MATEMAATILINE ANALÜÜS III

MTPM.06.032 Loengukursus
Tartu Ülikooli
matemaatika-informaatikateaduskonna
üliõpilastele
2007/2008. õppeaasta

Toivo Leiger

Sisukord

1 Reaalarvud

Reaalarvude teooria on vundament, millele toetub kogu matemaatiline analüüs. Ratsionaalarvudest piisab küll täielikult meie igapäevasteks mõõtmisteks ja arvutusteks, kuid neile ei ole võimalik üles ehitada analüüsi kui sisukat matemaatilist teooriat. Põhjuseks on ratsionaalarvude hulga "lünklikkus". Nimelt **leidub selliseid sirglõike, mille pikkust ei saa väljendada ratsionaalarvuga.** Kui ruudu külje pikkus on 1, siis tema diagonaali pikkus on $\sqrt{2}$, seejuures kehtib järgmine väide.

Lause 1.1 $\sqrt{2}$ *ei ole ratsionaalarv.*

Tõestus. Oletame vastuväiteliselt, et $q = \frac{m}{n}$ on ratsionaalarv omadusega $q^2 = 2$. Eeldame, et $\frac{m}{n}$ on taandatud murd, s.t. täisarvudel m ja n ei ole ühiseid tegureid. Kuna $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$, siis $m^2 = 2n^2$, järelikult on m^2 paarisarv. Kuna paaritu arvu ruut on alati paaritu arv (veenduda!)✠, siis peab ka m olema paarisarv, niisiis kehtib seos $m = 2i$ mingi täisarvu i korral. Esialgne võrdus saab kuju $4i^2 = 2n^2$ ehk $n^2 = 2i^2$, mis ütleb, et ka n on paarisarv. Tähendab, nii m kui n on paarisarvud, nad mõlemad sisaldavad tegurit 2, kuid see on vastuolus meie eeldusega. Väide on tõestatud. ■

Lauses 1.1 toodud fakt oli teada Vana-Kreeka teadlastel, kuid alles 19. sajandil jõudsid matemaatikud korrektselt defineeritud arvusüsteemideni, mis sisaldavad ratsionaalarvude hulga $\mathbb{Q}$, kuid millel ei ole viimasele omaseid "lünki". Selliseid *reaalarvude erinevaid esitusi* konstrueeriti mitmeid, kuid tegelikult osutusid nad ühe matemaatilise struktuuri – täieliku järjestatud korpuse – konkreetseteks esitusteks. Seetõttu allpool **me defineerime kõigi reaalarvude hulga $\mathbb{R}$ kui täieliku järjestatud korpuse.**

1.1 Korpuse aksioomid

Definitsioon. *Korpuseks* nimetatakse hulka F, milles on defineeritud kaks binaarset tehet, liitmine

$$\mathcal{A} : F \times F \to F, \quad (a, b) \mapsto a + b$$

ja korrutamine

$$\mathcal{M} : F \times F \to F, \quad (a, b) \mapsto ab \ (= a \cdot b),$$

nii et on täidetud järgmised tingimused (*korpuse aksioomid*):
(A1) $a + b = b + a$ kõikide a, b korral *(liitmise kommutatiivsus)*,
(A2) $(a + b) + c = a + (b + c)$ kõikide a, b, c korral *(liitmise assotsiatiivsus)*,
(A3) eksisteerib selline element 0, et $b + 0 = b$ iga b puhul *(nullelemendi olemasolu)*,
(A4) iga elemendi b puhul leidub element $-b$ omadusega $b + (-b) = 0$ *(vastandelemendi olemasolu)*,
(M1) $ab = ba$ kõikide a, b korral *(korrutamise kommutatiivsus)*,
(M2) $(ab)\,c = a\,(bc)$ kõikide a, b, c korral *(korrutamise assotsiatiivsus)*,
(M3) eksisteerib selline element 1, et $b \cdot 1 = b$ iga b puhul *(ühikelemendi olemasolu)*,
(M4) iga elemendi $b \neq 0$ puhul leidub element b^{-1} omadusega $b \cdot b^{-1} = 1$ *(pöördelemendi olemasolu)*,
(D) $(a + b)\,c = ac + bc$ kõikide a, b, c korral *(distributiivsus)*.

Aksioomidest **(A3)** ja **(M3)** tuleneb, et **nullelement 0 ja ühikelement 1 on korpuses üheselt määratud** (kontrollida!)✠. Analoogiliselt on aksioomide **(A4)** ja **(M4)** põhjal suvaliste $a \in F$ ja $b \in F \diagdown \{0\}$ korral **üheselt määratud ka vastandelement** $-a$ **ja pöördelement** b^{-1} (veenduda!)✠, seejuures

$$-(-a) = a \text{ ning } \left(b^{-1}\right)^{-1} = b \tag{1.1}$$

(kontrollida!)✠. Vastandelemendi abil defineeritakse liitmise pöördtehe *lahutamine:*

$$a - b := a + (-b)\,.$$

Vahetu kontroll näitab, et

$$-(a+b) = -a - b \text{ kõikide } a, b \in F \text{ korral}$$

(veenduda!)✠.

Jagamine, korrutamise pöördtehe, defineeritakse analoogiliselt:

$$a : b := \frac{a}{b} := ab^{-1}\textbf{, eeldusel, et } b \neq 0.$$

Seejuures (kontrollida!)✠

$$(ab)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1} \text{ kõikide } a, b \in F \diagdown \{0\} \text{ korral.}$$

Korpuse aksioomidest ja eelnevatest märkustest tulenevad järgmised arvutuseeskirjad.

Lause 1.2 (a) *$0a = 0$ iga $a \in F$ korral.*

(b) *Kui $ab = 0$, siis vähemalt üks elementidest $a \in F$ ja $b \in F$ on võrdne nullelemendiga (s.t. $F \diagdown \{0\}$ **ei sisalda nullitegureid**).*

(c) *$(-a)\,b = -(ab)$ kõikide $a \in F$ ja $b \in F$ puhul. Eriti kehtib $(-1)\,b = -b$ iga $b \in F$ korral.*

(d) *$(-a)(-b) = ab$ kõikide $a \in F$ ja $b \in F$ puhul.*

Tõestus. (a) Olgu $a \in F$ suvaline. Aksioomist **(D)** saame $0a + a = 0a + 1a = (0+1)\,a = 1a = a$. Seega rahuldab element $0a$ nullelemendi tingimust ja kuna nullelement on korpuses üheselt määratud, siis $0a = 0$ suvalise a puhul.

(b) Eeldame, et $a \neq 0$, siis eksisteerib a^{-1}. Korrutades sellega võrduse $ab = 0$ mõlemat poolt, saame väite (a) ning aksioomi **(M2)** põhjal

$$0 = a^{-1}0 = a^{-1}(ab) = \left(a^{-1}a\right)b = b.$$

(c) Olgu $a, b \in F$ suvalised. Väite (a) ja aksioomi **(D)** kohaselt $0 = 0b = (a + (-a))\,b = ab + (-a)\,b$. Kuna iga elemendi vastandelement on üheselt määratud, siis kehtibki võrdus $(-a)\,b = -(ab)$. Võttes siin $a := 1$, saame väite teise osa.

(d) Väite (c) ning aksioomide **(M2)** ja **(M1)** põhjal $(-a)(-b) = (-a)((-1)\,b) = ((-1)(-a))\,b = ab$. ■

1.2 Järjestatud korpused

Definitsioon. Korpust F nimetatakse *järjestatuks*, kui tema elementide vahel on defineeritud järjestusseos $<$, mis rahuldab järgmisi tingimusi:
(O1) iga kahe elemendi a ja b korral kehtib parajasti üks tingimustest $a = b$, $a < b$, $b < a$ *(trihhotoomia reegel)*,
(O2) kui $a < b$ ja $b < c$, siis $a < c$ *(transitiivsus)*,
(O3) kui $a < b$, siis $a + c < b + c$ *(liitmise monotoonsus)*,
(O4) kui $a < b$ ja $c > 0$, siis $ac < bc$ *(korrutamise monotoonsus)*.

Märgime, et kirjutis $a > b$ **on tingimuse** $b < a$ **teine kirjutusviis**.

Positiivsed ja negatiivsed elemendid. Me nimetame elemente $a > 0$ *positiivseteks* ja elemente $a < 0$ *negatiivseteks.* Tähistame $a \leq b$, kui kehtib üks tingimustest $a < b$ ja $a = b$. Elemente $a \geq 0$ nimetame *mittenegatiivseteks* ja elemente $a \leq 0$ *mittepositiivseteks.*

Suurim ja vähim element. Kui hulgas $X \subset F$ leidub selline element a, et $x \leq a$ iga $x \in X$ korral, siis ütleme, et a on hulga X *suurim* element ja tähistame $\max X$ ehk $\max\{x \mid x \in X\}$, samamoodi defineeritakse *vähim* element $\min X$ ehk $\min\{x \mid x \in X\}$. Induktsioonimeetodiga saab tõestada (iseseisvalt!)✠, et igas lõplikus hulgas on olemas suurim ja vähim element.

Paneme tähele, et

$$a < b \Leftrightarrow b - a > 0 \Leftrightarrow -b < -a, \tag{1.2}$$
$$a \leq b \Leftrightarrow b - a \geq 0 \Leftrightarrow -b \leq -a$$

(kontrollida!)✠ ning

$$\text{kui } a < b \text{ ja } c < 0, \text{ siis } ac > bc \tag{1.3}$$

(veenduda!)✠. Märgime veel, et

$$a^2 := aa > 0 \text{ iga } a \neq 0 \text{ puhul.} \tag{1.4}$$

Tõepoolest, kuna $a \neq 0$, siis aksioomi **(O1)** kohaselt kas $a > 0$ või $a < 0$. Esimesel juhul saame võrratuse $a^2 > 0$ aksioomist **(O4)**, teisel juhul väitest (1.3). **NB! Erijuhul** $a = 1$ **saame olulise võrratuse** $0 < 1$.

Aksioomist **(O3)** tuleneb lihtsalt järgmine oluline fakt:

$$\text{kui } a < c \text{ ja } b < d, \quad \text{siis} \quad a + b < c + d \tag{1.5}$$

(veenduda!)✠. Osutub, et

$$a^{-1} > 0, \text{ kui } a > 0, \text{ ning } a^{-1} < 0, \text{ kui } a < 0 \tag{1.6}$$

(kontrollida!)✠. Seetõttu eeldusel $0 < a < b$ kehtib $0 < \frac{a}{b} < 1$, millest aksioomi **(O4)** rakendades saame $0 < b^{-1} < a^{-1}$. Niisiis,

$$0 < a < b \Rightarrow \; 0 < b^{-1} < a^{-1}.$$

Lause 1.3 *Olgu a ja b järjestatud korpuse F elemendid.*
(*a*) *Kui $ab > 0$, siis kas (i) $a > 0$ ja $b > 0$ või (ii) $a < 0$ ja $b < 0$.*
(*b*) *Kui $ab < 0$, siis kas (i) $a > 0$ ja $b < 0$ või (ii) $a < 0$ ja $b < 0$.*

Tõestus. (*a*) Olgu $ab > 0$, siis lause 1.2(b) kohaselt $a \neq 0$ ja $b \neq 0$. Seega on elemendi a puhul kaks võimalust: kas $a > 0$ või $a < 0$. Kui $a > 0$, siis $a^{-1} > 0$ (vrd. (1.6)), millest saame $b = 1 \cdot b = \left(\left(a^{-1}\right) a\right) b = \left(a^{-1}\right)(ab) > 0$. Kui $a < 0$, siis saame sama aruteluga $b < 0$.
Väide (*b*) tõestatakse analoogiliselt (tõestada!✠). ■

1.3 Naturaal-, täis- ja ratsionaalarvud

Me veendume järgnevas, et **iga järjestatud korpus F sisaldab kõigi naturaalarvude hulga** $\mathbb{N}$, seega ka kõik täis- ja ratsionaalarvud. Naturaalarvude defineerimisel lähtume ühikelemendist $1 \in F$. Idee on järgmine. Ütleme, et 1 on naturaalarv ja määrame ülejäänud naturaalarvud seostega $2 := 1 + 1$, $3 := 2 + 1$, $4 := 3 + 1$ jne.

Naturaalarvude hulga **korrektseks defineerimiseks** vajame me induktiivse alamhulga mõistet.

Definitsioon. Järjestatud korpuse F alamhulka M nimetatakse *induktiivseks*, kui ta rahuldab tingimusi
(*i*) $1 \in M$ ja
(*ii*) kui $a \in M$, siis $a + 1 \in M$.

Paneme tähele, et induktiivseid alamhulki järjestatud korpuses F tõepoolest leidub, näiteks F ise, aga ka $F^+ := \{a \mid a \geq 0\}$ (kõigi mittenegatiivsete elementide alamhulk) on induktiivne.

Definitsioon. Tähistame tähega $\mathbb{N}$ kõikide induktiivsete hulkade ühisosa, s.t.

$$\mathbb{N} := \cap \{M \subset F \mid M \text{ on induktiivne}\},$$

selle hulga elemente nimetame *naturaalarvudeks* (korpuses F). Tähistame $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Definitsioonist tuleneb vahetult, et $\mathbb{N}$ on induktiivne hulk (selgitada!)✠, sealjuures vähim, sest ta sisaldub igas teises induktiivses hulgas.

Teoreem 1.4 ***(matemaatilise induktsiooni printsiip).*** *Kui hulga $\mathbb{N}$ alamhulk A rahuldab tingimusi*
(*i*) $1 \in A$ *ja*
(*ii*) *kui $a \in A$, siis $a + 1 \in A$,*
siis $A = \mathbb{N}$.

Tõestus. Ühelt poolt $A \subset \mathbb{N}$ teoreemi eelduse põhjal. Teisalt, kuna A rahuldab induktiivse hulga definitsiooni tingimusi, siis $\mathbb{N} \subset A$. ■

Märkus 1. Teoreem 1.4 on aluseks kogu matemaatikas olulise tähtsusega **matemaatilise induktsiooni tõestusmeetodile.** Kui on vaja tõestada, et mingi väide $P(n)$ kehtib iga naturaalarvu n korral, siis piisab näidata, et
(*i*) $P(1)$ kehtib ja
(*ii*) kui kehtib $P(n-1)$, siis kehtib ka $P(n)$.

Tõepoolest, sel juhul hulk $A := \{n \in \mathbb{N} \mid P(n) \text{ kehtib}\}$ on induktiivne ning teoreemi 1.4 kohaselt $A = \mathbb{N}$.

Tulles tagasi naturaalarvude omaduste kirjeldamise juurde, tõestame kõigepealt järgmise lihtsa lemma.

Lemma 1.5 *Kui $r \in \mathbb{N}$ ja $r \neq 1$, siis $r - 1 \in \mathbb{N}$.*

Tõestus. Veendume, et kui tehtud eeldustel kehtiks $r - 1 \notin \mathbb{N}$, siis hulk $A := \mathbb{N} \diagdown \{r\}$ rahuldab teoreemi 1.4 tingimusi (i) ja (ii), mistõttu saame vastuolu võrduse $\mathbb{N} \diagdown \{r\} = \mathbb{N}$ näol.

Kuna $1 \neq r$, siis $1 \in A$, seega induktiivse hulga definitsiooni tingimus (i) on täidetud. Näitame, et ka (ii) on täidetud. Olgu $n \in A$, siis $n \in \mathbb{N}$, järelikult $n + 1 \in \mathbb{N}$, sest $\mathbb{N}$ on induktiivne. Seejuures ning $n + 1 \neq r$ (selgitada!)✠, s.t. $n + 1 \in A$. ■

Lemma 1.5 abil tõestame järgmise väite.

Omadus 1.6 *Naturaalarvude n ja $n + 1$ vahel ei leidu naturaalarve.*

Tõestus. Tõestame selle väite matemaatilise induktsiooni abil. Kõigepealt märgime, et hulk $\{1\} \cup \{a \in F \mid a \geq 2\}$ on induktiivne (veenduda!)✠, seega $\mathbb{N} \cap \{x \in F \mid 1 < x < 2\} = \varnothing$. Teisi sõnu, meie väide kehtib juhul $n = 1$. Oletame, et ta kehtib juhul n, s.t. naturaalarvude n ja $n + 1$ vahel ei ole naturaalarve, ja näitame, et siis ükski element $x \in F$, mis rahuldab tingimust $n+1 < x < n+2$, ei ole naturaalarv. Tõepoolest, kui $x \in \mathbb{N}$, siis $n < x-1 < n+1$ ja lemma 1.5 kohaselt $x - 1 \in \mathbb{N}$, mis on vastuolus induktsiooni eeldusega. ■

Omadus 1.7 *Igas mittetühjas naturaalarvude hulgas on vähim element.*

Tõestus. Näitame induktsioonimeetodil, et väide
$P(n)$: *iga alamhulk $M \subset \mathbb{N}$, mis sisaldab arvu n, omab vähima elemendi*
kehtib iga $n \in \mathbb{N}$ korral. Väide $P(1)$ on õige, sest arv 1 on hulga $\mathbb{N}$ vähim element. Eeldame, et kõik arvu n sisaldavad naturaalarvude hulgad omavad vähimat elementi, ja veendume, et siis kehtib $P(n+1)$. Olgu $M \subset \mathbb{N}$ arvu $n + 1$ sisaldav hulk. Kui ka $n \in M$, siis on väide tõestatud. Kui $n \notin M$, siis moodustame hulga $N := \{n\} \cup M$, olgu n_0 hulga N vähim element. Juhul $n_0 \in M$ on väide tõestatud (selgitada!)✠. Kui $n_0 \notin M$, siis $n_0 = n$ ja $m > n$ iga $m \in M$ korral. Pidades silmas omadust 1.6, saame $m \geq n + 1$ iga $m \in M$ korral, s.t. $n + 1$ on hulga M vähim element. ■

Omadus 1.8 *Kahe naturaalarvu summa ja korrutis on naturaalarvud.*

Tõestus. Lihtne on näha, et iga $m \in \mathbb{N}$ puhul on hulk $\{n \in \mathbb{N} \mid m + n \in \mathbb{N}\}$ induktiivne, järelikult langeb ta hulgaga $\mathbb{N}$ kokku. Seega $m + n \in \mathbb{N}$ suvaliste $m \in \mathbb{N}$ ja $n \in \mathbb{N}$ korral. Korrutise jaoks on tõestus analoogiline. ■

Kokkuvõtteks. Me defineerisime hulga $\mathbb{N}$ kui järjestatud korpuse F kõigi induktiivsete alamhulkade ühisosa. Induktiivse hulga definitsiooni kohaselt kuuluvad kõik elemendid 1,

$2 := 1+1$, $3 := 1+1+1, ...,$ $n := 1+1+...+1,...$ hulka $\mathbb{N}$. Teisalt ei sisalda hulk $\mathbb{N}$ omaduse 1.6 põhjal peale nende muid elemente. Seega

$$\mathbb{N} = \{1,\ 1+1,\ 1+1+1, ...\}.$$

Analoogiliselt saame igas teises järjestatud korpuses F' ühikelemendiga $1'$ hulga $\mathbb{N}' := \{1',\ 1'+1',\ 1'+1'+1', ...\}$, seejuures on hulkade $\mathbb{N}$ ja $\mathbb{N}'$ vahel üksühene vastavus, mille põhjal võime need hulgad samastada. Seega ei pruugi me hulka $\mathbb{N}$ siduda konkreetse korpusega F. Teisi sõnu, **iga järjestatud korpus sisaldab kõigi naturaalarvude hulka** $\mathbb{N}$.

Moodustame hulga $\mathbb{Z} := \mathbb{N}_0 \cup \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$, selle hulga elemente nimetame *täisarvudeks. Ratsionaalarvudeks* nimetame elemente $\frac{m}{n}$, kus $m \in \mathbb{Z}$ ja $n \in \mathbb{N}$. Seega **iga järjestatud korpus F sisaldab kõigi ratsionaalarvude hulga** $\mathbb{Q}$. Vahetu kontroll näitab, et **kõigi ratsionaalarvude hulk $\mathbb{Q}$ on korpuse F alamkorpus:** *kui $a, b \in \mathbb{Q}$, siis $a+b \in \mathbb{Q}$ ning $ab \in \mathbb{Q}$.* Paneme tähele, et **erinevad järjestatud korpused F tekitavad alamkorpuses $\mathbb{Q}$ ühe ja sama järjestuse**: kuna $n \in \mathbb{N}$, siis seos

$$\frac{m}{n} > 0 \Leftrightarrow m > 0$$

kehtib igas järjestatud korpuses F, sellest tuleneb, et seos

$$\frac{m}{n} > \frac{p}{q} \Leftrightarrow mq > np$$

kehtib ratsionaalarvude $\frac{m}{n}$ ning $\frac{p}{q}$ puhul igas järjestatud korpuses F. See on ratsionaalarvude loomulik järjestus. Sellel järjestusel on nn. *Archimedese omadus*: **iga ratsionaalarvu $\frac{m}{n}$ korral leidub temast suurem naturaalarv** (selgitada!)✠.

Nii nagu ratsionaalarvude järjestus suvalises järjestatud korpuses F ühtib nende loomuliku järjestusega, toimub ka nende liitmine ja korrutamine korpuses F meile tuntud harilike murdude liitmise ja korrutamise reeglite järgi:

$$\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = m\frac{1}{n} + p\frac{1}{q} = mq\frac{1}{nq} + np\frac{1}{nq} = \frac{1}{nq}(mq+np) = \frac{mq+np}{nq},$$
$$\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = m\frac{1}{n} \cdot p\frac{1}{q} = \frac{mp}{nq}.$$

Kokkuvõttes kehtib järgmine oluline lause.

Lause 1.9 *Iga järjestatud korpus F sisaldab alamkorpust, mis on isomorfne kõigi ratsionaalarvude korpusega $\mathbb{Q}$.*

Selgituseks lause 1.9 juurde märgime, et järjestatud korpusi Q_1 ja Q_2 nimetatakse isomorfseteks, kui eksisteerib bijektiivne kujutus (ehk üksühene vastavus) $\varphi : Q_1 \to Q_2$ omadustega
1) $\varphi(q+q') = \varphi(q) + \varphi(q')$,
2) $\varphi(qq') = \varphi(q) \cdot \varphi(q')$ ja
3) kui $q < q'$ korpuses Q_1, siis $\varphi(q) < \varphi(q')$ korpuses Q_2.

Lõpuks märgime veel üht hulga $\mathbb{Q}$ tähelepanuväärset omadust.

Omadus 1.10 $\mathbb{Q}$ *on loenduv hulk.*

Tõestus. Iseseisvalt!✠ ■

1.4 Pidevuse aksioom. Täielik järjestatud korpus

Olgu X järjestatud korpuse F mittetühi alamhulk. Öeldakse, et hulk X on *ülalt tõkestatud,* kui leidub selline $a \in F$, et võrratus $x \leq a$ kehtib iga $x \in X$ korral. Elementi a nimetatakse sel juhul hulga X *ülemiseks tõkkeks.* Analoogiliselt nimetatakse hulka $X \subset F$ *alt tõkestatuks*, kui leidub $b \in F$, et iga $x \in X$ korral kehtib võrratus $x \geq b$. Elementi b nimetatakse siis hulga X *alumiseks tõkkeks.* Ütleme, et hulk X on *tõkestatud*, kui ta on nii ülalt kui ka alt tõkestatud.

Selge, et igal ülalt (alt) tõkestatud hulgal leidub lõpmata palju ülemisi (alumisi) tõkkeid. Seetõttu kerkib üles küsimus vähima ülemise ning suurima alumise tõkke olemasolust.

Definitsioon. Ülalt tõkestatud mittetühja hulga $X \subset F$ vähimat ülemist tõket nimetatakse selle hulga *ülemiseks rajaks* ehk supreemumiks, tähistatakse $\sup X$ ehk $\sup\{x \mid x \in X\}$ (ka $\sup_{x\in X} x$). Alt tõkestatud mittetühja hulga X suurimat alumist tõket nimetatakse selle hulga *alumiseks rajaks* ehk infiimumiks ja tähistatakse $\inf X$ ehk $\inf\{x \mid x \in X\}$ (ka $\inf_{x\in X} x$).

Vahetu kontroll näitab, et **kui** $\sup X$ **eksisteerib, siis on ta üheselt määratud** (kontrollida!)✠, sama kehtib ka alumise raja $\inf X$ puhul (veenduda!)✠.

Definitsiooni kohaselt $a \in F$ on hulga $X \subset F$ ülemine raja parajasti siis, kui
1) $x \leq a$ iga $x \in X$ korral (s.t. a on hulga X ülemine tõke) ja
2) kui $z \in F$ rahuldab tingimust $z < a$, siis leidub selline $x_0 \in X$, et $z < x_0$.

Lause 1.11 *Olgu $X \subset F$ mittetühi hulk. Element a on hulga X ülemine raja parajasti siis, kui*
1) $x \leq a$ iga $x \in X$ korral,
2) iga positiivse $\varepsilon \in F$ korral leidub selline $x' \in X$, et $a - \varepsilon < x'$.

Tõestus. Iseseisvalt!✠. ■

Analoogiline väide kehtib ka alumise raja puhul (sõnastada ja tõestada see!)✠.

Definitsioon. Järjestatud korpust F nimetatakse *täielikuks*, kui ta rahuldab järgmist **pidevuse aksioomi**:

(P) *Igal ülalt tõkestatud mittetühjal hulgal $X \subset F$ leidub ülemine raja.*

Aksioomist **(P)** järeldub alumise raja olemasolu igal alt tõkestatud hulgal.

Lause 1.12 *Täielikus järjestatud korpuses F leidub igal alt tõkestatud mittetühjal hulgal alumine raja.*

Tõestus. Olgu $X \subset F$ mittetühi alamhulk, mis on alt tõkestatud elemendiga $m \in F$, s.t. $m \leq x$ iga $x \in X$ korral. Siis $-x \leq -m$ $(x \in X)$, seega on hulk $\{-x \mid x \in X\}$ ülalt tõkestatud ja pidevuse aksioomi kohaselt leidub tal ülemine raja, mille me tähistame tähega c. Näitame, et $-c$ on hulga X alumine raja. Kuna $-x \leq c$, siis $x \leq -c$ iga $x \in X$ korral, mis tähendab, et $-c$ on hulga X alumine tõke. Seejuures on ta suurim: kui $d > -c$, siis $-d < c$, mistõttu leidub $x_0 \in X$ omadusega $-x_0 > -d$ ehk $x_0 < d$. Lause on tõestatud. ■

Lause 1.13 *Olgu X ja Y täieliku järjestatud korpuse F mittetühjad hulgad.*
(a) *Kui X ja Y on ülalt tõkestatud, siis on ka hulk $X + Y := \{x + y \mid x \in X,\ y \in Y\}$ ülalt tõkestatud ja*

$$\sup (X + Y) = \sup X + \sup Y. \tag{1.7}$$

(b) *Kui X ja Y on alt tõkestatud, siis on ka hulk $X + Y$ alt tõkestatud ja*

$$\inf (X + Y) = \inf X + \inf Y.$$

(c) *Kui X on ülalt ja Y alt tõkestatud, siis hulk $X - Y := \{x - y \mid x \in X,\ y \in Y\}$ on ülalt tõkestatud ja*

$$\sup (X - Y) = \sup X - \inf Y.$$

(d) *Kui X on alt ja Y ülalt tõkestatud, siis hulk $X - Y$ on alt tõkestatud ja*

$$\inf (X - Y) = \inf X - \sup Y.$$

(e) *Olgu X ja Y sellised hulgad, mille kõik elemendid on mittenegatiivsed. Kui X ja Y on ülalt tõkestatud, siis on ka hulk $X \cdot Y := \{xy \mid x \in X,\ y \in Y\}$ ülalt tõkestatud ja*

$$\sup (X \cdot Y) = \sup X \cdot \sup Y. \tag{1.8}$$

Tõestus. (a) Kuna hulgad X ja Y on ülalt tõkestatud, siis pidevuse aksioomi kohaselt leiduvad ülemised rajad $\sup X$ ja $\sup Y$. Suvaliste $x \in X$ ning $y \in Y$ puhul kehtib võrratus $x+y \leq \sup X+\sup Y$ (vrd. (1.5)), tähendab, hulk $X+Y$ on ülalt tõkestatud ja $\sup X+\sup Y$ on tema ülemine tõke. Näitame, et kehtib (1.7).

Olgu $\varepsilon \in F$ suvaline positiivne element. Vastavalt lausele 1.11 peame leidma $x' \in X$ ning $y' \in Y$ omadusega

$$\sup X + \sup Y - \varepsilon < x' + y'. \tag{1.9}$$

Sama lause põhjal saame fikseerida $x' \in X$ ning $y' \in Y$ nii, et $\sup X - \frac{\varepsilon}{2} < x'$ ja $\sup Y - \frac{\varepsilon}{2} < y'$, sel juhul saamegi võrratuse (1.9).

Väide (b) tõestatakse analoogiliselt väitega (a) (iseseisvalt!)✠.

(c) Kuna Y on alt tõkestatud hulk, siis hulk $\{-y \mid y \in Y\}$ on ülalt tõkestatud ning pidevuse aksioomi kohaselt eksisteerib ülemine raja $\sup \{-y \mid y \in Y\} = -\inf Y$ (vrd. lause 1.12 tõestus). Väite (a) abil saame

$$\begin{aligned}\sup (X - Y) = \sup \{x + (-y) \mid x \in X,\ \ y \in Y\} &= \sup X + \sup \{-y \mid y \in Y\} \\ &= \sup X - \inf Y.\end{aligned}$$

Väite (d) tõestus on analoogiline väite (c) tõestusega.

(e) Olgu $a := \sup X$ ja $b := \sup Y$. Väide kehtib ilmselt, kui vähemalt üks arvudest a ja b on võrdne nulliga (põhjendada!)✠. Eeldame, et $a \neq 0$ ja $b \neq 0$, seostest $0 \leq x \leq a$ ja $0 \leq y \leq b$ tuleneb $xy \leq ab$, niisiis on hulk $X \cdot Y$ ülalt tõkestatud. Olgu $\varepsilon > 0$ suvaline. Vastavalt lausele 1.11 leiduvad $x_0 \in X$ ning $y_0 \in Y$, et

$$x_0 > a - \frac{\varepsilon}{2b} \text{ ja } y_0 > b - \frac{\varepsilon}{2a},$$

seega

$$\begin{aligned}x_0y_0 &= ab + (x_0 - a)\, b + (y_0 - b)\, x_0 \\ &\geq ab + (x_0 - a)\, b + (y_0 - b)\, a \\ &> ab - \frac{\varepsilon}{2b} b - \frac{\varepsilon}{2a} a = ab - \varepsilon\end{aligned}$$

(kontrollida!)✠. Lause 1.11 kohaselt on $\sup (X \cdot Y) = ab$. ■

1.5 Reaalarvude definitsioon. Reaalarvude korpuse olemasolu ja ühesuse probleem

Olles eelnevates punktides defineerinud täieliku järjestatud korpuse ning uurinud selle tähtsamaid omadusi, esitame nüüd **reaalarvude definitsiooni.**

Definitsioon. *Reaalarvudeks* nimetame täieliku järjestatud korpuse elemente, kõigi reaalarvude hulka tähistame tähega $\mathbb{R}$.

Et veenduda selle definitsiooni korrektsuses, on vaja vastata kahele küsimusele. **Esiteks, kas täielikke järjestatud korpusi üleüldse eksisteerib? Teiseks, kas selline korpus** (kui ta on olemas) **on üheselt määratud?** Eitav vastus ükskõik kummale küsimusele tähendaks meie lähteidee - defineerida kõigi reaalarvude hulk kui täielik järjestatud korpus - kõlbmatust.

Positiivse vastuse neile küsimustele annavad järgmised kaks teoreemi, mille tõestamisel me piirdume vaid tõestuse skeemi esitamisega.

Teoreem 1.14 *On olemas täielik järjestatud korpus F.*

Tõestus. Olgu F kõigi ratsionaalarvude hulga $\mathbb{Q}$ selliste alamhulkade A hulk, mis rahuldavad tingimusi
(a) kui $q \in A$ ja $p < q$, siis $p \in A$,
(b) hulgas A ei ole suurimat elementi,
(c) $A \neq \varnothing$, $A \neq \mathbb{Q}$.
Iga $q \in \mathbb{Q}$ puhul tähistame $\overline{q} := \{p \in \mathbb{Q}\ |p < q\}$, vahetu kontroll näitab, et $\overline{q} \in F$ ning kujutus

$$T : \mathbb{Q} \to F, \quad q \to \overline{q}$$

on üksühene. Seega $\mathbb{Q} \subset F$, selle sisalduvuse all mõistame tegelikult sisalduvust

$$\{\overline{q} \mid q \in \mathbb{Q}\} \subset F.$$

Märgime, et iga $A \in F$ on järjestatud korpuses $\mathbb{Q}$ ülalt tõkestatud alamhulk, olgu $\widetilde{A}$ *hulga A kõigi ülemiste tõkete hulk, millest on välja jäetud vähim ülemine tõke, kui see eksisteerib.* Seejuures omab A vähima ülemise tõkke parajasti siis, kui $A = \overline{q}$ mingi $q \in \mathbb{Q}$ korral.

Defineerime hulgas F **järjestuse** seosega

$$A < B := A \subsetneqq B. \tag{1.10}$$

Meie eesmärk on näidata, et sobivalt defineeritud liitmise ja korrutamise ning järjestusega (1.10) on F täielik järjestatud korpus.

(I) Defineerime hulgas F **liitmise** seosega

$$A+B:=\{a+b \mid a\in A,\quad b\in B\}\,. \tag{1.11}$$

Osutub, et $A+B\in F$, seejuures rahuldab seosega (1.11) määratud liitmine aksioome **(A1) - (A4):**
(A1) : Võrdus $A+B=B+A$ kehtib, sest

$$A+B=\{a+b \mid a\in A,\, b\in B\}=\{b+a \mid b\in B,\, a\in A\}=B+A.$$

(A2) : Võrdus $(A+B)+C=A+(B+C)$ kehtib, sest

$$\begin{aligned}(A+B)\ +C&=\{(a+b)+c \mid a\in A,\, b\in B,\, c\in C\}=\{a+(b+c) \mid a\in A,\, b\in B,\, c\in C\}\\ &=A+(B+C)\,.\end{aligned}$$

(A3) : Iga $A\in F$ korral $A+\overline{0}=A$, s.t. $\overline{0}$ on nullelement.
(A4) : Elemendi $A\in F$ vastandelement on

$$-A:=\left\{-q \mid q\in\widetilde{A}\right\},$$

s.t. $A+(-A)=\overline{0}$.

(II) Defineerime hulgas F **korrutamise.** Kui $A>\overline{0}$ ja $B>\overline{0}$, siis

$$A\cdot B:=\{ab \mid a\in A,\ a\geq 0,\quad b\in B,\, b\geq 0\}\cup\overline{0}, \tag{1.12}$$

vahetu kontroll näitab, et $A\cdot B\in F$. Defineerime
1) $A\cdot B:=-\left[A\cdot(-B)\right]$, kui $A>\overline{0}$ ja $B<\overline{0}$,
2) $A\cdot B:=-\left[(-A)\cdot B\right]$, kui $A<\overline{0}$ ja $B>\overline{0}$,
3) $A\cdot B:=(-A)\cdot(-B)$, kui $A<\overline{0}$ ja $B<\overline{0}$,
4) $\overline{0}\cdot B:=B\cdot\overline{0}:=\overline{0}$
ja kontrollime korrutamise aksioomide **(M1) - (M4)** täidetust:
(M1) : Kui $A>\overline{0}$ ja $B>\overline{0}$, siis

$$A\cdot B=\{ab \mid a\in A,\, a>0,\ b\in B,\, b>0\}=\{ba \mid b\in B,\, b>0,\, a\in A,\, a>0\}=B\cdot A.$$

Kui $A>\overline{0}$ ja $B<\overline{0}$, siis $A\cdot B=-\left[A\cdot(-B)\right]=-\left[(-B)\cdot A\right]=B\cdot A$, analoogiliselt veendutakse korrutamise kommutatiivsuses juhul 2) ja 3). Kui $A=\overline{0}$, siis $\overline{0}\cdot B:=B\cdot\overline{0}:=\overline{0}$.
(M2) : Olgu $A>\overline{0}$, $B>\overline{0}$ ja $C>\overline{0}$, siis $A\cdot B>\overline{0}$ ja $B\cdot C>\overline{0}$. Seega

$$\begin{aligned}(A\cdot B)\cdot C&=\{(ab)\,c \mid a\in A,\, a>0,\ b\in B,\, b>0,\, c\in C,\, c>0\}\\ &=\{a\,(bc) \mid a\in A,\, a>0,\ b\in B,\, b>0,\, c\in C,\, c>0\}=A\cdot(B\cdot C)\,.\end{aligned}$$

Vaatleme juhtu $A>\overline{0}$, $B>\overline{0}$ ja $C<\overline{0}$. Kuna $A\cdot B>\overline{0}$ ja $B\cdot C=-\left[B\cdot(-C)\right]<\overline{0}$, siis

$$(A\cdot B)\cdot C=-\left[(A\cdot B)\cdot(-C)\right]=-\left[A\cdot(B\cdot(-C))\right]=-\left[A\cdot(-(B\cdot C))\right]=A\cdot(B\cdot C)\,.$$

Analoogiliselt kontrollitakse assotsiatiivsust ka ülejäänud variantide korral.
(M3) : Vahetu kontrol näitab, et $A\cdot\overline{1}=A$, s.t. $\overline{1}$ on ühikelement.
(M4) : Olgu $A>\overline{0}$, defineerime pöördelemendi

$$A^{-1}:=\frac{1}{A}:=\left\{\frac{1}{q} \mid q\in\widetilde{A}\right\}\cup\{q\in\mathbb{Q} \mid q\leq 0\}\,,$$

siis $A^{-1} \in F$ ja $A \cdot A^{-1} = \overline{1}$. Edasi defineerime

$$A^{-1} := -\left((-A)^{-1}\right), \text{ kui } A < \overline{0}.$$

Sel juhul $A^{-1} < \overline{0}$ ning korrutamise reeglite kohaselt

$$A \cdot A^{-1} = (-A) \cdot (-A)^{-1} = \overline{1}.$$

(III) Distributiivsuse aksioomi **(D)** kehtivuse kontrollimiseks olgu $A, B, C \in F$. Kui üks neist komponentidest on $\overline{0}$, siis seos

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \tag{1.13}$$

ilmselt kehtib. Olgu $A > \overline{0}$, $B > \overline{0}$ ja $C > \overline{0}$, siis $B + C > \overline{0}$, mistõttu

$$\begin{aligned} A \cdot (B + C) &= \{a\,(b + c) \mid a \in A,\ a > 0,\ b \in B,\ b > 0,\quad c \in C, c > 0\} \cup \overline{0} \\ &= \{ab + ac \mid a \in A,\ a > 0,\ b \in B,\ b > 0,\quad c \in C, c > 0\} \cup \overline{0} \\ &= A \cdot B + A \cdot C. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Ülejäänud juhud taandatakse siinvaadeldud juhule vastavalt korrutise definitsioonile.

Seega on seostega (1.11) ja (1.12) defineeritud tehete korral hulgas F rahuldatud kõik korpuse aksioomid, s.t. F on korpus.

(IV) Veendume, et tegemist on **järjestatud korpusega.** See, et aksioomid **(O1)** ja **(O2)** on rahuldatud, on selge järjestuse definitsioonist (1.10). Aksioomi **(O3)** kontroll on lihtne: kui $A \subsetneqq B$, siis $A + C \subsetneqq B + C$. s.t. $A < B \Rightarrow A + C < B + C$ suvalise $C \in F$ puhul. Aksioomi **(O4)** kontrollimiseks paneme kõigepealt tähele, et kui $A > \overline{0}$ ja $C > \overline{0}$, siis $A \cdot C > \overline{0}$ (vrd. (1.12)). Seega, kui $A < B$ (aksioomi **(O3)** kohaselt on see samaväärne tingimusega $B - A > \overline{0}$) ja $C > \overline{0}$, siis

$$B \cdot C - A \cdot C = (B - A) \cdot C > \overline{0} \text{ ehk } B \cdot C > A \cdot C.$$

(V) Lõpuks on vaja näidata, et korpus F on täielik, s.t. **iga ülalt tõkestatud alamhulgal** $\mathcal{A} \subset F$ **on ülemine raja**. Defineerime

$$\sup \mathcal{A} := \bigcup \{A \mid A \in \mathcal{A}\},$$

siis $\sup \mathcal{A}$ on korpuse F element. Element $\sup \mathcal{A} \in F$ on kindlasti hulga $\mathcal{A}$ ülemine tõke, sest $B \subsetneqq \bigcup \{A \mid A \in \mathcal{A}\}$ iga $B \in \mathcal{A}$ korral. Teisalt, iga $C < \sup \mathcal{A}$ puhul saab leida ratsionaalarvu a_0 omadusega $a_0 \in \sup \mathcal{A} \setminus C$. Seejuures on a_0 mingi hulga $A_0 \in \mathcal{A}$ element, mistõttu $A_0 > C$. Järelikult on $\sup \mathcal{A}$ tõepoolest hulga $\mathcal{A}$ vähim ülemine tõke.

Teoreem on tõestatud. ■

Teoreem 1.15 *Kaks täielikult järjestatud korpust F_1 ja F_2 on isomorfsed, s.t. leidub bijektiivne kujutus $\psi : F_1 \to F_2$ omadustega*
1) $\psi\,(x + x') = \psi\,(x) + \psi\,(x')$,
2) $\psi\,(x \cdot x') = \psi\,(x) \cdot \psi\,(x') \quad (x, x' \in F_1)$,
3) kui $x < x'$ *korpuses* F_1, *siis* $\psi\,(x) < \psi\,(x')$ *korpuses* F_2.

Tõestus. Teatavasti sisaldab iga järjestatud korpus alamkorpust, mis on isomorfne kõigi ratsionaalarvude korpusega $\mathbb{Q}$ (vt. punkt 3), tähistame need korpuste F_1 ja F_2 puhul vastavalt Q_1 ja Q_2. Olgu $\varphi : Q_1 \to Q_2$ nendevaheline isomorfism. Rõhutame, et $\varphi(p+q) = \varphi(p) + \varphi(q)$ ja $\varphi(p \cdot q) = \varphi(p) \cdot \varphi(q)$ kõikide $p, q \in Q_1$ korral ja võrratusest $p < q$ korpuses Q_1 järeldub $\varphi(p) < \varphi(q)$ korpuses Q_2. Defineerime otsitava kujutuse $\psi : F_1 \to F_2$ seosega

$$\psi(x) := \sup\{\varphi(q) \mid q \in C_x\}, \tag{1.15}$$

kus $C_x := \{r \in Q_1 \mid r < x\}$ $(x \in F_1)$ ja supreemum on võetud korpuses F_2. Vahetu kontroll näitab, et kujutus ψ on korrektselt defineeritud, seejuures

$$\psi(x) = \varphi(x) \text{ iga } x \in Q_1 \text{ korral.}$$

Kujutus ψ **säilitab järjestuse,** s.t.

$$x < y \Rightarrow \psi(x) < \psi(y).$$

Sellest implikatsioonist tuleneb vahetult ka kujutuse ψ **injektiivsus**. Kuna suvalise $y \in F_2$ korral kehtib $\psi(x) = y$, kus

$$x := \sup\left\{\varphi^{-1}(p) \mid p \in C_y\right\}$$

ja $C_y := \{p \in Q_2 \mid p < y\}$, siis ψ on **sürjektiivne.**

Tõestame, et $\psi(x + x') = \psi(x) + \psi(x')$. Olgu $q \in C_{x+x'}$, tähistame $\varepsilon := x + x' - q$, seega $\varepsilon > 0$. Leiame sellised $r \in C_x$ ja $s \in C_{x'}$, et

$$x - \frac{\varepsilon}{2} < r, \ x' - \frac{\varepsilon}{2} < s,$$

siis $q = x + x' - \varepsilon < r + s < x + x'$. Teisi sõnu, iga $q \in C_{x+x'}$ korral leiduvad $r \in C_x$ ja $s \in C_{x'}$ omadusega $q < r + s < x + x'$. Niisiis,

$$\begin{aligned}
\psi\left(x + x'\right) &= \sup\{\varphi(q) \mid q \in C_{x+x'}\} = \sup\{\varphi(r+s) \mid r \in C_x,\ s \in C_{x'}\} \\
&= \sup\{\varphi(r) + \varphi(s) \mid r \in C_x,\ s \in C_{x'}\} \\
&= \sup\{\varphi(r) \mid r \in C_x\} + \sup\{\varphi(s) \mid s \in C_{x'}\} \\
&= \psi(x) + \psi\left(x'\right).
\end{aligned}$$

Analoogiliselt **veendutakse, et** $\psi(xx') = \psi(x)\ \psi(x')$. Teoreem on tõestatud. ■

1.6 Arhchimedese omadus. Ratsionaalarvude hulga tihedus

Selles punktis uurime, kuidas paiknevad naturaalarvud ja ratsionaalarvud korpuses $\mathbb{R}$. Seejuures teeme kindlaks, et $\mathbb{Q}$ on pärisalamhulk, s.t. $\mathbb{Q} \subsetneqq \mathbb{R}$. Arutelu aluseks on järgmine oluline järeldus pidevuse aksioomist.

Lause 1.16 ***(Archimedese omadus).*** *Iga reaalarvu a korral leidub selline naturaalarv n, et $a < n$. Teisi sõnu, kõigi naturaalarvude hulk $\mathbb{N}$ ei ole tõkestatud korpuses $\mathbb{R}$.*

Tõestus. Oletame vastuväiteliselt, et hulk $\mathbb{N}$ on ülalt tõkestatud. Pidevuse aksioomi põhjal on hulgal $\mathbb{N}$ siis ülemine raja $b := \sup \mathbb{N}$. Kuna $b - 1$ ei ole hulga $\mathbb{N}$ ülemine tõke, siis leidub $m \in \mathbb{N}$ omadusega $b - 1 < m$ ehk $b < m + 1$. Seejuures $m + 1 \in \mathbb{N}$ (põhjendada!)✠, niisiis ei saa b olla hulga $\mathbb{N}$ ülemiseks tõkkeks. Saime vastuolu, mis näitab, et vastuväiteline oletus on väär. ■

Järeldus 1.17 *Kui a on positiivne reaalarv, siis leidub selline $n \in \mathbb{N}$, et $n - 1 \leq a < n$.*

Tõestus. Kuna lause 1.16 kohaselt hulk $\{m \in \mathbb{N} \mid a < m\}$ ei ole tühi, siis on tal vähim element n (vrd. omadus 1.7). Seega $n - 1 \leq a < n$. ■

Järeldus 1.18 $\inf\left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\} = 0$.

Tõestus. Lause 1.16 kohaselt saab iga $\varepsilon > 0$ jaoks leida niisuguse $n \in \mathbb{N}$, et $n > \frac{1}{\varepsilon}$ ehk $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Seega $\inf\left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\} = 0$. ■

Lihtne on veenduda, et iga kahe reaalarvu vahel leidub veel reaalarve (selgitada!)✠. Tegelikult kehtib järgmine tugevam väide.

Lause 1.19 ***(ratsionaalarvude hulga tihedus).*** *Olgu a ja b sellised reaalarvud, et $a < b$. Siis leidub niisugune ratsionaalarv r, et $a < r < b$.*

Tõestus. Vaatleme algul juhtu $0 < a < b$. Archimedese omaduse põhjal leidub selline $n \in \mathbb{N}$, et $n > \frac{1}{b-a}$ ehk $nb - na > 1$. Kuna $na > 0$, siis järelduse 1.17 kohaselt leidub $m \in \mathbb{N}$ omadusega $m - 1 < na < m$. Paneme tähele, et $m \leq na + 1 < nb$, niisiis $na < m < nb$. Tähistame $r := \frac{m}{n}$, siis $r \in \mathbb{Q}$ ja $a < r < b$.

Kui $a \leq 0 < b$, siis võtame $n \in \mathbb{N}$ omadusega $a' := \frac{1}{n} < b$ (põhjendada sellise n olemasolu!)✠. Kuna $0 < a' < b$, siis tõestuse esimese osa põhjal leidub ratsionaalarv r, et $a' < r < b$, seega $a \leq 0 < r < b$.

Kui $a < b \leq 0$, siis $0 \leq -b < -a$. Eelneva arutelu põhjal saame leida $r' \in \mathbb{Q}$ omadusega $-b < r' < -a$, siis $r := -r' \in \mathbb{Q}$ ning $a < r < b$ (põhjendada!)✠. ■

Nagu tavaliselt, tähistame me järgnevas $a^2 := a \cdot a$, $a^3 := a \cdot a \cdot a, \ldots$, niisiis üldiselt $a^n := a \cdot \ldots \cdot a$ (n tegurit) iga naturaalarvu n korral. Lisaks lepime kokku, et $a^0 := 1$ (eeldusel $a \neq 0$). Selge, et $a^n \in \mathbb{R}$ iga $a \in \mathbb{R}$ ja $n \in \mathbb{N}$ korral.

Teatavasti (vt. lause 1.1) ei leidu sellist ratsionaalarvu b, et kehtiks võrdus $b^2 = 2$. Teisi sõnu, *ratsionaalarvude* hulgas ei ole astmete moodustamise operatsioon pööratav. Me näitame järgnevalt, et ruutjuurt saab leida igast mittenegatiivsest reaalarvust. n-nda juure jaoks tõestame analoogilise väite punktis 9.

Lause 1.20 ***(ruutjuure olemasolu).*** *Kui a on mittenegatiivne reaalarv, siis leidub parajasti üks selline mittenegatiivne reaalarv x, et $x^2 = a$.*

Tõestus. Väide kehtib juhul $a = 0$ (selgitada!)✠, vaatleme juhtu $a > 0$. *Olgu esiteks* $0 < a \leq 1$. Tähistame

$$M := \left\{z \in \mathbb{R} \,|z > 0 \text{ ja } z^2 \leq a\right\}$$

ja märgime, et kuna $a^2 \leq a$ (põhjendada!)✠, siis $a \in M$. Edasi, kui $z^2 \leq a \leq 1 = 1^2$, siis $z \leq 1$ (selgitada!)✠. Seega on arv 1 hulga M ülemine tõke, järelikult eksisteerib $x := \sup M$. Märgime, et $x \geq a > 0$, ja näitame, et $x^2 = a$.

Kõigepealt **tõestame võrratuse** $x^2 \leq a$. Tähistame

$$y := \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right), \tag{1.16}$$

siis $y > 0$ ning kuna

$$y^2 - a = \frac{1}{4}\left(x_2 - 2a + \frac{a^2}{x^2}\right) = \frac{1}{4}\left(x - \frac{a}{x}\right)^2 \geq 0,$$

siis $y^2 \geq a$. Sellest järeldub, et y on hulga M ülemine tõke. Tõepoolest, kui mingi $z \in M$ puhul kehtiks võrratus $z > y$, siis

$$z^2 > zy > y^2 \geq a,$$

mis oleks vastuolus hulga M definitsiooniga. Niisiis, $x \leq y$ ja seega

$$2x^2 \leq 2xy = x\left(x + \frac{a}{x}\right) = x^2 + a$$

ehk $x^2 \leq a$.

Vastupidise võrratuse kontrollimiseks võtame $r := \frac{a}{y}$, kus y on defineeritud seosega (1.16). Ilmselt $r > 0$ ja $r^2 = \frac{a^2}{y^2} = \frac{a}{y^2}a \leq a$ (peame silmas võrratust $y^2 \geq a$), järelikult $r \in M$ ning seega $\frac{a}{y} = r \leq x$. Siit saame $2a \leq 2yx = \left(x + \frac{a}{x}\right)x = x^2 + a$ ehk $a \leq x^2$. Kokkuvõttes kehtib võrdus $x^2 = a$.

Olgu nüüd $a > 1$. Arvu $b := \frac{1}{a}$ jaoks kehtib $0 < b < 1$, järelikult eksisteerib $\xi \in \mathbb{R}$ omadusega $\xi > 0$ ja $\xi^2 = b$. Võtame $x := \frac{1}{\xi}$, siis $x > 0$ ning $x^2 = \left(\frac{1}{\xi}\right)^2 = \frac{1}{\xi^2} = \frac{1}{b} = a$.

Jääb üle veel veenduda, et $x = \sqrt{a}$ on üheselt määratud. Olgu $s > 0$ suvaline selline reaalarv, et $s^2 = a$. Siis $(x - s)(x + s) = x^2 - s^2 = a - a = 0$ ja kuna $x + s > 0$, siis $x - s = 0$ ehk $s = x$. ■

Lausest 1.20 selgub tõsiasi, et meie poolt defineeritud kõigi reaalarvude hulk $\mathbb{R}$ on rangelt suurem kui kõigi ratsionaalarvude hulk $\mathbb{Q}$, kuna $\sqrt{2} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

Definitsioon. Arve $z \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ nimetatakse *irratsionaalarvudeks.*

Lause 1.21 ***(irratsionaalarvude hulga tihedus).*** *Olgu a ja b sellised reaalarvud, et $a < b$. Siis leidub niisugune irratsionaalarv ρ, et $a < \rho < b$.*

Tõestus. Kui $a < b$, siis $\frac{a}{\sqrt{2}} < \frac{b}{\sqrt{2}}$ ja lause 1.19 põhjal leidub $r \in \mathbb{Q}$ omadusega $\frac{a}{\sqrt{2}} < r < \frac{b}{\sqrt{2}}$. Siis $r\sqrt{2}$ on irratsionaalarv (põhjendada!)✠ ning $a < r\sqrt{2} < b$. ■

1.7 Reaalarvu absoluutväärtus. Intervallid. Hulga $\mathbb{R}$ mitteloenduvus

Pidades silmas trihhotoomia aksioomi **(O1)**, defineerime iga $a \in \mathbb{R}$ korral tema *absoluutväärtuse*

$$|a| := \begin{cases} a, \text{ kui } a \geq 0, \\ -a, \text{ kui } a < 0. \end{cases}$$

Definitsioonist järeldub vahetult, et $|a| = 0$ parajasti siis, kui $a = 0$ (veenduda!)✠. Samuti on lihtne veenduda järgmiste väidete kehtivuses:
1) $a \leq |a|$ ja $-a \leq |a|$,
2) $|a| \geq 0$,
3) $|-a| = |a|$
(kontrollida!)✠. Järgnevates arutlustes mängib olulist rolli järgmine absoluutväärtuse omadus.

Lause 1.22 *Positiivse arvu c korral kehtib võrratus $|a| \le c$ parajasti siis, kui $-c \le a \le c$.*

Tõestus. Isesisvalt!✠ ∎

Lause 1.23 *Reaalarvude a ja b puhul kehtivad järgmised väited:*
(a) $|a+b| \le |a| + |b|$,
(b) $|a-b| \le |a| + |b|$,
(c) $||a| - |b|| \le |a-b|$,
(d) $|ab| = |a|\,|b|$.

Tõestus. Iseseisvalt!✠ ∎

Absoluutväärtuse abil saab konstrueerida reaalarvude hulga $\mathbb{R}$ lihtsa ja mugava (kuid seejuures adekvaatse) geomeetrilise mudeli – **arvsirge.** Olgu mingil sirgel fikseeritud kaks punkti, mis vastavd arvudele 0 ja 1. Suunda punkti 0 poolt punkti 1 poole loeme positiivseks, vastupidist suunda negatiivseks. Sirglõigu $[0,1]$ pikkuse loeme ühikuks. Arvu a puhul võtame lõigu pikkusega $|a|$ ning kanname ta punktist 0 lähtudes positiivses suunas, kui $a > 0$, ning negatiivses suunas, kui $a < 0$. Saadud punkt sirgel vastab arvule a. On selge, et $|a|$ tähistab punkti a kaugust punktist 0. Seda geomeetrilist mudelit silmas pidades nimetame (mittenegatiivset) arvu $|a-b|$ reaalarvude a ja b *vaheliseks kauguseks.*

Arvsirge kui reaalarvude hulga geomeetriline mudel on oluliselt kujundanud ka reaalarvudega seotud terminoloogiat. Näiteks nimetame me reaalarve tihtipeale arvsirge punktideks, teatavaid reaalarvude hulki aga **intervallideks**. Nii nimetatakse hulki $X \subset \mathbb{R}$, millel on järgmine omadus: kui $a, b \in X$ ja $a < x < b$, siis $x \in X$. Iga kaks reaalarvu a ja b, kus $a < b$, määravad ära neli *lõplikku intervalli*:
vahemiku $(a,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$,
poollõigud $(a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$ ja $[a,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$ ning
lõigu $[a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$.

Arvsirgest kui reaalarvude hulga mudelist lähtudes defineerime kaks uut objekti ∞ ja $-\infty$ järgmiste tingimustega:
i) $-\infty < \infty$ ja
ii) $-\infty < x < \infty$ iga $x \in \mathbb{R}$ korral.
Rõhutame, et $-\infty$ ja ∞ ei kuulu reaalarvude hulka, seetõttu ei saa neid liita ega korrutada, ei omavahel ega reaalarvudega. See-eest hõlbustavad nad paljudel juhtudel tingimuste üleskirjutamist, näiteks tähistame

$$(-\infty, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}, \quad (a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\},$$

analoogiliselt

$$(-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid x \le b\}, \quad [a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x\}.$$

Neid nelja hulka nimetame *lõpmatuteks intervallideks,* neile lisandub $(-\infty, \infty) := \mathbb{R}$.

Me tõestame järgnevalt ühe lõplike intervallidega seotud tähtsa väite.

Lause 1.24 *Kui lõigud $[a_n, b_n]$ $(n \in \mathbb{N})$ moodustavad üksteisesse sisestatud hulkade jada*

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset ... \supset [a_n, b_n] \supset ...,$$

siis $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \varnothing$.

Tõestus. Kuna $a_k < b_n$ suvaliste indeksite k ja n puhul (selgitada!)✠, siis $\{a_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ on ülalt tõkestatud hulk. Pidevuse aksioomi kohaselt eksisteerib $\sup\{a_k \mid k \in \mathbb{N}\} =: c$. Seejuures $c \le b_m$ iga m korral (selgitada!)✠, järelikult $c \in [a_m, b_m]$ suvalise $m \in \mathbb{N}$ puhul. Seega $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \varnothing$. ■

Lause 1.24 abil tõestame nüüd reaalarvude hulga $\mathbb{R}$ mitteloenduvuse.

Teoreem 1.25 *Vahemik $(0,1)$ ei ole loenduv hulk. Seega on ka $\mathbb{R}$ mitteloenduv.*

Tõestus. Olgu $E = \{x_1, x_2, ...\}$ suvaline loenduv alamhulk vahemikus $(0,1)$, näitame, et $E \neq (0,1)$. Me kasutame järgmist lihtsalt kontrollitavat fakti:
antud vahemiku (a,b) ja punkti $x \in \mathbb{R}$ korral saab leida lõigu $[c,d] \subset (a,b)$ omadusega $x \notin [c,d]$.
Selle kohaselt saab leida lõigu $[a_1, b_1] \subset (0,1)$ omadusega $x_1 \notin [a_1, b_1]$. Olgu $a_1, b_1, ..., a_n, b_n$ valitud nii, et $a_k < b_k$ ja $x_k \notin [a_k, b_k]$ $(k = 1, ..., n)$, kusjuures $[a_{k+1}, b_{k+1}] \subset (a_k, b_k)$ $(k = 1, ..., n-1)$. Leiame a_{n+1} ja b_{n+1} omadusega $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset (a_n, b_n)$ ja $x_{n+1} \notin [a_{n+1}, b_{n+1}]$. Nii oleme induktiivselt defineerinud üksteisesse sisestatud lõikude jada $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset ... \supset [a_n, b_n] \supset ...$, lause 1.24 põhjal leidub $x \in \cap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \subset (0,1)$. Selge, et $z \notin E$ (selgitada!)✠.

Kuna alamhulk $(0,1) \subset \mathbb{R}$ on mitteloenduv, siis ei ole ka $\mathbb{R}$ loenduv. ■

Lõpuks defineerime kõige olulisema geomeetrilise mõiste reaalarvude teoorias, see on **punkti ümbruse** mõiste. Olgu $a \in \mathbb{R}$ ja $\varepsilon > 0$. Tähistame

$$U_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \varepsilon\},$$

seda hulka nimetatakse arvu a (ehk punkti a) *ε-ümbruseks.* Lause 1.22 põhjal $U_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ (veenduda!)✠.

1.8 Dedekindi lõiked

Kui on antud kaks reaalarvude hulka A ja B, mis rahuldavad tingimusi
1) $A \cup B = \mathbb{R}$,
2) $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$,
3) suvaliste $a \in A$ ja $b \in B$ korral kehtib võrratus $a < b$,
siis öeldakse, et nad moodustavad kõigi reaalarvude hulgas $\mathbb{R}$ *Dedekindi lõike* $A \mid B$. Kui leidub selline arv x, et $a \le x \le b$ kõikide $a \in A$ ning $b \in B$ korral, siis arvu x nimetame lõike $A \mid B$ *eraldusarvuks.*

Paneme tähele, et *kui eraldusarv eksisteerib, siis on ta üheselt määratud.* Kui oletada, et antud lõike $A \mid B$ korral leiduvad eraldusarvud x_1 ja x_2 nii, et $x_1 < x_2$, siis leidub arv $z \in (x_1, x_2)$ (põhjendada!)✠, järelikult $a \le x_1 < z < x_2 \le b$, mistõttu $z \notin A$ ja $z \notin B$ (selgitada!)✠. See on vastuolus tingimusega 1).

Osutub, et küsimus eraldusarvu olemasolust suvalise Dedekindi lõike puhul on samaväärne küsimusega ülalt tõkestatud hulga ülemise raja olemasolust. Paljudes õpikutes ongi pidevuse aksioom **(P)** sõnastatud Dedekindi lõike abil (ehk nn. lõikeaksioomina):
(P') *Igal Dedekindi lõikel $A \mid B$ reaalarvude hulgas $\mathbb{R}$ on eraldusarv.*

Teoreem 1.26 *Väited **(P)** ja **(P')** on samaväärsed.*

Tõestus. **(P)** $\Rightarrow$ **(P')**: Olgu $A \mid B$ suvaline lõige hulgas $\mathbb{R}$. Eeldame, et pidevuse aksioom (P) kehtib, ning näitame, et lõikel $A \mid B$ on eraldusarv x. Hulk A ei ole tühi, seejuures on iga $b \in B$ tema ülemine tõke (vrd. 3)). Aksioomi **(P)** kohaselt leidub $x := \sup A$, seejuures $a \leq x$ iga $a \in A$ korral. Kuna x on hulga A vähim ülemine tõke, siis $x \leq b$ iga $b \in B$ puhul. Kokkuvõttes $a \leq x \leq b$ kõikide $a \in A$ ning $b \in B$ korral. Seega on x lõike $A \mid B$ eraldusarv.

(P') $\Rightarrow$ **(P)**: Eeldame, et väide **(P')** kehtib. Olgu M ülalt tõkestatud mittetühi reaalarvude hulk. Kui hulgas M on olemas suurim element $\max M$, siis see ongi ülemine raja ja väide **(P)** kehtib. Eeldame, et suurimat elementi hulgas M ei ole. Olgu B hulga M kõigi ülemiste tõkete hulk, tähistame $A := \mathbb{R} \setminus B$. Kuna $M \cap B = \emptyset$ (selgitada!)✠, siis $M \subset A$.

Veendume, et hulgad A ja B määravad lõike. Tingimused 1) ja 2) on ilmselt täidetud, kontrollime tingimust 3). Kui oletada, et mingite $a_0 \in A$ ja $b_0 \in B$ korral kehtib võrratus $a_0 \geq b_0$, siis oleks ka a_0 hulga M ülemine tõke (selgitada!)✠ ning seega $a_0 \in B$. See oleks vastuolus faktiga $A = \mathbb{R} \setminus B$. Niisiis, meil on lõige $A \mid B$. Eelduse **(P')** põhjal leidub selline $x \in \mathbb{R}$, et $a \leq x \leq b$ kõikide $a \in A$ ning $b \in B$ korral. Veendume, et $x = \sup M$. Tõepoolest, kui $z \in M$, siis $z \in A$, seega $z \leq x$, järelikult on x hulga M ülemine tõke. Kui b on hulga M suvaline ülemine tõke, siis $b \in B$, mistõttu $x \leq b$. Seega x on hulga M vähim ülemine tõke, s.t. $x = \sup M$. ■

1.9 n-astme juur positiivsest reaalarvust

Me teame, et ratsionaalarvude klassis ei ole positiivsetel (täis)arvudel alati olemas ruutjuurt. Seevastu reaalarvude klassis eksisteerib ruutjuur igast mittenegatiivsest arvust (vt. lause 1.20). Järgnevalt tõestame üldisema lause n-astme juure kohta.

Lause 1.27 *Iga mittenegatiivse reaalarvu b ja iga naturaalarvu n korral leidub üheselt määratud mittenegatiivne reaalarv x omadusega $x^n = b$.*

Tõestus. On selge, et $0^n = 0$, seega võime piirduda juhuga $b > 0$. Vaatleme kõigi selliste positiivsete arvude z hulka, mille korral $z^n \leq b$. Tähistame selle hulga tähega X, niisiis

$$X := \{z \in \mathbb{R} \,|z > 0,\, z^n \leq b\}.$$

Hulk X on ülalt tõkestatud: kui $b > 1$, siis on b ise hulga X ülemiseks tõkkeks, juhul $b \leq 1$ on hulga X ülemiseks tõkkeks arv 1 (põhjendada!)✠. Pidevuse aksioomi kohaselt on hulgal X olemas ülemine raja, tähistame selle tähega x, s.t. $x := \sup X$. Meie eesmärk on näidata, et $x^n = b$, selleks veendume, et mõlemad vastuväitelised oletused $x^n < b$ ja $x^n > b$ viivad meid vastuoluni.

Oletame, et $x^n < b$ ja tähistame $\varepsilon := b - x^n$. Kasutame Newtoni binoomvalemit, võttes suvalise a omadusega $0 < a \leq 1$:

$$\begin{aligned}
(x+a)^n &= x^n + nx^{n-1}a + \frac{n\,(n-1)}{1 \cdot 2}x^{n-2}a^2 + \ldots + \frac{n\,(n-1)\ldots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k}x^{n-k}a^k + \ldots + a^n \\
&= x^n \\
&+ a\left(nx^{n-1} + \frac{n\,(n-1)}{1 \cdot 2}x^{n-2}a + \ldots + \frac{n\,(n-1)\ldots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k}x^{n-k}a^{k-1} + \ldots + a^{n-1}\right) \\
&\leq x^n + a\left(nx^{n-1} + \frac{n\,(n-1)}{1 \cdot 2}x^{n-2} + \ldots + \frac{n\,(n-1)\ldots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k}x^{n-k} + \ldots + 1\right) \\
&= x^n + a\left((1+x)^n - x^n\right).
\end{aligned}$$

Võtame tuletatud võrratuses $(x+a)^n \leq x^n + a\left((1+x)^n - x^n\right)$ nüüd

$$a < \frac{\varepsilon}{(1+x)^n - x^n},$$

saame seose $(x+a)^n \leq x^n + \varepsilon = b$, mis on vastuolus faktiga, et x on hulga X ülemine raja (selgitada!)✠. Seega on oletus $x^n < b$ väär, tähendab, $x^n \geq b$.

Kui oletada, et $x^n > b$, tähistame $\varepsilon := x^n - b$ ning, võttes suvalise arvu a omadusega $0 < a \leq 1$, saame Newtoni binoomvalemi abil võrratuse

$$(x-a)^n \geq x^n - a\left((1+x)^n - x^n\right)$$

(veenduda!)✠. Nii nagu eespool, valime ka nüüd $a < \frac{\varepsilon}{(1+x)^n - x^n}$ ja jõuame vastuolulise seoseni $(x-a)^n \geq x^n - \varepsilon = b$. Tähendab, $x^n \leq b$ ja kokkuvõttes $x^n = b$.

See, et arv x on ainuke omadusega $x^n = b$, tuleneb korrutamise monotoonsuse omadusest (vt. aksioom **(O4)**) (põhjendada!)✠. Lause on tõestatud. ■

Mittenegatiivset arvu x, mille puhul $x^n = b$, nimetatakse arvu $b \geq 0$ n-daks juureks ja tähistatakse $\sqrt[n]{b}$.

Lause 1.28 *Kui a ja b on positiivsed arvud, siis*

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}.$$

Tõestus. Tähistame $y := \sqrt[n]{a}$, $x := \sqrt[n]{b}$ ja $z := \sqrt[n]{ab}$. Kuna $a = y^n$ ja $b = x^n$, siis $(xy)^n = x^n y^n = ab = z^n$. Lause 1.27 kohaselt on positiivse arvu ab n-s juur üheselt määratud, seetõttu $z = \sqrt[n]{ab} = xy$ ehk $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$. ■

1.10 Võrratused

1.10.1 Aritmeetiliste keskmiste ja geomeetriliste keskmiste võrdlemine

Valemitest $(a_1+a_2)^2 = a_1^2 + 2a_1a_2 + a_2^2$ saame lihtsalt mittenegatiivsete arvude a_1 ja a_2 jaoks võrratuse

$$\frac{a_1+a_2}{2} \geq \sqrt{a_1a_2}.$$

Osutub, et kehtib järgmine üldisem väide.

Lause 1.29 *Suvaliste mittenegatiivsete reaalarvude $a_1, a_2, ..., a_n$ korral kehtib võrratus*

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot .... \cdot a_n}. \tag{1.17}$$

Tõestus. Tähistame $P(n)$ väite (1.17) ning veendume, et see kehtib iga $n \in \mathbb{N}$ korral.

(I) *Näitame induktsioonimeetodi abil, et $P(n)$ kehtib, kui $n = 2^k$ suvalise $k \in \mathbb{N}$ korral.* Eelneva märkuse põhjal kehtib väide $P(2)$. Eeldame, et väide $P\left(2^k\right)$ on õige, ja veendume väite $P\left(2^{k+1}\right)$ õigsuses.

Olgu $2^k = n$, siis $2^{k+1} = 2n$, ja olgu $a_1, a_2, ..., a_{2n}$ $2n$ mittenegatiivset arvu. Tähistame

$$b_1 := \frac{a_1+a_2}{2},\ b_2 := \frac{a_3+a_4}{2},\ ...,\ b_n := \frac{a_{2n-1}+a_{2n}}{2},$$

siis $b_i \geq \sqrt{a_{2i-1}a_{2i}}$ kõikide $i = 1, 2, ..., n$ puhul. Vastavalt eeldusele $P\left(2^k\right)$ saame (kontrollida!)✠

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_{2n}}{2n} = \frac{b_1 + b_2 + ... + b_n}{n} \geq \sqrt[n]{b_1 \cdot b_2 \cdot .... \cdot b_n} \geq \sqrt[2n]{a_1 \cdot a_2 \cdot .... \cdot a_{2n}}.$$

Niisiis, väide $P\left(2^{k+1}\right)$ kehtib.

(II) *Näitame, et väitest $P(n)$ järeldub suvalise $n \in \mathbb{N}$ korral $P(n-1)$.* Kehtigu väide $P(n)$ ja olgu $a_1, ..., a_{n-1}$ mittenegatiivsed arvud. Tähistame $c_1 := a_1$, $c_2 := a_2, ..., c_{n-1} := a_{n-1}$, $c_n := \frac{a_1 + ... + a_{n-1}}{n-1}$, eelduse $P(n)$ järgi

$$\frac{c_1 + c_2 + ... + c_n}{n} \geq \sqrt[n]{c_1 \cdot c_2 \cdot .... \cdot c_n}$$

ehk

$$\frac{1}{n}\left(a_1 + ... + a_{n-1} + \frac{a_1 + ... + a_{n-1}}{n-1}\right) \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot .... \cdot a_{n-1} \cdot \frac{a_1 + ... + a_{n-1}}{n-1}}.$$

Paneme tähele, et võrratuse vasak pool on $\frac{a_1 + ... + a_{n-1}}{n-1}$, paremat poolt teisendades saame

$$\begin{aligned}
\frac{a_1 + ... + a_{n-1}}{n-1} &\geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot .... \cdot a_{n-1}} \sqrt[n]{\frac{a_1 + ... + a_{n-1}}{n-1}} \\
&= \sqrt[n-1]{a_1 \cdot a_2 \cdot .... \cdot a_{n-1}} \frac{1}{\sqrt[n(n-1)]{a_1 \cdot a_2 \cdot .... \cdot a_{n-1}}} \sqrt[n]{\frac{a_1 + ... + a_{n-1}}{n-1}} \\
&= \left(\sqrt[n-1]{a_1 \cdot a_2 \cdot .... \cdot a_{n-1}}\right)^{1-\frac{1}{n}} \left(\frac{a_1 + ... + a_{n-1}}{n-1}\right)^{\frac{1}{n}}
\end{aligned}$$

ehk

$$\left(\frac{a_1 + ... + a_{n-1}}{n-1}\right)^{1-\frac{1}{n}} \geq \left(\sqrt[n-1]{a_1 \cdot a_2 \cdot .... \cdot a_{n-1}}\right)^{1-\frac{1}{n}},$$

millest järeldub väide $P(n-1)$. ∎

1.10.2 Hölderi ja Minkowski võrratus

Olgu $r = \frac{m}{n}$ ratsionaalarv, kus $0 < m < n$, ning olgu x ja y positiivsed reaalarvud. Võttes $a_1 := a_2 := ... := a_m := x$ ja $a_{m+1} := ... := a_n := y$, saame võrratuse (1.17) kujul

$$\frac{mx + (n-m)\,y}{n} \geq \left(x^m y^{n-m}\right)^{\frac{1}{n}},$$

millest tuleneb võrratus

$$rx + (1-r)\,y \geq x^r y^{1-r}.$$

Tuues sisse uued tähistused $a := x^r$, $b := y^{1-r}$, $p := \frac{1}{r}$, $q := \frac{1}{1-r}$ (seega $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$), saame siit järgmise väite: *kui a ja b on positiivsed reaalarvud ning p ja q on sellised ratsionaalarvud, et $p > 1$ ja $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, siis kehtib võrratus*

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab. \tag{1.18}$$

Olgu nüüd $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n$ mittenegatiivsed reaalarvud. Võtame võrratuses (1.18)

$$a := \frac{a_i}{\left(a_1^p + ... + a_n^p\right)^{\frac{1}{p}}}, \quad b := \frac{b_i}{\left(b_1^q + ... + b_n^q\right)^{\frac{1}{q}}}$$

kõikide $i = 1, ..., n$ korral ja liidame vastavad võrratused, saame

$$\frac{1}{p}\frac{a_1^p + ... + a_n^p}{a_1^p + ... + a_n^p} + \frac{1}{q}\frac{b_1^q + ... + b_n^q}{b_1^q + ... + b_n^q} \geq \frac{a_1 b_1 + ... + a_n b_n}{\left(a_1^p + ... + a_n^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(b_1^q + ... + b_n^q\right)^{\frac{1}{q}}}.$$

Kuna viimase võrratuse vasak pool võrdub arvuga 1, siis

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Seda võrratust nimetatakse *Hölderi võrratuseks.*

Juhul $p = 2$ saame Cauchy-Schwarzi võrratuse

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}.$$

Hölderi võrratuse abil tuletame järgnevalt *Minkowski võrratuse*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.19}$$

Tähistame $S := \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p$ ja paneme tähele, et

$$S = \sum_{i=1}^{n} a_i (a_i + b_i)^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} b_i (a_i + b_i)^{p-1}.$$

Rakendades Hölderi võrratust, saame

$$S \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

ehk (peame silmas võrdust $(p-1)\,q = p$)

$$S \leq S^{\frac{1}{q}} \left(\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\right),$$

millest tulenebki võrratus (1.19) (veenduda!)✠.

Minkowski võrratust (1.19) juhul $p = 2$ nimetatakse kolmnurga võrratuseks.

2 Arvjadad ja -read

2.1 Koonduvad jadad

Arvjadadeks nimetatakse funktsioone x, mille määramispiirkonnaks on kõigi naturaalarvude hulk $\mathbb{N}$. Selline funktsioon $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ seab igale naturaalarvule n vastavusse reaalarvu $x(n)$, mis tavaliselt kirjutatakse kujul x_n. Neid funktsiooni väärtusi x_n nimetatakse arvjada x *liikmeteks*, naturaalarve $n \in \mathbb{N}$ aga *indeksiteks*. Arvjada x ennast tähistame sümboliga (x_n), vajaduse korral märgime juurde indeksite määramispiirkonna, näiteks $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ või $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Tavaliselt ütleme *arvjada* asemel lihtsalt *jada.*

Tihti on kasulik võtta jada indeksite hulgaks $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup (0)$, sel juhul saame jada $(x_n)_{n=0}^{\infty}$, s.t. tema liikmed on $x_0, x_1, x_2, \ldots$.

Tõkestatud jadad. Definitsioon. Ütleme, et jada (x_n) on *tõkestatud,* kui tema liikmete hulk $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ on tõkestatud.

Selle definitsiooni kohaselt on jada (x_n) tõkestatud parajasti siis, kui

$$\text{leiduvad arvud } m \text{ ja } M \text{ omadusega } m \leq x_n \leq M \text{ iga } n \in \mathbb{N} \text{ korral.} \tag{2.1}$$

Tingimusega (2.1) on samaväärne tingimus

$$\exists\, K > 0 : |x_n| \leq K \ \ (n \in \mathbb{N})$$

(selgitada!)✠.

Koonduvad jadad. Definitsioon. Ütleme, et *jada* (x_n) *koondub arvuks* a (märgime $x_n \to a$ või $\lim\limits_{n} x_n = a$), kui

$$\text{iga } \varepsilon > 0 \text{ korral leidub } N \in \mathbb{N}, \text{ et } |x_n - a| < \varepsilon \text{ kõikide } n \geq N \text{ korral.}$$

Arvu a nimetatakse sel juhul jada (x_n) *piirväärtuseks* ja jada ennast *koonduvaks.* Mittekoonduvaid jadasid nimetatakse *hajuvateks.*

Fikseeritud arvude $a \in \mathbb{R}$ ja $\varepsilon > 0$ puhul tähistasime eelmises peatükis

$$U_\varepsilon(a) := \{c \in \mathbb{R} \mid |c - a| < \varepsilon\},$$

seda hulka nimetame punkti a *ε-ümbruseks.* Jada koonduvuse definitsioonist järeldub (kontrollida!)✠:

$$x_n \to a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists\, N \in \mathbb{N}\text{: } x_n \in U_\varepsilon(a) \text{ kõikide } n \geq N \text{ korral.}$$

Järgnevalt sõnastame **koonduvate jadade tähtsamad omadused**, tõestused on mõeldud lugejale harjutusülesanneteks.

Omadus 2.1 *Koonduva jada piirväärtus on üheselt määratud: kui $x_n \to a$ ja $x_n \to b$, siis $a = b$.*

Tõestus. Iseseisvalt!✠. ■

Omadus 2.2 *Koonduv jada on tõkestatud: kui* $x_n \to a$, *siis leiduvad arvud* m *ja* M, *et* $m \leq x_n \leq M$ $(n \in \mathbb{N})$.

Tõestus. Iseseisvalt!✠. ■

Omadus 2.3 *Kui* $x_n \leq y_n$ $(n \in \mathbb{N})$ *ning* $x_n \to a$, $y_n \to b$, *siis* $a \leq b$.

Tõestus. Iseseisvalt!✠. ■

Omadus 2.4 *Kui* $x_n \leq z_n \leq y_n$ $(n \in \mathbb{N})$ *ja* $\lim\limits_n x_n = \lim\limits_n y_n = a$, *siis* $\lim\limits_n z_n = a$.

Tõestus. Iseseisvalt!✠. ■

Omadus 2.5 *Kui* $x_n \to 0$ *ja* (y_n) *on tõkestatud jada, siis* $x_n y_n \to 0$.

Tõestus. Iseseisvalt!✠. ■

Omadus 2.6 *Kui* $x_n \to a$ *ja* $y_n \to b$, *siis*
a) $x_n + y_n \to a + b$,
b) $x_n - y_n \to a - b$,
c) $\lambda x_n \to \lambda a$ *iga* $\lambda \in \mathbb{R}$ *puhul,*
d) $x_n y_n \to ab$,
e) $x_n / y_n \to a/b$ *(eeldusel, et* $b \neq 0$*).*

Tõestus. Iseseisvalt!✠. ■

Lõpmatu piirväärtus. Definitsioon.

$$\lim_n x_n = \infty :\Leftrightarrow \forall M > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow x_n \geq M.$$

Piirväärtus $\lim\limits_n x_n = -\infty$ defineeritakse analoogiliselt (iseseisvalt!)✠.

Rõhutame, et lõpmatu piirväärtusega jada on tõkestamata, seega on ta hajuv.

2.2 Koonduvuseteooria neli printsiipi

Selles punktis esitame neli teoreemi, mis järelduvad pidevuse aksioomist. Nende sisu ja tõestus on lihtsad ja arusaadavad, samal ajal on need väited kogu järgneva kursuse jaoks fundamentaalse tähendusega.

2.2.1 Monotoonsuseprintsiip

Monotoonsed jadad. Ütleme, et jada (x_n) on *kasvav (kahanev)*, kui iga $n \in \mathbb{N}$ korral kehtib võrratus $x_n \geq x_{n-1}$ (vastavalt $x_n \leq x_{n-1}$). Kui iga $n \in \mathbb{N}$ korral $x_n > x_{n-1}$ (vastavalt $x_n < x_{n-1}$), siis öeldakse, et jada (x_n) on *rangelt* kasvav (kahanev). Jada (x_n) nimetatakse *monotoonseks*, kui ta on kas kasvav või kahanev.

Teoreem 2.7 ***(monotoonsuseprintsiip).*** *Monotoonne jada (x_n) koondub parajasti siis, kui ta on tõkestatud. Kui (x_n) on seejuures kasvav, siis $\lim\limits_n x_n = \sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, kui (x_n) on kahanev, siis $\lim\limits_n x_n = \inf\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.*

Tõestus. *Tarvilikkus* on ilmne, sest iga koonduv jada on tõkestatud.

Piisavus. Olgu (x_n) kasvav ülalt tõkestatud jada, siis pidevuse aksioomi kohaselt eksisteerib $\sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} =: b$. Näitame, et $\lim\limits_n x_n = b$. Olgu $\varepsilon > 0$. Vastavalt ülemise raja definitsioonile leidub niisugune indeks N, et $x_N > b - \varepsilon$ (vrd. lause 1.11). Kuna jada (x_n) kasvab, siis

$$b - \varepsilon < x_n \leq b < b + \varepsilon \quad \text{iga } n \geq N \text{ puhul} \tag{2.2}$$

ehk $|x_n - b| < \varepsilon$ $(n \geq N)$ (selgitada!)✠. Seega saab iga $\varepsilon > 0$ korral valida indeksi N nii, et $|x_n - b| < \varepsilon$ kõikide $n \geq N$ puhul, s.t. $\lim\limits_n x_n = b$.

Analoogiliselt tõestatakse väide kahaneva jada puhul (iseseisvalt!)✠. ■

2.2.2 Bolzano-Weierstrassi teoreem

Osajadad. Definitsioon. Olgu (x_n) jada ning (n_k) rangelt kasvav naturaalarvude (indeksite) jada, s.t. $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$. Jada $(x_{n_k}) = (x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots)$ nimetatakse jada (x_n) *osajadaks.*

Teisiti öeldes, osajada on **jada**, mis saadakse esialgsest jadast lõpliku või loenduva arvu liikmete väljajätmisel.

Lihtne on veenduda, et *piirväärtuseks a koonduva jada iga osajada koondub arvuks a* (tõestada!)✠.

Lause 2.8 *Iga jada sisaldab monotoonse osajada.*

Tõestus. Tõestuseks toome sisse jada *tippkoha* mõiste: ütleme, et

indeks m on jada (x_n) tippkoht, kui $x_n \leq x_m$ iga $n > m$ korral.

Põhimõtteliselt on jada (x_n) puhul kolm võimalust: 1) tal on lõpmata palju (täpsemalt loenduv arv) tippkohti, 2) tal on lõplik arv tippkohti ja 3) tal ei ole tippkohti. Esimesel juhul saab moodustada tippkohtade $n_1 < n_2 < \ldots$ järgi kahaneva osajada (x_{n_k}) (põhjendada!)✠, teisel juhul konstrueerime monotoonselt kasvava osajada (x_{n_i}) järgmiselt. Olgu n_1 mingi indeks, mis on suurem kõikidest tippkohtadest, siis on võimalik leida indeks $n_2 > n_1$ nii, et $x_{n_2} \geq x_{n_1}$ (põhjendada!)✠. Edasi leiame sellise $n_3 > n_2$, et $x_{n_3} \geq x_{n_2}$ jne. Tulemuseks saame kasvava osajada $(x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots)$. Samamoodi toimime ka juhul 3), võttes $n_1 := 1$. ■

Lausest 2.8 ja monotoonsuseprintsiibist tuleneb vahetult järgmine teoreem.

Teoreem 2.9 ***(Bolzano-Weierstrassi teoreem).*** *Iga tõkestatud jada sisaldab koonduva osajada.*

2.2.3 Cauchy kriteerium

Cauchy jadad. Definitsioon. Öeldakse, et jada (x_n) on *Cauchy jada*, kui iga $\varepsilon > 0$ korral leidub selline indeks N, et $|x_n - x_m| < \varepsilon$ kõikide $n, m \geq N$ korral.

Omadus 2.10 *Iga koonduv jada on Cauchy jada.*

Tõestus. Eeldame, et $x_n \to a$. Olgu $\varepsilon > 0$ suvaline, siis leidub $N \in \mathbb{N}$ omadusega

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ iga } n \geq N \text{ korral.} \tag{2.3}$$

Kui $n, m \geq N$, siis seosest (2.3) saame

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - a| + |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

seega on (x_n) Cauchy jada. ■

Omadus 2.11 *Iga Cauchy jada on tõkestatud.*

Tõestus. Eeldame, et (x_n) on Cauchy jada. Definitsiooni kohaselt leidub selline $N \in \mathbb{N}$, et

$$|x_n - x_m| < 1 \text{ kõikide } n, m \geq N \text{ korral.}$$

Tähistame $A := x_N$, siis $|x_n - A| < 1$ $(n \geq N)$ ehk

$$A - 1 < x_n < A + 1 \quad (n \geq N)$$

(selgitada!)✠. Võttes nüüd

$$m := \min\{x_1, ..., x_{N-1}, A - 1\} \quad \text{ja} \quad M := \max\{x_1, ..., x_{N-1}, A - 1\},$$

saame $m \leq x_n \leq M$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral. Seega on jada (x_n) tõkestatud. ■

Me tõestame nüüd kolmanda koonduvuseprintsiibi, mida nimetatakse Cauchy kriteeriumiks.

Teoreem 2.12 ***(Cauchy kriteerium).*** *Jada koondub parajasti siis, kui ta on Cauchy jada.*

Tõestus. *Tarvilikkus* on tõestatud omadusega 2.10.

Piisavus. Olgu (x_n) Cauchy jada. Kuna iga Cauchy jada on tõkestatud, siis Bolzano-Weierstrassi teoreemi kohaselt sisaldab (x_n) mingi koonduva osajada (x_{n_k}), tähistame $a := \lim_k x_{n_k}$ ja *näitame, et* $x_n \to a$. Olgu $\varepsilon > 0$ ja olgu N selline indeks, et

$$n, m \geq N \Rightarrow |x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.4}$$

Edasi, olgu $K \in \mathbb{N}$ valitud nii, et $K \geq N$ ja

$$|x_{n_K} - a| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.5}$$

(põhjendada sellise K olemasolu!)✠. Tingimustest (2.4) ja (2.5) saame kõigi indeksite $n \geq N$ puhul

$$|x_n - a| \leq |x_n - x_{n_K}| + |x_{n_K} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

järelikult $x_n \to a$. ■

2.2.4 Cantori teoreem üksteisesse sisestatud lõikudest

Neljas koonduvuseprintsiip - pealkirjas nimetatud teoreem - täpsustab eelmises peatükis tõestatud lauset 1.24.

Teoreem 2.13 ***(Cantori teoreem sisestatud lõikudest).*** *Kui lõigud* $[a_n, b_n]$ *rahuldavad tingimusi* $[a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}]$ $(n \in \mathbb{N})$ *ja* $\lim\limits_n (b_n - a_n) = 0$, *siis leidub parajasti üks arv* a, *mis kuulub igasse lõiku* $[a_n, b_n]$ $(n \in \mathbb{N})$.

Tõestus. Peatükis 1 tõestatud lause 1.24 kohaselt $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \varnothing$, olgu $a \in [a_n, b_n]$ iga $n \in \mathbb{N}$ puhul. Oletame vastuväiteliselt, et leidub veel teine punkt b sama omadusega ning $a \neq b$. Siis ühelt poolt, $\varepsilon := |b - a| > 0$, teisalt sisaldub lõik otspunktidega a ja b igas lõigus $[a_n, b_n]$, mistõttu $|b_n - a_n| \geq |b - a| = \varepsilon$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral. See on vastuolus eeldusega $\lim\limits_n (b_n - a_n) = 0$. ∎

Järeldus 2.14 *Teoreemi 2.13 eeldustel* $a = \lim\limits_n a_n = \lim_n b_n$.

Tõestus. Jada (a_n) on kasvav ja ülalt tõkestatud (selgitada!)✠, seega eksisteerib teoreemi 2.7 väitel $\lim\limits_n a_n = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} =: c$, analoogiliselt eksisteerib $d := \lim\limits_n b_n = \inf\{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Võrratustest $a_n \leq a \leq b_n$ $(n \in \mathbb{N})$ saame piirile minnes seosed

$$a_m \leq c \leq a \leq d \leq b_m \ \ (m \in \mathbb{N}),$$

mille kohaselt $c, d \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$. Teoreemi 2.13 põhjal $c = d = a$. ∎

2.2.5 Koonduvuseteooria põhiprintsiibid on samaväärsed pidevuse aksioomiga

Me tõestasime neli olulist teoreemi: *monotoonsuseprintsiibi* **(MP)**, *Bolzano-Weierstrassi teoreemi* **(BW)**, *Cauchy kriteeriumi* **(CK)** ning *Cantori teoreemi üksteisesse sisestatud lõikudest* **(SL)**. Kui süveneda nende väidete tõestustesse, siis on lihtne näha, et nad kõik järelduvad pidevuse aksioomist **(P)**. Nimelt kasutasime me monotoonsuseprintsiibi tõestamisel vahetult pidevuse aksioomi, Bolzano-Weierstrassi teoreemi ja sisestatud lõikude teoreemi tõestamisel lauset 1.24, järeldub vahetult pidevuse aksioomist, ning Cauchy kriteeriumi tõestamisel Bolzano-Weierstrassi teoreemi. Niisiis,

$$\textbf{(P)} \Rightarrow \textbf{(MP)} \Rightarrow \textbf{(BW)} \Rightarrow \textbf{(CK)} \ \text{ ja } \ \textbf{(P)} \Rightarrow \textbf{(SL)}.$$

Me näitame järgevalt, et **kui eeldada reaalarvude korpusel Archimedese omaduse olemasolu**, siis kõik nimetatud viis väidet on omavahel samaväärsed. Selleks piisab kontrollida kahte implikatsiooni: **(CK)** ⇒ **(SL)** ⇒ **(P)** (selgitada!)✠. Kehtib järgmine üldine lause.

Lause 2.15 *Kui järjestatud korpusel* F *on Archimedese omadus, s.t. kõigi naturaalarvude hulk* $\mathbb{N}$ *on tõkestamata, siis järgmised väited selles korpuses on samaväärsed:*
(P) *pidevuse aksioom,*
(MP) *monotoonsuseprintsiip,*
(BW) *Bolzano-Weierstrassi teoreem,*
(CK) *Cauchy kriteerium,*
(SL) *Cantori teoreem üksteisesse sisestatud lõikudest*

Tõestus. **(I)** *Tõestame kõigepealt, et Caucy kriteeriumist järeldub Cantori teoreem üksteisesse sisestatud lõikudest*, s.t. **(CK)** $\Rightarrow$ **(SL)**. Eeldame, et Cauchy kriteerium kehtib, s.t. iga Cauchy jada järjestatud korpuses F on koonduv. Olgu

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset ... \supset [a_n, b_n] \supset ...$$

üksteisesse sisestatud lõikude jada, kusjuures $\lim_n (b_n - a_n) = 0$. Peame näitama, et lõikudel $[a_n, b_n]$ $(n \in \mathbb{N})$ on parajasti üks ühine punkt a. Veendume kõigepealt, et jadad (a_n) ja (b_n) on Cauchy jadad.

Olgu ε suvaline positiivne element korpuses F. Leiame niisuguse indeksi N, et $0 < b_N - a_N < \varepsilon$. Kuna $a_n, a_m, b_n, b_m \in [a_N, b_N]$ kõikide $m, n \geq N$ korral, siis

$$|a_n - a_m| \leq b_N - a_N < \varepsilon \ \text{ ja } \ |b_n - b_m| \leq b_N - a_N < \varepsilon \quad (m, n \geq N)\,.$$

Seega on (a_n) ja (b_n) Cauchy jadad. Eelduse **(CK)** kohaselt on nad koonduvad ja $\lim_n a_n = \lim_n b_n$ (kontrollida!)✠. Näitame, et nende ühine piirväärtus a ongi otsitav punkt. Paneme tähele, et

$$a_n \leq a \leq b_n \ \text{ kõikide } n \in \mathbb{N} \text{ korral.}$$

Tõepoolest, kui oletada, et $a_{n_0} > a$ mingi n_0 korral, siis $a_n > a_{n_0} > a$ kõikide $n \geq n_0$ puhul, mistõttu saame vastuolu faktiga $a_n \to a$:

$$|a_n - a| = a_n - a > \varepsilon_0 := a_{n_0} - a \quad (n \geq n_0)\,.$$

Analoogiliselt veendutakse, et $a \leq b_n$ kõikide $n \in \mathbb{N}$ korral. Nii nagu teoreemi 2.13 tõestuses veendutakse, et a on ainuke punkt hulgas $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$.

(II) *Tõestame nüüd, et Cantori teoreemist üksteisesse sisestatud lõikudest tuleneb pidevuse aksioom*, s.t. **(SL)** $\Rightarrow$ **(P)**. Eeldame, et teoreem üksteisesse sisestatud lõikudest kehtib. Olgu $X \subset F$ mittetühi ülalt mingi elemendiga $b \in F$ tõkestatud hulk. Peame veenduma, et hulgal X leidub ülemine raja.

Vaatleme kahte juhtu. Esiteks, kui $b \in X$, siis $b = \max X = \sup X$ ja seega on tõestus lõpule viidud. Teiseks, kui $b > x$ iga $x \in X$ korral, siis fikseerime mingi $a \in X$ ning vaatleme lõiku $[a, b]$. Poolitame selle lõigu ning valime eelislõiguks kahest oslõigust selle, mis rahuldab järgmisi tingimusi: 1) ta sisaldab hulga X elemente ja 2) ei leidu ühtki hulga X elementi, mis on suurem selle osalõigu kõigist elementidest. Vähemalt üks poolitamisel tekkinud osalõikudest on eelislõik (kontrollida!)✠. Tähistame eelislõigu $[a_1, b_1]$ ja poolitame omakorda selle lõigu. Tekkinud kahe osalõigu hulgast vähemalt üks rahuldab eelislõigu tingimusi 1) ja 2), tähistame selle $[a_2, b_2]$ jne. Niiviisi jätkates saame üksteisesse sisestatud lõikude $[a_n, b_n]$ jada. Kuna lõigu $[a_n, b_n]$ pikkus on $\frac{b-a}{2^n}$, siis tänu Archimedese omadusele $\lim_n (b_n - a_n) = 0$ (selgitada!)✠. Niisiis, sisestatud lõikude teoreemi kõik eeldused on täidetud, järelikult leidub lõikudel $[a_n, b_n]$ $(n \in \mathbb{N})$ parajasti üks ühine punkt c. Nii nagu järelduse 2.14 tõestuses veendume, et $c = \lim_n a_n = \lim_n b_n$ (kontrollida!)✠. Näitame, et $c = \sup X$.

Element c on hulga X ülemine tõke. Kui oletada, et c ei ole hulga X ülemine tõke, siis leidub $x \in X$ omadusega $x > c$. Tähistame $\varepsilon := x - c$ ja leiame $m \in \mathbb{N}$ omadusega $b_m - c = |b_m - c| < \varepsilon = x - c$ (selgitada!)✠ ehk $b_m < x$. See on vastuolus eelislõigu tingimusega 2) (põhjendada!)✠.

Element c on hulga X vähim ülemine tõke. Oletame vastuväiteliselt, et hulgal X on olemas ülemine tõke M omadusega $M < c$. Tähistame $\varepsilon := c - M$ ja leiame $r \in \mathbb{N}$ omadusega $c - a_r = |a_r - c| < \varepsilon = c - M$ (selgitada!)✠ ehk $a_r > M$. See on vastuolus eelislõigu tingimusega 1) (selgitada!)✠.

Kokkuvõttes on element c hulga X ülemine raja. ■

2.3 Osajadad ja -piirväärtused

Järgneva arutelu **lähtepunktiks on Bolzano-Weierstrassi teoreem.** Kui (x_n) on tõkestatud jada, siis saab valida tema osajada (x_{n_k}), mis koondub mingiks punktiks a. Sel juhul sisaldab punkti a ümbrus $U_\varepsilon(a)$ iga $\varepsilon > 0$ korral *lõpmata palju* jada (x_n) liikmeid (selgitada!)✠. See on aluseks järgmisele definitsioonile.

Definitsioon. Jada *kuhjumispunktiks* (ehk piirpunktiks) nimetatakse arvu, mille *igas* ümbruses on *lõpmata palju* vaadeldava jada liikmeid.

Eelneva märkuse kohaselt *on koonduva osajada piirväärtus esialgse jada kuhjumispunkt.* Täpsemalt kehtib järgmine väide.

Lause 2.16 *Arv a on jada (x_n) kuhjumispunkt parajasti siis, kui leidub selline osajada (x_{n_k}), mis koondub arvuks a.*

Tõestus. Olgu a jada (x_n) kuhjumispunkt. Vaatleme tema ümbrusi $U_{1/k}(a)$ $(k \in \mathbb{N})$, neist igaühes on lõpmata palju jada (x_n) liikmeid. Fikseerime ümbruses $U_1(a)$ neist ühe, tähistame selle x_{n_1}. Edasi valime ümbrusest $U_{1/2}(a)$ jada liikme x_{n_2} nii, et $n_2 > n_1$. (**NB!** See on võimalik, sest ümbruses $U_{1/2}(a)$ on lõpmata palju jada liikmeid.) Ümbrusest $U_{1/3}(a)$ valime x_{n_3} nii, et $n_3 > n_2$ jne. Saame jada (x_{n_k}), kusjuures $n_k > n_{k-1}$ suvalise $k \in \mathbb{N}$ korral. Seega on (x_{n_k}) esialgse jada (x_n) osajada. Kuna $|x_{n_k} - a| < \frac{1}{k}$ ja $\frac{1}{k} \to 0$ protsessis $k \to \infty$, siis $x_{n_k} \to a$. ■

Lausest 2.16 tulenevad järgmised faktid (põhjendada!).
(i) Igal tõkestatud jadal on vähemalt üks kuhjumispunkt.✠
(ii) Tõkestamata jadal võivad kuhjumispunktid puududa (tuua näide!).✠
(iii) Kui arv b esineb jada (x_n) liikmena lõpmata palju kordi, siis b on selle jada kuhjumispunkt.✠

Suurim ja vähim kuhjumispunkt. Olgu (x_n) tõkestatud jada ja olgu m ning M sellised arvud, et $m \le x_n \le M$ $(n \in \mathbb{N})$. Kui a on selle jada kuhjumispunkt, siis $m \le a \le M$ (põhjendada!)✠. Seega paiknevad jada (x_n) kõik kuhjumispunktid lõigus $[m, M]$, mistõttu hulk

$$H := \{a \mid a \text{ on jada } (x_n) \text{ kuhjumispunkt}\}$$

on tõkestatud ja ei ole tühi (selgitada!)✠. Pidevuse aksioomi kohaselt eksisteerivad arvud

$$m' := \inf H \text{ ja } M' := \sup H.$$

Me näitame järgnevalt, et arvud m' ja M' on ka jada (x_n) kuhjumispunktid.

Lause 2.17 *Tõkestatud jada kuhjumispunktide hulgas leiduvad suurim ja vähim element.*

Tõestus. Veendume, et $M' \in H$. Olgu $U_\varepsilon(M')$ punkti M' suvaline ümbrus, meie eesmärk on näidata, et ta sisaldab lõpmata palju jada (x_n) liikmeid. Ülemise raja definitsiooni kohaselt saab leida niisuguse $b \in H$, et

$$M' - \varepsilon < b \le M'.$$

Olgu $\delta > 0$ selline arv, et $b - \delta > M' - \varepsilon$, s.t. $\delta < b - M' + \varepsilon \leq \varepsilon$ (peame silmas, et $b - M' \leq 0$). Saame võrratuste ahela

$$M' - \varepsilon < b - \delta < b + \delta \leq M' + \delta < M' + \varepsilon,$$

niisiis, $(b - \delta, b + \delta) \subset (M' - \varepsilon, M' + \varepsilon)$ ehk

$$U_\delta\,(b) \subset U_\varepsilon\,(M')\,. \tag{2.6}$$

Kuna b on jada (x_n) kuhjumispunkt, siis tema ümbrus $U_\delta\,(b)$ sisaldab lõpmata palju selle jada liikmeid. Sisalduvuse (2.6) kohaselt on siis ka hulgas $U_\varepsilon\,(M')$ lõpmata palju jada (x_n) liikmeid, s.t. M' on jada kuhjumispunkt.

Analoogiliselt veendutakse, et $m' \in H$ (isesisvalt!)✠. ∎

Definitsioon. Tõkestatud jada (x_n) suurimat (vähimat) kuhjumispunkti tähistatakse $\limsup_n x_n$ või $\overline{\lim_n} x_n$ ($\liminf_n x_n$ või $\underline{\lim_n} x_n$) ja nimetatakse (ladinakeelselt) *limes superior*'iks (*limes inferior*'iks).

Lause 2.18 *Jada (x_n) koondub parajasti siis, kui ta on tõkestatud ja tal on vaid üks kuhjumispunkt. Sel juhul* $\limsup_n x_n = \liminf_n x_n = \lim_n x_n$.

Tõestus. *Tarvilikkus.* Eeldame, et $\lim_n x_n = a$, siis ka iga osajada (x_{n_k}) koondub piirväärtuseks a. Seega $H = \{a\}$ (põhjendada!)✠ ja $\limsup_n x_n = \liminf_n x_n = \lim_n x_n$.

Piisavus. Olgu (x_n) tõkestatud jada, millel on ainuke kuhjumispunkt a. Oletame vastuväiteliselt, et a ei ole selle jada piirväärtus. Sel juhul leidub niisugune $\varepsilon > 0$, et $x_n \notin U_\varepsilon\,(a)$ lõpmata paljude n korral. Tähendab, lõpmata paljude indeksite n korral kas $x_n \leq a - \varepsilon$ või $x_n \geq a + \varepsilon$.

Esimesel juhul eksisteerib osajada (x_{n_k}) omadusega $x_{n_k} \leq a - \varepsilon$ $(k \in \mathbb{N})$, sellest saab omakorda moodustada koonduva osajada $\left(x_{n_{k_i}}\right)$. Olgu $c := \lim_i x_{n_{k_i}}$, siis $c \leq a - \varepsilon < a$ (selgitada!)✠. Teisalt on c on jada (x_n) kuhjumispunkt (selgitada!)✠, seega $c = a$. Saime vastuolu.

Analoogiliselt jõutakse vastuoluni, kui eeldada võrratust $x_n \geq a + \varepsilon$ lõpmata paljude indeksite n korral (selgitada!)✠. Seega on meie vastuväiteline oletus, et a ei ole jada (x_n) piirväärtus, väär. ∎

Tarvilik ja piisav tingimus suurima ja vähima osapiirväärtuse olemasoluks. *Limes superiori* ja *limes inferiori* n.ö. geomeetriliseks kirjeldamiseks tõestame järgnevalt kaks lauset.

Lause 2.19 *Olgu (x_n) tõkestatud jada. Võrdus* $a = \limsup_n x_n$ *kehtib parajasti siis, kui iga $\varepsilon > 0$ puhul arv a rahuldab võrratust*

$$x_n > a - \varepsilon \quad \text{lõpmata paljude jada liikmete } x_n \text{ korral} \tag{2.7}$$

ja võrratust

$$x_n > a + \varepsilon \quad \text{vaid lõpliku arvu jada liikmete } x_n \text{ korral.} \tag{2.8}$$

Tõestus. *Tarvilikkus.* Eeldame, et arv a on jada (x_n) suurim kuhjumispunkt, olgu ε suvaline positiivne arv. Punkti a ümbruses $U_\varepsilon(a)$ on lõpmata palju jada (x_n) liikmeid, seega kehtib tingimus (2.7). Oletame vastuväiteliselt, et tingimus (2.8) ei ole täidetud. Siis eksisteerib osajada (x_{n_k}), mille kõik liikmed on suuremad kui $a+\varepsilon$. Bolzano-Weierstrassi teoreemi kohaselt sisaldab jada (x_{n_k}) koonduva osajada $\left(x_{n_{k_i}}\right)$, tähistame tähega c tema piirväärtuse. Kuna $\left(x_{n_{k_i}}\right)$ on ka esialgse jada (x_n) osajada, siis on c jada (x_n) kuhjumispunkt. Seejuures tuleneb võrratusest $x_{n_{k_i}} > a+\varepsilon$ $(i \in \mathbb{N})$ tingimus $a < a+\varepsilon \leq c$ (põhjendada!)✠, mis on vastuolus eeldusega $a = \limsup\limits_n x_n$. Niisiis, eeldusest $a = \limsup\limits_n x_n$ järelduvad tingimused (2.7) ja (2.8).

Piisavus. Olgu tingimused (2.7) ja (2.8) täidetud suvalise $\varepsilon > 0$ puhul, siis punkti a ümbruses $U_\varepsilon(a)$ on lõpmata palju jada (x_n) liikmeid (põhjendada!)✠. See tähendab, et arv a on jada (x_n) kuhjumispunkt. Seejuures ükski punkt $c > a$ ei saa kuhjumispunkt olla: kui võtame $\varepsilon := (c-a)/2$, siis punkti c ümbruses $U_\varepsilon(c)$ on vaid lõplik arv jada (x_n) liikmeid. Tähendab, $a = \limsup\limits_n x_n$. ■

Analoogiliselt eelnevaga tõestatakse ka järgmine lause (iseseisvalt!)✠.

Lause 2.20 *Olgu (x_n) tõkestatud jada. Võrdus $b = \liminf\limits_n x_n$ kehtib parajasti siis, kui iga $\varepsilon > 0$ puhul arv b rahuldab võrratust*

$$x_n < b+\varepsilon \quad \text{lõpmata paljude jada liikmete } x_n \text{ korral}$$

ja võrratust

$$x_n < b-\varepsilon \quad \text{vaid lõpliku arvu jada liikmete } x_n \text{ korral.}$$

2.4 Aritmeetilised ja kaalutud keskmised. Stolzi teoreem

2.4.1 Aritmeetilised keskmised

Olgu (x_k) arvjada, moodustame uue jada (z_n) tema liikmete aritmeetilistest keskmistest $z_1 := x_1$, $z_2 := \frac{x_1+x_2}{2}$, $z_3 := \frac{x_1+x_2+x_3}{3}$, ..., $z_n := \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$, ... Teisi sõnu, $(z_n) = \left(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Esitame kaks küsimust.

1. *Kui jada (x_n) on koonduv, kas siis koondub ka jada (z_n)?*
2. *Kas jada (z_n) koonduvusest järeldub jada (x_n) koonduvus?*

Esimesele küsimusele annab vastuse järgmine lause.

Lause 2.21 ***(Cauchy piirväärtusteoreem).*** *Kui $x_k \to a$, siis $\frac{1}{n}(x_1+\ldots+x_n) \to a$.*

Tõestus. Näitame **kõigepealt**, et väide kehtib juhul $a = 0$. Olgu $\varepsilon > 0$. Kuna $x_n \to 0$, siis leidub selline $m \in N$, et $|x_k| < \frac{\varepsilon}{2}$ iga $k \geq m$ korral. Seega

$$\frac{|x_{m+1}+\ldots+x_n|}{n-m} \leq \frac{|x_{m+1}|+\ldots+|x_n|}{n-m} < \frac{(n-m)\frac{\varepsilon}{2}}{n-m} = \frac{\varepsilon}{2},$$

mistõttu muidugi $\frac{|x_{m+1}+\ldots+x_n|}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$, kui eeldada, et $n > m$. Teisalt, kui m on fikseeritud, siis $\frac{|x_1+\ldots+x_m|}{n} \to 0$ $(n \to \infty)$ (selgitada!)✠. Järelikult saab valida sellise indeksi l, et $\frac{|x_1+\ldots+x_m|}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$ iga $n \geq l$ korral. Niisiis, kui $n > \max\{m, l\}$, siis

$$\frac{|x_1+\ldots+x_n|}{n} \leq \frac{|x_1+\ldots+x_m|}{n} + \frac{|x_{m+1}+\ldots+x_n|}{n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

s.t. $\lim\limits_n \frac{x_1+...+x_n}{n} = 0$.

Üldjuhul, kui $x_n \to a$, siis $x_n - a \to 0$ ja

$$\frac{x_1 + ... + x_n}{n} - a = \frac{(x_1 - a) + ... + (x_n - a)}{n} \to 0,$$

s.t. $\lim\limits_n \frac{x_1+...+x_n}{n} = a$. ■

Vastus teisele küsimusele on eitav, see selgub järgmisest **näitest**. Vaatleme jada $\left((-1)^k\right)$, s.t. $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$, ... Sellel jadal on kaks kuhjumispunkti, $\limsup_k x_k = \lim_k x_{2k} = 1$ ja $\liminf_k x_k = \lim_k x_{2k-1} = -1$. Kuna $\limsup_k x_k \neq \liminf_k x_k$, siis lause 2.18 kohaselt jada (x_k) hajub. Samal ajal

$$\begin{aligned} z_n &= \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = \frac{(-1) + 1 + ... + (-1)^n}{n} \\ &= \begin{cases} -\frac{1}{n}, & \text{kui } n = 2i - 1, \\ 0, & \text{kui } n = 2i \end{cases} \quad (i \in \mathbb{N}), \end{aligned}$$

seega $z_n \to 0$.

Cauchy piirväärtusteoreemiga analoogiline väide kehtib ka mittenegatiivsete liikmetega jada (x_n) **geomeetriliste keskmiste**

$$z_1 := x_1, \ z_2 := \sqrt{x_1 x_2}, ..., \ z_n := \sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n}, ...$$

korral.

Lause 2.22 *Kui* $x_k > 0$ $(k \in \mathbb{N})$ *ja* $x_k \to a$, *siis* $\sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n} \to a$.

Tõestus. Selge, et $a \geq 0$. Vaatleme algul juhtu $a > 0$. Kuna logaritmfunktsioon on pidev, siis eeldusest $x_k \to a$ järeldub, et $\ln x_k \to \ln a$ (selgitada!)✠. Seega lausest 2.21 järeldub

$$\alpha_n := \ln z_n = \frac{\ln x_1 + \ln x_2 + ... + \ln x_n}{n} \to \ln a.$$

Eksponentfunktsiooni pidevust kasutades saame

$$z_n = e^{\alpha_n} \to e^{\ln a} = a$$

(selgitada!)✠.

Juhul $a = 0$ kasutame eelpool tõestatud võrratust $\sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n} \leq \frac{1}{n}(x_1 + ... + x_n)$ (vt. lause 1.29), millest saame $\sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n} \to 0$. ■

2.4.2 Kaalutud keskmised

Aritmeetiliste keskmiste üldistusena vaadeldakse antud jada (x_k) nn. *kaalutud keskmiste jada* (z_n). Nende defineerimiseks fikseeritakse nn. kaalude jada (p_k), kusjuures eeldatakse, et

$$p_k > 0 \text{ ja } P_n := p_1 + p_2 + ... + p_n \to \infty.$$

Märgime, et selle definitsiooni kohaselt on aritmeetilised keskmised kõik kaaluga 1, s.t. $p_k = 1$ $(k \in \mathbb{N})$.

Kehtib järgmine lausega 2.21 analoogiline väide.

Lause 2.23 *Kui $x_n \to a$, siis*

$$\frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + ... + p_n x_n}{P_n} \to a.$$

Tõestus kordab lause 2.21 tõestust (iseseisvalt!)✠.

2.4.3 Stolzi teoreem

Kaalutud keskmiste abil saab anda lihtsa tõestuse järgmisele Stolzi teoreemile.

Lause 2.24 ***(Stolzi teoreem).*** *Olgu (v_k) tõkestamata rangelt kasvav positiivsete arvude jada. Kui (u_k) on selline jada, et*

$$\lim_k \frac{u_k - u_{k-1}}{v_k - v_{k-1}} = a,$$

siis $\lim_n \frac{u_n}{v_n} = a$.

Tõestus. Tähistame $u_0 := v_0 := 0$ ja võtame lauses 2.23 $p_k := v_k - v_{k-1}$ $(k \in \mathbb{N})$. Siis $p_k > 0$ ja $P_n \to \infty$ (kontrollida!)✠ ning lausest 2.23 järeldub, et

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{p_1 \frac{u_1 - u_0}{v_1 - v_0} + p_2 \frac{u_2 - u_1}{v_2 - v_1} + ... + p_n \frac{u_n - u_{n-1}}{v_n - v_{n-1}}}{P_n} \to a.$$

Lause on tõestatud. ■

Stolzi teoreemi rohkearvulistest rakendustest toome järgmise näite.

Näide 1. Leida piirväärtus

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1^r + 2^r + ... + k^r}{k^{r+1}}, \text{ kus } r \text{ on mingi naturaalarv.}$$

Võtame lauses 2.24 $u_k := 1^r + 2^r + ... + k^r$ ja $v_k := k^{r+1} (k \in \mathbb{N})$, siis $u_k - u_{k-1} = k^r$ ja $v_k - v_{k-1} = k^{r+1} - (k-1)^{r+1}$. Lause 2.24 põhjal

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1^r + 2^r + ... + k^r}{k^{r+1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^r}{k^{r+1} - (k-1)^{r+1}}.$$

Kuid Newtoni binoomvalemi kohaselt

$$(k-1)^{r+1} = k^{r+1} - (r+1)\, k^r + ... + (-1)^{r+1},$$

kust $k^{r+1} - (k-1)^{r+1} = (r+1)\, k^r + ... + (-1)^{r+1}$ $(k \in \mathbb{N})$. Saame

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k^r}{k^{r+1} - (k-1)^{r+1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^r}{(r+1)\, k^r + ... + (-1)^{r+1}} = \frac{1}{r+1}.$$

Niisiis, $\lim_{k\to\infty} \frac{1^r + 2^r + ... + k^r}{k^{r+1}} = \frac{1}{r+1}$.

2.5 Arvread, nende koonduvus

Olgu (u_k) arvjada. Avaldist

$$u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ...$$

nimetame *arvreaks* ehk lihtsalt *reaks,* arve u_k $(k \in \mathbb{N})$ selle rea *liikmeteks.* Tavaliselt tähistame vaadeldavat rida sümboliga $\sum\limits_k u_k$, vajaduse korral täpsemalt $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$.

Antud reale $\sum\limits_k u_k$ vastab tema osasummade

$$s_1 := u_1, \quad s_2 := u_1 + u_2, ..., \quad s_n := \sum_{k=1}^{n} u_k, ...$$

jada (s_n).

Definitsioon. Rida $\sum\limits_k u_k$ nimetatakse *koonduvaks*, kui tema osasummade jada (s_n) koondub lõplikuks piirväärtuseks. Piirväärtust $\lim\limits_n s_n$ nimetatakse sel juhul rea $\sum\limits_k u_k$ *summaks.* Mittekoonduvat rida nimetatakse *hajuvaks.*

Definitsioonist saame järgmise lihtsa **tarviliku tingimuse** rea koonduvuseks.

Lause 2.25 *Kui rida* $\sum\limits_k u_k$ *koonduvub, siis* $u_k \to 0$.

Tõestus. Kui rida $\sum\limits_k u_k$ koondub, siis eksisteerib lõplik piirväärtus $\lim_n s_n =: s$. Seejuures

$$\lim_n u_n = \lim_n (s_n - s_{n-1}) = \lim_n s_n - \lim_n s_{n-1} = s - s = 0.$$

■

Märkused. 1. Juhime lugeja tähelepanu sellele, et edaspidi tähistame sümboliga $\sum\limits_k u_k$ nii rida ennast kui ka tema summat, muidugi juhul, kui see eksisteerib, s.t. kui rida $\sum\limits_k u_k$ on koonduv.

2. Nii nagu jadade puhul, võivad ka rea indeksid alata kas nullist või siis suvalisest naturaalarvust p. Näiteks rida $\sum\limits_{k=p}^{\infty} u_k := u_p + u_{p+1} + ...$ nimetatakse esialgse rea $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ p-ndaks *jääkliikmeks.* Seosest

$$\sum_{k=p}^{\infty} u_k = \sum_{k=1}^{\infty} u_k - s_p,$$

mis on õige iga rea $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ korral, tuleneb, et **koonduva** rea *jääkliikmed moodustavad nulliks koonduva jada,* s.t. $\lim_{p\to\infty} \sum\limits_{k=p}^{\infty} u_k = 0$.

3. Igale reale $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ vastab (üheselt määratud) osasummade jada $(s_n) = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} u_k\right)$. Vastupidi, iga jada $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ korral leidub üheselt määratud rida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$, mille osasummade jada on

(x_n), selleks tuleb võtta $u_n := x_n - x_{n-1}$ ($n \in \mathbb{N}$; siin $x_0 := 0$). Niisiis, **kõigi ridade hulga ja kõigi jadade hulga vahel on üks-ühene vastavus, kusjuures koonduvatele ridadele vastavad koonduvad jadad** (selgitada!)✠. Seetõttu on ridadele lihtsalt ülekantavad kõik jadade koonduvust puudutavad väited. Selle tähelepaneku kinnituseks tõestame *Cauchy kriteeriumi ridade jaoks.*

Lause 2.26 *Rida* $\sum\limits_k u_k$ *koondub parajasti siis, kui iga* $\varepsilon > 0$ *puhul saab leida sellise indeksi* $N \in \mathbb{N}$, *et kui* $m > n \geq N$, *siis* $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{m} u_k\right| < \varepsilon$.

Tõestus. Definitsiooni järgi tähendab rea $\sum\limits_k u_k$ koonduvus tema osasummade jada (s_n) koonduvust. Cauchy kriteeriumi (vt teoreem 2.12) kohaselt koondub jada (s_n) parajasti siis, kui iga $\varepsilon > 0$ korral leidub niisugune $N \in \mathbb{N}$, et $|s_m - s_n| < \varepsilon$ suvaliste $m, n \geq N$ puhul. Eeldame, et $m > n$, ja paneme tähele, et

$$s_m - s_n = \sum_{k=1}^{m} u_k - \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=n+1}^{n} u_k.$$

Kokkuvõttes on rea $\sum\limits_k u_k$ koonduvus samaväärne tingimusega

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} : m > n \geq N \Rightarrow \left|\sum_{k=n+1}^{m} u_k\right| < \varepsilon.$$

Lause on tõestatud. ■

Lihtne on näha, et kui rea liikmed u_k on kõik mittenegatiivsed, siis osasummade jada (s_n) on kasvav (põhjendada!)✠. Monotoonsusprintsiibi (vt. teoreem 2.7) kohaselt kehtib järgmine väide.

Omadus 2.27 *Mittenegatiivsete liikmetega rida* $\sum\limits_k u_k$ *koondub parajasti siis, kui ta osasummade jada* (s_n) *on tõkestatud.*

Tõestus. Iseseisvalt!✠ ■

Lepime kokku tähistada *mittenegatiivsete liikmetega* rea $\sum\limits_k u_k$ puhul tema koonduvust $\sum\limits_k u_k < \infty$, seevastu $\sum\limits_k u_k = \infty$ tähendab selle rea hajuvust.

Absoluutne koonduvus. Iga rea $\sum\limits_k u_k$ puhul võib vaadelda mittenegatiivsete liikmetega rida $\sum\limits_k |u_k|$. Kui $\sum\limits_k |u_k| < \infty$, siis öeldakse, et rida $\sum\limits_k u_k$ *koondub absoluutselt.* Selge, et mittenegatiivsete liikmetega rida koondub parajasti siis, kui ta koondub absoluutselt.

Omadus 2.28 *Iga absoluutselt koonduv rida on koonduv.*

Tõestus. Iseseisvalt! ✠ (Kasutada Cauchy kriteeriumit!) ■

Näiteid. 2. Geomeetriline rida $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ koondub, kui $|q| < 1$. Sel juhul $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ (põhjendada!)✠.

3. Rida $\sum_k (-1)^k$ hajub (põhjendada!)✠.

4. (NB! Oluline!) Rida $\sum_k \frac{1}{k}$ hajub, kuigi $\frac{1}{k} \to 0$ $(k \to \infty)$. Seega tarvilik tingimus $\lim_k u_k = 0$ ei ole piisav rea $\sum_k u_k$ koonduvuseks!

Tõestus. Oletame vastuväiteliselt, et $\sum_k \frac{1}{k}$ koondub summaks a, s.t. $s_n = 1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n} \to a$, siis muidugi ka $s_{2n} \to a$ $(n \to \infty)$. Teisalt kehtib $s_{2n}-s_n = \frac{1}{n+1}+...+\frac{1}{2n} > \frac{1}{2n}+...+\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$ suvalise $n \in \mathbb{N}$ korral. Siit tuleneb vastuolu: $0 = \lim_n s_{2n} - \lim_n s_n = \lim_n (s_{2n} - s_n) \geq \frac{1}{2}$. ■

Omadus 2.29 ***(harmooniliste ridade koonduvus).*** *Rida $\sum_k \frac{1}{k^\alpha}$ koondub parajasti siis, kui $\alpha > 1$.*

Tõestus. Iseseisvalt!✠ ■

2.6 Ridade koonduvustunnused

Ridade koonduvuse testimiseks on leitud mitmeid erinevaid **koonduvustunnuseid.** Enamasti on need rakendatavad mittenegatiivsete liikmetega ridade korral või siis rea absoluutse koonduvuse kindlakstegemisel. Tavaliselt võrreldakse uuritavat rida mingi lihtsama tuntud reaga.

Lause 2.30 ***(esimene võrdluslause).*** *Olgu $\sum_k u_k$ ja $\sum_k v_k$ mittenegatiivsete liikmetega read. Kui leidub selline $K \in \mathbb{N}$, et*

$$0 \leq u_k \leq v_k \quad \text{iga } k \geq K \text{ korral,} \tag{2.9}$$

ning $\sum_k v_k < \infty$, siis $\sum_k u_k < \infty$ koondub. Kui $\sum_k u_k = \infty$, siis $\sum_k v_k = \infty$.

Tõestus. Iseseisvalt!✠ ■

Lause 2.31 ***(teine võrdluslause).*** *Eeldame, et $\sum_k u_k$ ja $\sum_k v_k$ on positiivsete liikmetega read ning eksisteerib lõplik piirväärtus $\lim_k \frac{u_k}{v_k} =: L \neq 0$. Sel juhul rida $\sum_k u_k$ koondub parajasti siis, kui koondub rida $\sum_k v_k$.*

Tõestus. Iseseisvalt!✠ ■

Tõestatud võrdluslausete abil saab leida konkreetseid koonduvustunnuseid, kui võrrelda uuritavat rida mingi konkreetse reaga. Järgnevalt tõestame kaks lauset, kus rida $\sum_k u_k$ **võrreldakse geomeetrilise reaga.**

Lause 2.32 ***(Cauchy koonduvustunnus).*** *Rida* $\sum_k u_k$ *koondub absoluutselt, kui* $a := \limsup_k \sqrt[k]{|u_k|} < 1$, *ja hajub, kui* $a > 1$.

Tõestus. Olgu $a < 1$. Valime suvalise arvu q omadusega $a < q < 1$. Paneme tähele, et võrratus $\sqrt[k]{|u_k|} > q$ saab olla täidetud vaid lõpliku arvu indeksite k korral, vastasel juhul saaks moodustada osajada $\left(\sqrt[k_i]{|u_{k_i}|}\right)$, mis koondub arvust a suuremaks piirväärtuseks (veenduda!)✠. Seega leidub niisugune indeks K, et $\sqrt[k]{|u_k|} \le q$ kõikide $k \ge K$ puhul ehk

$$|u_k| \le q^k \quad (k \ge K)\,.$$

Kuna geomeetriline rida $\sum_k q^k$ koondub, siis esimese võrdluslause põhjal koondub rida $\sum_k u_k$ absoluutselt.

Kui $a > 1$, siis võtame $\varepsilon > 0$ nii väikese, et $1 < a - \varepsilon < a$. Kuna arv a on jada $\left(\sqrt[k]{|u_k|}\right)$ kuhjumispunkt, siis sisaldab tema ümbrus $U_\varepsilon(a)$ lõpmata palju selle jada liikmeid. Kõik need liikmed on suuremad kui arv 1, seetõttu ei saa rea $\sum_k u_k$ liikmed rahuldada tingimust $u_k \to 0$, mis oleks tarvilik rea koonduvuseks. ■

Lause 2.33 ***(D'Alemberti tunnus).*** *Rida* $\sum_k u_k$ *koondub absoluutselt, kui eksisteerib piirväärtus* $a := \lim_k \left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right|$ *ning* $a < 1$. *Kui* $a > 1$, *siis rida* $\sum_k u_k$ *hajub.*

Tõestus. Olgu $a < 1$, näitame, et $\sum_k |u_k| < \infty$. Valime arvu q omadusega $a < q < 1$ ja paneme tähele, et mingist indeksist N alates peavad jada $\left(\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right|\right)$ liikmed kuuluma punkti a ümbrusse $U_\varepsilon(a)$, kus $\varepsilon := q - a$. Need liikmed rahuldavad võrratust $\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| < q$. Niisiis, iga $k > N$ puhul saame

$$\frac{|u_k|}{|u_N|} = \frac{|u_k|}{|u_{k-1}|} \cdot \frac{|u_{k-1}|}{|u_{k-2}|} \cdot \ldots \cdot \frac{|u_{N+1}|}{|u_N|} < q^{k-N}$$

ehk

$$|u_k| < |u_N|\, q^{k-N} \quad (k \ge N)\,.$$

Kuna rida $\sum_{k=N}^{\infty} |u_N|\, q^{k-N}$ koondub (põhjendada!)✠, siis koondub ka rida $\sum_{k=1}^{\infty} |u_N|\, q^{k-N}$ (põhjendada!)✠ ja lause 2.30 kohaselt $\sum_k |u_k| < \infty$.

Olgu $a > 1$ ja $\varepsilon > 0$ selline, et $1 < a - \varepsilon < a$. Kuna mingist indeksist N alates jada $\left(\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right|\right)$ liikmed kuuluvad punkti a ümbrusse $U_\varepsilon(a)$, siis

$$\frac{|u_k|}{|u_N|} = \frac{|u_k|}{|u_{k-1}|} \cdot \frac{|u_{k-1}|}{|u_{k-2}|} \cdot \ldots \cdot \frac{|u_{N+1}|}{|u_N|} > 1$$

ehk

$$|u_k| > |u_N| > 0 \quad (k \ge N)\,.$$

Seega ei ole täidetud rea koonduvuseks tarvilik tingimus $u_k \to 0$. ■

Jätkame uue koonduvustunnusega, mis kirjeldab **vahelduvate märkidega rea** koonduvust.

Lause 2.34 ***(Leibnizi tunnus).*** *Rida* $\sum\limits_k (-1)^k u_k$ *koondub, kui jada* (u_k) *koondub nulliks monotoonselt.*

Tõestus. Eeldame, et $0 < u_k \searrow 0$, juhul $0 > u_k \nearrow 0$ on tõestus analoogiline. Tähistame

$$A_n := s_{2n-1} = \sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^k u_k \text{ ja } B_n := s_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k u_k \quad (n \in \mathbb{N}),$$

siis

$$A_{n+1} = s_{2n+1} = s_{2n-1} + u_{2n} - u_{2n+1} \geq s_{2n-1} = A_n$$

ja

$$B_{n+1} = s_{2n+2} = s_{2n} - u_{2n+1} + u_{2n+2} \leq s_{2n} = B_n$$

(kontrollida!)✠, seejuures

$$B_n = s_{2n} = s_{2n-1} + u_{2n} > s_{2n-1} = A_n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Seega moodustavad lõigud $[A_n, B_n]$ $(n \in \mathbb{N})$ üksteisesse sisestatud lõikude jada, mille pikkused lähenevad nullile (kontrollida!)✠. Järelduse 2.14 kohaselt eksisteerivad lõplikud piirväärtused $\lim_n A_n$ ja $\lim_n B_n$, seejuures $\lim_n A_n = \lim_n B_n =: s$. Jääb üle veenduda, et $\lim_m s_m = s$. Olgu $\varepsilon > 0$ suvaline, leiame sellised indeksid n_1 ja n_2, et $|s_{2n-1} - s| < \varepsilon$ $(n \geq n_1)$ ja $|s_{2n} - s| < \varepsilon$ $(n \geq n_2)$. Kui $m \geq N := \max\{2n_1, 2n_2\}$, siis $|s_m - s| < \varepsilon$ $(m \geq N)$ (põhjendada!)✠. Sellega on väide tõestatud. ∎

Märkus 4. Leibnizi tunnuse tõestusest selgub, et paarisarvuliste indeksitega osasummade jada (s_{2n}) **kahaneb** summaks $s := \sum\limits_k (-1)^k u_k$ ja paarituarvuliste indeksitega osasummade jada (s_{2n-1}) **kasvab** summaks s. Seega

$$s_{2n-1} \leq s \leq s_{2n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Siit saame seosed

$$0 \leq s - s_{2n-1} \leq s_{2n} - s_{2n-1} = u_{2n}, \;\; 0 \leq s_{2n} - s \leq s_{2n} - s_{2n+1} = u_{2n+1} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Kokkuvõttes oleme leidnud kasuliku võrratuse vahelduvate märkidega rea $\sum\limits_k (-1)^k u_k$ **jääkliikme hindamiseks:**

$$\left| \sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k u_k \right| \leq |u_{n+1}| \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Abeli ja Dirichlet' koonduvustunnused. Järgnevalt tuletame kaks koonduvustunnust niisuguste ridade koonduvuse testimiseks, mis on esitatud kujul

$$\sum_k v_k u_k. \tag{2.10}$$

Selliste ridade uurimisel kasutatakse sageli Abeli teisendust.

Lemma 2.35 ***(Abeli teisendus).*** *Suvaliste arvude $u_1, u_2, ..., u_n$ ja $v_1, v_2, ..., v_n$ korral kehtib võrdus*

$$\sum_{k=1}^{n} v_k u_k = \sum_{k=1}^{n-1} (v_k - v_{k+1})\, s_k + v_n s_n,$$

kus $s_k := u_1 + ... + u_k$ $(k = 1, ...n)$.

Tõestus.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1} (v_k - v_{k+1})\, s_k &= (v_1 - v_2)\, u_1 + (v_2 - v_3)(u_1 + u_2) + ... + (v_{n-1} - v_n)(u_1 + u_2 + ... + u_{n-1}) \\ &= u_1 ((v_1 - v_2) + (v_2 - v_3) + ... + (v_{n-1} - v_n)) \\ &+ u_2 ((v_2 - v_3) + ... + (v_{n-1} - v_n)) + ... \\ &+ u_{n-1} ((v_{n-1} - v_n)) \\ &= u_1 v_1 + u_2 v_2 + ... + u_{n-1} v_{n-1} - (u_1 + ... + u_{n-1})\, v_n \\ &= u_1 v_1 + u_2 v_2 + ... + u_{n-1} v_{n-1} + u_n v_n - (u_1 + ... + u_{n-1} + u_n)\, v_n \\ &= \sum_{k=1}^{n} v_k u_k - v_n s_n.\end{aligned}$$

■

Abeli teisendusest tuleneb vahetult järgmine oluline tähelepanek.

Lause 2.36 *Rida $\sum_k v_k u_k$ on koonduv, kui koonduvad jada $(v_n s_n)$ ja rida $\sum_k (v_k - v_{k+1})\, s_k$. Kui jada (v_k) on monotoonne ja rea $\sum_k u_k$ osasummade jada (s_n) on tõkestatud, s.t. $|s_n| \le L$ $(n \in \mathbb{N})$ mingi $L > 0$ puhul, siis kehtib hinnang*

$$\left|\sum_{k=1}^{n} v_k u_k\right| \le L\,(|v_1| + 2\,|v_n|) \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{2.11}$$

Tõestus. Olgu jada $(v_n s_n)$ ja rida $\sum_k (v_k - v_{k+1})\, s_k$ koonduvad, rea koonduvus tuleneb vahetult lemmast 2.35. Kui (v_k) on monotoonne ja $|s_n| \le L$ $(n \in \mathbb{N})$, siis

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n} v_k u_k\right| &\le \sum_{k=1}^{n-1} |v_k - v_{k+1}|\, |s_k| + |s_n|\, |v_n| \le L \sum_{k=1}^{n-1} |v_k - v_{k+1}| + |v_n| \\ &\le L\,(|v_1| + 2\,|v_n|)\,(n \in \mathbb{N})\end{aligned}$$

(selgitada!).✠ ■

Valem (2.11) on lähtekohaks kahe järgneva koonduvustunnuse tõestamisel.

Lause 2.37 ***(Abeli koonduvustunnus).*** *Kui rida $\sum_k u_k$ koondub ning jada (v_k) on monotoonne ja tõkestatud, siis rida $\sum_k v_k u_k$ koondub.*

Tõestus. Jada (v_k) tõkestatus tähendab, et

$$\exists\ K > 0 : |v_k| \leq K \quad (k \in \mathbb{N})\,.$$

Olgu ε suvaline positiivne arv. Kuna rida $\sum\limits_k u_k$ koondub, siis Cauchy kriteeriumi (vt. lause 2.26) kohaselt leidub selline $N \in \mathbb{N}$, et kui $m > n \geq N$, siis $|u_{n+1} + ... + u_m| < \frac{\varepsilon}{3K}$. Kasutame hinnangut (2.11), seejuures $L := \frac{\varepsilon}{3K}$ (selgitada!)✠ :

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} v_k u_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{m-n} v_{n+k} u_{n+k}\right| \leq \frac{\varepsilon}{3K}\left(|v_{n+1}| + 2\,|v_m|\right) \leq \varepsilon \quad (m > n \geq N)\,.$$

Cauchy kriteeriumi kohaselt rida $\sum\limits_k v_k u_k$ koondub. ■

Näide 5. Abeli tunnuse kohaselt koondub rida

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\arctan k}{\sqrt{k}}.$$

Nimelt, kui võtame $v_k := \arctan k$ ja $u_k := \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$, siis lause 2.37 eeldused on täidetud (veenduda!)✠.

Abeli teisendust kasutame ka järgmise Dirichlet' koonduvustunnuse tuletamisel.

Lause 2.38 ***(Dirichlet' koonduvustunnus).*** *Kui rea $\sum\limits_k u_k$ osasummad on tõkestatud ning jada (v_n) on monotoonne ja koondub nulliks, siis rida $\sum\limits_k v_k u_k$ koondub.*

Tõestus. Rea $\sum\limits_k u_k$ osasummade tõkestatus tähendab, et

$$\exists M > 0 : |s_n| \leq M \quad (n \in \mathbb{N})\,.$$

Olgu ε suvaline positiivne arv. Kuna $v_k \to 0$, siis leidub selline $N \in \mathbb{N}$, et

$$|v_k| < \frac{\varepsilon}{6M} \quad (k \geq N)\,.$$

Olgu $m > n \geq N$, siis

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} u_k\right| = |s_m - s_n| \leq |s_m| + |s_n| \leq 2M$$

ja, võttes hinnangus (2.11) $L := 2M$, saame

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} v_k u_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{m-n} v_{n+k} u_{n+k}\right| \leq 2M\left(|v_{n+1}| + 2\,|v_m|\right) < 2M\left(3\frac{\varepsilon}{6M}\right) = \varepsilon \quad (m > n \geq N)\,.$$

Cauchy kriteeriumi kohaselt rida $\sum\limits_k v_k u_k$ koondub. ■

Märkused. 5. Lihtne on näha, et **Leibnizi koonduvustunnus on Dirichlet' tunnuse erijuht** (veenduda!)✠.

6. Abeli koonduvustunnus järeldub Dirichlet' tunnusest. Kui Abeli tunnuse eeldused on täidetud, siis jada (v_k) on koonduv (põhjendada!)✠, olgu $a := \lim_k v_k$. Kirjutame rea $\sum\limits_k v_k u_k$ ümber kujul

$$\sum_k (v_k - a)\, u_k + a \sum_k u_k.$$

Neist teine rida koondub Abeli tunnuse eelduste kohaselt, esimene koondub Dirichlet' tunnuse järgi (veenduda!)✠.

Näide 6. Rea

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$$

koonduvuse saab kindlaks määrata Dirichlet' tunnuse abil. Ilmselt see rida koondub, kui $x := m\pi$ $(m = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$ (selgitada!)✠. Eeldame, et $x \neq m\pi$, ja võtame $u_k := \sin kx$ ja $v_k := \frac{1}{k}$. Jada (v_k) puhul on lause 2.38 eeldused täidetud. Hindame

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| &= \frac{1}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\left|\sum_{k=1}^{n} 2\sin\frac{x}{2}\sin kx\right| = \frac{1}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\left|\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\left(\frac{x}{2} - kx\right) - \cos\left(\frac{x}{2} + kx\right)\right)\right| \\
&= \frac{1}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\left|\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right| \leq \frac{1}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\left(\left|\cos\frac{x}{2}\right| + \left|\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right|\right) \\
&\leq \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|} \quad (n \in \mathbb{N}),
\end{aligned}$$

seega rahuldab ka jada (u_k) lause 2.38 eeldusi.

2.7 Ridade ümberjärjestused ja korrutised

Olgu (m_k) mingi selline jada, kus iga naturaalarv n esineb parajasti üks kord. Teiste sõnadega, jada (m_k) saadakse mingi bijektiivse kujutuse $J : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $k \mapsto m_k$ rakendamisel. Rida $\sum\limits_k u_{m_k}$ nimetatakse esialgse rea $\sum\limits_k u_k$ *ümberjärjestuseks.*

Definitsioon. Rida $\sum\limits_k u_k$ nimetatakse *tingimatult koonduvaks*, kui iga ümberjärjestus $\sum\limits_k u_{m_k}$ koondub.

Olgu $\sum\limits_k u_{m_k}$ rea $\sum\limits_k u_k$ mingi ümberjärjestus. Kui me võrdleme nende ridade vastavaid osasummasid $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$ ja $s'_n := \sum\limits_{k=1}^{n} u_{m_k}$ mingi $n \in \mathbb{N}$ korral, siis üldjuhul koosnevad need erinevatest (või osaliselt erinevatest) liidetavatest. Seetõttu ei ole selge, kas jada (s_n) koonduvus toob endaga kaasa jada (s'_n) koonduvuse. Teisi sõnu, me otsime vastust küsimusele: **kas koonduva rea $\sum\limits_k u_k$ korral koondub ka rida $\sum\limits_k u_{m_k}$?**

Teoreem 2.39 ***(Dirichlet' teoreem)***. *Absoluutselt koonduva rea $\sum\limits_k u_k$ iga ümberjärjestus $\sum\limits_k u_{m_k}$ koondub samaks summaks, mis esialgne rida.*

Tõestus. Eeldame, et rida $\sum\limits_k u_k$ on absoluutselt koonduv, s.t. $\sum\limits_k |u_k|$ koondub. Siis koondub ka rida $\sum\limits_k u_k$ ise, tähistame tema summa tähega a, s.t. $a = \lim_n s_n$. Meie eesmärgiks on veenduda, et $a = \lim_n s'_n$.

Olgu $\varepsilon > 0$ suvaline. Kuna rida $\sum\limits_k |u_k|$ koondub, siis Cauchy kriteeriumi (vt. lause 2.26) kohaselt saab leida niisuguse indeksi l, et kui $r > s \geq l$, siis

$$|u_{s+1}| + |u_{s+2}| + ... + |u_r| < \varepsilon \, . \tag{2.12}$$

Valime indeksi $N > l$ *nii suure, et kõik arvud* $1, 2, ..., l$ *kuuluvad hulka* $\{m_1, m_2, ..., m_N\}$. Olgu $n \geq N$, vaatleme vahet $s'_n - s_n$. Kuna rea liikmed $u_1, u_2, ..., u_l$ esinevad mõlemas osasummas $\sum\limits_{k=1}^{n} u_k$ ja $\sum\limits_{k=1}^{n} u_{m_k}$, siis vahes $s'_n - s_n$ on vaid sellised liikmed u_k, kus $k > l$ (selgitada!)✠. Tingimuse (2.12) kohaselt

$$|s'_n - s_n| < \varepsilon, \text{ kui } n \geq N.$$

See tähendab, et jada $(s'_n - s_n)$ koondub nulliks (põhjendada!)✠, mistõttu

$$\lim_n s'_n = \lim_n (s'_n - s_n) + \lim_n s_n = 0 + a = a.$$

Teoreem on tõestatud. ■

Dirichlet' teoreemi kohaselt on *iga absoluutselt koonduv rida tingimatult koonduv.* Hoopis teistsugune on olukord nende koonduvate ridade puhul, mis ei ole absoluutselt koonduvad.

Teoreem 2.40 *Rida koondub absoluutselt parajasti siis, kui ta on tingimatult koonduv.*

Tõestus. *Tarvilikkus* tuleneb teoreemist 2.39.

Piisavus. Eeldame, et rida $\sum\limits_k u_k$ koondub, kuid ei koondu absoluutselt, ja leiame niisuguse ümberjärjestuse $\sum\limits_k u_{m_k}$, mille osasummade jada ei ole tõkestatud, siis rida $\sum\limits_k u_{m_k}$ hajub.

Tähistame

$$u_k^+ := \frac{|u_k| + u_k}{2} = \begin{cases} u_k, & \text{kui } u_k > 0, \\ 0, & \text{kui } u_k \leq 0, \end{cases} \qquad u_k^- := \frac{|u_k| - u_k}{2} = \begin{cases} -u_k, & \text{kui } u_k \leq 0, \\ 0, & \text{kui } u_k > 0. \end{cases}$$

Siis
1) $u_k^+, u_k^- \geq 0$,
2) $u_k^+ - u_k^- = u_k$ ja
3) $u_k^+ + u_k^- = |u_k| \quad (k \in \mathbb{N})$.

Paneme tähele, et **kui üks ridadest $\sum\limits_k u_k^+$ ja $\sum\limits_k u_k^-$ koondub, siis koondub ka teine** (kontrollida!)✠. Sellest omakorda tuleneb, et **mõlemad read hajuvad** (veenduda!)✠. Kui jadast $\left(u_k^+\right)$ jätta välja kõik nulliga võrduvad liikmed, saame jada (u_k) **kõigi positiivsete liikmete osajada**, tähistame selle (p_k). Ülejäänud liikmetest moodustub osajada $(-q_k)$, see on jada (u_k) **kõigi mittepositiivsete liikmete osajada.** Selge, et **jada (u_k) iga liige esineb ühes ja ainult ühes jadadest (p_k) ja $(-q_k)$.**

Kuna $\sum_k u_k^+ = \infty$ ning $\sum_k u_k^- = \infty$, siis read $\sum_k p_k$ ja $\sum_k q_k$ hajuvad, täpsemalt, nende osasummade jadad $\left(\sum_{k=1}^n p_k\right)$ ning $\left(\sum_{k=1}^n q_k\right)$ on ülalt tõkestamata (põhjendada!)✠. Seetõttu on võimalik leida indeks l_1 nii, et $T_1 := \sum_{k=1}^{l_1} p_k > 1$, kuid $\sum_{k=1}^{r} p_k \leq 1$ kõikide $r = 1, ..., l_1 - 1$ puhul. Edasi valime $l_2 > l_1$ omadusega

$$T_2 := \sum_{k=1}^{l_1} p_k - q_1 + \sum_{k=l_1+1}^{l_2} p_k > 2, \text{ kuid } \sum_{k=1}^{r} p_k - q_1 \leq 2 \text{ kõikide } \; r = 1, ..., l_2 - 1 \text{ puhul.}$$

Järgmisel sammul leiame *vähima* indeksi l_3, et

$$T_3 := \sum_{k=1}^{l_1} p_k - q_1 + \sum_{k=l_1+1}^{l_2} p_k - q_2 + \sum_{k=l_2+1}^{l_3} p_k > 3, \text{ jne.}$$

Niimoodi saame esialgse rea $\sum_k u_k$ ümberjärjestuse

$$p_1 + ... + p_{l_1} + (-q_1) + p_{l_1+1} + ... + p_{l_2} + (-q_2) + p_{l_2+1} + ... + p_{l_3} + (-q_3) + p_{l_3+1} + ... \,.$$

See hajub, sest meie konstruktsiooni kohaselt on tema (teatavate) osasummade jada (T_i) tõkestamata (põhjendada!)✠. ■

Definitsioon. Koonduvat rida, mis ei koondu tingimatult, nimetatakse *tingimisi koonduvaks.*

Teoreemi 2.40 kohaselt sisaldab iga tingimisi koonduv rida hajuvaid (tegelikult tõkestamata osasummadega) ümberjärjestusi. Veelgi enam, nagu selgub järgnevast Riemanni teoreemist, tingimisi koonduvast reast saab moodustada suvalise soovitud summaga ümberjärjestuse.

Teoreem 2.41 ***(Riemanni teoreem)****. Kui $\sum_k u_k$ on tingimisi koonduv rida, siis iga arvu $a \in \mathbb{R}$ korral leidub selline ümberjärjestus $\sum_k u_{m_k}$, mis koondub summaks a.*

Tõestus. Kasutame samu tähistusi, mis teoreemi 2.40 tõestuses. Kuna osasummade jadad $\left(\sum_{k=1}^n p_k\right)$ ning $\left(\sum_{k=1}^n q_k\right)$ on ülalt tõkestamata, siis on võimalik leida indeks n_1, et

$$\sum_{k=1}^{n_1} p_k > a, \text{ kuid } \sum_{k=1}^{r} p_k \leq a \text{ kõikide } r = 1, 2, ..., n_1 - 1 \text{ korral.}$$

Samuti saab leida indeksi n_2, et

$$\sum_{k=1}^{n_1} p_k + \sum_{k=1}^{n_2} (-q_k) < a, \text{ kuid } \sum_{k=1}^{n_1} p_k + \sum_{k=1}^{r} (-q_k) \geq a \text{ kõikide } r = 1, 2, ..., n_2 - 1 \text{ korral.}$$

Edasi leidub *vähim* indeks n_3, et $\sum_{k=1}^{n_1} p_k + \sum_{k=1}^{n_2} (-q_k) + \sum_{k=n_1+1}^{n_3} p_k > a$ jne. Tulemuseks on rida

$$p_1 + ... + p_{n_1} + (-q_1) + ... (-q_{n_2}) + p_{n_1+1} + ... + p_{n_3} + (-q_{n_2+1}) + ... + (-q_{n_4}) + ... \,, \tag{2.13}$$

mis on esialgse rea $\sum\limits_k u_k$ ümberjärjestus. Tähistame

$$\begin{aligned}
&P_1 := p_1 + ... + p_{n_1}, \quad Q_1 := p_1 + ... + p_{n_1} + (-q_1) + ... + (-q_{n_2})\,, \\
&P_2 := p_1 + ... + p_{n_1} + (-q_1) + ... (-q_{n_2}) + p_{n_1+1} + ... + p_{n_3}, \\
&Q_2 := P_2 - q_{n_2+1} - ... - q_{n_4}, \text{ jne }.
\end{aligned}$$

Siis

$$0 < P_i - a \le p_{n_{2i-1}} \text{ ja } 0 < a - Q_i \le q_{n_{2i}} \text{ iga } i \in \mathbb{N} \text{ korral}$$

(põhjendada!)✠. Kuna $p_{n_i} \to 0$ ja $q_{n_i} \to 0$ $(i \to \infty)$ (põhjendada!)✠, siis saame $P_i \to a$ ja $Q_i \to a$ $(i \to \infty)$.

Olgu s'_m ümberjärjestuse (2.13) m-es osasumma. Siis leidub selline $i \in \mathbb{N}$, et kehtib kas $Q_{i-1} \le s'_m \le P_i$ või $Q_i \le s'_m \le P_i$ (põhjendada!)✠. Seejuures $i \to \infty$, kui $m \to \infty$, mistõttu $s'_m \to a$, s.t. vaadeldav ümberjärjestus koondub summaks a. ■

Ridade korrutised. Olgu $s = u_1 + ... + u_n$ ja $t = v_1 + ... + v_m$, siis

$$\begin{aligned}
st &= u_1v_1 + ... + u_1v_m + u_2v_1 + ... + u_2v_m + ... + u_nv_1 + ... + u_nv_m \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} u_iv_j.
\end{aligned}$$

Loomulikult ei sõltu see summa liidetavate u_iv_j järjekorrast. Lõpmatute ridade korral on olukord sootuks keerulisem.

Olgu antud **koonduvad read** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ ja $\sum\limits_{l=1}^{\infty} v_l$ summadega vastavalt s ja t. Kui korrutame esimese rea iga liikme teise rea iga liikmega, siis saame lõpmata palju (täpsemalt, loenduva hulga) korrutisi u_kv_l, neid võime reana järjestada lõpmata mitmel viisil. Teoreeme 2.40 ja 2.41 silmas pidades võib arvata, et saadud korrutisrea koonduvus ja summa sõltuvad oluliselt sellest, millises järjekorras me selle liikmeid summeerime. Kehtib järgmine väide.

Lause 2.42 *Kui read $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ ja $\sum\limits_{l=1}^{\infty} v_l$ koonduvad absoluutselt, siis koondub absoluutselt ka iga rida $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n$, mis on moodustatud kõikvõimalikest korrutistest u_kv_l, ja rea $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n$ summa on st.*

Tõestus. Tähistame fikseeritud $r \in \mathbb{N}$ korral $W_r := |w_1| + |w_2| + ... + |w_r|$ ja kasutame asjaolu, et kui valida p piisavalt suur, siis kehtib $W_r \le (|u_1| + ... + |u_p|)\,(|v_1| + ... + |v_p|)$ (põhjendada!)✠. Kuna read $\sum\limits_k |u_k|$ ja $\sum\limits_l |v_l|$ koonduvad, siis saame siit osasummade W_r tõkestatuse (põhjendada!)✠, mis tähendab rea $\sum\limits_n w_n$ absoluutset koonduvust.

Nagu eespool veendusime (vt teoreem 2.39), ei sõltu absoluutselt koonduva rea summa rea liikmete järjekorrast. Seetõttu koonduvad ridade $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ ja $\sum\limits_{l=1}^{\infty} v_l$ *kõikvõimalikud* korrutisread $\sum\limits_n w_n$ üheks ja samaks summaks, sõltumata sellest, millises järjekorras me liikmeid u_kv_l reas esitame. Võrduse $\sum\limits_n w_n = st$ tõestamiseks piisab seega näidata, et see kehtib ühe konkreetse korrutisrea korral. Olgu see korrutisrida moodustatud näiteks järgmise skeemi alusel:

$$\begin{array}{ccccc}
u_1v_1 & & u_1v_2 & & u_1v_3 \ ... \\
 & & \uparrow & & \uparrow \\
u_2v_1 & \rightarrow & u_2v_2 & & u_2v_3 \ ... \\
 & & & & \uparrow \\
u_3v_1 & \rightarrow & u_3v_2 & \rightarrow & u_3v_3 \ ... \\
... & & & &
\end{array} . \tag{2.14}$$

Sel juhul saame rea

$$u_1v_1 + u_2v_1 + u_2v_2 + u_1v_2 + u_3v_1 + +u_3v_2 + u_3v_3 + u_2v_3 + u_1v_3 + ...+$$
$$u_nv_1 + u_nv_2 + ... + u_nv_n + ... + u_3v_n + u_2v_n + u_1v_n + ... \ .$$

Esimese n^2 liikme osasumma s_{n^2} saab esitada kujul

$$s_{n^2} = (u_1 + ... + u_n)(v_1 + ... + v_n),$$

mistõttu $\sum\limits_n w_n = \lim\limits_n s_n = \lim\limits_n s_{n^2} = st$. Lause on tõestatud. ■

Kõige tuntum ja enamuuritud **ridade korrutamise eeskiri** erineb vaadeldud eeskirjast (2.14) selle poolest, et korrutisrea liikmed järjestatakse "diagonaalide kaupa":

$$\begin{array}{ccccc}
u_1v_1 & & u_1v_2 & & u_1v_3 \ ... \\
 & \swarrow & & \swarrow & \\
u_2v_1 & & u_2v_2 & & u_2v_3 \ ... \\
 & \swarrow & & \swarrow & \\
u_3v_1 & & u_3v_2 & & u_3v_3 \ ... \\
... & & & &
\end{array} .$$

Sel juhul tekib rida

$$u_1v_1 + u_1v_2 + u_2v_1 + u_1v_3 + u_2v_2 + u_3v_1 + u_1v_4 + u_2v_3 + u_3v_2 + ... \ . \tag{2.15}$$

Tähistame

$$w_n := \sum_{k=1}^{n} u_k v_{n-k} \quad (n \in \mathbb{N})$$

ning vaatleme nn. **Cauchy korrutisrida**

$$\sum_n w_n = u_1v_1 + (u_1v_2 + u_2v_1) + (u_1v_3 + u_2v_2 + u_3v_1) + (u_1v_4 + u_2v_3 + u_3v_2 + u_4v_1) + ... \ . \tag{2.16}$$

Osutub, et kui rida (2.15) koondub, siis koondub ka rida (2.16). Nimelt kehtib järgmine lause.

Lause 2.43 *Olgu* $1 \le k_1 < k_2 < ...$ *ja olgu rea* $\sum\limits_k u_k$ *puhul defineeritud summad* $U_1 := u_1 + ... + u_{k_1}$, $U_2 := u_{k_1+1} + ... + u_{k_2}, ...$. *Kui rida* $\sum\limits_k u_k$ *koondub, siis koondub ka rida* $\sum\limits_k U_k$ *ja kehtib võrdus* $\sum\limits_k U_k = \sum\limits_k u_k$. *Rea* $\sum\limits_k U_k$ *koonduvusest ei järeldu üldjuhul rea* $\sum\limits_k u_k$ *koonduvus.*

Tõestus. Iseseisvalt! (Pidada silmas, et jada $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} U_k\right)$ on jada $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} u_k\right)$ osajada)✠. ■

2.8 Lõpmatud korrutised

Olgu antud reaalarvude jada (q_k). Nii nagu ridade puhul jõudsime osasummade

$$s_1 := u_1, \quad s_2 := u_1 + u_2, \quad s_3 := u_1 + u_2 + u_3, ...$$

abil rea $\sum\limits_k u_k$ koonduvuse mõisteni, saame *osakorrutistest*

$$p_1 := q_1, \; p_2 := q_1 q_2, ..., \quad p_n := q_1 q_2 ... q_n, \; ...$$

lähtudes defineerida *lõpmatu korrutise*

$$\prod_{k=1}^{\infty} q_k = q_1 q_2 ... q_n \cdots \; ,$$

ja tema väärtuse $\lim_n p_n$, kui see piirväärtus (lõplik või lõpmatu) eksisteerib.

Definitsioon. Lõpmatut korrutist $\prod\limits_{k=1}^{\infty} q_k$ nimetatakse koonduvaks, kui eksisteerib *nullist erinev* piirväärtus $a := \lim_n p_n$.

Definitsiooni järgi on $\prod\limits_{k=1}^{\infty} q_k$ hajuv ka siis, kui $\lim_n p_n = 0$. Selline kokkulepe lihtsustab paljude lõpmatute korrutiste omaduste sõnastamist. Nimelt on nende lõpmatute korrutiste hulgas, mis rahuldavad tingimust $\lim_n p_n = 0$, kõik need, milles vähemalt üks tegur võrdub nulliga. *Me eeldame kõikjal järgnevas, et* $q_k \neq 0 \quad (k \in \mathbb{N})$.

Nii nagu rea $\sum\limits_k u_k$ koonduvuseks on tarvilik tingimus $u_k \to 0$, saame lõpmatu korrutise $\prod\limits_k q_k$ koonduvuseks tarviliku tingimuse $q_k \to 1$. Tõepoolest, kui $p_n \to a \neq 0$, siis

$$\lim_k q_k = \lim_k \frac{p_k}{p_{k-1}} = \frac{\lim_k p_k}{\lim_k p_{k-1}} = \frac{a}{a} = 1.$$

(Lihtne on näha, et see väide ei kehtiks, kui me loobuksime kokkuleppest $q_k \neq 0 \quad (k \in \mathbb{N})$ (kontrollida!)✠.)

Lähtudes saadud tarvilikust tingimusest, *võime lõpmatu korrutise* $\prod\limits_k q_k$ *koonduvuse uurimisel eeldada, et* $q_k > 0$ $(k \in \mathbb{N})$: kuna $q_k \to 1$, siis *mingist kohast* k_0 alates tõepoolest $q_k > 0$. Seejuures ei sõltu $\prod\limits_k q_k$ *koonduvus* teguritest $q_1, ..., q_{k_0 - 1}$.

Näited. 7. Vaatleme lõpmatut korrutist $\prod\limits_{k=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$. Suvalise k korral

$$\begin{aligned} p_k &= \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) ... \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{\left(2^2 - 1\right)\left(3^2 - 1\right) ... \left(k^2 - 1\right)}{2^2 \cdot 3^2 \cdot ... \cdot k^2} \\ &= \frac{(2-1)(3-1)...(k-1)}{2 \cdot 3 \cdot ... \cdot k} \frac{(2+1)(3+1)...(k+1)}{2 \cdot 3 \cdot ... \cdot k} = \frac{(k-1)!}{k!} \frac{(k+1)!}{2k!} \\ &= \frac{k+1}{2k} \to \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

s.t. $\prod\limits_{k=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = 1/2$.

8. Arvutada $\prod\limits_{k=0}^{\infty} \left(1 + x^{2^k}\right)$, kui $|x| < 1$. Suvalise k puhul

$$p_k = (1 + x)\left(1 + x^2\right)\left(1 + x^4\right)\left(1 + x^8\right) ... \left(1 + x^{2^k}\right)$$

ning

$$\begin{aligned}(1-x)\,p_k &= (1-x)\,(1+x)\left(1+x^2\right)\left(1+x^4\right)\left(1+x^8\right)...\left(1+x^{2^k}\right)\\ &= 1-x^{2^{k+1}}.\end{aligned}$$

Siit saame

$$\prod_{k=0}^{\infty}\left(1+x^{2^k}\right)=\lim_k \frac{1-x^{2^k}}{1-x}=\frac{1}{1-x}.$$

Lause 2.44 *Lõpmatu korrutis* $\prod_k q_k$ *koondub parajasti siis, kui koondub rida* $\sum_k \ln q_k$*. Seejuures*

$$\prod_k q_k = e^{\sum\limits_k \ln q_k}.$$

Tõestus. Kuna $s_n := \ln q_1 + ... + \ln q_n = \ln p_n$ ehk $p_n = e^{s_n}$ $(n \in \mathbb{N})$, siis

$$p_n \to a \Rightarrow s_n \to \ln a$$

(põhjendada!)✠ ning

$$s_n \to s \Rightarrow p_n = e^{s_n} \to e^s.$$

Viimasest implikatsioonist tulenebki $\prod_k q_k = e^s$, kus s on rea $\sum_k \ln q_k$ summa. ■

Lause 2.45 *Kui* $u_k > 0$ $(k \in \mathbb{N})$*, siis lõpmatu korrutis* $\prod_k (1+u_k)$ *koondub parajasti siis, kui koondub rida* $\sum_k u_k$*.*

Tõestus. Nii lõpmatu korrutise $\prod_k (1+u_k)$ kui ka rea $\sum_k u_k$ koonduvuseks on tarvilik tingimus $u_k \to 0$ (selgitada!)✠, eeldame, et see on täidetud. Siis $\lim_k \frac{\ln(1+u_k)}{u_k} = 1$ (põhjendada!)✠, mistõttu rida $\sum_k u_k$ koondub parajasti siis, kui koondub rida $\sum_k \ln(1+u_k)$ (põhjendada! Vrd. lause 2.31)✠. Väide järeldub nüüd lausest 2.44. ■

3 Pidevad funktsioonid

Olgu D mingi mittetühi reaalarvude hulk, s.t. $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$. Kui igale arvule x hulgast D on mingi eeskirja järgi seatud vastavusse üheselt määratud arv y, mida me tähistame $f(x)$, siis öeldakse, et hulgas D on defineeritud *funktsioon* f. Funktsiooni f asemel kirjutame tihtipeale ka $y = f(x)$ või $f : D \to \mathbb{R}$. Hulka D nimetatakse seejuures funktsiooni f määramispiirkonnaks, hulka

$$R := \{f(x) \mid x \in D\}$$

aga väärtuste hulgaks. Punktide hulka

$$\mathrm{Gr}\, f := \{(x, f(x)) \mid x \in D\}$$

xy-tasandil nimetatakse funktsiooni f graafikuks. See, mis puudutab funktsioonide esitusviise, nende liike, graafikuid jne., on lugejale tuttav eelnevatest matemaatilise analüüsi kursustest. Selles peatükis vaatleme üksikasjalikumalt funktsiooni pidevusega seotud küsimusi.

3.1 Funktsiooni piirväärtus ja pidevus

Funktsiooni piirväärtus. Definitsioon. Olgu funktsioon $f : D \to \mathbb{R}$ määratud nii punkti $a \in \mathbb{R}$ vasakpoolses ümbruses $(a - \delta, a)$ kui ka parempoolses ümbruses $(a, a + \delta)$ mingi $\delta > 0$ korral. Ütleme, et arv A on funktsiooni f piirväärtus punktis a ning tähistame $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, kui

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 : [0 < |x - a| < \delta,\ x \in D] \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon. \tag{3.1}$$

See on funktsiooni **piirväärtuse Cauchy definitsioon**. Tingimuse (3.1) võib kirjutada kujul

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 : f\left((U_\delta(a) \setminus \{a\}) \cap D\right) \subset U_\varepsilon(A).$$

Kui f on määratud vaid vasakpoolses ümbruses $(a - \delta, a)$ või parempoolses ümbruses $(a, a + \delta)$, siis defineeritakse analoogiliselt funktsiooni f vastavalt **vasak- ja parempoolne piirväärtus** punktis a:

$$\lim_{x \to a-} f(x) = A :\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 : [0 < a - x < \delta,\ x \in D] \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon,$$
$$\lim_{x \to a+} f(x) = A :\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 : [0 < x - a < \delta,\ x \in D] \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Näite sellest, et need **ühepoolsed piirväärtused võivad olla erinevad**, saame, kui vaatleme signum-funktsiooni

$$\operatorname{sgn} x := \begin{cases} 1, & \text{kui } x > 0, \\ 0, & \text{kui } x = 0, \\ -1 & \text{kui } x < 0, \end{cases}$$

siis $\lim\limits_{x \to 0-} \operatorname{sgn} x = -1$ ning $\lim\limits_{x \to 0+} \operatorname{sgn} x = 1$ (veendGuda!)✠.

Vahetu kontroll näitab, et üldjuhul

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \ \text{ parajasti siis, kui } \lim_{x \to a-} f(x) = \lim_{x \to a+} f(x) = A. \tag{3.2}$$

Lause 3.1 *Arv A on funktsiooni $f : D \to \mathbb{R}$ piirväärtus punktis a parajasti siis, kui iga arvuks a koonduva argumentide jada (x_k) korral funktsiooni väärtuste jada $(f(x_k))$ koondub arvuks A, s.t. kui kehtib implikatsioon*

$$[x_k \in D, \ \ x_k \to a] \Rightarrow f(x_k) \to A. \tag{3.3}$$

Tõestus. *Tarvilikkus.* Eeldame, et $\lim_{x\to a} f(x) = A$. Olgu (x_k) hulga D selline punktide jada, mis koondub arvuks a, näitame, et $f(x_k) \to A$. Olgu ε suvaline positiivne arv, leiame $\delta > 0$ nii, et kehtiks tingimus (3.1). Kuna $x_k \to a$, siis saame fikseerida sellise indeksi N, et $|x_k - a| < \delta$ kõikide $k \geq N$ puhul. Tingimuse (3.1) põhjal kehtib $|f(x_k) - A| < \varepsilon$ $(k \geq N)$, seega $f(x_k) \to A$.

Piisavus. Eeldame, et implikatsioon (3.3) on õige ja oletame vastuväiteliselt, et A ei ole funktsiooni f piirväärtus punktis a, s.t. tingimus (3.1) ei kehti. Sel juhul

$$\exists\ \varepsilon_0 > 0\ \forall\ \delta > 0\ \exists\ x_\delta \in D : |x_\delta - a| < \delta, \ \ |f(x_\delta) - A| \geq \varepsilon_0$$

(see on tingimuse (3.1) eitus). Võtame $\delta := \frac{1}{k}$ $(k = 1, 2, ...)$, siis saame punktid $x_k \in D$, mille puhul $|x_k - a| < \frac{1}{k}$ ja $|f(x_k) - A| \geq \varepsilon_0$. Kui $k \to \infty$, siis $x_k \to a$, kuid $f(x_k) \nrightarrow A$, saime vastuolu eeldusega (3.3). Seega $\lim_{x\to a} f(x) = A$. ■

Tingimust (3.3) nimetatakse sageli ka funktsiooni **piirväärtuse Heine definitsiooniks.** Lause (3.3) kinnitab sisuliselt Cauchy ja Heine definitsioonide samaväärsust. Lihtne on sõnastada ja tõestada analoogilised väited vasak- ja parempoolse piirväärtuse jaoks.

Pidevus. Definitsioon. Olgu $a \in D$ funktsiooni f määramispiirkonna D selline punkt, mille mingi ümbrus $(a - \delta, a + \delta)$ sisaldub hulgas D (s.t. a on hulga D sisepunkt). Funktsiooni f nimetatakse *pidevaks punktis* a, kui kehtib võrdus

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Kui määramispiirkond D sisaldab punkti a vasakpoolset ümbrust $(a - \delta, a)$ või parempoolset ümbrust $(a, a + \delta)$ ning kehtib vastavalt võrdus $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = f(a)$ või $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = f(a)$, siis kõneldakse vastavalt *vasakpoolsest* ja *parempoolsest pidevusest punktis* a. Seose (3.2) põhjal *funktsioon f on punktis a pidev parajasti siis, kui ta on selles punktis vasakult ja paremalt pidev* (selgitada!)✠.

Pidades silmas piirväärtuse definitsiooni (3.1), saame järgmise tarviliku ja piisava tingimuse ε-δ-**keeles**: funktsioon f on pidev punktis a parajasti siis, kui

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 : [|x - a| < \delta, \ x \in D] \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon. \tag{3.4}$$

See on sisuliselt definitsioon, kirjanduses nimetatakse seda **pidevuse Cauchy definitsiooniks.**

Tähistades (fikseeritud $a \in D$ korral) $\Delta x := x - a$ *(argumendi muut)* ning $\Delta y := f(x) - f(a)$ *(funktsiooni muut)*, saame tingimuse (3.4) kujul

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 : |\Delta x| < \delta \Rightarrow |\Delta y| < \varepsilon$$

ehk

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

Niisiis, *funktsioon f on pidev punktis a parajasti siis, kui argumendi muudu lähenemisel nullile ka funktsiooni muut läheneb nullile.*

Järgmine oluline lause on vahetu järeldus lausest 3.1.

Lause 3.2 *Funktsioon f on pidev punktis a parajasti siis, kui iga arvuks a koonduva argumentide jada (x_k) korral funktsiooni väärtuste jada $(f(x_k))$ koondub piirväärtuseks $f(a)$, s.t. kui kehtib implikatsioon*

$$[x_k \in D, \ \ x_k \to a] \Rightarrow f(x_k) \to f(a). \tag{3.5}$$

Tingimust (3.5) nimetatakse **pidevuse Heine definitsiooniks.**

Märkus 1. Lihtne on tõestada lausega 3.2 analoogiline lause parempoolse ja vasakpoolse pidevuse jaoks. Näiteks kehtib väide: *funktsioon f on paremalt pidev punktis a parajasti siis, kui kehtib implikatsioon*

$$[x_k \in D, \ \ a \leq x_k \to a] \Rightarrow f(x_k) \to f(a).$$

Piirväärtuse omadustest lähtudes on lihtne veenduda, et kui $f : D \to \mathbb{R}$ ja $g : D \to \mathbb{R}$ on punktis a pidevad funktsioonid, siis ka funktsioonid $f+g$, λf, fg ja $\frac{f}{g}$ on pidevad (kontrollida!✠ Siin $\lambda \in \mathbb{R}$ ja jagatise $\frac{f}{g}$ puhul eeldatakse, et $g(x) \neq 0$ iga $x \in D$ korral.)

Lause 3.3 *Olgu f funktsioon määramispiirkonnaga D ja olgu h funktsioon määramispiirkonnaga E, kusjuures $f(D) \subset E$. Kui f on pidev punktis a ja h on pidev punktis $b := f(a)$, siis seosega*

$$h \circ f(x) := h(f(x)) \quad (x \in D)$$

määratud liitfunktsioon $h \circ f$ on pidev punktis a.

Tõestus. Iseseisvalt!✠. ■

Kui $(a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$ sisaldub funktsiooni f määramispiirkonnas D, kuid f ei ole punktis a pidev, nimetatakse punkti a funktsiooni f **katkevuspunktiks.** Kui funktsioonil f eksisteerivad katkevuspunktis a mõlemad ühepoolsed piirväärtused, siis kõneldakse **esimest liiki katkevusest**, kõigi ülejäänud juhtude puhul on tegemist **teist liiki katkevusega.** Kui esimest liiki katkevuse puhul $\lim_{x \to a-} f(x) = \lim_{x \to a+} f(x)$, kuid funktsioon f ei ole punktis a määratud (s.t. $a \notin D$), siis öeldakse, et funktsioonil f on punktis a **kõrvaldatav katkevus**. Näiteks, funktsioonil $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ on punktis $x = 0$ kõrvaldatav katkevus (põhjendada!)✠. Esimest liiki katkevuse puhul, kus $\lim_{x \to a-} f(x) - \lim_{x \to a+} f(x) \neq 0$, nimetatakse seda vahet funktsiooni f **hüppeks** punktis a. Näiteks funktsiooni $f(x) = [x]$ puhul on punkt $x = 1$ esimest liiki katkevuspunkt hüppega 1 (kontrollida!)✠.

Funktsiooni pidevus antud hulgas. Olgu X funktsiooni f määramispiirkonna D alamhulk. Kui f on pidev igas punktis $x \in X$, siis ütleme, et ta on *hulgas X pidev.* Erijuhul, kui X on lõik $[a, b] \subset D$, nõutakse pidevust vahemikus (a, b) ning ühepoolset pidevust lõigu otspunktides.

Definitsioon. Funktsiooni f nimetame *pidevaks lõigus* $[a, b] \subset D$, kui ta on
1) pidev igas punktis $x \in (a, b)$,
2) vasakult pidev punktis b ja
3) paremalt pidev punktis a.

3.2 Lõigus pideva funktsiooni omadused

See, et termin "pidev funktsioon" antud mõiste puhul on tõepoolest asjakohane, selgub eeskätt siis, kui me vaatleme teatavas **intervallis pidevaid funktsioone**. Järgnevast kahest teoreemist selgub, et funktsiooni pidevust mingis intervallis iseloomustab tema graafiku pidevus ehk *katkematus.*

Teoreem 3.4 ***(Bolzano-Cauchy teoreem lõigus pideva funktsiooni nullkohast).*** *Kui lõigus $[a, b]$ pideva funktsiooni f väärtused lõigu otspunktides on erinevate märkidega, siis leidub punkt $c \in (a, b)$ omadusega $f(c) = 0$.*

Tõestus. Olgu konkreetsuse mõttes $f(a) < 0$ ja $f(b) > 0$. Jagame lõigu $[a, b]$ pooleks punktiga $\frac{a+b}{2}$. Võib juhtuda, et $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$, siis on väide tõestatud. Kui see nii ei ole, siis kahest lõigust $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ ja $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ ühe puhul on funktsioonil f lõigu otspunktides erimärgilised väärtused. Tähistame selle lõigu otspunktid vastavalt tähtedega a_1 ja b_1, siis $f(a_1) < 0$ ja $f(b_1) > 0$ (põhjendada!)✠. Jagame lõigu $[a_1, b_1]$ pooleks ning valime (juhul $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) \neq 0$) samal põhimõttel lõikude $\left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right]$ ja $\left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$ hulgast välja eelislõigu, mille tähistame $[a_2, b_2]$. Siis $f(a_2) < 0$ ja $f(b_2) > 0$. Edasi jagame lõigu $[a_2, b_2]$ punktiga $\frac{a_2+b_2}{2}$ võrdseteks osadeks jne. See protsess kas katkeb mingil n-dal sammul (sel juhul $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) = 0$ ning väide on tõestatud) või jätkub lõpmatuseni. Lõpmatu protsessi korral saame üksteisesse sisestatud lõikude jada

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset ... \supset [a_k, b_k] \supset ... ,$$

kusjuures

$$f(a_k) < 0 \text{ ja } f(b_k) > 0 \tag{3.6}$$

ning

$$\lim_k (b_k - a_k) = \lim_k \frac{b-a}{2^k} = 0 \tag{3.7}$$

(põhjendada!)✠. Rakendame teoreemi sisestatud lõikudest (vt. pt. 2, teoreem 2.13 ja järeldus 2.14), selle kohaselt on lõikudel $[a_k, b_k]$ $(k \in \mathbb{N})$ parajasti üks ühine punkt c, seejuures $c = \lim_k a_k = \lim_k b_k$. Tingimustest (3.7) ja (3.6) saame lauset 3.2 rakendades

$$f(c) = \lim_k f(a_k) \leq 0 \text{ ja } f(c) = \lim_k f(b_k) \geq 0$$

(põhjendada!)✠ ehk $f(c) = 0$. ■

Tõestatud teoreemi geomeetriline tähendus selgub järgmisest väitest.

Järeldus 3.5 *Kui lõigus pideva funktsiooni graafiku otspunktid asuvad teine teisel pool x-telge, siis graafik lõikab x-telge vähemalt ühes punktis.*

Teoreemil 3.4 on ka rakenduslik väärtus, teda saab kasutada võrrandi lahendi olemasolu tõestamisel ja ka ligikaudse lahendi leidmisel.

Näited. 1. Vaatleme n-astme algebralist võrrandit $f(x) := a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n = 0$, eeldame, et n on paaritu arv. Kirjutades funtsiooni f ümber kujul

$$f(x) = x^n \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + ... + \frac{a_n}{x^n}\right),$$

on lihtne näha, et kui võtta x küllalt suur, siis $f(x)$ märk on sama, mis kordaja a_0 märk, aga kui x on küllalt väike negatiivne arv, siis on väärtusel $f(x)$ vastupidine märk (veenduda!)✠. Seega saab fikseerida a ja b nii, et $f(a)$ ja $f(b)$ on erimärgilised. Teoreemi 3.4 põhjal on vaadeldaval võrrandil olemas lahend.

2. Vaatleme võrrandit

$$f(x) := x^4 - x - 1 = 0$$

ja paneme tähele, et $f(1) = -1$ ning $f(2) = 13$. Teoreemi 3.4 põhjal on sel võrrandil vahemikus $(1, 2)$ vähemalt üks lahend. Jagame lõigu $[1, 2]$ kümneks võrdseks osaks ja arvutame funktsiooni väärtuse neis jaotuspunktides:

$$f(1,1) = -0,63...;\ f(1,2) = -0,12...;\ f(1,3) = 0,55....$$

Seega peab lahend paiknema arvude 1,2 ja 1,3 vahel. Jagame nendevahelise lõigu kümneks võrdseks osaks, ning otsime üles osalõigu, mille otspunktides on funktsioonil f erimärgilised väärtused:

$$f(1,22) = -0,004...;\ f(1,23) = 0,058....$$

Tähendab, lahend paikneb arvude 1,22 ja 1,23 vahel. Me võime fikseerida ligikaudse lahendi täpsusega 0,01. Nii jätkates saame me põhimõtteliselt leida lahendi kuitahes suure etteantud täpsusega. Kuigi praktiliseks rakendamiseks on selline meetod suuremate täpsuste puhul ebaefektiivne, näitab ta kätte reaalselt rakendatava võrrandi lahendamise idee.

Teoreem 3.6 ***(Bolzano-Cauchy teoreem vahepealsetest väärtustest).*** *Olgu $f : D \to \mathbb{R}$ mingis intervallis D pidev funktsioon. Kui y_1 ja y_2 on selle funktsiooni kaks erinevat väärtust, siis saavutab funktsioon f iga väärtuse, mis asub arvude y_1 ja y_2 vahel.*

Tõestus. Olgu D mingi (lõplik või lõpmatu) intervall, s.o. vahemik, poollõik või lõik. Eelduse kohaselt on y_1 ja y_2 funktsiooni kaks väärtust (s.t. $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$), kusjuures $y_1 \neq y_2$. Konkreetsuse mõttes olgu $y_1 < y_2$. Võtame suvalise arvu A vahemikust (y_1, y_2) ning näitame, et mingi $a \in D$ korral $A = f(a)$.

Kuna $y_1, y_2 \in R$, siis leiduvad argumendid x_1 ja x_2, et $y_1 = f(x_1)$ ja $y_2 = f(x_2)$. Konkreetsuse mõttes olgu $x_1 < x_2$. Moodustame uue funktsiooni

$$h(x) := f(x) - A$$

ning märgime, et h on lõigus $[x_1, x_2]$ pidev funktsioon (põhjendada!)✠. Seejuures

$$h(x_1) = y_1 - A < 0 \ \text{ ning } \ h(x_2) = y_2 - A > 0.$$

Teoreemi 3.4 põhjal leidub $a \in (x_1, x_2)$ omadusega $h(a) = 0$ ehk

$$f(a) = h(a) + A = A.$$

Väide on tõestatud. ■

Näide 3. Teoreemi 3.6 abil saab anda veel ühe tõestuse teoreemile n-astme juure olemasolust (vt. pt. 1, lause 1.27). Olgu $b > 0$ ja $n \in \mathbb{N}$, näitame, et leidub parajasti üks selline $c > 0$, et $c^n = b$, s.t. $c = \sqrt[n]{b}$.

Vaatleme funktsiooni $f(x) = x^n$ määramispiirkonnaga $[0, 1 + b]$. Funktsioon f on pidev, seejuures $f(0) = 0$ ja

$$f(1 + b) = (1 + b)^n = 1 + nb + ... + b^n > b.$$

Teoreemi 3.6 põhjal leidub $c \in (0, 1 + b)$ omadusega $c^n = b$. Selle arvu c ühesuse kontrollimiseks oletame, et võrdus $d^n = b$ kehtib veel mingi $d > 0$ korral. Siis

$$0 = d^n - c^n = (d - c)\left(d^{n-1} + d^{n-2}c + ... + c^{n-1}\right)$$

ja kuna $d^{n-1} + d^{n-2}c + ... + c^{n-1} > 0$, siis $b = c$.

Järgnevalt huvitab meid funktsioonide **pidevuse ja tõkestatuse vahekord**. Funktsiooni $f : D \to \mathbb{R}$ nimetatakse *tõkestatuks*, kui tema väärtuste hulk $\{f(x) \mid x \in D\}$ on tõkestatud, s.t.

$$\exists M > 0 : |f(x)| \leq M \quad (x \in D).$$

Lihtne on leida näiteid tõkestatud funktsioonidest, mis ei ole pidevad. Samal ajal ei pruugi iga pidev funktsioon olla tõkestatud isegi siis, kui tema määramispiirkond on lõplik intervall. Näiteks poollõigus $(0, 1]$ määratud funktsioon $y = \frac{1}{x}$ on selle hulga igas punktis pidev (põhjendada!)✠, kuid ei ole tõkestatud.

Seevastu kehtib järgmine tähelepanuväärne teoreem.

Teoreem 3.7 ***(Weierstrassi teoreem lõigus pideva funktsiooni tõkestatusest).*** *Lõigus pidev funktsioon on selles lõigus tõkestatud.*

Tõestus. Olgu f lõigus $[a, b]$ pidev funktsioon. Meie eesmärk on näidata sellise arvu $K > 0$ olemasolu, et

$$|f(x)| \leq K \text{ iga } x \in [a, b] \text{ korral.}$$

Oletame vastuväiteliselt, et funktsioon f ei ole tõkestatud, s.t. tema väärtuste hulk $\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ on tõkestamata. Siis iga naturaalarvu n jaoks saab leida argumendi $x_n \in [a, b]$, mille puhul $|f(x_n)| > n$. Saame jada (x_n), kusjuures $a \leq x_n \leq b \ (n \in \mathbb{N})$. Seega on jada (x_n) tõkestatud ning Bolzano-Weierstrassi teoreemi (vt. pt. 2, teoreem 2.9) põhjal leidub tal koonduv osajada (x_{n_k}). Tähistame $c := \lim_k x_{n_k}$, siis $c \in [a, b]$ (põhjendada!)✠. Tänu funktsiooni f pidevusele kehtib $f(c) = \lim_k f(x_{n_k})$ (vrd. lause 3.2). Seega on funktsiooni f väärtuste jada $(f(x_{n_k}))$ koonduv, järelikult ka tõkestatud. See fakt on vastuolus punktide x_n valikuga, mille kohaselt $|f(x_{n_k})| > n_k \quad (k \in \mathbb{N})$. Saadud vastuolu annab tunnistust sellest, et meie vastuväiteline oletus on väär. Teoreem on tõestatud. ■

Sellest, et funktsioon f on oma märamispiirkonnas D tõkestatud, tuleneb pidevuse aksioomi kohaselt tema väärtuste hulga ülemise ja alumise raja olemasolu, s.t. eksisteerivad $\sup\{f(x) \mid x \in D\}$ ja $\inf\{f(x) \mid x \in D\}$. Kuid üldjuhul ei tähenda see veel suurima ja vähima väärtuse olemasolu. Näiteks, seosega $f(x) := \frac{x}{1+x}$ määratud funktsiooni f väärtused poollõigus $[0,1)$ on ülalt tõkestatud arvuga $\frac{1}{2}$, kusjuures $\sup\limits_{x\in[0,1)} \frac{x}{1+x} = \lim\limits_{x\to 1-} \frac{x}{1+x} = \frac{1}{2}$, samal ajal ei leidu sellist punkti poolõigus $[0,1)$, millele vastav funktsiooni f väärtus oleks $\frac{1}{2}$. Seega ei ole funktsioonil f poollõigus $[0,1)$ suurimat väärtust.

Nii nagu tõkestatus, on ka ekstremaalste väärtuste olemasolu pideva funktsiooni korral garanteeritud, kui määramispiirkonnaks on lõik. See selgub järgmisest teoreemist.

Teoreem 3.8 ***(Weierstrassi teoreem lõigus pideva funktsiooni ekstremaalsetest väärtustest).*** *Lõigus pidev funktsioon saavutab selles lõigus suurima ja vähima väärtuse.*

Tõestus. Olgu f lõigus $[a,b]$ pidev funktsioon. Teoreemi 3.7 põhjal on ta tõkestatud ning pidevuse aksioomi kohaselt eksisteerib

$$M := \sup\{f(x) \mid x \in [a,b]\}.$$

Meie eesmärk on veenduda sellise $c \in [a,b]$ olemasolus, mille korral $f(c) = M$.

Oletame vastuväiteliselt, et $f(x) \neq M$ iga $x \in [a,b]$ puhul, ja moodustame funktsiooni $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ seosega

$$g(x) := \frac{1}{M - f(x)} \quad (x \in [a,b]).$$

Kuna g on pidev funktsioon (selgitada!)✠, siis on ta lause 3.7 põhjal tõkestatud, s.t. leidub $C > 0$ omadusega $\frac{1}{M-f(x)} \leq C$ $(x \in [a,b])$ ehk

$$f(x) \leq M - \frac{1}{C} \quad (x \in [a,b]).$$

Järelikult on arv $M - \frac{1}{C}$ väärtuste hulga $\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$ ülemine tõke, mis on vastuolus asjaoluga, et M on selle hulga vähim ülemine tõke. Saadud vastuolu lükkab ümber meie vastuväitelise oletuse. Teoreem on tõestatud. ■

Teoreemidest 3.6, 3.7 ja 3.8 järeldub kokkuvõttes järgmine tähelepanuväärne fakt.

Teoreem 3.9 *Lõigus* $[a,b]$ *pideva funktsiooni* f *väärtuste hulk* $\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$ *on lõik* $[m,M]$, *kus* $m := \min\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$ *ja* $M := \max\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$.

Tõestus. Iseseisvalt!✠ ■

Märgime, et erijuhul, kui f on konstantne funktsioon väärtusega A, koosneb lõik $[m,M]$ ühest punktist A.

3.3 Ühtlaselt pidevad funktsioonid

3.3.1 Ühtlase pidevuse mõiste. Cantori teoreem

Antud hulgas pidevate funktsioonide seast eraldatakse välja eriti soodsate omadustega nn. ühtlaselt pidevate funktsioonide klass. Ühtlase pidevuse definitsioonini viib meid tähelepanek, et mõnede funktsioonide puhul ei sõltu pidevuse definitsioonis (3.4) otsitav $\delta > 0$ vaadeldavast punktist a, teiste funktsioonide puhul aga ei õnnestu leida sellist universaalset positiivset arvu δ, et (fikseeritud $\varepsilon > 0$ korral) kehtiks implikatsioon (3.4) kõikide $a \in D$ puhul.

Definitsioon. Ütleme, et funktsioon $f : D \to \mathbb{R}$ on *hulgas* $X \subset D$ *ühtlaselt pidev*, kui iga $\varepsilon > 0$ korral saab leida sellise $\delta > 0$, et suvaliste $x, x' \in X$ korral, mis rahuldavad tingimust $|x - x'| < \delta$, kehtib võrratus $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

Et selgitada **erinevust** "tavalise" pidevuse ja ühtlase pidevuse vahel, võrdleme siin antud definitsiooni pidevuse definitsiooniga (3.4). Olgu $\varepsilon > 0$ suvaliselt fikseeritud. Kui f on pidev hulgas X, siis suvalise fikseeritud punkti $a \in X$ korral saab valida positiivse arvu $\delta = \delta(\varepsilon, a)$ (s.t. δ sõltub arvust ε *ja punktist* a) omadusega

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Rõhutame, et sel juhul piisab sellest, et iga $a \in X$ puhul saab leida tema jaoks sobiva arvu δ. Ühtlase pidevuse definitsioonis sõltub arv δ vaid arvust ε ja ei sõltu punkti $a \in X$ valikust.

Iga hulgas X ühtlaselt pidev funktsioon on selles hulgas pidev (veenduda!)✠. Vastupidine väide on üldjuhul vale.

Näide 4. Näitame, et *ruutfunktsioon* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ *ei ole oma määramispiirkonnas* $D = \mathbb{R}$ *ühtlaselt pidev*, kuigi on pidev. Selleks võtame $\varepsilon := 1$ ja veendume, et iga $\delta > 0$ korral saab leida x_1 ja x_2 omadusega $|x_1 - x_2| < \delta$ ja $|f(x_1) - f(x_2)| > 1$. Tõepoolest, kui $x_1 := \frac{1}{\delta}$ ning $x_2 := \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}$, siis $|x_1 - x_2| = \frac{\delta}{2} < \delta$, kuid

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &= \left|x_1^2 - x_2^2\right| = |x_1 + x_2|\,|x_1 - x_2| \\ &= \left(\frac{2}{\delta} + \frac{\delta}{2}\right)\frac{\delta}{2} > 1. \end{aligned}$$

Näide 5. Vaatleme seosega $f(x) = \frac{1}{x}$ määratud funktsiooni f määramispiirkonnaga $(0, 1]$. Tegemist on pideva funktsiooniga, näitame, et ta ei ole hulgas $(0, 1]$ ühtlaselt pidev. Et selles veenduda, võtame $\varepsilon := \frac{1}{2}$ ja leiame suvalise $\delta > 0$ korral x_1 ja x_2 hulgast $(0, 1]$ omadusega $|x_1 - x_2| < \delta$ ja $|f(x_1) - f(x_2)| > \frac{1}{2}$. Olgu $0 < \delta < 1$, võtame $x_1 := \sqrt{\delta}$ ja $x_2 := \sqrt{\delta} - \frac{\delta}{2}$. Kuna $\delta < \sqrt{\delta}$, siis $0 < x_2 < x_1 < 1$ ning $|x_1 - x_2| < \delta$, kuid

$$\begin{aligned} |f(x_2) - f(x_1)| &= \left|\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}\right| = \frac{|x_1 - x_2|}{|x_2 x_1|} \\ &> \frac{\delta/2}{\sqrt{\delta}\sqrt{\delta}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Niisiis, üldjuhul mingis hulgas pidev funktsioon ei ole selles hulgas ühtlaselt pidev. Samas kehtib järgmine teoreem.

Teoreem 3.10 ***(Cantori teoreem ühtlasest pidevusest).*** *Lõigus pidev funktsioon on selles lõigus ühtlaselt pidev.*

Tõestus. Olgu funktsioon f lõigus $[a,b]$ pidev, oletame vastuväiteliselt, et ta ei ole ühtlaselt pidev selles lõigus. Siis leidub selline $\varepsilon_0 > 0$, et iga $\delta > 0$ puhul saab valida punktid $x, x' \in [a,b]$ omadusega $|x - x'| < \delta$ ja $|f(x) - f(x')| \geq \varepsilon_0$. Võtame $\delta := \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ ja neile arvudele vastavad punktid x_n ja x'_n, s.t.

$$|x_n - x'_n| < \frac{1}{n}, \quad |f(x_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon_0 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Saadud jadad (x_n) ja (x'_n) on tõkestatud (põhjendada!)✠, Bolzano-Weierstrassi teoreemi põhjal on neil koonduvaid osajadasid. Olgu (x_{n_k}) jada (x_n) osajada, mis koondub mingiks punktiks c, siis $c \in [a,b]$ (põhjendada!)✠. Eraldame jadast (x'_n) *samade indeksitega* osajada $\left(x'_{n_k}\right)$. Kuna

$$\left|x_{n_k} - x'_{n_k}\right| < \frac{1}{n_k} \to 0 \ (k \to \infty),$$

siis $\lim_k x'_{n_k} = c$ (veenduda!)✠. Tänu funktsiooni f pidevusele saame

$$\lim_k f(x_{n_k}) = \lim_k f\left(x'_{n_k}\right) = f(c),$$

niisiis

$$\lim_k \left(f(x_{n_k}) - f\left(x'_{n_k}\right)\right) = 0.$$

Jada koonduvuse definitsiooni kohaselt on mingist indeksist k_0 alates täidetud tingimus $\left|f(x_{n_k}) - f\left(x'_{n_k}\right)\right| < \varepsilon_0$ (selgitada!)✠, kuid see on vastuolus punktide x_n ja x'_n valikuga. Oleme jõudnud vastuoluni, järelikult peab meie vastuväiteline oletus olema vale. Tähendab, funktsioon f on lõigus $[a,b]$ ühtlaselt pidev. ■

3.3.2 Lipschitzi funktsioonid

Vaatleme näitena ühte selliste funktsioonide klassi, mis on lõigus ühtlaselt pidevad.

Definitsioon. Kui funktsiooni $f : D \to \mathbb{R}$ korral leidub selline positiivne arv C, et

$$\left|f(x) - f\left(x'\right)\right| \leq C\left|x - x'\right| \text{ suvaliste } x, x' \in D \text{ korral,} \tag{3.8}$$

siis nimetatakse funktsiooni f *Lipschitzi funktsiooniks* (ehk Lipschitzi mõttes pidevaks funktsiooniks).

Kirjutades Lipschitzi tingimuse (3.8) ümber kujul

$$\left|\frac{f(x) - f(x')}{x - x'}\right| \leq C \ \left(x, x' \in D, \ x \neq x'\right),$$

saame eeldusel $D = [a,b]$ selle tingimuse geomeetrilise tähenduse. Vaatleme funktsiooni f graafiku punkte $(x, f(x))$ ja $(x', f(x'))$ kus $x, x' \in [a,b]$ ning $x \neq x'$. Murd $\frac{f(x)-f(x')}{x-x'}$ kirjeldab neid punkte ühendava sirglõigu (ehk kõõlu) tõusu, täpsemalt, ta on selle tõusunurga tangens. Seega tähendab Lipschitzi tingimus (3.8) seda, et *kõikide funktsiooni f graafiku kahte punkti omavahel ühendavate sirglõikude tõusud on tõkestatud* (teha joonis!)✠.

Lause 3.11 *Iga hulgas D määratud Lipschitzi funktsioon on selles hulgas ühtlaselt pidev.*

Tõestus. Iseseisvalt!✠ ■

Näide 6. Lipschitzi funktsioonide klass on rangelt kitsam, kui kõigi ühtlaselt pidevate funktsioonide klass. Nimelt leidub lõigus (ühtlaselt) pidevaid funktsioone, mis ei rahulda selles lõigus Lipschitzi tingimust (3.8). Olgu $f(x) = \sqrt{x}$ ning $D = [0,1]$, ilmselt on f pidev ning seega ühtlaselt pidev hulgas $[0,1]$. Seejuures

$$\left|f(x) - f(x')\right| = \left|\sqrt{x} - \sqrt{x'}\right| = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x'}}\left|x - x'\right| \quad \left(x, x' \in [0,1],\ x \neq x'\right).$$

Kui oletada, et f on Lipschitzi funktsioon, siis

$$\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x'}}\left|x - x'\right| \le C\left|x - x'\right| \quad \left(x, x' \in [0,1]\right)$$

ehk

$$\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x'}} \le C \quad (x, x' \in [0,1]),$$

mis ei ole õige.

3.3.3 Ühtlase koonduvuse kirjeldamine jadade abil

Lihtne on näha, et iga Lipschitzi funktsioon $f : D \to \mathbb{R}$ rahuldab hulgas D järgmist tingimust:

$$\textit{kui } x_k, x'_k \in D \ \textit{ ja } x_k - x'_k \to 0, \textit{ siis } \quad f(x_k) - f\left(x'_k\right) \to 0 \quad (k \to \infty). \tag{3.9}$$

Tegelikult osutub see funktsiooni f ühtlase pidevuse tarvilikuks ja piisavaks tingimuseks.

Lause 3.12 *Pidev funktsioon $f : D \to \mathbb{R}$ on hulgas D ühtlaselt pidev parajasti siis, kui on täidetud tingimus* (3.9).

Tõestus. *Tarvilikkus* (iseseisvalt!✠).

Piisavus. Eeldame, et funktsioon f on hulgas D pidev, kuid ei ole ühtlselt pidev. Siis kehtib järgmine tingimus:

$$\exists\varepsilon_0 > 0\ \forall\delta > 0\ \exists x_\delta, x'_\delta \in D : |x_\delta - x'_\delta| < \delta,\ |\ f(x_\delta) - f(x'_\delta)| \ge \varepsilon_0. \tag{3.10}$$

Võtame $\delta := \frac{1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$) ja leiame vastavalt tingimusele (3.10) punktid $x_n, x'_n \in D$ omadusega $|x_n - x'_n| < \frac{1}{n}$, $|\ f(x_n) - f(x'_n)| \ge \varepsilon_0$. Siis $x_n - x'_n \to 0$, mistõttu $f(x_n) - f(x'_n) \to 0$ (selgitada!)✠. Seega leidub $N \in \mathbb{N}$, et $|\ f(x_n) - f(x'_n)| < \varepsilon_0$ iga $n \ge N$ korral. See on vastuolus punktide $x_n, x'_n \in D$ valikuga, järelikult on vastuväiteline oletus (3.10) väär. ■

Näide 7. Veendume lause 3.12 abil veel kord (vrd. näide 4), et pidev ruutfunktsioon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ ei ole hulgas $\mathbb{R}$ ühtlaselt pidev. Tõepoolest, kui $x_n := \sqrt{n+1}$ ja $x'_n := \sqrt{n}$, siis

$$x_n - x'_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \to 0 \ \ (n \to \infty),$$

kuid $f(x_n) - f(x'_n) = 1 \nrightarrow 0$.

3.3.4 Ühtlase koonduvuse kirjeldamine Cauchy jadade abil

Lause 3.13 (a) *Kui hulgas D määratud funktsioon f on selles hulgas ühtlaselt pidev, siis*

$$\text{iga Cauchy jada } (x_k) \text{ puhul, kus } x_k \in D \ (k \in \mathbb{N}),\ \text{on } (f(x_k)) \text{ Cauchy jada.} \tag{3.11}$$

(b) *Kui hulk D on tõkestatud, siis tingimus* (3.11) *on ka piisav funktsiooni f ühtlaseks pidevuseks.*

Tõestus. (a) Olgu $f : D \to \mathbb{R}$ hulgas ühtlaselt pidev ja olgu $\varepsilon > 0$. Leiame sellise $\delta > 0$, et

$$|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon. \tag{3.12}$$

Edasi, olgu (x_n) selline Cauchy jada, et $x_n \in D$ $(n \in \mathbb{N})$, peame veenduma, et $(f(x_n))$ on Cauchy jada. Vastavalt Cauchy jada definitsioonile saame leida $N \in \mathbb{N}$ omadusega

$$n, m \geq N \Rightarrow |x_n - x_m| < \delta,$$

tingimusest (3.12) saame

$$|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon \quad (n, m \geq N).$$

See tähendabki, et $(f(x_n))$ on Cauchy jada.

(b) Olgu f *tõkestatud* hulgas D määratud funktsioon, mis rahuldab tingimust (3.11). Oletame vastuväiteliselt, et f ei ole hulgas D ühtlaselt pidev, ja leiame sellise Cauchy jada (z_k) hulgas D, et $(f(z_k))$ ei ole Cauchy jada.

Nii nagu lause 3.12 tõestuses, saame valida $\varepsilon_0 > 0$ja $x_n, x'_n \in D$ $(n \in \mathbb{N})$ omadusega

$$|x_n - x'_n| < \frac{1}{n}, |\ f(x_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon_0$$

(selgitada!)✠. Kuna hulk D on tõkestatud, siis Bolzano-Weierstrassi teoreemi põhjal sisaldab jada (x_n) koonduva osajada (x_{n_k}) (selgitada!)✠, tähistame $a := \lim_k f(x_{n_k})$. Paneme tähele, et $x_n - x'_n \to 0$ $(n \to \infty)$, seega saame seosest $x'_{n_k} = x_{n_k} + \left(x'_{n_k} - x_{n_k}\right)$, et $\lim_k f\left(x'_{n_k}\right) = a$. Moodustame jada

$$(z_k) := \left(x_{n_1}, x'_{n_1}, x_{n_2}, x'_{n_2}, x_{n_3}, x'_{n_3}, \ldots\right),$$

see koondub hulgas $\mathbb{R}$ piirväärtuseks a (kontrollida!)✠, seega on ta hulgas D Cauchy jada (põhjendada!)✠. Arvude x_n ja x'_nvaliku kohaselt kehtib

$$|f(z_{2k-1}) - f(z_{2k})| = \left|f(x_{n_k}) - f\left(x'_{n_k}\right)\right| \geq \varepsilon_0,$$

mistõttu $(f(z_k))$ ei ole Cauchy jada. ■

Näide 8. Veendume lause 3.13 abil veel kord (vrd. näide 5), et pidev funktsioon $f : (0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ ei ole hulgas $(0,1]$ ühtlaselt pidev. Tõepoolest, kui $x_n := \frac{1}{n}$, siis (x_n) on Cauchy jada, kuid $(f(x_n)) = (n)$ ei ole Cauchy jada.

Näide 9. Lause 3.13 (b) ei kehti üldjuhul, kui D ei ole tõkestatud: ruutfunktsioon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ ei ole hulgas $\mathbb{R}$ ühtlaselt pidev (vrd. näited 4 ja 7), kuigi iga Cauchy jada (x_n) puhul on $(f(x_n))$ Cauchy jada.

3.3.5 Funktsiooni ühtlane pidevus lõpmatus intervallis

Tähelepanuväärne on järgmine piisav tingimus funktsiooni ühtlaseks pidevuseks lõpmatus intervallis.

Lause 3.14 *Kui funktsioon $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ on pidev ja eksiteerib lõplik piirväärtus* $\lim_{x\to\infty} f(x) =:$ A*, siis f on hulgas $[a, \infty)$ ühtlaselt pidev.*

Tõestus. Olgu $\varepsilon > 0$ suvaline, peame veenduma sellise $\delta > 0$ olemasolus, et

$$\left[\left|x - x'\right| < \delta, \quad x, x' \in [a, \infty)\right] \Rightarrow \left|f(x) - f\left(x'\right)\right| < \varepsilon. \tag{3.13}$$

Kuna $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$, siis saab valida $M > a$, et

$$|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ kõikide } x \geq M \text{ korral.}$$

Kasutades asjaolu, et f on pidev lõigus $[a, M + 1]$, ning rakendades Cantori teoreemi 3.10, saame leida $\delta_1 > 0$ omadusega

$$\left|x - x'\right| < \delta_1 \Rightarrow \left|f(x) - f\left(x'\right)\right| < \varepsilon,$$

kui $x, x' \in [a, M + 1]$ (selgitada!)✠. Võtame $\delta := \min\{1, \delta_1\}$ ja vaatleme arve $x, x' \in [a, \infty)$, mis rahuldavad tingimust $|x - x'| < \delta$. Kui $x, x' \in [a, M + 1]$, siis implikatsioon (3.13) kehtib, sest $\delta \leq \delta_1$. Kui $x, x' \in [M, \infty)$, siis

$$\left|f(x) - f\left(x'\right)\right| \leq |f(x) - A| + \left|f\left(x'\right) - A\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

(põhjendada!)✠. Seega kehtib (3.13) (selgitada!)✠. ■

Näide 10. Kuna $\lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$, siis funktsioon $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{-x}$ on iga $a \in \mathbb{R}$ korral intervallis $[a, \infty)$ ühtlaselt pidev.

3.3.6 Antud vahemikus ühtlaselt pidevad funktsioonid

Cantori teoreemi kohaselt on iga lõigus pidev funktsioon selles lõigus ühtlaselt pidev. Eelpool tõime lihtsa näite 5 selle kohta, et Cantori teoreem ei kehti vahemikus või poollõigus pidevate funktsioonide puhul. Käesolevas punktis otsime vastust küsimusele: *millistel eeldustel on **vahemikus** pidev funktsioon selles vahemikus ühtlaselt pidev?*

Vastuse esitatud küsimusele anname järgnevalt lause 3.13 abil.

Lause 3.15 ***(funktsiooni pidevast jätkamisest).*** *Vahemikus (a, b) määratud funktsioon f on selles vahemikus ühtlaselt pidev parajasti siis, kui ta on pidevalt jätkatav lõiku $[a, b]$, s.t. kui leidub selline lõigus $[a, b]$ pidev funktsioon h, et $h(x) = f(x)$ iga $x \in (a, b)$ korral.*

Tõestus. *Piisavus* (iseseisvalt!)✠.

Tarvilikkus. Olgu f vahemikus (a, b) ühtlaselt pidev funktsioon. Näitame, et teda saab *pidevalt* jätkata nii punkti a kui ka punkti b. Teiste sõnadega, peame defineerima uue funktsiooni $h : [a, b) \to \mathbb{R}$, mis vahemikus (a, b) langeb kokku funktsiooniga f, oleks punktis a paremalt pidev ja punktis b vasakult pidev.

Olgu (x_k) vahemiku (a, b) punktide suvaline jada, mis koondub arvuks a. Sel juhul on ta Cauchy jada (selgitada!)✠ ning kuna f on vahemikus (a, b) ühtlaselt pidev funktsioon, siis lause 3.13(a)

järgi on $(f(x_k))$ samuti Cauchy jada. Cauchy kriteeriumi kohaselt eksisteerib $\lim_k f(x_k) =: L$. Näitame, et *seejuures ei sõltu piirväärtus* L *jada* (x_k) *valikust.* Tõepoolest, kui ka mingi teine jada (x'_k) vahemikus (a, b) koondub piirväärtuseks a, siis jada $(z_k) := (x_1, x'_1, x_2, x'_2, x_3, x'_3, ...)$ koosneb vahemiku (a, b) punktidest ning koondub punktiks a (kontrollida!)✠. Lause 3.13(a) põhjal eksisteerib $\lim_k f(z_k) =: L'$. Kuna (x_k) on jada (z_k) osajada, siis $f(x_k) \to L'$ (selgitada!)✠, järelikult $L' = L$ (selgitada!)✠. Niisiis koondub jada $(f(x'_k))$ samuti piirväärtuseks L, seega $\lim_k f(z_k) = L$ iga sellise vahemiku (a, b) punktide jada (x_k) korral, mis koondub arvuks a.

Jätkame funktsiooni f punkti a, võttes funktsiooni väärtuseks selles punktis arvu L. Analoogiliselt jätkame funktsiooni punkti b, defineerides tema väärtuseks piirväärtuse $\lim\limits_k f(x_k) =: M$, kus $(a, b) \ni x_k \to b$. Saame uue funktsiooni $h : [a, b] \to \mathbb{R}$, kus

$$h(x) = \begin{cases} L, & \text{kui } x = a, \\ f(x), & \text{kui } x \in (a, b), \\ M, & \text{kui } x = b. \end{cases}$$

Selge, et h on pidev igas punktis $x \in (a, b)$. Kuna

$$h(a) = L = \lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a+} h(x) \text{ ja } h(b) = M = \lim_{x \to b-} f(x) = \lim_{x \to b-} h(x),$$

siis on funktsioon h punktis a paremalt ja punktis b vasakult pidev. Kokkuvõttes on $h : [a, b) \to \mathbb{R}$ ühtlaselt pidev ning $h(x) = f(x)$ iga $x \in (a, b)$ korral. Lause on tõestatud. ■

3.4 Pöördfunktsiooni pidevus

Kui funktsioon $f : D \to \mathbb{R}$ on selline, et iga $y \in R := \{f(x) \mid x \in D\}$ jaoks leidub *ainult üks* argument $x \in D$ omadusega $y = f(x)$, siis saame igale arvule $y \in R$ seada vastavusse üheselt määratud arvu $x \in \mathbb{R}$, mis tähendab, et hulgas $R \subset \mathbb{R}$ on defineeritud funktsioon $f^{-1} : R \to D$. Seda funktsiooni f^{-1} nimetatakse funktsiooni f *pöördfunktsiooniks.*

Pöördfunktsiooni olemasolu sõltub funktsiooni f **monotoonsuseomadustest.** Funktsiooni f nimetatakse **kasvavaks**, kui kõikide $x, x' \in D$ puhul, mis rahuldavad tingimust $x \leq x'$, kehtib võrratus $f(x) \leq f(x')$. Kui

$$[x, x' \in D,\ x < x'] \Rightarrow f(x) < f(x'),$$

siis nimetame funktsiooni f **rangelt kasvavaks.** Analoogiliselt defineeritakse **kahanevad** ja **rangelt kahanevad funktsioonid** (defineerida!)✠. Kui mingi funktsiooni puhul on täidetud üks neist neljast tingimusest, siis kõneleme vastavalt *monotoonsest* või *rangelt monotoonsest* funktsioonist.

Lause 3.16 *Kui f on rangelt monotoonne funktsioon hulgas D, siis tal on pöördfunktsioon $g := f^{-1}$, mis on samuti hulgas R rangelt monotoonne.*

Tõestus. Funktsiooni f rangest monotoonsusest tuleneb, et

$$f(x_1) \neq f(x_2), \text{ kui } x_1, x_2 \in D \text{ ja } x_1 \neq x_2$$

(kontrollida!)✠. Seega vastab igale arvule $y \in R$ tõepoolest üks arv $x \in D$, mille puhul kehtib võrdus $y = f(x)$. Niisiis, funktsioonil f on olemas pöördfunktsioon, tähistame selle tähega g.

Kontrollime funktsiooni g ranget monotoonsust. Eeldame konkreetsuse mõttes, et f on rangelt kasvav funktsioon, ja näitame, et siis on ka g rangelt kasvav. Olgu $y_1, y_2 \in R$ ja $y_1 < y_2$. Kui oletada vastuväiteliselt, et $z_2 := g(y_2) \leq g(y_1) =: z_1$, siis peaks kehtima

$$y_2 = f(g(y_2)) = f(z_2) \leq f(z_1) = f(g(y_1)) = y_1,$$

mis on vastuolus arvude y_1 ja y_2 valikuga. Lause on tõestatud. ■

Teoreem 3.17 ***(pöördfunktsiooni pidevusest).*** *Lõigus $[a, b]$ pideva ja rangelt monotoonse funktsiooni f pöördfunktsioon $g := f^{-1}$ on pidev lõigus otspunktidega $f(a)$ ja $f(b)$.*

Tõestus. Olgu funktsioon f konkreetsuse mõttes lõigus $[a, b]$ rangelt kasvav, siis pöördfunktsiooni g määramispiirkond on $[f(a), f(b)]$. Teiste sõnadega, $m = f(a)$ ja $M = f(b)$, kus $m := \min\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ ja $M := \max\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$. Selles lõigus $[m, M]$ on g rangelt kasvav (vrd. lause 3.16). Peame näitama, et g on pidev vahemiku (m, M) igas punktis ja selle otspunktides m ning M vastavalt paremalt ja vasakult pidev. Niisiis on vaja veenduda, et g on 1) vasakult pidev igas punktis $y \in (m, M]$ ning 2) paremalt pidev igas punktis $y \in [m, M)$ (selgitada!)✠.

Tõestame väite 1), teine väide tõestatakse analoogiliselt. Olgu $y_0 \in (m, M]$ suvaline punkt. Kuna $m < y_0$, siis

$$a = g(m) < g(y_0) =: x_0,$$

sest g on rangelt kasvav funktsioon. Olgu ε suvaline positiivne arv. Meie *eesmärk* on näidata niisuguse $\delta > 0$ olemasolu, et kehtiks tingimus

$$0 < y_0 - y < \delta \Rightarrow |g(y) - g(y_0)| < \varepsilon, \tag{3.14}$$

see tähendaks seost $g(y_0) = \lim\limits_{y \to y_0 -} g(y)$ ehk funktsiooni g vasakult pidevust punktis y_0. Üldisust kitsendamata võime ε valida nii väikese, et $x_0 - \varepsilon > a$ (selgitada!)✠. Kuna $x_0 - \varepsilon < x_0$, siis $f(x_0 - \varepsilon) < f(x_0) = y_0$. Tähistame $\delta := y_0 - f(x_0 - \varepsilon)$, siis $\delta > 0$ ja

$$g(y_0 - \delta) = g(f(x_0 - \varepsilon)) = x_0 - \varepsilon = g(y_0) - \varepsilon. \tag{3.15}$$

Olgu y suvaline punkt vahemikust $(y_0 - \delta, y_0)$, s.t. $y_0 - \delta < y < y_0$ ehk

$$0 < y_0 - y < \delta.$$

Siis seosest (3.15) ja funktsiooni g rangest monotoonsusest saame

$$g(y_0) - \varepsilon = g(y_0 - \delta) < g(y) < g(y_0) < g(y_0) + \varepsilon$$

ehk $|g(y) - g(y_0)| < \varepsilon$. Niisiis kehtib implikatsioon (3.14) ning väide on tõestatud. ■

3.5 Pidevate funktsioonide lähendamine treppfunktsioonide ja tükati lineaarsete funktsioonidega

Funktsiooni lähendamine tähendab tema asendamist mingi teise funktsiooniga. Harilikult lähendatakse (teatavas mõttes) paremate omadustega funktsiooniga või siis funktsiooniga, mille väärtused on lihtsamini arvutatavad. Üldjuhul ei lange lähendatava funktsiooni ja uue funktsiooni ehk lähendi väärtused kokku, lähendi väärtusi nimetatakse esialgse funktsiooni ligikaudseteks väärtusteks. Lähendamise juures on alati oluline teada, kui suur on selle täpsus, s.t. kui suurel määral erinevad ligikaudsed väärtused funktsiooni täpsetest väärtustest.

Me vaatleme siinkohal lõigus pideva funktsiooni lähendamist kahte tüüpi lihtsate funktsioonidega, nimelt treppfunktsioonidega ja tükati lineaarsete funktsioonidega.

3.5.1 Lähendamine treppfunktsioonidega

Lõigus $[a, b]$ määratud funktsiooni h nimetame *treppfunktsiooniks*, kui lõigu $[a, b]$ saab jaotada lõplikuks arvuks sellisteks osaintervallideks, milles h on konstantne. Täpsemalt, $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ on treppfunktsioon parajasti siis, kui $[a, b] = \bigcup\limits_{i=1}^{n} I_i$, $I_i \cap I_j = \emptyset$ $(i \neq j)$ ning $I_1, ..., I_n$ on sellised intervallid, et $h(x) = c_i$ $(x \in I_i;\ i = 1, ..., n)$. Näiteks täisosa-funktsioonil h, kus $h(x) := [x]$, on lõigus $[0, 100]$ 101 erinevat väärtust, ta on tüüpiline treppfunktsioon.

Lause 3.18 *Olgu f lõigus $[a, b]$ pidev funktsioon. Siis iga $\varepsilon > 0$ jaoks leidub selline treppfunktsioon $h : [a, b] \to \mathbb{R}$, mis rahuldab tingimust*

$$|f(x) - h(x)| < \varepsilon \text{ iga } x \in [a, b] \text{ korral.}$$

Tõestus. Olgu $\varepsilon > 0$ suvaline. Kuna f on Cantori teoreemi kohaselt lõigus $[a, b]$ ühtlaselt pidev, siis ühtlase pidevuse definitsiooni kohaselt saab valida positiivse arvu δ omadusega

$$\left[\left|x - x'\right| < \delta,\ \ x, x' \in [a, b]\right] \Rightarrow \left|f(x) - f\left(x'\right)\right| < \varepsilon.$$

Võtame arvu $n \in \mathbb{N}$ nii suure, et $\rho := \frac{b-a}{n} < \delta$, ja jaotame lõigu $[a, b]$ n võrdse pikkusega osaintervallideks

$$I_1 := [a, a + \rho), \quad I_2 := [a + \rho, a + 2\rho), \ ..., \ I_i := [a + (i-1)\rho, a + i\rho), \ ...,$$
$$I_n := [a + (n-1)\rho, a + n\rho] = [b - \rho, b].$$

Defineerime igas osaintervallis I_i konstantse funktsiooni s_i seosega $s_i(x) := f(a + i\rho)$ $(x \in I_i)$ ning lõigus $[a, b]$ funktsiooni h seosega

$$h(x) := s_i(x), \text{ kui } x \in I_i \quad (i = 1, ..., n).$$

Se juhul

$$|f(x) - s_i(x)| = |f(x) - f(a + i\rho)| < \varepsilon \text{ iga } x \in I_i \text{ korral } (i = 1, ..., n)$$

(põhjendada!)✠, mis tähendab, et $|f(x) - h(x)| < \varepsilon$ iga $x \in [a, b]$ korral. ■

3.5.2 Lähendamine tükati lineaarsete funktsioonidega

Treppfunktsioonid on kahtlemata elementaarfunktsioonide seas ühed lihtsamad, nende puudus on, et nad ei ole üldjuhul pidevad (selgitada!)✠. Pidevate funktsioonide hulgas on ühed lihtsamad tükati lineaarsed funktsioonid. Öeldakse, et funktsioon h on lõigus $[a, b]$ *tükati lineaarne,* kui lõigu $[a, b]$ saab jaotada lõplikuks arvuks osaintervallideks, milles h on lineaarne. Täpsemalt, funktsioon $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ on tükati lineaarne parajasti siis, kui $[a, b] = \bigcup_{i=1}^{n} I_i$, $I_i \cap I_j = \emptyset$ $(i \neq j)$ ning $I_1, ..., I_n$ on sellised intervallid, et $h(x) = A_i x + B_i$ $(x \in I_i)$, kus A_i ja B_i on iga $i = 1, ..., n$ puhul konstantsed kordajad. Lihtne on veenduda, et tükati lineaarne funktsioon on pidev parajasti siis, kui ta graafik on pidev murdjoon (selgitada!)✠.

Lause 3.19 *Olgu f lõigus $[a, b]$ pidev funktsioon. Siis leidub iga $\varepsilon > 0$ jaoks lõigus $[a, b]$ tükati lineaarne funktsioon h, mis rahuldab tingimust*

$$|f(x) - h(x)| < \varepsilon \text{ iga } x \in [a, b] \text{ korral.}$$

Tõestus. Olgu $\varepsilon > 0$. Täpselt nii nagu eelmise väite tõestuses leiame $\delta > 0$ tingimusega

$$\left[\left|x - x'\right| < \delta,\ \ x, x' \in [a,b]\right] \Rightarrow \left|f(x) - f\left(x'\right)\right| < \varepsilon/2$$

ja moodustame intervallid $I_1, ..., I_n$ täpselt samamoodi, kui eelmises tõestuses. Igas intervallis I_i defineerime lineaarse funktsiooni s_i selliselt, et tema graafik ühendaks funktsiooni f graafiku punkte

$$(a + (i-1)\rho,\ f(a + (i-1)\rho)) \text{ ja } (a + i\rho,\ f(a + i\rho)).$$

Funktsioon h defineeritakse seosega $h(x) = s_i(x)$ $(x \in I_i;\ i = 1, ..., n)$.

Analüütiliselt esitatakse funktsioon h valemiga

$$h(x) = f(x_{i-1}) + \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}(x - x_{i-1}) \quad (x \in [x_{i-1}, x_i)\,;\ i = 1, ..., n),$$

kus $x_i := a + i\rho$ on lõigu jaotuspunktid. Siis iga $x \in [a,b]$ korral leidub selline $i \in \{1, ..., n\}$, et $x \in [x_{i-1}, x_i)$, seega

$$\begin{aligned}|f(x) - h(x)| &= \left|f(x) - f(x_{i-1}) - \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}(x - x_{i-1})\right| \\ &\le |f(x) - f(x_{i-1})| + |f(x_i) - f(x_{i-1})| \frac{|x - x_{i-1}|}{|x_i - x_{i-1}|} \\ &\le |f(x) - f(x_{i-1})| + |f(x_i) - f(x_{i-1})| < \varepsilon.\end{aligned}$$

Vahetu kontroll näitab, et
1) igas intervallis $I_i = [x_{i-1,}x_n)$ on funktsioon h lineaarne (veenduda!)✠ ja
2) punktides x_i $(i = 1, ..., n)$ on h pidev.
Väite 2) kontrollimiseks paneme tähele, et

$$\lim_{x \to x_i -} h(x) = f(x_i) \quad \text{ja} \quad \lim_{x \to x_i +} h(x) = f(x_i)$$

(kontrollida!)✠, seega on funktsioon h tõepoolest pidev punktis x_i. ■

3.6 Funktsionaalvõrrandid

3.6.1 Pideva aditiivse funktsiooni üldkuju

Funktsiooni f, mis on määratud kogu arvteljel $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ ning rahuldab tingimust

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad (x \in \mathbb{R}), \tag{3.16}$$

nimetatakse *aditiivseks*. Püstitame küsimuse: *millised on pidevad aditiivsed funktsioonid?* Kuna suvalise kordaja $c \in \mathbb{R}$ puhul kehtib võrdus

$$c(x + y) = cx + cy \quad (x \in \mathbb{R}),$$

siis otsitavate funktsioonide hulka kuuluvad kindlasti kõik *homogeensed* lineaarsed funktsioonid, s.o. funktsioonid kujul

$$f(x) = cx \quad (x \in \mathbb{R}),\ \text{ kus } c \in \mathbb{R} \text{ on mingi kordaja.} \tag{3.17}$$

Lause 3.20 *Iga pidev aditiivne funktsioon on homogeenne, s.t. kui pidev funktsioon* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *rahuldab tingimust* (3.16), *siis on ta esitatav kujul* (3.17).

Tõestus. Olgu f hulgas $\mathbb{R}$ pidev funktsioon omadusega (3.16). Siis saab matemaatilise induktsiooni abil tõestada, et

$$f\left(x_1+x_2+...+x_n\right)=f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)+...+f\left(x_n\right)$$

suvalise naturaalarvu n puhul (tõestada!)✠. Siit tuleneb

$$f\left(nx\right)=nf\left(x\right)\quad\left(n\in\mathbb{N},\,x\in\mathbb{R}\right)$$

(selgitada!)✠, millest saame

$$f\left(\frac{1}{n}x\right)=\frac{1}{n}f\left(x\right)$$

(selleks võtame eelmises võrduses argumendi x asemel $\frac{1}{n}x$). Kui siin võtta x asemel mx, saame võrduse

$$f\left(\frac{m}{n}x\right)=\frac{m}{n}f\left(x\right)\quad\left(m,n\in\mathbb{N},\,x\in\mathbb{R}\right)$$

(veenduda!)✠. Paneme tähele, et tingimusest (3.16) saame vahetult $f\left(0\right)=2f\left(0\right)$ (kontrollida!)✠, mistõttu $f\left(0\right)=0$. Analoogiliselt

$$f\left(-x\right)=-f\left(x\right)\quad\left(x\in\mathbb{R}\right),$$

seega

$$f\left(-\frac{m}{n}x\right)=-\frac{m}{n}f\left(x\right)\quad\left(m,n\in\mathbb{N},\,x\in\mathbb{R}\right).$$

Kokkuvõtteks,

$$f\left(rx\right)=rf\left(x\right)\quad\left(\,x\in\mathbb{R}\right)$$

iga ratsionaalarvu r korral. Võttes siin $x:=1$, saame tingimuse (3.17) kõigi ratsionaalarvuliste argumentide r jaoks:

$$f\left(r\right)=cr,\ \text{ kus }\ c:=f\left(1\right).$$

Seejuures ei ole me seni kasutanud eeldust funktsiooni f pidevuse kohta. Seda eeldust läheb meil vaja üleminekul ratsionaalsetelt argumentidelt reaalarvulistele.

Olgu $x\in\mathbb{R}$ suvaline reaalarv. Teatavasti leidub siis ratsionaalarvude jada (r_n), mis koondub arvuks x (põhjendada!)✠. Kuna f on pidev funktsioon, siis $f\left(x\right)=\lim_n f\left(r_n\right)$ (põhjendada!)✠. Võrdusest $f\left(r_n\right)=cr_n\ \ (n\in\mathbb{N})$ saame piirile minnes seose (3.17), seekord juba suvalise reaalarvu x korral. Lause on tõestatud. ■

3.6.2 Funktsionaalvõrrandid, mille lahenditeks on eksponent-, logaritm- ja astmefunktsioonid

Eelmises punktis lahendasime nn. funktsionaalvõrrandi (3.16) ja veendusime, et tema lahenditeks kõigi pidevate funktsioonide klassis on parajasti kõik funktsioonid kujul (3.17). Seda tulemust kasutame järgneva kolme funtsionaalvõrrandi lahendamisel.

Vaatleme võrrandit

$$f\left(x+y\right)=f\left(x\right)f\left(y\right)\quad\left(x\in\mathbb{R}\right),\tag{3.18}$$

selle lahenditeks on hulgas $\mathbb{R}$ määratud funktsioonid f, mille korral võrdus (3.18) on täidetud. Üheks selliseks on kindlasti eksponentfunktsioon

$$f(x) = a^x \,(x \in \mathbb{R}), \text{ kus } a > 0 \text{ on mingi fikseeritud arv,} \tag{3.19}$$

seejuures on eksponentfunktsioon pidev (selle fakti loeme teadaolevaks). Näitame, et eksponentfunktsioonid on ka ainukesed pidevad funktsioonid, mis võrrandit (3.18) rahuldab.

Lause 3.21 *Kui arvteljel* $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ *pidev funktsioon* f*, mis ei ole nullfunktsioon, rahuldab tingimust* (3.18)*, siis on ta esitatav kujul* (3.19).

Tõestus. Eeldame, et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on pidev funktsioon, mis rahuldab võrrandit (3.18), ja $f(x) \neq 0$ vähemalt ühes punktis x_0. Siis seosest (3.18) järeldub

$$f(x) f(x_0 - x) = f(x_0) \neq 0,$$

mistõttu $f(x) \neq 0$ iga $x \in \mathbb{R}$ puhul. Võttes seoses (3.18) nii x kui y asemel $\frac{x}{2}$, saame

$$f(x) = \left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2,$$

niisiis, $f(x) > 0$ $(x \in \mathbb{R})$. See asjaolu lubab meil seose (3.18) mõlemat poolt logaritmida:

$$\ln f(x+y) = \ln f(x) + \ln f(y). \tag{3.20}$$

Tähistades $h(x) := \ln f(x)$, saame seose (3.20) üles kirjutada kujul $h(x+y) = h(x) + h(y)$ (vrd. (3.16)), kusjuures h on kogu reaalteljel pidev funktsioon (põhjendada!)✠. Lause 3.20 kohaselt on ta esitatav kujul (3.17), s.t. $\ln f(x) = cx$, kus c on mingi konstant. Siit tuleneb $f(x) = e^{cx} = a^x$, kus $a := e^c$. Lause on tõestatud. ■

Lause 3.22 *Kui hulgas* $(0, \infty)$ *pidev funktsioon* f*, mis ei ole nullfunktsioon, rahuldab tingimust*

$$f(xy) = f(x) + f(y) \quad (x \in (0, \infty)),$$

siis on ta esitatav kujul $f(x) = \log_a x$*, kus* $a > 0$, $a \neq 1$.

Tõestus. Teeme muutuja vahetuse $z := \ln x$ ja tähistame $h(z) := f(e^z)$, siis $x = e^z$ ja $f(x) = h(\ln x)$. Funktsioon h on kogu reaalteljel pidev funktsioon (selgitada!)✠ ning

$$h(z+w) = f\left(e^{z+w}\right) = f(e^z e^w) = f(e^z) + f(e^w) = h(z) + h(w) \quad (z, w \in \mathbb{R}).$$

Lause 3.20 põhjal on $h(z) = cz$, kus c on mingi konstant, niisiis, $f(x) = c \ln x$. Paneme tähele, et $c \neq 0$, vastasel korral oleks f nullfunktsioon (kontrollida!)✠. Kasutades üldtuntud seost $\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$, jõuame võrduseni $f(x) = \log_a x$, kus $a := e^{1/c}$. Lause on tõestatud. ■

Lause 3.23 *Kui hulgas* $(0, \infty)$ *pidev funktsioon* f*, mis ei ole nullfunktsioon, rahuldab tingimust*

$$f(xy) = f(x) f(y) \quad (x \in (0, \infty)),$$

siis on ta esitatav kujul $f(x) = x^\lambda$ *mingi* $\lambda \in \mathbb{R}$ *korral.*

Tõestus. Teeme sama muutuja vahetuse, mis eelmises tõestuses, s.t. $z := \ln x$ ja kasutame sama tähistust $h(z) := f(e^z)$, niisiis, $x = e^z$ ja $f(x) = h(\ln x)$. Saame

$$h(z+w) = f\left(e^{z+w}\right) = f(e^z e^w) = f(e^z) f(e^w) = h(z) h(w) \quad (z, w \in \mathbb{R}).$$

Lausest 3.21 järeldub $h(z) = a^z$ $(a > 0)$, seega, kui võtta $\lambda := \ln a$, saame funktsiooni f kujul $f(x) = x^\lambda$ $(x \in \mathbb{R})$. ■

3.7 Rekurrentsed jadad

3.7.1 Funktsiooni püsipunkt

Olgu $f : D \to \mathbb{R}$ selline funktsioon, mille **kõik väärtused kuuluvad tema määramispiirkonda** D, s.t. $f : D \to D$. Lähtudes mingist punktist $x_0 \in D$, moodustame jada (x_n), kus $x_n = f(x_{n-1})$ $(n \in \mathbb{N})$, seega $x_n \in D$ iga $n \in \mathbb{N}$ puhul. Selliselt defineeritud jada (x_n) nimetame *rekurrentseks.*

Näide 11. Olgu a suvaline positiivne arv. Moodustame rekurrentse jada (x_n), kus $x_0 > 0$ ja

$$x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right). \tag{3.21}$$

Kõigepealt paneme tähele, et $x_n \geq \sqrt{a}$, nimelt kehtib

$$x_n^2 - a = \frac{1}{4}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right)^2 - a = \frac{1}{4}\left(x_{n-1} - \frac{a}{x_{n-1}}\right)^2 \geq 0.$$

Seejuures on jada (x_n) kahanev, sest

$$x_n - x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}x_n - \frac{a}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n - \frac{a}{x_n}\right) = \frac{1}{2x_n}\left(x_n^2 - a\right) = \frac{1}{8x_n}\left(x_{n-1} - \frac{a}{x_{n-1}}\right)^2 \geq 0.$$

Monotoonsusprintsiibi kohaselt on jada (x_n) koonduv ning $u := \lim\limits_n x_n \geq \sqrt{a}$ (selgitada!)✠. Seosest (3.21) saame piirile minnes võrduse $u = \frac{1}{2}\left(u + \frac{a}{u}\right)$ ehk $u^2 = a$.

Kokkuvõttes oleme tõestanud, et $\lim\limits_n \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right) = \sqrt{a}$, kui $x_0 > 0$.

Funktsiooni $f : [a, b] \to [a, b]$ *püsipunktiks* nimetatakse sellist arvu $z \in [a, b]$, mille korral on täidetud tingimus $f(z) = z$. Järgmine lause kirjeldab üht funktsioonide klassi, millel on püsipunkt, ühtlasi esitab ta meetodi püsipunkti leidmiseks.

Lause 3.24 *Olgu $f : [a, b] \to [a, b]$ selline funktsioon, et*

$$|f(z) - f(w)| \leq q\,|z - w| \text{ suvaliste } z, w \in [a, b] \text{ korral,} \tag{3.22}$$

kus q on mingi konstant, $0 < q < 1$. Sel juhul on funktsioonil f lõigus $[a, b]$ parajasti üks püsipunkt.

Tõestus. Kõigepealt märgime, et iga funktsioon $f : [a, b] \to [a, b]$ omadusega (3.22) on pidev (selgitada!)✠. Valime vabalt $x_0 \in [a, b]$ ning moodustame rekurrentse jada (x_n). Kuna

$$|x_{n+1} - x_n| \leq q^n\,|x_1 - x_0|$$

(põhjendada!)✠, siis suvaliste n ja m korral, kus $n \leq m$, saame

$$\begin{aligned} 0 \leq |x_m - x_n| &\leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + ... + |x_{n+1} - x_n| \\ &\leq \left(q^{m-1} + q^{m-2} + ... + q^n\right)|x_1 - x_0| \leq \sum_{k=n}^{\infty} q^k\,|x_1 - x_0| \\ &= \frac{q^n}{1-q}\,|x_1 - x_0| \to 0 \ \ (n \to \infty). \end{aligned}$$

Siit järeldub, et (x_n) on Cauchy jada (kontrollida!)✠, seega Cauchy kriteeriumi kohaselt koonduv. Tähistame $u := \lim_n x_n$ ning paneme tähele, et $u \in [a, b]$ ja $f(u) = \lim\limits_n f(x_n) = \lim\limits_n x_{n+1} = u$ (põhjendada!)✠, s.t. u on funktsiooni f püsipunkt.

Kui oletada, et leidub veel teinegi punkt $v \in [a, b]$ omadusega $f(v) = v$, siis

$$|u - v| = |f(u) - f(v)| \leq q\,|u - v| \ \text{ ehk } \ (1 - q)\,|u - v| \leq 0,$$

mis seose $q < 1$ tõttu saab olla õige vaid siis, kui $u = v$. ■

3.7.2 Rekurrentsete jadade monotoonsus ja koonduvus

Lause 3.25 ***Lause 3.26*** *Olgu $f : [a,b] \to [a,b]$ pidev funktsioon ja olgu $x_0 \in [a,b]$ suvaliselt fikseeritud. Olgu $x_n := f(x_{n-1})$ $(n \in \mathbb{N})$.*
(a) Kui f on kasvav funktsioon, siis jada (x_n) on koonduv ja tema piirväärtus u on funktsiooni f püsipunkt.
(b) Kui f on kahanev, siis osajadad (x_{2n}) ja (x_{2n+1}) on monotoonsed.

Tõestus. *(a)* Olgu f kasvav funktsioon. Sõltuvalt sellest, kas $x_1 \geq x_0$ või $x_1 \leq x_0$, on (x_n) kas kasvav või kahanev jada (kontrollida!)✠. Kuna $a \leq x_n \leq b$ $(n \in \mathbb{N})$, siis on tegemist tõkestatud jadaga. Monotoonsusprintsiibi kohaselt eksisteerib piirväärtus $u := \lim_n x_n$, seejuures $a \leq u \leq b$ (selgitada!)✠. Funktsiooni f pidevuse tõttu kehtib seos $f(u) = \lim_n f(x_n) = \lim_n x_{n+1} = u$ (selgitada!)✠.

(b) Olgu funktsioon f kahanev. Moodustame funktsiooni $g := f \circ f$, s.t. $g(z) = f(f(z))$ iga $z \in [a,b]$ korral. Lihtne kontroll näitab, et $g : [a,b] \to [a,b]$ on kasvav funktsioon (veenduda!)✠, seega saame talle rakendada väidet (a). Määrame rekurrentsed jadad (x'_n) ja (x''_n) seostega

$$x'_0 := x_0, \quad x'_n := g\left(x'_{n-1}\right) = f\left(f\left(x'_{n-1}\right)\right),$$
$$x''_0 := x_1, \quad x''_n := g\left(x''_{n-1}\right) = f\left(f\left(x''_{n-1}\right)\right),$$

siis $x'_n = x_{2n}$ ja $x''_n = x_{2n+1}$ (kontrollida!)✠. Väite (a) tõestusest selgus, et need jadad on monotoonsed. Vastavalt sellele, kas $x_0 < x_1$ või $x_0 > x_1$, kehtivad võrratused $x'_n \leq x''_n$ või $x'_n \geq x''_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Seejuures on üks jadadest (x'_n) ja (x''_n) kasvav ja teine kahanev (kontrollida!)✠. Selleks, et jada (x_n) oleks koonduv, on tarvilik ja piisav, et kehtiks võrdus $\lim_n x_{2n} = \lim_n x_{2n+1}$ (põhjendada!)✠.
■

Näide 12. Olgu $x_0 := 0$ ja $x_n := \frac{x_{n-1}+1}{x_{n-1}+2}$ $(n \in \mathbb{N})$. Näidata, et (x_n) on koonduv jada ja leida $\lim_n x_n$.

Vaatleme funktsiooni
$$f : [0,1] \to [0,1], \quad x \mapsto \frac{x+1}{x+2},$$
siis on f kasvav funktsioon ja lause 3.26(a) põhjal on koondub jada (x_n) funktsiooni f püsipunktiks. Piirväärtuse leidmiseks tuleb lahendada võrrand $x = \frac{x+1}{x+2}$ (leida!)✠.

Näide 13. Olgu $x_0 := 0$ ja $x_n := \cos x_{n-1}$ $(n \in \mathbb{N})$. Tõestada, et (x_n) on koonduv jada.

Vaatleme funktsiooni
$$f : [0,1] \to [0,1], \quad x \mapsto \cos x.$$
See on kahanev funktsioon (kontrollida!)✠, seega on jadad (x_{2k}) ja (x_{2k-1}) monotoonsed ja tõkestatud (vrd. lause 3.26(b)). Tähistame $x' := \lim_k x_{2k}$ ja $x'' := \lim_k x_{2k-1}$ ning paneme tähele, et

$$\cos x' = \lim_k \cos x_{2k} = \lim_k x_{2k+1} = x'', \quad \cos x'' = \lim_k \cos x_{2k-1} = \lim_k x_{2k} = x'.$$

Seejuures $x' = x''$. Tõepoolest, kui $x' \neq x''$, siis saaksime vastuolu:

$$\left|x' - x''\right| = \left|\cos x'' - \cos x'\right| = 2\left|\sin \frac{x' + x''}{2}\right| \left|\sin \frac{x' - x''}{2}\right|$$
$$\leq 2\left|\sin \frac{x' - x''}{2}\right| < \left|x' - x''\right|.$$

See tähendabki jada (x_n) koonduvust.

Näide 14. Olgu $x_0 := \frac{1}{2}$ ja $x_n := (1 - x_{n-1})^2$ $(n \in \mathbb{N})$. Veenduda, et (x_n) ei ole koonduv jada.

Funktsioon $f : [0,1] \to [0,1]$, $x \mapsto (1-x)^2$ on kahanev (veenduda!)✠, lause 3.26(b) põhjal on jadad (x_{2k}) ja (x_{2k-1}) monotoonsed ja tõkestatud. Seejuures $x_1 = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$, $x_2 = \left(1 - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} > \frac{1}{2}$, $x_3 = \left(1 - \frac{9}{16}\right)^2 = \frac{49}{256} < \frac{1}{4}$, $x_4 = \left(1 - \frac{49}{256}\right)^2 = \left(\frac{207}{256}\right)^2 > \frac{9}{16}, \dots$. Näeme, et vahede jada $(x_{2k} - x_{2k-1})$ kasvab (põhjendada!)✠, seega ei saa (x_n) olla koonduv (selgitada!)✠.

3.8 Heine-Boreli lemma

3.8.1 Heine-Boreli lemma

Reaalarvude omadus, mida kirjeldab alljärgnev väide, on lähtepunktiks väga olulisele ja ulatuslikule uurimissuunale üldises topoloogias, kompaktsete ruumide teooriale.

Teoreem 3.27 ***(Heine-Boreli lemma).*** *Kui arvsirge lõik $[a,b]$ on kaetud lõpmatu arvu vahemikega, siis nende hulgast saab valida lõpliku arvu vahemikke, mis katavad lõigu $[a,b]$.*

Tõestus. Olgu σ lõpmatu hulk, mis koosneb vahemikest S, kusjuures $[a,b] \subset \cup\{S \mid S \in \sigma\}$. Meie eesmärk on veenduda niisuguse *lõpliku* alamhulga $\sigma_0 \subset \sigma$ olemasolus, mille puhul $[a,b] \subset \cup\{S \mid S \in \sigma_0\}$. Olgu X kõigi niisuguste arvude $x \in [a,b]$ hulk, et lõiku $[a,x]$ saab katta lõpliku arvu vahemikega hulgast σ, s.t.

$$X := \{x \in [a,b] \mid \exists \text{ lõplik } \sigma_x \subset \sigma : [a,x] \subset \cup\{S \mid S \in \sigma_x\}\}.$$

Märgime, et X ei ole tühihulk (põhjendada!)✠. Väide on tõestatud, kui oleme veendunud, et $b \in X$.

Selge, et b on hulga X ülemine tõke, seetõttu saame rakendada pidevuse aksioomi, mille kohaselt eksisteerib $c := \sup X$. Kuna $X \subset [a,b]$, siis $c \in [a,b]$ (põhjendada!)✠. Seega leidub niisugune vahemik $S_0 \in \sigma$, et $c \in S_0$. Vahemik S_0 peab sisaldama mingi punkti x_0 hulgast X, s.t. $x_0 \in S_0 \cap X$ (põhjendada!)✠. Hulga X definitsiooni kohaselt leidub lõplik osahulk $\{S_1, S_2, ..., S_n\} \subset \sigma$ omadusega $[a, x_0] \subset \cup\{S_k \mid k = 1,2,...,n\}$, siis $[a,c] \subset \cup\{S_k \mid k = 0,1,2,...,n\}$ (põhjendada!)✠, niisiis, $c \in X$. Näitame, et $c = b$.

Oletame vastuväiteliselt, et $c < b$, siis vahemikus S_0 leidub mingi punkt x^* omadusega $x^* > c$, $x^* \in [a,b]$. Kuid sel juhul $x^* \in X$ (põhjendada!)✠, mis on vastuolus tõsiasjaga, et c on hulga X ülemine raja. Tähendab, $b = c \in X$, mida me tahtsimegi tõestada. ■

3.8.2 Bolzano-Cauchy teoreemide tõestus Heine-Boreli lemma abil

Käesoleva peatüki punktis 3.2 tõestasime **Bolzano-Cauchy teoreemi vahepealsetest väärtustest** (teoreem 3.6), mis väidab, et *kui mingis intervallis pidev funktsioon f saavutab väärtused y_1 ja y_2 $(y_1 \neq y_2)$, siis saavutab ta iga väärtuse, mis asub arvude y_1 ja y_2 vahel.* See teoreem järeldub otseselt **teoreemist lõigus pideva funktsiooni nullkohast** (teoreem 3.4): *kui lõigus $[a,b]$ pideva funktsiooni f väärtused lõigu otspunktides on erinevate märkidega, siis leidub vahemikus (a,b) punkt c omadusega $f(c) = 0$.* Teoreemi 3.4 tõestus oli üles ehitatud teoreemile sisestatud lõikudest (vt pt. 2, teoreem 2.13).

Järgnevalt näitame, et teoreemi 3.4 (seega ka teoreemi 3.6) võib vaadelda järeldusena Heine-Boreli lemmast.

Teoreemi 3.4 tõestus. Eeldame, et funktsioon $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ on pidev ning (konkreetsuse mõttes) $f(a) < 0$ ja $f(b) > 0$. Oletame *vastuväiteliselt*, et $f(x) \neq 0$ iga $x \in [a, b]$ korral. Funktsiooni pidevuse definitsioonist tuleneb järgmine väide (tõestada!)✠:

kui funktsioon $f : D \to \mathbb{R}$ on pidev punktis z ja $f(z) > 0$ ($f(z) < 0$) siis leidub punktil z selline ümbrus $U_\delta(z)$, et $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$) iga $x \in U_\delta(z) \cap D$ korral.

Selle väite ning meie vastuväitelise oletuse kohaselt saab iga $x \in [a, b]$ jaoks leida talle vastava $\delta_x > 0$ nii, et funktsioon f säilitab märki ümbruses $U_{\delta_x}(x)$ (põhjendada!)✠. On selge, et $[a, b] \subset \bigcup_{x\in[a,b]} U_{\delta_x}(x)$, niisiis on lõik $[a, b]$ kaetud vahemikega $U_{\delta_x}(x)$ ($x \in [a, b]$). Teoreemi 3.27 kohaselt leiduvad punktid $x_1 < x_2 < ... < x_n$ lõigus $[a, b]$ nii, et

$$[a, b] \subset \bigcup_{k=1}^{n} U_{\delta_{x_k}}(x_k).$$

Kuna $a \in U_{\delta_{x_1}}(x_1) = (x_1 - \delta_{x_1}, x_1 + \delta_{x_1})$ ning $f(a) < 0$ ja f säilitab vahemikus $U_{\delta_{x_1}}(x_1)$ märki, siis $f(x) < 0$ iga $x \in U_{\delta_{x_1}}(x_1)$ korral. Sellest, et $U_{\delta_{x_1}}(x_1) \cap U_{\delta_{x_2}}(x_2) \neq \varnothing$ ja f säilitab vahemikus $U_{\delta_{x_2}}(x_2)$ märki, tuleneb $f(x) < 0$ iga $x \in U_{\delta_{x_2}}(x_2)$ korral. Korrates sama mõttekäiku n korda, jõuame tulemuseni, et $f(x) < 0$ iga $x \in U_{\delta_{x_n}}(x_n)$ korral. Kuid see on vastuolus meie eeldusega $f(b) > 0$, sest $b \in U_{\delta_{x_n}}(x_n)$. Saadud vastuolu kinnitab funktsiooni f nullkoha olemasolu.

3.8.3 Weierstrassi teoreemide tõestus Heine-Boreli lemma abil

Punktis 3.2 tõestatud Weierstrassi teoreemid väidavad, et *iga lõigus pidev funktsioon on selles lõigus tõkestatud* (teoreem 3.7) ja *ta saavutab selles lõigus oma suurima ja vähima väärtuse* (teoreem 3.8). Teoreem 3.8 tuleneb otseselt teoreemist 3.7, mille tõestuseks rakendatakse Bolzano-Weierstrassi teoreemi.

Me näitame järgnevalt, et teoreem 3.7 (siis ka teoreem 3.8) on tuletatav Heine-Boreli lemmast.

Teoreemi 3.7 tõestus. Eeldame, et funktsioon $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ on pidev. Olgu $\varepsilon > 0$. Iga $x \in [a, b]$ korral saab valida tema sellise ümbruse $U_{\delta_x}(x)$, et

$$f(x) - \varepsilon < f(z) < f(x) + \varepsilon \text{ iga } z \in U_{\delta_x}(x) \text{ korral} \tag{3.23}$$

(selgitada!)✠. Kuna $[a, b] \subset \bigcup_{x\in[a,b]} U_{\delta_x}(x)$, siis on lõik $[a, b]$ kaetud vahemikega $U_{\delta_x}(x)$ ($x \in [a, b]$). Heine-Boreli lemma põhjal saab lõigus $[a, b]$ valida punktid $x_1, x_2, ..., x_n$ omadusega

$$[a, b] \subset \bigcup_{k=1}^{n} U_{\delta_{x_k}}(x_k).$$

Seejuures on funktsioon f seoste (3.23) tõttu igas ümbruses $U_{\delta_{x_k}}(x_k)$ tõkestatud (selgitada!)✠, mistõttu leiduvad arvud m_k ja M_k, et

$$m_k \leq f(x) \leq M_k \quad \left(x \in U_{\delta_{x_k}}(x_k);\ k = 1, ..., n\right).$$

Tähistame $m := \min_{1\leq k\leq n} m_k$ ja $M := \max_{1\leq k\leq n} M_k$, siis

$$m \leq f(x) \leq M \quad (x \in [a, b])$$

(selgitada!)✠. Seega on funktsioon f lõigus $[a, b]$ tõkestatud.

3.8.4 Cantori teoreemi tõestus Heine-Boreli lemma abil

Cantori teoreem (vt. teoreem 3.10), mis väidab, et *iga lõigus pidev funktsioon on selles lõigus ühtlaselt pidev,* on oluline abivahend matemaatilise analüüsi paljude tulemuste tõestamisel. Punktis 3.3 esitatud tõestus toetub Bolzano-Weierstrassi teoreemile.

Näitame järgnevalt, et Cantori teoreemi saab suhteliselt lihtsalt tõestada Heine-Boreli lemma abil.

Teoreemi 3.10 tõestus. Eeldame, et funktsioon $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ on pidev. Olgu $\varepsilon > 0$. Meie eesmärgiks on näidata niisuguse $\delta > 0$ olemasolu, et $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$, kui $x, x' \in [a, b]$ ja $|x - x'| < \delta$ (vrd. ühtlase pidevuse definitsioon punktis 3.3).

Pidevuse definitsioonist tulenevalt saame iga $x \in [a, b]$ puhul fikseerida arvu $\delta_x > 0$ nii, et

$$|f(x) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ kõikide } z \in U_{\delta_x}(x) \text{ korral.} \tag{3.24}$$

Paneme tähele, et kui $x' \in U_{\delta_x}(x)$, siis

$$\left|f\left(x'\right) - f(z)\right| < \varepsilon \quad (z \in U_{\delta_x}(x))$$

(kontrollida!)✠. Vaatleme punktide x ümbrusi $U_{\frac{\delta_x}{2}}(x) = \left(x - \frac{\delta_x}{2}, x + \frac{\delta_x}{2}\right)$. Kuna

$$[a, b] \subset \bigcup\nolimits_{x \in [a,b]} U_{\frac{\delta_x}{2}}(x),$$

siis Heine-Boreli lemma põhjal leiduvad punktid $x_1, x_2, ..., x_n$ omadusega

$$[a, b] \subset \cup_{k=1}^{n} U_{\frac{\delta_{x_k}}{2}}(x_k).$$

Tähistame $\delta := \min_{1 \le k \le n} \frac{\delta_{x_k}}{2}$. Rahuldagu punktid $x, x' \in [a, b]$ tingimust $|x - x'| < \delta$. Kuna $x' \in [a, b] \subset \cup_{k=1}^{n} U_{\frac{\delta_{x_k}}{2}}(x_k)$, siis $x' \in (x_{k_0} - \rho, x_{k_0} + \rho) = U_{\delta_{x_{k_0}}}(x_{k_0})$ mingi $k_0 \in \{1, ..., n\}$ korral, kus $\rho := \delta_{x_{k_0}}/2$. Kuna

$$|x - x_{k_0}| \le \left|x - x'\right| + \left|x' - x_{k_0}\right| < \delta + \rho \le \frac{\delta_{x_{k_0}}}{2} + \frac{\delta_{x_{k_0}}}{2} = \delta_{x_{k_0}},$$

siis

$$x \in \left(x_{k_0} - \delta_{x_{k_0}}, x_{k_0} + \delta_{x_{k_0}}\right) = U_{\delta_{x_{k_0}}}(x_{k_0}),$$

ning seose (3.24) kohaselt

$$\left|f(x) - f\left(x'\right)\right| \le |f(x) - f(x_{k_0})| + \left|f(x_{k_0}) - f\left(x'\right)\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Teoreem on tõestatud.

4 Diferentseeruvad funktsioonid

4.1 Diferentseeruvuse mõiste

Me eeldame kõikjal selles peatükis, et funktsiooni $f : D \to \mathbb{R}$ määramispiirkond $D \subset \mathbb{R}$ on mingi (lõplik või lõpmatu) **intervall.** Olgu $a \in D$ selle intervalli **sisepunkt.**

Definitsioon. Funktsiooni f nimetatakse *diferentseeruvaks* punktis a, kui eksisteerib **lõplik** piirväärtus

$$f'(a) := \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \tag{4.1}$$

mida nimetatakse funktsiooni f *tuletiseks* punktis a.

Ütleme, et funktsioon f on *diferentseeruv hulgas* D, kui ta on diferentseeruv igas punktis $x \in D$. Funktsiooni $f' : D \to \mathbb{R}$ nimetatakse sel juhul funktsiooni f *tuletiseks hulgas* D.

Kui funktsioon f' on hulgas D diferentseeruv, siis tähistame $f^{(2)} := f'' := (f')'$, seda funktsiooni nimetatakse funktsiooni f *teiseks* ehk *teist järku tuletiseks hulgas* D. Kui f'' on hulgas D diferentseeruv, siis $f^{(3)} := f''' := (f'')'$ on funktsiooni f *kolmas tuletis hulgas* D, jne. Üldjuhul tähistame funktsiooni n-dat järku tuletist $f^{(n)}$.

Meenutame diferentseeruvuse mõiste **geomeetrilist sisu.** Tõmbame läbi funktsiooni f graafiku punktide $(a, f(a))$ ja $(x, f(x))$ sirge (ehk lõikaja), selle võrrand on

$$Y = f(a) + \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(X - a),$$

kus (X, Y) on vaadeldava sirge punkt. Kui f on punktis a diferentseeruv, siis protsessis $x \to a$ saab see võrrand kuju

$$Y = f(a) + f(a)'(X - a).$$

Selle võrrandiga määratud sirge läbib punkti $(a, f(a))$, teda nimetatakse funktsiooni f graafiku **puutujaks** punktis a. Niisiis, punktis a diferentseeruva funktsiooni f korral defineeritakse selles punktis tema graafiku puutuja kui punkte $(a, f(a))$ ja $(x, f(x))$ läbiva lõikaja piirseis protsessis $x \to a$, tuletis $f'(a)$ on võrdne puutuja tõusunurga tangensiga. Seega iseeloomustab diferentseeruvaid funktsiooni tema graafiku teatav siledus, asjaolu, et graafik on "ilma nurkadeta".

Funktsiooni diferentseeruvuse mõiste **analüütiline sisu** seisneb selles, et punktis a diferentseeruvat funktsiooni saab lokaalselt (s.t. selle punkti ümbruses) *lineaarselt lähendada.* Nimelt, kui tähistame $T_1(x) := f(a) + f'(a)(x - a)$, siis $T_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on lineaarne funktsioon (selgitada!)✠ ja

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_1(x)}{x - a} = 0$$

(veenduda!)✠. Seega saab suvalise $\varepsilon > 0$ korral leida punkti a sellise ümbruse $U_\delta(a) = (a - \delta, a + \delta)$, et iga $x \in U_\delta(a)$ puhul kehtib võrratus

$$|f(x) - T_1(x)| < \left|\frac{f(x) - T_1(x)}{x - a}\right| < \varepsilon.$$

Diferentseeruvate funktsioonide uurimiseks vajame järgmist lemmat, mida mõnedes õpikutes nimetatakse **diferentsiaalarvutuse põhilemmaks.**

Lemma 4.1 *Funktsioon $f : D \to \mathbb{R}$ on punktis $a \in D$ diferentseeruv parajasti siis, kui leidub selline punktis a pidev funktsioon $G_f : D \to R$, et*

$$f(x) = f(a) + G_f(x)(x-a). \tag{4.2}$$

Sel juhul $f'(a) = G_f(a)$.

Tõestus. *Tarvilikkus.* Olgu f diferentseeruv punktis a. Defineerime

$$G_f(x) := \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}, & \text{kui } x \neq a, \\ f'(a), & \text{kui } x = a, \end{cases}$$

siis G_f on punktis a pidev (kontrollida!)✠ ja kehtib võrdus (4.2) (veenduda!)✠.

Piisavus. Kui võrdus (4.2) kehtib ning G_f on punktis a pidev, siis

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} G_f(x) = G_f(a),$$

seega on f kohal a diferentseeruv ja $f'(a) = G_f(a)$. ■

Järeldus 4.2 *Kui funktsioon f on punktis a diferentseeruv, siis on ta selles punktis pidev.*

Tõestus. Peame veenduma, et $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, kui f on punktis a diferentseeruv. Tõepoolest, kuna G_f on punktis a pidev, siis

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}(f(x)-f(a)) &= \lim_{x\to a} G_f(x)(x-a) = \lim_{x\to a} G_f(x) \lim_{x\to a}(x-a) \\ &= G_f(a)\cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

■

Tuletise definitsioonist lähtudes saab leida lihtsamate elementaarfunktsioonide tuletised.

Näited. 1. Kui $f(x) = c = \text{const}$, siis $f'(a) = 0$ iga a korral (kontrollida!)✠.

2. Kui $f(x) = cx$, kus c on konstant, siis $f'(a) = c$ iga a korral (kontrollida!)✠.

3. Kui $f(x) = x^n$, siis $f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{x^n-a^n}{x-a} = \lim_{x\to a} \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-k-1}a^k$ (kontrollida!)✠ $=$ na^{n-1} (selgitada!)✠.

4. Funktsioon $f(x) = |x|$ ei ole punktis $a = 0$ diferentseeruv (veenduda!)✠.

5. Leiame eksponentfunktsiooni $f(x) = e^x$ tuletise. Selleks arvutame suvalise $a \in \mathbb{R}$ puhul piirväärtuse

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{e^{a+h}-e^a}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^a e^h - e^a}{h} = e^a \lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = e^a. \tag{4.3}$$

(Piirväärtuse $\lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h}$ arvutamiseks teeme muutujavahetuse $z := e^h - 1$, siis $h = \ln(z+1)$. Kui $h \to 0$, siis ka $z \to 0$, ning $\lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = \lim_{z\to 0} \frac{z}{\ln(z+1)} = 1$.) Seosest (4.3) saame, et $(e^x)' = e^x$ iga $x \in \mathbb{R}$ korral.

6. Funktsiooni $f(x) = \sin x$ korral on

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(a+h) - \sin a}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\cos\left(a + \frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \cos\left(a + \frac{h}{2}\right) \lim_{h\to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \cos a. \end{aligned}$$

Niisiis, $(\sin x)' = \cos x$ iga $x \in \mathbb{R}$ korral.

7. Analoogiliselt veendutakse, et $(\cos x)' = -\sin x$ iga $x \in \mathbb{R}$ korral (kontrollida!)✠.

4.2 Diferentseerimisreeglid

Allpool esitatavad diferentseerimisreeglid on meile matemaatilise analüüsi eelnevatest kursustest hästi tuttavad.

Lause 4.3 *Kui funktsioonid $f : D \to \mathbb{R}$ ja $g : D \to \mathbb{R}$ on punktis a diferentseeruvad, siis ka funktsioonid $f+g$ ja $f-g$ on selles punktis diferentseeruvad ning $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$.*

Tõestus. Iseseisvalt!✠ ∎

Lause 4.4 *Kui funktsioon f on punktis a diferentseeruv, siis ka funktsioon λf on iga $\lambda \in \mathbb{R}$ korral selles punktis diferentseeruv ning $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$.*

Tõestus. Iseseisvalt!✠ ∎

Lause 4.5 *Kui funktsioonid $f : D \to \mathbb{R}$ ja $g : D \to \mathbb{R}$ on punktis a diferentseeruvad, siis ka nende korrutis*

$$fg : D \to \mathbb{R}, \ \ x \mapsto f(x)\,g(x)$$

on selles punktis diferentseeruv funktsioon ning $(fg)'(a) = f(a)\,g'(a) + f'(a)\,g(a)$.

Tõestus. Iseseisvalt!✠ ∎

Lause 4.6 *Kui funktsioonid $f : D \to \mathbb{R}$ ja $g : D \to \mathbb{R}$ on punktis a diferentseeruvad ning $g(a) \neq 0$, siis ka funktsioon*

$$\frac{f}{g} : D' \to \mathbb{R}, \ \ x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}, \text{ kus } D' := \{x \in D \mid g(x) \neq 0\},$$

on selles punktis diferentseeruv ja

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)\,g(a) - f(a)\,g'(a)}{g(a)^2}.$$

Tõestus. Ilmselt on a mingi alamintervalli $D'' \subset D'$ sisepunkt: kuna $g(a) \neq 0$, siis kehtib kas $g(a) < 0$ või $g(a) > 0$, seega saame valida sellise $\delta > 0$, et $g(x) < 0$ (vastavalt

$g(x) > 0$) iga $x \in (a-\delta, a+\delta) =: D''$ korral (selgitada!)✠. Vaatleme algul juhtu, kus f on konstantne funktsioon väärtusega 1. Siis

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{g}(x)-\frac{1}{g}(a)}{x-a} &= \lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{g(a)}}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)\,g(a)}\frac{g(a)-g(x)}{x-a} = \frac{1}{g(a)^2}\left(-g'(a)\right).\end{aligned}$$

Sellest valemist saame lauset 4.5 rakendades

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= \left(f\frac{1}{g}\right)'(a) = f(a)\left(\frac{1}{g}\right)'(a) + f'(a)\,\frac{1}{g}(a) \\ &= f(a)\,\frac{-g'(a)}{g(a)^2} + f'(a)\,\frac{1}{g(a)} \\ &= \frac{f'(a)\,g(a) - f(a)\,g'(a)}{g(a)^2}.\end{aligned}$$

Sellega on lause tõestatud. ■

Näited. 8. Iga polünoom $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$ on igas punktis $x \in \mathbb{R}$ diferentseeruv ning

$$P'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)\,a_{n-1}x^{n-2} + ... + a_1$$

(veenduda!)✠.

9. Kui $f(x) = \tan x$ $\left(x \in \mathbb{R}\diagdown\left\{\frac{\pi}{2} \pm k\pi \mid k = 0,1,2,...\right\}\right)$, siis

$$f'(x) = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x\,(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

10. Analoogiliselt saadakse, et $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ iga $x \in \mathbb{R}\diagdown\{\pm k\pi \mid k = 0,1,2,...\}$ korral (veenduda!)✠.

Meile hästi tuntud **liitfunktsiooni diferentseerimise reegli** (nn. ahelareegli) tõestamiseks kasutame lemmat 4.1.

Lause 4.7 *Olgu funktsioon $f : D \to \mathbb{R}$ punktis a diferentseeruv. Kui $f(x) \in E$ iga $x \in D$ korral ja funktsioon $g : E \to \mathbb{R}$ on punktis $b := f(a)$ diferentseeruv, siis ka liitfunktsioon*

$$g \circ f : D \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto g(f(x))$$

on punktis a diferentseeruv ja

$$(g \circ f)'(a) = g'(b)\,f'(a).$$

Tõestus. Lemma 4.1 kohaselt leiduvad sellised vastavalt punktides a ja b pidevad funktsioonid $G_f : D \to \mathbb{R}$ ja $G_g : E \to \mathbb{R}$, et

$$f(x) = f(a) + G_f(x)(x-a) \quad \text{ja} \quad g(y) = g(b) + G_g(y)(y-b).$$

Seega

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(b) + G_g(f(x))(f(x) - b) \\ &= g(f(a)) + G_g(f(x))(f(a) + G_f(x)(x-a) - f(a)) \\ &= g(f(a)) + G_g(f(x))\, G_f(x)(x-a). \end{aligned}$$

Tähistame $G_{g\circ f} := (G_g \circ f)\, G_f$, see funktsioon on punktis a pidev (põhjendada!, vrd. lause 3.3)✠, niisiis saame võrdusest $g(f(x)) = g(f(a)) + G_{g\circ f}(x)(x-a)$ lemma 4.1 põhjal, et $g \circ f$ on punktis a diferentseeruv ja $(g\circ f)'(a) = G_{g\circ f}(a) = g'(f(a))\, f'(a)$ (kontrollida!)✠. ■

Lõpuks tõestame **pöördfunktsiooni diferentseerimise reegli.** Meenutame, et (vt. pt. 3, teoreem 3.16) kui $f : D \to \mathbb{R}$ on hulgas D rangelt monotoonne funktsioon, siis tal on rangelt monotoonne pöördfunktsioon g. Kui seejuures D on intervall ja f on pidev, siis $D' := \{f(x) \mid x \in D\}$ on samuti intervall: kahe suvalise punkti $C := f(c)$ ja $D := f(d)$ puhul hulgast D' kuulub ka iga nende vahel olev arv A samuti hulka D' (vrd. teoreem 3.6). Veelgi enam, kui a on intervalli D sisepunkt, siis $b := f(a)$ on intervalli D' sisepunkt. Tõepoolest, valime $c, d \in D$ omadusega $a \in (c,d) \subset [c,d] \subset D$, siis tänu funktsiooni f rangele monotoonsusele asub punkt b *rangelt* punktide $f(c)$ ja $f(d)$ vahel, seega on ta hulga D' sisepunkt.

Lause 4.8 *Olgu pidev rangelt monotoonne funktsioon $f : D \to \mathbb{R}$ punktis a diferentseeruv. Pöördfunktsioon $g : D' \to \mathbb{R}$ on punktis $b := f(a)$ diferentseeruv parajasti siis, kui $f'(a) \neq 0$. Sel juhul*

$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)}. \tag{4.4}$$

Tõestus. *Tarvilikkus.* Kuna $g(f(x)) = x$ iga $x \in D$ korral, siis lause 4.7 kohaselt $g'(f(a))\, f'(a) = 1$. Siit järeldub, et $f'(a) \neq 0$ ja kehtib võrdus (4.4)

Piisavus. Olgu $f'(a) \neq 0$. Peame silmas, et $f(x) \neq f(a)$ iga $x \in D \diagdown \{a\}$ korral, seega on funktsioon

$$F : D \diagdown \{a\} \to \mathbb{R},\ \ x \mapsto \frac{x-a}{f(x) - f(a)}$$

korrektselt defineeritud, kusjuures $\lim_{x\to a} F(x) = \frac{1}{f'(a)}$ (selgitada!)✠. Tähistades $y = f(x)$ (ehk $x = g(y)$), saame funktsioonide f ja g pidevusest, et $y \to b$ parajasti siis, kui $x \to a$ (selgitada!)✠. Niisiis,

$$\lim_{y\to b} \frac{g(y) - g(b)}{y - b} = \lim_{x\to a} F(x) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Lause on tõestatud. ■

Näited. 11. Leiame valemi (4.4) abil logaritmfunktsiooni $y = f(x) = \ln x$ $(x \in (0,\infty))$ tuletise. Kuna f on eksponentfunktsiooni $g(y) = e^y$ $(y \in \mathbb{R})$ pöördfunktsioon, siis

$$f'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x} \quad (x \in (0,\infty)).$$

12. Olgu $y = f(x) = \arcsin x$ $(x \in [-1,1])$. Tegemist on pideva rangelt monotoonse funktsiooni $x = g(y) = \sin y$ $\left(y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$ pöördfunktsiooniga, seega valemi (4.4) kohaselt

$$f'(x) = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (x \in (-1,1)).$$

13. Analoogiliselt tuletatakse valem $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(x \in (-1,1))$ (iseseisvalt!)✠.

14. Analoogiliselt saame, et $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$ ja $(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$ (iseseisvalt!)✠.

4.3 Lagrange'i keskväärtusteoreem. Funktsiooni lokaalsed ekstreemumid

Alustame olulise tähelepanekuga **tuletise seosest funktsiooni ekstreemumitega.** Meenutame, et kui funktsiooni f määramispiirkonna D sisepunktil a on ümbrus $U_\delta(a)$ omadusega

$$f(x) \le f(a) \text{ iga } x \in U_\delta(a) \text{ korral,}$$

siis öeldakse, et funktsioonil f on punktis a *lokaalne maksimum.* Kui $f(x) \ge f(a)$ iga $x \in U_\delta(a)$ korral, siis kõneldakse *lokaalsest miinimumist.* Kui funktsioonil on vaadeldavas punktis kas lokaalne maksimum või lokaalne miinimum, siis öeldakse, et tal on *lokaalne ekstreemum.*

Lause 4.9 ***(Fermat' teoreem, tarvilik tingimus lokaalseks ekstreemumiks).*** *Olgu funktsioon $f : D \to \mathbb{R}$ intervalli D sisepunktis a diferentseeruv ning olgu tal selles punktis lokaalne ekstreemum. Siis $f'(a) = 0$.*

Tõestus. Konkreetsuse mõttes olgu funktsioonil f punktis a lokaalne maksimum. Olgu $\delta > 0$ selline arv, et $f(x) \le f(a)$ iga $x \in U_\delta(a)$ korral. Siis

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \ge 0 \text{ kõikide } x \in (a-\delta, a) \text{ korral}$$

ja

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \le 0 \text{ kõikide } x \in (a, a+\delta) \text{ korral}$$

(selgitada!)✠. Diferentseeruvuse eelduse tõttu eksisteerivad piirväärtused $\lim_{x\to a-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \ge 0$ ja $\lim_{x\to a+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \le 0$ ning need peavad olema võrdsed (selgitada!)✠. Seega $f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = 0$.

Lokaalse miinimumi korral on tõestus analoogiline. ■

Geomeetriliselt tähendab lause 4.9 väide seda, et kui punktis a diferentseeruval funktsioonil on selles punktis lokaalne ekstreemum, siis tema graafikule punktis $(a, f(a))$ võetud puutuja on paralleelne x-teljega (selgitada!)✠. Rõhutame, et tegemist on vaid *tarviliku*, üldjuhul mitte piisava tingimusega. Lihtsaks *kontranäiteks* on funktsioon $y = x^3$, mis on punktis $a = 0$ diferentseeruv, tuletis selles punktis ja funktsioon ise võrduvad nulliga, kuid punkti 0 igas ümbruses saab funktsioon nii positiivseid kui ka negatiivseid väärtusi.

Lause 4.10 ***(Rolle'i teoreem).*** *Olgu* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *pidev funktsioon, mis vahemikus* (a,b) *on diferentseeruv. Kui* $f(a) = f(b)$*, siis leidub selline* $c \in (a,b)$*, et* $f'(c) = 0$.

Tõestus. Kõigepealt märgime seda, et Weierstrassi teoreemi kohaselt (vt. pt. 3, teoreem 3.8) on funktsioonil f lõigus $[a,b]$ nii globaalne maksimum kui ka globaalne miinimum. Kui f on konstantne funktsioon, siis $f'(x) = 0$ iga $x \in (a,b)$ puhul. Mittekonstantse funktsiooni f korral saab leida sellise $z \in (a,b)$, et kas $f(z) > f(a)$ või $f(z) < f(a)$. Mõlemal juhul peab vähemalt üks globaalsetest ekstreemumitest paiknema vahemikus (a,b), olgu see punktis $c \in (a,b)$. Lause 4.9 kohaselt $f'(c) = 0$. ■

Geomeetriliselt tähendab tõestatud väide seda, et *kui funktsiooni* f *graafiku punkte* $(a, f(a))$ *ja* $(b, f(b))$ *läbib selline lõikaja, mis on* x*-teljega paralleelne, siis on nende vahel selline graafiku punkt* $(c, f(c))$, *milles võetud puutuja on* x*-teljega paralleelne.* Ei ole mingit põhjust arvata, et see väide vaid x-teljega paralleelsete lõikajate ja puutujate puhul kehtib. Järgmine väide - nn. keskväärtusteoreem - ütlebki, et *läbi graafiku punktide* $(a, f(a))$ *ja* $(b, f(b))$ *tõmmatud lõikajaga saab teatud punktis graafikule võtta selle lõikajaga paralleelse puutuja.*

Lause 4.11 ***(Lagrange'i keskväärtusteoreem).*** *Olgu* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *pidev funktsioon, mis vahemikus* (a,b) *on diferentseeruv. Siis leidub selline* $c \in (a,b)$*, et*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{4.5}$$

Tõestus. Defineerime uue funktsiooni $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ seosega

$$g(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \quad (x \in [a,b]).$$

See on lõigus $[a,b]$ pidev ning vahemikus (a,b) diferentseeruv, sealjuures $g(a) = g(b)$. Niisiis saame funktsioonile g rakendada Rolle'i teoreemi. (Geomeetriliselt kõneldes, me "pöörame" funktsiooni f graafikut punkti $(a, f(a))$ ümber nii, et lõikaja, mis läbib punkte $(a, f(a)) = (a, g(a))$ ja $(b, g(b))$, oleks x-teljega paralleelne). Rolle'i teoreemi kohaselt leidub selline punkt $c \in (a,b)$, et

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

s.t. kehtib (4.5). ■

Märkus 1 (oluline!). Tingimus (4.5) esitatakse tihti kujul

$$f(a + h) - f(a) = f'(a + \theta h)\, h \text{ mingi } \theta \in (0,1) \text{ korral}$$

(selgitada!)✠.

Keskväärtusteoreemi abil on mugav kirjeldada funktsiooni $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ **monotoonsuse-omadusi.**

Lause 4.12 ***Lause 4.13*** *Olgu* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *pidev funktsioon, mis vahemikus* (a,b) *on diferentseeruv.*
(*a*) *Kui leiduvad sellised arvud* m *ja* M, *et* $m \leq f'(x) \leq M$ *iga* $x \in (a,b)$ *korral, siis*

$$m(z-y) \leq f(z) - f(y) \leq M(z-y) \quad (a \leq y \leq z \leq b).$$

(*b*) *Kui* $f'(x) = 0$ *iga* $x \in (a,b)$ *korral, siis* f *on konstantne.*
(*c*) *Kui* $f'(x) > 0$ ($f'(x) \geq 0$) *iga* $x \in (a,b)$ *korral, siis* f *on rangelt kasvav (kasvav) funktsioon.*
(*d*) *Kui* $f'(x) < 0$ ($f'(x) \leq 0$) *iga* $x \in (a,b)$ *korral, siis* f *on rangelt kahanev (kahanev) funktsioon.*

Tõestus. (*a*) Juhul $z = y$ on väide triviaalne. Kui $z > y$, siis keskväärtusteoreemi kohaselt leidub $c \in (a,b)$ omadusega

$$m \leq f'(c) = \frac{f(z) - f(y)}{z - y} \leq M,$$

mis on samaväärne tõestatava tingimusega.

(*b*) Kui $f'(x) = 0$ iga $x \in (a,b)$ korral, siis rakendame väidet (*a*), võttes $m = M = 0$.

(*c*) Kui $f'(x) > 0$ iga $x \in (a,b)$ korral, siis (keskväärtusteoreemi kohaselt kehtivas) tingimuses (4.5) on $f'(c) > 0$, mistõttu

$$f(z) - f(y) = f'(c)(z-y) > 0, \text{ kui } z > y.$$

Seega on f rangelt kasvav. Analoogiliselt tõestatakse väite teine pool (iseseisvalt!)✠.

(*d*) Iseseisvalt!✠ ■

4.4 Cauchy keskväärtusteoreem ja l'Hospitali reegel

Lause 4.14 ***(Cauchy keskväärtusteoreem).*** *Olgu* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *ja* $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *pidevad funktsioonid, mis vahemikus* (a,b) *on diferentseeruvad, ning olgu* $g'(x) \neq 0$ *iga* $x \in (a,b)$ *korral. Siis leidub selline punkt* $c \in (a,b)$, *et*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{4.6}$$

Tõestus. Kõigepealt märgime, et $g(b) \neq g(a)$, sest vastasel juhul rahuldaks g Rolle'i teoreemi tingimusi ning $g'(x)$ võrduks nulliga vähemalt ühes punktis $x \in (a,b)$. Moodustame funktsiooni

$$h(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} (g(x) - g(a))$$

ja paneme tähele, et $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ on pidev ja vahemikus (a,b) diferentseeruv (kontrollida!)✠, seejuures $h(b) = h(a) = f(a)$ (kontrollida!)✠. Rolle'i teoreemi kohaselt $h'(c) = 0$ mingis punktis $c \in (a,b)$. Kuna

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x),$$

siis saamegi seose (4.6). ■

Märkus 2. Analoogiliselt Lagrange'i keskväärtusteoreemiga saab ka valemile (4.6) anda teistsuguse kuju (vrd. märkus 2):

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{g(a+h)-g(a)}=\frac{f'(a+\theta h)}{g'(a+\theta h)} \text{ mingi } \theta\in(0,1) \text{ korral.}$$

Cauchy keskväärtusteoreem annab lihtsa meetodi funktsioonide **piirväärtuse arvutamiseks** määramatuste $\frac{0}{0}$ ja $\frac{\infty}{\infty}$ puhul.

Lause 4.15 ***(l'Hospitali reegel).*** *Olgu funktsioonid f ja g diferentseeruvad punkti $a\in\mathbb{R}$ parempoolses ümbruses $(a,a+\delta)$ ning olgu $g(x)\neq 0$ iga $x\in(a,a+\delta)$ korral. Kui kas*

$$\lim_{x\to a+} f(x)=\lim_{x\to a+} g(x)=0 \tag{4.7}$$

või

$$\lim_{x\to a+} |f(x)|=\lim_{x\to a+} |g(x)|=\infty \tag{4.8}$$

ning eksisteerib piirväärtus $\lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=:L$, siis $\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}=L$.
Analoogiline tulemus kehtib ka vasakpoolse ja kahepoolse piirväärtuse puhul.

Tõestus. A. *Vaatleme algul juhtu* (4.7). Olgu $0<h<\delta$. Defineerime funktsioonid $F:[a,a+h]\to\mathbb{R}$ ja $G:[a,a+h]\to\mathbb{R}$ seostega

$$F(x):=\begin{cases} f(x), & \text{kui } x\in(a,a+h],\\ 0, & \text{kui } x=a\end{cases} \quad \text{ja} \quad G(x):=\begin{cases} g(x), & \text{kui } x\in(a,a+h],\\ 0, & \text{kui } x=a.\end{cases}$$

Siis F ja G on pidevad ning vahemikus $(a,a+h)$ diferentseeruvad (selgitada!)✠, seejuures on $G'(x)=g'(x)\neq 0$ iga $x\in(a,a+h)$ korral. Rakendame funktsioonidele F ja G Cauchy keskväärtusteoreemi, selle kohaselt saab iga $x\in(a,a+h)$ korral leida $c\in(a,x)$ omadusega

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)}=\frac{F'(c)}{G'(c)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

(selgitada!)✠. Protsessis $x\to a+$ kehtib $c\to a+$ (sest c on punktide a ja x vahel), niisiis

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{c\to a+}\frac{f'(c)}{g'(c)}=L.$$

B. *Juhul* (4.8) on tõestus keerulisem. Olgu ε suvaline positiivne arv, üldisust kitsendamata eeldame, et $\varepsilon\leq 1$. Valime $h>0$ nii väikese, et
1) funktsioonid f ja g oleksid hulgas $(a,a+h)$ diferentseeruvad,
2) $f(x)$, $g(x)$ ja $g'(x)$ on nullist erinevad iga $x\in(a,a+h)$ korral ja
3) $\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}-L\right|<\varepsilon$ iga $x\in(a,a+h)$ korral.
Fikseerime $x_0\in(a,a+h)$ ning olgu $x\in(a,a+h)$ suvaline. Rakendame funktsioonidele f

ja g lõigus otspunktidega x ja x_0 Cauchy keskväärtusteoreemi. Selle kohaselt leidub nende punktide vahel punkt c omadusega

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(c)}{g'(c)},$$

järelikult

$$\left|\frac{f(x)-f(t)}{g(x)-g(t)}-L\right|<\varepsilon \text{ kõikide } x,t\in(a,a+h) \text{ korral} \tag{4.9}$$

(põhjendada!)✠. Tähistades

$$\varphi(x):=\frac{1-\frac{g(x_0)}{g(x)}}{1-\frac{f(x_0)}{f(x)}},$$

ning märkides, et $\lim_{x\to a+}\varphi(x)=1$ (kontrollida!)✠, saame seostest (4.9) ja

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f(x)}{g(x)}\frac{1-\frac{f(x_0)}{f(x)}}{1-\frac{g(x_0)}{g(x)}}=\frac{1}{\varphi(x)}\frac{f(x)}{g(x)}$$

võrratuse

$$\left|\frac{1}{\varphi(x)}\frac{f(x)}{g(x)}-L\right|<\varepsilon \quad (x\in(a,a+h))$$

ehk

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-L\varphi(x)\right|<\varepsilon\,|\varphi(x)| \quad (x\in(a,a+h)),$$

millest omakorda järeldub

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)}{g(x)}-L\right| &\le \left|\frac{f(x)}{g(x)}-L\varphi(x)\right|+|L\varphi(x)-L| \\ &<\varepsilon\,|\varphi(x)|+|L|\,|\varphi(x)-1| \quad (x\in(a,a+h)).\end{aligned} \tag{4.10}$$

Valime $\delta>0$ nii väikese, et $\delta\le h$ ja iga $x\in(a,a+\delta)$ korral kehtib võrratus $|\varphi(x)-1|<\varepsilon$, siis

$$|\varphi(x)|=\varphi(x)<\varepsilon+1 \quad (x\in(a,a+\delta)). \tag{4.11}$$

Võrratustest (4.10) ja (4.11) tuleneb tingimus

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-L\right|<\varepsilon(\varepsilon+1)+|L|\,\varepsilon \quad (x\in(a,a+\delta)),$$

mis tähendabki, et $\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}=L$.

Analoogiliselt tõestatakse väited vasakpoolsete piirväärtuste korral. Lihtne on näha, et kui väited kehtivad nii parem- kui vasakpoolsete piirväärtuste jaoks, siis kehtivad nad ka kahepoolsete piirväärtuste puhul. ■

Märkus 3. Analoogilised väited (analoogiliste tõestustega) kehtivad juhul, kui piirprotsess on kas $x\to\infty$ või $x\to-\infty$.

4.5 Kõrgemat järku tuletised. Taylori valem

Taylori polünoomid. Olgu $f : D \to \mathbb{R}$ punktis a n korda diferentseeruv funktsioon. Me seame endale eesmärgiks leida niisugune n-astme polünoom, mis võimalikult hästi lähendaks seda funktsiooni punkti a mingis ümbruses. Kui $n = 1$, siis sobib selleks esimese astme polünoom $T_1(x) := f(a) + f'(a)(x-a)$ (vt. punkt 4.1). Kui f on punktis a kaks korda diferentseeruv (s.t. $n = 2$), siis defineerime

$$T_2(x) := f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2$$

ja paneme tähele, et

$$T_2(a) = f(a), \quad T_2'(a) = f'(a) \quad \text{ja} \quad T_2''(a) = f''(a),$$

mis muuhulgas ütleb, et punktis a langevad funktsioonide f ja T_2 väärtused kokku ja neil on ühine puutuja. See asjaolu annab põhjust arvata, et punkti a teatavas ümbruses on polünoom T_2 funktsioonile f heaks lähendiks. Üldjuhul, kui f on n korda diferentseeruv, moodustame seosega

$$\begin{aligned} T_n(x) &:= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + ... + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}f^{(k)}(a)(x-a)^k \end{aligned}$$

(siin $f^{(0)} := f$) polünoomi T_n, mida nimetatakse funktsiooni f *n-järku Taylori polünoomiks.* Vahetu kontroll näitab, et $T_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ kõikide $k = 0, 1, ..., n$ korral (veenduda!)✠.

Teisalt, kui mingi n-astme polünoom $P(x) = a_0 + a_1(x-a) + ... + a_n(x-a)^n$ rahuldab tingimust $P^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ iga $k = 0, 1, ..., n$ korral, siis $P = T_n$, s.t. $a_k = \frac{1}{k!}f^{(k)}(a)$ (kontrollida!)✠. See asjaolu õigustabki sellist polünoomide T_n valikut. Allpool (vt. lause 4.17) näeme, et tegelikult on T_n kõikide n-astme polünoomide hulgas (teatavas mõttes) parim lähend funktsioonile f punkti a ümbruses.

Taylori valem. Tähistame $R_{n+1}(a, x) := f(x) - T_n(x)$, seega

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{1!}f'(a)(x-a) + ... + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n + R_{n+1}(a, x).$$

Seda valemit nimetatakse funktsiooni f *Taylori valemiks* punktis a ja avaldist $R_{n+1}(a, x)$ nimetatakse Taylori valemi *jääkliikmeks.* Meie põhiline eesmärk on näidata, et protsessis $x \to a$ läheneb $R_{n+1}(a, x)$ kiiremini nullile, kui $(x-a)^n$, s.t. $\lim_{x\to a} \frac{R_{n+1}(a,x)}{(x-a)^n} = 0$. Seejuures saab jääkliikmele R_{n+1} anda *erinevaid esitusi,* me toome järgnevas mõned tähtsamad jääkliikme kujud.

Eeldame, **et f on hulgas $U_\delta(a)$ $n+1$ korda pidevalt diferentseeruv,** s.t. eksisteerib pidev $f^{(n+1)} : U_\delta(a) \to \mathbb{R}$. Olgu $b \in U_\delta(a)$ fikseeritud ja $t \in U_\delta(a)$ suvaline. Tähistame

$$F(t) := R_{n+1}(t, b) = f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}f^{(k)}(t)(b-t)^k,$$

siis

$$
\begin{aligned}
F'(t) &= -\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k+1)}(t)(b-t)^k - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(t)(-1)k(b-t)^{k-1} \\
&= -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} f^{(k+1)}(t)(b-t)^k - \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(t)(b-t)^n \\
&+ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!} f^{(k)}(t)(b-t)^{k-1} \\
&= -\frac{1}{n!} f^{(n+1)}(t)(b-t)^n
\end{aligned}
$$

(kontrollida!)✠. Moodustame abifunktsiooni $G(t) := (b-t)^r$, kus r on mingi fikseeritud naturaalarv. Olgu $h := b - a$. Cauchy keskväärtusteoreemi kohaselt leidub selline arv $\theta \in (0,1)$, et

$$
\frac{F(a) - F(b)}{G(a) - G(b)} = \frac{F'(a+\theta h)}{G'(a+\theta h)}
$$

(veenduda, et lause 4.14 eeldused on täidetud!)✠. Seejuures $F(a) = R_{n+1}(a,b)$, $F(b) = G(b) = 0$, $G(a) = (b-a)^r$,

$$
\begin{aligned}
F'(a+\theta h) &= -\frac{1}{n!} f^{(n+1)}(a+\theta h)(1-\theta)^n h^n, \\
G'(a+\theta h) &= -r(1-\theta)^{r-1} h^{r-1},
\end{aligned}
$$

tähendab,

$$
\frac{F(a)}{(b-a)^r} = \frac{1}{rn!} f^{(n+1)}(a+\theta h)(1-\theta)^{n-r+1} h^{n-r+1}
$$

(kontrollida!)✠, millest

$$
R_{n+1}(a,b) = F(a) = \frac{1}{rn!} f^{(n+1)}(a+\theta h)(1-\theta)^{n-r+1} h^{n+1}.
$$

Me saime (asendades fikseeritud b muutujaga $x \in U_\delta(a)$) jääkliikme nn *Schlömilchi üldkujul*

$$
R_{n+1}(a,x) = \frac{1}{rn!} f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))(1-\theta)^{n-r+1}(x-a)^{n+1}.
$$

Sellest saadakse juhul $r = 1$ jääkliige *Cauchy kujul*

$$
R_{n+1}(a,x) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))(1-\theta)^n (x-a)^{n+1}
$$

ja juhul $r = n+1$ *Lagrange'i kujul*

$$
R_{n+1}(a,x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))(x-a)^{n+1}.
$$

Näitame, et viimasel juhul

$$
\lim_{x\to a} \frac{R_{n+1}(a,x)}{(x-a)^n} = 0. \tag{4.12}
$$

Kuna eelduse kohaselt on f hulgas $U_\delta(a)$ $n+1$ korda pidevalt diferentseeruv, siis funktsioon $f^{(n+1)}$ on mingis väiksemas ümbruses $U_{\delta_1}(a) \subset U_\delta(a)$ tõkestatud (põhjendada!)✠. Seega leidub selline $M > 0$, et

$$\left|f^{(n+1)}(z)\right| \le M \ \ (z \in U_{\delta_1}(a)).$$

Olgu $\varepsilon > 0$, võtame $\delta_2 := \frac{\varepsilon(n+1)!}{M}$ ning $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Kui $|x-a| < \delta$, siis

$$\left|\frac{R_{n+1}(a,x)}{(x-a)^n}\right| = \left|\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))(x-a)\right| \le M\frac{\varepsilon(n+1)!}{M(n+1)!} = \varepsilon,$$

s.t. kehtib (4.12).

Võtame eelneva arutelu kokku järgmiseks teoreemiks.

Teoreem 4.16 ***(Taylori teoreem).*** *Kui funktsioon $f : D \to \mathbb{R}$ on intervalli D sisepunkti a mingis ümbruses $U_\delta(a)$ $n+1$ korda pidevalt diferentseeruv, siis leidub selline arv $\theta \in (0,1)$, et*

$$\begin{aligned} f(x) = f(a) + \frac{1}{1!}f'(a)(x-a) + ... + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n \\ + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))(x-a)^{n+1}. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Seejuures rahuldab jääkliige $R_{n+1}(a,x) = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))(x-a)^{n+1}$ tingimust (4.12).

Järgmise lause kohaselt on esitus (4.13) teatavas mõttes üheselt määratud.

Lause 4.17 *Olgu funktsioon $f : D \to \mathbb{R}$ intervalli D sisepunkti a mingis ümbruses $U_\delta(a)$ $n+1$ korda pidevalt diferentseeruv ja olgu $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ selline polünoom, et*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x) - \sum_{k=0}^n a_k(x-a)^k}{(x-a)^n} = 0. \tag{4.14}$$

Siis $a_k = \frac{1}{k!}f^{(k)}(a)$ $(k = 0, ..., n)$.

Tõestus. Teoreemi 4.16 põhjal kehtib valem (4.13). Asendame valemisse (4.14) $f(x)$ seosest (4.13), saame

$$\lim_{x\to a}\left(\sum_{k=0}^n\left(\frac{1}{k!}f^{(k)}(a) - a_k\right)\frac{(x-a)^k}{(x-a)^n} + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))(x-a)\right) = 0,$$

tingimuse (4.12) tõttu

$$\lim_{x\to a}\sum_{k=0}^n\left(\frac{1}{k!}f^{(k)}(a) - a_k\right)\frac{(x-a)^k}{(x-a)^n} = 0.$$

See võrdus on võimalik vaid juhul $a_k = \frac{1}{k!}f^{(k)}(a)$ $(k = 0, ..., n)$ (selgitada!)✠. ∎

Näide 15. Leiame eksponentfunktsiooni $f(x) = e^x$ esituse Taylori valemi abil punkti $a = 0$ ümbruses. Valemi (4.13) kohaselt

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + ... + \frac{1}{n!}x^n + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$$

(kontrollida!)✠. Jääkliige $R_{n+1}(0, x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$ kirjeldab viga, mida me teeme, kui asendame funktsiooni väärtuse e^x polünoomiga $1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+...+\frac{1}{n!}x^n$. Selle vea hindamiseks paneme tähele, et kui $b > 0$, siis

$$\left|\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}\right| \leq \frac{b^{n+1}}{(n+1)!}e^b \quad (|x| \leq b).$$

Seejuures

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b^{n+1}}{(n+1)!} = 0, \tag{4.15}$$

niisiis $\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(0, x) = 0$ iga $x \in \mathbb{R}$ korral (selgitada!)✠ ehk

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \text{ iga } x \in \mathbb{R} \text{ korral.}$$

Valemi (4.15) tõestuseks valime $m \in \mathbb{N}$ nii suure, et $a < m + 1$. Siis eeldusel $n > m$ saame seose

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a^m}{m!}\frac{a^{n-m}}{(m+1)(m+2)...n} \leq \frac{a^m}{m!}\frac{a^{n-m}}{(m+1)^{n-m}} = \frac{a^m}{m!}\left(\frac{a}{m+1}\right)^{n-m}.$$

Kuna $\frac{a}{m+1} < 1$, siis $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{m+1}\right)^{n-m} = 0$, seega

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!} = \frac{a^m}{m!}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{m+1}\right)^{n-m} = 0.$$

5 Integreeruvad funktsioonid

5.1 Kõvertrapetsi pindala

Olgu f selline lõigus $[a,b]$ pidev funktsioon, et $f(x) \geq 0$ kõikide $x \in [a,b]$ korral, olgu kõver AB selle funktsiooni graafik xy-tasandil. Vaatleme xy-tasandil kujundit $aABb$, mille määravad kõver AB ning sirged $y = 0$ (s.o. x-telg), $x = a$ ja $x = b$. Sellist kujundit nimetatakse *kõvertrapetsiks.*

Jagame lõigu $[a,b]$ suvalisel viisil n osaks punktidega

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b.$$

Niisugust jaotust nimetame edaspidi *lõigu* $[a,b]$ *alajaotuseks* $T = T[x_0,...,x_n]$. Tähistame

$$M_k := \max_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x) \quad \text{ja} \quad m_k := \min_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)$$

(põhjendada nende olemasolu!)✠ ning vaatleme ristkülikuid alusega $\Delta x_k := x_k - x_{k-1}$ ja kõrgusega M_k $(k = 1,...,n)$. Iga sellise ristküliku pindala on $M_k \Delta x_k$, nende summa $S(T) := \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k$ kirjeldab neist ristkülikutest koosneva tasandilise kujundi P^* pindala, kusjuures kujund P^* sisaldab kõvertrapetsit $aABb$. Samadele alustele Δx_k kõrgusega m_k $(k = 1,...,n)$ konstrueeritud ristkülikud moodustavad kujundi P_*, mis sisaldub kõvertrapetsis $aABb$ ning mille pindala on $s(T) := \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k$. Niisiis,

$$P_* \subset aABb \subset P^*.$$

Kui me peenendame alajaotust $T[x_0,...,x_n]$ nii, et $n \to \infty$ ja seejuures

$$\lambda(T) := \max_{1\leq k\leq n} \Delta x_k \to 0,$$

siis kujundid P^* ja P_* lähenevad oma kujult üha enam kõvertrapetsile $aABb$. Seetõttu on loomulik defineerida selle kõvertrapetsi pindala kui kujundite P^* ja P_* pindalade ühine piirväärtus vaadeldavas protsessis (eeldusel, et see eksisteerib). Teiste sõnadega,

$$S_{aABb} := \lim_{\lambda(T)\to 0} S(T) = \lim_{\lambda(T)\to 0} s(T).$$

Küsimus sellest, **kas need piirväärtused tõepoolest eksisteerivad** ning kokku langevad, jääb esialgu lahtiseks.

5.2 Riemanni integraali mõiste

Vaatleme funktsiooni $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, erinevalt eelmisest punktist **ei eelda me funktsiooni** f **pidevust** ega tema väärtuste mittenegatiivsust**.** Olgu lõigus $[a,b]$ mingi $n \in \mathbb{N}$ korral fikseeritud alajaotus

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b,$$

mida me järgnevas tähistame $T = T[x_0, ..., x_n]$. Tähistame (nii nagu eespoolgi) $\Delta x_k := x_{k+1} - x_k$ $(k = 1, ..., n)$ ja $\lambda(T) := \max_{1 \le k \le n} \Delta x_k$. Võtame iga k korral osalõigust $[x_{k-1}, x_k]$ **suvalise punkti** ξ_k ja moodustame *integraalsumma*

$$\sigma(T) := \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k.$$

Definitsioon. Kui eksisteerib lõplik piirväärtus

$$I := \lim_{\lambda(T) \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k, \tag{5.1}$$

siis öeldakse, et funktsioon f on *lõigus* $[a, b]$ *(Riemanni mõttes) integreeruv*. Piirväärtust (5.1) nimetatakse funktsiooni f *Riemanni integraaliks lõigus* $[a, b]$ ja tähistatakse $\int_a^b f(x)\,dx$.

Näide 1. Konstantse funktsiooni $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = c$ korral saame

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda(T) \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k = c \lim_{\lambda(T) \to 0} \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = c(b - a)$$

(selgitada!)✠. Seega on kõik lõigus $[a, b]$ konstantsed funktsioonid selles lõigus Riemanni mõttes integreeruvad.

Märkus 1 (väga oluline!). Piirprotsessi definitsioonis (5.1) mõistame me nii: *iga positiivse arvu* ε *puhul saab leida sellise* $\delta > 0$*, et kui* $\lambda(T) < \delta$*, siis*

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k - I \right| < \varepsilon \textbf{ suvaliste } \xi_k \in [x_{k-1}, x_k] \textbf{ korral.}$$

Ilmselt toob piirprotsess $\lambda(T) \to 0$ endaga kaasa protsessi $n \to \infty$, vastupidine implikatsioon ei pruugi olla õige (selgitada!)✠.

Me alustame integreeruvate funktsioonide kirjeldamist järgmise olulise faktiga.

Lause 5.1 ***(tarvilik tingimus integreeruvuseks).*** *Iga lõigus* $[a, b]$ *integreeruv funktsioon* f *on selles lõigus tõkestatud.*

Tõestus. Olgu $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integreeruv funktsioon. Olgu $T = T[x_0, ..., x_n]$ lõigu $[a, b]$ selline alajaotus, et $\left| \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k - I \right| < 1$ kõikvõimalike valikute $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ korral $(k = 1, ..., n)$. Kui $c_k, d_k \in [x_{k-1}, x_k]$ on valitud suvaliselt, siis

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(c_k) \Delta x_k - I \right| < 1 \text{ ja } \left| \sum_{k=1}^{n} f(d_k) \Delta x_k - I \right| < 1,$$

mistõttu

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(c_k) \Delta x_k - \sum_{k=1}^{n} f(d_k) \Delta x_k \right| < 2$$

(põhjendada!)✠. Kui $c_k = d_k$ kõikide $k = 2, 3, ..., n$ puhul, siis $2 > |f(c_1) - f(d_1)| \Delta x_1$ ehk

$$|f(c_1) - f(d_1)| < \frac{2}{\Delta x_1},$$

millest omakorda järeldub

$$|f(c_1)| < \frac{2}{\Delta x_1} + |f(d_1)|.$$

Fikseerides punkti $d_1 \in [a, x_1]$, saame suvalise $x = c_1$ jaoks hinnangu

$$|f(x)| < M_1 := \frac{2}{\Delta x_1} + |f(d_1)| \quad (x \in [a, x_1]).$$

Seega on f osalõigus $[a, x_1]$ tõkestatud. Analoogiliselt veendutakse, et f on ülejäänud osalõikudes $[x_1, x_2], ..., [x_{n-1}, b]$ tõkestatud, mis kokkuvõttes tähendab tõkestatust kogu lõigus $[a, b]$ (selgitada!)✠. ■

Tõkestatus ei ole piisav tingimus funktsiooni integreeruvuseks, seda näeme järgmisest näitest.

Näide 2. Olgu $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ Dirichlet' funktsioon, s.t.

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{kui } x \text{ on ratsionaalarv,} \\ 0, & \text{kui } x \text{ on irratsionaalarv.} \end{cases}$$

Suvalise alajaotuse $T = T[x_0, ..., x_n]$ puhul saab valida kõik $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ ratsionaalsed (põhjendada!)✠, siis $f(\xi_k) = 1$ $(k = 1, ..., n)$, ning $\sigma(T) := \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = 1$. Kuid samuti võib valida kõik ξ_k irratsionaalsed (selgitada!)✠, siis $f(\xi_k) = 0$ $(k = 1, ..., n)$ ja $\sigma(T) = 0$. On selge, et integraalsumma $\sigma(T)$ ei oma sel juhul piirväärtust.

5.3 Darboux' summad

Integraalsumma $\sigma(T)$ kõrval on kasulik uurida nn. Darboux' summasid, mis on integraalsummaga sarnased, kuid oluliselt lihtsamad. Olgu f lõigus $[a, b]$ **tõkestatud** funktsioon. Siis eksisteerivad alajaotuse $T = T[x_0, ..., x_n]$ korral

$$M_k := \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \quad \text{ja} \quad m_k := \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x),$$

tähistame

$$S(T) := \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k \text{ ja } s(T) := \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k$$

(vrd. punkt 5.1). Summasid $S(T)$ ja $s(T)$ nimetatakse (alajaotusele T vastavateks) *Darboux' ülem- ja alamsummaks*. Pidades silmas, et suvalise $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ korral kehtib seos $m_k \le f(\xi_k) \le M_k$, saame võrratused (selgitada!)✠

$$s(T) \le \sigma(T) \le S(T).$$

Paneme tähele, et Darboux' summad $s(T)$ ja $S(T)$ on **antud alajaotuse** T **korral** konstantsed, integraalsumma $\sigma(T)$ aga sõltub punktide $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1, ..., n)$ valikust. Seejuures

ülemsumma $S(T)$ *on integraalsumma* $\sigma(T)$ *väärtuste ülemine raja.*

Täpsemalt, iga fikseeritud alajaotuse $T = T[x_0, ..., x_n]$ korral

$$\sup_{\xi_k\in[x_{k-1},x_k]\ (1\le k\le n)} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \sup_{\xi_k\in[x_{k-1},x_k]} f(\xi_k)\,\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k = S(T).$$

Analoogiliselt saame

$$\inf_{\xi_k\in[x_{k-1},x_k]\ (1\le k\le n)} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k = s(T),$$

niisiis,

alamsumma $s(T)$ *on integraalsumma* $\sigma(T)$ *väärtuste alumine raja.*

Kokkuvõttes,

$$S(T) = \sup \sigma(T), \quad s(T) = \inf \sigma(T). \tag{5.2}$$

Darboux' summadel on järgmised kaks tähelepanuväärset omadust.

Omadus 5.2 *Alajaotuse peenendamisel ei saa Darboux' ülemsumma kasvada ega alamsumma kahaneda.*

Tõestus. Olgu $S(T)$ alajaotusele $T = T[x_0, ..., x_n]$ vastav Darboux' ülemsumma. Lisame sellele jaotusele ühe uue jaotuspunkti x', see asub kahe olemasoleva jaotuspunkti x_{i-1} ja x_i vahel. Uuele alajaotusele T' vastav ülemsumma $S(T')$ on kujul

$$S(T') = \sum_{\substack{k=1\\k\ne i}}^{n} M_k \Delta x_k + M_i^1 (x' - x_{i-1}) + M_i^2 (x_i - x'),$$

kus $M_i^1 := \sup\limits_{x\in[x_{i-1},x']} f(x)$ ja $M_i^2 := \sup\limits_{x\in[x',x_i]} f(x)$. Kuna $M_i^1, M_i^2 \le M_i$ (selgitada!)✠, siis

$$M_i^1 (x' - x_{i-1}) \le M_i (x' - x_{i-1}), \quad M_i^2 (x_i - x') \le M_i (x_i - x'),$$

mistõttu

$$\begin{aligned} S(T') &\le \sum_{\substack{k=1\\k\ne i}}^{n} M_k \Delta_k + M_i (x' - x_{i-1}) + M_i (x_i - x') \\ &= \sum_{\substack{k=1\\k\ne i}}^{n} M_k \Delta_k + M_i \Delta x_i = S(T). \end{aligned}$$

Analoogiliselt näidatakse, et $s(T') = \sum\limits_{\substack{k=1\\k\ne i}}^{n} m_k \Delta_k + m_i^1 (x' - x_i) + m_i^2 (x_{i+1} - x') \ge s(T)$, kus $m_i^1 := \inf\limits_{x\in[x_i,x']} f(x)$ ja $m_i^2 := \inf\limits_{x\in[x',x_{i+1}]} f(x)$. ■

Omadus 5.3 *Ükski alamsumma ei ole suurem ühestki ülemsummast.*

Tõestus. Olgu T ja T' lõigu $[a,b]$ kaks suvalist alajaotust, meie eesmärk on veenduda, et $s(T') \leq S(T)$. Moodustame kolmanda alajaotuse T'' nii, et selle jaotuspunktideks on parajasti kõik jaotustesse T ja T' kuuluvad jaotuspunktid. Siis T'' on peenem alajaotustest T ja T', mistõttu omadusest 5.2 saame võrratused

$$s(T') \leq s(T'') \leq S(T'') \leq S(T)$$

(selgitada!)✠. ■

Omadusest 5.3 järeldub, et kõigi alamsummade hulk

$$\{s(T) \mid T \text{ on lõigu } [a,b] \text{ alajaotus}\}$$

on ülalt tõkestatud suvalise ülemsummaga $S(T)$. Pidevuse aksioomi kohaselt eksisteerib $\sup\{s(T) \mid T \text{ on lõigu } [a,b] \text{ alajaotus}\} =: I_*$, kusjuures $I_* \leq S(T)$ suvalise alajaotuse T korral (põhjendada!)✠. Seega $I^* := \inf\{s(T) \mid T \text{ on lõigu } [a,b] \text{ alajaotus}\} \geq I_*$ (põhjendada!)✠. Niisiis, lõigu $[a,b]$ suvalise alajaotuse T puhul kehtivad võrratused

$$s(T) \leq I_* \leq I^* \leq S(T). \tag{5.3}$$

Darboux' summade abil saab anda **tarviliku ja piisava tingimuse funktsiooni integreeruvuseks.**

Teoreem 5.4 ***(integreeruvuse kriteerium).*** *Lõigus $[a,b]$ tõkestatud funktsioon f on integreeruv parajasti siis, kui $\lim\limits_{\lambda(t)\to 0}(S(T) - s(T)) = 0$.*

Tõestus. *Tarvilikkus.* Olgu funktsioon f lõigus $[a,b]$ integreeruv ja olgu ε suvaline positiivne arv. Vastavalt integraali definitsioonile leidub selline $\delta > 0$, et kui alajaotuse $T = T[x_0, ..., x_n]$ maksimaalse osalõigu pikkus $\lambda(T)$ on väiksem kui δ, siis $|I - \sigma(T)| < \varepsilon$ ehk

$$I - \varepsilon < \sigma(T) < I + \varepsilon, \tag{5.4}$$

kus $\sigma(T) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k$ on vastava alajaotuse integraalsumma ning $I := \lim\limits_{\lambda(t)\to 0}\sigma(T)$ on talle vastav integraal $\int_a^b f(x)\,dx$. Seejuures kehtivad võrratused (5.4) kõikvõimalike punktide $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ valiku puhul $(k = 1, ..., n)$. Nagu me eespool veendusime (vt. (5.2)), on Darboux' ülemsumma $S(T)$ ja alamsumma $s(T)$ vastavalt integraalsumma $\sigma(T)$ väärtuste ülemine ja alumine raja. Seetõttu saame eeldusel $\lambda(T) < \delta$ seostest (5.4) võrratused

$$I - \varepsilon \leq s(T) \leq S(T) \leq I + \varepsilon$$

ehk

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} S(T) = I \quad \text{ja} \quad \lim_{\lambda(T)\to 0} s(T) = I,$$

millest järeldub $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0}(S(T) - s(t)) = 0$.

Piisavus. Eeldame, et $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0}(S(T)-s(t))=0$. Seostest (5.3) järeldub, et $I^*=I_*=:I$, seega saame võrratused $s(T)\le I\le S(T)$, ükskõik millisele alajaotusele T vastavaid Darboux' summasid me ka ei vaatleks. Samal ajal kehtivad ka võrratused $s(T)\le\sigma(T)\le S(T)$.

Olgu $\varepsilon>0$. Vastavalt eeldusele saab valida $\delta>0$ nii, et

$$\lambda(T)<\delta\Rightarrow S(T)-s(T)<\varepsilon.$$

Kuna nii $\sigma(T)$ kui ka I asuvad suuruste $s(T)$ ja $S(T)$ vahel, siis kehtib implikatsioon

$$\lambda(T)<\delta\Rightarrow|\sigma(T)-I|<\varepsilon$$

(selgitada!)✠, mis tähendab, et $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0}\sigma(T)=I$. Seega on funktsioon f integreeruv lõigus $[a,b]$. ■

Märkused 2. Teoreemi 5.4 tõestusest selgub, et tingimused
(a) funktsioon f on integreeruv lõigus $[a,b]$,
(b) $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0}(S(T)-s(T))=0$ ja
(c) lõplikud piirväärtused $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0}S(T)$ ning $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0}s(T)$ eksisteerivad ja on võrdsed
on samaväärsed. Sel juhul $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0}S(T)=\lim\limits_{\lambda(T)\to 0}s(T)=\int_a^b f(x)\,dx$.

3. Kui tähistada $\omega_k:=M_k-m_k$ $(k=1,...,n)$, siis

$$S(T)-s(t)=\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\,\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k$$

ja teoreemist 5.4 saame **funktsiooni f integreeruvuseks tarviliku ja piisava tingimuse** kujul

$$\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k=0. \tag{5.5}$$

Märgime, et arvu ω_k nimetatakse *funktsiooni f võnkumiseks* lõigus $[x_{k-1},x_k]$.

5.4 Pidevate ja katkevate funktsioonide integreerimine

Märkuse 3 ja Cantori teoreemi (vt. pt. 3, teoreem 3.10) abil saab tõestada järgmise tähtsa väite.

Lause 5.5 *Iga lõigus pidev funktsioon on selles lõigus integreeruv.*

Tõestus. Olgu funktsioon f pidev lõigus $[a,b]$. Cantori teoreemi kohaselt on funktsioon f lõigus $[a,b]$ ühtlaselt pidev. Olgu ε suvaline positiivne arv. Vastavalt ühtlase pidevuse definitsioonile (vrd. pt. 3), leidub $\delta>0$, et kui $x,x'\in[a,b]$ ja $|x-x'|<\delta$, siis $|f(x)-f(x')|<\frac{\varepsilon}{b-a}$.

Valime nüüd lõigu $[a,b]$ alajaotuse $T=T[x_0,...,x_n]$ nii, et $\lambda(T)<\delta$. Siis suvaliste x ja x' puhul osalõigust $[x_{k-1},x_k]$ kehtib võrratus $|f(x)-f(x')|<\frac{\varepsilon}{b-a}$, muuhulgas saame

$M_k - m_k < \varepsilon$ (peame silmas, et M_k ja m_k on vastavalt funktsiooni *suurim ja vähim väärtus* lõigus $[x_{k-1}, x_k]$ (selgitada!) ✠). Seega

$$S(T) - s(T) = \sum_{k=1}^{n} \omega_k \Delta x_k < \varepsilon \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon,$$

s.t. tingimus (5.5) on täidetud. Niisiis on f integreeruv lõigus $[a, b]$. ■

Märkus 4. Tulles tagasi punkti 5.1 juurde, võime märkust 2 silmas pidades sõnastada **Riemanni integraali geomeetrilise tähenduse:** *kui mittenegatiivne funktsioon f on lõigus $[a, b]$ pidev, siis tema graafiku ja sirgete $x = a$, $x = b$ ning $y = 0$ poolt määratud kõvertrapetsil on pindala ning see on võrdne integraaliga $\int_a^b f(x)\,dx$.*

Pidevus ei ole tarvilik tingimus integreeruvuseks, see selgub järgmisest väitest.

Lause 5.6 *Iga lõigus monotoonne tõkestatud funktsioon on integreeruv.*

Tõestus. Kui f on konstantne funktsioon, siis on ta integreeruv (vt. näide 1). Olgu f lõigus $[a, b]$ *kasvav* mittekonstantne tõkestatud funktsioon ja olgu $T = T[x_0, ..., x_n]$ selle lõigu mingi alajaotus. Siis on lihtne kirjeldada funktsiooni f võnkumist ω_k osalõigus $[x_{k-1}, x_k]$, see on $f(x_k) - f(x_{k-1})$. Olgu ε suvaline positiivne arv, võtame $\delta := \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$. Kui $\Delta x_k < \delta$ $(k = 1, ..., n)$, siis

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k \Delta x_k < \delta \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1})) = \delta (f(b) - f(a)) = \varepsilon,$$

mis märkuse 3 kohaselt tähendabki funktsiooni f integreeruvust lõigus $[a, b]$.

Kahaneva funktsiooni puhul on tõestus analoogiline. ■

Katkevate funktsioonide integreeruvust kirjeldab järgmine lause.

Lause 5.7 *Kui tõkestatud funktsioonil $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ on lõigus $[a, b]$ vaid lõplik arv katkevuspunkte, siis f on integreeruv.*

Tõestus. Olgu $c_1, c_2, ..., c_p$ funktsiooni f katkevuspunktid lõigus $[a, b]$ nummerdatud kasvamise järjekorras. Olgu ε suvaline positiivne arv. Võtame iga punkti c_i ümber sellise ümbruse $U_{\varepsilon_i}(c_i) = (c_i - \varepsilon_i, c_i + \varepsilon_i)$, et $\varepsilon_i < \frac{\varepsilon}{2}$ $(i = 1, ..., p)$. Ülejäänud osa lõigust $[a, b]$ koosneb lõikudest

$$[a, c_1 - \varepsilon_1],\ [c_1 + \varepsilon_1, c_2 - \varepsilon_2],\ ..., [c_p + \varepsilon_p, b], \tag{5.6}$$

nendes on f pidev. (Märgime, et tegelikult võivad ka lõigu otspunktid olla katkevuspunktideks. Kui näiteks $a = c_1$, siis võtame $U_{\varepsilon_1}(c_1) = (a, a_i + \varepsilon_i)$ ja loetelus (5.6) saame esimeseks lõiguks $[c_1 + \varepsilon_1, c_2 - \varepsilon_2] = [a + \varepsilon_1, c_2 - \varepsilon_2]$.) Cantori teoreemi kohaselt on funktsioon f igas lõigus loetelust (5.6) ühtlaselt pidev (vt. pt. 3, teoreem 3.10), seega leidub iga $i \in \{0, ..., p\}$ korral selline $\delta_i > 0$, et kui $x, x' \in [c_i + \varepsilon_i, c_{i+1} - \varepsilon_{i+1}]$ (siin $c_0 + \varepsilon_0 := a$ ja $c_{p+1} - \varepsilon_{p+1} := b$) ja $|x - x'| < \delta_i$, siis $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$. Me võtame $\delta > 0$ nii väikese, et $\delta < \min\{\delta_0, ..., \delta_p, \varepsilon\}$, ning moodustame lõigus $[a, b]$ alajaotuse $T = T[x_0, ..., x_n]$ omadusega $\lambda(T) < \delta$. Selle alajaotuse osalõigud $[x_{k-1}, x_k]$ võib jagada kahte klassi:

1) need, millel ei ole ühiseid punkte ümbrustega $U_{\varepsilon_i}(c_i)$ $(i = 1, ..., p)$, neis osalõikudes on funktsiooni f võnkumine

$$\omega_k = \sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x) - \inf_{x'\in[x_{k-1},x_k]} f\left(x'\right) = \sup_{x,x'\in[x_{k-1},x_k]} \left|f(x) - f\left(x'\right)\right| \le \varepsilon$$

(põhjendada!✠, vrd. pt. 1, lause 1.13(c)),
2) need, mis osaliselt või tervenisti paiknevad ümbrustes $U_{\varepsilon_i}(c_i)$ $(i = 1, ..., p)$, neis osalõikudes kehtib võnkumise jaoks hinnang

$$\omega_k \le \sup_{x,x'\in[a,b]} \left|f(x) - f\left(x'\right)\right| = \sup_{x\in[a,b]} f(x) - \inf_{x\in[a,b]} f(x) =: \Omega \text{ (võnkumine lõigus } [a,b]\text{)}.$$

Jagame summa $\sum_{k=1}^{n} \omega_k \Delta x_k$ kaheks osasummaks $\sum_{k'} \omega_{k'}\Delta x_{k'} + \sum_{k''} \omega_{k''}\Delta x_{k''}$, kus esimeses on esindatud esimese ja teises teise klassi osalõigud. Esimese osasumma jaoks kehtib hinnang

$$\sum_{k'} \omega_{k'}\Delta x_{k'} \le \varepsilon \sum_{k'} \Delta x_{k'} < \varepsilon(b-a).$$

Teise osasumma puhul märgime, et
a) selliste osalõikude kogupikkus, mis tervenisti paiknevad ümbrustes $U_{\varepsilon_i}(c_i)$, ei saa olla suurem kui $p\varepsilon$ (selgitada!)✠, ja
b) selliste osalõikude kogupikkus, mis osaliselt lõikuvad ümbrustega $U_{\varepsilon_i}(c_i)$, ei saa olla suurem kui $2p\delta < 2p\varepsilon$ (nende arv ei ületa $2p$) (selgitada!)✠.
Järelikult

$$\sum_{k''} \omega_{k''}\Delta x_{k''} \le \Omega \sum_{k''} \Delta x_{k''} < 3p\Omega\varepsilon.$$

Kokkuvõttes kehtib eeldusel $\lambda(T) < \delta$ võrratus

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k \Delta x_k < \varepsilon(b - a + 3p\Omega),$$

mis tähendab, et $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0} \sum_{k=1}^{n} \omega_k \Delta x_k = 0$. Niisiis on funktsioon f integreeruv lõigus $[a,b]$. ■

5.5 Riemanni integraali omadused

Me alustame järgmise lihtsa järeldusega teoreemist 5.4.

Omadus 5.8 *Kui funktsioon f on integreeruv lõigus $[a,b]$, siis on ta integreeruv igas osalõigus $[a_1,b_1] \subset [a,b]$.*

Tõestus. Olgu ε suvaline positiivne arv. Kuna f on lõigus $[a,b]$ integreeruv funktsioon, siis saame valida sellise $\delta > 0$, et iga alajaotuse $T = T[x_0, ..., x_n]$ korral, mis rahuldab tingimust $\lambda(T) < \delta$, kehtib võrratus $S(T) - s(T) < \varepsilon$.

Olgu T_1 lõigu $[a_1,b_1]$ suvaline selline alajaotus, mille maksimaalse osalõigu pikkus on väiksem kui δ. Jaotame lõigud $[a,a_1]$ ning $[b_1,b]$ mingil viisil osalõikudeks, mille pikkused on samuti väiksemad kui δ. Koos jaotusega T_1 oleme niiviisi lõigus $[a,b]$ tekitanud alajaotuse T' omadusega $\lambda(T') < \delta$, seega $\sum_{T'} \omega_k \Delta x_k = S(T') - s(T') < \varepsilon$. (Siin $\sum_{T'} \omega_k \Delta x_k$ on alajaotusele T' vastav summa.) On selge, et

1) vahe $S(T_1) - s(T_1) = \sum_{T_1} \omega_k \Delta x_k$ sisaldab vaid osa liidetavaid summast $\sum_{T'} \omega_k \Delta x_k$ ja
2) kõik liidetavad summas $\sum_{T'} \omega_k \Delta x_k$ on mittenegatiivsed, seetõttu

$$S(T_1) - s(T_1) = \sum\nolimits_{T_1} \omega_k \Delta x_k \le \sum\nolimits_{T'} \omega_k \Delta x_k = S(T') - s(T') < \varepsilon.$$

Seega $S(T_1) - s(T_1) < \varepsilon$ iga alajaotuse korral lõigus $[a_1, b_1]$, mille osalõigu pikkused on väiksemad kui δ. Tähendab, $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0} (S(T_1) - s(T_1)) = 0$, ning väide järeldub teoreemist 5.4.
■

Riemanni integraali defineerimisel me lähtusime lõigust $[a, b]$, kusjuures eeldasime, et $a < b$. **Lepime kokku**, et

$$\int_a^a f(x)\,dx := 0 \quad \text{ja} \quad \int_a^b f(x)\,dx := -\int_b^a f(x)\,dx.$$

Omadus 5.9 *Kui funktsioon f on integreeruv lõikudes $[a, c]$ ja $[c, b]$, siis on ta integreeruv lõigus $[a, b]$ ja*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Tõestus. Väide kehtib ilmselt juhul $c = a$ või $c = b$, see tuleneb eelnenud kokkuleppest.

Vaatleme juhtu $a < c < b$. Olgu $\sigma(T) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k$ lõigu $[a, b]$ alajaotusele $T = T[x_0, ..., x_n]$ vastav integraalsumma. Kuna $c \in (a, b)$, siis c paikneb mingis osalõigus $[x_{i-1}, x_i]$. Moodustame summad

$$\sigma'(T) = \sum_{k=1}^{i-1} f(\xi_k)\,\Delta x_k + f(c)(c - x_{i-1}) \quad \text{ja} \quad \sigma''(T) = f(c)(x_i - c) + \sum_{k=i+1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k,$$

need on funktsiooni f integraalsummad vastavalt lõigus $[a, c]$ ja $[c, b]$. Eelduse kohaselt eksisteerivad piirväärtused

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} \sigma'(T) = \int_a^c f(x)\,dx \quad \text{ja} \quad \lim_{\lambda(T)\to 0} \sigma''(T) = \int_c^b f(x)\,dx.$$

Kuna

$$\sigma(T) = \sigma'(T) + \sigma''(T) + (f(\xi_i) - f(c))\,\Delta x_i$$

(veenduda!)✠ ja $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0} (f(\xi_i) - f(c))\,\Delta x_i = 0$ (selgitada!)✠, siis

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sigma(T) = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sigma'(T) + \lim_{\lambda(T)\to 0} \sigma''(T) = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Olgu nüüd $c > b$ (juhul $c < a$ on tõestus analoogiline). Eelduse kohaselt on funktsioon f integreeruv lõigus $[a, c]$, omaduse 5.8 põhjal siis ka lõigus $[a, b]$, kusjuures eelneva osa tõestuse kohaselt $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$, millest (tänu eelnenud kokkuleppele)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Väide on tõestatud. ■

Märkus 5. Omadustest 5.8 ja 5.9 saame lõigus $[a, b]$ integreeruva funktsiooni f korral suvaliste $c, c' \in [a, b]$ jaoks seose

$$\int_a^c f(x)\,dx - \int_a^{c'} f(x)\,dx = \int_{c'}^c f(x)\,dx \tag{5.7}$$

(põhjendada!)✠.

Omadus 5.10 *Olgu $a \le b$. Kui f on lõigus $[a, b]$ integreeruv funktsioon, siis ka seosega $|f|(x) := |f(x)|$ määratud funktsioon $|f|$ on integreeruv ja*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Tõestus. Olgu $S(T)$ ja $s(T)$ lõigu mingile alajaotusele $T = T[x_0, ..., x_n]$ vastavad Darboux' summad ning olgu ω_k funktsiooni f võnkumine osalõigus $[x_{k-1}, x_k]$. Paneme tähele, et

$$\begin{aligned}
\omega'_k &:= \sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} |f(x)| - \inf_{x'\in[x_{k-1},x_k]} |f(x')| = \sup_{x,\, x'\in[x_{k-1},x_k]} (|f(x)| - |f(x')|) \\
&\le \sup_{x,\, x'\in[x_{k-1},x_k]} |f(x) - f(x')| = \sup_{x,\, x'\in[x_{k-1},x_k]} (f(x) - f(x')) \\
&= \sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x) - \inf_{x'\in[x_{k-1},x_k]} f(x') = \omega_k \quad (k = 1, ..., n).
\end{aligned}$$

Funktsiooni $y = |f(x)|$ Darboux' summade $S'(T)$ ja $s'(T)$ jaoks järeldub siit, et

$$0 < S'(T) - s'(T) = \sum_{k=1}^n \omega'_k \Delta x_k \le \sum_{k=1}^n \omega_k \Delta x_k = S(T) - s(T) \to 0, \text{ kui } \lambda(T) \to 0,$$

tähendab, $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0} (S'(T) - s'(T)) = 0$. Järelikult on funktsioon $y = |f(x)|$ integreeruv lõigus $[a, b]$.

Antud alajaotuse T puhul kehtib integraalsummade jaoks võrratus

$$|\sigma(T)| = \left|\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\,\Delta x_k\right| \le \sum_{k=1}^n |f(\xi_k)|\,\Delta x_k =: \sigma'(T),$$

millest piirprotsessis $\lambda(T) \to 0$ saame seose $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$. ■

Märkus 6. Üldiselt, ilma eelduseta $a \le b$ kehtib valem

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \left|\int_a^b |f(x)|\,dx\right|$$

(selgitada!)✠.

Järgnevalt tõestame kolm integraali omadust, mis on seotud **aritmeetiliste tehetega**.

Omadus 5.11 *Kui funktsioonid f ja g on lõigus $[a,b]$ integreeruvad, siis ka nende summa $f+g$ on lõigus $[a,b]$ integreeruv ja*

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

Tõestus. Olgu $\sigma'(T) := \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k$ ja $\sigma''(T) := \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)\,\Delta x_k$ vastavalt funktsiooni f ja g integraalsumma lõigu $[a,b]$ mingi alajaotuse $T = T[x_0,...,x_n]$ korral. Siis

$$\sigma(T) := \sigma'(T) + \sigma''(T) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k + \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)\,\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} (f(\xi_k)+g(\xi_k))\,\Delta x_k$$

on funktsiooni $f+g$ integraalsumma. Kuna $\lim_{\lambda(T)\to 0} \sigma'(T) = \int_a^b f(x)\,dx$ ja $\lim_{\lambda(T)\to 0} \sigma''(T) = \int_a^b g(x)\,dx$ eksisteerivad, siis eksisteerib ka

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} \sigma(T) = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sigma'(T) + \lim_{\lambda(T)\to 0} \sigma''(T)$$

ning $\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$. ■

Omadus 5.12 *Kui funktsioon f on lõigus $[a,b]$ integreeruv, siis iga reaalarvu λ korral on ka funktsioon λf integreeruv ja*

$$\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx. \tag{5.8}$$

Tõestus. Iseseisvalt!✠ ■

Omaduste 5.11 ja 5.12 abil saab lihtsalt tõestada järgmise olulise väite.

Omadus 5.13 *Olgu funktsioon f lõigus $[a,b]$ integreeruv ja olgu $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ selline funktsioon, mis erineb funktsioonist f vaid lõpliku arvu argumentide korral. Siis g on lõigus $[a,b]$ integreeruv ning*

$$\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Tõestus. Tähistame $h(x) := g(x) - f(x)$ $(x \in [a,b])$ ja näitame, et $\int_a^b h(x)\,dx = 0$, siis omaduste 5.11 ja 5.12 põhjal on ka g integreeruv ning kehtib võrdus (5.8).

Funktsiooni h väärtused on nullist erinevad lõpliku arvu punktide $c_1, c_2, ..., c_p \in [a,b]$ korral, olgu $M := \max\{|h(c_i)| \mid i = 1,...,p\}$. Lõigu $[a,b]$ suvalise alajaotuse $T = T[x_0,...,x_n]$ puhul saab iga punkt c_i kuuluda üheaegselt ülimalt kahte osalõiku $[x_{k-1}, x_k]$, ülejäänud osalõikudes on h väärtused võrdsed nulliga. Seetõttu kehtib suvaliste $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1,...,n)$ korral võrratus

$$\left|\sum_{k=1}^{n} h(\xi_k)\,\Delta x_k\right| \le \sum_{k=1}^{n} |h(\xi_k)|\,\Delta x_k \le 2pM\lambda(T)$$

(selgitada!)✠. Seega

$$\int_a^b h(x)\,dx = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{k=1}^{n} h(\xi_k)\,\Delta x_k = 0.$$

■

Omadus 5.14 *Kui funktsioonid f ja g on lõigus $[a,b]$ integreeruvad, siis ka nende korrutis fg on lõigus $[a,b]$ integreeruv.*

Tõestus. Eelduse kohaselt on funktsioonid f ja g lõigus $[a,b]$ integreeruvad, seega on nad tõkestatud: leiduvad arvud $M > 0$ ja $K > 0$, et $|f(x)| \le M$ ning $|g(x)| \le K$ iga $x \in [a,b]$ puhul. Seejuures $|f(x)\,g(x)| \le MK \quad (x \in [a,b])$, tähendab, funktsioonide f ja g korrutis fg on tõkestatud funktsioon lõigus $[a,b]$. Olgu $T = T[x_0,...,x_n]$ lõigu $[a,b]$ mingi alajaotus, meie eesmärk on veenduda, et (vrd. märkus 3)

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{k=1}^{n} \omega_k(fg)\,\Delta x_k = 0,$$

kus $\omega_k(fg)$ tähistab funktsiooni fg võnkumist lõigus $[x_{k-1},x_k]$, s.t.

$$\begin{aligned}
\omega_k(fg) &= \sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} (f(x)\,g(x)) - \inf_{x\in[x_{k-1},x_k]} (f(x)\,g(x)) \\
&= \sup_{x,x'\in[x_{k-1},x_k]} \left(f(x)\,g(x) - f(x')\,g(x')\right) \\
&= \sup_{x,x'\in[x_{k-1},x_k]} \left|f(x)\,g(x) - f(x')\,g(x')\right|.
\end{aligned}$$

Me *näitame järgnevalt, et*

$$\omega_k(fg) \le M\omega_k(g) + K\omega_k(f) \quad (k = 1,...,n), \tag{5.9}$$

kus $\omega_k(f)$ ja $\omega_k(g)$ on vastavalt funktsiooni f ja g võnkumised osalõigus $[x_{k-1},x_k]$, sellest tuleneb

$$0 \le \sum_{k=1}^{n} \omega_k(fg)\,\Delta x_k \le M\sum_{k=1}^{n} \omega_k(g)\,\Delta x_k + K\sum_{k=1}^{n} \omega_k(f)\,\Delta x_k \to 0 \quad (\lambda(T)\to 0)$$

(põhjendada!)✠, mis tähendab funktsiooni fg integreeruvust lõigus $[a,b]$.

Olgu ξ ja η suvalised punktid lõigus $[x_{k-1},x_k]$, siis seosest

$$f(\xi)\,g(\xi) - f(\eta)\,g(\eta) = f(\xi)\,(g(\xi) - g(\eta)) + g(\eta)\,(f(\xi) - f(\eta))$$

saame

$$|f(\xi)\,g(\xi) - f(\eta)\,g(\eta)| \le M\,|g(\xi) - g(\eta)| + K\,|f(\xi) - f(\eta)|.$$

Järelikult

$$\begin{aligned}
\omega_k(fg) &= \sup_{\xi,\eta\in[x_{k-1},x_k]} |f(\xi)\,g(\xi) - f(\eta)\,g(\eta)| \\
&\le M \sup_{\xi,\eta\in[x_{k-1},x_k]} |g(\xi) - g(\eta)| + K \sup_{\xi,\eta\in[x_{k-1},x_k]} |f(\xi) - f(\eta)|,
\end{aligned}$$

niisiis kehtib võrratus (5.9). Väide on tõestatud. ■

Integraali definitsioonist tuleneb eeldusel $a < b$, et **lõigus** $[a, b]$ **mittenegatiivse integreeruva funktsiooni** f **integraal** $\int_a^b f(x)\,dx$ **on mittenegatiivne** (selgitada!)✠. Sellest omakorda saame Riemanni integraali *monotoonsuse omaduse:*

$$0 \le f(x) \le g(x) \quad (x \in [a, b]) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx \tag{5.10}$$

(põhjendada!)✠.

Omadus 5.15 ***(keskväärtusteoreem).*** *Kui funktsioonid f ja g on lõigus $[a, b]$ integreeruvad ning g säilitab märki, siis leidub selline arv μ, et*

$$m := \inf_{x\in[a,b]} f(x) \le \mu \le \sup_{x\in[a,b]} f(x) =: M$$

ja

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = \mu \int_a^b g(x)\,dx.$$

Tõestus. Omaduse 5.14 kohaselt on funktsioon fg lõigus $[a, b]$ integreeruv. Olgu (konkreetsuse mõttes) $g(x) \ge 0$ $(x \in [a, b])$. Võrratustest $m \le f(x) \le M$ järeldub $mg(x) \le f(x)\,g(x) \le Mg(x)$, integraali monotoonsuse omadusest (5.10) saame

$$m\int_a^b g(x)\,dx \le \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \le M\int_a^b g(x)\,dx,$$

kusjuures $\int_a^b g(x)\,dx \ge 0$. Kui $\int_a^b g(x)\,dx = 0$, siis $\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = 0$ ja väide kehtib (kontrollida!)✠. Kui $\int_a^b g(x)\,dx > 0$, siis võtame

$$\mu := \frac{\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx},$$

see arv rahuldab väite mõlemat tingimust (kontrollida!)✠. ■

Järeldus 5.16 *Olgu funktsioonid f ja g nagu omaduses 5.15, eeldame, et f on seejuures pidev. Siis leidub selline punkt $\xi \in [a, b]$, et*

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx.$$

Tõestus. Iseseisvalt! (Vrd. teoreem 3.6.)✠ ■

Järeldus 5.17 *Kui f on lõigus $[a, b]$ integreeruv funktsioon, siis leidub selline $\mu \in [m, M]$, et*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mu(b - a).$$

Tõestus. Isesisvalt!✠ ■

5.6 Diferentsiaal-integraalarvutuse põhiteoreem

Käesolevas punktis tõestame me teoreemi, mis seob omavahel matemaatilise analüüsi kaks haru, diferentsiaal- ja integraalarvutuse. Selle teoreemi kõige tähtsam järeldus, mida nimetatakse Newton-Leibnizi valemiks, on meile hästi tuntud eelnevatest matemaatilise analüüsi kursustest.

Olgu funktsioon f lõigus $[a,b]$ integreeruv. Omaduse 5.8 kohaselt eksisteerib iga $x \in [a,b]$ korral integraal

$$G(x) := \int_a^x f(t)\,dt. \tag{5.11}$$

Funktsiooni $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ abil kirjeldataksegi seost integraali ja tuletise vahel.

Teoreem 5.18 ***(põhiteoreem).*** *Olgu f lõigus $[a,b]$ integreeruv funktsioon.*
(a) Seosega (5.11) määratud funktsioon G on lõigus $[a,b]$ ühtlaselt pidev.
(b) Kui funktsioon f on vahemiku (a,b) mingis punktis c pidev, siis funktsioon G on punktis c diferentseeruv ja

$$G'(c) = f(c).$$

(c) Kui funktsioon f on punktis a paremalt pidev, siis eksisteerib funktsiooni G parempoolne tuletis $G'(a+)$ ja $G'(a+) = f(a)$.
(d) Kui funktsioon f on punktis b vasakult pidev, siis eksisteerib funktsiooni G vasakpoolne tuletis $G'(b-)$ ja $G'(b-) = f(b)$.

Tõestus. (a) Olgu ε suvaline positiivne arv. Kuna f on integreeruv, siis on ta tõkestatud lõigus $[a,b]$, s.t.

$$\exists M > 0 : |f(x)| \le M \quad (x \in [a,b]).$$

Võtame $\delta := \frac{\varepsilon}{M}$. Kui $x, x' \in [a,b]$ ning $|x - x'| < \delta$, siis, rakendades omadusi 5.9 ja 5.10, saame (vrd. märkus 5)

$$\begin{aligned}|G(x) - G(x')| &= \left|\int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{x'} f(t)\,dt\right| = \left|\int_{x'}^x f(t)\,dt\right| \\ &\le \left|\int_{x'}^x |f(t)|\,dt\right| \le M|x - x'| < M\delta = \varepsilon\end{aligned}$$

(kontrollida!)✠, s.t. G on lõigus $[a,b]$ ühtlaselt pidev funktsioon.

(b) Eeldame, et funktsioon f on punktis c pidev. Kui ε on suvaline positiivne arv, siis leidub selline $\delta > 0$, et

$$[|x - c| < \delta,\ \ x \in [a,b]] \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon.$$

Seostest

$$\frac{G(x) - G(c)}{x - c} - f(c) = \frac{\int_c^x f(t)\,dt}{x - c} - f(c) = \frac{\int_c^x (f(t) - f(c))\,dt}{x - c}$$

saame tingimusel $0 < |x - c| < \delta$ võrratuse

$$\left|\frac{G(x) - G(c)}{x - c} - f(c)\right| \le \frac{\left|\int_c^x |f(t) - f(c)|\,dt\right|}{|x - c|} \le \varepsilon\frac{x - c}{x - c} = \varepsilon$$

(selgitada!)✠. Teisi sõnu,

$$G'(c) = \lim_{x\to c} \frac{G(x) - G(c)}{x - c} = f(c).$$

(c) Eeldame, et funktsioon f on punktis a paremalt pidev. Siis suvalise positiivse arvu ε puhul leidub selline $\delta > 0$, et

$$[0 < x - a < \delta,\ \ x \in [a,b]] \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Seostest

$$\frac{G(x) - G(a)}{x - a} - f(a) = \frac{\int_a^x f(t)\,dt}{x - a} - f(a) = \frac{\int_c^x (f(t) - f(a))\,dt}{x - a}$$

saame tingimusel $0 < x - a < \delta$ võrratuse

$$\left|\frac{G(x) - G(a)}{x - a} - f(a)\right| \le \frac{\int_c^x |f(t) - f(c)|\,dt}{x - a} \le \varepsilon$$

(selgitada!)✠. Seega

$$G'(a+) = \lim_{x\to a+} \frac{G(x) - G(a)}{x - a} = f(a).$$

Väide (d) tõestatakse analoogiliselt väitega (c). ■

Järeldus 5.19 *Kui funktsioon f on pidev lõigus $[a,b]$, siis seosega* (5.11) *määratud funktsioon G on funktsiooni f algfunktsioon lõigus $[a,b]$, s.t. $G'(x) = f(x)$ iga $x \in [a,b]$ korral.*

Tõestus. Iseseisvalt!✠ ■

Näide 3. Vaatleme funktsiooni $f : [0,2] \to \mathbb{R}$, mis on määratud seosega

$$f(x) := \begin{cases} x, & \text{kui } 0 \le x < 1, \\ x + 1, & \text{kui } 1 \le x \le 2, \end{cases}$$

seega ei ole f punktis $x = 1$ pidev. Seosest

$$G(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \begin{cases} \frac{x^2}{2}, & \text{kui } 0 \le x < 1, \\ \frac{x^2}{2} + x - 1, & \text{kui } 1 \le x \le 2, \end{cases}$$

(selgitada!)✠ näeme, et $G : [0,2] \to \mathbb{R}$ on pidev funktsioon (veenduda!)✠. Teoreemi 5.18 kohaselt

$$G'(x) := \begin{cases} x, & \text{kui } 0 < x < 1, \\ x + 1, & \text{kui } 1 < x < 2, \end{cases}$$

(selgitada!)✠ ning

$$G'(0+) = \lim_{x\to 0+} \frac{G(x) - G(0)}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{x^2}{2} - 0}{x} = 0 = f(0),$$

$$G'(2-) = \lim_{x\to 2-} \frac{G(x) - G(0)}{x - 2} = \lim_{x\to 2-} \frac{\frac{x^2}{2} + x - 1 - 3}{x - 2} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 2-} (x + 4) = 3 = f(2).$$

Seejuures

$$\lim_{x\to 1-}\frac{G(x)-G(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1-}\frac{\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}}{x-1}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 1-}(x+1)=1,$$
$$\lim_{x\to 1+}\frac{G(x)-G(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+}\frac{\frac{x^2}{2}+x-1-\frac{1}{2}}{x-1}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 1-}(x+3)=2,$$

niisiis ei ole funktsioon G punktis $x=1$ diferentseeruv.

Järeldus 5.20 ***(Newton-Leibnizi valem).*** *Kui funktsioon f on pidev lõigus $[a,b]$, siis*

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)\,, \tag{5.12}$$

kus F on funktsiooni f mingi algfunktsioon.

Tõestus. Igal lõigus pideval funktsioonil on selles lõigus olemas algfunktsioon. Olgu F funktsiooni f mingi algfunktsioon. Järelduse 5.19 kohaselt on ka G funktsiooni f üks algfunktsioonidest, seega $G(x)=F(x)+C$ kus C on mingi konstant. Seosest $G(a)=0$ järeldub $C=-F(a)$. Tähendab, $G(x)=F(x)-F(a)$ $(x\in[a,b])$, siit saamegi võrduse (5.12). ■

Newton-Leibnizi valemi üldistus. Algfunktsioone leidub ka lõigus määratud funktsioonidel, mis ei ole selles lõigus pidevad. Osutub, et Newton-Leibnizi valem (5.12) on õige ka sel juhul. Kehtib järgmine väide.

Lause 5.21 *Kui lõigus $[a,b]$ integreeruval funktsioonil f on selles lõigus algfunktsioon F, siis kehtib valem* (5.12).

Tõestus. Olgu $T=T[x_0,...,x_n]$ lõigu $[a,b]$ mingi alajaotus. Eeldame, et funktsioon f on integreeruv lõigus $[a,b]$ ja F on tema algfunktsioon, s.t. $F'(x)=f(x)$ iga $x\in[a,b]$ korral. Kuna F on diferentseeruv lõigus $[a,b]$, siis on ta diferentseeruv igas osalõigus $[x_{k-1},x_k]$. Lagrange'i keskväärtusteoreemi (vt. pt. 4, lause 4.11) põhjal leidub vahemikus (x_{k-1},x_k) selline punkt ξ_k^0, et

$$F(x_k)-F(x_{k-1})=F'\left(\xi_k^0\right)(x_k-x_{k-1})=f\left(\xi_k^0\right)\Delta x_k\quad (k=1,...,n)\,.$$

Moodustame fikseeritud punktidele $\xi_1^0,...,\xi_n^0$ vastava integraalsumma

$$\sigma_0(T)=\sum_{k=1}^n f\left(\xi_k^0\right)\Delta x_k$$

ja paneme tähele, et

$$\sigma_0(T)=\sum_{k=1}^n\left(F(x_k)-F(x_{k-1})\right)=F(b)-F(a)$$

(kontrollida!)✠. Kuna f on integreeruv lõigus $[a,b]$, siis $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0}\sigma(T)=\int_a^b f(x)\,dx$ eksisteerib sõltumatult punktide $\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$ valikust $(k=1,...,n)$. Konkreetse valiku $\xi_k=\xi_k^0$ korral kehtib

$$\lim_{\lambda(T)\to 0}\sigma_0(T)=\int_a^b f(x)\,dx,$$

seega $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$. ■

Näide 4. Vaatleme funktsiooni f, kus

$$f(x) = \operatorname{sgn} x := \begin{cases} 1, & \text{kui } x > 0, \\ 0, & \text{kui } x = 0, \\ -1, & \text{kui } x < 0. \end{cases}$$

Kui F on funktsiooni f algfunktsioon mingis lõigus $[-a, b]$ $(a, b > 0)$, siis

$$F'(x) = \begin{cases} 1, & \text{kui } 0 < x \le b, \\ -1, & \text{kui } -a \le x < 0 \end{cases}$$

ehk

$$F(x) = \begin{cases} x + C_1, & \text{kui } 0 < x \le b, \\ -x + C_2, & \text{kui } -a \le x < 0. \end{cases}$$

F kui algfunktsioon on diferentseeruv, seega pidev kogu lõigus $[-a, b]$, tähendab $\lim\limits_{x\to 0-} F(x) = \lim\limits_{x\to 0+} F(x)$ ehk $C_1 = C_2 =: C$. Niisiis,

$$F(x) = \begin{cases} x + C, & \text{kui } 0 < x \le b \\ -x + C, & \text{kui } -a \le x < 0 \end{cases} = |x| + C \quad (-a \le x \le b).$$

Saame $\int_{-a}^b f(x)\,dx = b - a$.

5.7 Päratud integraalid

5.7.1 Lõpmatute rajadega integraal

Olgu funktsioon f määratud lõpmatus intervallis $[a, \infty)$. Kui
1) f on integreeruv igas lõigus $[a, l]$ $(l > a)$ ning
2) eksisteerib lõplik piirväärtus

$$\lim_{l\to\infty} \int_a^l f(x)\,dx, \tag{5.13}$$

siis seda piirväärtust nimetatakse *funktsiooni f päratuks integraaliks* rajades a-st ∞-ni ja tähistatakse

$$\int_a^\infty f(x)\,dx. \tag{5.14}$$

Analoogiliselt defineeritakse päratu integraal $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ (defineerida!)✠. Edasi,

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx := \int_{-\infty}^c f(x)\,dx + \int_c^\infty f(x)\,dx, \tag{5.15}$$

kui mõlemad päratud integraalid võrduse paremal poolel eksisteerivad mingi $c \in \mathbb{R}$ korral.

Nii nagu ridade korral, kõneldakse ka päratute integraalide korral koonduvatest ja hajuvatest integraalidest. Iga funktsiooni f puhul, mis on igas lõigus $[a, l]$ $(l > a)$ integreeruv, võime formaalselt vaadelda integraali (5.14). Kui eksisteerib piirväärtus (5.13), siis öeldakse, et *päratu integraal* (5.14) *koondub*, vastasel juhul nimetatakse teda *hajuvaks.*

Märkus 7. Olgu funktsioon f igas osalõigus $[a,l]$ $(l \geq a)$ integreeruv, siis **integraal $\int_a^\infty f(x)\,dx$ koondub parajasti siis, kui $\int_{a_1}^\infty f(x)\,dx$ koondub iga $a_1 \geq a$ korral,** see tuleneb seosest

$$\int_a^l f(x)\,dx = \int_a^{a_1} f(x)\,dx + \int_{a_1}^l f(x)\,dx$$

(selgitada!)✠. Samasugune väide kehtib muidugi ka integraali $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ puhul. Siit järeldub, et **kui päratu integraal (5.15) koondub, siis ei sõltu selle väärtus arvu $c \in R$ valikust.**

Näide 5. Vaatleme päratut integraali

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^q}dx, \tag{5.16}$$

kus $q > 0$ ja $a > 0$. Juhul $q = 1$ on $F(l) := \int_a^l \frac{1}{x^q}dx = \ln l - \ln a$ ja lõplikku piirväärtust $\lim\limits_{l\to\infty} F(l)$ ei eksisteeri. Kui $q \neq 1$, siis $F(l) = \frac{1}{(1-q)l^{q-1}} - \frac{1}{(1-q)a^{q-1}}$ ja lõplik piirväärtus $\lim\limits_{l\to\infty} F(l)$ on olemas parajasti siis, kui $q > 1$. Niisiis, **integraal** (5.16) **koondub parajasti siis, kui** $q > 1$.

Olgu $f(x) \geq 0$ iga $x \geq a$ korral, eeldame, et f on igas osalõigus $[a,l]$ $(l \geq a)$ integreeruv. Tähistame $F(l) := \int_a^l f(x)\,dx$, funktsioon $F : [a_1,\infty) \to \mathbb{R}$ on intervallis $[a_1,\infty)$ kasvav ja mittenegatiivne: kui $l \geq a$, siis $F(l) \geq 0$ (vrd. implikatsioonile (5.10) eelnev märkus), ning

$$a \leq l_1 \leq l_2 \Rightarrow F(l_2) = F(l_1) + \int_{l_1}^{l_2} f(x)\,dx \geq F(l_1).$$

Lause 5.22 *Olgu $f(x) \geq 0$ iga $x \geq a$ korral, eeldame, et f on igas osalõigus $[a,l]$ $(l \geq a)$ integreeruv. Piirväärtus $\lim\limits_{l\to\infty} F(l) = \int_a^\infty f(x)\,dx$ eksisteerib parajasti siis, kui F on tõkestatud intervallis $[a,\infty)$, sel juhul $\lim\limits_{l\to\infty} F(l) = \sup\{F(l) \mid l \in [a,\infty)\}$.*

Tõestus. Kui $\lim\limits_{l\to\infty} F(l) =: I$ eksisteerib, siis iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $l_0 \geq a$ omadusega

$$l \geq l_0 \Rightarrow F(a) \leq F(l_0) \leq F(l) < I + \varepsilon$$

(selgitada!)✠, seega $F(a) \leq F(l) < I + \varepsilon$ iga $l \in [a,\infty)$ puhul. Niisiis on F intervallis $[a,\infty)$ tõkestatud.

Vastupidi, kui $\{F(l) \mid l \in [a,\infty)\}$ on tõkestatud hulk, siis eksisteerib

$$M := \sup\{F(l) \mid l \in [a,\infty)\}.$$

Ülemise raja definitsiooni kohaselt leidub iga $\varepsilon > 0$ korral selline $l_0 \geq a$, et $F(l_0) < M - \varepsilon$, ja tänu funktsiooni F monotoonsusele saame

$$M - \varepsilon < F(l_0) \leq F(l) \leq M < M + \varepsilon \quad (l \geq l_0)$$

ehk $|F(l) - M| < \varepsilon$ $(l \geq l_0)$, s.t. $\lim\limits_{l\to\infty} F(l) = M$. ∎

Lause 5.22 ja märkuse 7 abil saab lihtsalt tõestada järgmise **lõpmatute rajadega integraalide võrdluslause.**

Lause 5.23 ***(võrdluslause)***. *Kui funktsioonid f ja g on igas lõigus $[a,l]$ $(l \geq a)$ integreeruvad ning leidub $a_1 \geq a$, et $0 \leq f(x) \leq g(x)$ iga $x \in [a_1,\infty)$ korral, siis integraali $\int_a^\infty g(x)\,dx$ koonduvusest järeldub integraali $\int_a^\infty f(x)\,dx$ koonduvus. Kui integraal $\int_a^\infty f(x)\,dx$ hajub, siis hajub ka integraal $\int_a^\infty g(x)\,dx$.*

Tõestus. Pidades silmas märkust 7, võime lähtuda eeldusest $a = a_1$ (selgitada!)✠. Tähistame $G(l) := \int_a^l g(x)\,dx$ $(l \in [a,\infty))$, siis eeldusest $0 \leq f(x) \leq g(x)$ $(x \in [a,\infty))$ saame $F(l) \leq G(l)$ $(l \in [a,\infty))$ (vrd. (5.10)). Kui eksisteerib $\int_a^\infty g(x)\,dx = \lim\limits_{l\to\infty} G(l)$, siis lause 5.22 põhjal on funktsioon G tõkestatud intervallis $[a,\infty)$, järelikult on ka funktsioon F samas intervallis tõkestatud, siis lause 5.22 kohaselt eksisteerib $\lim\limits_{l\to\infty} F(l) = \int_a^l f(x)\,dx$.

Kui $\int_a^\infty f(x)\,dx$ hajub, siis $\{F(l) \mid l \in [a,\infty)\}$ on tõkestamata, järelikult on tõkestamata ka $\{G(l) \mid l \in [a,\infty)\}$, s.t. $\int_a^\infty g(x)\,dx$ hajub. ■

Näide 6. Integraal $\int_1^\infty \frac{\cos^2 x}{1+x^2}dx$ on koonduv, sest

$$0 \leq \frac{\cos^2 x}{1+x^2} < \frac{1}{x^2} \quad (x \in [1,\infty))$$

ja $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ koondub (selgitada!)✠.

5.7.2 Tõkestamata funktsiooni päratu integraal

Olgu funktsioon $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ **punkti** b **igas vasakpoolses ümbruses** $(b-\delta,b)$ **tõkestamata.** Eeldame, et f on igas osalõigus $[a,l]$ $(a < l < b)$ integreeruv, siis ka tõkestatud. Kui eksisteerib

$$\lim_{l\to b-} \int_a^l f(x)\,dx, \tag{5.17}$$

siis nimetame seda piirväärtust funktsiooni f päratuks integraaliks rajades a-st b-ni ja tähistame (samamoodi kui tavalist Riemanni integraali) $\int_a^b f(x)\,dx$. Nagu lõpmatute rajadega integraalide puhul, räägime ka siin päratu integraali koonduvusest ja hajuvusest vasatavalt sellele, kas piirväärtus (5.17) eksisteerib või mitte.

Analoogiliselt defineeritakse päratu integraal juhul, kui funktsioon f on **punkti** a **igas parempoolses ümbruses** $(a,a+\delta)$ **tõkestamata.** Kui f on **tõkestamata nii punkti** a **kui ka punkti** b **ümbruses,** siis defineerime päratu integraali

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_a^c f(x)\,dx.$$

Näide 7. Vaatleme integraali

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^q} \tag{5.18}$$

kus $a < b$ ja $q > 0$. Juhul $q = 1$ on $F(l) := \int_a^l \frac{dx}{(b-x)^q} = \ln(b-a) - \ln(b-l)$ ning $\lim\limits_{l\to b-} F(l) = \infty$. Kui $q \neq 1$, siis $F(l) = \frac{1}{1-q}(b-a)^{1-q} - \frac{1}{1-q}(b-l)^{1-q}$ ning $\lim\limits_{l\to b-} F(l)$ eksisteerib parajasti tingimusel $q < 1$. Niisiis, integraal (5.18) koondub parajasti siis, kui $q < 1$.

Analoogiliselt lausega 5.23 tõestatakse järgmine võrdluslause.

Lause 5.24 ***(võrdluslause)***. *Kui funktsioonid f ja g on igas lõigus $[a,l]$ $(a<l<b)$ integreeruvad ning leidub $a_1 \in (a,b)$, et $0 \leq f(x) \leq g(x)$ iga $x \in [a_1,b)$ korral, siis integraali $\int_a^b g(x)\,dx$ koonduvusest järeldub integraali $\int_a^b f(x)\,dx$ koonduvus ning integraali $\int_a^\infty f(x)\,dx$ hajuvusest integraali $\int_a^\infty g(x)\,dx$ hajuvus.*

Näide 8. Integraal $\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}$ koondub, sest

$$\frac{1}{x\sqrt{3x^2-2x-1}} = \frac{1}{x\sqrt{3x+1}\sqrt{x-1}} \leq \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \quad (x \in (1,2])$$

ja integraal $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$ koondub (selgitada!)✠.

5.8 Wallise valem ja Euler-Poissoni integraal

5.8.1 Wallise valem

Tähistame

$$J_m := \int_0^{\pi/2} \sin^m x dx \quad (m = 0, 1, ...)$$

ning paneme tähele, et $J_0 = \frac{\pi}{2}$. Kui $m > 0$, siis kasutame J_m arvutamiseks ositi integreerimise valemit

$$\int_a^b u dv = uv|_a^b - \int_a^b v du.$$

Selle kohaselt

$$\begin{aligned} J_m &= \int_0^{\pi/2} \sin^{m-1} x d(-\cos x) = -\sin^{m-1} x \cos x|_0^{\pi/2} + (m-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{m-2} x \cos^2 x dx \\ &= (m-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{m-2} x dx - (m-1)\int_0^{\pi/2} \sin^m x dx = (m-1)J_{m-2} - (m-1)J_m \end{aligned}$$

ehk

$$J_m = \frac{m-1}{m} J_{m-2}.$$

Juhul $m = 2n$ saame viimast seost kasutades

$$J_{2n} = \frac{(2n-1)(2n-3)...3\cdot 1}{2n(2n-2)...4\cdot 2}\frac{\pi}{2},$$

juhul $m = 2n+1$ aga

$$J_{2n+1} = \frac{2n(2n-2)...4\cdot 2}{(2n+1)(2n-1)...3\cdot 1}.$$

Kasutades tähistust

$$m!! := \begin{cases} (2n)(2n-2)...4\cdot 2, & \text{kui } m = 2n, \\ (2n+1)(2n-1)...3\cdot 1, & \text{kui } m = 2n+1, \end{cases}$$

saame tulemuse üles kirjutada kujul

$$\int_0^{\pi/2} \sin^m x dx = \begin{cases} \frac{(m-1)!!}{m!!}\frac{\pi}{2}, & \text{kui } m \text{ on paarisarv,} \\ \frac{(m-1)!!}{m!!}, & \text{kui } m \text{ on paaritu arv.} \end{cases} \tag{5.19}$$

Saadud seose abil tõestame järgnevalt **Wallise valemi**

$$\frac{\pi}{2} = \lim_n \frac{1}{2n+1}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 .$$

Lähtudes võrratustest

$$\sin^{2n+1} x \le \sin^{2n} x \le \sin^{2n-1} x \quad (x \in [0, \pi/2])$$

(põhjendada!)✠, saame

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x dx \ \le \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x dx \ \le \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-1} x dx$$

(põhjendada!)✠. Valemi (5.19) kohaselt

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \le \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2} \le \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}.$$

Jagades võrratuse liikmeid arvuga $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$, saame

$$x_n := \frac{1}{2n+1}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \le \frac{\pi}{2} \le \frac{1}{2n}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 =: z_n \quad (n \in \mathbb{N}) .$$

Seejuures

$$z_n - x_n = \frac{1}{2n}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \le \frac{1}{2n}\frac{\pi}{2} \to 0 \quad (n \to \infty) ,$$

mistõttu seostest

$$0 \le \frac{\pi}{2} - x_n \le z_n - x_n \to 0 \ \ (n \to \infty)$$

järeldub $\lim\limits_n x_n = \lim\limits_n z_n = \frac{\pi}{2}$. Valem on tõestatud.

5.8.2 Euler-Poissoni integraal

Wallise valemit rakendatakse paljude keeruliste integraalide arvutamisel. Me leiame järgnevalt selle valemi abil **Euler-Poissoni integraali**

$$K := \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

väärtuse. Tegemist on päratu integraaliga, mis mängib tähtsat rolli tõenäosusteoorias.

Vaatleme kõigepealt funktsiooni

$$f(t) = (1+t)\, e^{-t}.$$

Uurides selle funktsiooni kasvamis- ja kahanemispiirkondi, on lihtne veenduda, et f saavutab oma maksimaalse väärtuse 1 punktis $t = 0$ (kontrollida!)✠, niisiis,

$$(1+t)\, e^{-t} < 1 \quad (t \ne 0) .$$

Võttes $t := \pm x^2$, saame võrratused $\left(1-x^2\right)e^{x^2} < 1$ ning $\left(1+x^2\right)e^{-x^2} < 1$, seega

$$1 - x^2 < e^{-x^2} < \frac{1}{1+x^2} \quad (x > 0)$$

(kontrollida!)✠. Suvalise $n \in \mathbb{N}$ korral tuleneb siit

$$\left(1-x^2\right)^n < e^{-nx^2} \quad (x \in (0,1)) \quad \text{ja} \quad e^{-nx^2} < \frac{1}{\left(1+x^2\right)^n} \quad (x > 0)\,.$$

Integreerime esimest võrratust rajades 0-st 1-ni ja teist 0-st ∞-ni:

$$\int_0^1 \left(1-x^2\right)^n dx \le \int_0^1 e^{-nx^2} dx < \int_0^\infty e^{-nx^2} dx \le \int_0^\infty \frac{1}{\left(1+x^2\right)^n} dx \tag{5.20}$$

(põhjendada!)✠. Muutujavahetuse $t := \sqrt{n}x$ abil on lihtne veenduda, et

$$\int_0^\infty e^{-nx^2} dx = \frac{1}{\sqrt{n}} K \tag{5.21}$$

(kontrollida!)✠. Valemist (5.19) saame muutujavahetust $x = \cos t$ kasutades

$$\int_0^1 \left(1-x^2\right)^n dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} t dt = \frac{2n!!}{(2n+1)!!} \tag{5.22}$$

(kontrollida!)✠ ning muutujavahetuse $x = \cot t$ abil

$$\int_0^\infty \frac{1}{\left(1+x^2\right)^n} dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-2} t dt = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \frac{\pi}{2} \tag{5.23}$$

(kontrollida)!✠. Seostest (5.20) - (5.23) järeldub

$$\sqrt{n} \frac{2n!!}{(2n+1)!!} < K \le \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \frac{\pi}{2} \sqrt{n} \quad (n \in \mathbb{N})\,,$$

kust omakorda saame

$$x_n := \frac{n}{2n+1} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{2n!!}{(2n-1)!!}\right)^2 < K^2 \le \frac{n}{2n-1} (2n-1) \left(\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\right)^2 \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 =: z_n$$

(kontrollida!)✠. Wallise valemi kohaselt

$$\lim_n x_n = \lim_n \frac{n}{2n+1} \lim_n \frac{1}{2n+1} \left(\frac{2n!!}{(2n-1)!!}\right)^2 = \frac{\pi}{4}$$

ja

$$\lim_n z_n = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \lim_n \frac{n}{2n-1} \lim_n (2n-1) \left(\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\right)^2 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{1}{2} \frac{2}{\pi} = \frac{\pi}{4},$$

tähendab, $K^2 = \frac{\pi}{4}$ ehk

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

6 Funktsionaaljadad ja -read

6.1 Funktsionaaljada ühtlane koonduvus

Olgu (f_k) selline funktsioonide jada, kus kõik funktsioonid f_k on määratud mingis mittetühjas hulgas $D \subset \mathbb{R}$. Sellist jada nimetame edaspidi (hulgas D määratud) *funktsionaaljadaks.*

Punktiviisi koonduvus. Definitsioon. Ütleme, et funktsionaaljada (f_k) *koondub punktiviisi* hulgas D, kui iga $x \in D$ korral eksisteerib piirväärtus

$$f(x) := \lim_{k\to\infty} f_k(x). \tag{6.1}$$

Seos (6.1) määrab hulgas D funktsiooni f , mida nimetatakse funktsionaaljada (f_k) *piirväärtuseks.* Lühidalt kirjutame "$f_k \to f$ *punktiviisi hulgas* D".

PÕHIPROBLEEM koonduvate funktsionaaljadade uurimisel on küsimus vastava piirväärtuse või summa **analüütilistest omadustest.** *Kas funktsioonide f_k $(k \in \mathbb{N})$ tähtsamad omadused (pidevus, diferentseeruvus, integreeruvus jm.) kanduvad üle ka piirväärusele* (6.1)? *Millised on seosed tuletiste f_k' ja f' vahel või siis vastavate integraalide $\int_a^b f_k(x)\,dx$ ja $\int_a^b f(x)\,dx$ vahel, kui $D = [a,b]$?* Allpool toodavad lihtsad näited funktsionaaljadadest annavad tunnistust sellest, et üldjuhul neile küsimustele vastust otsides **ei ole põhjust olla optimistlik.**

Näited. 1. Olgu $f_n(x) := \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^2}{(1+x^2)^k}$ $(x \in \mathbb{R},\ n = 0,1,...)$, siis funktsioonid f_n on hulgas $\mathbb{R}$ pidevad (kontrollida!)✠. Näitame, et *funktsionaaljada* (f_n) *koondub kogu arvteljel* $\mathbb{R}$, *kuid tema piirväärtus f omab katkevuspunkti.*

Paneme tähele, et

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x = 0, \\ \frac{1}{1+x^2}, & \text{kui } x \neq 0, \end{cases}$$

seejuures

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1 \neq 0 = f(0).$$

Seega ei ole f punktis $x = 0$ pidev.

Niisiis, **punktiviisis koonduvate pidevate funktsioonide jada piirväärtus ei pruugi olla pidev**. Pidades silmas, et funktsioonid f_n on hulgas $\mathbb{R}$ diferentseeruvad, saame näite 1 põhjal öelda, et **punktiviisis koonduvate diferentseeruvate funktsioonide jada piirväärtus ei pruugi olla pidev, ammugi siis diferentseeruv.**

2. Veendume, et ka siis, **kui diferentseeruvate funktsioonide jada** (f_k) **koondub punktiviisi hulgas D, ei pruugi kehtida võrdus** $\lim\limits_{k\to\infty} f_k'(x) = \left(\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)\right)'$. Olgu $f_k := \frac{\sin kx}{\sqrt{k}}$ $(x \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N})$. *Leiame $f(x) := \lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)$ ja näitame, et $f'(0) \neq \lim\limits_{k\to\infty} f_k'(0)$.*

Selge, et $f(x) = 0$, seega $f'(x) = 0$ iga $x \in \mathbb{R}$ korral. Seejuures $f_k'(x) = \sqrt{k}\cos kx$, mistõttu

$$\lim_{k\to\infty} f_k'(0) = \infty.$$

Niisiis, punktis $x = 0$ ei ole lõplikku piirväärtust $\lim\limits_{k\to\infty} f_k'(0)$, kuigi piirfunktsioon f on selles punktis diferentseeruv.

3. Selle näitega veendume, et **üldjuhul**

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^1 f_k(x)\,dx \neq \int_0^1\left(\lim_{k\to\infty} f_k(x)\right)dx,$$

ka siis, kui kõik siin esinevad piirväärtused ja integraalid eksisteerivad.

Olgu $f_k(x) := kx\left(1-x^2\right)^k$ $(x\in[0,1]\,,\ k\in\mathbb{N})$. Kõigepealt arvutame

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = x\lim_{k\to\infty} k\left(1-x^2\right)^k = x\lim_{k\to\infty}\frac{k}{\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^k} = 0$$

suvalise $x\in\mathbb{R}$ puhul (selgitada!)✠. Teisalt,

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\int_0^1 f_k(x)\,dx &= \lim_{k\to\infty} k\int_0^1 x\left(1-x^2\right)^k dx = -\frac{1}{2}\lim_{k\to\infty} k\int_0^1\left(1-x^2\right)^k d\left(1-x^2\right)\\ &= -\lim_{k\to\infty}\frac{k}{2(k+1)}\left[\left(1-x^2\right)^{k+1}\right]_0^1 = \lim_{k\to\infty}\frac{k}{2(k+1)} = \frac{1}{2}\\ &\neq 0 = \int_0^1\left[\lim_{k\to\infty} f_k(x)\right]dx.\end{aligned}$$

Etteruttavalt märgime, et see, kas koonduva funktsionaaljada funktsionaalsed omadused kanduvad üle tema piirväärtusele, sõltub eeskätt selle jada koonduvuse iseloomust, sellest, kui "hästi" see jada koondub ehk kui hästi saab piirväärtust f lähendada funktsioonidega f_k. Selgub, et "hea" koonduvus on oluliselt seotud **ühtlase koonduvuse mõistega.**

Ühtlane koonduvus. Definitsioon. Ütleme, et funktsionaaljada (f_k) *koondub funktsiooniks* f *ühtlaselt* hulgas D, kui

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N}\colon\ k\geq N\Rightarrow\left|f_k(x)-f(x)\right|<\varepsilon \textbf{ iga } x\in D \textbf{ korral.} \tag{6.2}$$

Lühidalt kirjutame sel juhul "$f_k\to f$ *ühtlaselt hulgas* D".

Võrdluseks kirjutame εN-keeles punktiviisi koonduvuse definitsiooni: funktsionaaljada (f_k) koondub funktsiooniks f *punktiviisi* hulgas D parajasti siis, kui

$$\forall x\in D\ \ \forall\varepsilon>0\ \exists N=N(x,\varepsilon)\in\mathbb{N}\colon\ k\geq N\Rightarrow\left|f_k(x)-f(x)\right|<\varepsilon.$$

Nende kahe tingimuse võrdlemisel on selge, et kehtib järgmine väide (selgitada!)✠.

Lause 6.1 *Iga hulgas D ühtlaselt koonduv funktsionaaljada koondub selles hulgas punktiviisi.*

Vahetult definitsioonist (6.2) saame ühtlase koonduvuse jaoks järgmise kriteeriumi.

Lause 6.2 *Funktsionaaljada (f_k) koondub hulgas D ühtlaselt funktsiooniks f parajasti siis, kui*

$$\sup_{x\in D}|f_k(x)-f(x)|\to 0 \ \ (k\to\infty).$$

Tõestus. *Tarvilikkus.* Eeldame, et $f_k\to f$ ühtlaselt hulgas D, olgu $\varepsilon>0$ suvaline. Definitsiooni (6.2) kohaselt leiame $N\in\mathbb{N}$ omadusega

$$k\geq N\Rightarrow |f_k(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2} \text{ iga } x\in D \text{ korral,}$$

siis

$$\sup_{x\in D}|f_k(x)-f(x)|\leq\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon, \text{ kui } k\geq N,$$

s.t. $\lim\limits_{k\to\infty}\sup\limits_{x\in D}|f_k(x)-f(x)|=0.$

Piisavus. Olgu $\lim\limits_{k\to\infty}\sup\limits_{x\in D}|f_k(x)-f(x)|=0$ ja olgu $\varepsilon>0$. Jada piirväärtuse definitsiooni kohaselt leidub $n\in\mathbb{N}$, et

$$k\geq N\Rightarrow \sup_{x\in D}|f_k(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

siis

$$k\geq N\Rightarrow |f_k(x)-f(x)|\leq\sup_{x\in D}|f_k(x)-f(x)|<\varepsilon \text{ iga } x\in D \text{ korral.}$$

See tähendabki, et $f_k\to f$ ühtlaselt hulgas D. ■

Näide 4. Toome lihtsa näite punktiviisi koonduvast funktsionaaljadast, mis ei koondu ühtlaselt. Olgu

$$f_k:[0,1]\to\mathbb{R},\ \ f_k(x):=x^k\ \ (k\in\mathbb{N}),$$

siis

$$f(x):=\lim_{k\to\infty}f_k(x)=\begin{cases}0, & \text{kui } x\in[0,1),\\ 1, & \text{kui } x=1.\end{cases}$$

Seega koondub jada (f_k) punktiviisi lõigus $[0,1]$ funktsiooniks f. See koonduvus ei ole ühtlane, sest

$$\sup_{x\in[0,1]}|f_k(x)-f(x)|=1\nrightarrow 0\ \ (k\to\infty).$$

Teoreem 6.3 ***(Cauchy kriteerium ühtlase koonduvuse jaoks).*** *Hulgas D määratud funktsionaaljada (f_k) koondub selles hulgas ühtlaselt parajasti siis, kui iga $\varepsilon>0$ korral leidub selline $N\in\mathbb{N}$, et*

$$k,m\geq N\Rightarrow |f_k(x)-f_m(x)|<\varepsilon \text{ iga } x\in D \text{ korral.} \tag{6.3}$$

Tõestus. *Tarvilikkus.* Eeldame, et $f_k\to f$ ühtlaselt hulgas D. Olgu $\varepsilon>0$ suvaline. Siis saab leida naturaalarvu N, et $|f_k(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{4}$ iga $k\geq N$ ja $x\in D$ puhul. Siit tuleneb tingimus (6.3):

$$k,m\geq N\Rightarrow |f_k(x)-f_m(x)|\leq|f_k(x)-f(x)|+|f(x)-f_m(x)|<\frac{\varepsilon}{2}\ \ (x\in D).$$

Piisavus. Kehtigu tingimus (6.3), siis iga fikseeritud $x \in D$ korral on $(f_k(x))$ Cauchy arvjada ning seega koonduv (selgitada!)✠. Tähistame $f(x) := \lim_{k\to\infty} f_k(x)$, seega $f_k \to f$ punktiviisi hulgas D. Näitame, et see koonduvus on ühtlane. Olgu $\varepsilon > 0$ ja olgu N valitud nii, et kehtiks tingimus (6.3). Minnes selles seoses iga fikseeritud $x \in D$ korral piirile protsessis $m \to \infty$, saame

$$|f_k(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad (k \geq N,\ x \in D).$$

Seega $f_k \to f$ ühtlaselt hulgas D. ■

6.2 Funktsionaaljada piirväärtuse omadused

Olgu järgnevas $D \subset \mathbb{R}$ (lõplik või lõpmatu) intervall. Olgu funktsioonid $f_k : D \to \mathbb{R}$ $(k \in \mathbb{N})$ pidevad, s.t.

$$\lim_{t\to x} f_k(t) = f_k(x) \text{ iga } x \in D \text{ ja } k \in \mathbb{N} \text{ korral.}$$

Eeldame, et funktsionaaljada (f_k) koondub hulgas D punktiviisi, s.t. eksisteerib lõplik piirväärtus

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) =: f(x) \text{ iga } x \in D \text{ korral.}$$

Siis funktsiooni f pidevus punktis $x \in D$ tähendab võrdust $\lim_{t\to x} f(t) = f(x)$ ehk

$$\lim_{t\to x}\lim_{k\to\infty} f_k(t) = \lim_{k\to\infty} f_k\left(\lim_{t\to x} t\right) = \lim_{k\to\infty}\lim_{t\to x} f_k(t).$$

Seega kehtib järgmine väide.

Lause 6.4 *Kui pidevate funktsioonide jada (f_k) koondub hulgas D punktiviisi funktsiooniks f, siis funktsiooni f pidevuseks hulgas D on tarvilik ja piisav tingimus*

$$\lim_{t\to x}\lim_{k\to\infty} f_k(t) = \lim_{k\to\infty}\lim_{t\to x} f_k(t) \quad (x \in D). \tag{6.4}$$

Teoreem 6.5 *Kui intervallis D pidevate funktsioonide jada (f_k) koondub ühtlaselt selles hulgas piirväärtuseks f, siis $f : D \to \mathbb{R}$ on pidev funktsioon.*

Tõestus. Fikseerime suvalise $z \in D$ ning kontrollime funktsiooni pidevust punktis z.

Tänu eeldusele ühtlase koonduvuse kohta kehtib järgmine tingmus:
(*) *iga $\varepsilon > 0$ ja indeksi N jaoks leidub indeks $k \geq N$, et $|f(x) - f_k(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ kõikide $x \in D$ korral.*
(Märgime, et tingimus (*) on nõrgem kui ühtlase koonduvuse definitsiooni tingimus (6.2) (selgitada!)✠.) Olgu $\varepsilon > 0$ ja $N := 1$, leiame indeksi k vastavalt tingimusele (*). Kuna f_k on punktis z pidev funktsioon, siis eksisteerib niisugune $\delta > 0$, et

$$|x - z| < \delta \Rightarrow |f_k(x) - f_k(z)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Kokkuvõttes, kui $|x - z| < \delta$, siis

$$|f(x) - f(z)| \leq |f_k(x) - f_k(z)| + |f(x) - f_k(x)| + |f(z) - f_k(z)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

seega on f pidev punktis z. Niisiis, funktsioon f on hulgas D pidev funktsioon. ■

Järgmine näide ütleb, et **ühtlane koonduvus ei ole tarvilik** tingimus punktiviisi koonduva funktsionaaljada piirväärtuseks oleva funksiooni pidevuseks.

Näide 5. Olgu $f_n(x) := \sin nx$, kui $0 \le x \le \frac{\pi}{n}$, ja $f_n(x) := 0$, kui $\frac{\pi}{n} < x \le \pi$ $(n \in \mathbb{N})$. Funktsionaaljada (f_n) koondub **punktiviisi (kuid mitte ühtlaselt)** pidevaks funktsiooniks f, kus $f(x) = 0$ hulgas $[0, \pi]$ (kontrollida!)✠.

Teoreemi 6.5 abil tõestame järgnevalt väited, mis kirjeldavad funktsionaaljada piirväärtuse diferentseerimise ning integreerimisega seotud omadusi. Seejuures kasutame me diferentsiaal- ja integraalarvutuse põhiteoreemi (vt. pt. 5, teoreem 5.18). Meenutame, et kui funktsioon f on lõigus $[a, b]$ integreeruv, siis eksisteerib

$$G(x) := \int_a^x f(t)\, dt \quad (x \in [a, b])$$

ning funktsioon G on lõigus $[a, b]$ pidev. Kui seejuures f on punktis $x_0 \in [a, b]$ pidev, siis G on punktis x_0 diferentseeruv ning $G'(x_0) = f(x_0)$.

Alustame järgmise lemmaga.

Lemma 6.6 *Kui lõigus $[a, b]$ pidevate funktsioonide jada (f_k) koondub ühtlaselt selles lõigus piirväärtuseks f, siis*

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^x f_k(t)\, dt = \int_a^x f(t)\, dt \quad \textit{ühtlaselt lõigus } [a, b].$$

Tõestus. Kuna $f_k \to f$ ühtlaselt lõigus $[a, b]$, siis lause 6.2 kohaselt

$$\max_{x\in[a,b]} |f_k(x) - f(x)| =: r_k \to 0 \quad (k \to \infty)$$

(selgitada!)✠, seega

$$\max_{x\in[a,b]} \left| \int_a^x f_k(t)\, dt - \int_a^x f(t)\, dt \right| \le (b - a)\, r_k \to 0 \quad (k \to \infty)$$

(kontrollida!)✠. Väide järeldub lausest 6.2. ■

Lemma 6.6 abil tõestame nüüd teoreemid piirileminekust integraali ja tuletise märgi all. Järgmine väide on vahetu järeldus lemmast 6.6 (selgitada!)✠.

Teoreem 6.7 ***(piirileminekust integraali märgi all).*** *Kui lõigus $[a, b]$ pidevate funktsioonide jada (f_k) koondub ühtlaselt selles lõigus funktsiooniks f, siis*

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b f_k(t)\, dt = \int_a^b f(t)\, dt.$$

Tõestus. Iseseisvalt!✠ ■

Teoreem 6.8 ***(piirileminekust tuletise märgi all).*** *Olgu (f_n) selliste funktsioonide jada, mis rahuldavad järgmisi tingimusi:*
1) iga funktsioon f_k $(k \in \mathbb{N})$ on lõigus $[a,b]$ pidevalt diferentseeruv,
2) leidub punkt $x_0 \in [a,b]$, et arvjada $(f_k(x_0))$ koondub,
3) tuletiste jada (f_k') koondub ühtlaselt lõigus $[a,b]$ mingiks funktsiooniks φ.
Siis funktsionaaljada (f_k) koondub ühtlaselt lõigus $[a,b]$ mingiks diferentseeruvaks funktsiooniks f, kusjuures

$$f'(x) = \varphi(x) \quad (x \in [a,b]). \tag{6.5}$$

Tõestus. Tähistame $A := \lim\limits_{k\to\infty} f_k(x_0)$ ja märgime, et

$$f_k(x) = f_k(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_k'(t)\,dt \quad (x \in [a,b], \quad k \in \mathbb{N}) \tag{6.6}$$

(põhjendada!)✠. Kuna $f_k' \to \varphi$ ühtlaselt lõigus $[a,b]$, siis lemma 6.6 kohaselt $\int_{x_0}^{x} f_k'(t)\,dt \to \int_{x_0}^{x} \varphi(t)\,dt$ ühtlaselt lõigus $[a,b]$. Seosest (6.6) saame, et $f_k(x) \to f(x)$ ühtlaselt lõigul $[a,b]$, kus $f(x) := A + \int_{x_0}^{x} \varphi(t)\,dt$ $(x \in [a,b])$. Viimasest seosest tuleneb ka võrdus (6.5). ■

6.3 Funktsionaaljada keskmine koonduvus

Eeldame, et funktsioonid f_k $(k \in \mathbb{N})$ ja f on lõigus $[a,b]$ integreeruvad.

Definitsioon. Öeldakse, et funktsionaaljada (f_k) *koondub keskmiselt* piirväärtuseks f lõigus $[a,b]$, kui

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b (f_k(x) - f(x))^2\,dx = 0.$$

Kui funktsionaalrea $\sum\limits_k f_k$ osasummade $s_n(x) := \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$ jada (s_n) koondub keskmiselt funktsiooniks f, siis ütleme, et rida $\sum\limits_k f_k$ koondub keskmiselt summaks f.

Lause 6.9 *Kui funktsionaaljada (f_k) koondub ühtlaselt funktsiooniks f lõigus $[a,b]$, siis $f_k \to f$ keskmiselt samas lõigus.*

Tõestus. Olgu ε suvaline positiivne arv. Kuna $f_k \to f$ ühtlaselt lõigus $[a,b]$, siis leidub selline indeks N, et

$$k \geq N \Rightarrow |f_k(x) - f(x)| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2(b-a)}} \quad (x \in [a,b])$$

(selgitada!)✠. Siit järeldub

$$\int_a^b (f_k(x) - f(x))^2\,dx \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \int_a^b dx = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad (k \geq N),$$

mis tähendabki keskmist koonduvust. ■

Samal ajal **keskmisest koonduvusest ei järeldu punktiviisi koonduvus**, ammugi siis ühtlane koonduvus.

Näide 6. Moodustame lõigu $[0,1]$ osalõikude jada I_n järgmisel viisil:

$I_1 := [0,1]$,
$I_2 := \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $I_3 := \left[\frac{1}{2}, 1\right]$,
$I_4 := \left[0, \frac{1}{4}\right]$, $I_5 := \left[\frac{1}{4}, \frac{2}{4}\right]$, $I_6 := \left[\frac{2}{4}, \frac{3}{4}\right]$, $I_7 := \left[\frac{3}{4}, 1\right]$,
....
$I_{2^n} := \left[0, \frac{1}{2^n}\right]$, $I_{2^n+1} := \left[\frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}\right]$, ... , $I_{2^{n+1}-1} := \left[1 - \frac{1}{2^n}, 1\right]$,
....
Defineerime funktsionaaljada (f_k), kus

$$f_k(x) := \begin{cases} 1, & \text{kui } x \in I_k, \\ 0, & \text{kui } x \notin I_k. \end{cases}$$

Kõigepealt näitame, et $f_k \to 0$ keskmiselt lõigus $[0,1]$. Tõepoolest, iga $k \in \mathbb{N}$ korral

$$\int_0^1 f_k(x)^2\, dx = \int_{I_k} dx = \text{lõigu } I_k \text{ pikkus},$$

seega $\int_0^1 f_k(x)^2\, dx \to 0$.

Teisalt, funktsionaaljada (f_k) *hajub igas punktis* $x_0 \in [0,1]$. Lihtne on näha, et lõikude jadas (I_k) leidub lõpmata palju selliseid, mis sisaldavad punkti x_0, kuid ka lõpmata palju selliseid, mis ei sisalda punkti x_0. Seetõttu sisaldab arvjada $(f_k(x_0))$ lõpmata palju liikmeid, mis võrduvad arvuga 1, ja lõpmata palju liikmeid, mis võrduvad arvuga 0. Niisugune jada hajub.

Teatavasti tohime me koonduvat pidevate funktsioonide funktsionaaljada liikmeti integreerida mingis lõigus, kui ta on selles lõigus ühtlaselt koonduv. Järgmine lause kinnitab, et kuigi keskmine koonduvus on oluliselt nõrgem tingimus, kui ühtlane koonduvus, on ta piisav eeldus liikmeti integreeruvuseks.

Lause 6.10 *Kui $f_k \to f$ keskmiselt lõigus $[a,b]$, siis $\lim\limits_k \int_a^b f_k(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx$.*

Tõestus. Olgu ε suvaline positiivne arv. Tänu eeldusele keskmisest koonduvusest, leidub indeks N, et

$$k \geq N \Rightarrow \int_a^b (f_k(x) - f(x))^2\, dx < \frac{\varepsilon^2}{b-a}. \tag{6.7}$$

Tähistame

$$A := (f_k(x) - f(x))\sqrt{\frac{b-a}{\varepsilon}}, \quad B := \sqrt{\frac{\varepsilon}{b-a}}$$

ning kasutame lihtsalt kontrollitavat võrratust $|A| \cdot |B| \leq \frac{A^2}{2} + \frac{B^2}{2}$. Saame

$$|f_k(x) - f(x)| \leq (f_k(x) - f(x))^2 \frac{b-a}{2\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)},$$

mistõttu

$$\int_a^b |f_k(x) - f(x)|\, dx \leq \frac{b-a}{2\varepsilon} \int_a^b (f_k(x) - f(x))^2\, dx + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Kui $k \geq N$, siis seosest (6.7) järeldub

$$\int_a^b |f_k(x) - f(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Kuna $\left|\int_a^b f_k(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| = \left|\int_a^b (f_k(x) - f(x))\,dx\right| \leq \int_a^b |f_k(x) - f(x)|\,dx$, siis

$$k \geq N \Rightarrow \left|\int_a^b f_k(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| < \varepsilon$$

ehk $\lim\limits_k \int_a^b f_k(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$. ■

6.4 Funktsionaaljada ühtlase koonduvuse tunnused

6.4.1 Dini teoreem funktsionaaljada ühtlasest koonduvusest

Lõigus ühtlaselt koonduva pidevate funktsioonide jada (f_n) piirväärtus f on selles lõigus pidev funktsioon (vrd. teoreem 6.5). Nagu selgus näitest 5, *ühtlane koonduvus ei ole üldjuhul tarvilik tingimus piirväärtuseks oleva funktsiooni pidevuseks.* Sellest annab tunnistust ka näide 3. Nagu seal näidatud, funktsioonide $f_k(x) := kx\left(1-x^2\right)^k$ $(x \in [0,1]\,,\ k \in \mathbb{N})$ jada koondub nullfunktsiooniks, mis on loomulikult pidev. Samal ajal $\lim\limits_{k\to\infty} \int_0^1 f_k(x)\,dx \neq \int_0^1 \left(\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)\right) dx$, millest teoreemi 6.7 põhjal järeldub, et koonduvus $f_k(x) \to 0$ $\ (x \in [0,1])$ ei ole ühtlane.

Järgmine teoreem kirjeldab **situatsiooni, kus tingimus ühtlasest koonduvusest on tarvilik piirväärtuseks oleva funktsiooni pidevuseks.**

Lause 6.11 ***(Dini tunnus funktsionaaljada ühtlaseks koonduvuseks).*** *Olgu (f_k) lõigus $[a,b]$ pidevate funktsioonide jada, mis koondub punktiviisi selles lõigus pidevaks funktsiooniks f. Kui jada (f_k) on lõigus $[a,b]$ monotoonne, siis $f_k \to f$ ühtlaselt lõigus $[a,b]$.*

Tõestus. Konkreetsuse mõttes olgu (f_k) lõigus $[a,b]$ kasvav jada, s.t. $f_k(x) \leq f_{k+1}(x)$ $(x \in [a,b]\,,\ k \in \mathbb{N})$. Tähistame $h_k := f - f_k$, siis h_k on iga $k \in \mathbb{N}$ korral lõigus $[a,b]$ pidev funktsioon, $h_k(x) \to 0$ ja $h_k(x) \geq h_{k+1}(x)$ $(x \in [a,b])$ (kontrollida!)✠. Näitame, et $h_k \to 0$ ühtlaselt lõigus $[a,b]$. Kuna (f_k) on kasvav, siis piisab veenduda, et iga $\varepsilon > 0$ puhul saab valida indeksi k_0 omadusega $h_{k_0}(x) < \varepsilon$ iga $x \in [a,b]$ korral (põhjendada!)✠.

Oletame vastuväiteliselt, et teatava $\varepsilon_0 > 0$ korral see tingimus ei ole täidetud. Siis iga $k \in \mathbb{N}$ jaoks leidub $x_k \in [a,b]$ omadusega $h_k(x_k) \geq \varepsilon_0$. Jada (x_k) on tõkestatud (selgitada!)✠, Bolzano-Weierstrassi teoreemi põhjal sisaldab ta koonduva osajada (x_{k_i}), olgu $c := \lim\limits_{i\to\infty} x_{k_i}$. Siis $c \in [a,b]$ (põhjendada!)✠ ja

$$\lim_{i\to\infty} h_n(x_{k_i}) = h_n(c) \quad (n \in \mathbb{N})$$

(selgitada!)✠. Teiselt poolt, iga $n \in \mathbb{N}$ puhul saab fikseerida nii suure i, et $k_i > n$. Sel juhul

$$h_n(x_{k_i}) \geq h_{k_i}(x_{k_i}) \geq \varepsilon_0,$$

kust protsessis $i \to \infty$ saame võrratuse $h_n(c) \geq \varepsilon_0$ iga $n \in \mathbb{N}$ jaoks. See on vastuolus eeldusega, mille kohaselt $h_k(x) \to 0$ lõigus $[a,b]$. Järelikult on meie vastuväiteline oletus väär. ■

6.4.2 Kvaasi-ühtlane koonduvus

Jääme sama probleemi juurde, mida me käsitlesime eelmises alapunktis. Kui lõigus $[a,b]$ pidevate pidevate funktsioonide jada (f_k) koondub punktiviisi funktsiooniks f, siis ühtlase koonduvuse puhul on f pidev funktsioon vaadeldavas lõigus. Teoreemi 6.5 tõestamisel rõhutasime, et tegelikult ei vaja me funktsiooni f pidevuse näitamiseks ühtlase koonduvuse tingimust tema täies ulatuses, piisas

tingmusest
(*) *iga* $\varepsilon > 0$ *ja indeksi* N *jaoks leidub indeks* $k > N$, *et* $|f(x) - f_k(x)| < \varepsilon$ *kõikide* $x \in [a, b]$ *korral*
(vt. teoreemi 6.5 tõestus). Saab näidata, et ka tingmus (*) ei ole selles kontekstis tarvilik. Kuid on võimalik kirjeldada sellist pidevate funktsionaaljadade koonduvust lõigus, mis on tõepoolest nii tarvilik kui ka piisav selleks, et piirväärtus oleks pidev funktsioon.

Definitsioon. Öeldakse, et funktsionaaljada (f_k) *koondub lõigus* $[a, b]$ *kvaasi-ühtlaselt* funktsiooniks f, kui iga fikseeritud $\varepsilon > 0$ ja indeksi $N \in \mathbb{N}$ korral saab lõigu $[a, b]$ katta lõpliku arvu vahemikega $(a_1, b_1), (a_2, b_2), ..., (a_n, b_n)$ nii, et iga $i = 1, 2, ..., n$ puhul võib valida indeksi $k_i > N$ omadusega

$$\forall x \in (a_i, b_i) : |f_{k_i}(x) - f(x)| < \varepsilon. \tag{6.8}$$

Järgmise teoreemi tõestamisel läheb meil vaja Heine-Boreli lemmat (vt. pt. 3, teoreem 3.27). Teine (oluliselt lihtsam) fakt, mida me tõestuses kasutame, on järgmine: *kui funktsioon* φ *on pidev punktis* z *ja* $|\varphi(z)| < \varepsilon$, *siis leidub punkti* z *selline ümbrus* $U_\delta(z)$, *et* $|\varphi(x)| < \varepsilon$ *kõikide* $x \in U_\delta(z)$ *korral* (kontrollida!)✠.

Lause 6.12 ***(Arzela teoreem kvaasi-ühtlasest koonduvusest).*** *Olgu* (f_k) *lõigus* $[a, b]$ *pidevate funktsioonide jada, mis koondub selles lõigus punktiviisi funktsiooniks* f. *Selleks, et funktsioon* f *oleks pidev lõigus* $[a, b]$, *on tarvilik ja piisav, et funktsionaaljada* (f_k) *koonduks funktsiooniks* f *kvaasiühtlaselt lõigus* $[a, b]$.

Tõestus. *Tarvilikkus.* Olgu $\varepsilon > 0$ ning olgu N suvaline indeks. Eeldame, et funktsioon f on pidev lõigu $[a, b]$ igas punktis. Siis ka funktsioonid $h_k := f_k - f \quad (k \in \mathbb{N})$ on pidevad (selgitada!)✠. Olgu z lõigu $[a, b]$ suvaline punkt. Tänu eeldusele punktiviisi koonduvusest saab valida indeksi $k(z) > N$ nii, et kehtiks võrratus $\left|h_{k(z)}(z)\right| < \varepsilon$. Funktsiooni $h_{k(z)}$ pidevuse tõttu punktis z saame leida ümbruse $U_\delta(z) := (z - \delta,\ z + \delta)$, et

$$\left|h_{k(z)}(x)\right| < \varepsilon \quad (x \in U_\delta(z)).$$

On selge, et vahemikud $U_\delta(z)$ $(z \in [a, b])$ katavad lõigu $[a, b]$. Heine-Boreli lemma kohaselt leidub nende hulgas lõplik arv vahemikke

$$U_\delta(z_1) =: (a_1, b_1),\ U_\delta(z_2) =: (a_2, b_2), ..., U_\delta(z_n) =: (a_n, b_n),$$

mis samuti katavad lõigu $[a, b]$. Võttes seejuures $k_i := k(z_i)$, saame tingimuse (17), s.t. $f_k \to f$ kvaasi-ühtlaselt lõigus $[a, b]$.

Piisavus. Eeldame, et $f_k \to f$ kvaasi-ühtlaselt lõigus $[a, b]$. Olgu $\varepsilon > 0$ ning N suvaline indeks. Valime vahemikud $(a_1, b_1), (a_2, b_2), ..., (a_n, b_n)$ ja indeksid $k_1, k_2, ..., k_n$ vastavalt kvaasi-ühtlase koonduvuse definitsioonile. Olgu $z \in [a, b]$ suvaline punkt, ta asub vähemalt ühes vahemikest $(a_1, b_1), (a_2, b_2), ..., (a_n, b_n)$, tähistame selle (a_{i_0}, b_{i_0}). Kui $x \in (a_{i_0}, b_{i_0})$, siis kvaasi-ühtlase koonduvuse definitsiooni järgi $\left|f_{k_{i_0}}(x) - f(x)\right| < \varepsilon$, loomulikult kehtib see võrratus ka $x = z$ korral. Valime $\delta > 0$ nii väikese, et 1) $U_\delta(z) \subset (a_{i_0}, b_{i_0})$ ja 2) kui $|x - z| < \delta$, siis $\left|f_{k_{i_0}}(x) - f_{k_{i_0}}(z)\right| < \varepsilon$. Siis iga $x \in U_\delta(z)$ puhul

$$\begin{aligned} |f(x) - f(z)| &\le \left|f_{k_{i_0}}(x)(x) - f_{k_{i_0}}(x)(z)\right| + \left|f(x) - f_{k_{i_0}}(x)(x)\right| + \left|f(z) - f_{k_{i_0}}(x)(z)\right| \\ &< \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon, \end{aligned}$$

järelikult f on punktis z pidev. ■

Märkus 1. Arzela teoreemist tuleneb eelmises punktis tõestatud Dini teoreem. Olgu (f_k) lõigus $[a,b]$ pidevate funktsioonide kasvav jada, mis koondub pidevaks funktsiooniks f. Arzela teoreemi kohaselt on koonduvus kvaasi-ühtlane. Olgu $\varepsilon > 0$ ja $N \in \mathbb{N}$ suvalised ning (a_1, b_1), (a_2, b_2), ..., (a_n, b_n) ja indeksid $k_1, k_2, ..., k_n$ valitud vastavalt kvaasi-ühtlase koonduvuse definitsioonile. Tähistame $k_0 := \max\{k_1, ..., k_n\}$. Kui $k > k_0$, siis tänu sellele, et funktsiooni $f - f_k$ (mittenegatiivsed) väärtused indeksi k kasvades kahanevad suvalise $x \in [a,b]$ puhul, kehtib

$$|f(x) - f_k(x)| = f(x) - f_k(x) < \varepsilon \quad (x \in [a,b])$$

(põhjendada!)✠. Seega $f_k \to f$ **ühtlaselt** lõigus $[a,b]$.

6.5 Funktsionaalridade ühtlane koonduvus

Olgu funktsioonid f_k $(k \in \mathbb{N})$ määratud mingis mittetühjas hulgas $D \subset \mathbb{R}$. Rida $\sum_k f_k$ nimetatakse hulgas D määratud *funktsionaalreaks.*

Punktiviisi koonduvus. Kui arvrida $\sum_k f_k(x)$ koondub iga $x \in D$ korral, siis ütleme, et funktsionaalrida $\sum_k f_k$ *koondub punktiviisi hulgas D.*

Tähistame

$$s_n(x) := \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \quad (x \in D,\, n \in \mathbb{N}).$$

Arvrea koonduvuse definitsiooni kohaselt koondub funktsionaalrida $\sum_k f_k$ punktiviisi hulgas D parajasti siis, kui

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) =: s(x) \text{ eksisteerib iga } x \in D \text{ korral.}$$

Funktsiooni $s : D \to \mathbb{R}$ nimetatakse funktsionaalrea $\sum_k f_k$ *summaks.* Niisiis, funktsionaalrida $\sum_k f_k$ koondub punktiviisi summaks s parajasti siis, kui $s_n \to s$ punktiviisi hulgas D.

Ühtlane koonduvus. Öeldakse, et funktsionaalrida $\sum_k f_k$ *koondub ühtlaselt summaks s hulgas D*, kui $s_n \to s$ ühtlaselt hulgas D.

Lause 6.13 ***(Weierstrassi koonduvustunnus)****. Hulgas D määratud funktsionaalrida* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ *koondub selles hulgas ühtlaselt, kui*

$$|f_k(x)| \le u_k \;\; (x \in D,\; k \in \mathbb{N}) \;\; ja \;\; \sum_k u_k < \infty. \tag{6.9}$$

Tõestus. Eeldame, et mittenegatiivsete liikmetega arvrida $\sum_k u_k$ koondub ja funktsionaalrida $\sum_k f_k$ rahuldab tingimust (6.9). Olgu $\varepsilon > 0$. Siis leidub selline indeks N, et kui

$m \geq n > N$, siis $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{m} u_k\right| < \varepsilon$ (vrd. pt. 2, lause 2.26). Arvestades seost (6.9), saame

$$|s_m(x) - s_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |f_k(x)| \leq \left|\sum_{k=n+1}^{m} u_k\right| < \varepsilon \quad (m \geq n > N).$$

Cauchy kriteeriumi kohaselt on rida $\sum\limits_k f_k(x)$ ühtlaselt koonduv. ∎

Märkus 2. Arvridade võrdluslause (vt. pt. 2, lause 2.30) kohaselt koondub tingimust (6.9) rahuldav funktsionaalrida $\sum\limits_k f_k$ hulgas D absoluutselt, s.t. $\sum\limits_k |f_k(x)| < \infty$ iga $x \in D$ korral.

Näide 7. Funktsionaalrida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx$ koondub ühtlaselt kogu arvteljel $\mathbb{R}$, kui $\sum\limits_k |a_k| < \infty$ (põhjendada!)✠.

Lause 6.14 *Intervallis D koonduva pidevate funktsioonide funktsionaalrea $\sum\limits_k f_k$ summa on selles hulgas pidev parajasti siis, kui*

$$\lim_{t\to x} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{t\to x} f_k(t) \quad (x \in D).$$

Tõestus. Olgu funktsioonid $f_k : D \to \mathbb{R}$ $(k \in \mathbb{N})$ pidevad, s.t. $\lim_{t\to x} f_k(t) = f_k(x)$ $(x \in D,\ k \in \mathbb{N})$, siis

$$\lim_{t\to x} s_n(t) = s_n(x) \text{ iga } x \in D \text{ ja } n \in \mathbb{N} \text{ korral.}$$

Kuna $\sum\limits_k f_k$ koondub punktiviisi summaks s, siis $s_n(x) \to s(x)$ iga $x \in D$ puhul. Lause 6.4 kohaselt on s punktis x pidev parajasti siis, kui $\lim_{t\to x} \lim_{n\to\infty} s_n(t) = \lim_{n\to\infty} \lim_{t\to x} s_n(t)$, s.t.

$$\lim_{t\to x} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \lim_{t\to x} f_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{t\to x} f_k(t).$$

∎

Funktsionaalrea summa pidevuse, diferentseeruvuse ja integreeruvuse uurimine taandub lihtsalt eespool tõestatud teoreemidele funktsionaaljadade vastavatest omadustest.

Teoreem 6.15 *Kui funktsioonid $f_k : D \to \mathbb{R}$ $(k \in \mathbb{N})$ on pidevad ja funktsionaalrida $\sum\limits_k f_k$ koondub ühtlaselt intervallis D, siis rea summa $s : D \to \mathbb{R}$ on pidev funktsioon.*

Tõestus. Eelduste kohaselt on $s_n : D \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ pidevad ja $s_n \to s$ ühtlaselt hulgas D (selgitada!)✠. Teoreemi 6.5 põhjal on s pidev funktsioon. ∎

Teoreem 6.16 *Olgu* $f_k : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(k \in \mathbb{N})$ *on pidevad ja koondugu funktsionaalrida* $\sum\limits_k f_k$ *ühtlaselt lõigus* $[a,b]$. *Siis*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x)\,dx = \int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\,dx.$$

Tõestus. Kuna $s_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ pidevad ja $s_n \to s$ ühtlaselt hulgas $[a,b]$ (selgitada!)✠, siis teoreemi 6.7 kohaselt

$$\int_a^b s(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b s_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_a^b f_k(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x)\,dx.$$

■

Teoreem 6.17 *Eeldame, et*
1) funktsioonid $f_k : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(k \in \mathbb{N})$ *on pidevalt diferentseeruvad,*
2) mingi $x_0 \in [a,b]$ *korral eksisteerib lõplik summa* $\sum\limits_k f_k(x_0) =: A$,
3) funktsionaalrida $\sum\limits_k f_k'$ *koondub lõigus* $[a,b]$ *ühtlaselt summaks* $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$.
Siis funktsionnalrida $\sum\limits_k f_k$ *koondub lõigus* $[a,b]$ *ühtlaselt summaks* s, *kusjuures funktsioon* $s : [a,b] \to \mathbb{R}$ *on diferentseeruv ning* $s'(x) = \varphi(x)$ *iga* $x \in [a,b]$ *korral.*

Tõestus. Eelduste põhjal on funktsioonid $s_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ pidevalt diferentseeruvad, $s_n(x_0) \to A$ $(n \in \mathbb{N})$ ning $s_n' \to \varphi$ ühtlaselt lõigus $[a,b]$. Teoreemist 6.8 saame, et funktsionaalrea $\sum\limits_k f_k$ summa $s : [a,b] \to \mathbb{R}$ on diferentseeruv ja $s' = \varphi$. ■

6.6 Funktsionaalrea ühtlase koonduvuse tunnused

6.6.1 Abeli tunnus funktsionaalrea ühtlaseks koonduvuseks

Kõige tuntum ja enam rakendatav kriteerium funktsionaalridade ühtlase koonduvuse testimiseks on eespool vaadeldud Weierstrassi tunnus, mis on esitatud lauses 6.13. Sellele lausele järgnev märkus 1 juhib meie tähelepanu asjaolule, et Weierstrassi tunnus on rakendatav vaid absoluutselt koonduvatele funktsionaalridadele, s.o. ridadele $\sum\limits_k f_k$, mis rahuldavad tingimust $\sum\limits_k |f_k(x)| < \infty$ iga argumendi x puhul vaadeldavast hulgast. Järgnev näide kinnitab, et **üldjuhul ei pruugi ühtlaselt koonduv funktsionaalrida olla absoluutselt koonduv.**

Näide 8. Vaatleme funktsionaalrida

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{x^2+k}. \tag{6.10}$$

Tegemist on vahelduvate märkidega reaga, selle koonduvuse uurimiseks on mugav kasutada Leibnizi tunnust (vt. pt. 2, lause 2.34). Selle tunnuse põhjal võib väita, et vaadeldav rida koondub punktiviisi kogu reaalteljel $\mathbb{R}$ (selgitada!)✠. Arvestades Leibnizi tunnuse tõestusele järgnevat märkust

4, saame rea (6.10) jääkliikme jaoks hinnangu

$$\left|\sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{x^2+k}\right| \leq \frac{1}{x^2+n+1} < \frac{1}{n+1} \quad (x \in \mathbb{R};\ n \in \mathbb{N}).$$

Niisiis, kui tähistame $s_n(x) := \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{x^2+k}$ ja $s(x) := \lim_n s_n(x)$ (rea (18) summa), siis

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |s_n(x) - s(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{x^2+k}\right| \leq \frac{1}{n+1} \to 0 \ \ (n \to \infty),$$

mis tähendab rea (6.10) ühtlast koonduvust kogu arvteljel.

Seevastu ei ole rida (6.10) üheski punktis x absoluutselt koonduv. Tõepoolest, iga fikseeritud $x \in \mathbb{R}$ korral saame valida indeksi $n(x)$ omadusega $x^2 \leq n(x)$ ja kui $n \geq n(x)$, siis

$$\frac{1}{x^2+n} \geq \frac{1}{2n}.$$

Kuna $\sum_n \frac{1}{n} = \infty$, siis hajub ka rida $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{k+1}}{x^2+k}\right|$.

Me tõestame järgnevalt kaks ühtlase koonduvuse tunnust, mida saab rakendada teatavat kindlat tüüpi funktsionaalridade puhul, kuid mis (erinevalt Weierstrassi tunnusest) ei eelda uuritava rea absoluutset koonduvust. Tegemist on tavaliste arvridade Abeli ja Dirichlet' koonduvustunnuste analoogidega (vrd. pt. 2, laused 2.37 ja 2.38). Nii nagu arvridade puhul, on ka siin lähtekohaks Abeli teisendus

$$\sum_{k=1}^{n} v_k u_k = \sum_{k=1}^{n-1} (v_k - v_{k+1}) s_k + v_n s_n,$$

kus $s_k := u_1 + ... + u_k$ $(k = 1, ...n)$ (vt. pt. 2, lemma 2.35), ja sellest tulenev hinnang

$$\left|\sum_{k=1}^{n} v_k u_k\right| \leq L(|v_1| + 2|v_n|) \ \ (n \in \mathbb{N}) \tag{6.11}$$

(vt. pt. 2, lause 2.36), mis kehtib näiteks siis, kui jada (v_k) on monotoonne ja tõkestatud ning rida $\sum_k u_k$ koondub.

Lause 6.18 ***(Abeli tunnus funktsionaalrea ühtlaseks koonduvuseks).*** *Olgu funktsionaaljada (g_k) hulgas D kas kasvav või kahanev ning ühtlaselt tõkestatud, s.t.*

$$g_k(x) \leq g_{k+1}(x) \quad (\text{või } g_k(x) \geq g_{k+1}(x)) \tag{6.12}$$

ja

$$\exists M > 0 : |g_k(x)| \leq M \tag{6.13}$$

kõikide $x \in D$ ja $k \in \mathbb{N}$ korral. Kui funktsionaalrida $\sum_k f_k$ koondub ühtlaselt hulgas D, siis ka $\sum_k f_k g_k$ koondub hulgas D ühtlaselt.

Tõestus. Eeldame tingimuste (6.12) ja (6.13) täidetust, olgu ε suvaline positiivne arv. Meie eesmärk on leida niisugune $N \in \mathbb{N}$, et kehtiks tingimus

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)\, g_k(x) \right| < \varepsilon \quad (x \in D, \ \ m > n \geq N)\,, \tag{6.14}$$

Cauchy kriteeriumi kohaselt tähendab see rea $\sum_k f_k g_k$ ühtlast koonduvust hulgas D.

Kuna rida $\sum_k f_k$ koondub ühtlaselt, siis Cauchy kriteeriumi põhjal saab fikseerida sellise $N \in \mathbb{N}$, et

$$m > n \geq N \ \Rightarrow |f_{n+1}(x) + ... + f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{3M} \quad (x \in D)\,.$$

Kasutame osasummade $\sum\limits_{k=n+1}^{m} f_k(x)\, g_k(x) = \sum\limits_{k=1}^{m-n} f_{n+k}(x)\, g_{n+k}(x)$ hindamiseks valemit (6.11), võttes seal $L := \frac{\varepsilon}{3M}$:

$$\begin{aligned}\left| \sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)\, g_k(x) \right| &= \left| \sum_{k=1}^{m-n} f_{n+k}(x)\, g_{n+k}(x) \right| \leq \sum_{k=1}^{m-n} |f_{n+k}(x)\, g_{n+k}(x)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3M}\left(|g_{n+1}(x)| + 2\,|g_m(x)|\right) \leq \varepsilon \ \ (m > n \geq N,\, x \in D)\,.\end{aligned}$$

Lause on tõestatud. ■

Näide 9. Tõestame, et

$$\lim_{x \to 1-} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} . \frac{x^k}{1+x^k} = \frac{1}{2} \ln 2.$$

Võtame $f_k(x) := \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ ja $g_k(x) := \frac{x^k}{1+x^k}$ $(k \in \mathbb{N},\, x \in (0,1))$. Rida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ on arvrida, teda võib vaadelda lõigus $(0,1)$ ühtlaselt koonduva funktsionaalreana (selgitada!)✠. Kuna $\left|\frac{x^k}{1+x^k}\right| < 1$ ja $\frac{x^k}{1+x^k} \geq \frac{x^{k+1}}{1+x^{k+1}}$ kõikide $k \in \mathbb{N}$ ja $x \in (0,1)$ puhul (kontrollida!)✠, siis Abeli tunnuse eeldused on täidetud, mistõttu rida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} . \frac{x^k}{1+x^k}$ koondub ühtlaselt. Seetõttu tohime minna piirile summamärgi all:

$$\lim_{x \to 1-} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} . \frac{x^k}{1+x^k} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \frac{1}{2} \ln 2$$

(viimane võrdus tuleneb funktsiooni $\ln(1+x)$ rittaarendusest).

6.6.2 Dirichlet' tunnus funktsionaalrea ühtlaseks koonduvuseks

Lause 6.19 ***(Dirichlet' tunnus funktsionaalrea ühtlaseks koonduvuseks).*** *Olgu (g_k) selline funktsionaaljada, mis on hulgas D kas kasvav või kahanev ja koondub selles piirkonnas ühtlaselt nulliks, s.t.*

$$\lim_{k \to \infty} \sup_{x \in D} |g_k(x)| = 0. \tag{6.15}$$

Kui funktsionaalrea $\sum_k f_k$ osasummad on hulgas D ühtlaselt tõkestatud, s.t.

$$\exists M > 0 : \left| \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \right| \leq M \quad (n \in \mathbb{N},\, x \in D)\,, \tag{6.16}$$

siis $\sum_k f_k g_k$ *koondub hulgas D ühtlaselt.*

Tõestus. Olgu lause eeldused (6.12), (6.15) ja (6.16) täidetud ning olgu ε suvaline positiivne arv. Nagu eelmises tõestuses, peame veenduma niisuguse $N \in \mathbb{N}$ olemasolus, et kehtiks (6.14).

Eelduse (6.15) põhjal leidub selline $N \in \mathbb{N}$, et

$$|g_k(x)| < \frac{\varepsilon}{6M} \quad (k \geq N,\, x \in D)\,.$$

Olgu $m > n \geq N$, siis

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)\right| = \left|\sum_{k=1}^{m} f_k(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right| \leq \left|\sum_{k=1}^{m} f_k(x)\right| + \left|\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right| \leq 2M.$$

Võttes hinnangus (6.11) $L := 2M$, saame

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)\, g_k(x)\right| = \left|\sum_{k=1}^{m-n} f_{n+k}(x)\, g_{n+k}(x)\right| \leq 2M\left(|g_{n+1}(x)| + 2\,|g_m(x)|\right) \leq 2M\left(3\frac{\varepsilon}{6M}\right) = \varepsilon$$

$(m > n \geq N,\ x \in D)$. Cauchy kriteeriumi kohaselt on rida $\sum_k f_k g_k$ ühtlaselt koonduv. ■

Näide 10. Tõestame, et

$$\lim_{x\to 1-} (1-x) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{1-x^{2k}} = \frac{1}{2}\ln 2.$$

Kirjutame vaadeldava rea ümber kujul

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(1-x)\,x^k}{1-x^{2k}} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{1+x+x^2+\ldots+x^{2k-1}}.$$

Seejuures

1) rea $\sum_k f_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}$ osasummad on tõkestatud (kontrollida!)✠,

2) funktsioonide $g_k(x) := \frac{x^k}{1+x+x^2+\ldots+x^{2k-1}}$ jada on vahemikus $(0,1)$ kahanev (kontrollida!)✠ ja

3) $g_k \to 0$ ühtlaselt vahemikus $(0,1)$.

Viimase väite põhjenduseks paneme tähele, et

$$\frac{x^k}{1+x+x^2+\ldots+x^{2k-1}} < \frac{x^k}{1+x+x^2+\ldots+x^{k-1}} < \frac{x^k}{kx^k} = \frac{1}{k} \to 0 \quad (k\to\infty,\ x \in (0,1))\,.$$

Dirichlet' tunnuse kohaselt on rida $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(1-x)x^k}{1-x^{2k}}$ vahemikus $(0,1)$ ühtlaselt koonduv, summamärgi all piirile minnes saamegi vajaliku võrduse (kontrollida!)✠.

6.6.3 $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \to e^x$ ühtlaselt igas lõigus $[0,a]$

Me teame, et $\lim_n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$ iga $x \in \mathbb{R}$ korral. Näitame, et see koonduvus on ühtlane igas lõigus $[0,a]$ $(a > 0)$. Lähtume tuntud valemist

$$\lim_{h\to 0} (1+h)^{1/h} = e,$$

selle kohaselt saab iga $\delta > 0$ korral leida niisuguse $\rho > 0$, et kui $0 < h < \rho$, siis $\left|(1+h)^{1/h} - e\right| < e\delta$ ehk

$$e\,(1-\delta) < (1+h)^{1/h} < e\,(1+\delta) \tag{6.17}$$

(selgitada!)✠. Olgu $x \in [0,a]$ suvaline punkt, anname muutujale h väärtusi $h = \frac{x}{n}$, kus $n \in \mathbb{N}$, siis

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = (1+h)^{x/h} = \left((1+h)^{1/h}\right)^x.$$

Olgu $N \in \mathbb{N}$ selline, et kui $n \geq N$, siis $\frac{x}{n} < \frac{a}{n} < \rho$, mistõttu kehtivad seosed (6.17). Võttes need astmesse x, saame võrratused

$$e^x\,(1-\delta)^x < (1+h)^{x/h} < e^x\,(1+\delta)^x\,,$$

mis kehtivad kõikide $x = nh$ korral. Arvestades võrratusest $0 \leq x < a$ tulenevaid seoseid

$$(1+\delta)^x < (1+\delta)^a \text{ ja } (1-\delta)^a < (1-\delta)^x\,,$$

jõuame tingimuseni

$$e^x\,(1-\delta)^a < \left(1+\frac{x}{n}\right)^n < e^x\,(1+\delta)^a$$

ehk

$$e^x\,((1-\delta)^a - 1) < \left(1+\frac{x}{n}\right)^n - e^x < e^x\,((1+\delta)^a - 1)\,,$$

kui $n \geq N$.

Olgu nüüd ε suvaline positiivne arv. Valime $\delta > 0$ nii väikese, et

$$\delta < \min\left\{1-\left(1-\frac{\varepsilon}{e^a}\right)^{1/a},\ \left(1+\frac{\varepsilon}{e^a}\right)^{1/a} - 1\right\},$$

siis

$$e^x\,((1+\delta)^a - 1) < e^a\left(\left(1+\left(1+\frac{\varepsilon}{e^a}\right)^{1/a} - 1\right)^a - 1\right) = \varepsilon$$

ja

$$e^x\,((1-\delta)^a - 1) > e^a\left(\left(1+\left(1-\frac{\varepsilon}{e^a}\right)^{1/a} - 1\right)^a - 1\right) = -\varepsilon$$

(kontrollida!)✠. Niisiis,

$$-\varepsilon < \left(1+\frac{x}{n}\right)^n - e^x < \varepsilon \quad (n \geq N,\ \ x \in [0,a])$$

ehk

$$n \geq N \Rightarrow \sup_{x\in[0,a]}\left|\left(1+\frac{x}{n}\right)^n - e^x\right| < \varepsilon.$$

See tähendab, et $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \to e^x$ ühtlaselt lõigus $[0,a]$.

Analoogiliselt tõestatakse ühtlane koonduvus piirväärtuse $e^{-x} = \lim_n\left(1-\frac{x}{n}\right)^n$ korral.

Näide 11. Vaatleme integraali

$$\int_0^x \left(1+\frac{t}{n}\right)^n dt = \frac{n}{n+1}\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+1} - 1\right)$$

(veenduda!)✠. Kuna integraalialune funktsioon koondub ühtlaselt eksponentfunktsiooniks e^t, siis, minnes selles võrduses mõlemal pool võrdusmärki piirile, tohib vaskul pool teha seda integraali märgi all. Saame meile hästi tuntud võrduse

$$\int_0^x e^t dt = e^x - 1.$$

6.7 Astmeread

6.7.1 Astmerea koonduvuspiirkond

Olgu $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ mingi arvjada. *Astmereaks* nimetatakse funktsionaalrida kujul

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \tag{6.18}$$

või, üldisemalt,

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k . \tag{6.19}$$

PÕHIPROBLEEM: *Kuidas leida rea* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ ***koonduvuspiirkonda***

$$D := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \text{rida } \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \text{ koondub} \right\}?$$

Rakendades rea (6.18) koonduvuse uurimiseks **Cauchy koonduvustunnust** (vt. pt. 2, lause 2.32), saame järgmise väite:

$(^*)$ *kui* $\limsup_k \sqrt[k]{|a_k|\,|x^k|} < 1$, *siis rida* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *koondub absoluutselt; rida hajub, kui* $\limsup_k \sqrt[k]{|a_k|\,|x^k|} > 1$.

Selle vahetulemuse abil leiame astmerea (6.18) **koonduvusraadiuse.**

Moodustame jada $\left(\sqrt[k]{|a_k|}\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ ja vaatleme **esiteks** juhtu, kui see jada on tõkestamata, s.t.

$$\rho := \limsup_k \sqrt[k]{|a_k|} = \infty.$$

Siis seosest

$$\sqrt[k]{|a_k|\,|x^k|} = |x| \sqrt[k]{|a_k|} \quad (x \in \mathbb{R}), \tag{6.20}$$

tuleneb, et iga $x \neq 0$ puhul on ka jada $\left(\sqrt[k]{|a_k|\,|x^k|}\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ tõkestamata, s.t. $\limsup_k \sqrt[k]{|a_k|\,|x^k|} = \infty$. Väite $(^*)$ kohaselt vaadeldav astmerida hajub (selgitada!)✠. Niisiis, *kui* $\rho = \infty$, *siis astmerida* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *koondub ainult punktis* $x = 0$, *s.t.* $D = \{0\}$.

Teiseks, olgu jada $\left(\sqrt[k]{|a_k|}\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ tõkestatud ning $\rho > 0$. Seosest (6.20) järeldub, et $\rho\,|x| = \limsup_k \sqrt[k]{|a_k|\,|x^k|}$ iga x korral. Väite $(^*)$ kohaselt *koondub astmerida* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *absoluutselt, kui* $|x| < \frac{1}{\rho}$, *ja hajub, kui* $|x| > \frac{1}{\rho}$.

Kolmandaks, kui $\rho = 0$ (s.t. $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|\,|x^k|} = 0$), siis iga $x \in \mathbb{R}$ korral saame seosest (6.20), et $\limsup_k \sqrt[k]{|a_k|\,|x^k|} = 0$. Seega väite $(^*)$ põhjal *astmerida* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *koondub absoluutselt iga* $x \in \mathbb{R}$ *korral*, s.t. $D = \mathbb{R}$.

Defineerime astmerea $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *koonduvusraadiuse* r järgmiselt:

$$r := \begin{cases} 0, & \text{kui } \rho = \infty, \\ \frac{1}{\rho}, & \text{kui } 0 < \rho < \infty, \\ \infty, & \text{kui } \rho = 0. \end{cases}$$

Eelneva arutelu põhjal kehtib järgmine väide.

Teoreem 6.20 ***(Cauchy-Hadamardi teoreem).*** *Kui $r > 0$, siis astmerida $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ koondub absoluutselt vahemikus $(-r, r)$ ja hajub hulgas $(-\infty, -r) \cup (r, \infty)$. Juhul $r = 0$ koondub ta vaid punktis $x = 0$.*

Märkus 3. Cauchy-Hadamardi teoreem ei väida midagi koonduvuse kohta **koonduvusvahemiku** $(-r, r)$ otspunktides $-r$ ja r. Et saada ettekujutust võimalikest situatsioonidest, piisab analüüsida lihtsaid näiteid $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ ja $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$ (iseseisvalt!)✠.

6.7.2 Astmerea summa omadused

Järgmine lause kirjeldab **astmerea ühtlast koonduvust.**

Lause 6.21 *Astmerida $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ koondub ühtlaselt igas lõigus $[a, b]$, kus $-r < a \leq b < r$.*

Tõestus. Me tõestame väite juhul $[a, b] = [-\eta, \eta] \subset (-r, r)$, siis kehtib ta suvalise lõigu $[a, b] \subset (-r, r)$ korral (selgitada!)✠.

Paneme tähele, et

$$\left|a_k x^k\right| \leq |a_k| \, \eta^k \quad \left(x \in [-\eta, \eta]\,,\ k \in \mathbb{N}_0\right),$$

kusjuures arvrida $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \eta^k$ koondub (selgitada!)✠. ■

Teoreem 6.22 ***(astmerea summa pidevusest).*** *Astmerea (6.18) summa f, kus*

$$f\,(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,$$

on koonduvusvahemikus $(-r, r)$ pidev funktsioon.

Tõestus. Olgu x suvaline punkt vahemikus $(-r, r)$, näitame, et f on selles punktis pidev funktsioon. Leiame sellise $\eta > 0$, et $x \in [-\eta, \eta] \subset (-r, r)$. Kuna rida $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ koondub lause 6.21 põhjal lõigus $[-\eta, \eta]$ ühtlaselt ning rea liikmed on pidevad funktsioonid (põhjendada!)✠, siis f on lõigus $[-\eta, \eta]$ pidev funktsioon (vrd. teoreem 6.15). Seega on f punktis x pidev. ■

Teoreem 6.23 ***(astmeridade integreerimisest ja diferentseerimisest).*** *(a) Astmerida* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *võib igas lõigus* $[0,x]$*, kus* $x \in (0,r)$*, liikmeti integreerida, seejuures*

$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}.$$

(b) Astmerida $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *võib igas punktis* $x \in (-r,r)$ *liikmeti diferentseerida, seejuures*

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\, a_{k+1} x^k \tag{6.21}$$

ja astmerea (6.21) koonduvusraadius on r*.*

Tõestus. (*a*) Kuna astmerida $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ koondub ühtlaselt lõigus $[0,x]$, siis teoreemi 6.16 põhjal

$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_0^x t^k dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}.$$

(*b*) Näitame kõigepealt, et astmereal (6.18) ja tuletiste real (6.21), mis on samuti astmerida, on üks ja sama koonduvusraadius. Tõepoolest, kuna $\lim_k \sqrt[k]{k} = 1$, siis

$$\limsup_k \sqrt[k]{k\,|a_k|} = \lim_k \sqrt[k]{k} \cdot \limsup_k \sqrt[k]{|a_k|} = \limsup_k \sqrt[k]{|a_k|}.$$

Siit saame, et tuletiste rida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$ on igas lõigus $[c,d] \subset (-r,r)$ ühtlaselt koonduv (vrd. lause 6.21). Olgu $x \in (-r,r)$, valime sellise $\eta > 0$, et $x \in [-\eta,\eta] \subset (-r,r)$, ja rakendame teoreemi 6.17. Selle kohaselt

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\, a_{k+1} x^k.$$

Teoreem on tõestatud. ■

Märkus 4. Üldise astmerea

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k$$

puhul saame muutujavahetusega $z := x - a$ seni vaadeldud tüüpi astmerea $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$. Kui r on selle rea koonduvusraadius, siis üldine astmerida koondub absoluutselt vahemikus $(a-r, a+r)$ ja samas vahemikus kehtib valem

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x-a)^{k-1} \tag{6.22}$$

(põhjendada!)✠.

6.7.3 Abeli piirväärtusteoreem

Astmerea summa omadusi kirjeldavad teoreemid 6.21 ja 6.23 kehtivad koonduvusvahemikus $(-r, r)$, kus r on vaadeldava astmerea koonduvusraadius. Paljudel juhtudel koondub astmerida (6.18) ka selle vahemiku ühes või mõlemas otspunktis. Seoses sellega kerkib üles küsimus astmerea summa analüütilistest omadustest sellistes otspunktides. Summa pidevust koonduvusvahemiku otspunktis kirjeldab järgmine teoreem.

Teoreem 6.24 ***(Abeli teoreem astmerea summa pidevusest koonduvuslõigu otspunktis).*** *Kui astmerida* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *koondub punktis r, siis summa f on vasakult pidev selles punktis, s.t.*

$$\lim_{x\to r-} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k.$$

Tõestus. Lihtsuse mõttes (kuid üldisust kitsendamata) vaatleme juhtu $r = 1$. Siis eelduse kohaselt rida $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ koondub, s.t. tema osasummade $s_n := \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ jada (s_n) on koonduv. Astmerea osasummad saame esitada kujul (siin $s_{-1} := 0$)

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} (s_k - s_{k-1})\, x^k = (1-x) \sum_{k=0}^{n-1} s_k x^k + s_n x^n$$

(veenduda!)✠. Fikseerides suvalise $x \in (-1, 1)$, saame protsessis $n \to \infty$ (põhjendada!)✠

$$f(x) = (1-x) \sum_{k=0}^{\infty} s_k x^k. \tag{6.23}$$

Tähistame $s := \lim\limits_{n\to\infty} s_n \left(= \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \right)$. Olgu $\varepsilon > 0$ suvaline, valime sellise $N \in \mathbb{N}$, et iga $n > N$ puhul $|s_n - s| < \frac{\varepsilon}{2}$. Kuna $(1-x) \sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k = 1$ (veenduda!)✠, siis seosest (6.23) saadakse

$$|f(x) - s| = \left| (1-x) \sum_{k=0}^{\infty} (s_k - s)\, x^k \right| \le (1-x) \sum_{k=0}^{N} |s_k - s|\, |x|^k + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

iga $x \in (1-\delta, 1)$ korral, kui $\delta < 1$ ja $\delta < \varepsilon \left(2 \sum\limits_{k=0}^{N} |s_k - s| \right)^{-1}$ (kontrollida!)✠. Seega $f(x) \to s$, kui $x \to 1-$. Teoreem on tõestatud. ■

Näide 12. Vaatleme elementaarfunktsiooni $f(x) = \ln(1+x)$. Kui $-1 < x < 1$, siis

$$(\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + ... = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k.$$

See rida koondub vahemikus $(-1, 1)$ ja tema summa üheks algfunktsiooniks on astmerea

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ... = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} \tag{6.24}$$

summa (põhjendada!)✠, tähistame selle sümboliga $F(x)$. Niisiis, $\ln(1+x) = F(x) + C$, kus C on suvaline konstant. Võttes viimases võrduses $x = 0$, saame $\ln(1+x) = F(x)$ ehk

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} \quad (-1 < x < 1).$$

Abeli teoreemi abil võib viimase võrduse laiendada ka vahemiku otspunkti $x = 1$. Leibnizi tunnuse kohaselt on rida (6.24) selles punktis koonduv, seega

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k+1} = \lim_{x \to 1-} \ln(1+x) = \ln 2.$$

6.7.4 Funktsioonide arendamine astmeritta. Taylori rida

Teoreemi 6.23(b) tõestamisel tegime kindlaks kaks olulist tõsiasja (vrd. ka märkus 4):
1) astmerida (6.19) liikmeti diferentseerides saame astmerea (6.22), millel on sama koonduvusraadius, mis esialgsel real (6.19), ja
2) liikmeti diferentseerimisel saadud astmerea (6.22) summa on esialgse rea (6.19) summa tuletis.
Siit järeldub, et me võime astmerida $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k$ vahemikus $(a-r, a+r)$ kuitahes palju kordi liikmeti diferentseerida, koonduvusraadius r seejuures ei muutu ja kõikide $n \in \mathbb{N}$ korral avaldub astmerea summa n-dat järku tuletis $f^{(n)}$ kujul

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\ldots(k-n+1)\, a_k (x-a)^{k-n} \quad (x \in (a-r, a+r))$$

(kontrollida!)✠. Siit saame valemi $f^{(n)}(a) = n! a_n$ ehk

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{6.25}$$

(kokkuleppeliselt $0! = 1$), mis seob omavahel astmerea kordajad ning selle rea summa ja ta tuletiste väärtused punktis $x = a$.

Kordajad (6.25) on meile tuttavad **Taylori valemist.** Kui mingi funktsioon f on lõigus $[c, d]$ n korda ja vahemikus (c, d) $n+1$ korda pidevalt diferentseeruv, siis iga punkti $a \in [c, d]$ korral kehtib valem

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + R_{n+1}(x) \quad (x \in [c, d]), \tag{6.26}$$

kusjuures jääkliige $R_{n+1}(x)$ rahuldab tingimust

$$\lim_{x \to a} \frac{R_{n+1}(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Avaldist $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$ nimetatakse funktsiooni f n-astme **Taylori polünoomiks** punktis a. Jääkliikme $R_{n+1}(x)$ võib esitada nn. **Lagrange'i kujul**

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a + \theta(x-a))(x-a)^{n+1}, \text{ kus } 0 < \theta < 1. \tag{6.27}$$

Definitsioon. Astmerida $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k$, mille kordajad on määratud valemiga (6.25), nimetatakse *funktsiooni f Taylori reaks.*

Loomulikult kerkib üles küsimus, millised funktsioonid võivad olla astmerea summadeks ehk, teisiti sõnastades, **milliseid funktsioone saab punkti a ümbruses** $(a-r, a+r)$ **arendada Taylori ritta?** On selge, et need funktsioonid peavad vaadeldavas hulgas $(a-r, a+r)$ olema piiramatu arv kordi diferentseeruvad, s.t. neil peavad eksisteerima mistahes järku tuletised selles hulgas. Osutub, et see tingimus ei ole piisav. Järgnevast **Cauchyle kuuluvast näitest** selgub, et isegi siis, kui kogu arvteljel lõpmata palju kordi diferentseeruva funktsiooni Taylori rida on koonduv, ei pruugi selle summaks olla funktsioon ise.

Näide 13. Olgu

$$f(x) := \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{kui } x \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x = 0. \end{cases}$$

Siis $f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2}$, $f''(x) = \left(-\frac{6}{x^4} + \frac{4}{x^6}\right) e^{-1/x^2}, \ldots$, üldiselt avaldub funktsiooni f n-dat järku tuletis punktis $x \neq 0$ kujul $f^{(n)}(x) = P_{3n}\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2}$, kus $P_{3n}(t)$ on teatav $3n$-astme polünoom muutja t suhtes. Teatavasti kasvab eksponentfunktsioon argumendi piiramatul kasvamisel kiiremini kui mistahes astmefunktsioon, seetõttu

$$\lim_{x\to 0} f^{(n)}(x) = \lim_{x\to 0} \frac{P_{3n}\left(\frac{1}{x}\right)}{e^{-1/x^2}} = 0 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Kuna funktsioonid $f^{(n)}$ on pidevad punktis $x = 0$, siis $f^{(n)}(0) = \lim\limits_{x\to 0} f^{(n)}(x) = 0$. Niisiis, funktsioon f on lõpmata palju kordi diferentseeruv kogu reaalteljel, kuid tema Taylori rea kordajad a_k on kõik võrdsed nulliga. Niisiis ei ole funktsioon f oma Taylori rea summa.

Toome **piisava tingimuse selleks, et funktsiooni Taylori rida koonduks** (ühtlaselt) selleks funktsiooniks.

Lause 6.25 *Olgu f lõigus $[c,d]$ lõpmata palju kordi diferentseeruv funktsioon, mis rahuldab tingimust*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sup_{x\in[c,d]} \frac{\left|f^{(n)}(x)\right|}{n!} (d-c)^n \right) = 0. \tag{6.28}$$

Siis punktis $a \in [c,d]$ moodustatud funktsiooni f Taylori rida $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ koondub ühtlaselt lõigus $[c,d]$ funktsiooniks f.

Tõestus. Vahetult Taylori valemist (6.26), jääkliikme valemist (6.27) ja tingimusest (6.28) saame

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right| = \left| \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))(x-a)^{n+1} \right| \leq \left| \sup_{x\in[c,d]} \frac{\left|f^{(n+1)}(x)\right|}{(n+1)!}(d-c)^{n+1} \right| \to 0 \ (n\to\infty).$$

Väide on tõestatud. ■

6.7.5 Weierstrassi lähendusteoreem

Eelneva alapunkti tulemuste kohaselt saab mingis lõigus lõpmata palju kordi diferentseeruvat funktsiooni, mis rahuldab tingimust (6.28), ühtlaselt lähendada samas lõigus selle funktsiooni Taylori polünoomidega. Analoogiline väide kehtib oluliselt suurema funktsioonide klassi korral, kui me Taylori polünoomide asemel lubame lähendamist suvaliste polünoomide jadaga.

Teoreem 6.26 ***(Weierstrassi lähendusteoreem).*** *Iga lõigus $[a,b]$ pideva funktsiooni f korral leidub selline polünoomide jada (P_n), mis koondub funktsiooniks f ühtlaselt lõigus $[a,b]$.*

Tõestus. Lihtsuse mõttes (ja üldisust kitsendamata) eeldame, et
1) $a=0$, $b=1$ (vajaduse korral rakendame muutujate vahetust $x=(b-a)t+a$),
2) $f(0)=f(1)=0$ (vastasel korral vaatleme funktsiooni $g=g(x)$, kus $g(x):=f(x)-f(0)-x[f(1)-f(0)]$, see on lõigus $[0,1]$ pidev funktsioon ning $g(0)=g(1)=0$. Kui väide kehtib funktsiooni g korral, siis kehtib ta ka funktsiooni f korral, sest $f-g$ on polünoom.)
3) f on määratud kogu reaalteljel $\mathbb{R}$, kusjuures $f(x)=0$, kui $x\notin[0,1]$.
Vastavalt eeldusele 2) on f hulgal $\mathbb{R}$ pidev funktsioon (kontrollida!)✠.

Moodustame iga $n\in\mathbb{N}$ korral $2n$-astme polünoomi

$$Q_n(x) := c_n\left(1-x^2\right)^n,$$

kus kordajad c_n valime nii, et kehtiks võrdus

$$\int_{-1}^{1} Q_n(x)\,dx = 1. \tag{6.29}$$

Me ei vaja tõestuseks kordajate c_n täpseid väärtusi, näitame vaid, et kui kehtib (6.29), siis $c_n<\sqrt{n}$ $(n\in\mathbb{N})$. Tõepoolest, lähtudes võrratusest $\left(1-x^2\right)^n \geq 1-nx^2$ (kontrollida!)✠, saame

$$\frac{1}{c_n} = \int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^n dx = 2\int_0^1\left(1-x^2\right)^n dx \geq 2\int_0^{1/\sqrt{n}}\left(1-x^2\right)^n dx \geq 2\int_0^{1/\sqrt{n}}\left(1-nx^2\right)dx = \frac{4}{3}\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}},$$

s.t. $0<c_n<\sqrt{n}$. Edasi, kui $0<\delta<1$, siis

$$\delta\leq x\leq 1 \Rightarrow 0\leq Q_n(x)\leq\sqrt{n}\left(1-\delta^2\right)^n, \tag{6.30}$$

kusjuures

$$\sqrt{n}\left(1-\delta^2\right)^n \to 0\,(n\to\infty) \tag{6.31}$$

(kontrollida!)✠. Tähistame

$$P_n(x) := \int_{-1}^{1} f(x+t)\,Q_n(t)\,dt \ \ (x\in[0,1]\,,\ n\in\mathbb{N}) \tag{6.32}$$

ja paneme tähele, et P_n on $2n$ -astme polünoom. Tõepoolest, kuna $f(z)=0$ iga $z\in\mathbb{R}\setminus[0,1]$ korral, siis

$$P_n(x) = \int_{-x}^{1-x} f(x+t)\,Q_n(t)\,dt \ = \int_0^1 f(t)\,Q_n(t-x)\,dt \ \ (x\in[0,1]\,,\ n\in\mathbb{N})\,,$$

kuid viimane integraal on (muutuja x suhtes) $2n$-astme polünoom (veenduda!)✠.

Näitame, et $P_n(x)\to f(x)$ ühtlaselt lõigul $[0,1]$. Fikseerime suvalise $\varepsilon>0$. Kuna f on hulgas $\mathbb{R}$ ühtlaselt pidev funktsioon (põhjendada!)✠, siis saab leida niisuguse $\delta>0$, et

$$|x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{6.33}$$

Ilmselt on f hulgas $\mathbb{R}$ tõkestatud (põhjendada!)✠, seega $M := \sup\limits_{x\in(-\infty,\infty)} |f(x)| < \infty$. Seostest (6.29)-(6.33) järeldub

$$\begin{aligned}
|f(x)-P_n(x)| &= \left|\int_{-1}^{1} [f(x+t)-f(x)]\,Q_n(t)\,dt\ \right| \\
&\le \int_{-1}^{1} |f(x+t)-f(x)|\,Q_n(t)\,dt \\
&\le 2M\int_{-1}^{-\delta} Q_n(t)\,dt + \frac{\varepsilon}{2}\int_{-\delta}^{\delta} Q_n(t)\,dt + 2M\int_{\delta}^{1} Q_n(t)\,dt \\
&\le 4M\sqrt{n}\left(1-\delta^2\right)^n + \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Vastavalt seosele (6.31) leidub selline $N\in\mathbb{N}$, et kui $n>N$, siis $4M\sqrt{n}\left(1-\delta^2\right)^n < \frac{\varepsilon}{2}$, seega $|f(x)-P_n(x)|<\varepsilon$. Teoreem on tõestatud. ■

Lõpuks märgime, et Weierstrassi teoreemi võib sõnastada ka teisiti: *iga lõigus* $[a,b]$ *pideva funktsiooni* f *ja arvu* $\varepsilon>0$ *korral saab leida sellise polünoomi* P, *et*

$$|f(x)-P(x)|<\varepsilon \ \ \textit{iga } x\in[a,b] \ \ \textit{puhul.}$$

6.7.6 Stirlingi valem

Lähtudes funktsiooni $f(x)=\ln(1+x)$ rittaarendusest

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} \quad (-1<x\le 1) \tag{6.34}$$

(vt näide 12), tõestame järgmise Stirlingi valemi

$$\lim_n \frac{n!}{\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}} = 1$$

ehk

$$n! \backsim \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \quad (n \to \infty), \tag{6.35}$$

mis kirjeldab jada $(n!)$ asümptootilist käitumist protsessis $n \to \infty$.

Valemi (6.34) kohaselt

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} - \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{x^k}{k} \right)$$
$$= 2x \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{2i}}{2i+1} \quad (x \in (-1,1)).$$

Võttes siin $x := \frac{1}{2n+1}$ $(n = 1, 2, ...)$, saame hinnangu

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln \frac{1+\frac{1}{2n+1}}{1-\frac{1}{2n+1}} = \frac{2}{2n+1}\left(1+\frac{1}{3}\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{5}\frac{1}{(2n+1)^4}+...\right)$$
$$> \frac{2}{2n+1} = \frac{1}{n+\frac{1}{2}},$$

niisiis, $\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) > 1$ ehk

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} > e \tag{6.36}$$

(selgitada!)✠. Tähistame $x_n := \frac{n! e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$ $(n = 1, 2, ...)$, siis

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} > 1$$

(vrd. (6.36)), tähendab, jada (x_n) on kahanev. Kuna ta on alt tõkestatud, siis eksisteerib piirväärtus $a := \lim_n x_n$, seega on olemas selline jada (ε_n), et $\varepsilon_n \to 0$ ja

$$x_n = a(1+\varepsilon_n) \quad (n = 1, 2, ...)$$

(põhjendada!)✠. Saame seose $\frac{n! e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} = a(1+\varepsilon_n)$ ehk

$$n! = a\frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n}(1+\varepsilon_n), \tag{6.37}$$

millest saame valemi (6.35), kui õnnestub näidata, et $a = \sqrt{2\pi}$.

Wallise valemi (vt. pt. 5) kohaselt on $\frac{\pi}{2} = \lim_n \frac{1}{2n+1}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2$. Seose (6.37) põhjal

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \frac{[(2n)!!]^2}{(2n)!} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} = a\sqrt{\frac{n}{2}}\frac{(1+\varepsilon_n)^2}{1+\varepsilon_{2n}}$$

(kontrollida!)✠. Wallise valemist saame

$$\frac{\pi}{2} = \lim_n \frac{1}{2n+1} a^2 \frac{n}{2} \frac{(1+\varepsilon_n)^4}{(1+\varepsilon_{2n})^2} = \frac{a^2}{4}$$

ehk $a = \sqrt{2\pi}$.