III. TEIST JÄRKU PINDADE ÜLDTEOORIA

18. TEIST JÄRKU PINNA MÕISTE. TEMA VÕRRANDIS KORDAJATE TEISENEMISE VALEMID ÜLEMINEKUL UUELE REEPERILE

Käesolev peatükk on sarnane esimese peatükiga. See annab meile õiguse kasutada valemite kirjapanekul kompaktsemaid kirjutisi. Abiks on mõned tulemused "Algebra I" kursusest.

Tähistame nagu "Algebra ja geomeetria" kursuses E_3 ja $\mathbf{E}_3$ abil ruumi ja tema poolt tekitatud vektorruumi. Olgu võetud mistahes reeper $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Siin reeperi alguspunkt O on ruumi E_3 punkt ja vektorite kolmik $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ vektorruumi $\mathbf{E}_3$ baas. Ruumi igal punktil X tekivad nüüd koordinaadid, mida tähistatame x_1, x_2 ja x_3 abil, lühidalt $X(x_1, x_2, x_3)$. Meenutuseks märgime, et punkti X koordinaadid on tema kohavektori $\overrightarrow{OX} \in \mathbf{E}_3$ koordinaadid reeperisse kuuluva baasi $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ suhtes.

Definitsioon 18.1. *Ruumi E_3 punktihulka $\{X(x_1, x_2, x_3)\}$, mille iga punkti $X(x_1, x_2, x_3)$ koordinaadid mingis reeperis $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ rahuldavad võrrandit*

$$\begin{aligned} p: \quad & a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + \\ & + 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + 2a_3x_3 + a = 0, \end{aligned} \tag{18.1}$$

kus kordajad a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13} ja a_{23} ei ole korraga võrdsed nulliga, nimetatakse teist järku pinnaks. Oleme teda tähistanud tähega p.

Juhime tähelepanu sellele, et selles definitsioonis reeper ei pea olema ilmtingimata ristreeper, vaatamata sellele, et järgnevas me sageli kasutame just ristreeperit, sest enamus valemeid "Algebra ja geomeetria" kursuses on saadud meil ainult ristreeperi korral. Võrrandi (18.1) vasak pool

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) :=\, & a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \\ & + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + 2a_3x_3 + a \end{aligned} \tag{18.2}$$

on spetsiifiline kolmemuutuja funktsioon. Ta koosneb järgmise ehitusega liidetavatest $\alpha x_1^s x_2^t x_3^u$. See on tõepoolest nii, sest funktsiooni (18.2) iga liidetava võime kirjutada kujul

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1^2 &= a_{11}x_1^2x_2^0x_3^0, & a_{22}x_2^2 &= a_{22}x_1^0x_2^2x_3^0,\\
a_{33}x_3^2 &= a_{33}x_1^0x_2^0x_3^2, & 2a_{12}x_1x_2 &= 2a_{12}x_1^1x_2^1x_3^0,\\
2a_{13}x_1x_3 &= 2a_{13}x_1^1x_2^0x_3^1, & 2a_{23}x_2x_3 &= 2a_{23}x_1^0x_2^1x_3^1,\\
2a_1x_1 &= 2a_1x_1^1x_2^0x_3^0, & 2a_2x_2 &= 2a_2x_1^0x_2^1x_3^0,\\
2a_3x_3 &= 2a_3x_1^0x_2^0x_3^1, & a &= ax_1^0x_2^0x_3^0.
\end{aligned}
$$

Siin iga *liidetava astmeks nimetatakse temas olevate muutujate* x_1, x_2 *ja* x_3 *astmenäitajate summat.* Võrrandis (18.1) on kuus esimest liidetavat teise astme liidetavad, kolm järgmist esimese astme liidetavad, viimane aga nullastme liidetav. See jutt on õige, kui liidetavas esinev kordaja ei ole võrdne nulliga. *Võrrandi* (18.1) *astmeks nimetatakse tema liidetavate kõrgemat astet.* Seega võrrand (18.1) on teise astme võrrand. Teist järku pind antakse seega teise astme võrrandi abil. Võrrandis (18.1) osasid

$$
\begin{aligned}
f_r(x_1, x_2, x_3) := a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 +\\
+ 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3
\end{aligned}
$$

ja

$$2a_1x_1 + 2a_2x_2 + 2a_3x_3$$

nimetatakse vastavalt *ruutosaks* ja *lineaarosaks.* Liidetavat a nimetatakse võrrandi (18.1) *vabaliikmeks.* Kui võrrandis (18.1) siiski peaks a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23} võrduma nulliga, kuid kordajad a_1, a_2 ja a_3 ei ole korraga võrdsed nulliga, siis saame võrrandi

$$2a_1x_1 + 2a_2x_2 + 2a_3x_3 + a = 0,$$

mis on ruumis asuva tasandi üldvõrrand ning seega ei ole enam teist järku pinna võrrand.

Võrrandis (18.1) kuuel liidetaval esineb kordaja 2, mille olemasolu on esmapilgul arusaamatu. Tegelikult on neist lihtne lahti saada. Tähistades $\overline{a}_{12} = 2a_{12}$, $\overline{a}_{13} = 2a_{13}$, $\overline{a}_{23} = 2a_{23}$, $\overline{a}_1 = 2a_1$, $\overline{a}_2 = 2a_2$ ja $\overline{a}_3 = 2a_3$, olemegi kordajast 2 lahti saanud. Põhjuseks, miks kordajast 2 lahti saada ei taheta, on asjaolu, et sel korral paljudes valemites tekib kordaja $\frac{1}{2}$. Valemi (18.1) saab kompaktsemalt kirja panna summa märgi abil. Selleks toome sisse täiendavad kordajad a_{21}, a_{31} ja a_{32}. Loeme nad vastavalt võrdseks kordajatega a_{12}, a_{13} ja a_{23}. Viimaste abil saame kirjutada näiteks

$$2a_{12}x_1x_2 = a_{12}x_1x_2 + a_{12}x_1x_2 = a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_2x_1.$$

Võrrandi (18.1) saame nüüd kirja panna järgmiselt

$$p: \quad \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j + 2\sum_{i=1}^{3} a_ix_i + a = 0.$$

Teist järku pinna võrrand võimaldab kasutusele võtta kolmandat järku maatriksi

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \tag{18.3}$$

mis $a_{21} = a_{12}$, $a_{31} = a_{13}$ ja $a_{32} = a_{23}$ tõttu on sümmeetriline maatriks, s.o. $A^\top = A$. See maatriks ei ole nullmaatriks, sest pinna võrrandi ruutosa kordajad ei ole korraga võrdsed nulliga. Kasutades õppeaines "Algebra I" antud maatriksi astaku mõistet, saame öelda, et maatriksi A astak ei ole null, vaid on kas üks, kaks või kolm. Tähistades $\delta = |A|$, siis esimesel ja teisel juhul $\delta = 0$ ja kolmandal juhul $\delta \neq 0$.

Kasutust leiab järgmine neljandat järku maatriks

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a \end{pmatrix}.$$

Selle maatriksi moodustamisel on kasutatud teist järku pinna võrrandi (18.1) kõiki kordajaid. Lisaks sellele sisaldab ta "loodenurgas" maatriksit A.

Lõpuks selgitame, kuidas teist järku pinna võrrandis kordajad teisenevad üleminekul uuele reeperile. Meenutame, et üleminekul ühelt nn. vanalt reeperilt $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ teisele nn. uuele reeperile $\{O'; \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3\}$ punkti X vanad koordinaadid (x_1, x_2, x_3) teisenevad uuteks koordinaatideks (x'_1, x'_2, x'_3) valemite

$$x_i = \sum_{s=1}^{3} c_{is}x'_s + c_i, \quad i \in \{1, 2, 3\}, \tag{18.4}$$

abil. Nendes valemites esinevad kordajad kirjeldavad uut reeperit vana reeperi suhtes; täpsemalt

$$\overrightarrow{OO'} = \sum_{s=1}^{3} c_s \vec{e}_s$$

ja

$$\vec{e}\,'_i = \sum_{s=1}^{3} c_{si} \vec{e}_s, \quad i \in \{1, 2, 3\}.$$

"Algebra I" kohaselt on baasiteisenduse maatriks

$$C := \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

regulaarne, s.o. $|C| \neq 0$. Teist järku pinna võrrandi (18.1) saamiseks uutes koordinaatides, tuleb temasse teha asendus valemitest (18.4), ja viies saadud avaldise x'_1, x'_2 ja x'_3 suhtes kujule (18.1), saamegi kätte pinna võrrandi uued kordajad. Kuna saadavad valemid on suhteliselt keerulised, jaotame selle protseduuri lihtsamateks sammudeks, saades igal sammul pinna võrrandis kordajate teisenemise valemid. Reeperiteisendust

$$\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \longrightarrow \{O'; \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3\}$$

saab realiseerida kahe sammuna. Esimesel sammul muudame ainult alguspunkti ja teisel sammul baasiosa, s.o.

$$\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \longrightarrow \{O'; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \longrightarrow \{O'; \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3\}.$$

Tähistades punkti X koordinaate vahepealses reeperis $\{O'; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ nüüd $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$ ja $\overline{x}_3$ abil, s.o. $X(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3)$, me saame

$$x_i = \overline{x}_i + c_i, \quad i \in \{1, 2, 3\} \tag{18.5}$$

ja

$$\overline{x}_i = \sum_{s=1}^{3} c_{is} x'_s, \quad i \in \{1, 2, 3\}. \tag{18.6}$$

Asendades viimasest valemist (18.6) valemisse (18.5), saamegi valemi (18.4). Nimetatud protseduuri võime sooritada ka nii, et esmalt muudame reeperis baasiosa ja siis alguspunkti, s.o.

$$\{O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\} \longrightarrow \{O;\vec{e}\,'_1,\vec{e}\,'_2,\vec{e}\,'_3\} \longrightarrow \{O';\vec{e}\,'_1,\vec{e}\,'_2,\vec{e}\,'_3\}.$$

Saame

$$x_i = \sum_{s=1}^{3} c_{is}\overline{x}_s, \quad i \in \{1,2,3\} \tag{18.7}$$

ja

$$\overline{x}_i = x'_i + c'_i, \quad i \in \{1,2,3\}. \tag{18.8}$$

Siin $c\,'_i$ on reeperi alguspunkti O' koordinaadid baasi $\{\vec{e}\,'_1,\vec{e}\,'_2,\vec{e}\,'_3\}$ suhtes. Seega

$$\overrightarrow{OO'} = \sum_{s=1}^{3} c'_s\vec{e}\,'_s.$$

Asendades valemist (18.8) valemisse (18.7), peame saama valemi (18.4). See on tõepoolest nii, sest

$$x_i = \sum_{s=1}^{3} c_{is}(x'_s + c'_s), \quad i \in \{1,2,3\},$$

millest

$$x_i = \sum_{s=1}^{3} c_{is}x'_s + \sum_{s=1}^{3} c_{is}c'_s, \quad i \in \{1,2,3\}.$$

Viimane on tegelikult valem (18.4), sest (18.4) abil näeme

$$\sum_{s=1}^{3} c_{is}c'_s = c_i, \quad i \in \{1,2,3\}.$$

Nüüd oleme kõik teinud, et leida pinna võrrandis (18.1) kordajate teisenemisvalemid. Kui me muudame reeperis ainult alguspunkti ning tähistame punkti X vanu ja uusi koordinaate vastavalt x_1,x_2,x_3 ja x'_1,x'_2,x'_3 abil, siis saame

$$x_i = x'_i + c_i, \quad i \in \{1,2,3\}.$$

Asendades siit teist järku pinna võrrandisse (18.1), saame

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}(x'_i + c_i)(x'_j + c_j) + 2\sum_{s=1}^{3} a_s(x'_s + c_s) + a = 0,$$

millest

$$\sum_{i,j=1}^{3} a'_{ij}x'_i x'_j + 2\sum_{s=1}^{3} a'_s x'_s + a' = 0,$$

kus

$$a'_{ij} = a_{ij}, \quad i,j \in \{1,2,3\}, \tag{18.9}$$

$$\begin{aligned} a'_i &= \sum_{s=1}^{3} a_{is}c_s + a_i, \quad i \in \{1,2,3\}, \\ a' &= \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}c_i c_j + 2\sum_{s=1}^{3} a_s c_s + a. \end{aligned} \tag{18.10}$$

Näeme, et nii-öelda reeperi alguspunkti muutmise korral teist järku pinna võrrandi ruutosa kordajad ei muutu üldse. Ülejäänud kordajad aga teisenevad. Seejuures a_i teisenemisvalemid võib meelde jätta osatuletiste abil. Nimelt

$$a'_i = \frac{1}{2}\frac{d}{dx_i} f_r(x_1, x_2, x_3)\Big|_{(c_1,c_2,c_3)}, \quad i \in \{1,2,3\}.$$

Ka kerge on meelde jätta vabaliikme teisenemisvalemit. Näeme

$$a' = f(c_1, c_2, c_3).$$

Kui me reeperis alguspunkti ei muuda, aga muudame baasi osa ning tähistame vanu ja uusi koordinaate vastavalt x_1, x_2, x_3 ja x'_1, x'_2, x'_3 abil, siis

$$x_i = \sum_{s=1}^{3} c_{is}x'_s, \quad i \in \{1,2,3\}.$$

Siit asendame teist järku pinna võrrandisse (18.1). Saame

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}\Big(\sum_{s=1}^{3} c_{is}x'_s\Big)\Big(\sum_{t=1}^{3} c_{jt}x'_t\Big) + 2\sum_{i=1}^{3} a_i\Big(\sum_{s=1}^{3} c_{is}x'_s\Big) + a = 0,$$

millest pärast korrastamist saame

$$\sum_{i,j=1}^{3} a'_{ij}x'_ix'_j + 2\sum_{s=1}^{3} a'_s x'_s + a' = 0.$$

Siin

$$a'_{st} = \sum_{i,j=1}^{3} c_{is}a_{ij}c_{jt}, \quad s,t \in \{1,2,3\} \tag{18.11}$$

ja

$$a'_s = \sum_{i=1}^{3} c_{is}a_i, \quad a' = a, \quad s \in \{1,2,3\}. \tag{18.12}$$

Näeme, et vabaliige ei teisene.

Ruutosa kordajate teisenemisvalemid (18.11) saab kompaktsemalt kirja panna maatriksite abil. Tähistame

$$A' := \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{pmatrix}.$$

Valemid (18.11) saame kirja panna järgmiselt:

$$A' = C^\top AC. \tag{18.13}$$

Viimase valemi korral tahame rõhutada, et valemi (18.9) tõttu reeperi alguspunkti muutmisel maatriks A ei muutu. *Seega teist järku pinna ruutosa maatriks A on vektorruumiga $\mathbf{E}_3$ seotud maatriks.* Ka kõigi kordajate teisenemisvalemid (18.11) ja (18.12) saab kirja panna maatrikskujul. Tähistame

$$\overline{A} := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a \end{pmatrix}, \quad \overline{C} := \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{18.14}$$

Kerge on näha, et

$$\overline{A}' = \overline{C}^\top \overline{A}\,\overline{C}, \tag{18.15}$$

kus

$$\overline{A}\,' := \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & a'_1 \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} & a'_2 \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} & a'_3 \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 & a' \end{pmatrix}.$$

Lugeja hooleks jääb selles veendumine.

Teeme lõpuks veel kaks tähelepanekut. Esmalt paneme tähele, et pinna võrrand (18.1) ei muutu mitte ainult üleminekul uuele reeperile, vaid isegi ühes ja samas reeperis on pinnal lõpmatult palju võrrandeid. Pinna võrrand on tegelikult määratud nullist erineva kordaja täpsuseni, sest

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j+2\sum_{i=1}^{3} a_ix_i+a=0 \Longleftrightarrow \sum_{i,j=1}^{3}(ka_{ij})x_ix_j+2\sum_{i=1}^{3}(ka_i)x_i+(ka)=0,$$

kus $k \neq 0$. Teiseks paneme tähele, et ühe ja sama pinna ruutosa erinevatel maatriksitel A, $A\,'$ ja kA astakud on võrdsed, sest valemis (18.13) maatriksid C ja $C^{\top}$ on regulaarsed ja tegur $k \neq 0$. Seega teist järku pinna ruutosa maatriksi astak on invariantne suurus. *Nimetame teist järku pinna ruutosa maatriksi astakut selle pinna astakuks.*

19. TEIST JÄRKU PINNA TÜÜBI MÄÄRAMINE KANOONILISE VÕRRANDI LEIDMISE TEEL

Käesolev paragrahv on § 2 analoog. Seal leidsime teist järku joonte kanoonilised võrrandid ja määrasime nende tüübid. Siin kahjuks uurimine ei ole enam nii lihtsalt läbiviidav. Osutub, et me saame kasutada siin ruutvormide teooriat kursusest "Algebra I". Selles paragrahvis vaatleme teist järku pindu ristreeperis.

Alustame nüüd pinna võrrandi lihtsustamist. Olgu teist järku pind p antud võrrandiga

$$p: \quad \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_i x_j + 2\sum_{i=1}^{3} a_i x_i + a = 0 \tag{19.1}$$

mingis ristreeperis $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Osutub, et tema ruutosa sümmeetriline maatriks A, mis on kirja pandud valemi (18.3) abil, tekitab ruutvormi, s.o. tekitab kujutuse

$$F: \quad \mathbf{E}_3 \longrightarrow \mathbb{R}. \tag{19.2}$$

Teeme seda järgmiselt. Iga vektori $\vec{x} \in \mathbf{E}_3$ korral avaldame ta ristreeperis sisalduva baasi kaudu, saades avaldisest $\vec{x} = \sum_{i=1}^{3} x_i \vec{e}_i$ vektori $\vec{x}$ koordinaadid x_1, x_2 ja x_3. Viimaste abil annamegi kujutuse (19.2) valemiga

$$\vec{x} \longmapsto F(\vec{x}) := \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_i x_j.$$

See definitsioon on korrektne, kui temas maatriks A on sümmeetriline ja üleminekul uuele reeperile ta teiseneb nii nagu peab teisenema ruutvormi maatriks, nimelt valemiga (18.13). Ruutvormide teooriast kasutame nüüd järgmist teoreemi, mille me siin ainult sõnastame kolmemõõtmelise vektorruumi korral.

Teoreem 19.1. (Vt [1], lk 280.) *Vektorruumis* $\mathbf{E}_3$ *leidub selline ristbaas* $\{\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3\}$, *mille korral ruutvormi maatriks* A *saab diagonaalkuju*

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \tag{19.3}$$

kusjuures λ_1, λ_2 *ja* λ_3 *on kuupvõrrandi* $|A-\lambda E|=0$ *lahendid.*

Viimases kuupvõrrandis ühikmaatriks E on *ristbaasivektorite skalaarkorrutiste maatriks*, mida tavaliselt tähistatakse G abil. Öeldu täpsemalt

$$G = (\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle) = (\delta_{ij}) = E.$$

Kuidas selles teoreemis deklareeritud ristbaasi leida, selleks arutleme veidi teisiti.

Definitsioon 19.1. *Regulaarset ruutmaatriksit* A *nimetame ortogonaalmaatriksiks, kui* $A^{-1} = A^{\top}$.

Teoreem 19.2. *Üleminek ühelt ristbaasilt teisele ristbaasile toimub ortogonaalmaatriksi abil.*

Tõestus. Olgu baas $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ ristbaas. Seetõttu tema baasivektorid on paarikaupa risti ja pikkusega üks, s.o.

$$\vec{e}_i \perp \vec{e}_j \quad (i<j), \quad |\vec{e}_i| = 1, \quad i,j \in \{1,2,3\}.$$

Need tingimused saab kompaktselt kirja panna skalaarkorrutamise ja Kroneckeri sümboli abil:

$$\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \delta_{ij}, \quad i,j \in \{1,2,3\}.$$

Üleminek uuele ristbaasile $\{\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3\}$ toimub valemitega

$$\vec{e}\,'_i = \sum_{s=1}^{3} c_{si}\vec{e}_s, \quad i \in \{1,2,3\}. \tag{19.4}$$

Siin baasiteisendusemaatriks

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

on regulaarne maatriks, mistõttu omab ta pöördmaatriksit C^{-1}. Kuna uus baas $\{\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3\}$ on ristbaas, siis ka tema korral

$$\langle \vec{e}\,'_i, \vec{e}\,'_j \rangle = \delta_{ij}, \quad i,j \in \{1,2,3\}.$$

Asendades siia valemist (19.4), saame

$$\langle \vec{e}\,'_i, \vec{e}\,'_j \rangle = \delta_{ij} \Longleftrightarrow \langle \sum_{s=1}^{3} c_{si}\vec{e}_s, \sum_{t=1}^{3} c_{tj}\vec{e}_t \rangle = \delta_{ij} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{s,t=1}^{3} c_{si}c_{tj}\langle \vec{e}_s, \vec{e}_t \rangle = \delta_{ij} \Longleftrightarrow \sum_{s,t=1}^{3} c_{si}\delta_{st}c_{tj} = \delta_{ij} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{s=1}^{3} c_{si}c_{sj} = \delta_{ij}.$$

Saadud seose saame kirjutada maatrikskujul. Nimelt $C^\top C = E$. Korrutades seda paremalt maatriksiga C^{-1}, saame $C^\top = C^{-1}$. Teoreem on tõestatud. ♠

Pinna ruutosa maatriksi A teisenemise eeskirja (18.13) üleminekul ristbaasilt ristbaasile saame kirja panna ka järgmiselt

$$A\,' = C^{-1}AC.$$

See asjaolu võimaldab korrektselt defineerida veel ka lineaarteisenduse

$$\varphi : \mathbf{E}_3 \longrightarrow \mathbf{E}_3; \quad \vec{x} = \sum_{i=1}^{3} x_i\vec{e}_i \longmapsto \varphi(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{3}\Big(\sum_{s=1}^{3} a_{is}x_s\Big)\vec{e}_i. \qquad (19.5)$$

Kuna maatriks A *on sümmeetriline, siis valem* (19.5) *annab täpsemalt sümmeetrilise lineaarteisenduse.* Toome kaks fakti sümmeetrilise lineaarteisenduse kohta (vt. [1], lk.-d 260–261).

Teoreem 19.3. *Sümmeetrilise lineaarteisenduse karakteristliku kuupvõrrandi* $|A - \lambda E| = 0$ *lahendid* λ_1, λ_2 *ja* λ_3 *on reaalsed.*

Teoreem 19.4. *Sümmeetrilise lineaarteisenduse korral normeeritud omavektoritest saab moodustada ristbaasi, mille suhtes lineaarteisenduse maatriks on diagonaalkujuga*

$$A\,' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Teoreemi 19.1 rakendamine tagab, et saame ristreeperilt $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ üle minna sellisele ristreeperile $\{O; \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3\}$, mille suhtes teist järku pinna võrrand (19.1) saab kuju

$$p: \quad \sum_{i=1}^{3} (\lambda_i \overline{x}_i^2 + 2\overline{a}_i \overline{x}_i) + a = 0. \tag{19.6}$$

Viimases $\overline{x}_i$ on punkti X uued koordinaadid. Meie käsutuses on veel võimalus muuta ristreeperi alguspunkti. Oluline on seejuures, et maatriks (19.3) ei muutu, nagu näeme valemist (18.9). Teisiti öelduna valemis (19.6) ruutosa ei muutu. Järgnevas me jagame teist järku pinnad alajuhtudeks maatriksi (19.3) astaku järgi ja seejuures igal juhul eraldi selgitame millisesse punkti viime ristreeperi alguspunkti.

I. Olgu $rank A' = 3$. Sel korral valemis (19.6) kõik λ_i on nullist erinevad. Teist järku pinna võrrandi (19.6) saab täisruutude välja eraldamisega viia kujule

$$\sum_{i=1}^{3} \lambda_i \Big(\overline{x}_i + \frac{\overline{a}_i}{\lambda_i}\Big)^2 + \ \overline{a} = 0,$$

kus $\overline{a} = a - \frac{\overline{a}_i^2}{\lambda_i}$. Võtame ristreeperi uueks alguspunktiks

$$O'\Big(-\frac{\overline{a}_1}{\lambda_1}, -\frac{\overline{a}_2}{\lambda_2}, -\frac{\overline{a}_3}{\lambda_3}\Big).$$

Viimase ristreeperi korral pinna võrrand saab kuju

$$\lambda_1 \tilde{x}_1^2 + \lambda_2 \tilde{x}_2^2 + \lambda_3 \tilde{x}_3^2 + \overline{a} = 0. \qquad (19.7).$$

Siin saame välja eraldada järgmised alamjuhud.

1. Kui λ_1, λ_2, λ_3 ja $-\overline{a}$ on samamärgilised, siis võrrandist (19.7) me saame

$$\frac{\tilde{x}_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{\tilde{x}_2^2}{\alpha_2^2} + \frac{\tilde{x}_3^2}{\alpha_3^2} = 1, \tag{19.8}$$

kus

$$\alpha_i := \sqrt{-\frac{\overline{a}}{\lambda_i}} > 0, \quad i \in \{1, 2, 3\}.$$

Võrrand (19.8) *on ellipsoidi kanooniline võrrand.*

2. Kui $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ja $\overline{a}$ on samamärgilised, siis võrrandist (19.7) me saame
$$\frac{\tilde{x}_1^2}{\alpha_1^2}+\frac{\tilde{x}_2^2}{\alpha_2^2}+\frac{\tilde{x}_3^2}{\alpha_3^2}=-1, \tag{19.9}$$
kus
$$\alpha_i := \sqrt{\frac{\overline{a}}{\lambda_i}} > 0, \quad i \in \{1,2,3\}.$$
Võrrandit (19.9) ei rahulda mitte ühegi punkti koordinaadid. Kuna võrrand (19.9) on väliselt sarnane ellipsoidi kanooniline võrrandiga, siis seda teist järku pinda nimetame *imaginaarseks ellipsoidiks.*

3. Kui $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ on samamärgilised ja $\overline{a}=0$, siis võrrandist (19.7) me saame
$$\frac{\tilde{x}_1^2}{\alpha_1^2}+\frac{\tilde{x}_2^2}{\alpha_2^2}+\frac{\tilde{x}_3^2}{\alpha_3^2}=0, \tag{19.10}$$
kus
$$\alpha_i := \sqrt{\frac{1}{|\lambda_i|}} > 0, \quad i \in \{1,2,3\}.$$
Võrrandit (19.10) rahuldavad ainult punkti $O'(0,0,0)$ koordinaadid. Kuna võrrand (19.10) on väliselt sarnane allpool saadava teist järku koonuse võrrandiga, siis nimetame siin saadud pinda *imaginaarseks teist järku koonuseks.*

4. Kui $\lambda_1, \lambda_2, -\lambda_3$ ja $-\overline{a}$ on samamärgilised, siis võrrandist (19.7) me saame
$$\frac{\tilde{x}_1^2}{\alpha_1^2}+\frac{\tilde{x}_2^2}{\alpha_2^2}-\frac{\tilde{x}_3^2}{\alpha_3^2}=1, \tag{19.11}$$
kus
$$\alpha_i := \sqrt{-\frac{\overline{a}}{\lambda_i}} > 0, \quad i \in \{1,2,\}, \quad \alpha_3 := \sqrt{\frac{\overline{a}}{\lambda_3}} > 0.$$
Võrrand (19.11) *on ühekattelise hüperboloidi kanooniline võrrand.*

5. Kui $\lambda_1, \lambda_2, -\lambda_3$ ja $\overline{a}$ on samamärgilised, siis võrrandist (19.7) me saame
$$\frac{\tilde{x}_1^2}{\alpha_1^2}+\frac{\tilde{x}_2^2}{\alpha_2^2}-\frac{\tilde{x}_3^2}{\alpha_3^2}=-1, \tag{19.12}$$

kus

$$\alpha_i := \sqrt{\frac{\overline{a}}{\lambda_i}} > 0, \quad i \in \{1, 2, \}, \quad \alpha_3 := \sqrt{-\frac{\overline{a}}{\lambda_3}}.$$

Võrrand (19.12) *on kahekattelise hüperboloidi kanooniline võrrand.*

6. Kui λ_1, λ_2, $-\lambda_3$ on samamärgilised ja $\overline{a} = 0$, siis võrrandist (19.7) me saame

$$\frac{\tilde{x}_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{\tilde{x}_2^2}{\alpha_2^2} - \frac{\tilde{x}_3^2}{\alpha_3^2} = 0, \tag{19.13}$$

kus

$$\alpha_i := \sqrt{\frac{1}{|\lambda_i|}} > 0, \quad i \in \{1, 2, 3\}.$$

Võrrand (19.13) *on teist järku koonuse kanooniline võrrand.*

Sellega juht I on ammendatud. Ükskõik kuidas valida jutuks olevate kordajate märke, me uusi teist järku pinna tüüpe ei saa. Veenduge.

II. Olgu $rankA' = 2$. Sel korral maatriksis A' üks diagonaalielementidest on null ja kaks on nullist erinevad. Viimases ristreeperis baasivektoreid ära vahetades, alati saavutame, et nimelt λ_3 on võrdne nulliga. Võrrandi (19.6) täisruutude väljaeraldamisega saame esitada kujul

$$\lambda_1\Big(\overline{x}_1 + \frac{\overline{a}_1}{\lambda_1}\Big)^2 + \lambda_2\Big(\overline{x}_2 + \frac{\overline{a}_2}{\lambda_2}\Big)^2 + \ 2\overline{a}_3\overline{x}_3 + \overline{a} = 0, \tag{19.14}$$

kus $\overline{a} = a - \frac{(\overline{a}_1)^2}{\lambda_1} - \frac{(\overline{a}_2)^2}{\lambda_2}$.

Olgu võrrandis (19.14) kordaja $\overline{a}_3 \neq 0$. Sel korral saab selle võrrandi esitada kujul

$$\lambda_1\Big(\overline{x}_1 + \frac{\overline{a}_1}{\lambda_1}\Big)^2 + \lambda_2\Big(\overline{x}_2 + \frac{\overline{a}_2}{\lambda_2}\Big)^2 + \ 2\overline{a}_3\Big(\overline{x}_3 + \frac{\overline{a}}{2\overline{a}_3}\Big) = 0. \tag{19.15}$$

Võtame ristreeperi alguspunktiks

$$O'\Big(-\frac{\overline{a}_1}{\lambda_1}, -\frac{\overline{a}_2}{\lambda_2}, -\frac{\overline{a}}{2\overline{a}_3}\Big).$$

Tähistame selles ristreeperis $\{O'; \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3\}$ punkti koordinaate $\tilde{x}_i$ abil. Võrrand (19.15) saab kuju

$$\lambda_1\tilde{x}_1^2 + \lambda_2\tilde{x}_2^2 + 2\overline{a}_3\tilde{x}_3 = 0. \tag{19.16}$$

7. Olgu võrrandis (19.16) kordajad λ_1 ja λ_2 samamärgilised. Üldsust kitsendamata võime eeldada veel, et samas võrrandis kordaja $-\overline{a}_3$ on ka sama märgiga kui λ_1 ja λ_2. Vastasel juhul asendame kasutusel olevas ristreeperis kolmanda baasivektori oma vastandvektoriga. Loodan, et lugeja on juba märganud, et võrrand (19.16) säilitab seejuures oma kuju. Saame

$$\frac{\tilde{x}_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{\tilde{x}_2^2}{\alpha_2^2} = 2\tilde{x}_3, \tag{19.17}$$

kus

$$\alpha_i := \sqrt{-\frac{\overline{a}_3}{\lambda_i}} > 0, \quad i \in \{1, 2\}.$$

Võrrand (19.17) *on elliptilise paraboloidi kanooniline võrrand.*

8. Olgu võrrandis (19.16) kordajad λ_1 ja $-\lambda_2$ samamärgilised. Üldsust kitsendamata võime siis eeldada, et ka kordajad λ_1, $-\lambda_2$ ja $-\overline{a}_3$ on samamärgilised. Võrrandi (19.16) saame kirjutada kujul:

$$\frac{\tilde{x}_1^2}{\alpha_1^2} - \frac{\tilde{x}_2^2}{\alpha_2^2} = 2\tilde{x}_3, \tag{19.18}$$

kus

$$\alpha_1 := \sqrt{-\frac{\overline{a}_3}{\lambda_1}} > 0, \quad \alpha_2 := \sqrt{\frac{\overline{a}_3}{\lambda_2}} > 0.$$

Võrrand (19.18) *on hüperboolse paraboloidi kanooniline võrrand.*

Järgmise teist järku pinna kanoonilise võrrandi saamiseks pöördume tagasi võrrandi (19.14) juurde, kus meil toimus hargnemine. Nüüd me oletame, et selles võrrandis on $\overline{a}_3 = 0$. Sel korral võrrand (19.14) lihtsustub järgmiseks võrrandiks:

$$\lambda_1\Big(\overline{x}_1 + \frac{\overline{a}_1}{\lambda_1}\Big)^2 + \lambda_2\Big(\overline{x}_2 + \frac{\overline{a}_2}{\lambda_2}\Big)^2 + \ \overline{a} = 0, \tag{19.19}$$

Võtame ristreeperi alguspunktiks

$$O'\Big(-\frac{\overline{a}_1}{\lambda_1}, -\frac{\overline{a}_2}{\lambda_2}, 0\Big).$$

Muuseas lisame, et tegelikult alguspunkti kolmandaks koordinaadiks võib võtta millise arvu iganes. Tähistame selles ristreeperis $\{O'; \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$ punkti koordinaate $\tilde{x}_i$ abil. Võrrand (19.19) saab kuju

$$\lambda_1 \tilde{x}_1^2 + \lambda_2 \tilde{x}_2^2 + \quad \overline{a} = 0. \tag{19.20}$$

Selle võrrandi abil leiame järgmiste teist järku pindade kanoonilised võrrandid.

9. Olgu võrrandis (19.20) kordajad λ_1, λ_2 ja $-\overline{a}$ samamärgilised. Võrrandi (19.20) saame esitada kujul

$$\frac{\tilde{x}_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{\tilde{x}_2^2}{\alpha_2^2} = 1, \tag{19.21}$$

kus

$$\alpha_i := \sqrt{-\frac{\overline{a}}{\lambda_i}} > 0, \quad i \in \{1, 2\}.$$

Võrrand (19.21) *on elliptilise silindri kanooniline võrrand.*

10. Olgu võrrandis (19.20) nüüd kordajad λ_1, λ_2 ja $\overline{a}$ samamärgilised. Võrrandi (19.20) saame esitada kujul

$$\frac{\tilde{x}_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{\tilde{x}_2^2}{\alpha_2^2} = -1, \tag{19.22}$$

kus

$$\alpha_i := \sqrt{\frac{\overline{a}}{\lambda_i}} > 0, \quad i \in \{1, 2\}.$$

Võrrandit (19.22) ei rahuldada mitte ühegi punkti koordinaadid. *Ilma punktideta teist järku pinda, mille kanooniliseks võrrandiks on* (19.22), *nimetatakse imaginaarseks elliptiliseks silindriks.*

11. Olgu võrrandis (19.20) kordajad λ_1, $-\lambda_2$ ja $-\overline{a}$ samamärgilised. Võrrandi (19.20) saame esitada kujul

$$\frac{\tilde{x}_1^2}{\alpha_1^2} - \frac{\tilde{x}_2^2}{\alpha_2^2} = 1, \tag{19.23}$$

kus

$$\alpha_1 := \sqrt{-\frac{\overline{a}}{\lambda_1}} > 0, \quad \alpha_2 := \sqrt{\frac{\overline{a}}{\lambda_1}} > 0.$$

Võrrand (19.23) *on hüperboolse silindri kanooniline võrrand.*

12. Olgu võrrandis (19.20) kordajad λ_1, λ_2 samamärgilised ja $\overline{a} = 0$. Võrrandi (19.20) saame esitada kujul

$$\frac{\tilde{x}_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{\tilde{x}_2^2}{\alpha_2^2} = 0, \tag{19.24}$$

kus

$$\alpha_i := \sqrt{\frac{1}{|\lambda_i|}} > 0, \quad i \in \{1, 2\}.$$

Siit saame $\tilde{x}_1 = 0$, $\tilde{x}_2 = 0$ ja $\tilde{x}_3$ on suvaline reaalarv. Seega võrrandi (19.24) poolt määratud punktihulgaks on sirge, milleks praeguse ristreeperi korral on $\tilde{x}_3$-telg. *Teist järku pinda kanoonilise võrrandiga* (19.24) *nimetatakse kaheks lõikuvaks imaginaarseks tasandiks reaalse lõikesirgega.* Selle nimetuse õigustamiseks esitame võrrandi (19.24) üle kompleksarvude kahe teguri korrutisena. Nimelt

$$\Big(\frac{\tilde{x}_1}{\alpha_1} + i\frac{\tilde{x}_2}{\alpha_2}\Big)\Big(\frac{\tilde{x}_1}{\alpha_1} - i\frac{\tilde{x}_2}{\alpha_2}\Big) = 0$$

ehk

$$\Big(\frac{\tilde{x}_1}{\alpha_1} + i\frac{\tilde{x}_2}{\alpha_2} = 0\Big) \vee \Big(\frac{\tilde{x}_1}{\alpha_1} - i\frac{\tilde{x}_2}{\alpha_2} = 0\Big).$$

Siin i on imaginaarühik. Viimane annabki imaginaarsete lõikuvate tasandite paari reaalse lõikesirgega.

13. Olgu võrrandis (19.20) kordajad λ_1, $-\lambda_2$ samamärgilised ja $\overline{a} = 0$. Võrrandi (19.20) saame esitada kujul

$$\frac{\tilde{x}_1^2}{\alpha_1^2} - \frac{\tilde{x}_2^2}{\alpha_2^2} = 0, \tag{19.25}$$

kus

$$\alpha_i := \sqrt{\frac{1}{|\lambda_i|}} > 0, \quad i \in \{1, 2\}.$$

Kuna võrrandi (19.25) saab esitada kujul

$$\Big(\frac{\tilde{x}_1}{\alpha_1} + \frac{\tilde{x}_2}{\alpha_2} = 0\Big) \vee \Big(\frac{\tilde{x}_1}{\alpha_1} - \frac{\tilde{x}_2}{\alpha_2} = 0\Big),$$

siis *võrrand* (19.25) *annab teist järku pinnaks kaks lõikuvat tasandit.*

Sellega juht II on ammendatud. Ükskõik kuidas valida jutuks olevate kordajate märke me uusi teist järku pinna tüüpe ei saa. Veenduge.

III. Olgu $rankA' = 1$. Sel korral maatriksis A' kaks diagonaalielementidest on nullid ja ainult üks on nullist erinev. Viimases ristreeperis baasivektoreid ära vahetades, alati saavutame, et nimelt λ_1 ja λ_2 on võrdsed nulliga. Võrrandi (19.6) saame esitada kujul

$$p: \quad \lambda_3 \overline{x}_3^2 + 2\sum_{i=1}^{3} \overline{a}_i \overline{x}_i + a = 0. \tag{19.26}$$

Vaatleme siin esmalt olukorda, kus lineaarosa kordajatest $\overline{a}_1$ ja $\overline{a}_2$ ei ole korraga võrdsed nulliga. Sel korral saame ristreeperis $\{O; \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3\}$ parandada baasiosa $\{\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3\}$, mille tulemusena muutub $\overline{a}_2$ nulliks, kuid $\overline{a}_1$ jääb nullist erinevaks. Selgitame nüüd öeldut lähemalt. Teeme baasiteisenduse

$$\begin{aligned} \vec{e}\,''_1 &= k(\overline{a}_1 \vec{e}\,'_1 + \overline{a}_2 \vec{e}\,'_2), \\ \vec{e}\,''_2 &= k(\overline{a}_2 \vec{e}\,'_1 - \overline{a}_1 \vec{e}\,'_2), \\ \vec{e}\,''_3 &= \vec{e}\,'_3, \end{aligned} \tag{26.27}$$

kus

$$k := \frac{1}{\sqrt{(\overline{a}_1)^2 + (\overline{a}_2)^2}} \neq 0.$$

Kerge on näha, et $\langle \vec{e}\,''_i, \vec{e}\,''_j \rangle = \delta_{ij}$ mistõttu baas $\{\vec{e}\,''_1, \vec{e}\,''_2, \vec{e}\,''_3\}$ on ristbaas ja järelikult reeper

$$\{O; \vec{e}\,''_1, \vec{e}\,''_2, \vec{e}\,''_3\}$$

ristreeper. Selgitame, mis juhtus sellele ristreeperile üleminekul võrrandi (19.26) kordajatega. Uued ruutosa kordajad leiame valemi (18.11) abil, arvestades, et C ja A asemel on

$$C' = \begin{pmatrix} k\overline{a}_1 & k\overline{a}_2 & 0 \\ k\overline{a}_2 & -k\overline{a}_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Siin C' saamiseks kasutasime valemit (19.27). Kergesti näeme, et maatriks A' ei teisene sest

$$A'' = (C')^\top A' C' = A'.$$

Järelikult valemis (19.26) ruutosa ei muutu. Lineaarosa kordajate teisenemise leiame valemite (18.12) abil. Lugejale jätame kontrollida, et

$$a''_1 = \sqrt{(\overline{a}_1)^2 + (\overline{a}_2)^2} \neq 0, \quad a''_2 = 0, \quad a''_3 = \overline{a}_3.$$

Tähistame punkti koordinaate valitud ristreeperi korral $\hat{x}_i$ abil. Sama valemi (18.12) abil näeme, et vabaliige a jääb muutumatuks. Võrrand (19.26) saab kuju

$$p: \quad \lambda_3 \hat{x}_3^2 + 2a''_1 \hat{x}_1 + 2a''_3 \hat{x}_3 + a = 0$$

ehk

$$p: \quad \lambda_3 \Big(\hat{x}_3 + \frac{a''_3}{\lambda_3} \Big)^2 + 2a''_1 \Big(\hat{x}_1 + \frac{\overline{a}}{2a''_1} \Big) = 0, \qquad (19.28)$$

kus $\overline{a} = a - \frac{(a''_3)^2}{\lambda_3}$. Võtame ristreeperi alguspunktiks

$$O' \Big(-\frac{\overline{a}}{2a''_1}, 0, -\frac{a''_3}{\lambda_3} \Big).$$

Tähistame uues ristreeperis punkti koordinaate $\tilde{x}_i$ abil. Võrrandile (19.28) saame kuju

$$\lambda_3 \tilde{x}_3^2 + 2a''_1 \tilde{x}_1 = 0. \qquad (19.29)$$

Selle võrrandi abil jätkame uute teist järku pindade kanooniliste võrrandite otsimist. Tegelikult saame siit ainult ühe teist järku pinna.

14. Vajaduse korral asendades esimese baasivektori vastandvektoriga, saame alati eeldada, et λ_3 ja $-a''_1$. samamärgilised. Sel korral võrrandi saame esitada kujul

$$\tilde{x}_3^2 = 2p\tilde{x}_1, \qquad (19.30)$$

kus $p = \frac{-a''_1}{\lambda_3.} > 0$. *Tegemist on paraboolse silindriga, mille kanooniliseks võrrandiks on* (19.30).

Pöördume tagasi võrrandi (19.26) juurde ja vaatleme juhtu $\overline{a}_1 = 0$ ja $\overline{a}_2 = 0$. Sel korral see võrrand saab kuju

$$\lambda_3 \overline{x}_3^2 + 2\overline{a}_3 \overline{x}_3 + a = 0.$$

ehk

$$\lambda_3\Big(\overline{x}_3 + \frac{\overline{a}_3}{\lambda_3}\Big) + \overline{a} = 0, \tag{19.31}$$

kus $\overline{a} = a - \frac{(\overline{a}_3)^2}{\lambda_3}$. Võtame nüüd reeperi alguspunktiks

$$O'\Big(0, 0, -\frac{\overline{a}_3}{\lambda_3}\Big).$$

Tähistame valitud ristreeperis punkti koordinaate $\tilde{x}_i$ abil. Võrrand (19.31) omandab kuju

$$\lambda_3\tilde{x}_3^2 + \overline{a} = 0. \tag{19.32}$$

Analüüsides siin kordajaid, saame viimased kolm teist järku pinnatüüpi.

15. Kui λ_3 ja $-\overline{a}$ on samamärgilised, siis võrrandile (19.31) saame anda kuju

$$\tilde{x}_3^2 - \alpha^2 = 0, \tag{19.33}$$

kus $\alpha = \sqrt{-\frac{\overline{a}}{\lambda_3}} > 0$. *Tegemist on kahe paralleelse tasandiga,* sest võrrandi (19.33) võib esitada kahe omaette võrrandina

$$(\tilde{x}_3 + \alpha = 0) \vee (\tilde{x}_3 - \alpha = 0).$$

16. Kui λ_3 ja $\overline{a}$ on samamärgilised, siis võrrandile (19.30) saame anda kuju

$$\tilde{x}_3^2 + \alpha^2 = 0, \tag{19.34}$$

kus $\alpha = \sqrt{\frac{\overline{a}}{\lambda_3}} > 0$. Viimast võrrandit ei rahulda mitte ühegi punkti koordinaadid. Seega on tegemist teist järku pinnaga, millel ei ole punkte. *Teist järku pinda kanoonilise võrrandiga* (19.34) *nimetatakse imaginaarsete paralleelsete tasandite paariks.* Selline nimetus tuleneb asjaolust, et ka võrrandi (19.34) saab lahutada teguriteks nagu võrrandi (19.33), kuid nüüd üle kompleksarvude. Täpsemalt

$$(\tilde{x}_3 + i\alpha = 0) \vee (\tilde{x}_3 - i\alpha = 0),$$

millest näemegi, et tegemist on paralleelse tasandipaariga, kuid on saadud üle kompleksarvude.

17. Kui $\overline{a} = 0$, siis võrrandist (19.33) saame

$$\tilde{x}_3^2 = 0. \tag{19.35}$$

Sellel võrrandil, kui ruutvõrrandil, on kaks lahendit, mis praegu langevad kokku. Nimelt $\tilde{x}_3 = 0$. See on aga tasandi võrrand. Valitud ristreeperi korral on tegemist $(\tilde{x}_1\tilde{x}_2)$-koordinaattasandiga. *Kokkuvõttes, teist järku pind kanoonilise võrrandiga* (19.35) *on kaks ühtuvat tasandit.*

20. TEIST JÄRKU PINNA LÕIKAMINE SIRGEGA. ASÜMPTOOTILISED SIHID

Olgu antud teist järku pind p võrrandiga

$$p: \quad \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_i x_j + 2\sum_{i=1}^{3} a_i x_i + a = 0 \tag{20.1}$$

mingi reeperi $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ suhtes. Siin reeper ei pea ilmtingimata olema ristreeper. Lõikame seda teist järku pinda p mingi sirgega s, mille anname temal fikseeritud punkti $B(b_1, b_2, b_3)$ ja sihivektori $\vec{s} = (s_1, s_2, s_3) \neq \vec{0}$ abil. Lõikepunkti(de) $p \cap s$ koordinaatide leidmine on kõige lihtsam, kui sirge s on antud parameetriliste võrranditega

$$x_i = b_i + s_i t, \quad i \in \{1, 2, 3\}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{20.2}$$

Kuna lõikepunkt(id) asub(asuvad) sama-aegselt teist järku pinnal p ja lõikesirgel s, siis lõikepunktide koordinaatide leidmiseks tuleb lahendada võrrandisüsteem, mis koosneb võrranditest (20.1) ja (20.2). Asendades sirge (20.2) võrrandid pinna võrrandisse (20.1), me saame

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}(b_i + s_i t)(b_j + s_j t) + 2\sum_{i=1}^{3} a_i(b_i + s_i t) + a = 0.$$

Korrastades selle parameetri t astmete järgi, saame

$$\Big(\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}s_i s_j\Big)t^2 + \Big(\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}b_i s_j + \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}s_i b_j + 2\sum_{i=1}^{3} a_i s_i\Big)t +$$

$$+\Big(\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}b_i b_j + 2\sum_{i=1}^{3} a_i b_i + a\Big) = 0.$$

Osutub, et siin

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}b_i s_j = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}s_i b_j.$$

Selle näitamiseks arvestame esiteks $a_{ij} = a_{ji}$, teiseks vahetame sumeerimisindekseid – vahetame indeksid i ja j omavahel – ja kolmandaks vahetame kahekordses summas summade leidmise järjekorra. Pannes öeldu samm-sammult kirja, saame

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} s_i b_j = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ji} s_i b_j = \sum_{j,i=1}^{3} a_{ij} s_j b_i = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} b_i s_j.$$

Seega

$$\Big(\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} s_i s_j\Big) t^2 + 2\Big(\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} b_i s_j + \sum_{i=1}^{3} a_i s_i\Big) t +$$

$$+\Big(\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} b_i b_j + 2\sum_{i=1}^{3} a_i b_i + a\Big) = 0.$$

Viimase saame kirjutada kompaktsemalt, kui tähistame

$$A := \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} s_i s_j, \quad B := \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} b_i s_j + \sum_{i=1}^{3} a_i s_i, \tag{20.3}$$

$$C := \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} b_i b_j + 2\sum_{i=1}^{3} a_i b_i + a = f(b_1, b_2, b_3). \tag{20.4}$$

Saame

$$At^2 + 2Bt + C = 0. \tag{20.5}$$

Juhime siin kahele asjale tähelepanu. Esiteks loodame, et siin kasutatud tähega A, ei lähe segamini üle-eelmises paragrahvis sama tähega tähistatud teist järku pinna ruutosa kordajatest moodustatud kolmandat järku maatriksiga. Teine märkus on seotud samuti kordajaga A. Kui me samaaegselt teist järku pinda lõikame ka teise sirgega, mille sihivektorit olgu tähistatud vektoriga $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$. Siis tekib samuti kordaja

$$A = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} u_i u_j,$$

mis on hoopis teine arv, kui valemis (20.3). Segaduse vältimiseks lisame tähele A argumendiks sulgudesse sirge sihivektori. Seega valemis (20.3) olevat A täpsemalt tähistame $A(\vec{s})$ abil. Viimasel juhul aga saame $A(\vec{u})$. Seda täpsustust kasutame muidugi siis, kui selle eristamise järele tekib vajadus.

Võrrandi (20.5) lahendamisel saame kätte need konkreetsed parameetri t väärtused, mille asendamisel sirge s parameetrilistesse võrranditesse (20.2), tekivad lõikepunkti(de) koordinaadid, seega ka lõikepunkti(d). Lõikepunkte tekib samapalju, kuipalju on võrrandil (20.5) lahendeid. Siin on mõeldavad järgmised olukorrad.

1) Kui kordaja $A \neq 0$, siis võrrand (20.5) on tundmatu t suhtes ruutvõrrand. Seega on tal kaks lahendit

$$t_{1;2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A}. \tag{20.6}$$

Sirge s lõikab teist järku pinda p kahes punktis. Millised need lõikepunktid on, sõltub valemi (20.6) diskriminandist

$$\mathcal{D} := B^2 - AC.$$

Kui $\mathcal{D} > 0$, siis lahendid t_1 ja t_2 on reaalsed ja seejuures erinevad. Saame kaks erinevat lõikepunkti, mida tähistame

$$Q_1(q_1^{(1)}, q_2^{(1)}, q_3^{(1)}), \quad Q_2(q_1^{(2)}, q_2^{(2)}, q_3^{(2)}))$$

abil. Siin oleme tähistanud

$$q_i^{(\alpha)} := b_i + s_i t_\alpha, \quad i \in \{1, 2, 3\}, \quad \alpha \in \{1, 2\}. \tag{20.7}$$

Lõikepunktid Q_1 ja Q_2 on tõepoolest erinevad, sest oletades vastuväiteliselt, et nad langevad kokku, siis saame

$$Q_1 = Q_2 \Longleftrightarrow q_i^{(1)} = q_i^{(2)}, \quad i \in \{1, 2, 3\} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow b_i + s_i t_1 = b_i + s_i t_2, \quad i \in \{1, 2, 3\} \Longleftrightarrow s_i(t_1 - t_2) = 0, \quad i \in \{1.2.3\}.$$

Kuna $\vec{s} \neq \vec{0}$, siis tema koordinaadid s_i ei ole korraga nullid. Seega ühest viimasest kolmest tingimusest saame $t_1 = t_2$. Valem (20.6) lubab öelda $\mathcal{D} = 0$, saades vastuolu, sest $\mathcal{D} > 0$.

Kui $\mathcal{D} < 0$, siis erinevad lahendid t_1 ja t_2 ei ole reaalsed, öeldakse, et *lahendid on imaginaarsed ehk mittereaalsed.* Seega sirge s lõikab teist järku pinda p kahes erinevas mittereaalsete koordinaatidega punktis. Analoogiliselt nagu $\mathcal{D} > 0$ korral veendume, et lõikepunktid Q_1 ja Q_2 on tõepoolest erinevad.

Kui $\mathcal{D} = 0$, siis võrrandi (20.6) lahendid ühtuvad, sest $t_1 = t_2 = \frac{-B}{A}$. Seega tekib kaks lõikepunkti Q_1 ja Q_2, mis langevad kokku, kuna neil on ühesugused koordinaadid.

2) Kui $A = 0$ ja $B \neq 0$, siis võrrand (20.5) saab kuju

$$2Bt + C = 0.$$

Viimasel on ainult üks lahend. Nimelt

$$t_0 = -\frac{C}{2B}, \quad B \neq 0.$$

Sirge s lõikab teist jätku pinda p ainult ühes punktis $Q(q_1, q_2, q_3)$, kus $q_i = b_i + s_i t_0$.

3) Kui $A = 0$ ja $B = 0$ ja $C \neq 0$, siis võrrand (20.5) saab kuju

$$0t^2 + 0Bt + C = 0, \quad C \neq 0.$$

Sellel võrrandil ei ole lahendit. Seega sirge s ei lõika teist järku pinda p.

4) Kui võrrandis (20.5) kõik kordajad on võrdsed nulliga, siis on $A = B = C = 0$. Võrrand (20.5) saab kuju

$$0t^2 + 0t + 0 = 0$$

(sisuliselt kaob ära). Viimast rahuldavad kõik reaalarvud. Seega sirge s ja pinna p lõikepunktideks on kõik sirge s punktid. Seega sirge s on täielikult teist järku pinnal p. Lõikepunktide analüüs on lõppenud.

Definitsioon 20.2. *Lineaarkatet* $L(\vec{s})$ *nimetatakse vektori* $\vec{s} \neq \vec{0}$ *poolt määratud sihiks.*

Näeme, et siht $L(\vec{s})$ on vektorruumi $\mathbf{E}_3$ ühemõõtmeline alamruum. Ilmselt iga nullvektorist erineva vektori $\vec{a} \in L(\vec{s})$ korral $L(\vec{a}) = L(\vec{s})$. Seega sihti määrav vektor on määratud kordse vektori täpsuseni.

Definitsioon 20.3. *Sihti* $L(\vec{s})$ *määratuna vektori* $\vec{s} = (s_1, s_2, s_3) \neq \vec{0}$ *poolt nimetame teist järku pinna* p *asümptootiliseks sihiks, kui*

$$A = 0 \Longleftrightarrow \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} s_i s_j = 0. \tag{20.8}$$

Paneme tähele, et kui kehtib viimane seos vektori $\vec{s}$ korral, siis ta kehtib ka iga vektori $\alpha\vec{s}$ korral. Seega asümptootilise sihi mõiste on tõepoolest sihiga , mitte vektoriga, seotud mõiste.

Definitsioon 20.4. *Sihti, mis ei ole asümptootiline, s.o.*

$$A \neq 0 \Longleftrightarrow \sum_{i,j=1} a_{ij} s_i s_j \neq 0.$$

nimetame mitteasümptootiliseks sihiks.

On huvitav teada palju asümptootilisi sihte omab üks või teine teist järku pind. Selleks kasutame eelmises paragrahvis saadud teist järku pinna kanoonilisi võrrandeid. Toome kõigepealt ära nende teist järku pindade kanoonilised võrrandid. Need on järgmised

1) Ellipsoid

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} + \frac{x_3^2}{\alpha_3^2} = 1.$$

2) Imaginaarne ellipsoid

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} + \frac{x_3^2}{\alpha_3^2} = -1.$$

3) Imaginaarne teist järku koonus

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} + \frac{x_3^2}{\alpha_3^2} = 0.$$

4) Ühekatteline hüperboloid

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} - \frac{x_3^2}{\alpha_3^2} = 1.$$

5) Kahekatteline hüperboloid

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} - \frac{x_3^2}{\alpha_3^2} = -1.$$

6) Teist järku koonus

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} - \frac{x_3^2}{\alpha_3^2} = 0.$$

7) Elliptiline paraboloid

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 2x_3.$$

8) Hüperboolne paraboloid

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} - \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 2x_3.$$

9) Elliptiline silinder

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 1.$$

10) Imaginaarne elliptiline silinder

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = -1.$$

11) Paar imaginaarseid lõikuvaid tasandeid

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 0.$$

12) Hüperboolne silinder

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} - \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 1.$$

13) Paar lõikuvaid tasandeid

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} - \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 0.$$

14) Paraboolne silinder

$$x_3^2 = 2px_1.$$

15) Paar paralleelseid tasandeid

$$x_3^2 - \alpha^2 = 0.$$

16) Paar imaginaarseid paralleelseid tasandeid

$$x_3^2 + \alpha^2 = 0.$$

17) Paar ühtuvaid tasandeid

$$x_3^2 = 0.$$

Kõigil neil konkreetsetel juhtudel asümptootiliste sihtide saamiseks tuleb moodustada võrrand (20.8).

Ellipsoidi, imaginaarse ellipsoidi ja imaginaarsete lõikuvate tasandite kanooniliste võrrandite ruutosad on ühesugused. Seega asümptootilist sihti määrav võrrand on ühesugune. Asümptootilise sihi võrrandist

$$\frac{s_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{s_2^2}{\alpha_2^2} + \frac{s_3^2}{\alpha_3^2} = 0.$$

saame $s_1 = s_2 = s_3 = 0$. Saadud lahendivektor $\vec{s} = (0, 0, 0)$ on nullvektor ja asümptootilist sihti ei määra. Seega ellipsoidil, imaginaarsel ellipsoidil ja imaginaarsetel lõikuvatel tasanditel asümptootilised sihid puuduvad.

Samuti ühe- ja kahekattelise hüperboloidi ning teist järku koonuse kanoonilistel võrranditel on ruutosa ühesugune. Seega asümptootilist sihti(sihte) määrav võrrand on ühesugune. Nimelt

$$\frac{s_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{s_2^2}{\alpha_2^2} - \frac{s_3^2}{\alpha_3^2} = 0.$$

Siit näeme, et sellel võrrandil on palju lahendeid. Me saame oma olukorda kirjeldada isegi täpsemalt. Kui asümptootilisi sihte määravad vektorid rakendada reeperi alguspunktist, siis kõigi nende pindade korral nende vektorite lõpp-punkt kirjeldab teist järku koonuse pooltelgedega α_1, α_2 ja α_3.

Elliptilise paraboloidi, elliptilise silindri ja imaginaarse elliptilise silidri kanooniliste võrrandite ruutosa on ühesugune. Seega saab koos käsitleda asümptootiliste sihtide probleemi. Võrrandist

$$\frac{s_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{s_2^2}{\alpha_2^2} = 0$$

saame $s_1 = s_2 = 0$, seejuures s_3 valikule ei saanud mitte mingisuguseid kitsendusi. Kuna sihti määrav vektor määratakse kordsuse täpsusega, siis võime võtta $s_3 = 1$. Seega elliptilisel paraboloidil, elliptilisel silindril ja imaginaarsel elliptilisel silindril on ainult üks asümptootiline siht, mis määratakse vektoriga $\vec{e}_3 = (0,0,1)$. Näeme, et tegemist on elliptilise paraboloidi, elliptilise silindri ja imaginaarse elliptilise silindri telje sihiga.

Samuti hüperboolse paraboloidi, hüperboolse silindri ja kahe lõikuva tasandi kanoonilise võrrandi ruutosa on ühesugune. Neil juhtudel võrrandist

$$\frac{s_1^2}{\alpha_1^2} - \frac{s_2^2}{\alpha_2^2} = 0,$$

saame

$$s_2 = \pm\frac{\alpha_2}{\alpha_1} s_1.$$

Asümptootilised sihid määratakse seega vektorite

$$\vec{s}_\beta = s_1(\alpha_1\vec{e}_1 \pm \alpha_2\vec{e}_2) + s_3\vec{e}_3, \quad \beta \in \{1,2\}, \quad (s_1, s_3) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \setminus (0,0)$$

poolt. Kui me rakendame kõik saadud vektorid reeperi alguspunktist, siis nende lõpp-punkt kirjeldab $\beta = 1$ korral ($\beta = 2$ korral) tasandi

$$\frac{x_1}{\alpha_1} - \frac{x_2}{\alpha_2} = 0 \quad \Big(\frac{x_1}{\alpha_1} + \frac{x_2}{\alpha_2} = 0\Big).$$

ilma reeperi alguspunktita. Need tasandid on tuntud eelmise peatüki sellest paragrahvist, kus me käsitlesime hüperboolse paraboloidi sirgjoonelisi moodustajaid (vt. § 17) .

Paraboolse silindri, paralleelse ja imaginaarse paralleelse ning ühtuva tasandipaari korral on samuti kanooniliste võrrandite ruutosad ühesugused. Võrrandist

$$s_2^2 = 0$$

saame kahekordse lahendi $s_2 = 0$, seejuures s_1 ja s_3 on suvalised ainukese nõudega, et asümptootilist sihti määrav vektor ei oleks nullvektor. Seega asümptootilised sihid määratakse vektorite

$$\vec{s} = (s_1, 0, s_3), \quad (s_1, s_3) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus (0, 0).$$

poolt.

21. TEIST JÄRKU PINNA KESKPUNKT

Olgu meil antud teist järku pind p võrrandiga

$$p: \quad \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_i x_j + 2\sum_{i=1}^{3} a_i x_i + a = 0 \tag{21.1}$$

mingi reeperi $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ suhtes. Siin reeper ei pea ilmtingimata olema ristreeper.

Definitsioon 21.1. *Me nimetame punkti $C(c_1, c_2, c_3)$ teist järku pinna keskpunktiks, kui tema koordinaadid rahuldavad lineaarvõrrandisüsteemi*

$$\sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_j + a_i = 0, \quad i \in \{1, 2, 3\}. \tag{21.2}$$

Teoreem 21.1. *Teist järku pind on sümmeetriline keskpunkti suhtes.*

Tõestus. Olgu $C(c_1, c_2, c_3)$ teist järku pinna p keskpunkt. Seega tema koordinaadid rahuldavad lineaarvõrrandisüsteemi (21.2), s.o.

$$\sum_{j=1}^{3} a_{ij}c_j + a_i = 0, \quad i \in \{1, 2, 3\}. \tag{21.3}$$

Meil on vaja näidata, et iga punkti $Y(y_1, y_2, y_3) \in p$ korral keskpunkti $C(c_1, c_2, c_3)$ suhtes sümmeetriline punkt, tähistame teda $\overline{Y}(\overline{y}_1, \overline{y}_2, \overline{y}_3)$ abil, asub ka pinnal p. Veendume selles. Kerge on kirja panna punkti $\overline{Y}$ koordinaadid punktide Y ja C koordinaatide kaudu, sest lõigu $Y\overline{Y}$ keskpunktiks peab olema keskpunkt C. Seega

$$\frac{1}{2}(y_i + \overline{y}_i) = c_i, \quad i \in \{1, 2, 3\} \Longleftrightarrow \overline{y}_i = 2c_i - y_i, \quad i \in \{1, 2, 3\}. \tag{21.4}$$

Eelduse kohaselt $Y \in p$, siis tema koordinaadid rahuldavad pinna p võrrandit (21.1), s.o.

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}y_i y_j + 2\sum_{i=1}^{3} a_i y_i + a = 0. \tag{21.5}$$

Meil tuleb nüüd näidata, et punkti $\overline{Y}$ koordinaadid rahuldavad ka võrrandit (21.1). See on tõepoolest nii, sest

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}\overline{y}_i\overline{y}_j + 2\sum_{i=1}^{3} a_i\overline{y}_i + a =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}(2c_i - y_i)(2c_j - y_j) + 2\sum_{i=1}^{3} a_i(2c_i - y_i) + a =$$

$$= \Big(\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}y_iy_j - 2\sum_{i=1}^{3} a_iy_i + a\Big) + 4\sum_{i=1}^{3}\Big(\sum_{j=1}^{3} a_{ij}c_j + a_i\Big)c_i - 4\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}c_iy_j =$$

$$= -4\sum_{i=1}^{3} a_iy_i + 4\sum_{i=1}^{3} 0 \;\; c_i - 4\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}c_iy_j =$$

$$= -4\sum_{i=1}^{3}\Big(\sum_{j=1}^{3} a_{ij}c_j + a_i\Big)y_i = -4\sum_{i=1}^{3} 0 \;\; y_i = 0.$$

Siin me kasutasime valemeid (21.4), (21.5) ja (21.3). Sellega teoreem on tõestatud. ♠

Analüüsime lineaarvõrrandisüsteemi (21.2). Tema lahendite hulk annab teist järku pinna keskpunktide hulga. Kroneckeri-Capelli teoreemi kohaselt sõltub lahendite probleem süsteemi maatriksi ja laiendatud maatriksi astakust, s.o. maatriksite

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_3 \end{pmatrix}$$

astakust. Muuseas esimene maatriks on teist järku pinna ruutosa maatriks, mis on antud valemiga (18.3). Ilmselt alati $rankA \leq rank\tilde{A}$. *Kui meil* $rankA < rank\tilde{A}$, *siis lineaarvõrrandisüsteemil* (21.3) *lahendid puuduvad. Teist järku pinnal ei ole keskpunkte. Kui* $rankA = rank\tilde{A}$, *siis teist järku pinnal on olemas keskpunkt*(*id*). *Täpsemalt* $rankA = rank\tilde{A} = 3$, $rankA = rank\tilde{A} = 2$ *ja* $rankA = rank\tilde{A} = 1$ *korral teist järku pinnal* *on vastavalt üks keskpunkt, keskpunktid moodustavad sirge ja keskpunktid moodustavad tasandi.*

Definitsioon 21.2. *Teist järku pinda nimetame tsentraalseks kui tal on ainult üks keskpunkt, muudel juhtudel nimetame mittetsentraalseks.* Tsentraalse (mittetsentraalse) teist järku pinna korral $\delta \neq 0$ $(\delta = 0)$.

Lõpuks selgitame, mitu keskpunkti on ühel või teisel teist järku pinnal. Selleks on kasulik tugineda eelmises paragrahvis toodud kanoonilistele võrranditele.

Ellipsoidi, imaginaarse ellipsoidi, imaginaarse teist järku koonuse, ühekattelise hüperboloidi, kahekattelise hüperboloidi ja teist järku koonuse korral maatriksi

$$A = \begin{pmatrix} \frac{i}{\alpha_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & \pm\frac{1}{\alpha_3^2} \end{pmatrix}$$

astak on $|A| \neq 0$ tõttu kolm. Sama suur on laiendatud maatriksi $\tilde{A}$ astak, sest astak ei saa ületada ridade arvu, s.o. kolme. Järelikult on nendel teist järku pindadel üks keskpunkt. Seega tegu on tsentraalsete teist järku pindadega. Võrrandisüsteemist (21.2) saame $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, mistõttu nende pindade kanooniliste võrrandite korral reeperi alguspunkt asub pinna keskpunktis.

Elliptilisel ja hüperboolsel paraboloidil keskpunktid puuduvad, sest maatriksite

$$A = \begin{pmatrix} \frac{i}{\alpha_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & \pm\frac{1}{\alpha_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} \frac{i}{\alpha_1^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm\frac{1}{\alpha_2^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p \end{pmatrix}$$

astakud ei ole võrdsed, sest $rank A = 2$ ja $rank \tilde{A} = 3$.

Elliptilise silindri, imaginaarse elliptilise silindri, reaalse lõikesirgega kahe imaginaarsete tasandi, hüperboolse silindri ja kahe lõikuva tasandi korral maatriksite

$$A = \begin{pmatrix} \frac{i}{\alpha_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & \pm\frac{1}{\alpha_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} \frac{i}{\alpha_1^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm\frac{1}{\alpha_2^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

korral $rank A = rank \tilde{A} = 2 < 3$. Seetõttu keskpunktid on olemas ja nad moodustavad sirge. Lineaarvõrrandisüsteem (21.2) praegu annab meile $x_1 = x_2 = 0$. Keskpunktide sirgeks on elliptilise, imaginaarse elliptilise ja hüperboolse silindri telg ning kahe imaginaarse lõikuva tasandi ja kahe lõikuva tasandi korral nende lõikesirge. Kõikidel neil viiel juhul kanoonilise võrrandi korral reeperi alguspunkt asub mistahes punktis keskpunktide sirgel.

Paraboolsel silindril ei ole keskpunkte, sest maatriksite

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -p \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

astakud on erinevad. Nimelt $rank A = 1$ ja $\tilde{A} = 2$.

Kolme viimase teist järku pinna korral, milleks on paar paralleelseid, paar imaginaarseid paralleelseid ja paar ühtuvaid tasandeid, keskpunktide hulk on tasand, sest maatriksite

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

astakud on võrdsed ja võrduvad ühega. Kuna astaku langus maksimaalsest on kaks, siis keskpunktide hulk on tasand. Nende pindade kanooniliste võrrandite korral valemi (21.2) abil näeme, et keskpunktide tasandiks on x_1x_2-koordinaattasand. Reeperi alguspunktiks on mistahes punkt sellel tasandil.

22. TEIST JÄRKU PINNA DIAMEETERTASAND. PEASIHID

Lõikame teist järku pinda p paralleelsete sirgetega. Seda paralleelsete sirgete hulka *nimetame parallelsete sirgete parveks.* Nende sirgetel kõigil on ühine siht, mis on määratav nullvektorist erineva vektori poolt. Tähistame seda vektorit $\vec{s}$ abil. Oma paralleelsete sirgete parve tähistame $\mathcal{P}(\vec{s})$ abil. Kui selle parve sirgete siht $L(\vec{s})$ on teist järku pinna p jaoks mitteasümptootiline, siis meie parve iga sirge lõikab teist järku pinda kahes punktis, eraldades sellel sirgel lõigu. Järelikult paralleelsete sirgete parv tekitab paralleelsete lõikude parve. Veelgi enam, tekib nende lõikude keskpunktide parv, mida me tähistame $d_p(\vec{s})$ abil.

Definitsioon 22.1. *Teist järku pinna lõikamisel mitteasümptootilist sihti omavate paralleelsete sirgetega tekib lõikepunktide poolt määratud lõikude keskpunktide hulk, mida nimetame selle teist järku pinna diameetertasandiks määratuna mitteasümptootilise sihi poolt.*

Asume nüüd uurima teist järku pinna diameetertasandi ehitust.

Teoreem 22.1. *Teist järku pinna diameetertasand on tasand.*

Tõestus. Olgu meil antud teist järku pind p võrrandiga

$$p: \quad \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j + 2\sum_{i=1}^{3} a_ix_i + a = 0$$

mingi ristreeperi $\{O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ suhtes. Võtame selle pinna mistahes mitteasümptootilise sihi $L(\vec{s})$, mis olgu määratud vektori $\vec{s}=(s_1,s_2,s_3)$ poolt. Seejuures $\vec{s}\neq\vec{0}$. Vaatleme paralleelsete sirgete parve $\mathcal{P}(\vec{s})$, mille iga sirge on mitteasümptootilise sihiga $L(\vec{s})$. Selle parve iga sirge $s(D)$, kus $D(d_1,d_2,d_3)\in d_p(\vec{s})$, parameetrilisteks võrranditeks on

$$s(D): x_i = d_i + s_it, \quad i\in\{1,2,3\}, \quad t\in\mathbb{R}.$$

Lugejale on ilmselt selge, et punkt $D(d_1,d_2,d_3)$ on vaadeldaval sirgel $s(D)$ tekkinud lõigu keskpunkt. Kui punkt $D(d_1,d_2,d_3)$ hulgas $d_p(\vec{s})$ muutub, siis saame oma parve kõikide paralleelsete sirgete parameetrilised võrrandid. Nendeks on

$$\mathcal{P}(\vec{s}): x_i = d_i + s_it, \quad i\in\{1,2,3\}, \quad t\in\mathbb{R}, \quad D(d_1,d_2,d_3)\in d_p(\vec{s}).$$

Leiame nüüd diameetertasandi suvalise punkti, mida oleme tähistanud $D(d_1, d_2, d_3)$ abil, koordinaadid d_1, d_2 ja d_3. Senini on nad meil kasutusel rohkem tähistuse tasemel. Koordinaadid d_1, d_2 ja d_3 peavad avalduma mingil moel teist järku pinna võrrandi kordajate kui ka mitteasümptootilist sihti määrava vektori koordinaatide kaudu. Selle selgitamiseks leiame meie paralleelsete sirgete parve $\mathcal{P}(\vec{s})$ iga sirge $s(D)$ korral lõikepunktid teist järku pinnaga p. Tähistame tekkivat kahte lõikepunkti

$$Q_\alpha^{(D)}(q_1^{(\alpha)}, q_2^{(\alpha)}, q_3^{\alpha)}), \quad \alpha \in \{1, 2\}.$$

Siin me oleme lõikepunktide tähistele lisanud punkti D. Valemi (20.7) kohaselt

$$q_i^{(\alpha)} := d_i + s_i t_\alpha, \quad i \in \{1, 2, 3\}, \quad \alpha \in \{1, 2\}, \tag{22.1}$$

kusjuures t_1 ja t_2 saame valemist (20.6). Seega

$$t_{1;2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A}. \tag{22.2}$$

Lõigu $Q_1^{(D)} Q_2^{(D)}$ keskpunkti D koordinaadid on otspunktide koordinaatide poolsumma. Järelikult

$$d_i = \frac{1}{2}(q_i^{(1)} + q_i^{(2)}), \quad i \in \{1, 2, 3\}$$

ehk (22.1) tõttu

$$d_i = \frac{1}{2}[(d_i + s_i t_1) + (d_i + s_i t_2)], \quad i \in \{1, 2, 3\}.$$

Siit saame

$$(t_1 + t_2) s_i = 0, \quad i \in \{1, 2, 3\}.$$

Kuna mitteasümptootilist sihti määrav vektor $\vec{s}$ ei ole nullvektor, siis tema koordinaadid s_1, s_2 ja s_3 ei ole korraga nullid. Seetõttu

$$t_1 + t_2 = 0.$$

Asendades siia valemist (22.2), saame $B = 0$. Viimane on (20.3) tõttu samaväärne tingimusega

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} d_i s_j + \sum_{i=1}^{3} a_i s_i = 0$$

ehk

$$\sum_{j=1}^{3} \Big(\sum_{i=1}^{3} a_{ij} s_i \Big) d_j + \sum_{i=1}^{3} a_i s_i = 0.$$

See on tingimus, mida peavad rahuldama diameetertasandi mistahes punkti D koordinaadid d_1, d_2 ja d_3. Seega tegu on diameetertasandi võrrandiga. Tähistame diameetertasandi muutuvat punkti $D(d_1, d_2, d_3)$ ümber tähe $X(x_1, x_2, x_3)$ abil. Diameetertasandi võrrandile saame kuju

$$d_p(\vec{s}) : \sum_{j=1}^{3} \Big(\sum_{i=1}^{3} a_{ij} s_i \Big) x_j + \sum_{i=1}^{3} a_i s_i = 0. \tag{22.3}$$

Tunneme ära, et tegemist on tasandi võrrandiga, kui vaid x_1, x_2 ja x_3 kordajad

$$\sum_{i=1}^{3} a_{ij} s_i, \quad j \in \{1, 2, 3\}$$

ei ole korraga nullid. Oletame vastuväiteliselt, et vaadeldavad kordajad just on nullid, s.o.

$$\sum_{i=1}^{3} a_{i1} s_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{3} a_{i2} s_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{3} a_{i3} s_i = 0.$$

Korrutame viimaseid vastavalt koordinaatidega s_1, s_2, ja s_3 ning liidame kokku. Saame

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} s_i s_j = 0.$$

Kuna eelduse kohaselt siht $L(\vec{s})$ on mitteasümptootiline, siis viimane kahekordne summa on nullist erinev. Oleme saanud vastuolu. Järelikult diameetertasandi võrrand (22.3) on alati tasandi võrrand. ♠

Teoreem 22.2. *Teist järku pinna kõik diameetertasandid läbivad igat tema keskpunkti.*

Tõestus. Olgu punkt $C(c_1, c_2, c_3)$ teist järku pinna mistahes keskpunkt. Tema koordinaadid c_1, c_2 ja c_3 rahuldavad võrrandisüsteemi (21.2):

$$\sum_{j=1}^{3} a_{ij}c_j + a_i = 0, \quad i \in \{1, 2, 3\}. \tag{22.4}$$

Vaja on näidata, et keskpunkt $C(c_1, c_2, c_3)$ on ka mistahes diameetertasandi punkt, s.o. tema koordinaadid peavad rahuldama võrrandit (22.3). Korrutame seostes (22.4) esimest, teist ja kolmandat vastavalt vektori $\vec{s}$ koordinaatidega s_1, s_2 ja s_3 ning liidame seejärel kokku. Saame

$$\Big(\sum_{j=1}^{3} a_{1j}c_j + a_1\Big)s_1 + \Big(\sum_{j=1}^{3} a_{2j}c_j + a_2\Big)s_2 + \Big(\sum_{j=1}^{3} a_{3j}c_j + a_3\Big)s_3 = 0$$

ehk

$$\sum_{i=1}^{3}\Big(\sum_{j=1}^{3} a_{ij}c_j + a_i\Big)s_i = 0.$$

Viimane samaväärselt

$$\sum_{j=1}^{3}\Big(\sum_{i=1}^{3} a_{ij}s_i\Big)c_j + \sum_{i=1}^{3} a_i s_i = 0.$$

Seega keskpunkti C koordinaadid rahuldavad diameetertasandi võrrandit (22.3). Sellega teoreem on tõestatud. ♠

Järgmisema me tutvume teist järku pinna peasihi mõistega.

Definitsioon 22.2 *Teist järku pinna mitteasümptootilist sihti nimetame peasihiks, kui ta on risti tema poolt määratud diameetertasandiga.*

Sellest definitsioonist järeldame, et kui teist järku pinnal on peasihte olemas, siis pind on sümmeetriline nende peasihtide diameetertasandite suhtes. On teada, et pinna sümmeetriaomaduste teadmine oluliselt lihtsustab pinna ehituse uurimist. Igasugune pind võib olla sümmeeteriline nii punkti, sirge kui tasandi suhtes. Teist järku pindade sümmeetriat punktide suhtes on juba uuritud. Jutt on keskpunktidest. Peasihtide mõiste abil avaneb võimalus ka teist järku pinna sümmeetriatasandite leidmiseks.

Leiame nüüd valemid teist järku pinna peasihtide leidmiseks. Kasutame selleks peasihi definitsiooni. Tuleb leida selline vektor, mis määrab mitteasümptootilise sihi ja on seejuures risti oma diameetertasandiga ehk on kollineaarne diameetertasandi normaalvektoriga

$$\vec{n} = \Big(\sum_{i=1}^{3} a_{i1}s_i, \sum_{i=1}^{3} a_{i2}s_i, \sum_{i=1}^{3} a_{i3}s_i\Big).$$

Me võime kirjutada

$$\vec{n} = \lambda\vec{s} \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{3} a_{ij}s_i = \lambda s_j, \quad j \in \{1,2,3\} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{3} a_{ij}s_i = \sum_{i=1}^{3}(\lambda\delta_{ij})s_i, \quad j \in \{1,2,3\} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{3}(a_{ij} - \lambda\delta_{ij})s_i = 0, \quad j \in \{1,2,3\}. \tag{22.5}$$

Viimane on lineaarvõrranisüsteem peasihti määrava vektori $\vec{s}$ koordinaatide s_1, s_2 ja s_3 leidmiseks. Siia tuleb veel lisada tingimus, et lahendivektor $\vec{s}$ ei oleks nullvektor. Selleks tingimuseks on, et süsteemi (22.5) maatriksi

$$A - \lambda E = (a_{ij} - \lambda\delta_{ij})$$

astak ei tohi olla maksimaalne, s.o. astak on väiksem kui kolm. Astaku mõiste kohaselt

$$|A - \lambda E| = 0.$$

Selle kuupvõrrandi lahendamisel saame kolm lahendit, mida tähistame λ_1, λ_2 ja λ_3 abil. Teoreemi 21.3 kohaselt on need lahendid reaalsed. Iga lahendi λ_α korral lahendame homogeense lineaarvõrrandisüsteemi

$$\sum_{i=1}^{3}(a_{ij} - \lambda_\alpha\delta_{ij})s_i^\alpha = 0, \quad j \in \{1,2,3\}. \tag{22.6}$$

Leitud lahendivektor $\vec{s}_{(\alpha)} = (s_1^{(\alpha)}, s_2^{(\alpha)}, s_3^{(\alpha)})$ ei pea veel määrama peasihti. Veel peab olema täidetud mitteasümtootilisuse tingimus, s.o. $A(\vec{s}_{(\alpha)}) \neq 0$.

Viimane ei pea aga olema täidetud. Seega igal teist järku pinnal ei pea kaugeltki olema kolme peasihti. Paneme tähele, et paragrahvis 21 teist järku pinna kanoonilises reeperis olev ristbaas kontrueeritakse samade valemite abil (vt. valem (19.4)). Ainult seal ei nõuta mitteasümptootilisust. Seega seal kasutatav ristreeperi baasivektorid ei pea kõik olema teist järku pinna peasihilised. Nad on lihtsalt teist järku pinna ruutosa maatriksi poolt indutseeritud lineaarteisenduse normeeritud omavektorid.

Nüüd selgitame kui palju on ühel või teisel teist järku pinnal peasihte. Lihtne on seda teha, kui me kasutame oma teist järku pindade kanoonilisi võrrandeid. Kriipsutame seejuures alla, et kanoonilised võrrandid on saadud ristreeperis, nagu ütleb teoreem 19.4.

Peasihtide leidmise saab mitmete pinnatüüpide puhul viia läbi ühekorraga. Korraga saab näiteks leida kõigi tsentraalsete teist järku pindade peasihid. Seega vaatluse all on ellipsoid, imaginaarne ellipsoid, imaginaarne teist järku koonus, ühe- ja kahekatteline hüperbloid ning teist järku koonus. Lähtudes nende kanoonilistest võrrandist, saame pinna ruutosa maatriksiks

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & \pm\frac{1}{\alpha_3^2} \end{pmatrix}.$$

Siin ülemist märki tuleb kasutada loetelus kolme esimese teist järku pinna korral ja alumist märki kolme järgmise pinna korral. Võrrandi $|A-\lambda E| = 0$ lahendamisel saame omaväärtusteks

$$\lambda_1 = \frac{1}{\alpha_1^2}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{\alpha_2^2}, \quad \lambda_3 = \pm\frac{1}{\alpha_3^2}.$$

Võrrandisüsteemi (22.6) abil saame leida kordsuse täpsusega määratud omavektorid. Seega lahendiks on sihid. Tavaliselt sihi asemel kasutatakse normeeritud esindajavektorit. Palju ühe või teise omaväärtuse korral süsteemil (22.6) on lahendeid sõltub sellest kas omaväärtused on kõik paarikaupa erinevad või nende seas on võrdseid. Esimesel juhul annab süsteem (22.6) iga omaväärtuse korral lahendiks ühe peasihi. Nendeks on nimelt kanoonilise reeperi baasivektorite $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ ja $\vec{e}_3$ poolt määratud sihid $L(\vec{e}_1)$, $L(\vec{e}_2)$ ja $L(\vec{e}_3)$. Kõik nad määravad peasihi, sest

$$A(\vec{e}_1) = \frac{1}{\alpha_1^2} \neq 0 \quad A(\vec{e}_2) = \frac{1}{\alpha_2^2} \neq 0 \quad A(\vec{e}_3) = \pm\frac{1}{\alpha_3^2} \neq 0.$$

Järelikult on vaadeldavad teist järku pinnad ka diameetertasandite $d_p(\vec{e}_1)$, $d_p(\vec{e}_2)$ ja $d_p(\vec{e}_3)$ suhtes sümmeetrilised. Kui omaväärtuste seas on võrdseid paare, siis pind on "sümmeetrilisem". Näiteks olgu $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$. Sel korral λ_3 abil leitavaks peasihiks on ikkagi üheselt määratud $L(\vec{e}_3)$. Võrdsete omaväärtuste λ_1 ja λ_2 korral iga siht $L(\vec{e})$, kus

$$\vec{e} = cos\, t\, \vec{e}_1 + sin\, t\, \vec{e}_2, \quad t \in [0, 2\pi),$$

on $A(\vec{e}) = \lambda_1 \neq 0$ tõttu peasiht. Kõigi diameetertasandite $d_p(\vec{e})$ suhtes vaadeldavad teist järku pinnad on sümmeetrilised. Seega tegu on pöördpindadega. Nähtavasti pakub lugejale suurt huvi uurida veel olukorda, kui kolm omaväärtust on omavahel kõik võrdsed. Sel korral ruumi kõik sihid on peasihid. Pind on sümmeetriline iga diameetertasandi suhtes. Seda kõike me saime süsteemi (22.6) lahendamisel.

Nüüd vaatleme selliseid teist järku pindu, mille ruutosa maatriksi astak on võrdne kahega. Vaatluse all on elliptiline ja hüperboolne paraboloid, elliptiline ja imaginaarne silinder, kaks imaginaarset lõikuvat tasandit reaalse lõikesirgega, hüperboolne silinder ning kaks lõikuvat tasandit. Lähtudes kanoonilisest võrrandist, saame nende pindade ruutosa maatriksiks

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & \pm\frac{1}{\alpha_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Võrrandi $|A - \lambda E| = 0$ lahendamisel saame omaväärtusteks

$$\lambda_1 = \frac{1}{\alpha_1^2}, \quad \lambda_2 = \pm\frac{1}{\alpha_2^2}, \quad \lambda_3 = 0.$$

Põhijuhul $\lambda_1 \neq \lambda_2$ võrrandisüsteemi (22.6) lahendamisel saadud kolme omaväärtuse korral normeeritud omavektoriteks saame vastavalt kanoonilise reeperi baasivektorid $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ ja $\vec{e}_3$. Kaks esimest omavektorit määravad peasihi, kolmas aga mitte, sest

$$A(\vec{e}_1) = \frac{1}{\alpha_1^2} \neq 0 \quad A(\vec{e}_2) = \frac{1}{\alpha_2^2} \neq 0, \quad A(\vec{e}_3) = 0.$$

Peasihtide $L(\vec{e}_1)$ ja $L(\vec{e}_2)$ diameetertasansditeks on x_2x_3- ja x_1x_3-koordinaattasand. Nende suhtes vaadeldavad teist järku pinnad on sümmeetrilised.

Lõpuks jääb veel vaadelda teist järku pindu, mille ruutosa maatriksi astak on üks. Seega vaatluse all on paraboolne silinder, kaks paralleelset tasandit, kaks imaginaarset paralleelset tasandit ning kaks ühtuvat tasandit. Loetletud teist järku pindade kanoonilistel võrranditel on ühine ruutosa maatriks. Nimelt

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Võrrandi $|A - \lambda E| = 0$ lahendamisel saame omaväärtusteks

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 1.$$

Moodustades nüüd iga omaväärtuse korral süsteemi (22.6), kummagi omaväärtuse $\lambda_1 = 0$ ja $\lambda_2 = 0$ korral on iga nullvektorist erinev vektor $\vec{a}$ lineaarkattest $L(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ omavektoriks. Kahjuks ei ole nad peasihid, sest $A(\vec{a}) = 0$ tõttu ei ole siht $L(\vec{a})$ mitteasümptootiline. Kolmanda omaväärtuse $\lambda_3 = 1$ korral omavektoriks saame vektori $\vec{e}_3$. Siht $L(\vec{e}_3)$ on peasiht, sest $A(\vec{e}_3) = 1 \neq 0$. Selle peasihi poolt määratud diameetertasandiks on x_1x_2-koordinaattasand. Selle suhtes on eespool loetletud teist järku pinnad sümmeetrilised. Kui on tegemist kahe paralleelse tasandiga, kahe imaginaarse paralleelse tasandiga ning kahe ühtuva tasandiga, siis saadud diameetertasand ühtub keskpunktide tasandiga.

23. TEIST JÄRKU PINNA PUUTUJATASAND

Definitsioon 23.1. *Teist järku pinna punkti, mis on ka keskpunktiks, nimetame iseäraseks punktiks. Pinna ülejäänud punkte nimetame mitteiseärasteks.*

Silmas pidades keskpunktide paragrahvi § 21, saame kirjeldada teist järku pindade iseäraste punktide hulka. Ühe iseärase punktiga on teist järku koonus ja imaginaarne koonus. Lõikuvate tasandite ja imaginaarsete lõikuvate tasandite korral iseärasteks punktideks on nende lõikesirge. Kaks ühtuvat tasandit koosnevad ainult iseärastest punktidest.

Definitsioon 23.2. *Teist järku pinna puutujaks pinna mitteiseärases punktis nimetatakse sirget, mis läbib seda punkti ja see punkt on kas kahekordseks lõikepunktiks pinnaga või siis see sirge on täielikult pinnal.*

Selgitame öeldut detailsemalt. Kui pinna punkti M läbiv puutuja on mitteasümptootilise sihiga, siis punkt M peab olema puutuja ja pinna kahekordne lõikepunkt. Kui puutuja on asümptootilise sihiga, siis puutuja peab olema täielikult pinnal, s.o. selline puutuja on pinna sirgjooneline moodustaja.

Teoreem 23.1. *Teist järku pinna mitteiseärast punkti läbivate puutujate hulk moodustab tasandi.*

Tõestus. Olgu punkt $M(m_1, m_2 m_3)$ teist järku pinna

$$p: \quad \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} x_i x_j + 2\sum_{i=1}^{3} a_i x_i + a = 0 \tag{23.1}$$

mitteiseärane punkt. Olla pinna punkt tähendab, et

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} m_i m_j + 2\sum_{i=1}^{3} a_i m_i + a = 0. \tag{23.2}$$

Olla aga pinna mitteiseärane punkt tähendab, et ta ei ole pinna keskpunkt. Seega punkti $M(m_1, m_2, m_3)$ koordinaadid ei rahulda vähemalt ühte süsteemi (21.2) võrranditest. Järelikult vähemalt üks kordajetest

$$\sum_{j=1}^{3} a_{1j} m_j + a_1, \quad \sum_{j=1}^{3} a_{2j} m_j + a_2, \quad \sum_{j=1}^{3} a_{3j} m_j + a_3 \tag{23.3}$$

on nullist erinev. Leiame läbi punkti $M(m_1, m_2, m_3)$ minevad puutujad. Võtame ette punkti $M(m_1, m_2, m_3)$ läbiva sirge sihiga $L(\vec{s})$ määratuna vektori $\vec{s} \neq \vec{0}$ poolt. Tema parameetrilisteks võrranditeks on

$$x_i = m_i + s_i t, \quad i \in \{1, 2, 3\}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{23.4}$$

Lõikepunktide leidmiseks teist järku pinnaga tuleb lahendada neljast võrrandist (23.1) ja (23.4) koosnev süsteem. Asendades kolmest viimasest võrrandist esimesse võrrandisse, saame talle kuju

$$At^2 + 2Bt + C = 0, \tag{23.5}$$

kus selle võrrandi kordajad on antud valemitega (20.3) ja (20.4). Viimases kordaja C on (23.2) tõttu võrdne nulliga. Võrrand (23.5) lihtsustub, saades

$$t(At + 2B) = 0. \tag{23.6}$$

Juhul kui siht $L(\vec{s})$ on mitteasümptootiline, siis viimases võrrandis $A \neq 0$. Lahenditeks saame $t_1 = 0$ ja $t_2 = -2\frac{B}{A}$. Lõikepunkt M on kahekordne, kui $t_1 = t_2$. Seega $B = 0$. Kui lõikesirge siht on asümptootiline, siis $A = 0$. Võrrand (23.6) annab $Bt = 0$. Sel korral puutuja peab asuma pinnal. Seega viimane peab kehtima iga reaalarvu t korral. Seega ka sellel juhul saame puutujaks olemise tingimuseks $B = 0$. Arvestades $B = 0$ avaldist, mis antakse valemiga (20.3), saame

$$B = 0 \Longleftrightarrow \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} m_i s_j + \sum_{i=1}^{3} a_i s_i = 0 \Longleftrightarrow \sum_{j=1}^{3} \Big(\sum_{i=1}^{3} a_{ij} m_i + a_j \Big) s_j = 0$$

ehk

$$\sum_{j=1}^{3} \Big(\sum_{i=1}^{3} a_{ij} m_i + a_j \Big) s_j t = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Asendame siia valemist (23.4) saadava $s_j t = x_j - m_j$. Me saame

$$\sum_{j=1}^{3} \Big(\sum_{i=1}^{3} a_{ij} m_i + a_j \Big) (x_j - m_j) = 0$$

ehk

$$\sum_{j=1}^{3}\Big(\sum_{i=1}^{3} a_{ij}m_i + a_j\Big)x_j - \sum_{j=1}^{3}\Big(\sum_{i=1}^{3} a_{ij}m_i + a_j\Big)m_j = 0. \tag{23.7}$$

Kuna viimases x_1, x_2 ja x_3 kordajad valemi (23.3) tõttu pole samaaegselt nullid, siis (23.7) on tasandi võrrand. Seega punkti M läbivate puutujate hulk on tasand. Sellega teoreem on tõestatud. ♠.

Tasandi (23.7) võrrandi saab seose (23.2) abil kirjutada sobivamal kujul:

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}m_i x_j + \sum_{i=1}^{3} a_i(x_i + m_i) + a = 0. \tag{23.8}$$

See valem on kerge meelde jätta. Teist järku pinna võrrand (23.1) tuleb esitada kujul

$$p: \quad \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}\underline{x_i}x_j + \sum_{i=1}^{3} a_i(x_i + \underline{x_i}) + a = 0.$$

Viimases võrrandis on pooles ulatuses alla kriipsutatud teist järku pinna muutuva punkti X koordinaatidest asendatud puutepunkti M koordinaatidega m_1, m_2 ja m_3. Saamegi puutujatasandi võrrandi (23.8). Kirjeldatud protseduuri nimetame *muutujate pooliti asenduseks.*

Teist järku pinna iseärases punktis puutujatasandit ei ole olemas, sest võrrandis (23.8) on x_1, x_2 ja x_3 kordajad võrdsed nulliga ning seetõttu ei ole tegemist tasandi võrrandiga.

Lugejal soovitame kõigi seitsmeteistkümne pinnatüübi kanoonilisi võrrandeid kasutades, panna kirja puutujatasandi võrrandid.

24. TEIST JÄRKU PINNA INVARIANDID

See paragrahv on analoogiline seitsmenda paragrahviga, kus vaatlesime teist järku joonte invariante.

Olgu antud teist järku pind võrrandiga

$$p: \quad \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j + 2\sum_{i=1}^{3} a_ix_i + a = 0$$

mingi reeperi $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ suhtes. Tema vasak pool

$$f(x_1, x_2, x_3) := \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j + 2\sum_{i=1}^{3} a_ix_i + a$$

on kolmemuutuja polünoom. Muutujateks on x_1, x_2 ja x_3. Minnes üle uuele reeperile $\{O'; \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3\}$, siis see polünoom uutes koordinaatides x'_1, x'_2 ja x'_3 saab kuju

$$f(x'_1, x'_2, x'_3) := \sum_{i,j=1}^{3} a'_{ij}x'_ix'_j + 2\sum_{i=1}^{3} a'_ix'_i + a',$$

mis on taas kolmemuutuja polünoom uute muutujate x'_1, x'_2 ja x'_3 suhtes. Seejuures polünoomi $f(x_1, x_2, x_3)$ kordajad teisenevad uuteks kordajateks $a'_{11}, a'_{22}, a'_{33}, a'_{12}, a'_{13}, a'_{23}, a'_1a'_2, a'_3$ ja a'. Vaatamata sellele, et kordajad teisenevad, saab neist moodustada funktsioone

$$I(a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}, a_1a_2, a_3, a),$$

mille väärtus ei sõltu sellest, millise reeperi suhtes me nad leiame.

Definitsioon 24.1. *Funktsiooni*

$$I(a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}, a_1a_2, a_3, a)$$

nimetame kolmemuutuja polünoomi

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j + 2\sum_{i=1}^{3} a_ix_i + a$$

invariandiks, kui üleminekul mistahes teisele reeperile $\{O'; \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3\}$, *arv* $I(a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}, a_1, a_2, a_3, a)$ *ei muutu, s.o.*

$$I(a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}, a_1 a_2, a_3, a) =$$

$$= I(a'_{11}, a'_{22}, a'_{33}, a'_{12}, a'_{13}, a'_{23}, a'_1 a'_2, a'_3, a').$$

Definitsioon 24.2. *Kolmemuutuja polünoomi* $f(x_1, x_2, x_3)$ *invarianti üleminekul ristreeperilt mistahes teisele ristreeperile nimetame ortogonaalinvariandiks.*

Järgnevas me vaatleme kolmemuutuja polünoomi $f(x_1, x_1, x_3)$ invariantidest ainult ortogonaalinvariante.

Teoreem 24.1. *Kolmemuutuja polünoomi*

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{i=1}^{3} a_i x_i + a$$

ortogonaalinvariantideks on

$$\delta := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \tag{24.1}$$

$$s := a_{11} + a_{22} + a_{33}, \tag{24.2}$$

$$S := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \tag{24.3}$$

ja

$$\Delta := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a \end{vmatrix}.$$

Tõestus. Näitame esmalt, et δ, s ja S on ortogonaalinvariandid. Paneme tähele, et kõik nad on moodustatud kolmemuutuja polünoomi $f(x_1, x_2, x_3)$ ruutosa kordajatest. Valemite (18.9) kohaselt reeperi alguspunkti muutmisel need suurused δ, s ja S ei muutu, sest ruutosa kordajad ei muutu. Seega üleminekul ühelt ristreeperilt teisele ristreeperile, on küllaldane näidata invariantsust üleminekul ühelt ristbaasilt teisele ristbaasile. Siin me tugineme valemitele (18.13), s.o. $A' = C^\top AC$. Teoreemi 21.2 kohaselt on üleminekul ühelt ristbaasilt teisele ristbaasile baasiteisenduse maatriks ortogonaalmaatriks, mistõttu $A' = C^{-1}AC$. Selle valemi abil näitame, et δ, s ja S on ortogonaalinvariandid. Suvalise reaalarvu λ korral moodustame maatriksi $A' - \lambda E$, mille saame maatriksi omadustele tuginedes, avaldada maatriksi $A - \lambda E$ kaudu. Tõepoolest

$$A' - \lambda E = C^{-1}AC - \lambda E = C^{-1}AC - C^{-1}(\lambda E)C = C^{-1}(A - \lambda E)C \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow A' - \lambda E = C^{-1}(A - \lambda E)C.$$

Kasutades teoreemi maatriksite korrutise determinandist, viimasest valemist me saame jätkata

$$|A' - \lambda E| = |C^{-1}(A - \lambda E)C| = |C^{-1}||A - \lambda E||C| =$$

$$= (|C^{-1}||C|)|A - \lambda E| = (|C|^{-1}|C|)|A - \lambda E| = |A - \lambda E|.$$

Siin me arvestasime, et maatriksi ja pöördmaatriksi determinandid on teineteise pöördarvud. Saime, et

$$|A' - \lambda E| = |A - \lambda E|, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{24.4}$$

Seega iga reaalarvu λ korral determinant $|A - \lambda E|$ on ortogonaalinvariant. Saadud determinant on λ suhtes kuup-polünoom. Nähes veidi vaeva, saame

$$|A - \lambda E| = -\lambda^3 + s\lambda^2 - S\lambda + \delta.$$

Tähelepanu on väärt, et siin kordajateks on s, S ja δ, mille invariantsust tahame näidata. Sama moodi saame leida

$$|A' - \lambda E| = -\lambda^3 + s'\lambda^2 - S'\lambda + \delta'.$$

Siin s', S' ja δ' leitud maatriksi A' elementide abil analoogiliselt valemitele (24.1)– (24.3). Valem (24.4) saab kuju

$$\lambda^3 - s'\lambda^2 + S'\lambda - \delta' = \lambda^3 - s\lambda^2 + S\lambda - \delta, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Polünoomide võrdsuse definitsiooni kohaselt peavad sama astmega λ juures kordajad olema võrdsed. Me saame

$$s' = s, \quad S' = S, \quad \delta' = \delta.$$

Seega s, S ja δ on kolmemuutuja polünoomi $f(x_1, x_2, x_3)$ ortogonaalinvariandid.

Jääb veel näidata, et Δ on samuti polünoomi $f(x_1, x_2, x_3)$ ortogonaalinvariant. Algul veendume, et ta on invariant, kui läheme üle ristbaasilt ristbaasile, jättes seega reeperi alguspunkti paigale. Paneme tähele, et Δ on maatriksi

$$\overline{A} := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a \end{pmatrix}$$

determinant: $\Delta = |\overline{A}|$. Baasiteisendusel maatriks $\overline{A}$ teiseneb uueks maatriksiks

$$\overline{A}\,' := \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & a'_1 \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} & a'_2 \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} & a'_3 \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 & a' \end{pmatrix}$$

valemiga

$$\overline{A}\,' = \overline{C}^{\top} \overline{A}\; \overline{C}, \tag{24.5}$$

kus

$$\overline{C} := \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Siin me kasutasime valemeid (18.14) ja (18.15). Osutub, et maatriks $\overline{C}$ on ortogonaalmaatriks nii nagu baasiteisendusmaatriks C. Meil on vaja näidata, et $\overline{C}^{-1} = \overline{C}^{\top}$. Maatriksil $\overline{C}$ muidugi pöördmaatriks leidub, sest $|\overline{C}| = |C| \neq 0$. Leiame nüüd maatriksi $\overline{C}$ pöördmaatriksi. Tähistame otsitavat pöördmaatriksit

$$\overline{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{pmatrix}$$

abil. Tema elemendid saame leida pöördmaatriksi definitsiooni kohaselt tingimustest $\overline{C}\,\overline{X} = E$ ja $\overline{X}\,\overline{C} = E$. Esimese ja teise abil vastavalt saame, et x_{41}, x_{42}, x_{43} ja x_{14}, x_{24}, x_{34} on võrdsed nulliga ning x_{44} on võrdne ühega. Seega

$$\overline{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & 0 \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & 0 \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Järgi jäänud elemendid, nagu näeme, tuleb leida tingimustest $XC = E$ ja $CX = E$, kus

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}.$$

Seega jutt on maatriksi C pöördmaatriksist. Tema kohta aga teame, et $C^{-1} = C^{\top}$. Järelikult

$$\overline{C}^{-1} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

millest $\overline{C}^{-1} = C^{\top}$. Oleme näidanud, et $\overline{C}$ on ortogonaalmaatriks. Valem (24.5) täpsustub, kui läheme üle ristbaasilt ristbaasile. Saame

$$\overline{A}\,' = \overline{C}^{-1}\overline{A}\,\overline{C}.$$

Viimase tõttu

$$\Delta\,' = |\overline{A}\,'| = |\overline{C}^{-1}\overline{A}C| = |\overline{C}^{-1}||\overline{A}||\overline{C}| = |\overline{C}|^{-1}|\overline{A}||\overline{C}| = |\overline{A}| = \Delta,$$

mistõttu Δ on üleminekul ristbaasilt ristbaasile kolmemuutuja polünoomi $f(x_1, x_2, x_3)$ invariant.

Jääb veel näidata, et Δ on invariantne reeperi alguspunkti muutmisel. Kui viime reeperi alguspunkti punkti $O\,'(c_1, c_2, c_3)$, siis teist järku pinna võrrandi kordajate teisenemisvalemid on leitud paragrahvis § 18. Need on (18.9)–(18.10) kohaselt

$$a'_{ij} = a_{ij}, \quad i, j \in \{1, 2, 3\},$$

$$a_i' = \sum_{s=1}^{3} a_{is} c_s + a_i, \quad i \in \{1, 2, 3\}$$

ja

$$a' = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} c_i c_j + 2 \sum_{s=1}^{3} a_s c_s + a.$$

Viimaste abil leiame Δ teisenemisvalemi. Me saame

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_{11}' & a_{12}' & a_{13}' & a_1' \\ a_{21}' & a_{22}' & a_{23}' & a_2' \\ a_{31}' & a_{32}' & a_{33}' & a_3' \\ a_1' & a_2' & a_3' & a' \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \sum_{s=1}^{3} a_{1s} c_s + a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \sum_{s=1}^{3} a_{2s} c_s + a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \sum_{s=1}^{3} a_{3s} c_s + a_3 \\ \sum_{s=1}^{3} a_{1s} c_s + a_1 & \sum_{s=1}^{3} a_{2s} c_s + a_2 & \sum_{s=1}^{3} a_{3s} c_s + a_3 & a' \end{vmatrix}.$$

Siin me ei saanud asendada kordajat a', sest vastasel juhul poleks determinant mahtunud ära paberile. Kasutame determinantide omadusi: lahutame neljandast reast s_1-kordse esimese, s_2-kordse teise ja s_3-kordse kolmanda rea. Kui veel peame silmas, et $a_{ij} = a_{ji}$, siis me saame

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \sum_{s=1}^{3} a_{1s} c_s + a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \sum_{s=1}^{3} a_{2s} c_s + a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \sum_{s=1}^{3} a_{3s} c_s + a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \sum_{s=1}^{3} a_s c_s + a \end{vmatrix}.$$

Järgmisena lahutame neljandast veerust taas s_1-kordse esimese, s_2-kordse teise ja s_3-kordse kolmanda veeru. Näeme

$$\Delta' = \Delta.$$

Seega Δ on kolmemuutuja polünoomi $f(x_1, x_2, x_3)$ ortogonaalinvariat.

Teoreem 24.2. *Arvud*

$$K = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_1 \\ a_{31} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_3 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{32} & a_{33} & a_3 \\ a_2 & a_3 & a \end{vmatrix}$$

ja

$$\sigma = \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_3 \\ a_3 & a \end{vmatrix}$$

on kolmemuutuja polünoomi

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{s=1}^{3} a_s x_s + a$$

invariandid üleminekul ristbaasilt ristbaasile.

Tõestus. Moodustame neljanda astme polünoomi

$$|\overline{A} - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} & a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a - \lambda \end{vmatrix}.$$

Determinandi definitsiooni kohaselt saab viimase esitada kujul

$$|\overline{A} - \lambda E| = \lambda^4 - I_1 \lambda^3 + I_2 \lambda^2 + I_3 \lambda + I_4. \tag{24.6}$$

Siin kordajad I_1, I_2, I_3 ja I_4 avalduvad maatriksi $\overline{A}$ elementide kaudu, s.o, teist järku pinna võrrandi kordajate kaudu. Leiame nüüd kordajad I_1, I_2, I_3 ja I_4. Nende leidmine ei ole tehniliselt kõige lihtsam. See-eest on nad aga tuntud kirjandusest. Tegemist on maatriksi $\overline{A}$ sama järku peamiinorite summaga. Täpsemalt I_1, I_2, I_3 ja I_4 on võrdsed vastavalt maatriksi $\overline{A}$ esimest, teist, kolmandat ja neljandat järku peamiinorite summaga. Meenutame, et mingi ruutmaatriksi peamiinorid on peadiagonaalile toetuvad miinorid. Maatriksi $\overline{A}$ korral on neli esimest järku, kuus teist järku, neli kolmandat järku ja üks neljandat järku peamiinor. Öeldut arvestades

$$I_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33} + a,$$

I

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_3 \\ a_3 & a \end{vmatrix},$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_1 \\ a_{31} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_3 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{32} & a_{33} & a_3 \\ a_2 & a_3 & a \end{vmatrix}$$

ja

$$I_4 = |\overline{A}| = \Delta.$$

Nüüd

$$|\overline{A}\,' - \lambda E| = |\overline{C}^{-1}(\overline{A} - \lambda E)\overline{C}| = |\overline{C}^{-1}||\overline{A} - \lambda E||\overline{C}| =$$

$$= (|\overline{C}^{-1}||\overline{C}|)|\overline{A} - \lambda E| = (|\overline{C}|^{-1}|\overline{C}|)|\overline{A} - \lambda E| = |\overline{A} - \lambda E|$$

tõttu

$$|\overline{A}\,' - \lambda E| = |\overline{A} - \lambda E|.$$

Analoogiliselt valemile (24.6) on õige

$$|\overline{A}\,' - \lambda E| = \lambda^4 - I\,'_1\lambda^3 + I\,'_2\lambda^2 + I\,'_3\lambda + I\,'_4,$$

mille abil koos valemiga (24.6) saame

$$\lambda^4 - I\,'_1\lambda^3 + I\,'_2\lambda^2 + I\,'_3\lambda + I\,'_4 = \lambda^4 - I_1\lambda^3 + I_2\lambda^2 + I_3\lambda + I_4.$$

ehk

$$\lambda^4 - I\,'_1\lambda^3 + I\,'_2\lambda^2 + I\,'_3\lambda + \Delta\,' = \lambda^4 - I_1\lambda^3 + I_2\lambda^2 + I_3\lambda + \Delta.$$

Polünoomide võrdsuse definitsiooni kohaselt

$$I\,'_1 = I_1, \quad I\,'_2 = I_2, \quad I\,'_3 = I_3, \quad \Delta\,' = \Delta,$$

mistõttu I_1, I_2, I_3 ja Δ on kolmemuutuja polünoomi $f(x_1, x_2, x_3)$ invariandid üleminekul ristbaasilt ristbaasile. Kuna δ ja S, nagu eelmisest teoreemist teame, on ortogonaalinvariandid, siis üleminekul ristbaasilt ristbaasile $\delta' = \delta$ ja $S' = S$. Seetõttu

$$K' = I'_3 - \delta' = I_3 - \delta = K.$$

ja

$$\sigma' = I'_2 - S' = I_2 - S = \sigma.$$

Sellega on teoreem tõestatud. ♠

Osutub, et saadud suurused I_1, I_2, I_3, seetõttu ka K ja σ ei ole reeperi alguspunkti muutmise suhtes muutumatud. Täpsemalt: osade teist järku pindade korral on nad invariandid osade puhul mitte. Järgnevas võtame vaatluse alla K ja σ käitumise reeperi alguspunkti muutmisel. Teoreemi lühema sõnastamise huvides kasutame § 22 toodud teist järku pinnatüüpide numeratsiooni.

Teoreem 24.3. *Olgu $f(x_1, x_2, x_3)$ kolmemuutuja polünoom*

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{i=1}^{3} a_i x_i + a$$

ja tema poolt määratud teist järku pind

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Kui võrrand $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ määrab pinnatüübi $1 - 8$ (määrab pinnatüübi $1 - 14$), siis arv K (arv σ) ei ole ristreeperi alguspunkti muutmise korral polünoomi $f(x_1, x_2, x_3)$ invariant. Pinnatüüpide $9 - 17$ korral (pinnatüüpide $15 - 17$ korral) on arv K (arv σ) aga invariant. Siin me kasutasime § 22 pinnatüüpide numeratsiooni.

Tõestus. Jaotame teoreemi tõestuse kaheks etapiks. Lähtume kanoonilisest reeperist, s.o. reeperist, mille suhtes teist järku pinna võrrand on kanoonilise kujuga. Tähistame kanoonilist reeperit $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Viimane on, nagu teame, ristreeper. Kuna suurused K ja σ on ristbaasi muutmise suhtes invariandid, siis võime kasutada mistahes teise alguspunktiga ristreeperi korral ristbaasi osas kanoonilises reeperis olevat ristbaasi $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Tähistame uuritavaid suurusi kanoonilise reeperi alguspunkti

O korral K ja σ abil ning mistahes teise alguspunkti O' korral reeperist $\{O'; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ tähistame K' ja σ' abil.

Vaatleme esmalt tsentraalseid teist järku pindu, s.o. § 22 *toodud loetelus juhtusid* 1–6. Kõigil neil kuuel juhul saab teist järku pinna võrrandi esitada ühise võrrandiga

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a = 0.$$

Valides siin sobivalt kordajaid, saame kõigi tsentraalsete teist järku pindade kanoonilised võrrandid. Näiteks ühekattelise hüperboloidi kanoonilise võrrandi saamiseks tuleb võtta $a_{11} = \frac{1}{\alpha_1^2}$, $a_{22} = \frac{1}{\alpha_2^2}$, $a_{33} = -\frac{1}{\alpha_3^2}$ ja $a = -1$. Seega

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a.$$

Kanoonilise reeperi $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ korral

$$K = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

ja

$$\sigma = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix}.$$

Leiame nüüd K' ja σ' uue alguspunkti O' korral. Tema koordinaate tähistame c_1, c_2 ja c_3 abil. Täpsemalt on nad kohavektori $\overrightarrow{OO'}$ koordinaadid baasi $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ suhtes, s.o.

$$\overrightarrow{OO'} = c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + c_3\vec{e}_3.$$

Sel korral kolmemuutuja polünoomi $f(x_1, x_2, x_3)$ kordajad teisenevad. Nad on antud valemitega (18.9)–(18.10), mis toome siin uuesti ära:

$$a'_{ij} = a_{ij}, \quad i, j \in \{1, 2, 3\}, \tag{24.7}$$

$$a'_i = \sum_{s=1}^{3} a_{is}c_s + a_i, \quad i \in \{1, 2, 3\} \tag{24.8}$$

ja

$$a' = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} c_i c_j + 2\sum_{s=1}^{3} a_s c_s + a. \tag{24.9}$$

Nende abil saame leida

$$K' = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_1 \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_2 \\ a'_1 & a'_2 & a' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{13} & a'_1 \\ a'_{31} & a'_{33} & a'_3 \\ a'_1 & a'_3 & a' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{22} & a'_{23} & a'_2 \\ a'_{32} & a'_{33} & a'_3 \\ a'_2 & a'_3 & a' \end{vmatrix}$$

elemendid. Saame

$$K' = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{11}c_1 \\ 0 & a_{22} & a_{22}c_2 \\ a_{11}c_1 & a_{22}c_2 & a' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{11}c_1 \\ 0 & a_{33} & a_{33}c_3 \\ a_{11}c_1 & a_{33}c_3 & a' \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & a_{22}c_2 \\ 0 & a_{33} & a_{33}c_3 \\ a_{22}c_2 & a_{33}c_3 & a' \end{vmatrix}.$$

Siin

$$a' = a_{11}c_1^2 + a_{22}c_2^2 + a_{33}c_3^2 + a.$$

Nüüd K' avaldise parema poole igat determinanti lihtsustame ühte moodi. Esimese determinandi korral lahutame kolmandast reast c_1-kordse esimese rea ja c_2-kordse teise rea, seejärel kolmandast veerust c_1-kordse esimese veeru ja c_2-kordse teise veeru. Analoogiliselt toimime teise ja kolmanda determinandiga. Saame

$$K' = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}c_3^2 + a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & a_{22}c_2^2 + a \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & a_{11}c_1^2 + a \end{vmatrix}.$$

Siit saame

$$K' = K + \delta(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2)$$

ehk

$$K' = K + \delta\, |\overrightarrow{OO'}|^2. \tag{24.10}$$

Juba siit näeme, et K' avaldis sõltub uue alguspunkti koordinaatidest. Seega K pole invariant. Leiame nüüd jutuks oleva suuruse teisenemisvalemi, kui me viime reeperi alguspunkti mistahes punktist O' mistahes teise punkti O''. Need punktid on määratavad oma koordinaatidega leituna kanoonilise reeperi $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ suhtes. Selleks tuleb punktide O' ja O'' kohavektorid $\overrightarrow{OO'}$ ja $\overrightarrow{OO''}$ avaldada baasi $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ suhtes. Tähistame jutuks olevaid avaldisi

$$\overrightarrow{OO'} = c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + c_3\vec{e}_3, \quad \overrightarrow{OO''} = \bar{c}_1\vec{e}_1 + \bar{c}_2\vec{e}_2 + \bar{c}_3\vec{e}_3.$$

Analoogiliselt valemile (24.10) saame

$$K'' = K + \delta\, |\overrightarrow{OO''}|^2$$

Selle ja (24.7) abil saame

$$K'' = K' + \delta\, (|\overrightarrow{OO''}|^2 - |\overrightarrow{OO'}|^2).$$

Siit näeme veelkord, et reeglina K muutub reeperi alguspunkti muutmisel. Huvitav on märgata, et teist järku pinna keskpunktist võrdsel kaugusel olevate punktide O' ja O'' korral $K'' = K'$.

Selgitama nüüd σ käitumist. Kanoonilise reeperi alguspunkti O korral

$$\sigma = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix}$$

Minnes punkti O', saame leida

$$\sigma\,' = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_1 \\ a'_1 & a' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{22} & a'_2 \\ a'_2 & a' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{33} & a'_3 \\ a'_3 & a' \end{vmatrix}$$

elemendid valemite (18.9)−(18.10) abil. Me saame

$$\sigma\,' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11}c_1 \\ a_{11}c_1 & a' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{22}c_2 \\ a_{22}c_2 & a' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{33}c_3 \\ a_{33}c_3 & a' \end{vmatrix}.$$

Viimase abil aga

$$\sigma' = \sigma + (c_1^2 + c_2^2)\begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} + (c_1^2 + c_3^2)\begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{33} \end{vmatrix} + (c_2^2 + c_3^2)\begin{vmatrix} a_{22} & 0 \\ 0 & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Kuna see valem sõltub punkti O' koordinaatidest, siis σ ei ole invariant. Alguspunkti viimisel punktist O' punkti O'', saame

$$\sigma'' = \sigma' + [(c_1^2 + c_2^2) - (\bar{c}_1^2 + \bar{c}_2^2)]\begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} +$$

$$+[(c_1^2 + c_3^2) - (\bar{c}_1^2 + \bar{c}_3^2)]\begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{33} \end{vmatrix} + [(c_2^2 + c_3^2) - (\bar{c}_2^2 + \bar{c}_3^2)]\begin{vmatrix} a_{22} & 0 \\ 0 & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Viimane valem on liialt keeruline, et teda meelde jätta.

Korraga saame vaadelda elliptilist ja hüperboolset paraboloidi. Seega § 22 antud on need pindu tähistatud numbriga 7 ja 8. Mõlema pinna kanoonilise võrrandi saab anda valemiga

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 = 2x_3.$$

Seega

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 - 2x_3.$$

Kanoonilise reeperi $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ alguspunkti O korral

$$K = -(a_{11} + a_{22}), \quad \sigma = -1.$$

Viime reeperi alguspunkti mistahes punkti O', mis olgu määratud vektori

$$\overrightarrow{OO'} = c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + c_3\vec{e}_3$$

abil. Sel korral, arvestades valemeid (24.7)–(24.9), me saame

$$K' = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{11}c_1 \\ 0 & a_{22} & a_{22}c_2 \\ a_{11}c_1 & a_{22}c_2 & a' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{11}c_1 \\ 0 & 0 & -1 \\ a_{11}c_1 & -1 & a' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & a_{22}c_2 \\ 0 & 0 & -1 \\ a_{22}c_2 & -1 & a' \end{vmatrix}$$

ja

$$\sigma' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11}c_1 \\ a_{11}c_1 & a' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{22}c_2 \\ a_{22}c_2 & a' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & a' \end{vmatrix}.$$

Siin
$$a' = a_{11}c_1^2 + a_{22}c_2^2 - 2c_3.$$
Viimasteste abil saame
$$K' = K - 2a_{11}a_{22}c_3. \qquad \sigma' = \sigma + a_{11}a_{22}(c_1^2 + c_2^2) - 2(a_{11} + a_{22})c_3.$$
Analoogiliselt reeperi mistahes teise alguspunkti O'' korral, mis olgu määratud vektori
$$\overrightarrow{OO''} = \bar{c}_1\vec{e}_1 + \bar{c}_2\vec{e}_2 + \bar{c}_3\vec{e}_3$$
abil, saame
$$K'' = K - 2a_{11}a_{22}\bar{c}_3, \qquad \sigma'' = \sigma + a_{11}a_{22}(\bar{c}_1^2 + \bar{c}_2^2) - 2(a_{11} + a_{22})\bar{c}_3.$$
Saadud valemite abil saame, et reeperi alguspunkti viimisel punktist O' punkti O'' vaadeldavad suurused teisenevad järgmiselt
$$K'' = K' - 2a_{11}a_{22}(c_3 - \bar{c}_3)$$
ja
$$\sigma'' = \sigma' + a_{11}a_{22}[(\bar{c}_1^2 + \bar{c}_2^2) - (c_1^2 + c_2^2)] + 2(a_{11} + a_{22})(\bar{c}_3 - c_3).$$
Viimased valemid sõltuvad alguspunktide koordinaatidest. Seega K ja σ ei ole ka siin polünoomi $f(x_1, x_2, x_3)$ invariandid.

Nüüd vaatleme pinnaklasse 9–14. *Vaatluse all on elliptiline, imaginaarne elliptiline, hüperboolne silinder ning imaginaarsete lõikuvate ja lõikuvate tasandite paar.* Kõigi nende tasandite kanoonilised võrrandid saame anda valemiga
$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a = 0, \quad a_{11} \neq 0, \quad a_{22} \neq 0.$$
Seega
$$f(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a.$$
Kanoonilise reeperi $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ alguspunkti O korral
$$K = a_{11}a_{22}a, \quad \sigma = (a_{11} + a_{22})a.$$

Viime reeperi alguspunkti mistahes punkti $O\,'$, mis olgu määratud vektori

$$\overrightarrow{OO'} = c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + c_3\vec{e}_3$$

abil. Sel korral, arvestades valemeid (24.7)−(24.9), me saame

$$K' = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{11}c_1 \\ 0 & a_{22} & a_{22}c_2 \\ a_{11}c_1 & a_{22}c_2 & a\,' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{11}c_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{11}c_1 & 0 & a\,' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & a_{22}c_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{22}c_2 & 0 & a\,' \end{vmatrix}$$

ja

$$\sigma\,' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11}c_1 \\ a_{11}c_1 & a\,' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{22}c_2 \\ a_{22}c_2 & a\,' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a\,' \end{vmatrix}.$$

Siin

$$a\,' = a_{11}c_1^2 + a_{22}c_2^2 + a.$$

Viimastest me saame

$$K\,' = K, \quad \sigma\,' = \sigma + a_{11}a_{22}(c_1^2 + c_2^2).$$

Analoogiliselt reeperi mistahes teise alguspunkti $O\,''$ korral, mis olgu määratud vektori

$$\overrightarrow{OO''} = \bar{c}_1\vec{e}_1 + \bar{c}_2\vec{e}_2 + \bar{c}_3\vec{e}_3$$

abil, saame

$$K\,'' = K, \qquad \sigma\,'' = \sigma + a_{11}a_{22}(\bar{c}_1^2 + \bar{c}_2^2).$$

Saadud valemite abil saame, et reeperi alguspunkti viimisel punktist $O\,'$ punkti $O\,''$ vaadeldavad suurused teisenevad järgmiselt

$$K\,'' = K\,', \quad \sigma\,'' = \sigma\,' + a_{11}a_{22}[(\bar{c}_1^2 + \bar{c}_2^2) - (c_1^2 + c_2^2)].$$

Näeme, et K on polünoomi $f(x_1, x_2, x_3)$ invariant, kuid σ seda ei ole.

Olgu järgmiseks pinnaklassiks *paraboolne silinder*. Tema kanoonilisest võrrandist $x_3^2 = 2px_1$ saame $f(x_1, x_2, x_3) = x_3^2 - 2px_1$. Kanoonilise reeperi $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ alguspunkti O korral

$$K = -p^2, \quad \sigma = -p^2.$$

Viime reeperi alguspunkti mistahes punkti O', mis olgu määratud vektori

$$\overrightarrow{OO'} = c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + c_3\vec{e}_3$$

abil. Sel korral, arvestades valemeid (24.7)–(24.9), me saame

$$K' = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -p \\ 0 & 0 & 0 \\ -p & 0 & c_3^2 - 2pc_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & -p \\ 0 & 1 & c_3 \\ -p & c_3 & c_3^2 - 2pc_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c_3 \\ 0 & c_3 & c_3^2 - 2pc_1 \end{vmatrix},$$

millest

$$K' = 0 - p^2 \Longrightarrow K' = K,$$

ja

$$\sigma' = \begin{vmatrix} 0 & -p \\ -p & c_3^2 - 2pc_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c_3^2 - 2pc_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & c_3 \\ c_3 & c_3^2 - 2pc_1 \end{vmatrix},$$

millest

$$\sigma' = \sigma - 2pc_1.$$

Analoogiliselt reeperi mistahes teise alguspunkti O'' korral, mis olgu määratud vektori

$$\overrightarrow{OO''} = \bar{c}_1\vec{e}_1 + \bar{c}_2\vec{e}_2 + \bar{c}_3\vec{e}_3$$

abil, saame

$$K'' = K, \quad \sigma'' = \sigma - 2p\bar{c}_1.$$

Saadud valemite abil saame, et reeperi alguspunkti viimisel punktist O' punkti O'' vaadeldavad suurused teisenevad järgmiselt

$$K'' = K', \quad \sigma'' = \sigma' + 2p(c_1 - \bar{c}_1).$$

Näeme, et K on polünoomi $f(x_1, x_2, x_3)$ invariant, kuid σ seda ei ole.

Lõpuks vaatleme pinnaklasse 15–17. *Tegemist on kahe paralleelse, kahe imaginaarse paralleelse ja kahe ühtuva tasandiga.* Nad saab anda kanoonilise võrrandiga $x_3^2 + a = 0$. Seega $f(x_1, x_2, x_3) = x_3^2 + a$. Kanoonilise reeperi $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ alguspunkti O korral

$$K = 0, \quad \sigma = a.$$

Viime reeperi alguspunkti mistahes punkti O', mis olgu määratud vektori

$$\overrightarrow{OO'} = c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + c_3\vec{e}_3$$

abil. Sel korral, arvestades valemeid (24.7)–(24.9), me saame

$$K' = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3^2 + a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c_3 \\ 0 & c_3 & c_3^2 + a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c_3 \\ 0 & c_3 & c_3^2 + a \end{vmatrix},$$

millest

$$K' = 0 \Longrightarrow K' = K,$$

ja

$$\sigma' = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c_3^2 + a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c_3^2 + a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & c_3 \\ c_3 & c_3^2 + a \end{vmatrix} = a,$$

millest

$$\sigma' = \sigma.$$

Analoogiliselt reeperi mistahes teise alguspunkti O'' korral, mis olgu määratud vektori

$$\overrightarrow{OO''} = \bar{c}_1\vec{e}_1 + \bar{c}_2\vec{e}_2 + \bar{c}_3\vec{e}_3$$

abil, saame

$$K'' = K, \quad \sigma'' = \sigma.$$

Saadud valemite abil saame, et reeperi alguspunkti viimisel punktist O' punkti O'' vaadeldavad suurused ei teisene

$$K'' = K', \quad \sigma'' = \sigma'.$$

Näeme, et K ja σ on invariandid. Sellega teoreem on tõestatud. ♠

Teeme nüüd ühe väga olulise, kahjuks ebameeldiva, märkuse. Leitud ortogonaalinvariandid δ, Δ, s, S, K ja σ on kolmemuutuja polünoomi

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j + 2\sum_{i=1} a_ix_i + a$$

invariandid, mitte aga teist järku pinna

$$p : \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_i x_j + 2\sum_{i=1} a_i x_i + a = 0$$

invariandid. Põhjuseks on asjaolu, et selles võrrandis kordajad a_{ij}, a_i ja a määratakse kordaja täpsusega, sest pinna võrrandit võime nullist erineva teguriga läbi korrutada ilma et pinna tüüp muutuks. Seega selle pinna võrrandi kordajateks on ka iga kordajate seeria ka_{ij}, ka_i, ka mistahes nullist erineva reaalarvu k korral. Sel korral

$$\begin{aligned} \delta' =& k^3\delta, \quad \Delta' = k^4\Delta, \quad s' \ = ks, \\ S' =& k^2 S, \quad K' = k^3 K, \quad \sigma' = k^2\sigma, \end{aligned} \tag{24.11}$$

millest näeme, et vaadeldavad suurused polegi teist järku pinna ortogonaalinvariandid. Küll on vaadeldavatel suurustel midagi väga olulist ka säilinud. Näiteks olla null või nullist erinev. Suurused Δ, S, σ ja moodustatud $s\delta$ säilitavad märki.

Osutub, et nii vähese informatsiooni abil saame teist järku pindade tüübid määrata.

25. TEIST JÄRKU PINNA TÜÜBI MÄÄRAMINE INVARIANTIDE ABIL

Selles paragrahvis leiame invariantide abil kriteeriumid, mille abil saab kindlaks teha teist järku pinna tüübi, olenemata sellest, millise ristreeperi suhtes pinna võrrand on algselt antud. Samas aga pinna tüübi määramiseks vastavate tingimuste leidmiseks kasutame teist järku pinna kõige lihtsamaid võrrandeid. Nendeks on kanoonilised võrrandid. Viimased on leitud § 19 ja seejuures nimelt ristreeperi suhtes.

Oma teist järku pinnad, milliseid on paragrahvis § 19 jagatud seitsmeteskümneks tüübiks, saame kõigepealt jagada kaheks: tsentraalseteks ja mittetsentraalseteks. Tsentraalseid, s.o. ühe keskpunktiga teist järku pindu, on kuut tüüpi. Nagu teame on nendeks 1) ellipsoid, 2) imaginaarne ellipsoid, 3) imaginaarne teist järku koonus, 4) ühekatteline hüperboloid, 5) kahekatteline hüperboloid ja 6) teist järku koonus. Teist järku pind on tsentraalne, kui tema võrrandi ruutosa maatriks $A = (a_{ij})$ on regulaarne, s.o. $\delta = |A| \neq 0$. Siin ja edaspidi selles paragrahvis jälgitakse, et samasugused nõuded invariantidele kehtiksid tegelikult tervele invariantide klassile, mis on määratletud valemitega (24.11).

Mittetsentraalsed teist järku pinnad on ülejäänud teist järku pinnad. Need pinnad ei ole ühe keskpunktiga pinnad. Selliseid on 11 tüüpi. Nendeks on 7) elliptiline paraboloid, 8) hüperboolne paraboloid, 9) elliptiline silinder, 10) imaginaarne elliptiline silinder, 11) kaks imaginaarset lõikuvat tasandit, 12) hüperboolne silinder, 13) kaks lõikuvat tasandit, 14) paraboolne silinder, 15) kaks paraleelset tasandit, 16) kaks imaginaarset paralleelset tasandit ja 17) kaks ühtuvat tasandit. Nende pinnaklasside tunnuseks on, et pinna võrrandi ruutosa maatriks on mitteregulaarne, s.t. $\delta = |A| = 0$.

Teist järku pindade klassifitseerimise esimene samm on tehtud. Seega, kui $\delta = |A| \neq 0$, on tegemist tsentraalse teist järku pinnaga (üks tüüpidest $1-6$) ja, kui $\delta = |A| = 0$, on tegemist mittetsentraalse teist järku pinnaga (üks tüüpidest $7-17$).

Nüüd võtame täiendava vaatluse alla kõigepealt tsentraalsed teist järku pinnad, kasutades uusi invariante. Teeme seda kanooniliste võrrandite kasutamise abil. Võrrandist

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} + \frac{x_3^2}{\alpha_3^2} = \varepsilon \tag{25.1}$$

konstandi ε sobival fikseerimisel saame 1) ellipsoidi ($\varepsilon = 1$), 2) imaginaarse ellipsoidi ($\varepsilon = -1$), 3) imaginaarse koonuse ($\varepsilon = 0$) kanoonilise võrrandi, aga võrrandist

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} - \frac{x_3^2}{\alpha_3^2} = \varepsilon \tag{25.2}$$

konstandi ε järgmisel fikseerimisel 4) ühekattelise hüperboloidi ($\varepsilon = 1$), kahekattelise hüperboloidi ($\varepsilon = -1$) ja teist järku koonuse ($\varepsilon = 0$). Nende võrrandite abil leiame invariandid $s\delta$ ja S. Kolme esimese teist järku pinnatüübi 1−3 korral valemist (25.1) saame

$$s\delta = \Big(\frac{1}{\alpha_1^2} + \frac{1}{\alpha_2^2} + \frac{1}{\alpha_3^2}\Big)\frac{1}{(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^2} > 0,$$

$$S = \frac{1}{(\alpha_1\alpha_2)^2} + \frac{1}{(\alpha_1\alpha_3)^2} + \frac{1}{(\alpha_2\alpha_3)^2} > 0.$$

Kolme järgmise pinnatüübi 4−6 korral valemist (25.2) saame

$$s\delta = -\Big(\frac{1}{\alpha_1^2} + \frac{1}{\alpha_2^2} - \frac{1}{\alpha_3^2}\Big)\frac{1}{(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^2},$$

$$S = \frac{1}{(\alpha_1\alpha_2)^2} - \frac{1}{(\alpha_1\alpha_3)^2} - \frac{1}{(\alpha_2\alpha_3)^2}.$$

Osutub, et sel korral ei ole õige $s\delta > 0$ ja $S > 0$, nagu on seda pinnatüüpide 1−3 korral. Tõepoolest, sest sel korral

$$\begin{cases} s\delta > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \Big(\dfrac{1}{\alpha_1^2} + \dfrac{1}{\alpha_2^2} - \dfrac{1}{\alpha_3^2}\Big)\dfrac{1}{(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^2} < 0 \\ \dfrac{1}{(\alpha_1\alpha_2)^2} - \dfrac{1}{(\alpha_1\alpha_3)^2} - \dfrac{1}{(\alpha_2\alpha_3)^2} > 0 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha_1^2} + \dfrac{1}{\alpha_2^2} < \dfrac{1}{\alpha_3^2} \\ \Big(\dfrac{1}{\alpha_1^2} + \dfrac{1}{\alpha_2^2}\Big)\dfrac{1}{\alpha_3^2} < \dfrac{1}{(\alpha_1\alpha_2)^2} \end{cases}.$$

Korrutades saadud kahel võrratusel omavahel vasakud pooled ja omavahel paremad pooled ning seejärel saadud võrratust korrutades teguriga α_3^2, me saame

$$\Big(\frac{1}{\alpha_1^2}+\frac{1}{\alpha_2^2}\Big)^2 < \frac{1}{(\alpha_1\alpha_2)^2}.$$

Korrastamisel järeldub

$$\frac{1}{\alpha_1^4}+\frac{1}{(\alpha_1\alpha_2)^2}+\frac{1}{\alpha_2^4} < 0.$$

See on aga võimatu $\alpha_1 \neq 0, \alpha_2 \neq 0$ ja $\alpha_3 \neq 0$ tõttu. Sellega oleme näidanud, et tsentraalsete pinnatüüpide 4−6 korral ei ole õige $s\delta > 0$ ja $S > 0$. Õige on aga $s\delta \leq 0$ või $S \leq 0$. Nüüd on juba lihtne eristada pinnatüüpe 1−3 üheltpoolt ja pinnaüüpe 4−6 teiselt poolt. Seda saame teha invariandi Δ abil. Valemite (25.1) ja (25.2) abil vastavalt saame

$$\Delta = -\frac{\varepsilon}{(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^2}, \quad \Delta = \frac{\varepsilon}{(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^2}.$$

Seega 1) ellipsoidi korral $\Delta < 0$, 2) imaginaarse ellipsoidi korral $\Delta > 0$, 3) imaginaarse teist järku koonuse korral $\Delta = 0$, 4) ühekattelise hüperboloidi korral $\Delta > 0$, 5) kahekattelise hüperboloidi korral $\Delta < 0$ ja 6) teist järku koonuse korral $\Delta = 0$.

Sellega tsentraalsete teist järku pindade jaoks on leitud invariantide süsteemid, et määrata ta tüüp olenemata sellest millises ristreeperis on ta võrrand antud.

Saadud tulemused on esitatud tabelis 1 järgmisel leheküljel.

Nüüd võtame vaatluse alla mittetsentraalsed teist järku pinnad. Nende tunnuseks on $\delta = 0$. Eespool toodud loetelus on tegu juhtudega 7−17. Nagu tsentraalsete pindade korral on ka siin vaja kanoonilisi võrrandeid invariantide süsteemi leidmiseks, et määrata pinna tüüp. Õnneks saab ka siin kanoonilised võrrandid esitada kompaktsemalt.

7−8) Elliptiline, hüperboolne paraboloid

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2}+\varepsilon\frac{x_1^2}{\alpha_2^2} = 2x_3, \quad \varepsilon \in \{1, -1\}. \tag{25.3}$$

Tabel 1
Tsentraalse teist järku pinna
tüübi määramine invariantide abil ($\delta \neq 0$)

Pinna nimetus	*Kanooniline võrrand*	*Pinna invariandid*
1. Ellipsoid	$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_3^2} = 1$	$s\delta > 0, \quad S > 0,$ $\Delta < 0$
2. Imaginaarne ellipsoid	$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_3^2} = 0$	$s\delta > 0, \quad S > 0,$ $\Delta > 0$
3. Imaginaarne teist järku koonus	$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_3^2} = 0$	$s\delta > 0, \quad S > 0,$ $\Delta = 0$
4. Ühekatteline hüperboloid	$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} - \frac{x_2^2}{\alpha_3^2} = 1$	$(s\delta \leq 0) \vee (S \leq 0),$ $\Delta > 0$
5. Kahekatteline hüperboloid	$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} - \frac{x_2^2}{\alpha_3^2} = -1$	$(s\delta \leq 0) \vee (S \leq 0),$ $\Delta < 0$
6. Teist järku koonus	$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} - \frac{x_2^2}{\alpha_3^2} = 0$	$(s\delta \leq 0) \vee (S \leq 0),$ $\Delta = 0$

9−11) Elliptiline, imaginaarne elliptiline silinder, kaks imaginaarset lõikuvat tasandit

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_1^2}{\alpha_2^2} = \varepsilon, \quad \varepsilon \in \{1, -1, 0\}. \tag{25.4}$$

12−13) Hüpperboolne silinder, kaks lõikuvat tasandit

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} - \frac{x_1^2}{\alpha_2^2} = \varepsilon, \quad \varepsilon \in \{1, 0\}. \tag{25.5}$$

14) Paraboolne silinder

$$x_3^2 = 2px_1, \quad p \neq 0. \tag{25.6}$$

15−17) Kaks paralleelset, kaks imaginaarset paralleelset, kaks ühtuvat tasandit

$$x_3^2 + \alpha = 0. \quad \alpha < 0, \quad \alpha > 0, \quad \alpha = 0. \tag{25.7}$$

Kasutades võrrandeid (25.3)−(25.7), saame arvutada invariandid. Kuna see on üsna lihtne, siis jätame selle lugejale. Osutub, et invariandi Δ abil saame need 11 pinnatüüpi 7−17 jagada kolme rühma. Paneme tähele, et 7) elliptilise paraboloidi korral $\Delta = (\alpha_1\alpha_2)^{-2} < 0$ ja 8) hüperboolse paraboloidi korral $\Delta = -(\alpha_1\alpha_2)^{-2} > 0$ ning ülejäänud mittetsentraalsete pinnatüüpide lorral $\Delta = 0$. Seega elliptilise ja hüperboolse paraboloidi määramiseks on invariantide süsteem leitud. Invariantide $\delta = \Delta = 0$ korral teist järku pind on üks tüüpidest 9−17 eristamata neid omavahel. Need üheksa pinnatüüpi saab invariandi S abil jagada omakorda kolme alamrühma. Nimelt

9−11) elliptilise, imaginaarse elliptilise silindri, imaginaarsete lõikuvate tasandite korral $S = (\alpha_1\alpha_2)^{-2} > 0$,

12−13) hüperboolse silindri ja kahe lõikuva tasandi korral on aga meil $S = -(\alpha_1\alpha_2)^{-2} < 0$,

14−17)paraboolse silindri, kahe paralleelse, imaginaarse paralleelse, ühtuva tasandi korral $S = 0$.

Kuna pinnatüüpide 9−17 korral K on invariant, siis me saame seda kasutada. Ta võimaldab kahe esimese rühma pinnatüübid lahutada. Pinnatüüpide 9−11 korral saame nad eristada. Elliptilise silindri korral $K < 0$, elliptilise imaginaarse silindri korral $K > 0$ ja kahe imaginaarse lõikuva tasandi korral $K = 0$. Samuti saame invariandi K abil eristada pinnatüübid

12$-$13. Hüperboolse silindri korral $K \neq 0$ ja kahe lõikuva tasandi korral $K = 0$. Kolmanda rühma pinnatüüpide 14$-$17 korral eristub ainult $K \neq 0$ korral paraboolne silinder, kuid $K = 0$ korral on tegemist pinnatüüpidega 15$-$17. Need pinnatüübid saab lahutada omavahel σ abil, mis on nende korral invariant. Kahe paralleelse tasandi korral on $\sigma < 0$, kahe imaginaarse paralleelse tasandi korral $\sigma > 0$ ja kahe ühtuva tasandi korral aga $\sigma = 0$.

Sellega ka mittetsentraalsete teist järku pindade korral on leitud invariantide süsteem, mis võimaldab määrata pinnatüübi.

Esitame saadud tulemused tabelis 2.

Tabel 2
Mittetsentraalse teist järku pinna
tüübi määramine invariantide abil ($\delta = 0$)

Pinna nimetus	*Kanooniline võrrand*	*Pinna invariandid*
1. Elliptiline paraboloid	$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 2x_3$	$\delta = 0, \quad \Delta < 0$
2. Hüperboolne paraboloid	$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} - \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 2x_3$	$\delta = 0, \quad \Delta > 0$
3. Elliptiline silinder	$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 1$	$\delta = 0, \quad \Delta = 0,$ $K < 0$
4. Elliptiline imaginaarne silinder	$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = -1$	$\delta = 0, \quad \Delta = 0, \quad S > 0,$ $K > 0$
5. Kaks imaginaarset lõikuvat tasandit	$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 0$	$\delta = 0, \quad \Delta = 0, \quad S > 0,$ $K = 0$
6. Hüperboolne silinder	$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} - \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 1$	$\delta = 0, \quad \Delta = 0, \quad S < 0,$ $K \neq 0$

Pinna nimetus	*Kanooniline võrrand*	*Pinna invariandid*
7. Kaks lõikuvat tasandit	$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} - \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 0$	$\delta = 0, \quad \Delta = 0,$ $S < 0, \quad K = 0$
8. Paraboolne silinder	$x_3^2 = 2px_1, \quad p \neq 0$	$\delta = 0, \quad \Delta = 0,$ $S = 0, \quad K \neq 0$
9. Kaks paralleelset tasandit	$x_3^2 - \alpha^2 = 0$	$\delta = 0, \quad \Delta > 0, \quad S = 0,$ $K = 0, \quad \sigma < 0$
10. Kaks imaginaarset paralleelset tasandit	$x_3^2 + \alpha^2 = 0$	$\delta = 0, \quad \Delta = 0,$ $K = 0, \quad \sigma > 0$
11. Kaks ühtuvat tasandit	$x_3^2 = 0$	$\delta = 0, \quad \Delta = 0, \quad S = 0,$ $K = 0, \quad \sigma = 0$

26. TEIST JÄRKU PINNA KANOONILISE VÕRRANDI LEIDMINE INVARIANTIDE ABIL

Käesolev paragrahv on § 19 jätk. Seal me leidsime teist järku pindade kanoonilised võrrandid. Me aga ei saanud anda kanooniliste võrrandite leidmist invariantide abil, sest meil ei olnud veel invariandi mõistet. Meenutame kõigepealt lühidalt, mida me § 19 tegime.

Olgu antud teist järku pind p võrrandiga

$$p: \quad \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_i x_j + 2\sum_{i=1}^{3} a_i x_i + a = 0 \tag{26.1}$$

mingi ristreeperi $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ suhtes. Selles valemis x_1, x_2 ja x_3 on ruumi E^3 muutuva punkti X koordinaadid vaadeldava ristreeperi suhtes. Me lihtsustasime pinna p võrrandit (26.1), minnes üle sobivale ristreeperile $\{O'; \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3\}$, kusjuures see toimus kahes etapis. Esmalt muutsime esialgses ristreeperis $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ sobivalt baasi, jättes alguspunkti muutmata. Uut ristreeperit tähistasime $\{O; \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3\}$. Teiseks valisime sobiva alguspunkti O', saades ristreeperiks $\{O'; \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3\}$. Kirjeldame täpsemalt, kuidas see ristreeperite valik toimus. Reeperi esimese valiku aluseks on ainult ristreeperid muutmata alguspunkti. Seega temasse kuuluv baas on alati ristbaas. Seetõttu pinna p ruutosa maatriks A teiseneb ristbaasi teisendusel $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \xrightarrow{C} \{\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3\}$ ortogonaalmaatriksi abil, seega meil $C^{-1} = C^\top$. Niisiis maatriksi A teisenemisvalem $A' = C^\top AC$ täpsustub valemiks

$$A' = C^{-1}AC.$$

Viimane ütleb, et vektorruumis $\mathbf{E}^3$ saab defineerida lineaarteisenduse. Kuna maatriks A on sümmeetriline, siis see lineaarteisendus on täpsemalt sümmeetriline. Seega tekib omaväärtusülesanne. Selle kohaselt tuleb meil leida kuupvõrrandist $|A - \lambda E| = 0$ omaväärtused λ_1, λ_2 ja λ_3, mis on reaalsed, sest lineaarteisendus, nagu öeldud, on sümmeetriline. Siin tuleb juhtida tähelepanu sellele, et millises järjekorras me nummerdame omaväärtusi, selles on meil vabadus. Seda tuleb teha nii, et saaksime pinna kanooniliseks vôrrandiks nagu on toodud tabelites 1 ja 2. Iga omaväärtuse λ_k korral, kus $k \in \{1, 2, 3\}$, tuleb meil seejärel leida omavektor $\vec{s}_k = (s_1^{(k)}, s_2^{(k)}, s_3^{(k)}) \neq \vec{0}$.

Viimase koordinaadid leitakse aga lineaarvõrrandisüsteemist

$$\sum_{j=1}^{3}(a_{ij} - \lambda_k \delta_{ij}) s_j^{(k)} = 0, \quad i \in \{1, 2, 3\}.$$

Kuna lineaarvõrrandisüsteem on homogeenne, siis iga omavektor on määratud kordaja täpsusega. Seega, kui oleme leidnud mingi omavektori $\vec{s}_k \neq \vec{0}$, siis sama omaväärtuse λ_k omavektoriks on ka $\vec{s}\,'_k = \alpha \vec{s}_k$, kus $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Valides $\alpha = \frac{1}{|\vec{s}_k|}$, saame omavektori $\vec{s}\,'_k$ pikkusega 1. Ühikvektoritest koosnev omavektorite süsteem $\{\vec{s}\,'_1, \vec{s}\,'_2, \vec{s}\,'_3\}$ koosneb aga paarikaupa ristuvatest vektoritest. Kui omaväärtused on paarikaupa erinevad, siis see normeeritud ristuvate omavektrite süsteem suuna täpsuseni määratakse üheselt. Kui omaväärtuste seas on võrdseid paare, siis saab ka valida ristuvatest ühikvektoritest koosneva süsteemi, kuid neid on lõpmatu palju, sest võrdsele omavektorite paarile vastav omavektorite hulk on kahemõõtmeline vektorruum ilma nullvektorita. Seega on igas olukorras tegemist ristbaasiga. Sellisele ristbaasile me üle lähemegi. Kuna me ei muuda reeperi alguspunkti, siis saame reeperi $\{O; \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3\}$. Siin me tähistasime ümber $\vec{e}\,'_k = \vec{s}\,'_k$, kus $k \in \{1, 2, 3\}$. Teame, et valitud ristreeperis pinna p ruutosa maatriks A teiseneb uueks maatriksiks A', mis on ehitusega

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}. \tag{26.2}$$

Pinna võrrand (26.1) valitud ristreeperis saab tublisti lihtsama kuju

$$p : \lambda_1 \overline{x}_1^2 + \lambda_2 \overline{x}_2^2 + \lambda_3 \overline{x}_3^2 + 2\sum_{i=1}^{3} \overline{a}_i \overline{x}_i + a = 0. \tag{26.3}$$

Siin $\overline{x}_1, \overline{x}_2$ ja $\overline{x}_3$ tähistavad muutuva punkti X koordinaate valitud ristreeperis $\{O; \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3\}$. Muuseas viimases pinna võrrandis vabaliige a ei ole üldse teisenenud.

Järgmise sammuna tuleb muuta ristreeperi $\{O; \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3\}$ alguspunkti O, asendades selle sobiva punktiga O'. See protseduur sõltub aga pinna ruutosa maatriksi A astakust $r := rank\, A$. Kuna pinna ruutosa maatriksi A astak on invariant, s.o. vaatamata sellele, et maatriks A teiseneb üleminekul uuele ristreeperile, on tema astak r muutumatu. Seetõttu me võime astaku leidmiseks kasutada maatriksit A leituna mistahes ristreeperi suhtes. Me võime näiteks selle astaku leida, kui A on kujuga (26.2). Sel korral on kerge leida tema nullist erinevaid miinoreid. Neid tuleb otsida peamiinorite seast, sest kõik teised miinorid on võrdsed nulliga. Näiteks $r = 3$ korral peab leiduma maatriksil (26.2) üks kolmandat järku nullist erinev miinor, milleks saab olla $|A'| = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$. Seega $r = 3$ tähendab, et maatriksi A kõik omaväärtused on nullist erinevad. Analoogiliselt $r = 2$ korral üks omaväärtustest on null, aga kaks on nullist erinevad, ja $r = 1$ korral kaks omaväärtust on nullid ja ainult üks on nullist erinev. Kuna ristreeperi uue alguspunkti O' valik sõltub maatriksi A astakust, siis meie arutelus toimub hargnemine tema astaku järgi.

I. Olgu $r = 3$. Seega $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0$ ehk $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$ ja $\lambda_3 \neq 0$. Sel korral võrrandi (26.3) saab $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$ ja $\overline{x}_3$ suhtes teisendada täisruutudeks, s.o. esitada kujul

$$\lambda_1(\overline{x}_1 + \overline{\alpha}_1)^2 + \lambda_2(\overline{x}_2 + \overline{\alpha}_2)^2 + \lambda_3(\overline{x}_3 + \overline{\alpha}_3)^2 + \overline{a} = 0.$$

Võttes nüüd reeperis $\{O; \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3\}$ uue alguspunkti O' koordinaatideks $(-\overline{\alpha}_1, -\overline{\alpha}_2, -\overline{\alpha}_3)$, me saame reeperis $\{O'; \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3\}$ tema võrrandiks

$$\lambda_1\tilde{x}_1^2 + \lambda_2\tilde{x}_2^2 + \lambda_3\tilde{x}_3^2 + \overline{a} = 0. \tag{26.4}$$

Siin $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2$ ja $\tilde{x}_3$ on muutuva punkti X koordinaadid viimases reeperis. Oluline on siin rõhutada, et võrrandis (26.4) vabaliikme $\overline{a}$ saab leida nimelt invariantide abil. Selleks leiame invariandi Δ. Selle leidmiseks võime kasutada meie pinna võrrandit antuna mistahes ristreeperi suhtes, sest tegemist on ju invariandiga. Me saame

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{a} \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\lambda_3\overline{a} = \delta\overline{a},$$

millest $\overline{a} = \frac{\Delta}{\delta}$. Seega pinna p võrrand (26.4) saab kuju

$$\lambda_1\tilde{x}_1^2 + \lambda_2\tilde{x}_2^2 + \lambda_3\tilde{x}_3^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0. \tag{26.5}$$

See võrrand on eespool valemi (19.7) all. Kuna $\delta \neq 0$, siis pind p on tsentraalne. Pinna keskpunkti C koordinaadid viimases ristreeeris saame süsteemist $\lambda_1 \tilde{x}_1 = 0$, $\lambda_2 \tilde{x}_2 = 0$ ja $\lambda_3 \tilde{x}_3 = 0$. Seega $C(0, 0, 0)$. Näeme. et viimase ristreeperi alguspunkt $O\,'$ on viidud tsentraalse pinna keskpunkti. Pinna võrrand (26.5) on sisuliselt tsentralse pinna kanooniline võrrand. Mis on selle võrrandi eelis? Selles esinevad suurused– omaväärtused λ_1, λ_2, λ_3 ning invariandid δ ja Δ– saame leida pinna esialgse võrrandi (26.1) abil. Seejärel on kohe kirja pandav pinna kanooniline võrrand (26.5). Kergesti on leitav ka ristreeper $\{O\,'; \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3\}$, mille suhtes see kanooniline võrrand saadakse. Alguspunkti $O\,' = C$ koordinaatideks on keskpunkti koordinaadid, mille leidmiseks on eespool leitud valemid. Baasivektoriteks on normeeritud omavektorid.

II. Olgu $r = 2$. Sel korral üks omaväärtustest on null. Meie tähistes on $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$ ja $\lambda_3 = 0$. Selle juhu alla langeb seitse tüüpi teist järku pindu. Paragrahvi § 19 numeratsiooni kasutades, on need pinnatüübid 7–13. Neist pinnatüüpide 7 ja 8, s.o. paraboloidide, kanoonilised võrrandid saadedakse valemist (19.16), milleks on

$$\lambda_1 \tilde{x}_1^2 + \lambda_2 \tilde{x}_2^2 + 2a_3 \tilde{x}_3 = 0, \quad a_3 \neq 0. \tag{26.6}$$

Pinnatüüpide 9–13 kanoonilised võrrandid saadakse aga valemist (19.20), s.o.

$$\lambda_1 \tilde{x}_1^2 + \lambda_2 \tilde{x}_2^2 + a = 0. \tag{26.7}$$

Sisuliselt valemid (26.6) ja (26.7) on nende pinnatüüpide kanoolised võrrandid. Me peame nad esitama aga ainult invariantide abil. Seega a_3 ja a tuleb esitada invariantide abil. Siin λ_1 ja λ_2 on juba invariandid. Invariantide arvutamiseks võime kasutada valemit (26.6) või (26.7), sest invariandid ei sõltu ristreeperi valikust. Valemi (26.6) abil saame $\Delta = -a_3^2 \lambda_1 \lambda_2 \neq 0$. Kuna $S = \lambda_1 \lambda_2$, siis

$$\Delta = -a_3^2 S \Longleftrightarrow a_3 = \pm\sqrt{-\frac{\Delta}{S}}.$$

Kumb märk siin valida a_3 jaoks tuleb teha kindlaks mingil täiendaval moel. Paraboloidide kanooniliseks võrrandiks invariantide abil saame

$$\lambda_1 \tilde{x}_1^2 + \lambda_2 \tilde{x}_2^2 \pm 2\sqrt{-\frac{\Delta}{S}}\,\tilde{x}_3 = 0. \tag{26.8}$$

Valemist (26.7) saame $\Delta = 0$, mis ei luba määrata konstanti a. Abiks on pinnatüüpide 9–13 korral aga K, mis on invariant. Kuna $K = a\lambda_1\lambda_2$ ja $S = \lambda_1\lambda_2$, siis $a = \frac{K}{S}$. Seega a on avaldatud invariantide kaudu. Järelikult võrrand

$$\lambda_1\tilde{x}_1^2 + \lambda_2\tilde{x}_2^2 + \frac{K}{S} = 0.$$

on pinnatüüpide 9–13 kanooniliseks võrrandiks invariantide kaudu.

III. Olgu $r = 1$. Sel korral omaväärtustest kaks on nullid. Meil on tähistatud $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$ ja $\lambda_3 \neq 0$. Vaatluse all on pinnatüübid 14–17. Pinnatüübi 14, s.o. paraboolse silindri, kanoonolise võrrandi saame valemist (19.29), milleks on

$$\lambda_3\tilde{x}_3^2 + 2a_1\tilde{x}_1 = 0, \quad a_1 \neq 0. \tag{26.9}$$

Paralleelsete (ühtuvate) tasandipaaride, s.o. pinnatüüpide 14–17, kanoonilised võrrandid saame valemist (19.32), milleks on

$$\lambda_3\tilde{x}_3^2 + a = 0. \tag{26.10}$$

Jääb veel leida konstandid a_1 ja a invariantide kaudu. Valemist (26.9) saame $K = -a_1^2\lambda_3$, millest $a_1 = \pm\sqrt{-\frac{K}{\lambda_3}}$. Ka siin tuleb täpsustada kumb märk valida. Seega paraboolse silindri kanooniline võrrand invariantide kaudu on

$$\lambda_3\tilde{x}_3^2 \pm 2\sqrt{-\frac{K}{\lambda_3}}\tilde{x}_1 = 0. \tag{26.11}$$

Lähtume nüüd valemist (26.10). Tegemist on pinnatüüpidega 15–17. Seega ka $\sigma = \lambda_3$ on invariant. Siit $a = \frac{\sigma}{\lambda_3}$. Seega paralleelsete (ühtuvate) tasandipaaride kanooniliseks võrrandiks on

$$\lambda_3\tilde{x}_3^2 + \frac{\sigma}{\lambda_3} = 0. \tag{26.12}$$

Sellega meie oleme andnud valemid mistahes ristreeperis antud teist järku pinna võrrandit kasutades, kanoonilise võrrandi leidmiseks.

27. TEIST JÄRKU PINNA ASENDI MÄÄRAMINE

Teist järku pinna asendi määramise all mõistame invariantide abil sellise ristreeperi leidmist, milles meie pinna võrrand saavutab kanoonilise kuju. Pinna sellist ristreeperit nimetame tema *kanooniliseks reeperiks.* Pinnal võib olla enam kui üks kanooniline reeper, ilma et tema kanooniline võrrand muutuks. See asjaolu on tingitud pinna sümmeetriatasandite olemasolust.

Eelmises paragrahvis sai seletatud, kuidas invariantide abil leida teist järku pinna võrrandi kanooniline kuju. Kui ka asendi määramise küsimus, s.o. kanoonilise ristreeperi leidmise küsimus, saab lahenduse, siis me võime oma teist järku pinna võrrandi anda mistahes ristreeperis ja me saame kõik teada pinna ehituse kohta. Varem, teises peatükis, oleme uurinud igat tüüpi teist järku pindade ehitust, kui tema võrrand on antud kanoonilises reeperis.

Tegelikult me oskame juba praegugi öelda pea-aegu kõik teist järku pinna kanoonilise ristreeperi leidmise kohta. Kanoonilisse reeperisse kuuluvateks baasivektoriteks tuli võtta meie pinna ruutosa maatriksi normeeritud omavektorid ja reeperi alguspunktiks reeglina pinna keskpunkt, kui viimane (viimased) on olemas. Kui pinnal on mitu keskpunkti, siis reeperi alguspunktiks kõlbab ükskõik milline neist. Seejuures pinna kanooniline võrrand sellest ei sõltu. Tsentraalsetel pindadel on aga ainult üks keskpunkt, mistõttu kanoonilise reeperi alguspunkt määratakse üheselt. Samas märkame, et kanoonilises reeperis baasivektorid ei määrata sugugi üheselt. See tuleb sellest, et omavektorite normeerimisel saadav ühikvektor ei määrata üheselt. Saadakse kaks ühikvektorit– vektor ja ta vastandvektor. Kui pinna kanoonilises võrrandis mingi koordinaat on ruudus, s.o. pinnal on sümmetriatasand, siis on ükskõik kumma normeeritud omavektori kanoonilisse baasi lülitame. Näiteks ellipsoidil seetõttu on kaheksa kanoonilist reeperit.

Eelmises paragrahvis nägime, et teatud määramatus jääb meid kimbutama elliptilise ja hüperboolse paraboloidi ning paraboolse silindri korral. Nende kanoonilised võrrandid sisaldavad esimese astme liidetavat. Meil on selleks koordinaat x_3. Me ei oska paraku seni öelda kumb normeeritud omavektor tuleb valida baasivektoriks $\vec{e}\,'_3$. Sellest sõltub märk pinna võrrandis koordinaati x_3 sisaldava liidetava ees. Samuti me ei oska paika panna kanoonilise reeperi alguspunkti, sest neil kolmel pinnatüübil puudub ju keskpunkt.

Selgitame kõigepealt paraboloidide korral, kuidas kanoonilist reeperit ikkagi leida. Selle leidmise saab jagada kaheks osaks: esiteks baasivektorite leidmine ja teiseks alguspunkti leidmine. Siin me tugineme paragrahvis § 18 toodud pinna võrrandi kordajate teisenemise valemite täpsemale uurimisele.

Olgu paraboloid p mingis ristreeperis $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ antud võrrandiga

$$p: \quad \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j + 2\sum_{i=1}^{3} a_ix_i + a = 0. \tag{27.1}$$

Me peame uuesti läbi analüüsima omaväärtusülesande eeldusel, et kaks omaväärtust on nullist erinevad ja üks on võrdne nulliga. Meie tähistes $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$ ja $\lambda_3 = 0$. Viimased on leitavad karakteristliku võrrandi

$$-\lambda^3 + s\lambda^2 - S\lambda = 0$$

lahendamisel. Siin me oleme arvestanud, et invariant $\delta = 0$. Omavektorite $\vec{s}_k = (s_1^{(k)}, s_2^{(k)}, s_3^{(k)})$ koordinaadid saame kätte homogeensest lineaarvõrrandisüsteemist

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda_k)s_1^{(k)} + a_{12}s_2^{(k)} + a_{13}s_3^{(k)} &= 0, \\ a_{21}s_1^{(k)} + (a_{22} - \lambda_k)s_2^{(k)} + a_{23}s_3^{(k)} &= 0, \\ a_{31}s_1^{(k)} + a_{32}s_2^{(k)} + (a_{33} - \lambda_k)s_3^{(k)} &= 0, \end{aligned} \tag{27.2}$$

kus $k \in \{1, 2, 3\}$. Selle võrrandisüsteemi lahendivektor iga omaväärtuse λ_k korral on määratud kordsuse täpsusega. Kanoonilisse baasi lülitamiseks sobib ainult normeeritud omavektor $\vec{e}\,'_k$, s.o. üks vektoritest

$$\pm\frac{1}{|\vec{s}_k|}\vec{s}_k = (\overline{s}_1^{(k)}, \overline{s}_2^{(k)}, \overline{s}_3^{(k)}).$$

Minnes üle reeperile $\{O; \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3\}$, kus alguspunkt on jäetud muutmata ja baas koosneb normeeritud omavektoritest, paraboloidi võrrand selles reeperis, nagu teame, saab kuju

$$\lambda_1\overline{x}_1^2 + \lambda_2\overline{x}_2^2 + 2\overline{a}_1\overline{x}_1 + 2\overline{a}_2\overline{x}_2 + 2\overline{a}_3\overline{x}_3 + a = 0. \tag{27.3}$$

Siin $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$ ja $\overline{x}_3$ on paraboloidi muutuva punkti X koordinaadid valitud reeperis. Viimases võrrandis vabaliige a polegi teisenud (vt. § 18). Samuti oleme arvestanud, et $\lambda_3 = 0$. Paraboloidide korral $\overline{a}_3 \neq 0$.

Käesoleva juhu eripära seisneb selles, et omaväärtus $\lambda_3 = 0$ ja $\delta = 0$. See omakorda kajastub omavektori $\vec{s}_3 = (s_1^{(3)}, s_2^{(3)}, s_3^{(3)})$ koordinaatides, mis leitakse süsteemist

$$\begin{aligned} a_{11}s_1^{(3)} + a_{12}s_2^{(3)} + a_{13}s_3^{(3)} &= 0, \\ a_{21}s_1^{(3)} + a_{22}s_2^{(3)} + a_{23}s_3^{(3)} &= 0, \\ a_{31}s_1^{(3)} + a_{32}s_2^{(3)} + a_{33}s_3^{(3)} &= 0. \end{aligned} \tag{27.4}$$

Viimane on saadud süsteemist (27.2), kui $k = 3$. Süsteemi maatriksiks on meie pinna võrrandi ruutosa maatriks

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \tag{27.5}$$

mis on astakuga kaks. Süsteemi (27.4) analüüsimiseks moodustame maatriksi A reavektorid

$$\vec{a}_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13}), \quad \vec{a}_2 = (a_{21}, a_{22}, a_{23}), \quad \vec{a}_3 = (a_{31}, a_{32}, a_{33}).$$

Nende abil saab kompaktsemalt panna kirja süsteemi (27.4):

$$\langle \vec{a}_1, \vec{s}_3 \rangle = 0, \quad \langle \vec{a}_2, \vec{s}_3 \rangle = 0, \quad \langle \vec{a}_3, \vec{s}_3 \rangle = 0,$$

millest

$$\vec{a}_1 \perp \vec{s}_3, \quad \vec{a}_2 \perp \vec{s}_3 \quad \vec{a}_3 \perp \vec{s}_3.$$

Viimane on antav samaväärselt lineaarkatte abil, s.o. $L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) \perp \vec{s}_3$.

Järgnevas moodustame maatriksi A algebraliste täiendite maatriksi $\tilde{A}$. Elemendi a_{ij} algebralist täiendit, nagu tavaliselt, tähistame A_{ij} abil. Seega

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix},$$

kus

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Moodustame ka maatriksi $\tilde{A}$ reavektorid

$$\vec{A}_1 = (A_{11}, A_{12}, A_{13}), \quad \vec{A}_2 = (A_{21}, A_{22}, A_{23}), \quad \vec{A}_3 = (A_{31}, A_{32}, A_{33}).$$

Huvitav on märgata, et

$$\vec{A}_1 = \vec{a}_2 \times \vec{a}_3, \quad \vec{A}_2 = -\vec{a}_1 \times \vec{a}_3, \quad \vec{A}_3 = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2,$$

millest

$$\vec{A}_1 \perp \vec{a}_2, \;\; \vec{A}_1 \perp \vec{a}_3; \quad \vec{A}_2 \perp \vec{a}_1, \;\; \vec{A}_2 \perp \vec{a}_3; \quad \vec{A}_3 \perp \vec{a}_1, \;\; \vec{A}_3 \perp \vec{a}_2. \tag{27.6}$$

Kasutades segakorrutamise mõistet, saame lisada veel järgmist:

$$0 = \delta = |A| = \vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3 = \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2 \times \vec{a}_3 \rangle = \langle \vec{a}_1, \vec{A}_1 \rangle \Longleftrightarrow \vec{a}_1 \perp \vec{A}_1,$$

$$0 = \delta = |A| = \vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3 = -\vec{a}_2\vec{a}_1\vec{a}_3 = \langle \vec{a}_2, -\vec{a}_1 \times \vec{a}_3 \rangle = \langle \vec{a}_2, \vec{A}_2 \rangle \Longleftrightarrow \vec{a}_2 \perp \vec{A}_2,$$

$$0 = \delta = |A| = \vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3 = \vec{a}_3\vec{a}_1\vec{a}_2 = \langle \vec{a}_3, \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \rangle = \langle \vec{a}_3, \vec{A}_3 \rangle \Longleftrightarrow \vec{a}_3 \perp \vec{A}_3.$$

Viimasest koos valemiga (27.6) saame

$$\vec{a}_1 \perp \vec{A}_i, \quad \vec{a}_2 \perp \vec{A}_i, \quad \vec{a}_3 \perp \vec{A}_i, \quad i \in \{1, 2, 3\}.$$

Seega $L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) \perp \vec{A}_i$. Eespool on juba saadud $L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) \perp \vec{s}_3$. Neli vektorit $\vec{A}_1$, $\vec{A}_2$, $\vec{A}_3$ ja $\vec{s}_3$ on kahemõõtmelise alamruumi $L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) \subset \mathbf{E}_3$ ortogonaaltäiendi $L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)^{\perp}$, mis on ühemõõtmeline, vektorid. Seega nad on omavahel kollineaarsed. Kuna omavektor ei ole definitsiooni kohaselt nullvektor, siis saame iga vektori $\vec{A}_i$ avaldada omavektori $\vec{s}_3$ kaudu. Seega õige on

$$\vec{A}_1 = t_1\vec{s}_3, \quad \vec{A}_2 = t_2\vec{s}_3, \quad \vec{A}_3 = t_3\vec{s}_3. \tag{27.7}$$

Nüüd täpsustame, kuidas paraboloidide võrrandis (27.3) nullist erinev kordaja $\overline{a}_3$ avaldub esialgsete kordajate kaudu. Paraboloidide võrrandi (27.3) saamiseks punkti koordinaadid teisenevad valemite

$$\begin{aligned} x_1 =& s_1^{(1)}\overline{x}_1 + s_1^{(2)}\overline{x}_2 + s_1^{(3)}\overline{x}_3, \\ x_2 =& s_2^{(1)}\overline{x}_1 + +s_2^{(2)}\overline{x}_2 + s_2^{(3)}\overline{x}_3, \\ x_3 =& s_3^{(1)}\overline{x}_1 + +s_3^{(2)}\overline{x}_2 + s_3^{(3)}\overline{x}_3 \end{aligned}$$

abil. Asendades siit paraboloidide võrrandisse (27.1), saame

$$\overline{a}_3 = a_1 s_1^{(3)} + a_2 s_2^{(3)} + a_3 s_3^{(3)}. \tag{27.8}$$

Muudame nüüd osaliselt reeperi alguspunkti, eraldades võrrandis (27.3) välja koordinaatide $\overline{x}_1$ ja $\overline{x}_2$ täisruudud, s.t. viime punkti O punkti O' koordinaatidega $(-\frac{\overline{a}_1}{\lambda_1}, -\frac{\overline{a}_2}{\lambda_2}.0)$. Hiljem võime ju vajaduse korral kolmandat koordinaati täpsustada. Uusi koordinaate tähistame $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$ ja $\tilde{x}_3$ abil. Paraboloidide võrrand (27.3) saab kuju

$$\lambda_1\tilde{x}_1^2 + \lambda_2\tilde{x}_2^2 + 2\overline{a}_3\tilde{x}_3 + \tilde{a} = 0. \tag{27.9}$$

Oluline on märgata, et koordinaadi $\tilde{x}_3$ kordaja ei teisenenud. Sellest võrrandist loeme paraboloidide kohta juba üsna palju välja. Viimane reeper $\{O'; \vec{e}\,'_1, e\,'_2, e\,'_3\}$ on üsna lähedane kanoonilisele reeperile. Selle reeperi alguspunkt on paraboloidi teljel, reeglina küll mitte pinna tippus, mida täpsustame allpool. Keskendume vektori $\vec{e}\,'_3$ suuna täpsustamisele. Selleks lõikame oma paraboloidi (27.9) tasandiga $\tilde{x}_2 = 0$. Seega

$$\begin{cases} \lambda_1\tilde{x}_1^2 + \lambda_2\tilde{x}_2^2 + 2\overline{a}_3\tilde{x}_3 + \tilde{a} = 0, \\ \hfill \tilde{x}_2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1\tilde{x}_1^2 + 2\overline{a}_3\tilde{x}_3 + \tilde{a} = 0, \\ \hfill \tilde{x}_2 = 0 \end{cases}.$$

Lõikeks paraboloidi sümmeetriatasandil $\tilde{x}_2 = 0$ on parabool. Tema võrrand on üsna lähedane kanoonilisele võrrandile. Silmas pidades esimeses peatükis esitatud teist järku joonte teooriat, sellest võrrandist näeme, et isemärgiliste λ_1 ja $\overline{a}_3$ korral, s.o. $\lambda_1\overline{a}_3 < 0$ korral on vektor $\vec{e}\,'_3$ suunatud selle parabooli kumeruse suunas, mis sobib ka paraboloidi telje suunaks. Kui aga $\lambda_1\overline{a}_3 > 0$, siis paraboloidi kanoonilise võrrandi saamiseks tuleb kolmas baasivektor asendada vastandvektoriga. Seega järgnevas tuleb hakata uurima

$\lambda_1\overline{a}_3$ märki. Sellisel kujul ei ole see korrutis leitav, sest me ei tea kordajat $\overline{a}_3$. Kui siia asendame valemist (27.8), saame me tublisti parema avaldise:

$$\lambda_1\overline{a}_3 = \lambda_1(a_1 s_1^{(3)} + a_2 s_2^{(3)} + a_3 s_3^{(3)}). \tag{27.10}$$

Selles valemis olevad suurused on kõik arvutatavad lähtevõrrandi (27.1) abil. Tegelikult saab leida veelgi parema valemi baasivektori $\vec{e}\,'_3$ suuna määramiseks. Selleks moodustame abivektori $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ valemiga

$$\vec{b} := -(a_1\vec{A}_1 + a_2\vec{A}_2 + a_3\vec{A}_3).$$

Siin a_1, a_2 ja a_3 on paraboloidi võrrandi (27.1) lineaarosa kordajad. Asendades siia vektorid $\vec{A}_1$, $\vec{A}_2$ ja $\vec{A}_3$, me saame

$$\vec{b} = -(a_1A_{11}+a_2A_{21}+a_3A_{31}, a_1A_{12}+a_2A_{22}+a_3A_{32}, a_1A_{13}+a_2A_{23}+a_3A_{33}),$$

millest

$$\vec{b} = \left(-\begin{vmatrix} a_1 & a_{12} & a_{13} \\ a_2 & a_{22} & a_{23} \\ a_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_{11} & a_1 & a_{13} \\ a_{21} & a_2 & a_{23} \\ a_{31} & a_3 & a_{33} \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_3 \end{vmatrix}\right). \tag{27.11}$$

Selle vektori $\vec{b}$ koordinaadid on invariandi

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a \end{vmatrix}$$

neljanda rea elementide a_1, a_2 ja a_3 algebraklised täiendid. Samuti on oluline märgata, et vektor $\vec{b}$ ei ole nullvektor, sest vastasel juhul saaksime

$$\Delta = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a\delta = a_1 0 + a_2 0 + a_3 0 + a0 = 0.$$

See on lubamatu, sest paraboloidide korral $\Delta \neq 0$. Valemi (27.7) abil saame vektorile $\vec{b}$ anda kuju $\vec{b} = -(a_1t_1 + a_2t_2 + a_3t_3)\vec{s}_3$. Järelikult tegemist on omaväärtusele $\lambda_3 = 0$ vastava konkreetse omavektoriga $\vec{b}$, mille koordinaadid saame arvutada vahetult paraboloidi võrrandi kordajate abil valemiga

(27.11). Võtame vektoriga $\vec{b}$ samasuunalise ühikvektori kolmandaks baasivektoriks $\vec{e}\,'_3$. Seega $\vec{e}\,'_3 = \frac{1}{|\vec{b}|}\vec{b}$ ehk koordinaatides $s_i^{(3)} = \frac{1}{|\vec{b}|}b_i$. Seetõttu (27.10) on samaväärne valemiga

$$\lambda_1 \overline{a}_3 = \lambda_1 \frac{1}{|\vec{b}|}(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) = \lambda_1 \frac{1}{|\vec{b}|}\Delta. \qquad (27.12)$$

Siin me arvestasime, et

$$\Delta = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a\delta = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Saadud valem (27.12) on väga sobiv paraboloidi telje suuna määramiseks. Selleks on vektori $\vec{e}\,'_3 = \frac{1}{|\vec{b}|}\vec{b}$ suund, kui $\lambda_1 \overline{a}_3 < 0$, nagu oleme eespool näidanud. Kuna

$$\lambda_1 \overline{a}_3 < 0 \Longleftrightarrow \lambda_1 \frac{1}{|\vec{b}|}\Delta < 0 \Longleftrightarrow \lambda_1 \Delta < 0,$$

siis võime öelda järelikult ka nii: *vektori $\vec{b}$ suund on paraboloidi telje suund, kui $\lambda_1\Delta < 0$. Kui $\lambda_1\Delta > 0$, siis paraboloidi telje suunaks on $-\vec{b}$.*

Anname nüüd valemid paraboloidi tipu koordinaatide leidmiseks. Sinna tuleb viia kanoonilise reeperi alguspunkt. Nende leidmiseks saab kasutada pinna puutujatasandi mõistet. Paraboloidi punkti $M(m_1, m_2, m_3)$ korral

$$M \in p \Longleftrightarrow \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} m_i m_j + 2\sum_{i=1}^{3} a_i m_i + a = 0. \qquad (27.13)$$

Punktis $M(m_1, m_2, m_3)$ puutujatasandi võrrandi annab valem (23.7). Meid huvitab tegelikult tema normaalvektori $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ koordinaadid. Sellest valemist saame

$$\begin{aligned} n_1 =& a_{11} m_1 + a_{12} m_2 + a_{13} m_3 + a_1, \\ n_2 =& a_{21} m_1 + a_{22} m_2 + a_{23} m_3 + a_2, \\ n_3 =& a_{31} m_1 + a_{32} m_2 + a_{33} m_3 + a_3. \end{aligned} \qquad (27.14)$$

Ilmselt punkt $M(m_1, m_2, m_3)$ on paraboloidi tipp, kui puutujatasand on risti paraboloidi teljega, s.o. normaalvektor $\vec{n}$ on kollineaarne omaväärtusele $\lambda_3 = 0$ vastava omavektoriga $\vec{s}_3 = (s_1^{(3)}, s_2^{(3)}, s_3^{(3)})$. Seega paraboloidi tipu koordinaadid saame tingimusest (27.14), millele tuleb lisada kolm kollineaarsuse tingimust

$$n_1 = ts_1^{(3)}, \quad n_2 = ts_2^{(3)}, \quad n_3 = ts_3^{(3)}, \quad t \neq 0$$

ehk samaväärselt

$$\begin{aligned} a_{11}m_1 + a_{12}m_2 + a_{13}m_3 + a_1 &= ts_1^{(3)}, \\ a_{21}m_1 + a_{22}m_2 + a_{23}m_3 + a_2 &= ts_2^{(3)}, \\ a_{31}m_1 + a_{32}m_2 + a_{33}m_3 + a_3 &= ts_3^{(3)}. \end{aligned} \tag{27.15}$$

Nagu juba öeldud, otsitavateks on paraboloidi tipu koordinaadid m_1, m_2 ja m_3. Paraku on lisandunud veel neljas tundmatu – parameeter t. Viimase peab nii valima, et tundmatute m_1, m_2 ja m_3. suhtes mittehomogeenne süsteem (27.15) omaks lahendit, s.o. kehtiks Kroneckeri -Capelli teoreem. Kuna süsteemi maatriksi astak on 2, siis selles süsteemis sobiva t korral olulisi võrrandeid on 2. Kolmandaks võrrandiks tuleb lisada (27.13), sest punkt M peab asuma ju paraboloidil. Viimane küll kahjuks ei ole lineaaarne. Leiame nüüd süsteemi (27.15) abil parameetri t, tehes küll seda üsna formaalselt. Korrutame jutuks oleva süsteemi võrrandeid järgimööda omavektori $\vec{s}_3$ koordinaatidega ja liidame seejärel kokku. Saame

$$(a_{11}m_1 + a_{12}m_2 + a_{13}m_3 + a_1)s_1^{(3)} + (a_{21}m_1 + a_{22}m_2 + a_{23}m_3 + a_2)s_2^{(3)} +$$

$$+(a_{31}m_1 + a_{32}m_2 + a_{33}m_3 + a_3)s_3^{(3)} = [(s_1^{(3)})^2 + (s_2^{(3)})^2 + (s_3^{(3)})^2]t.$$

Korrastame viimast punkti M koordinaatide järgi. Saame

$$(a_{11}s_1^{(3)} + a_{21}s_2^{(3)} + a_{31}s_3^{(3)})m_1 + (a_{12}s_1^{(3)} + a_{22}s_2^{(3)} + a_{32}s_3^{(3)})m_2 +$$

$$(a_{13}s_1^{(3)} + a_{23}s_2^{(3)} + a_{33}s_3^{(3)})m_3 + (a_1s_1^{(3)} + a_2s_2^{(3)} + a_3s_3^{(3)}) =$$

$$= [(s_1^{(3)})^2 + (s_2^{(3)})^2 + (s_3^{(3)})^2]t.$$

Kuna m_1, m_2 ja m_3 kordajad on võrdsed nulliga, siis

$$[(s_1^{(3)})^2 + (s_2^{(3)})^2 + (s_3^{(3)})^2]t = a_1s_1^{(3)} + a_2s_2^{(3)} + a_3s_3^{(3)},$$

millest saamegi parameetriks

$$t = \frac{a_1 s_1^{(3)} + a_2 s_2^{(3)} + a_3 s_3^{(3)}}{(s_1^{(3)})^2 + (s_2^{(3)})^2 + (s_3^{(3)})^2}. \tag{27.16}$$

Asendades siit süsteemi (27.15) ja lahendades koos võrrandiga (27.13), saamegi paraboloidi tipu koordinaadid. Osutub, et selle süsteemi viimast võrrandit (27.13) saab kolme esimese võrrandi (27.15) abil lihtsustada. Selleks kirjutame võrrandi (27.13)

$$a_{11}m_1^2 + a_{22}m_2^2 + a_{33}m_3^2 + 2a_{12}m_1m_2 + 2a_{13}m_1m_3 + 2a_{23}m_2m_3+$$

$$+2a_1m_1 + 2a_2m_2 + 2a_3m_3 + a = 0$$

järgmiselt

$$(a_{11}m_1 + a_{12}m_2 + a_{13}m_3 + a_1)m_1 + (a_{21}m_1 + a_{22}m_2 + a_{23}m_3 + a_2)m_2+$$

$$+(a_{31}m_1 + a_{32}m_2 + a_{33}m_3 + a_3)m_3 + (a_1m_1 + a_2m_2 + a_3m_3 + a) = 0.$$

Siin suluavaldised saame asendada oma süsteemi kolmest esimesest võrrandist. Saame

$$[s_1^{(3)}m_1 + s_2^{(3)}m_2 + s_3^{(3)}m_3]t + (a_1m_1 + a_2m_2 + a_3m_3 + a) = 0.$$

Seega paraboloidi tipu koordinaadid saame süsteemi

$$\begin{aligned} a_{11}m_1 + a_{12}m_2 + a_{13}m_3 &= ts_1^{(3)} - a_1, \\ a_{21}m_1 + a_{22}m_2 + a_{23}m_3 &= ts_2^{(3)} - a_2, \\ a_{31}m_1 + a_{32}m_2 + a_{33}m_3 &= ts_3^{(3)} - a_3, \\ a_1m_1 + a_2m_2 + a_3m_3 + a &= -t[s_1^{(3)}m_1 + s_2^{(3)}m_2 + s_3^{(3)}m_3] \end{aligned} \tag{27.17}$$

lahendamisel, eelnevalt valemist (27.16) asendades parameetri t. Sellega on kirjeldatud, kuidas leida paraboloidide korral tema kanooniline reeper.

Lõpuks selgitame paraboolse silindri korral kanoonilise reeperi leidmist. Eelnevalt meenutame, et paraboolse silindri enda ehitust on uuritud teises peatükis § 15. Sealt me teame, et paraboolne silinder on teatav paralleelsete sirgete parv, seejuures selliste, mille lõikamisel mistahes ristuva tasandiga, tekib parabool. Lõigates aga kõigi selliste omavahel paralleelsete tasanditega, tekib lõikeparaboolide parv. Paraboolne silinder on vaadeldav ka nende paraboolide parvena. Nende paraboolide omavahel paralleelsetest sümmeetriatelgedest ladestub meie paraboolse silindri sümmeetriatasand. See tasand lõikab paraboolset silindrit mööda sirgjoonelist moodustajat, mis koosneb jutuks olevate paraboolide tippudest. Viidatud paragrahvi kohaselt saame öelda, et paraboolse silindri kanoonilise reeperi alguspunktiks kõlbab iga lõikeparabooli tipp. Järelikult kanoonilise reeperi alguspunkt ei määrata üheselt. Esimene baasivektor $\vec{e}\,'_1$ on valitud alguspunktist lõikeparabooli telge mööda tema harude vahele, teine baasivektor $\vec{e}\,'_2$ on aga alguspunkti läbiva sirgjoonelise moodustaja sihivektor ja kolmas baasivektor $\vec{e}\,'_3$ on paraboolse silindri sümmeetriatasandi normaalvektor. Kõik need vektorid on muidugi ühikvektorid. Hakkame nüüd selgitama paraboolse silindri kanoonilise reeperi leidmist. Meie silindri korral võrrandi (27.1) ruutosa maatriksi (27.5) astak $rankA = 1$. Tabelist 2 juhu 8 alt saame invariantideks $\delta = 0$, $\Delta = 0$, $S = 0$ ja $K \neq 0$. Karakteristlikust võrrandist $\lambda^3 - s\lambda^2 = 0$ näeme, et kaks omaväärtust on nullid ja kolmas on nullist erinev. Tähistame järgnevas kanoonilist reeperit $\{O'; \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3\}$. Sellesse reeperisse kuuluvad baasivektorid saame põhimõtteliselt avaldada baasivektorite $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ kaudu kujul

$$\begin{aligned}\vec{e}\,'_1 &= s_1^{(1)}\vec{e}_1 + s_2^{(1)}\vec{e}_2 + s_3^{(1)}\vec{e}_3,\\ \vec{e}\,'_2 &= s_1^{(2)}\vec{e}_1 + s_2^{(2)}\vec{e}_2 + s_3^{(2)}\vec{e}_3,\\ \vec{e}\,'_3 &= s_1^{(3)}\vec{e}_1 + s_2^{(3)}\vec{e}_2 + s_3^{(3)}\vec{e}_3.\end{aligned} \tag{27.18}$$

Siin baasiteisenduse maatriks

$$C = \begin{pmatrix} s_1^{(1)} & s_1^{(2)} & s_1^{(3)} \\ s_2^{(1)} & s_2^{(2)} & s_2^{(3)} \\ s_3^{(1)} & s_3^{(2)} & s_3^{(3)} \end{pmatrix}$$

on ortogonaalmaatriks. Tema pöördmaatriks on seetõttu

$$C^{-1} = C^\top = \begin{pmatrix} s_1^{(1)} & s_2^{(1)} & s_3^{(1)} \\ s_1^{(2)} & s_2^{(2)} & s_3^{(2)} \\ s_1^{(3)} & s_2^{(3)} & s_3^{(3)} \end{pmatrix}.$$

Reeperiteisendust

$$\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \longrightarrow \{O'; \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3\}$$

on ülevaatlikum sooritada kahes etapis

$$\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \longrightarrow \{O; \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3\} \longrightarrow \{O'; \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3\}.$$

Muutuva punkti X koordinaate tähistame lähtereeperis x_1, x_2, x_3 , teises vahepealses reeperis $x\,'_1, x\,'_2, x\,'_3$ ja lõppreeperis $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3$ abil. Esimesel sammul paraboolse silindri võrrandi (27.1) ruutosa maatriks A läheb kanoonilisele kujule, mille diagonaalil on karakteristliku võrrandi $\lambda^2(\lambda - s) = 0$ lahendid $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ja $\lambda_3 = s$. Meenutame, et $s = a_{11} + a_{22} + a_{33}$. Paraboolse silindri võrrand vahepealses reeperis saab kuju

$$s(x\,'_3)^2 + 2a\,'_1 x\,'_1 + 2a\,'_3 x\,'_3 + a = 0. \tag{27.19}$$

Viimases $a\,'_2 = 0$, mida on varem selgitatud valemiga (19.27). Valemit (18.12) kasutades, saame öelda, et siin

$$a\,'_k = s_1^{(k)} a_1 + s_2^{(k)} a_2 + s_3^{(k)} a_3, \quad k \in \{1.2, 3\}.$$

Kujutame nüüd ette, et läheme esialgsesse ristreeperisse tagasi. Maatriksi $C^\top$ abil saame

$$x\,'_k = s_1^{(k)} x_1 + s_2^{(k)} x_2 + s_3^{(k)} x_3, \quad k \in \{1.2, 3\}.$$

Asendades siit paraboolse silindri võrrandisse (27.19), saame pinna võrrandile järgmise kuju esialgsetes koordinaatides

$$s(s_1^{(3)} x_1 + s_2^{(3)} x_2 + s_3^{(3)} x_3)^2 + 2(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3) + a = 0$$

ehk samaväärselt

$$\operatorname{sign}(s)(\sqrt{|s|} s_1^{(3)} x_1 + \sqrt{|s|} s_2^{(3)} x_2 + \sqrt{|s|} s_3^{(3)} x_3)^2 + 2(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3) + a = 0.$$

Siin sign on signum-funktsioon, mjs defineeritakse valemiga

$$\operatorname{sign}(x) := \begin{cases} 1, \text{ kui } x > 0, \\ 0, \text{ kui } x = 0, \\ -1, \text{ kui } x < 0. \end{cases}$$

Me oleme tõestanud järgmise teoreemi.

Teoreem 27.1. *Paraboolse silindri võrrandi ruutosa on märgi täpsuseni täisruut, s.o.*

$$a_{ij}x_ix_j = \operatorname{sign}(s)\,(\sqrt{|s|}s_1^{(3)}x_1 + \sqrt{|s|}s_2^{(3)}x_2 + \sqrt{|s|}s_3^{(3)}x_3)^2.$$

Tähistame $h_k := \sqrt{|s|}s_k^{(3)}$, kus $k \in \{1,2,3\}$. Paraboolse silindri võrrandile saame kuju

$$\operatorname{sign}(s)(h_1x_1 + h_2x_2 + h_3x_3)^2 + 2(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3) + a = 0. \quad (27.20)$$

Selle kuju leidmine on imelihtne. Kordajad h_1, h_2 ja h_3 avalduvad lähtevõrrandi ruutosa kordajate a_{ij} kaudu. Seega neid tuleb vaadelda kui teadaolevaid.

Pöördume tagasi võrrandi (27.19) juurde. Paraboolse silindri kanoonilise reeperi saamiseks tuleb panna paika reeperi alguspunkt O'. Tähistame tema koordinaate c_1, c_2 ja c_3 abil. Koordinaatide teisenemisvalemiteks on $x'_k = \overline{x}_k + c_k$. Asendades siit paraboolse silindri võrrandisse (27.19), peame saama

$$s(\overline{x}_3)^2 + 2\overline{a}_1\overline{x}_1 = 0. \quad (27.21).$$

Kordajad $\overline{a}_2, \overline{a}_3$ ja $\overline{a}$ lähevad nulliks. Veel paneme tähele, et $\overline{a}_1 = a'_1$. Valemist (27.21) saame kanoonilise võrrandi

$$(\overline{x}_3)^2 = 2p\overline{x}_1.$$

Siin $p = -\frac{\overline{a}_1}{s}$ peab olema positiivne. Selle tingimuse olla positiivne saame esitada sobivamal kujul. Nimelt

$$p > 0 \Longleftrightarrow \frac{\overline{a}_1}{s} < 0 \Longleftrightarrow \frac{a'_1}{s} < 0 \Longleftrightarrow sa'_1 < 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow s(s_1^{(1)}a_1 + s_2^{(1)}a_2 + s_3^{(1)}a_3) < 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \operatorname{sign}(s)\,|s|(s_1^{(1)}a_1 + s_2^{(1)}a_2 + s_3^{(1)}a_3) < 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \operatorname{sign}(s)\,(s_1^{(1)}a_1 + s_2^{(1)}a_2 + s_3^{(1)}a_3) < 0. \quad (27.22)$$

Defineerides vektori $\vec{a} := (a_1, a_2, a_3)$ ja arvestades valemitest (27.18) esimest, saame (27.22) esitada skalaarkorrutise abil. Me saame

$$\operatorname{sign}(s)\,\langle \vec{e}\,'_1, \vec{a}\rangle < 0. \tag{27.23}$$

See on tingimus, mida me allpool kasutame kanoonilise reeperi sellise esimese baasivektori konstrueerimiseks, mis on suunatud lõikeparabooli sisemusse.

Asume paraboolse silindri kanoolilist reeperit konstrueerima. Esitame paraboolse silindri võrrandi kujul (27.20). Viimase abil moodustame kahe tasandi võrrandid:

$$\pi_1 : h_1x_1 + h_2x_2 + h_3x_3 = 0, \quad \pi_2 : 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + 2a_3x_3 + a = 0.$$

Nende tasandite lõikejoon $\pi_1 \cap \pi_2$ on muidugi sirge. Selle sirge iga punkt $X(x_1, x_2, x_3)$ asub ka paraboolsel silindril, sest koordinaadid rahuldavad paraboolse silindri võrrandit (27.20), siis lõikejoon $\pi_1 \cap \pi_2$ on paraboolsel silindril, seega on tema sirgjooneline moodustaja. Püüame selgitada tasandite π_1 ja π_2 asendit. Meenutuseks $h_k = \sqrt{|s|}s_k^{(3)}$, kus $k \in \{1, 2, 3\}$. Seega tasandi π_1 normaalvektor $\vec{h} = (h_1, h_2, h_3)$ on kollineaarne kanoonilise reeperi kolmanda baasivektoriga. Järelikult tasand π_1 on paraleelne paraboolse silindri sümmeetriatasandiga. Osutub, et tasand π_2 on paraboolse silindri puutujatasand, mis puutub pinnaga mööda sirgjoonelist moodustajat $\pi_1 \cap \pi_2$. Tõepoolest. Olgu punkt $M(m_1, m_2, m_3)$ sirgjoonelise moodustaja $\pi_1 \cap \pi_2$ punkt, mistõttu

$$h_1m_1 + h_2m_2 + h_3m_3 = 0, \quad 2a_1m_1 + 2a_2m_2 + 2a_3m_3 + a = 0. \tag{27.24}$$

Puutujatasandi võrrandiks punktis M valemi (23.8) kohaselt on

$$\begin{aligned}
&[h_1(h_1m_1 + h_2m_2 + h_3m_3)\operatorname{sign}(s) + a_1]x_1 + \\
&+[h_2(h_1m_1 + h_2m_2 + h_3m_3)\operatorname{sign}(s) + a_2]x_2 + \\
&+[h_3(h_1m_1 + h_2m_2 + h_3m_3)\operatorname{sign}(s) + a_3]x_3 + \\
&+(a_1m_1 + a_2m_2 + a_3m_3 + a) = 0,
\end{aligned} \tag{27.25}$$

millest (27.24) abil puutujatasandi võrrandiks saame

$$2a_1x_1 + 2a_2x_2 + 2a_3x_3 + a = 0.$$

Saime tasandi π_2 võrrandi.

Sirgjoonelise moodustaja $\pi_1 \cap \pi_2$ sihivektor on tasandite π_1 ja π_2 normaalvektorite $\vec{h}$ ja $\vec{a}$ vektorkorrutis $\vec{h} \times \vec{a}$. Normeerituna saame viimasest kanoonilise reeperi teise baasivektori

$$\vec{e}\,'_2 = \frac{1}{|\vec{h} \times \vec{a}|} \vec{h} \times \vec{a}. \tag{27.26}$$

Seega kanoonilise reeperi teine baasivektor on leitud.

Püüame järgnevas leida sellise tasandi $\overline{\pi}_1$, mis on paraboolse silindri sümmeetriatasand. Otsitav tasand on paralleelne tasandiga π_1. Seega tasandi $\overline{\pi}_1$ võrrandit tuleb otsida kujul

$$\overline{\pi}_1 : h_1x_1 + h_2x_2 + h_3x_3 + t = 0.$$

Leiame vabaliikme t. Lähtume paraboolse silindri võrrandist (27.20), kirjutades selle veidi teisel kujul

$$\begin{aligned} &\operatorname{sign}(s)\,(h_1x_1 + h_2x_2 + h_3x_3 + t)^2 + \\ &+2(a_1 - \operatorname{sign}(s)\,h_1t)x_1 + 2(a_2 - \operatorname{sign}(s)\,h_2t)x_2 + \\ &+2(a_3 - \operatorname{sign}(s)\,h_3t)x_3 + (a - \operatorname{sign}(s)\,t^2) = 0. \end{aligned} \tag{27.27}$$

Nii nagu eespool moodustame kaks tasandit võrranditega

$$\begin{aligned} &\overline{\pi}_1 : h_1x_1 + h_2x_2 + h_3x_3 + t = 0, \\ &\overline{\pi}_2 : 2(a_1 - \operatorname{sign}(s)\,h_1t)x_1 + 2(a_2 - \operatorname{sign}(s)\,h_2t)x_2 + \\ &\quad + 2(a_3 - \operatorname{sign}(s)\,h_3t)x_3 + (a - \operatorname{sign}(s)\,t^2) = 0. \end{aligned} \tag{27.28}$$

Muuseas, kui tasandite $\overline{\pi}_1$ ja $\overline{\pi}_2$ võrrandites võtta $t = 0$, siis peame saama tasandite π_1 ja π_2 võrrandid. Nii ka on. Viimaste tasandite (27.27) lõikejooneks $\overline{\pi}_1 \cap \overline{\pi}_2$ on ka siin sirge, mis asub paraboolsel silindril. Seega on tegemist tema sirgjoonelise moodustajaga. Kui parameeter t muutub reaalarvude hulgas, siis saame kätte kõik sirgjoonelised moodustajad. Me otsime ainult ühte, mis on lõikeparaboolide tippudest moodustuv sirgjooneline moodustaja. Leiame tingimuse, kuidas leida parameeter t, et tasand $\overline{\pi}_1$ oleks sümmeetriatasand. Kui sirgjoonelisel moodustajal $\overline{\pi}_1 \cap \overline{\pi}_2$ võtta mistases punkt $M(m_1, m_2, m_3)$, siis saame leida puutujatasandi $p(M)$ puutepunktiga

$M(m_1, m_2, m_3)$. Tegelikult puutepunkte on siin rohkem kui võetud punkt $M(m_1, m_2, m_3)$. Nendeks on punkti $M(m_1.m_2, m_3)$ läbiva sirgjoonelise moodustaja kõik punktid. Tasand $\overline{\pi}_1$ on paraboolse silindri sümmeetriatasand, kui ta on risti puutujatasandiga $p(M)$. See tähendab, et nende normaalvektorite skalaarkorrutis peab olema null. See tingimus sisaldab otsitavat parameetrit t, kust me saame ta leida. Teeme teoks öeldu. Kõigepealt tuleb leida puutujatasandi $p(M)$ võrrand. Selleks on võrrand (27.25) lisatingimustega $M(m_1, m_2, m_3) \in \overline{\pi}_1$ ja $M(m_1, m_2, m_3) \in \overline{\pi}_2$. Seega

$$\begin{aligned}
&h_1m_1 + h_2m_2 + h_3m_3 + t = 0,\\
&2(a_1 - \operatorname{sign}(s)\, h_1t)m_1 + 2(a_2 - \operatorname{sign}(s)\, h_2t)m_2+\\
&+ 2(a_3 - \operatorname{sign}(s)\, h_3t)m_3 + (a - \operatorname{sign}(s)\, t^2) = 0,
\end{aligned}$$

millest

$$\begin{aligned}
h_1m_1+&h_2m_2 + h_3m_3 + t = 0,\\
2(a_1m_1 + a_2m_2+&a_3m_3) + (a + \operatorname{sign}(s)\, t^2) = 0.
\end{aligned} \tag{27.29}$$

Viimaste abil saame puutujatasandi võrrandit (27.25) lihtsustada,saades

$$2(a_1 - \operatorname{sign}(s)h_1t)x_1 + 2(a_1 - \operatorname{sign}(s)h_1t)x_1 + 2(a_1 - \operatorname{sign}(s)h_1t)x_1+$$
$$+(a - \operatorname{sign}(s)\, t^2) = 0.$$

Näeme, et puutujatasandiks $p(M)$ on tasand $\overline{\pi}_2$. Tasandite $\overline{\pi}_1$ ja $\overline{\pi}_2$ normaalvektoriteks on vastavalt $\vec{h}$ ja $\vec{k} := \vec{a} - \operatorname{sign}(s)\, t\vec{h}$. Nüüd on lihtne kirja panna võrrand parameetri t määramiseks. Saame

$$\overline{\pi}_1 \perp p(M) \iff \vec{h}\perp\vec{k} \iff \langle\vec{h}, \vec{k}\rangle = 0 \iff$$
$$\iff \langle\vec{h}, \vec{a} - \operatorname{sign}(s)\, t\vec{h}\rangle = 0 \iff \langle\vec{h}, \vec{a}\rangle - \operatorname{sign}(s)|\vec{h}|^2 = 0,$$

millest

$$t = \operatorname{sign}(s)\, \frac{\langle\vec{h}, \vec{a}\rangle}{|\vec{h}|^2}.$$

Asendades siit t valemitesse (27.29), saame

$$\begin{aligned}
h_1x_1 + h_2x_2 + h_3x_3 + \operatorname{sign}(s)\, \frac{\langle\vec{h}, \vec{a}\rangle}{|\vec{h}|^2} &=0,\\
2(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3) + (a + \frac{\langle\vec{h}, \vec{a}\rangle^2}{|\vec{h}|^4}) &=0.
\end{aligned} \tag{27.30}$$

See võrrandisüsteem määrab paraboolse silindri lõikeparaboolide tippudest koosneva sirgjoonelise moodustaja muutuva punkti $X(x_1, x_2, x_3)$ koordinaadid. Leides siit mistahes konkreetse punkti koordinaadid, oleme leidnud kanoonilise reeperi alguspunkti $O\,'$. Asendame nüüd leitud t võrranditesse (27.28). Saame

$$\begin{aligned}
&\overline{\pi}_1 : h_1x_1 + h_2x_2 + h_3x_3 + \operatorname{sign}(s)\,\frac{\langle\vec{h},\vec{a}\rangle}{|\vec{h}|^2} = 0,\\
&\overline{\pi}_2 : 2(a_1 - \frac{\langle\vec{h},\vec{a}\rangle}{|\vec{h}|^2}h_1)x_1 + 2(a_2 - \frac{\langle\vec{h},\vec{a}\rangle}{|\vec{h}|^2}h_2)x_2 +\\
&\qquad + 2(a_3 - \frac{\langle\vec{h},\vec{a}\rangle}{|\vec{h}|^2}h_3)x_3 + (a - \frac{\langle\vec{h},\vec{a}\rangle^2}{|\vec{h}|^4}) = 0.
\end{aligned}$$

Siin tasandi $\overline{\pi}_1$ võrrand määrab paraboolse silindri sümmeetriatasandi ja tasandi $\overline{\pi}_2$ võrrand aga eelmise tasandiga ristuva puutujatasandi. Nende tasandite normaalvektorite $\vec{h}$ ja $\vec{k} = \vec{a} - \frac{\langle\vec{h},\vec{a}\rangle}{|\vec{h}|^2}\vec{h}$ abil saame leida kanoonilise reeperi puuduvad vektorid $\vec{e}\,'_3$ ja $\vec{e}\,'_1$, mis on kollineaarsed vastavalt vektoritega $\vec{h}$ ja $\vec{k}$. Kuna vektoriks $\vec{e}\,'_3$ kõlbab normeeritud vektor $\vec{h}$ või normeeritud vastandvektor, siis võime võtta

$$\vec{e}\,'_3 = \frac{1}{|\vec{h}|}\vec{h}. \qquad (27.31).$$

Vektoriks $\vec{e}\,'_1$ kõlbab üks vektoritest $\frac{1}{|\vec{k}|}\vec{k}$ või -$\frac{1}{|\vec{k}|}\vec{k}$ ehk lühidalt $\frac{\epsilon}{|\vec{k}|}\vec{k}$, kus ϵ on $+1$ või -1. Seega $\vec{e}\,'_1 = \frac{\epsilon}{|\vec{k}|}\vec{k}$. Teguri ϵ määrame valemi (27.23) abil. Viimase abil saame

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sign}(s)\,\langle\vec{e}\,'_1,\vec{a}\rangle < 0 \Longleftrightarrow \operatorname{sign}(s)\,\frac{\epsilon}{|\vec{k}|}\langle\vec{k},\vec{a}\rangle < 0 \Longleftrightarrow\\
&\Longleftrightarrow \epsilon\operatorname{sign}(s)\,\langle\vec{k},\vec{a}\rangle < 0. \qquad (27.32).
\end{aligned}$$

Kuna $\operatorname{sign}(s)\,\langle\vec{k},\vec{a}\rangle$ on leitav paraboolse silindri võrrandi kordajate kaudu, siis saame määrata kordaja ϵ, et kektiks võrratus (27.32). Edasi saame leida

$$\vec{e}\,'_1 = \frac{\epsilon}{|\vec{k}|}\vec{k}. \qquad (27.33),$$

kus

$$\vec{k} = \vec{a} - \frac{\langle \vec{h}, \vec{a} \rangle}{|\vec{h}|^2} \vec{h}. \tag{27.34}$$

Sellega paraboolse silindri kanooniline reeper on konstrueeritud.

Järgmises paragrahvis on toodud rida näiteid kuidas leida erinevate pindade korral tema kanoonilist reeperit.

28. PINNA KANOONILISE VÕRRANDI JA KANOONILISE REEPERI LEIDMINE INVARIANTIDE ABIL

(näited)

Vaadeldavates näidetes on meil pinna võrrand antud mingis ristreeperis

$$\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}. \tag{28.1}$$

Muutuva punkti X koordinaate selles ristreeperis tähistame aga x_1, x_2, x_3 abil. Pinna kanoonilist ristreeperit tähistame aga

$$\{O\,'; \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3\} \tag{28.2}$$

abil. Punkti X koordinaate selles ristreeperis $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3$ abil.

Näide 1. Olgu pind mingis ristreeperis (28.1) antud võrrandiga

$$x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3 - 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 0.$$

Määrata invariantide abil pinna tüüp, leida kanooniline reeper ja kanooniline võrrand selles reeperis.

Lahendus. Pinna invariandid on

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -36, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 36,$$

$$K = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -20,$$

$$S = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 0, \quad s = 1 + 5 + 1 = 7.$$

Kuna $s\delta = -256 \leq 0$, $\quad S = -20 \leq 0$, $\quad \Delta = 36 > 0$, siis tabelist 1 saame, et pinnaks on *ühekatteline hüperboloid.*

Leiame kanoonilise reeperi. Kuna $\delta \neq 0$, siis on tegemist tsentraalse pinnaga. Seetõttu kanoonilise reeperi alguspunktiks on pinna keskpunkt. Viimane tuleb valemi (21.2) kohaselt leida võrrandisüsteemist

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_3 + 1 &= 0, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 - 3 &= 0, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Selle süsteemi lahendamisel, näiteks Gaussi meetodiga, saame keskpunkti koordinaatideks $x_1 = -\frac{1}{3}, x_2 = -\frac{2}{3}$ ja $x_3 = \frac{2}{3}$. Seega kanoonilise reeperi alguspunktiks on $O'(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$. Kanoniseeritud reeperi baasivektoriteks on pinna ruutosa maatriksi A normeeritud omavektorid. Kõigepealt tuleb leida omaväärtused karakteristlikust võrrandist

$$\lambda^3 - s\lambda^2 + S\lambda - \delta = 0 \Longrightarrow \lambda^3 - 7\lambda^2 + 36 = 0.$$

Proovimise teel üheks omaväärtuseks on (võtame kolmandaks) $\lambda_3 = -2$. Kuna

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 36 = (\lambda + 2)(\lambda^2 - 9\lambda + 18),$$

siis ülejäänud kaks omaväärtust saame ruutvõrrandi $\lambda^2 - 9\lambda + 18 = 0$ lahenditena, milleks on $\lambda_1 = 3$ ja $\lambda_2 = 6$.

Omaväärtusele λ_k vastava omavektori $\vec{s}_k$ koordinaadid $s_1^{(k)}, s_2^{(k)}$ ja $s_3^{(k)}$ tuleb leida võrrandisüsteemist (27.2):

$$\begin{aligned}
(a_{11} - \lambda_k)s_1^{(k)} + a_{12}s_2^{(k)} + a_{13}s_3^{(k)} &= 0,\\
a_{21}s_1^{(k)} + (a_{22} - \lambda_k)s_2^{(k)} + a_{23}s_3^{(k)} &= 0,\\
a_{31}s_1^{(k)} + a_{32}s_2^{(k)} + (a_{33} - \lambda_k)s_3^{(k)} &= 0.
\end{aligned}$$

Meie näite korral omaväärtusele $\lambda_1 = 3$ vastava omavektori $\vec{s}_1$ koordinaatide $s_1^{(1)}, s_2^{(1)}$ ja $s_3^{(1)}$ leidmiseks tuleb lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{aligned}
-2s_1^{(1)} + s_2^{(1)} + 3s_3^{(1)} &= 0,\\
s_1^{(1)} + 2s_2^{(1)} + s_3^{(1)} &= 0,\\
3s_1^{(1)} + s_2^{(1)} - 2s_3^{(1)} &= 0,
\end{aligned}$$

mille lahendamisel saame $s_1^{(1)} = s_3^{(1)}$ ja $s_2^{(1)} = -s_3^{(1)}$. Fikseerides sobivalt vaba tundmatu $s_3^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, saame $s_1^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ja $s_2^{(1)} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Kuna saadud omavektor $\vec{s}_1 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ on juba normeeritud, siis kanoonilise reeperi esimeseks baasivektoriks on

$$\vec{e}\,'_1 = \Big(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\Big).$$

Omaväärtusele $\lambda_2 = 6$ vastava omavektori $\vec{s}_2$ koordinaatide $s_1^{(2)}, s_2^{(2)}$ ja $s_3^{(2)}$ leidmiseks tuleb aga lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{aligned} -5s_1^{(2)} + s_2^{(2)} + 3s_3^{(2)} &= 0, \\ s_1^{(2)} - s_2^{(2)} + s_3^{(2)} &= 0, \\ 3s_1^{(2)} + s_2^{(2)} - 5s_3^{(2)} &= 0. \end{aligned}$$

Lahendiks saame $s_1^{(2)} = s_3^{(2)}$ ja $s_2^{(2)} = 2s_3^{(2)}$. Võttes vabaks tundmatuks $s_3^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{6}}$, saame $s_1^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{6}}$ ja $s_2^{(2)} = \frac{2}{\sqrt{6}}$. Omavektor $\vec{s}_2 = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$ on taas normeeritud. Kanoonilise reeperi teiseks baasivektoriks on seega

$$\vec{e}\,'_2 = \Big(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\Big).$$

Omaväärtusele $\lambda_3 = -2$ vastava omavektori $\vec{s}_3$ koordinaadid $s_1^{(3)}, s_2^{(3)}$ ja $s_3^{(3)}$ leiame võrrandisüsteemist

$$\begin{aligned} 3s_1^{(3)} + s_2^{(3)} + 3s_3^{(3)} &= 0, \\ s_1^{(3)} + 7s_2^{(3)} + s_3^{(3)} &= 0, \\ 3s_1^{(3)} + s_2^{(3)} + 3s_3^{(3)} &= 0, \end{aligned}$$

mille lahendamisel saame $s_1^{(3)} = -s_3^{(3)}$ ja $s_2^{(3)} = 0$. Siit vaba tundmatu $s_3^{(3)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ korral saame normeeritud omavektoriks $s_1^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ja $s_2^{(3)} = 0$. Kanoonilise reeperi kolmandaks baasivektoriks on

$$\vec{e}\,'_3 = \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\Big).$$

Kanooniline reeper

$$\{O\,'; \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3\} \tag{28.2}$$

on leitud.

Lõpuks leiame pinna kanoonilise võrrandi kanoonilises reeperis. Valemi (26.5) kohaselt on selleks

$$\lambda_1 \overline{x}_1^2 + \lambda_2 \overline{x}_2^2 + \lambda_3 \overline{x}_3^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0, \tag{28.3}$$

millest asenduste tegemisel saame

$$3\overline{x}_1^2 + 6\overline{x}_2^2 - 2\overline{x}_3^2 - 1 = 0.$$

Seega kanooniliseks võrrandiks on

$$\frac{\overline{x}_1^2}{(\frac{1}{\sqrt{3}})^2} + \frac{\overline{x}_2^2}{(\frac{1}{\sqrt{6}})^2} + \frac{\overline{x}_2^2}{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2} = 1.$$

Pooltelgedeks on

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad \alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Näide 2. Olgu pinna võrrandiks ristreeperis (28.1)

$$x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3 - 14x_1 - 4x_2 + 14x_3 + 16 = 0.$$

Määrata invariantide abil pinna tüüp, leida kanooniline reeper ja kanooniline võrrand.

Lahendus. Invariandid on

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 54, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 & -7 \\ 2 & -2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 & 7 \\ -7 & -2 & 7 & 16 \end{vmatrix} = 0,$$

$$S = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -27, \quad s = 1 - 2 + 1 = 0.$$

Kuna $s\delta = 0 \leq 0$ ja $\Delta = 0$, siis tabelist 1 saame, et pind on *teist järku koonus.* Tegemist on tsentraalse pinnaga. Seetõttu kanoonilise reeperi js kanoonilise võrrandi leidmine toimub nagu näites 1.

Leiame nüüd kanoonilise reeperi. Reeperi alguspunkt asub pinna tipus, mille koordinaadid saame võrrandisüsteemi

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 7 &= 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 2 &= 0, \\ -4x_1 - 2x_2 + x_3 + 7 &= 0 \end{aligned}$$

lahendamisel. Me saame $x_1 = 1, x_2 = 1$ ja $x_3 = -1$. Kanoonilise reeperi alguspunktiks on

$$O'(1, 1, -1).$$

Omavektorite leidmiseks tuleb kuupvõrrandist

$$\lambda^3 - 27\lambda - 54 = 0$$

leida omaväärtused. Me saame $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = -3$ ja $\lambda_3 = 6$. Näeme, et -3 on kahekordne omaväärtus. See toob teatud omapära omavektorite, s.o. kanoonilise reeperi baasivektorite leidmisele, mida ei olnud eelmises näites, sest omavektorid olid paarikaupa erinevad. Niisiis leiame omaväärtustele $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$ ehk lühidalt $\lambda_k = -3$, kus $k \in \{1, 2\}$, vastavad omavektorid. Omavektori $\vec{s}_k$ koordinaadid $s_1^{(k)}, s_2^{(k)}$ ja $s_3^{(k)}$ saame võrrandisüsteemist

$$\begin{aligned} 4s_1^{(k)} + 2s_2^{(k)} - 4s_3^{(k)} &= 0, \\ 2s_1^{(k)} + s_2^{(k)} - 2s_3^{(k)} &= 0, \\ -4s_1^{(k)} - 2s_2^{(k)} + 4s_3^{(k)} &= 0, \end{aligned}$$

mille lahendamisel saame $s_2^{(k)} = -2s_1^{(k)} + 2s_3^{(k)}$. Näeme, et vabade tundmatute arv on kaks. Seega omavektorite hulk on kahemõõtmeline vektorruum. Tema baasi kuulub kaks lineaarselt sõltumatut vektorit. Selleks tuleb vabadele tundmatule $s_1^{(k)}$ ja $s_3^{(k)}$ anda kaks seeriat väärtusi. Kummagi seeria korral leiame $s_2^{(k)}$. Kui võtame $s_1^{(k)} = 1$ ja $s_3^{(k)} = 0$, siis saame $s_2^{(k)} = -2$. Omavektoriks saame $\vec{u}_1 = (1, -2, 0)$. Kui võtame $s_1^{(k)} = 0$ ja $s_3^{(k)} = 1$, siis saame $s_2^{(k)} = 2$. Omavektoriks saame $\vec{u}_2 = (0, 2, 1)$. Kuna vektorite $\vec{u}_1$ ja $\vec{u}_2$ koordinaadid ei ole võrdelised, siis vektorsüsteem $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ on lineaarselt sõltumatu. Seega on tegemist jutuks oleva alamruumi baasiga. Seega saame seda alamruumi vaadelda lineaarkattena $L(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ moodustajatega $\vec{u}_1$ ja $\vec{u}_2$. Kahjuks baas $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ ei ole ristbaas, et saaks kasutada tema vektoreid kanoonilise reeperi kahe baasivektorina. Selleks konstrueerime ristuvate vektorite süsteemi $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$, võttes $\vec{a}_1 = \vec{u}_1$. Otsime vektorit $\vec{a}_2$ kujul $\vec{a}_2 = \vec{u}_1 + t\vec{u}_2$, valides parameetri nii, et $\vec{a}_1 \perp \vec{a}_2$, s.o. skalaarkorrutis $\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2 \rangle = 0$. Seega

$$\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2 \rangle = 0 \Longleftrightarrow \langle \vec{u}_1, \vec{u}_1 + t\vec{u}_2 \rangle = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow |\vec{u}_1|^2 + t\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2\rangle = 0 \Longleftrightarrow 5 - 4t = 0 \Longleftrightarrow t = \frac{5}{4}.$$

Siin me arvestasime, et $|\vec{u}_1|^2 = 5$ ja $\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2\rangle = -\frac{4}{5}$. Oleme saanud sama alamruumi $L(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ leitud ristuvate vektorite $\vec{a}_1 = \vec{u}_1 = (1, -2, 0)$ ning $\vec{a}_2 = \vec{u}_1 + \frac{5}{4}\vec{u}_2 = (1, \frac{1}{2}, \frac{5}{4})$ lineaarkattena. Normeerides selle vektorite paari, saame kanoonilise reeperi kaks baasivektorit

$$\vec{e}\,'_1 = \frac{1}{|\vec{a}_1|}\vec{a}_1 = \Big(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, 0\Big), \quad \vec{e}\,'_2 = \frac{1}{|\vec{a}_2|}\vec{a}_2 = \Big(\frac{4}{3\sqrt{5}}, \frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{5}}{3}\Big).$$

Paneme tähele, et konstreeritud baasivektorite paare $\vec{e}\,'_1$ ja $\vec{e}\,'_2$ on lõpmatu palju. See sõltub sellest kuidas fikseerime vabad tundmatud, s.o. kuidas konstrueerime vektorid $\vec{u}_1$ ja $\vec{u}_2$. Märgime, et sellest määramatusest ei sõltu pinna kanooniline võrrand.

Omaväärtusele $\lambda_3 = 6$ vastava omavektori $\vec{s}_3$ koordinaadid saame võrrandisüsteemist

$$\begin{aligned} -5s_1^{(3)} + 2s_2^{(3)} - 4s_3^{(3)} &= 0, \\ 2s_1^{(3)} + 8s_2^{(3)} - 2s_3^{(3)} &= 0, \\ -4s_1^{(3)} - 2s_2^{(3)} - 5, s_3^{(3)} &= 0, \end{aligned}$$

saades $s_1^{(3)} = -s_3^{(3)}$ ja $s_2^{(3)} = -\frac{1}{2}s_3^{(3)}$. Võttes siin vaba tundmatu võrdseks $s_3^{(3)} = -2$, saame $\vec{u}_3 = (2, 1, -2)$. Viimase normeerimisel saame kanoonilise reeperi kolmandaks baasivektoriks

$$\vec{e}\,'_3 = \Big(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\Big).$$

Seega kanooniline reeper on leitud.

Tukeb veel leida teist järku koonuse kanooniline võrrand. Selleks kasutame valemit (28.3). Me saame

$$\frac{\overline{x}_1^2}{1^2} + \frac{\overline{x}_2^2}{1^2} - \frac{\overline{x}_3^2}{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2} = 0.$$

Näide 3. Olgu pinna võrrandiks ristreeperis (28.1)

$$2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 - 4x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 3 = 0.$$

Määrata invariantide abil pinna tüüp, leida kanooniline reeper ja kanooniline võrrand.

Lahendus. Leiame invariandid. Saame

$$\delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \\ -2 & 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -125,$$

$$S = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 10, \quad s = 2 + 2 + 3 = 7.$$

Tegemist on $\delta = 0$ tõttu mittetsentraalse pinnaga. Kuna lisaks $\Delta < 0$, siis tabelist 2 näeme, et pind on *elliptiline paraboloid.*

Leiame pinna kanoonilise reeperi. Paraboloidide korral on see kõige keerulisem, kuna pinna kanooniline võrrand sisaldab esimese astme liidetavat.

Karakteristlikust võrrandist

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 - 10\lambda = 0$$

saame $\lambda_1 = 2$, $\lambda_1 = 5$ ja $\lambda_3 = 0$.

Omaväärtusele $\lambda_1 = 2$ vastava omavektori $\vec{s}_1$ koordinaadid saame võrrandisüsteemist

$$\begin{aligned} 2s_2^{(1)} + s_3^{(1)} &= 0, \\ 2s_1^{(1)} + s_3^{(1)} &= 0, \\ s_1^{(1)} + s_2^{(1)} + s_3^{(1)} &= 0. \end{aligned}$$

Selle lahendamisel saame $s_1^{(1)} = -\frac{1}{2}s_3^{(1)}$ ja $s_2^{(1)} = -\frac{1}{2}s_3^{(1)}$. Võttes vabaks tundmatuks $s_3^{(1)} = -\frac{2}{\sqrt{6}}$, saame $s_1^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{6}}$ ja $s_2^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{6}}$. Saadud omavektor on normeeritud, mistõttu kõlbab kanoonilise reeperi esimeseks baasivektoriks

$$\vec{e}\,'_1 = \Big(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\Big).$$

Omaväärtusele $\lambda_2 = 5$ vastava omavektori $\vec{s}_2$ koordinaadid saame võrrandisüsteemist

$$\begin{aligned} -3s_1^{(2)} + 2s_2^{(2)} + s_3^{(2)} &= 0, \\ 2s_1^{(2)} - 3s_2^{(2)} + s_3^{(2)} &= 0, \\ s_1^{(2)} + s_2^{(2)} - 2s_3^{(1)} &= 0. \end{aligned}$$

Selle lahendamisel saame $s_1^{(2)} = s_3^{(2)}$ ja $s_2^{(2)} = s_3^{(2)}$. Võttes vabaks tundmatuks $s_3^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, saame $s_1^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ja $s_2^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{3}.}$ Saadud omavektor on normeeritud, mistõttu kõlbab kanoonilise reeperi teiseks baasivektoriks

$$\vec{e}\,'_2 = \Big(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\Big).$$

Omaväärtusele $\lambda_3 = 0$ vastava omavektori $\vec{s}_3$ koordinaadid saame võrrandisüsteemist

$$\begin{aligned} 2s_1^{(3)} + 2s_2^{(3)} + s_3^{(3)} &= 0, \\ 2s_1^{(3)} + 2s_2^{(3)} + s_3^{(3)} &= 0, \\ s_1^{(3)} + s_2^{(3)} + 3s_3^{(3)} &= 0. \end{aligned}$$

Selle lahendamisel saame $s_1^{(3)} = -s_2^{(3)}$ ja $s_3^{(3)} = 0$. Võttes vabaks tundmatuks $s_2^{(3)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, saame $s_1^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ja $s_3^{(3)} = 0$. Saadud omavektor $\vec{s}_3 = \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\Big)$ on normeeritud. Normeeritud omavektoriks on ka tema vastandvektor $-\vec{s}_3$. Neist kahest vektorust üks on suunatud elliptilise paraboloidi sisemusse. Nimelt see sobib kanoonilise reeperi kolmandaks baasivektoriks. Selle kindlaks tegemiseks on eelmises paragrahvis antud meetodika. Selle kohaselt tuleb leida vektor $\vec{p} = s(A_1, A_2, A_3)$. Siin A_1, A_2 ja A_3 on invariandi Δ elementide a_{14}, a_{24} ja a_{34} algebralised täiendid. Osutub, et vektor $\vec{p}$ on elliptilise paraboloidi telje sihiline ja suunatud pinna sisemusse. Jääb veel see vektor normeerida vektoriga $\vec{p}$ samasuunaliseks ühikvektoriks, mis ongi kanoonilise reeperi kolmandaks baasivektoriks. Seega omaväärtusele $\lambda_3 = 0$ vastavaid normeerutud omavektoreid $\vec{s}_3$ ja $-\vec{s}_3$ ei olegi vaja leida. Leiame nüüd determinandid A_1, A_2 ja A_3. Saame

$$A_1 = -\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 25, \quad A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -25,$$

$$A_3 = -\begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Seega $\vec{p} = 7(25, -25, 0)$. Temaga samauunaline ühikvektor on kanoonilise reeperi kolmas baasivektor

$$\vec{e}\,'_3 = \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\Big).$$

On jäänud veel leida kanoonilise reeperi alguspunkt $O\,'(m_1, m_2, m_3)$. Kõigepealt tuleb valemi (27.16) abil leida parameeter t, milleks praegu saame $t = -\frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}} - 0 = -\frac{5}{\sqrt{2}}$. Koordinaatide m_1, m_2 ja m_3 leidmiseks tuleb moodustada võrrandisüsteem (27.17), mis meie näite korral on järgmine:

$$\begin{aligned} 2m_1 + 2m_2 + m_3 &= -\frac{1}{2}, \\ 2m_1 + 2m_2 + m_3 &= -\frac{1}{2}, \\ m_1 + m_2 + 3m_3 &= 1, \\ -2m_1 + 3m_2 - m_3 + 3 &= \frac{5}{2}m_1 - \frac{5}{2}m_2 \end{aligned}$$

ehk

$$\begin{aligned} 2m_1 + 2m_2 + m_3 &= -\frac{1}{2}, \\ m_1 + m_2 + 3m_3 &= 1, \\ 9m_1 - 11m_2 + 2m_3 &= 6. \end{aligned}$$

Lahendades selle võrrandisüsteemi, saame $m_1 = -\frac{1}{40}, m_2 = -\frac{19}{40}$ ja $m_3 = \frac{1}{2}$. Kanoonilise reeperi alguspunktiks on

$$O\,'\Big(-\frac{1}{40}, -\frac{19}{40}, \frac{1}{2}\Big).$$

Leiame meie elliptilise paraboloidi kanoonilise võrrandi. Valemi (26.8) kohaselt tuleb kasutada valemit

$$\lambda_1\tilde{x}_1^2 + \lambda_2\tilde{x}_2^2 - 2\sqrt{-\frac{\Delta}{S}}\tilde{x}_3 = 0.$$

Tehes asendused, saame

$$2\overline{x}_1^2 + 5\overline{x}_2^2 - 2\sqrt{\frac{125}{10}}\overline{x}_3 = 0,$$

millest kanooniliseks võrrandiks saame

$$\frac{\overline{x}_1^2}{\frac{5}{2\sqrt{2}}} + \frac{\overline{x}_2^2}{\frac{1}{2\sqrt{2}}} = 2\overline{x}_3.$$

Näide 4. Olgu pinna võrrandiks ristreeperis (28.1)

$$2x_1^2 + 10x_2^2 - 2x_3^2 + 12x_1x_2 + 8x_2x_3 + 12x_1 + 4x_2 + 8x_3 - 1 = 0.$$

Määrata invariantide abil pinna tüüp, leida kanooniline reeper ja kanooniline võrrand.

Lahendus. Leiame invariandid. Saame

$$\delta = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 6 & 10 & 4 \\ 0 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 0 & 6 \\ 6 & 10 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & -2 & 4 \\ 6 & 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 25,$$

$$S = \begin{vmatrix} 10 & 4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 10 \end{vmatrix} = -56, \quad s = 2 + 10 - 2 = 10.$$

Tegemist on meil $\delta = 0$ tõttu mittetsentraalse pinnaga. Kuna lisaks $\Delta > 0$, siis tabelist 2 näeme, et pind on *hüperboolne paraboloid.* Lahendamise metoodika on sama, mis eelmise näite korral.

Leiame pinna kanoonilise reeperi. Paraboloidide korral on see kõige keerulisem, kuna pinna kanooniline võrrand sisaldab esimese astme liidetavat.

Karakteristlikust võrrandist

$$\lambda^3 - 10\lambda^2 - 56\lambda = 0$$

saame $\lambda_1 = 14$, $\lambda_2 = -4$ ja $\lambda_3 = 0$.

Omaväärtusele $\lambda_1 = 14$ vastava omavektori $\vec{s}_1$ koordinaadid saame võrrandisüsteemist

$$\begin{aligned} -12s_1^{(1)} + 6s_2^{(1)} &= 0, \\ 6s_1^{(1)} - 4s_2^{(1)} + 4s_3^{(1)} &= 0, \\ 4s_2^{(1)} - 16s_3^{(1)} &= 0. \end{aligned}$$

Selle lahendamisel saame $s_1^{(1)} = 2s_3^{(1)}$ ja $s_2^{(1)} = 4s_3^{(1)}$. Võttes vabaks tundmatuks $s_3^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{21}}$, saame $s_1^{(1)} = \frac{2}{\sqrt{21}}$ ja $s_2^{(1)} = \frac{4}{\sqrt{21}}$. Saadud omavektor on normeeritud, mistõttu kõlbab kanoonilise reeperi esimeseks baasivektoriks

$$\vec{e}\,'_1 = \Big(\frac{2}{\sqrt{21}}, \frac{4}{\sqrt{21}}, \frac{1}{\sqrt{21}}\Big).$$

Omaväärtusele $\lambda_2 = -4$ vastava omavektori $\vec{s}_2$ koordinaadid saame võrrandisüsteemist

$$\begin{aligned} 6s_1^{(2)} + 6s_2^{(2)} &= 0,\\ 6s_1^{(2)} + 14s_2^{(2)} + 4s_3^{(2)} &= 0,\\ 4s_2^{(2)} + 2s_3^{(2)} &= 0. \end{aligned}$$

Selle lahendamisel saame $s_1^{(2)} = \frac{1}{2}s_3^{(2)}$ ja $s_2^{(2)} = -\frac{1}{2}s_3^{(2)}$. Võttes vabaks tundmatuks $s_3^{(2)} = \frac{2}{\sqrt{6}}$, saame $s_1^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{6}}$ ja $s_2^{(2)} = -\frac{1}{\sqrt{6}}$. Saadud omavektor on normeeritud, mistõttu kõlbab kanoonilise reeperi teiseks baasivektoriks

$$\vec{e}\,'_2 = \Big(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\Big).$$

Kanoonilise reeperi kolmanda baasivektori leidmiseks tuleb leida vektor $\vec{p} = s(A_1, A_2, A_3)$. Siin A_1, A_2 ja A_3 on invariandi Δ elementide a_{14}, a_{24} ja a_{34} algebralised täiendid. Leiame nüüd determinandid A_1, A_2 ja A_3. Saame

$$A_1 = -\begin{vmatrix} 6 & 0 & 6\\ 10 & 4 & 2\\ 4 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 96, \quad A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 6\\ 6 & 4 & 2\\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -32,$$

$$A_3 = -\begin{vmatrix} 2 & 6 & 6\\ 6 & 10 & 2\\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = -64.$$

Seega $\vec{p} = 320(3, -1, -2)$. Temaga samauunaline ühikvektor on kanoonilise reeperi kolmas baasivektor

$$\vec{e}\,'_3 = \Big(\frac{3}{\sqrt{14}}, -\frac{1}{\sqrt{14}}, -\frac{2}{\sqrt{14}}\Big).$$

On jäänud veel leida kanoonilise reeperi alguspunkt $O'(m_1, m_2, m_3)$. Valemi (27.16) abil saame parameetriks $t = \frac{8}{\sqrt{14}}$. Koordinaatide m_1, m_2 ja m_3 leidmiseks tuleb moodustada võrrandisüsteem (27.17), mis meie näite korral on järgmine:

$$\begin{aligned} 7m_1 + 21m_2 &= -15, \\ 21m_1 + 35m_2 + 14m_3 &= -9, \\ 14m_2 - 7m_3 &= -18, \\ 54m_1 + 10m_2 + 20m_3 &= 7 \end{aligned}.$$

Selles võrrandisüsteemis teine võrrand on võrdne kolmkordne esimene võrrand miinus kahekordne kolmas võrrand. Seega teise võrrandi võib võrrandisüsteemist ära jätta. Alles jääb võrrandisüsteem

$$\begin{aligned} 7m_1 + 21m_2 &= -15, \\ 14m_2 - 7m_3 &= -18,. \\ 54m_1 + 10m_2 + 20m_3 &= 7 \end{aligned}$$

Selle võrrandisüsteemi lahendamisel saame $m_1 = -\frac{183}{784}, m_2 = -\frac{499}{784}$ ja $m_3 = \frac{509}{392}$. Kanoonilise reeperi alguspunktiks on

$$O'\Big(-\frac{183}{784}, -\frac{499}{784}, \frac{509}{392}\Big).$$

Leiame hüperboolse paraboloidi kanoonilise võrrandi. Valemi (26.8) kohaselt tuleb kasutada valemit

$$\lambda_1 \tilde{x}_1^2 + \lambda_2 \tilde{x}_2^2 - 2\sqrt{-\frac{\Delta}{S}}\tilde{x}_3 = 0.$$

Tehes asendused, saame hüperboolse paraboloidi kanooniliseks võrrandiks

$$\frac{\overline{x}_1^2}{\frac{2}{7}\sqrt{\frac{2}{7}}} - \frac{\overline{x}_2^2}{\sqrt{\frac{2}{7}}} = 2\overline{x}_3.$$

Näide 5. Olgu pinna võrrandiks ristreeperis (28.1)

$$x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 - 6x_3 + 1 = 0.$$

Määrata invariantide abil pinna tüüp, leida kanooniline reeper ja kanooniline võrrand.

Lahendus. Leiame invariandid. Saame

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$S = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad s = 1 + 1 + 4 = 6.$$

$$K = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -18.$$

Pind on $\delta = \Delta = S = 0$ ja $K \neq 0$ tõttu *paraboolne silinder.*

Esitame pinna võrrandi kujul (27.20).Saame

$$(x_1 + x_2 + 2x_3)^2 + (-6x_3 + 1) = 0,$$

mille abil saame vektorid

$$\vec{h} = (1, 1, 2), \quad \vec{a} = (0, 0, -3), \quad \vec{s}_2 = \vec{h} \times \vec{a} = (-3, 3, 0) = -3(1, -1.0).$$

Valemist (27.26) näeme, et viimase normeerimisel saame paraboolse silindri sirgjooneliste moodustajate ühise ühiksihivektori

$$\vec{e}\,'_2 = \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\Big),$$

mis on kanoonilise reeperi teiseks baasivektoriks. Valem (27.31) lubab öelda, et kanoonilise reeperi kolmanda baasivektori saame vektori $\vec{h}$ normeerimisel. Seega

$$\vec{e}\,'_3 = \Big(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\Big).$$

Kõige keerulisem on leida kanoonilise reeperi esimest baasivektorit. Valemi (27.25) abil saame $t = -1$. Järgnevas saame valemi (27.34) abil vektori

$$\vec{k} = \vec{h} - \vec{a} = (-1, -1, 1),$$

mille normeerimisel saame kanoonjlise reeperi esimese baasivektori

$$\vec{e}\,'_1 = \Big(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\Big).$$

On jäänud veel leida kanoonilise reeperi alguspunkt, milleks kõlbab suvaline punkt, mille koordinaadid rahuldavad võrrandisüsteemi (27.30). Praeguse näite korral on see järgmine

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 - 1 &= 0 \\ -3x_3 + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Fikseerides ühe tundmatu, näiteks $x_1 = 0$, saame $x_2 = \frac{1}{3}$ ja $x_3 = \frac{1}{3}$. Kanoonilise reeperi alguspunktiks kõlbab

$$O\,'\Big(0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\Big).$$

Kanooniline reeper on leitud.

Lõpuks lepame paraboolse silindri kanoonilise võrrandi valemi (26.11) abil, kasutades alumist märki. Saame

$$\overline{x}_3^2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\overline{x}_1.$$

Näide 6. Olgu pinna võrrandiks ristreeperis (28.1)

$$4x_1^2 + 9x_2^2 + x_3^2 - 12x_1x_2 + 4x_1x_3 - 6x_2x_3 + 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 5.$$

Määrata invariantide abil pinna tüüp, leida kanooniline reeper ja kanooniline võrrand.

Lahendus. Leiame invariandid. Saame

$$\delta = \begin{vmatrix} 4 & -6 & 2 \\ -6 & 9 & -3 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 4 & -6 & 2 & 2 \\ -6 & 9 & -3 & -3 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 0,$$

$$S = \begin{vmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 9 \end{vmatrix} = 0, \quad s = 4 + 9 + 1 = 14.$$

$$K = \begin{vmatrix} 9 & -3 & -3 \\ -3 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & -6 & 2 \\ -6 & 9 & -3 \\ 2 & -3 & -5 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\sigma = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 9 & -3 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -84.$$

Pinnaks on paar paralleelseid tasandeid, sest

$$\delta = 0, \quad \Delta = 0, \quad S = 0, \quad K = 0, \quad \sigma < 0.$$

Asume kanooniltse reeperi leidmisele. Karakteristlikust võrrandist

$$\lambda^3 - 14\lambda = 0$$

saame omaväärtusteks $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ja $\lambda_3 = 14$. Leiame omavektorid. Omaväärtuste $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ korral omavektori(te) koordinaadid saame võrrandisüsteemist

$$\begin{aligned} 4s_1 - 6s_2 + 2s_3 &= 0, \\ -6s_1 + 9s_2 - 3s_3 &= 0, \\ 2s_1 - 3s_2 + s_3 &= 0, \end{aligned}$$

milles olulisi võrrandeid on ainult üks. Saame

$$2s_1 - 3s_2 + s_3 = 0 \Longleftrightarrow s_1 = \frac{3}{2}s_2 - \frac{1}{2}s_3.$$

Fundamentaalsüsteemiks sobib

$$\vec{s}_1 = (3, 2, 0), \quad \vec{s}_2 = (1, 0, -2).$$

Kõik omavektorid moodustavad lineaatkatte $L(\vec{s}_1, \vec{s}_2)$, mille mistahes vektor avaldub $\vec{s} = t_1\vec{s}_1 + t_2\vec{s}_2$. Omavektori definitsiooni kohaselt tuleb mängust välja jätta nullvektor, mis saadakse $t_1 = t_2 = 0$ korral. Alamruum $L(\vec{s}_1, \vec{s}_2)$ on meie paralleelse tasandipaari ühine riht, Baasivektorite paar $\vec{e}\,'_1$ ja $\vec{e}\,'_2$ sellest lineaarkattest pole määratud kaugeltki üheselt. Ainsaks nõudeks on, et nad oleksid ristuvad ühikvektorid. Kanoonilise reeperi esimeseks baasivektoriks võib võtta $\vec{e}\,'_1 = \frac{1}{|\vec{s}_1|}\vec{s}_1$, s.o.

$$\vec{e}\,'_1 = \Big(\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}, 0\Big).$$

Ristuvat vektorit otsime kujul $\vec{a}_2 = \vec{s}_1 + t\vec{s}_2$. Parameeter t tuleb nii valida, et saaksime ristuva vektori. Seega

$$\vec{a}_2 \perp \vec{s}_1 \Longleftrightarrow \langle \vec{a}_2, \vec{s}_1\rangle = 0 \Longleftrightarrow \langle \vec{s}_1 + t\vec{s}_2, \vec{s}_1\rangle = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow |\vec{s}_1|^2 + t\langle \vec{s}_2, \vec{s}_1\rangle = 0 \Longleftrightarrow t = -\frac{|\vec{s}_1|^2}{\langle \vec{s}_1, \vec{s}_2\rangle} = -\frac{13}{3}.$$

Seega

$$\vec{a}_2 = s_1 - \frac{13}{3}\vec{s}_2 = \frac{2}{3}(-2, 3, 13).$$

Viimase normeerimisel saame kanoonilise reeperi teise baasivektori

$$\vec{e}\,'_2 = \Big(-\frac{2}{\sqrt{182}}, \frac{3}{\sqrt{182}}, \frac{13}{\sqrt{182}}\Big).$$

Kolmanda baasivektori võime leida kolmanda omavektori abil, aga võib ka leida vektorkorrutise $\vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = -2(2, -3, 1)$ abil, normeerides selle. Saame

$$\vec{e}\,'_3 = \Big(\frac{2}{\sqrt{14}}, -\frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}\Big).$$

Kanoonilise reeperi alguspunktiks kõlbab keskpunktide tasandi

$$2x_1 - 3x_2 + x_1 + 1 = 0,$$

mistahes punkt. Näiteks

$$O\,'(0, 0, -1).$$

Kanooniline reeper on leitud.

Leiame tasandipaari kanoonilise võrrandi valemi (26.12) abil. Saame

$$\overline{x}_3^2 = \frac{3}{7} \Longleftrightarrow \overline{x}_2 = \pm\sqrt{\frac{3}{7}}.$$

Sellega me oma näited lõpetame.