 0$, samuti veendutakse, et $s(-\pi) = 0$.

## 14.5 Fejeri teoreem

Osutub, et $2\pi$-perioodilise funktsiooni $f$ pidevus ei ole piisav tingimus selleks, et ta oleks esitatav oma Fourier' rea summana. Veelgi enam, saab näidata, et iga punkti $t \in [-\pi,\pi]$ puhul saab leida sellise pideva $2\pi$-perioodilise funktsiooni $f$, mille Fourier' rida selles punktis hajub (vt. näiteks G. Kangro, Matemaatiline analüüs. II, "Valgus", Tallinn, 1968, lk. 464 - 468). Seda üllatavam on järgmine Fejeri teoreem.

**Teoreem 14.7** ***(Fejeri teoreem).*** *Iga pideva $2\pi$-perioodilise funktsiooni $f$ Fourier' rea osasummade*

$$s_n(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

*aritmeetiliste keskmiste*

$$\sigma_n(x) := \frac{1}{n}\left(s_0(x) + s_1(x) + ... + s_{n-1}(x)\right) \quad (x \in (-\infty,\infty),\ n \in \mathbb{N}) \tag{14.11}$$

*jada* $(\sigma_n)$ *koondub piirväärtuseks* $f$ *ühtlaselt kogu arvteljel* $(-\infty,\infty)$.

Enne, kui asume seda teoreemi tõestama, leiame Dirichlet' tuuma (14.7) ja integraali (14.8) eeskujul (ja abil) vastavad avaldised aritmeetiliste keskmiste (14.11) jaoks. Seosest (14.8) saame

$$\begin{aligned}\sigma_n(x) &= \frac{1}{n\pi}\int_0^\pi \left(f(x+u) + f(x-u)\right)\sum_{k=0}^{n-1} D_k(u)\,du \\ &= \frac{1}{n\pi}\int_0^\pi \frac{f(x+u)+f(x-u)}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sin(2k+1)\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}du \\ &= \frac{1}{n\pi}\int_0^\pi \frac{f(x+u)+f(x-u)}{2}\left(\frac{\sin n\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\right)^2 du.\end{aligned} \tag{14.12}$$

Viimase võrduse põhjenduseks summeerime $k$ järgi võrdust $2\sin(2k+1)\frac{u}{2}\sin\frac{u}{2} = \cos ku - \cos(k+1)u$, saame

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sin(2k+1)\frac{u}{2} = \frac{\sin^2 n\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}$$

(kontrollida!)✠. Seejuures saame seosest (14.12) juhul $f(x) = 1$ $(x \in [0,\pi])$ valemi

$$\frac{1}{n\pi}\int_0^\pi \left(\frac{\sin n\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\right)^2 du = 1 \tag{14.13}$$

(kontrollida!)✠.

**Tõestus.** Lähtume valemist (14.13), korrutame selle mõlemat poolt arvuga $f(x)$ ja lahutame tulemuse võrdusest (14.12):

$$\begin{aligned}|\sigma_n(x) - f(x)| &= \left|\frac{1}{n\pi}\int_0^\pi \left(\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2} - f(x)\right)\left(\frac{\sin n\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\right)^2 du\right| \\ &\le \frac{1}{n\pi}\int_0^\delta \left|\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2} - f(x)\right|\left(\frac{\sin n\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\right)^2 du \\ &+ \frac{1}{n\pi}\int_\delta^\pi \left|\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2} - f(x)\right|\left(\frac{\sin n\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\right)^2 du\end{aligned} \tag{14.14}$$

(sobiva arvu $\delta \in (0,\pi)$ fikseerime hiljem!).

Olgu $\varepsilon > 0$ suvaline. Meie eesmärk on leida niisugune $N \in \mathbb{N}$, et

$$|\sigma_n(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ iga } n \ge N \text{ ja } x \in (-\infty,\infty) \text{ korral.}$$

Kuna $f : (-\infty,\infty) \to \mathbb{R}$ on pidev ja perioodiline, siis on ta tõkestatud, s.t. leidub $M > 0$ omadusega

$$|f(x)| \le M \text{ iga } x \in (-\infty,\infty) \text{ korral}$$

(selgitada!)✠. Teiseks on ta ühtlaselt pidev kogu arvteljel (põhjendada!)✠, mistõttu leidub niisugune $\delta > 0$, et $\delta \leq \pi$ ja

$$|x - x'| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Seega, kui $0 \leq u \leq \delta$, siis

$$\left|\frac{f(x+u) + f(x-u)}{2} - f(x)\right| \leq \frac{|f(x+u) - f(x)|}{2} + \frac{|f(x) - f(x-u)|}{2} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Arvestades seost (14.13), saame avaldise (14.14) esimese integraali jaoks hinnangu

$$\begin{aligned}\frac{1}{n\pi}\int_0^\delta \left|\frac{f(x+u) + f(x-u)}{2} - f(x)\right| \left(\frac{\sin n\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\right)^2 du &\leq \frac{\varepsilon}{2n\pi}\int_0^\delta \left(\frac{\sin n\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\right)^2 du \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2n\pi}\int_0^\pi \left(\frac{\sin n\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\right)^2 du = \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Teise integraali hindamiseks kasutame võrratust $\sin\frac{u}{2} \geq \frac{u}{\pi} \quad (0 \leq u \leq \pi)$ (kontrollida!)✠, mille abil saame hinnangu

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n\pi}\int_\delta^\pi \left|\frac{f(x+u) + f(x-u)}{2} - f(x)\right| \left(\frac{\sin n\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\right)^2 du \\ &\leq \frac{1}{n\pi}\int_\delta^\pi \frac{2M}{\frac{\delta^2}{\pi^2}} du \leq \frac{2M\pi}{n\delta^2}(\pi - \delta) \leq \frac{2M\pi^2}{n\delta^2}.\end{aligned}$$

Kui võtame $N := \left[\frac{4M\pi^2}{\varepsilon\delta^2}\right] + 1$, siis iga $n \geq N$ puhul

$$|\sigma_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M\pi^2}{n\delta^2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \text{ suvalise } x \in (-\infty, \infty) \text{ korral.}$$

Teoreem on tõestatud. ■

Teoreemist 14.7 järeldub vahetult klassikaline Weierstrassi teine lähendusteoreem.

**Teoreem 14.8** ***(Weierstrassi teine lähendusteoreem).*** *Kui lõigus $[-\pi, \pi]$ pidev funktsioon $f$ on omadusega $f(-\pi) = f(\pi)$, siis iga positiivse arvu $\varepsilon$ korral saab leida niisuguse trigonomeetrilise polünoomi $T$, et*

$$|f(x) - T(x)| < \varepsilon \quad \textit{iga } x \in [-\pi, \pi] \quad \textit{puhul.}$$

**Tõestus.** Isesisvalt!✠ ■

# 15 Fourier' integraal. Fourier' teisendus

## 15.1 Fourier' integraal

Me eeldame selles punktis, et vaadeldav funktsioon $f : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}$ on **absoluutselt integreeruv**, s.t.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx < \infty.$$

Kirjutame tema jaoks (esialgu puhtformaalselt) integraali

$$F(x) := \int_0^{\infty} [a(y)\cos xy + b(y)\sin xy]\, dy, \tag{15.1}$$

kus

$$a(y) := \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos yt dt, \quad b(y) := \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin yt dt. \tag{15.2}$$

Lihtne on näha, et integraal (15.1) vastab funktsiooni $f$ Fourier' reale, summeerimine on asendatud integreerimisega. Seejuures ei eelda me selle funktsiooni perioodilisust. Integraali (15.1) nimetatakse funktsiooni $f$ **Fourier' integraaliks.**

Asendame kordajad $a(y)$ ning $b(y)$ avaldistest (15.2) integraali (15.1):

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} [a(y)\cos xy + b(y)\sin xy]\, dy &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t)[\cos yt\cos xy + \sin yt \sin xy]\, dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos y(t-x)\, dt. \end{aligned}\tag{15.3}$$

Analoogiliselt Fourier' rea osasummadega vaatleme integraali

$$S(x,\eta) := \frac{1}{\pi}\int_0^{\eta} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos y(t-x)\, dt \quad (\eta > 0). \tag{15.4}$$

Kui eeldada, et integraal (15.1) eksisteerib, siis $S(x,\eta) \to F(x)$ protsessis $\eta \to \infty$, s.t.

$$F(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos y(t-x)\, dt \tag{15.5}$$

**Teoreem 15.1** *Olgu $f : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}$ selline absoluutselt integreeruv funktsioon, mis on igas lõigus $[a,b]$ tükiti pidev ja omab punktis $x \in (-\infty, \infty)$ lõplikud ühepoolsed tuletised $f'(x+)$ ja $f'(x-)$. Siis*

$$F(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

**Tõestus.** Tõestuseks peame veenduma, et $\lim_{\eta\to\infty} S(x,\eta) = \frac{f(x+)+f(x-)}{2}$. Pidades silmas võrratust $|f(t)\cos y(t-x)| \le |f(t)| \quad (t \in (-\infty,\infty),\ y \in [0,\infty))$, saame päratute parameetrist sõltuvate integraalide Weierstrassi koonduvustunnust (vt. lause 13.4) rakendades, et integraal $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos y(t-x)\,dt$ koondub ühtlaselt $y \in [0,\infty]$ suhtes. Seetõttu tohime avaldises (15.4) muuta integreerimise järjekorda (vrd. teoreem 13.6):

$$
\begin{aligned}
S(x,\eta) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left(\int_0^{\eta}\cos y(t-x)\,dy\right)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\frac{\sin\eta(t-x)}{t-x}dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x+u)\,\frac{\sin\eta u}{u}du \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0} f(x+u)\,\frac{\sin\eta u}{u}du + \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} f(x+u)\,\frac{\sin\eta u}{u}du \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} f(x-v)\,\frac{\sin\eta v}{v}dv + \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} f(x+u)\,\frac{\sin\eta u}{u}du \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} (f(x+u)+f(x-u))\,\frac{\sin\eta u}{u}du
\end{aligned}
$$

(kontrollida!)✠.

Olgu $\varepsilon > 0$ suvaline. Meie eesmärk on leida sellise arv $\eta_0 > 0$, et

$$|S(x,\eta) - F(x)| < \varepsilon, \text{ kui } \eta \geq \eta_0.$$

Teatavasti

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin\eta u}{u}du = \frac{1}{2} \quad (\eta > 0)$$

(vt. pt. 13, näide 2), seega

$$
\begin{aligned}
S(x,\eta) - \frac{f(x+)+f(x-)}{2} &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}(f(x+u)+f(x-u)-f(x+)-f(x-))\,\frac{\sin\eta u}{u}du \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{N}\frac{f(x+u)+f(x-u)-f(x+)-f(x-)}{u}\sin\eta u du \\
&+ \frac{1}{\pi}\int_N^{\infty} f(x+u)\,\frac{\sin\eta u}{u}du \\
&+ \frac{1}{\pi}\int_N^{\infty} f(x-u)\,\frac{\sin\eta u}{u}du - \frac{1}{\pi}\int_N^{\infty}(f(x+)+f(x-))\,\frac{\sin\eta u}{u}du \\
&=: I_N^1 + I_N^2 + I_N^3 + I_N^4,
\end{aligned}
$$

kus $N$ on mingi positiivne arv. Kuna

$$\left|f(x\pm u)\,\frac{\sin\eta u}{u}\right| \leq |f(x\pm u)| \qquad (u \geq 1)$$

ja integraal $\int_0^{\infty}|f(x\pm u)|\,du$ koondub (selgitada!)✠, siis ilmselt koonduvad ka integraalid $\int_1^{\infty} f(x+u)\,\frac{\sin\eta u}{u}du$ ja $\int_1^{\infty} f(x-u)\,\frac{\sin\eta u}{u}du$ (põhjendada!)✠. Seega saab valida $N$ nii suure, et $|I_N^2| < \frac{\varepsilon}{4}$ ja $|I_N^3| < \frac{\varepsilon}{4}$. Kuna integraal $\int_0^{\infty}\frac{\sin u}{u}du$ koondub ning $\int_N^{\infty}\frac{\sin\eta u}{u}du = \int_{\eta N}^{\infty}\frac{\sin u}{u}du$, siis on võimalik $N$ valida nii, et $|I_N^4| < \frac{\varepsilon}{4}$ iga $\eta \geq 1$ korral (selgitada!)✠.

Olgu $N > 0$ fikseeritud nii, et

$$\left|I_N^k\right| < \frac{\varepsilon}{4}\,(k = 2,3,4).$$

Kirjutame $I_N^1$ ümber kujul

$$I_N^1 = \frac{1}{\pi}\int_0^N F_1(u)\sin \eta u du + \frac{1}{\pi}\int_0^N F_2(u)\sin \eta u du,$$

kus

$$F_1(u) := \frac{f(x+u) - f(x+)}{u} \quad \text{ja} \quad F_2(u) := \frac{f(x-u) - f(x-)}{u}.$$

Näitame, et funktsioonid $F_1$ ja $F_2$ on tükiti pidevad lõigus $[0, N]$, see võimaldab meil Riemanni lemma abil valida $\eta_0 > 0$ nii, et $|I_N^1| < \frac{\varepsilon}{4}$ $(\eta \geq \eta_0)$. Kuna $f$ on igas lõigus $[a, b]$ tükiti pidev, siis poollõigus $(0, N]$ on funktsioonid $F_1$ ja $F_2$ on tükiti pidevad. Niisiis on vaja veenduda, et eksisteerivad lõplikud ühepoolsed piirväärtused $\lim_{u\to 0+} F_1(u)$ ja $\lim_{u\to 0+} F_2(u)$. Need piirväärtused on tõepoolest olemas:

$$\lim_{u\to 0+} F_1(u) = \lim_{u\to 0+} \frac{f(x+u) - f(x+)}{u} = f'(x+),$$
$$\lim_{u\to 0+} F_2(u) = \lim_{u\to 0-} \frac{f(x-u) - f(x-)}{-u} = -f'(x-).$$

Valime nüüd $\eta_0 > 0$ nii, et tingimusel $\eta \geq \eta_0$ kehtib võrratus

$$\frac{1}{\pi}\left|\int_0^N F_k(u)\sin \eta u du\right| < \frac{\varepsilon}{8} \quad (k = 1, 2),$$

siis $|I_N^1| < \frac{\varepsilon}{4}$. Kokkuvõttes kehtib implikatsioon

$$\eta \geq \eta_0 \Rightarrow \left|S(x, \eta) - \frac{f(x+) + f(x-)}{2}\right| < \varepsilon,$$

s.t. $F(x) = \lim_{\eta\to\infty} S(x, \eta) = \frac{f(x+)+f(x-)}{2}$. Teoreem on tõestatud. ■

Märgime, et *paarisfunktsiooni* $f$ korral

$$a(y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(t)\cos ytdt, \quad b(y) = 0,$$

*paaritu funktsiooni* puhul

$$a(y) = 0, \quad b(y) := \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(t)\sin ytdt.$$

## 15.2 Fourier' teisendus

Me alustame järgmise **olulise tähelepanekuga**. Rahuldagu funktsioon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ teoreemi 15.1 tingimusi, s.t.
1) $f$ on absoluutselt integreeruv,
2) $f$ on igas lõigus $[a, b]$ tükiti pidev ning
3) $f$ omab igas punktis $x \in \mathbb{R}$ lõplikud ühepoolsed tuletised $f'(x+)$ ja $f'(x-)$, kusjuures $f(x) = \frac{f(x+)+f(x-)}{2}$.
Siis teoreemi 15.1 kohaselt (vrd. (15.5))

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dy \int_{-\infty}^\infty f(t) \cos y(x-t)\, dt \quad (x \in (-\infty, \infty)).$$

Kasutades valemit $\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}$, saame

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\eta\to\infty} \int_0^\eta dy \int_{-\infty}^\infty f(t) \left(e^{iy(x-t)} + e^{-iy(x-t)}\right) dt = \frac{1}{2\pi} \lim_{\eta\to\infty} \int_{-\eta}^\eta dy \int_{-\infty}^\infty f(t)\, e^{iy(x-t)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\eta\to\infty} \int_{-\eta}^\eta e^{iyx} dy \int_{-\infty}^\infty f(t)\, e^{-iyt} dt =: \mathbf{v.p.} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{iyx} dy \int_{-\infty}^\infty f(t)\, e^{-iyt} dt. \qquad (15.6) \end{aligned}$$

Siin ja edaspidi tähistame

$$\mathbf{v.p.} \int_{-\infty}^\infty := \lim_{\eta\to\infty} \int_{-\eta}^\eta,$$

seda piirväärtust nimetatakse *Cauchy peaväärtuseks* ning see erineb üldjuhul päratust integraalist $\int_{-\infty}^\infty$. Tõepoolest, kui eksisteerib päratu integraal $\int_{-\infty}^\infty \varphi(t)\, dt$, siis eksisteerib ka $\mathbf{v.p.} \int_{-\infty}^\infty \varphi(t)\, dt$ (selgitada!)✠, kuid vastupidine väide üldjuhul ei kehti. Näiteks eksisteerib $\mathbf{v.p.} \int_{-\infty}^\infty t dt$, kuid vastav päratu integraal hajub (selgitada!)✠.

Kui tähistada

$$\widehat{f}(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty f(t)\, e^{-iyt} dt,$$

siis seos (15.6) saab kuju

$$f(x) = \mathbf{v.p.} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty \widehat{f}(y)\, e^{iyx} dy. \qquad (15.7)$$

See valem võimaldab taastada funktsiooni $f$, kui on teada $\widehat{f}$.

Lähtume järgmisest üldisest definitsioonist.

**Definitsioon.** Kujutust $F$, mis seab funktsioonile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vastavusse seosega

$$\widehat{f}(y) := \mathbf{v.p.} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty f(t)\, e^{-iyt} dt \quad (y \in \mathbb{R}) \qquad (15.8)$$

määratud funktsiooni $\widehat{f}$, nimetatakse *Fourier' teisenduseks.* Seosega

$$g(y) := \mathbf{v.p.} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty f(t)\, e^{iyt} dt \quad (y \in \mathbb{R}) \qquad (15.9)$$

määratud funktsiooni $g$ nimetatakse funktsiooni $f$ *Fourier' pöördteisendiks*, vastavat kujutust $F^{-1}$ aga *Fourier' pöördteisenduseks.*

Definitsiooni kohaselt on Fourier' teisendus ja pöördteisendus määratud selliste funktsioonide hulgal, mille korral vastavalt integraalid (15.8) ja (15.9) (Cauchy peaväärtuse mõttes). Järgnevas vaatleme me absoluutselt integreeruvate funktsioonide Fourier' teisendust. Arutelu lihtsustamiseks toome sisse mõned uued tähistused. Tähistame tähega $\Omega$ kõigi funktsioonide hulka, mis tegelikult on vektorruum, kui liitmine ja skalaariga korrutamine defineerida punktiviisi:

$$(f_1 + f_2)(x) := f_1(x) + f_2(x), \quad (\lambda f)(x) := \lambda f(x) \quad (x \in \mathbb{R}),$$

kus $\lambda$ on suvaline reaalarv. Edasi tähistame

$$L^1 := \left\{ f \in \Omega \mid \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx < \infty \right\},$$

see on kõigi absoluutselt integreeruvate funktsioonide alamhulk vektorruumis $\Omega$. Lihtne on veenduda, et kui $f_1, f_2 \in L^1$, siis $f_1 + f_2, \lambda f_1 \in L^1$ (kontrollida!)✠, see tähendab, et $L^1$ on vektoralamruum.

Paneme tähele, et kui $f \in L^1$, siis $\widehat{f}(y)$ eksisteerib iga $y \in \mathbb{R}$ korral sest

$$\left| f(t)\, e^{-iyt} \right| = |f(t)| \left| e^{-iyt} \right| = |f(t)| \quad (t, y \in \mathbb{R})$$

(peame silmas, et $|e^{ia}| = 1$ iga $a \in \mathbb{R}$ korral), mistõttu funktsioon $t \mapsto f(t)\, e^{-iyt}$ on absoluutselt integreeruv. Seega on määratud kujutus $F : L^1 \to \Omega$. See kujutus on lineaarne: suvaliste $f_1, f_2 \in L^1$ ja reaalarvude $\lambda$ ning $\mu$ korral kehtib võrdus $\lambda \widehat{f_1 + \mu f_2} = \lambda \widehat{f_1} + \mu \widehat{f_2}$, mis tähendab, et $F(\lambda f_1 + \mu f_2) = \lambda F(f_1) + \mu F(f_2)$.

**Märkus (oluline!).** Kui lisaks absoluutse integreeruvuse tingimusele rahuldab $f$ ka muid teoreemi 15.1 eeldusi, s.t. käesoleva punkti alguses sõnastatud tingimusi 2) ja 3), siis selliste funktsioonide puhul on määratud pöördteisendus $F^{-1}$ seosega (15.7).

Meie eesmärk on järgnevas uurida funktsioonide $\widehat{f}$ omadusi juhul $f \in L^1$. Täpsemalt, meie **põhieesmärk** on veenduda, et funktsioon $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on iga $f \in L^1$ korral pidev. Kõigepealt paneme tähele, et $\widehat{f}$ on tõkestatud:

$$\left| \widehat{f}(y) \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left| f(t)\, e^{-iyt} \right| dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt =: M \;\; (y \in \mathbb{R}). \tag{15.10}$$

Viimase võrratuse abil on lihtne tõestada järgmine väide.

**Lause 15.2** *Kui $f$ ja $f_n$ $(n \in \mathbb{N})$ on sellised absoluutselt integreeruvad funktsioonid, et*

$$\lim_{n} \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(t) - f(t)|\, dt = 0, \tag{15.11}$$

*siis $\widehat{f_n} \to \widehat{f}$ ühtlaselt kogu arvsirgel $\mathbb{R}$.*

**Tõestus.** Olgu $\varepsilon > 0$ suvaline, peame näitama, et leidub niisugune $N \in \mathbb{N}$, et

$$n \geq N \Rightarrow \left| \widehat{f_n}(y) - \widehat{f}(y) \right| < \varepsilon \text{ iga } y \in \mathbb{R} \text{ korral.}$$

Eelduse (15.11) põhjal saab fikseerida $N \in \mathbb{N}$ omadusega

$$n \geq N \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(t) - f(t)|\, dt < \varepsilon.$$

Seosest (15.10) tuleneb kõigi $n \geq N$ puhul

$$\left|\widehat{f_n}(y) - \widehat{f}(y)\right| = \left|\left(\widehat{f_n} - \widehat{f}\right)(y)\right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(t) - f(t)|\, dt < \varepsilon \ \ (y \in \mathbb{R}).$$

■

Nüüd tõestame käesoleva punkti põhiteoreemi.

**Teoreem 15.3** *Kui funktsioon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on absoluutselt integreeruv, siis $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on pidev ja*

$$\lim_{y \to \pm\infty} \widehat{f}(y) = 0. \tag{15.12}$$

**Tõestus.** Tõestuseks kasutame (ilma seda tõestamata) järgmist väidet: *iga absoluutselt integreeruva funktsiooni $f$ puhul saab leida finiitsete treppfunktsioonide jada $(\varphi_n)$ omadusega*

$$\lim_n \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_n(t) - f(t)|\, dt = 0. \tag{15.13}$$

Finiitseks treppfunktsiooniks nimetame funktsiooni $\varphi : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}$, mille puhul
1) väärtuste hulk $\{\varphi(x) \mid x \in (-\infty, \infty)\}$ on lõplik ja
2) kandja $\operatorname{supp}\varphi := \{x \in \mathbb{R} \mid \varphi(x) \neq 0\}$ on tõkestatud.
Ilmselt on finiitsed treppfunktsioonid absoluutselt integreeruvad (selgitada!)✠.

Olgu $f \in L^1$ ja olgu $(\varphi_n)$ selline finiitsete treppfunktsioonide jada, mis rahuldab tingimust (15.13). Lause 15.2 kohaselt $\widehat{\varphi_n} \to \widehat{f}$ ühtlaselt hulgas $\mathbb{R}$. Näitame järgnevalt, et funktsioonid $\widehat{\varphi_n}$ on pidevad, sellest järeldub siis ka funktsiooni $\widehat{f}$ pidevus (selgitada!)✠. Teisi sõnu, me taandame funktsiooni $\widehat{f}$ pidevuse probleemi suvalise $f \in L^1$ korral funktsioonide $\widehat{\varphi}$ pidevusele, kus $\varphi$ on suvaline finiitne treppfunktsioon.

Kui $\varphi$ on finiitne treppfunktsioon, siis leiduvad poollõigud $[a_1, b_1), ..., [a_n, b_n)$, kus

$$a_1 < b_1 = a_2 < b_2 = a_3 < ... < b_{n-1} = a_m < b_n,$$

ja arvud $\lambda_1, ..., \lambda_n$ nii, et
$(a)$ $\varphi(x) = \lambda_k$ iga $x \in [a_k, b_k)$ korral ja
$(b)$ $\varphi(x) = 0$,kui $x < a_1$ või $x \geq b_n$.
(Märgime, et vajaduse korral võime korrigeerida funktsiooni $\varphi$ väärtusi vahemike $(a_k, b_k)$ otspunktides, sellest tingimus (15.13) ei muutu.) Olgu $\chi_k$ poollõigu $[a_k, b_k)$ karakteristlik funktsioon, s.t. $\chi_k(x) := 1$, kui $x \in [a_k, b_k)$, ja $\chi_k(x) := 0$, kui $x \notin [a_k, b_k)$. Siis

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \lambda_k \chi_k(x) \quad (x \in \mathbb{R}),$$

kus $\chi_0$ ja $\chi_{n+1}$ on vastavalt hulga $(-\infty, a_1)$ ja $[b_n, \infty)$ karakteristlik funktsioon ning $\lambda_0 := \lambda_{n+1} := 0$. Niisiis, meie väite tõestamiseks piisab näidata, et $\widehat{\chi}$ on pidev, kui $\chi$ on mingi poollõigu $[a, b)$ karakteristlik funktsioon.

Olgu $y \neq 0$, siis

$$\widehat{\chi}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-iyt} dt = -\frac{1}{iy\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-iyt} d(-iyt) = \frac{i}{y\sqrt{2\pi}} e^{-iyt}\Big|_a^b = \frac{i\left(e^{-iby} - e^{-iay}\right)}{y\sqrt{2\pi}},$$

juhul $y = 0$ kehtib

$$\widehat{\chi}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b dt = \frac{b-a}{\sqrt{2\pi}}.$$

Kokkuvõttes,

$$\widehat{\chi}(y) = \begin{cases} \frac{i\left(e^{-iby} - e^{-iay}\right)}{y\sqrt{2\pi}}, & \text{kui } y \neq 0, \\ \frac{b-a}{\sqrt{2\pi}}, & \text{kui } y = 0. \end{cases}$$

Ilmselt on funktsioon $\widehat{\chi}$ igas punktis $y \neq 0$ pidev, jääb kontrollida pidevust punktis $y = 0$. Tõepoolest, kasutades eksponentfunktsiooni $e^z$ puhul Taylori valemit (juhul $n = 1$), saame valemist $e^z = 1 + z + o(z)$ arvutada

$$\begin{aligned} \lim_{y \to 0} \frac{i\left(e^{-iby} - e^{-iay}\right)}{y\sqrt{2\pi}} &= \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \lim_{y \to 0} \frac{1}{y} \left[(1 - iby + o(y)) - (1 - iay + o(y))\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{y \to 0} \left[(b-a) + \frac{o(y)}{y}\right] = \frac{b-a}{\sqrt{2\pi}}. \end{aligned}$$

Niisiis on $\widehat{\chi}$ ka punktis $y = 0$ pidev. Sellega on tõestatud, et $\widehat{f} : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}$ on pidev funktsioon, kui $f : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}$ on absoluutselt integreeruv.

Võrduse (15.12) kontrollimiseks kasutame Riemanni lemmat (vrd. lemma 14.4), täpsemalt selle üldisemat versiooni lõpmatute rajadega integraalide puhul: *kui $f \in L^1$, siis*

$$\lim_{\lambda \to \pm\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \lambda t dt = \lim_{\lambda \to \pm\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \lambda y t dt = 0$$

(selle tõestuse jätame vahele). Seega, protsessis $y \to 0$ saame

$$\widehat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iyt} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos yt dt - i \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin yt dt \right) \to 0.$$

Teoreem on tõestatud. ■

Märgime veel kahte **diferentseeruvusega** seotud Fourier' teisenduse omadust.

**Lause 15.4** *Kui $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on selline absoluutselt integreeruv funktsioon, et tal on absoluutselt integreeruv tuletis $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (s.t. $f, f' \in L^1$), siis $F(f') = (iy) F(f)$, s.t.*

$$\widehat{f'}(y) = iy\widehat{f}(y) \quad (y \in \mathbb{R}).$$

**Tõestus.** Lähtume tuntud seosest

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt \tag{15.14}$$

(selgitada!)✠. Kuna integraal $\int_{-\infty}^{\infty} |f'(t)|\, dt$ koondub, siis koondub ka $\int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\, dt$, järelikult eksisteerivad piirväärtused $\lim_{x\to\pm\infty} \int_0^x f'(t)\, dt$ ning seose (15.14) tõttu ka piirväärtused $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$, kusjuures integraali $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt$ koonduvusest saame $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ (selgitada!)✠. Ositi integreerides saamegi

$$\widehat{f'}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\, e^{-iyt} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, f(t)\, e^{-iyt}\Big|_{-\infty}^{\infty}$$

$$+\frac{iy}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-iyt} dt = iy\widehat{f}(y) \quad (y \in \mathbb{R}).$$

Lause on tõestatud. ■

**Lause 15.5** *Olgu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pidev funktsioon. Kui $f$ ise ja ka funktsioon $tf$ (täpsemalt, seosega $t \mapsto tf(t)$ määratud funktsioon) on absoluutselt integreeruvad, siis $\widehat{f}$ on diferentseeruv ja*

$$i\frac{d}{dy}\widehat{f} = \widehat{tf}.$$

**Tõestus.** Diferentseerime (esialgu formaalselt) parameetri $y$ järgi sellest parameetrist sõltuvat integraali $\widehat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-iyt} dt$, saame $\frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} tf(t)\, e^{-iyt} dt$. Kuna

$$\left|tf(t)\, e^{-iyt}\right| = |tf(t)| \quad (t, y \in \mathbb{R}) \text{ ja } \int_{-\infty}^{\infty} |tf(t)|\, dt < \infty,$$

siis Weierstrassi koonduvustunnuse (vt. lause 13.4) põhjal integraal $\int_{-\infty}^{\infty} tf(t)\, e^{-iyt} dt$ koondub ühtlaselt $y \in \mathbb{R}$ suhtes. Kasutame teoreemi 13.7, see lubab meil kirjutada

$$\widehat{f}\,'(y) = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} tf(t)\, e^{-iyt} dt \quad (y \in \mathbb{R})$$

ehk $i\frac{d}{dy}\widehat{f} = \widehat{tf}$. Lause on tõestatud. ■