II.TEIST JÄRKU PINDADE EHITUSE UURIMINE KANOONILISE VÕRRANDI ABIL

11. ELLIPSOID

Definitsioon 11.1. *Punktihulka $\{X\}$ ruumis, mille iga punkti X koordinaadid (x_1, x_2, x_3) mingis ristreeperis $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ rahuldavad võrrandit*

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} + \frac{x_3^2}{\alpha_3^2} = 1, \tag{11.1}$$

kus α_1, α_2 ja α_3 on positiivsed konstandid, nimetatakse ellipsoidiks.

Selgitame esmalt ellipsoidi sümmeetria omadusi. Osutub, et ellipsoid on sümmeetriline kolme tasandi, kolme sirge ja ühe punkti suhtes. Valitud ristreeperi $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ korral on nendeks reeperitasandid, reeperiteljed ja reeperi alguspunkt. Veendume öeldus. Ruumi mistahes punkti $Z(z_1, z_2, z_3)$ korral temaga sümmeetrilised punktid Z_1, Z_2 ja Z_3 reeperitasandite $O\vec{e}_1\vec{e}_2$, $O\vec{e}_1\vec{e}_3$ ja $O\vec{e}_2\vec{e}_3$ suhtes on koordinaatidega $Z_1(z_1, z_2, -z_3)$, $Z_2(z_1, -z_2, z_3)$ ja $Z_3(-z_1, z_2, z_3)$. Sama punktiga $Z(z_1, z_2, z_3)$ sümmeetrilised punktid Z_4, Z_5 ja Z_6 seekord reeperitelgede $O\vec{e}_1$, $O\vec{e}_2$ ja $O\vec{e}_3$ suhtes on koordinaatidega $Z_4(z_1, -z_2, -z_3)$, $Z_5(-z_1, z_2, -z_3)$ ja $Z_6(-z_1, -z_2, z_3)$. Lõpuks punktiga $Z(z_1, z_2, z_3)$ sümmeetrilisel punktil Z_7 reeperi alguspunkti O suhtes on koordinaadid $Z_7(-z_1, -z_2, -z_3)$. Niisiis olgu Z ellipsoidi suvaline punkt. Tema koordinaadid rahuldavad ellipsoidi võrrandit (11.1), s.o.

$$\frac{z_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{z_2^2}{\alpha_2^2} + \frac{z_3^2}{\alpha_3^2} = 1. \tag{11.2}$$

Osutub, et sel korral on ellipsoidil ka punktid Z_1,...,Z_7. Selleks on vaja näidata, et nende punktide koordinaadid rahuldavad ellipsoidi võrrandit. Näiteks punkti Z_7 korral

$$\frac{(-z_1)^2}{\alpha_1^2} + \frac{(-z_2)^2}{\alpha_2^2} + \frac{(-z_3)^2}{\alpha_3^2} = \frac{z_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{z_2^2}{\alpha_2^2} + \frac{z_3^2}{\alpha_3^2} = 1.$$

Viimase võrdusmärgi juures arvestasime, et punkt Z on ellipsoidil, s.t kehtib (11.2). Analoogiliselt näidatakse, et punktid Z_1,...,Z_6 on ellipsoidil.

Definitsioon 11.2. *Tasandeid, sirgeid ja punkti, mille suhtes ellipsoid on sümmeetriline, nimetatakse neid ellipsoidi sümmeetriatasanditeks, sümmeetriatel gedeks ja keskpunktiks.*

Tõestuseta märgime, et erinevate α_1, α_2 ja α_3 korral ellipsoidil rohkem sümmeetriatasandeid, -telgi ja keskpunkte ei ole.

Silmas pidades viimast definitsiooni 11.2, *näeme, et ellipsoidi võrrand* (11.1) *on antud sellises ristreeperis, kus reeperi alguspunkt on ellipsoidi keskpunktis ja reeperitelgedeks on võetud sümmeetriateljed.*

Definitsioon 11.3. *Ellipsoidi lõikepunkte oma sümmeetriatelgedega nimetatakse ellipsoidi tippudeks.*

Seega ellipsoidi tippude koordinaadid tuleb leida võrrandisüsteemist, kuhu kuulub ellipsoidi võrrand ja sümmeetriatelje võrrandid. Süsteemist

$$\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \dfrac{x_2^2}{\alpha_2^2} + \dfrac{x_3^2}{\alpha_3^2} = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = \pm\alpha_1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

saame kaks tippu $A_1(-\alpha_1, 0, 0)$ ja $A_2(\alpha_1, 0, 0)$.

Teisest süsteemist

$$\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \dfrac{x_2^2}{\alpha_2^2} + \dfrac{x_3^2}{\alpha_3^2} = 1 \\ x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \pm\alpha_2 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

saame samuti kaks tippu $B_1(0, -\alpha_2, 0)$ ja $B_2(0, \alpha_2, 0)$.

On jäänud veel vaadelda süsteemi

$$\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \dfrac{x_2^2}{\alpha_2^2} + \dfrac{x_3^2}{\alpha_3^2} = 1 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = \pm\alpha_3 \end{cases},$$

millest saame kaks järgmist tippu $C_1(0, 0, -\alpha_3)$ ja $C_2(0, 0, \alpha_3)$. *Seega ellipsoidil on kuus tippu.*

Definitsioon 11.4. *Ellipsoidi tippupaaride poolt sümmeetriatelgedel tekkinud lõike nimetatakse ellipsoidi telgedeks. Poolt nimetatud lõikudest kui ka nende pikkusi nimetatakse ellipsoidi pooltelgedeks.*

Selle definitsiooni kohaselt on ellipsoidi telgedeks lõigud A_1A_2, B_1B_2 ja C_1C_2, mis on pikkustega $2\alpha_1$, $2\alpha_2$ ja $2\alpha_3$. Poolteljed on seega pikkustega α_1, α_2 ja α_3. Me oleme sellega konstantidele α_1, α_2 ja α_3 andnud geomeetrilise sisu.

Ellipsoidi kuju täpsemaks uurimiseks lõikame teda tasanditega, mis on paralleelsed või ühtuvad sümmeetriatasanditega. Tekkinud lõiked iseloomustavad ellipsoidi kuju. Seega ellipsoidi lõikamisel paralleelsete tasanditega avaneb võimalus näha kuidas ellipsoid ladestub nendest omavahel paralleelsetest lõigetest. Selliseid lõigete parvi on kolm, sest niipalju on sümmeetriatasandeid.

a) Lõikame ellipsoidi tasandiga $\pi_3 : x_3 = h_3$. See tasand on paralleelne või ühtub reeperitasandiga $O\vec{e}_1\vec{e}_2$. Andes konstandile h_3 mistahes väärtusi, saame kõik omavahel paralleelsed tasandid. Näiteks $h_3 = 0$ korral on $\pi_3 : x_3 = 0$. Me lõikame ellipsoidi sümmeetriatasandiga $O\vec{e}_1\vec{e}_2$. Üldjuhul tasandil $\pi_3 : x_3 = h_3$ tekkiva lõikejoone punktide koordinaadid rahuldavad süsteemi

$$\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \dfrac{x_2^2}{\alpha_2^2} + \dfrac{x_3^2}{\alpha_3^2} = 1 \\ x_3 = h_3 \end{cases},$$

millest

$$\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \dfrac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 1 - \dfrac{h_3^2}{\alpha_3^2} \\ x_3 = h_3 \end{cases}. \tag{11.3}$$

Kuna $\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} \geq 0$, siis tasand $\pi_3 : x_3 = h_3$ ei lõika $1 - \frac{h_3^2}{\alpha_3^2} < 0$ korral ellipsoidi. Sellest võrratusest saame $|h_3| > \alpha_3$. Järelikult iga tasand $\pi_3 : x_3 = h_3$, mis on sümmeetriatasandist $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ kaugemal kui α_3, ei lõika ellipsoidi. Ellipsoidi lõikavad aga tasandid $\pi_3 : x_3 = h_3$ kui $1 - \frac{h_3^2}{\alpha_3^2} \geq 0$. See võrratus on samaväärne võrratusega $|h_3| \leq \alpha_3$. Need tasandid ei ole sümmeetriatasandist $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ kaugemal kui α_3. Seejuures $|h_3| = \alpha_3$ korral

$1 - \frac{h_3^2}{\alpha_3^2} = 0$, mistõttu süsteem (11.3) annab

$$\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \dfrac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 0 \\ \qquad x_3 = \pm\alpha_3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = \pm\alpha_3 \end{cases}.$$

Seega tasand $\pi_3 : x_3 = \alpha_3$ lõikab ellipsoidi tipus $C_2(0, 0, \alpha_3)$ ja tasand $\pi_3 : x_3 = -\alpha_3$ aga tipus $C_1(0, 0, -\alpha_3)$.

Kui $|h_3| < \alpha_3$, siis $1 - \frac{h_3^2}{\alpha_3^2} > 0$. Süsteemis (11.3) jagame esimese võrrandi teguriga $1 - \frac{h_3^2}{\alpha_3^2}$. Kui tähistada

$$\overline{\alpha}_1 := \alpha_1 \sqrt{1 - \frac{h_3^2}{\alpha_3^2}} > 0, \qquad \overline{\alpha}_2 := \alpha_2 \sqrt{1 - \frac{h_3^2}{\alpha_3^2}} > 0, \tag{11.4}$$

siis süsteem (11.3) annab

$$\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{\overline{\alpha}_1^2} + \dfrac{x_2^2}{\overline{\alpha}_2^2} = 1 \\ \qquad x_3 = h_3 \end{cases}.$$

Näeme, et tasandil $\pi_3 : x_3 = h_3$ on lõikeks ellips pooltelgedega $\overline{\alpha}_1$ ja $\overline{\alpha}_2$. Mida lähemal on tasand $\pi_3 : x_3 = h_3$ sümmeetriatasandile $O\vec{e}_1\vec{e}_2$, seda "suuremad" on ellipsid, s.o. ellipsi pooltelјed kasvavad, nagu näeme valemist (11.4). Kõige suuremate pooltelgedega ellipsi saame ellipsoidi lõikamisel sümmeetriatasandiga $x_3 = 0$. Sel korral $\overline{\alpha}_1 = \alpha_1$ ja $\overline{\alpha}_2 = \alpha_2$. Lõikeks on ellips

$$\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \dfrac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 1 \\ \qquad x_3 = 0 \end{cases},$$

mille tippudeks on ellipsoidi tipud A_1, A_2 ja B_1, B_2. Juhul kui ellipsoidi võrrandis (11.1) on $\alpha_1 = \alpha_2$, siis lõike-ellipsid on ringjooned raadiusega $\overline{\alpha}_1 = \overline{\alpha}_2$ (vt. valem (11.4)).

b) Kuna ellipsoidi lõikamine tasandiga $\pi_2 : x_2 = h_2$ toimub analoogiliselt juhule a), siis arutlused anname võimalikult lühidalt. Lõike saame süsteemist

$$\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \dfrac{x_2^2}{\alpha_2^2} + \dfrac{x_3^2}{\alpha_3^2} = 1 \\ x_2 = h_2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \dfrac{x_3^2}{\alpha_3^2} = 1 - \dfrac{h_2^2}{\alpha_2^2} \\ x_2 = h_2 \end{cases}. \tag{11.5}$$

Kui $1-\frac{h_2^2}{\alpha_2^2} < 0$, siis $\frac{x_1^2}{\alpha_1^2}+\frac{x_2^2}{\alpha_2^2} \geq 0$ tõttu tasand π_2, mis on sümmeetriatasandist $O\vec{e}_1\vec{e}_3$ kaugemal kui α_2, ei lõika ellipsoidi. Kui lõiketasand on kaugusel α_2, siis $|h_2| = \alpha_2$ ehk $1 - \frac{h_2^2}{\alpha_2^2} = 0$. Süsteemi (11.5) esimesest võrrandist saame $x_1 = x_3 = 0$. Seega lõikamisel tasandiga $\pi_2 : x_2 = \alpha_2$ saame lõikeks tipu $B_2(0, \alpha_2, 0)$ ja lõikamisel tasandiga $\pi_2 : x_2 = -\alpha_2$ aga tipu $B_1(0, -\alpha_2, 0)$. Kui lõiketasand π_2 on sümmeetriatasandist $O\vec{e}_1\vec{e}_3$ kaugusel $|h_2| < \alpha_2$, siis $1 - \frac{h_2^2}{\alpha_2^2} > 0$, mistõttu eksisteerivad

$$\overline{\alpha}_1 := \alpha_1\sqrt{1 - \frac{h_2^2}{\alpha_2^2}} > 0, \qquad \overline{\alpha}_3 := \alpha_3\sqrt{1 - \frac{h_2^2}{\alpha_2^2}} > 0.$$

Süsteemile (11.5) saame kuju

$$\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{\overline{\alpha}_1^2} + \dfrac{x_3^2}{\overline{\alpha}_3^2} = 1 \\ x_2 = h_2 \end{cases}.$$

Seega tasandil $\pi_2 : x_2 = h_2$ tuleb lõikeks ellips pooltelgedega $\overline{\alpha}_1$ ja $\overline{\alpha}_3$. Tasandi π_2 lähenemisel sümmeetriatasandile $O\vec{e}_1\vec{e}_3$ ellipsi poolteljed $\overline{\alpha}_1$ ja $\overline{\alpha}_3$ kasvavad. Kõige suurema lõike-ellipsi saame ellipsoidi lõikamisel sümmeetriatasandiga $\pi_2 : x_2 = 0$, saades $\overline{\alpha}_1 = \alpha_1$ ja $\overline{\alpha}_3 = \alpha_3$. Selle ellipsi tippudeks on ellipsoidi tipud A_1, A_2 ja C_1, C_2.

Kui ellipsoidi võrrandis (11.1) on $\alpha_1 = \alpha_3$, siis lõigeteks on $\overline{\alpha}_1 = \overline{\alpha}_3$ tõttu ringjooned raadiusega $\overline{\alpha}_1 = \overline{\alpha}_3$.

c) Lõpuks lõikame ellipsoidi tasandiga $\pi_1 : x_1 = h_1$. Lõike saame süsteemist

$$\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \dfrac{x_2^2}{\alpha_2^2} + \dfrac{x_3^2}{\alpha_3^2} = 1 \\ x_1 = h_1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{x_2^2}{\alpha_2^2} + \dfrac{x_3^2}{\alpha_3^2} = 1 - \dfrac{h_1^2}{\alpha_1^2} \\ x_1 = h_1 \end{cases}. \tag{11.6}$$

Kui $1-\frac{h_1^2}{\alpha_1^2}<0$, siis lõige puudub. Et siit $|h_1|>\alpha_1$, siis lõiketasand on kaugemal kui α_1. Kui $|h_1|=\alpha_1$ ehk $1-\frac{h_1^2}{\alpha_1^2}=0$, siis süsteemi (11.6) esimesest võrrandist saame $x_2=x_3=0$. Lõikamisel tasandiga $\pi_1 : x_1=\alpha_1$ saame lõikeks tipu $A_2(\alpha_1,0,0)$ ja lõikamisel tasandiga $\pi_1 : x_1=-\alpha_1$ aga tipu $A_1(-\alpha_1,0,0)$. Kui lõiketasand π_1 on sümmeetriatasandist $O\vec{e}_2\vec{e}_3$ kaugusel $|h_1|<\alpha_1$, siis $1-\frac{h_1^2}{\alpha_1^2}>0$, mistõttu eksisteerivad

$$\overline{\alpha}_2 := \alpha_2\sqrt{1-\frac{h_1^2}{\alpha_1^2}}>0, \qquad \overline{\alpha}_3 := \alpha_3\sqrt{1-\frac{h_1^2}{\alpha_1^2}}>0.$$

Süsteemile (11.6) saame kuju

$$\begin{cases} \dfrac{x_2^2}{\overline{\alpha}_2^2}+\dfrac{x_3^2}{\overline{\alpha}_3^2}=1 \\ \qquad\quad x_1=h_1 \end{cases}.$$

Seega tasandil $\pi_1 : x_1=h_1$ tuleb lõikeks ellips pooltelgedega $\overline{\alpha}_2$ ja $\overline{\alpha}_3$. Tasandi π_1 lähenemisel sümmeetriatasandile $O\vec{e}_2\vec{e}_3$ ellipsi pooltelјed $\overline{\alpha}_2$ ja $\overline{\alpha}_3$ kasvavad. Kõige suurema lõike-ellipsi saame ellipsoidi lõikamisel sümmeetriatasandiga $\pi_1 : x_1=0$, saades $\overline{\alpha}_2=\alpha_2$ ja $\overline{\alpha}_3=\alpha_3$. Selle ellipsi tippudeks on ellipsoidi tipud B_1, B_2 ja C_1, C_2.

Kui ellipsoidi võrrandis (11.1) on $\alpha_2=\alpha_3$, siis lõigeteks on $\overline{\alpha}_2=\overline{\alpha}_3$ tõttu ringjooned raadiusega $\overline{\alpha}_2=\overline{\alpha}_3$.

Nüüd soovitame lugejal teha ellipsoidi joonise. Joonistame esmalt need lõike-ellipsid, mis tekivad sümmeetriatasanditel. Juba nende kolme lõike abil saame päris korraliku ettekujutuse ellipsoidist. Muidugi on soovitav kanda joonisele veel teisigi lõike-ellipseid.

Juhul kui ellipsoidi võrrandis pooltelјed α_1 ja α_2 on võrdsed, siis juhul a) nägime, et lõigeteks on ringjooned. Seega ellipsoidi võime saada sümmeetriatasandi $O\vec{e}_1\vec{e}_3$ lõike-ellipsi

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2}+\frac{x_3^2}{\alpha_3^2}=1$$

pöörlemisel ümber x_3-telje, sest siis selle ellipsi iga punkt kirjeldab juhul a) saadud ringjooned iga kord sobivalt valides h_3 väärtusi.

Definitsioon 11.5. *Ellipsoidi, mis saadakse ellipsi pöörlemisel ümber sümmeetriatelje nimetame pöördellipsoidiks.*

Seega pöördellipsoidi korral pooltelgede seas peab üks paar võrdseid olema, s.o. $\alpha_1 = \alpha_2$, $\alpha_1 = \alpha_3$ või $\alpha_2 = \alpha_3$.

Kui ellipsoidi kõik kolme tüüpi lõiked on ringjooned, siis $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ ning ellipsoidi võrrandist (11.1) saame

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \alpha_1^2. \tag{11.7}$$

Tähistades selle pinna suvalise punkti $X(x_1, x_2, x_3)$ kohavektorit $\vec{x} := \overrightarrow{OX}$ ja arvestades $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, siis võrrand (11.7) laseb kirjutada

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = \alpha_1^2 \Longrightarrow |\vec{x}|^2 = \alpha_1^2 \Longrightarrow |\vec{x}| = \alpha_1.$$

See võrrand annab sellised punktid, mis on ellipsoidi keskpunktist võrdsel kaugusel α_1. *Seega tegemist on sfääriga.*

Definitsioon 11.6. *Ellipsoidi, mille poolteljed on kõik omavahel erinevad, nimetame kolmeteljeliseks ellipsoidiks.*

Ellipsoidi lõikeid sümmeetriatasanditel nimetame pealõigeteks. Pealõikeid on kolm, sest sümmeetriatasandeid on kolm.

12. TEIST JÄRKU KOONUS

Definitsioon 12.1. *Punktihulka $\{X\}$ ruumis, mille iga punkti X koordinaadid (x_1, x_2, x_3) mingis ristreeperis $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ rahuldavad võrrandit*

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} - \frac{x_3^2}{\alpha_3^2} = 0, \tag{12.1}$$

kus α_1, α_2 ja α_3 on positiivsed konstandid, nimetatakse teist järku koonuseks.

Osutub, et teist järku koonus on sümmeetriline kolme tasandi, kolme sirge ja ühe punkti suhtes. Valitud ristreeperi $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ korral on nendeks reeperitasandid, reeperiteljed ja reeperi alguspunkt. Kuna tõestus on analoogiline ellipsoidi juhule, siis jätame selle lugejale. Nagu ellipsoidi korral, nimetame ka teist järku koonuse korral vastavaid tasandeid, sirgeid ja punkti vaadeldava *pinna sümmeetriatasanditeks, sümmeetriatelgedeks ja tipuks.* Nagu näeme, nimetame sümmeetria punkti siin tipuks mitte aga keskpunktiks, olgugi et see ei oleks ju väär. Leiame teist järku koonuse tipud, s.o. sümmeetriatelgede lõikepunktid pinnaga. Selleks tuleb lahendada kolm järgmist süsteemi

$$\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \dfrac{x_2^2}{\alpha_2^2} - \dfrac{x_3^2}{\alpha_3^2} = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \dfrac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \dfrac{x_2^2}{\alpha_2^2} - \dfrac{x_3^2}{\alpha_3^2} = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \dfrac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \dfrac{x_2^2}{\alpha_2^2} - \dfrac{x_3^2}{\alpha_3^2} = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}.$$

Iga süsteem annab lahendiks kaks tippu. Kokku saame kuus tippu, kuid kõik kuus tippu omavahel ühtuvad, andes reeperi alguspunkti $O(0,0,0)$, s.o. teist järku koonuse keskpunkti. Seetõttu on igati loomulik nimetada teist järku koonuse keskpunkti tipuks. Nii eespool ka tegime.

Tõestuseta märgime, et erinevate α_1, α_2 ja α_3 korral ka teist järku koonusel nagu ellipsoidil rohkem sümmeetriatasandeid, -telgi ja tippe ei ole.

Samuti saame öelda, et teist järku koonuse võrrand (12.1) *on antud sellises ristreeperis, kus reeperi alguspunkt on teist järku koonuse tipus ja reeperitelgedeks on võetud sümmeetriateljed.*

Nüüd uurime teist järku koonuse lõikeid tasanditega, mis on paralleelsed või ühtuvad sümmeetriatasanditega.

a) Lõikama tasandiga $\pi_3 : x_3 = h_3$. Lõikepunktide koordinaadid leiame süsteemist

$$\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \dfrac{x_2^2}{\alpha_2^2} - \dfrac{x_3^2}{\alpha_3^2} = 0 \\ \qquad\qquad x_3 = h_3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \dfrac{x_2^2}{\alpha_2^2} = \dfrac{h_3^2}{\alpha_3^2} \\ \qquad x_3 = h_3 \end{cases}. \tag{12.2}$$

Kui $h_3 = 0$, siis lõiketasandiks $\pi_3 : x_3 = 0$ on sümmeetriatasand $O\vec{e}_1\vec{e}_2$. Süsteemist (12.2) saame

$$\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \dfrac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 0 \\ \qquad x_3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow O(0,0,0).$$

Seega sümmeetriatasand $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ lõikab teist järku koonust ainult ühes punktis – tipus O. Kui $h_3 \neq 0$, siis tasand $\pi_3 : x_3 = h_3$ on sümmeetriatasandist $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ kaugusel $|h_3|$. Kui eelnevalt valemis (12.2) esimest võrrandit jagada teguriga $\frac{h_3^2}{\alpha_3^2}$ ja tähistada

$$\overline{\alpha}_1 := \alpha_1\sqrt{\frac{h_3^2}{\alpha_3^2}} = \frac{\alpha_1}{\alpha_3}|h_3| > 0, \quad \overline{\alpha}_2 := \alpha_2\sqrt{\frac{h_3^2}{\alpha_3^2}} = \frac{\alpha_2}{\alpha_3}|h_3| > 0, \tag{12.3}$$

me saame

$$\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{\overline{\alpha}_1^2} + \dfrac{x_2^2}{\overline{\alpha}_2^2} = 1 \\ \qquad x_3 = h_3 \end{cases}. \tag{12.4}$$

Tasandil $\pi_3 : x_3 = h_3$ tuleb lõikeks ellips pooltelgedega $\overline{\alpha}_1$ ja $\overline{\alpha}_2$. Selle ellipsi keskpunkt O' asub punktis $O'(0,0,h_3)$, seega sümmeetriateljel $O\vec{e}_3$. Kui tasand $\pi_3 : x_3 = h_3$ eemaldub sümmeetriatasandist $O\vec{e}_1\vec{e}_2$, s.o. $|h_3|$ kasvab, siis valemi (12.3) kohaselt ellipsi (12.4) pooltteljed $\overline{\alpha}_1$ ja $\overline{\alpha}_2$ kasvavad, s.o. lõike-ellipsid lähevad suuremaks.

b) Lõikame nüüd teist järku koonust tasandiga $\pi_1 : x_1 = h_1$. Lõike saame süsteemist

$$\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \dfrac{x_2^2}{\alpha_2^2} - \dfrac{x_3^2}{\alpha_3^2} = 0 \\ \qquad\qquad x_1 = h_1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -\dfrac{x_2^2}{\alpha_2^2} + \dfrac{x_3^2}{\alpha_3^2} = \dfrac{h_1^2}{\alpha_1^2} \\ \qquad x_1 = h_1 \end{cases}. \tag{12.5}$$

Juhul kui $h_1 = 0$, siis toimub lõikamine sümmeetriatasandiga $\pi_1 : x_1 = 0$. Süsteem (12.5) annab

$$\begin{cases} -\left(\dfrac{x_2}{\alpha_2}\right)^2 + \left(\dfrac{x_3}{\alpha_3}\right)^2 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \quad \begin{cases} \left(-\dfrac{x_2}{\alpha_2} + \dfrac{x_3}{\alpha_3}\right)\left(\dfrac{x_2}{\alpha_2} + \dfrac{x_3}{\alpha_3}\right) = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}.$$

Viimane süsteem on samaväärne kahe järgmise süsteemiga

$$\begin{cases} -\dfrac{x_2}{\alpha_2} + \dfrac{x_3}{\alpha_3} = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} \dfrac{x_2}{\alpha_2} + \dfrac{x_3}{\alpha_3} = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}.$$

Näeme, et lõikeks on kaks koonuse tipus lõikuvat sirget.

Juhul kui $h_1 \neq 0$, siis süsteem (12.5) on viidav kujule

$$\begin{cases} -\dfrac{x_2^2}{\overline{\alpha}_2^2} + \dfrac{x_3^2}{\overline{\alpha}_3^2} = 1 \\ x_1 = h_1 \end{cases}, \tag{12.6}$$

kus

$$\overline{\alpha}_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}|h_1|, \quad \overline{\alpha}_3 = \frac{\alpha_3}{\alpha_1}|h_1|. \tag{12.7}$$

Valemist (12.6) näeme, et tasandil $\pi_1 : x_1 = h_1$ on lõikeks hüperbool, mille reaaltelg on paralleelne reeperiteljega $O\vec{e}_3$ ja imaginaartelg reeperiteljega $O\vec{e}_2$.

c) Lõigates teist järku koonust tasandiga $\pi_2 : x_2 = h_2$, saame analoogilised tulemused juhule b). Soovitame selles heal lugejal veenduda.

Võtame teist järku koonusel suvalise punkti $Z(z_1, z_2, z_3)$, mis erineb tipust O. *Osutub,et punkte O ja Z läbiv sirge asub teist järku koonusel.* Tõepoolest. Paneme kirja selle sirge parameetrilised võrrandid, milledeks on

$$x_1 = z_1 t, \quad x_2 = z_2 t, \quad x_3 = z_3 t, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{12.8}$$

Selle sirge suvalise punkti koordinaadid $(z_1 t, z_2 t, z_3 t)$ rahuldavad teist järku koonuse võrrandit (12.1), sest

$$\frac{(z_1 t)^2}{\alpha_1^2} + \frac{(z_2 t)^2}{\alpha_2^2} - \frac{(z_3 t)^2}{\alpha_3^2} = t^2\left(\frac{z_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{z_2^2}{\alpha_2^2} - \frac{z_3^2}{\alpha_3^2}\right) = t^2 0 = 0.$$

Siin me arvestasime, et Z on teist järku koonuse punkt, s.o.

$$\frac{z_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{z_2^2}{\alpha_2^2} - \frac{z_3^2}{\alpha_3^2} = 0.$$

Definitsioon 12.2. *Teist järku koonusel asuvat sirget nimetame tema sirgjooneliseks moodustajaks.*

Definitsioon 12.3. *Teist järku koonuse sümmetriatelge $O\vec{e}_3$ nimetatakse tema teljeks.*

Pakume nüüd välja võimaluse, kuidas skitseerida teist järku koonust. Nagu punktis a) nägime, saame tema lõikamisel tasandiga, mis on risti teist järku koonuse teljega, lõikeks ellipsi, mida tähistame ϵ abil. Sirge, mis on risti selle ellipsi tasandiga ja läbib selle ellipsi keskpunkti, on meie teist järku koonuse telg. Viimasel asub ka meie teist järku koonuse tipp, tähistame tähega O. Iga sirge $s(O, Z)$, kus punkt Z kuulub ellipsile ϵ, on skitseeritaval teist järku koonusel. Pannes punkti Z liikuma mööda seda ellipsit, ladestub sirgetest $s(O, Z)$ meie teist järku koonus. Saame ka paika panna reeperi, mille suhtes teist järku koonusel on lihtne võrrand (12.1). Nimelt reeperi alguspunkt on koonuse tipus, reeperiteljed $O\vec{e}_1$ ja $O\vec{e}_2$ on vastavalt valitud ellipsi ϵ pikema ja lühema teljega paralleelsed. Kolmas reeperitelg on paika pandud teist järku koonuse teljega.

Juhul kui teist järku koonuse võrrandis on $\alpha_1 = \alpha_2$, siis lõiked iga tasandiga $\pi_3 : x_3 = h_3$, mil $h_3 \neq 0$, on ringjooned, sest lõike-ellipsi poolteljed on võrdsed, s.o. $\overline{\alpha}_1 = \overline{\alpha}_2$ (vt. valem (12.3)). Sel korral koonuse iga moodustaja moodustab teist järku koonuse teljega konstantse nurga, tähistame näiteks tähega α. Seejuures ilmselt $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Sellise teist järku koonuse võime saada, kui võtame kaks lõikuvat sirget nendevahelise nurgaga α. Ühe neist sirgetest loeme teljeks. Teise sirge paneme ümber selle pöörlema. *Sellist teist järku koonust nimetame pöördkoonuseks.* Seega $\alpha_1 = \alpha_2$ on pöördkoonuse tunnus. Kerge on näha, et pöördkoonuse korral $tan\, \alpha = \frac{\alpha_1}{\alpha_3}$.

13. ÜHEKATTELINE JA KAHEKATTELINE HÜPERBOLOID

Definitsioon 13.1. *Punktihulka* $\{X\}$ *ruumis, mille iga punkti* X *koordinaadid* (x_1, x_2, x_3) *mingis ristreeperis* $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ *rahuldavad võrrandit*

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} - \frac{x_3^2}{\alpha_3^2} = \varepsilon, \tag{13.1}$$

kus α_1*,* α_2 *ja* α_3 *on positiivsed konstandid, nimetatakse* $\varepsilon = 1$ *korral ühekatteliseks ja* $\varepsilon = -1$ *korral kahekatteliseks hüperboloidiks.*

Osutub, et hüperboloidid on sümmeetrilised kolme tasandi, kolme sirge ja ühe punkti suhtes. Valitud ristreeperi $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ korral on nendeks reeperitasandid, reeperiteljed ja reeperi alguspunkt. Kuna tõestus on analoogiline ellipsoidi juhule, siis jätame ka siin tõestuse lugejale. Nagu ellipsoidi korral, nimetame ka hüperboloidide korral neid tasandeid, sirgeid ja punkti vaadeldava *pinna sümmeetriatasanditeks, sümmeetriatelgedeks ja keskpunktiks.* Leiame hüperboloidide tipud, s.o. sümmeetriatelgede lõikepunktid pinnaga. Selleks tuleb lahendada kolm järgmist süsteemi

$$\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \dfrac{x_2^2}{\alpha_2^2} - \dfrac{x_3^2}{\alpha_3^2} = \varepsilon \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \dfrac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \dfrac{x_2^2}{\alpha_2^2} - \dfrac{x_3^2}{\alpha_3^2} = \varepsilon \\ x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \dfrac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \dfrac{x_2^2}{\alpha_2^2} - \dfrac{x_3^2}{\alpha_3^2} = \varepsilon \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases},$$

millest vastavalt saame

$$\begin{cases} x_1^2 = \varepsilon\alpha_1^2 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_2^2 = \varepsilon\alpha_2^2 \\ x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} -x_3^2 = \varepsilon\alpha_3^2 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}.$$

Ühekattelise hüperboloidi korral ($\varepsilon = 1$) kahest esimesest süsteemist kumbki annab kaks tippu $A_1(-\alpha_1, 0, 0)$, $A_2(\alpha_1, 0, 0)$ ja $B_1(0, -\alpha_2, 0)$, $B_2(0, \alpha_2, 0)$, aga kolmas süsteem ei ole lahenduv. Kahekattelise hüperboloidi korral ($\varepsilon = -1$) kaks esimest süsteemi ei ole lahenduvad, aga kolmas süsteem annab kaks tippu $C_1(0, 0, -\alpha_3)$ ja $C_2(0, 0, \alpha_3)$. Seega ühekattelise hüperboloidi telgedeks on lõigud A_1A_2 ja B_1B_2 vastavalt pikkustega $2\alpha_1$ ja $2\alpha_2$

ning pooltelgedeks α_1 ja α_2. Kahekattelise hüperboloidi korral on ainult üks telg C_1C_2 pikkusega $2\alpha_3$ ja üks pooltelg pikkusega α_3.

Järgnevas uurime ka siin vaadeldavate pindade lõikeid tasanditega, milleks on sümmeetriatasandid või nendega paralleelsed tasandid.

a) Lõikame hüperboloidi tasandiga $\pi_3 : x_3 = h_3$. Lõike punktide koordinaadid rahuldavad süsteemi

$$\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \dfrac{x_2^2}{\alpha_2^2} - \dfrac{x_3^2}{\alpha_3^2} = \varepsilon \\ \qquad\qquad x_3 = h_3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \dfrac{x_2^2}{\alpha_2^2} = \varepsilon + \dfrac{h_3^2}{\alpha_3^2} \\ \qquad x_3 = h_3 \end{cases}. \tag{13.2}$$

Selle süsteemi esimeses võrrandis on alati $\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} \geq 0$, aga kahekattelise hüperboloidi korral ($\varepsilon = -1$) võib paremal pool olla $-1 + \frac{h_3^2}{\alpha_3^2} < 0$. Viimane on samaväärne tingimusega $|h_3| < \alpha_3$. Seega kui tasand $\pi_3 : x_3 = h_3$ jääb tippude C_1 ja C_2 vahele, siis ta kahekattelist hüperboloidi ei lõika. Juhul kui tasand on sümmeetriatasandist kaugusel $|h_3| = \alpha_3$, siis selline tasand $h_3 = \alpha_3$ korral läbib tippu C_2 ja $h_3 = -\alpha_3$ aga tippu C_1. Seda näeme ka süsteemist (13.2), sest $-1 + \frac{h_3^2}{\alpha_3^2} = 0$ korral ta saab kuju

$$\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \dfrac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 0 \\ \qquad\quad x_3 = h_3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = \pm\alpha_3 \end{cases} \Longrightarrow C_1(0,0,-\alpha_3), \quad C_2(0,0,\alpha_3).$$

Juhul kui tasand $\pi_3 : x_3 = h_3$ on väljaspool tippe C_1 ja C_2, s.o. $-1+\frac{h_3^2}{\alpha_3^2} > 0$, siis ta lõikab kahekattelist hüperboloidi. Kuna ühekattelise hüperboloidi korral ($\varepsilon = 1$) on valemis (13.2) alati $1 + \frac{h_3^2}{\alpha_3^2} > 0$, siis saame mõlemat tüüpi hüperboloidi korral leida korraga lõike võrrandi. Süsteemi (13.2) saame viia kujule

$$\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{\overline{\alpha}_1^2} + \dfrac{x_2^2}{\overline{\alpha}_2^2} = 1 \\ \qquad\quad x_3 = h_3 \end{cases},$$

kus

$$\overline{\alpha}_1 := \alpha_1\sqrt{\varepsilon + \frac{h_3^2}{\alpha_3^2}}, \quad \overline{\alpha}_2 := \alpha_2\sqrt{\varepsilon + \frac{h_3^2}{\alpha_3^2}}. \tag{13.3}$$

Viimases ruutjuur $\varepsilon = -1$ korral eksisteerib. Tasandil $\pi_3 : x_3 = h_3$ lõikeks on ellips keskpunktiga $O'(0, 0, h_3)$ sümmeetriateljel $O\vec{e}_3$. Nende ellipsite sümmeetriateljed iga h_3 korral on paralleelsed hüperboloidi sümmeetriatelgedega $O\vec{e}_1$ ja $O\vec{e}_2$. Kui tasand $\pi_3 : x_3 = h_3$ eemaldub sümmeetriatasandist $O\vec{e}_1\vec{e}_2$, siis lõike-ellipsi poolteljed $\overline{\alpha}_1$ ja $\overline{\alpha}_2$ kasvavad, mida näeme valemitest (13.3). Samadest valemitest näeme, et ühekattelise hüperbooidi kõige väiksemate pooltelgedega ellipsi saame $h_3 = 0$ korral. Siis lõikame ühekattelist hüperboloidi sümmeetriatasandiga $\pi_3 : x_3 = 0$. Selle ellipsi pooltelgedeks on $\overline{\alpha}_1 = \alpha_1$ ja $\overline{\alpha}_2 = \alpha_2$. Seda lõike-ellipsit nimetame *ühekattelise hüperboloidi kaelellipsiks.* Tema pooltelgedeks on selle ühekattelise hüperboloidi poolteljed α_1 ja α_2.

Moodustame nüüd lisaks hüperboloididele (13.1) samade α_1, α_2 ja α_3 abil teist järku koonuse, mille punktide koordinaadid (x_1, x_2, x_3) samas ristreeperis $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ rahuldavad võrrandit

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} - \frac{x_3^2}{\alpha_3^2} = 0, \tag{13.4}$$

Lõikame ka viimast, lisaks hüperboloididele (13.1), tasandiga $\pi_3 : x_3 = h_3$. Eelmise paragrahvi kohaselt tuleb ka siin lõikeks ellips

$$\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{\tilde{\alpha}_1^2} + \dfrac{x_2^2}{\tilde{\alpha}_2^2} = 1 \\ \qquad x_3 = h_3 \end{cases},$$

pooltelgedega

$$\tilde{\alpha}_1 := \alpha_1\sqrt{\frac{h_3^2}{\alpha_3^2}} = \frac{\alpha_1}{\alpha_3}|h_3| > 0, \quad \tilde{\alpha}_2 := \alpha_2\sqrt{\frac{h_3^2}{\alpha_3^2}} = \frac{\alpha_2}{\alpha_3}|h_3| > 0.$$

Leiame teist järku koonuse ja hüperloidi korral tasandil $\pi_3 : x_3 = h_3$ olevate lõike-ellipsite pooltelgede vahe. Saame

$$\tilde{\alpha}_1 - \overline{\alpha}_1 = \alpha_1\sqrt{\frac{h_3^2}{\alpha_3^2}} - \alpha_1\sqrt{\varepsilon + \frac{h_3^2}{\alpha_3^2}} = \alpha_1\left(\sqrt{\frac{h_3^2}{\alpha_3^2}} - \sqrt{\varepsilon + \frac{h_3^2}{\alpha_3^2}}\right) =$$

$$= \frac{\alpha_1\left(\sqrt{\frac{h_3^2}{\alpha_3^2}} - \sqrt{\varepsilon + \frac{h_3^2}{\alpha_3^2}}\right)\left(\sqrt{\frac{h_3^2}{\alpha_3^2}} + \sqrt{\varepsilon + \frac{h_3^2}{\alpha_3^2}}\right)}{\left(\sqrt{\frac{h_3^2}{\alpha_3^2}} + \sqrt{\varepsilon + \frac{h_3^2}{\alpha_3^2}}\right)} = \frac{-\alpha_1\varepsilon}{\left(\sqrt{\frac{h_3^2}{\alpha_3^2}} + \sqrt{\varepsilon + \frac{h_3^2}{\alpha_3^2}}\right)} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \tilde{\alpha}_1 - \overline{\alpha}_1 = \frac{-\alpha_1\varepsilon}{\left(\sqrt{\frac{h_3^2}{\alpha_3^2}} + \sqrt{\varepsilon + \frac{h_3^2}{\alpha_3^2}}\right)}. \tag{13.5}$$

Lugeja hooleks jätame kontrollida, et analoogiliselt saame

$$\tilde{\alpha}_2 - \overline{\alpha}_2 = \frac{-\alpha_2\varepsilon}{\left(\sqrt{\frac{h_3^2}{\alpha_3^2}} + \sqrt{\varepsilon + \frac{h_3^2}{\alpha_3^2}}\right)}. \tag{13.6}$$

Nendest valemitest (13.5) ja (13.6) näeme, et ühekattelise hüperboloidi korral ($\varepsilon = 1$) on $\tilde{\alpha}_1 - \overline{\alpha}_1 < 0$ ja $\tilde{\alpha}_2 - \overline{\alpha}_2 < 0$ ning kahekattelise hüperboloidi korral ($\varepsilon = -1$) on $\tilde{\alpha}_1 - \overline{\alpha}_1 > 0$ ja $\tilde{\alpha}_2 - \overline{\alpha}_2 > 0$. Nii on iga $h_3 \in \mathbb{R}$ korral, s.o. igal lõiketasandil $\pi_3 : x_3 = h_3$ teist järku koonuse lõike-ellips on ühekattelise hüperboloidi lõike-ellipsi sees ja kahekattelise hüperboloidi lõike-ellips teist järku koonuse lõike-ellipsi sees. Seega teist järku koonus asub ühekattelise hüperboloidi sees js kahekatteline hüperboloid omakorda teist järku koonuse sees. Kui lõiketasand $\pi_3 : x_3 = h_3$ eemaldub sümmeetriatasandist $O\vec{e}_1\vec{e}_2$, siis

$$\lim_{|h_3| \to \infty} (\tilde{\alpha}_1 - \overline{\alpha}_1) = 0, \qquad \lim_{|h_3| \to \infty} (\tilde{\alpha}_2 - \overline{\alpha}_2) = 0.$$

Seega teist järku koonus tuleb nii ühekattelisele kui ka kahekattelisele hüperboloidile kuitahes lähedale. *Sellise omadusega teist järku koonust nimetame vaadeldava pinna asümptootkoonuseks.* Seega teist järku koonus (13.4) on kumbagi tüüpi hüperboloidi (13.1) asümptootkoonuseks.

b) Lõikame ühekattelist kui ka kahekattelist hüperboloidi tasandiga $\pi_2 : x_2 = h_2$. Lõikepunktide koordinaadid rahuldavad süsteemi

$$\begin{cases} \frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} - \frac{x_3^2}{\alpha_3^2} = \varepsilon \\ x_2 = h_2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \frac{x_1^2}{\alpha_1^2} - \frac{x_3^2}{\alpha_3^2} = \varepsilon - \frac{h_2^2}{\alpha_2^2} \\ x_2 = h_2 \end{cases}. \tag{13.7}$$

Juhul kui $\varepsilon - \frac{h_2^2}{\alpha_2^2} < 0$ (nii on alati kahekattelise hüperboloidi korral olemata h_2 väärtusest), siis süsteemile (13.7) saame anda kuju

$$\begin{cases} -\dfrac{x_1^2}{\overline{\alpha}_1^2} + \dfrac{x_3^2}{\overline{\alpha}_3^2} = 1 \\ \qquad\qquad x_2 = h_2 \end{cases},$$

kus

$$\overline{\alpha}_1 := \alpha_1 \sqrt{-\left(\varepsilon - \frac{h_2^2}{\alpha_2^2}\right)}, \quad \overline{\alpha}_3 := \alpha_3 \sqrt{-\left(\varepsilon - \frac{h_2^2}{\alpha_2^2}\right)}.$$

Valemist näeme, et tasandil $\pi_2 : x_2 = h_2$ on lõikeks hüperbool, mille raaaltelg on paralleelne reeperiteljega $O\vec{e}_3$ ja imaginaartelg aga paralleelne reeperiteljega $O\vec{e}_1$.

Selgitame, mida tähendab ühekattelise hüperboloidi korral tingimus $1 - \frac{h_2^2}{\alpha_2^2} < 0$ omavahel paralleelsete lõiketasandite $\pi_2 : x_2 = h_2$ valimiseks. Kahekattelise hüperboloidi korral lisatingimust ei tulnud. Me saame tingimused h_2 valikuks:

$$1 - \frac{h_2^2}{\alpha_2^2} < 0 \Longrightarrow \frac{h_2^2}{\alpha_2^2} > 1 \Longrightarrow h_2^2 > \alpha_2^2 \Longrightarrow |h_2| > \alpha_2.$$

Seega iga lõiketasand asub väljaspool tippe B_1 ja B_2.

Lõigete uurimist tuleb veel jätkata ainult ühekattelise hüperboloidi korral.

Juhul kui $1 - \frac{h_2^2}{\alpha_2^2} = 0$, siis $|h_2| = \alpha_2$, s.o. $h_2 = \pm\alpha_2$. Seega selliseid tasandeid on kaks. Üks neist läbib tippu B_1 ja teine B_2. Valemist (13.7) lõike määramiseks saame

$$\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{\alpha_1^2} - \dfrac{x_3^2}{\alpha_3^2} = 0 \\ x_2 = \pm\alpha_2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{x_1}{\alpha_1} - \dfrac{x_3}{\alpha_2} = 0 \\ x_2 = \pm\alpha_2 \end{cases} \vee \begin{cases} \dfrac{x_1}{\alpha_1} + \dfrac{x_3}{\alpha_2} = 0 \\ x_2 = \pm\alpha_2 \end{cases}.$$

Seega kummalgi lõiketasandil $\pi_2 : x_2 = \pm\alpha_2$ tekib kaks lõikuvat sirget, mis tasandi $\pi_2 : x_2 = \alpha_2$ korral läbivad tippu B_2 ja tasandi $\pi_2 : x_2 = -\alpha_2$ korral aga tippu B_1.

Juhul kui ühekattelise hüperboloidi korral $1-\frac{h_2^2}{\alpha_2^2}>0$ ehk samaväärselt $-\alpha_2 < h_2 < \alpha_2$, siis iga lõiketasand $\pi_2 : x_2 = h_2$ on tippude B_1 ja B_2 vahel. Süsteemist (13.7) saame

$$\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{\overline{\alpha}_1^2} - \dfrac{x_3^2}{\overline{\alpha}_3^2} = 1 \\ \qquad x_2 = h_2 \end{cases},$$

kus

$$\overline{\alpha}_1 := \alpha_1\sqrt{1-\frac{h_2^2}{\alpha_2^2}}, \quad \overline{\alpha}_3 := \alpha_3\sqrt{1-\frac{h_2^2}{\alpha_2^2}}.$$

Seega vaadeldavatel tasanditel $\pi_2 : x_2 = h_2$ on lõikeks hüperbool, mille reaaltelg on paralleelne reeperiteljega $O\vec{e}_1$ ja imaginaartelg aga reeperiteljega $O\vec{e}_3$. Teeme kokkuvõtte lõigete kohta tasanditega $\pi_2 : x_2 = h_2$, kus $h_2 \in \mathbb{R}$.

Ühekattelise hüperboloidi lõikamisel tasandiga $\pi_2 : x_2 = h_2$, mis on tippude B_1 ja B_2 vahel, annab lõikeks hüperbooli. Reaaltelg on tal paralleelne reeperiteljega $O\vec{e}_1$ ja imaginaartelg paralleelne reeperiteljega $O\vec{e}_3$. Kui tasand $\pi_2 : x_2 = h_2$ läbib tippe B_1 või B_2, siis lõikeks on kaks lõikuvat sirget, mis läbivad lõiketasandil olevat tippu. Kui lõpuks lõiketasand $\pi_2 : x_2 = h_2$ on väljaspool tippe B_1 ja B_2, siis lõikeks on taas hüperbool, kuid siin on aga imaginaartelg paralleelne reeperiteljega $O\vec{e}_1$ ja reaaltelg paralleelne reeperiteljega $O\vec{e}_3$.

Kahekattelise hüperboloidi korral on lõikeks tasandiga $\pi_2 : x_2 = h_2$ iga $h_2 \in \mathbb{R}$ korral hüperbool, mille imaginaartelg on paralleelne reeperiteljega $O\vec{e}_1$ ja reaaltelg reeperiteljega $O\vec{e}_3$.

c) Ühekattelise (kahekattelise) hüperboloidi lõikamisel tasandiga $\pi_1 : x_1 = h_1$ saame analoogilised tulemused juhuga b). Seetõttu jätame lõigete uurimise ärksale lugejale.

Nüüd soovitame lugejal lõigete abil teha nii ühekattelise kui ka kahekattelise hüperboloidi joonise.

14. ELLIPTILINE JA HÜPERBOOLNE PARABOLOID

Definitsioon 14.1. *Punktihulka $\{X\}$ ruumis, mille iga punkti X koordinaadid (x_1, x_2, x_3) mingis ristreeperis $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ rahuldavad võrrandit*

$$\frac{x_1^2}{p_1} + \varepsilon\frac{x_2^2}{p_2} = 2x_3,$$

kus p_1 ja p_2 on positiivsed konstandid, nimetatakse $\varepsilon = 1$ korral elliptiliseks ja $\varepsilon = -1$ korral hüperboolseks paraboloidiks.

Analoogiliselt, nagu ellipsoidi korral, palume lugejal omal käel uurida paraboloidide sümmeetria omadusi. Osutub, et paraboloidid on sümmeetrilised kahe tasandi ja ühe sirge suhtes. Valitud reeperi $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ korral on nendeks tasanditeks reeperitasandid $O\vec{e}_1\vec{e}_3$ ja $O\vec{e}_2\vec{e}_3$ ning sirgeks nende lõikesirge, s.o. reeperitelg $O\vec{e}_3$. Niimetatud tasandeid ja sirget *nimetame paraboloidide sümmeetriatasanditeks ja teljeks.* Leiame *paraboloidide tipud, s.o. paraboloidi ja telje lõikepunktid.* Viimaste koordinaadid saame leida võrrandisüsteemist

$$\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{p_1} + \varepsilon\dfrac{x_2^2}{p_2} = 2x_3 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow O(0,0,0).$$

Saime, et paraboloididel on ainult üks tipp. Seejuures reeperi alguspunkt on paigutatud paraboloidide tippu. Rõhutame, et paraboloidid ei ole sümmeetrilised reeperitasandi $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ suhtes. Põhjuseks on asjaolu, et paraboloidide võrrandis on koordinaat x_3 esimesel astmel.

Paraboloidide kuju uurimiseks hakkame neid lõikama paralleelsete tasanditega. Saadud lõiked iseloomustavad ka paraboloide. Kuna kummagi paraboloidi korral on analüüs üsna erinev, siis vaatleme lõikeid kummagi paraboloidi tüübi korral eraldi.

Elliptilise paraboloidi lõiked

a) Lõikame tasandiga $\pi_3 : x_3 = h_3$. Selle tasandi eripäraks on, et ta ei ole paralleelne ühegi sümmeetriatasandiga. Reeperitasand $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ ei ole sümmeetriatasandiks nii nagu oli eelneva nelja tüüpi pinna korral. Küll võib seda lõiketasandit iseloomustada kui sümmeetriateljega $O\vec{e}_3$ ristuvat tasandit. Lõikepunktide koordinaadid tuleb leida süsteemist

$$\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{p_1} + \dfrac{x_2^2}{p_2} = 2x_3 \\ x_3 = h_3 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{x_1^2}{p_1} + \dfrac{x_2^2}{p_2} = 2h_3 \\ x_3 = h_3 \end{cases}. \tag{14.1}$$

Kuna $\frac{x_1^2}{p_1}+\frac{x_2^2}{p_2} \geq 0$, siis süsteemi (14.1) esimesest võrrandist näeme, et $h_3 < 0$ korral tasand $\pi_3 : x_3 = h_3$ ei lõika elliptilist paraboloidi. Kui $h_3 = 0$, siis lõikame reeperitasandiga $x_3 = 0$. Süsteemi (14.1) esimene võrrand annab $\frac{x_1^2}{p_1}+\frac{x_2^2}{p_2} = 0$, millest $p_1 > 0$ ja $p_2 > 0$ tõttu $x_1 = x_2 = 0$. Seega lõige koosneb ühest punktist, milleks on elliptilise paraboloidi tipp $O(0, 0, 0)$. Kui $h_3 > 0$, siis süsteemi (14.1) esimest võrrandit jagame teguriga $2h_3$. Defineerides

$$\alpha_1 := \sqrt{2p_1h_3}, \qquad \alpha_2 := \sqrt{2p_2h_3}, \tag{14.2}$$

saame

$$\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \dfrac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 1 \\ x_3 = h_3 \end{cases}.$$

Näeme, et lõikeks on ellips pooltelgedega α_1 ja α_2. Tema teljed on paralleelsed reeperitelgedega $O\vec{e}_1$ ja $O\vec{e}_2$. Kui tasand $\pi_3 : x_3 = h_3$ eemaldub reeperitasandist $O\vec{e}_1\vec{e}_2$, s.o. h_3 kasvab, siis valemi (14.2) kohaselt lõikeellipsi pooltelјed kasvavad.

b) Lõikame elliptilist paraboloidi tasandiga $\pi_2 : x_2 = h_2$. Lõikepunktide koordinaadid rahuldavad süsteemi

$$\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{p_1} + \dfrac{x_2^2}{p_2} = 2x_3 \\ x_2 = h_2 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x_1^2 = 2p_1\left(x_3 - \dfrac{h_2^2}{2p_2}\right) \\ x_2 = h_2 \end{cases}.$$

Näeme, et tasandil $\pi_2 : x_2 = h_2$ on lõikeks parabool, mille telg on paralleelne reeperiteljega $O\vec{e}_3$. Parabooli harud avanevad reeperitelje $O\vec{e}_3$ suunas, sest x_3 kordaja $2p_1$ on positiivne. Parabooli tipp asub punktis $O'(0, h_2, \frac{h_2^2}{2p_2})$.

Juhul kui $h_2 = 0$, siis parabool on reeperitasandil $O\vec{e}_1\vec{e}_3$. Tema tipp O' ühtib elliptilise paraboloidi tipuga O.

c) Lõikamisel tasandiga $\pi_1 : x_1 = h_1$ saame analoogilise tulemuse eelmise juhuga, mistõttu arutelu usaldame lugejale.

Pärast saadud tulemusi on aeg asuda elliptilise paraboloidi joonestamisele. Seejuures on soovitav kanda joonisele mitmesuguseid lõikeid lisaks neile, mis on toodud kõrvaloleval joonisel, kus on antud lõiked tasanditega $\pi_3 : x_3 = h_3$, $\pi_2 = 0$, $\pi_1 = 0$ ja $\pi_2 : x_2 = h_2$.

Hüperboolse paraboloidi lõiked

a) Lõikame tasandiga $\pi_3 : x_3 = h_3$. Ka siin ei ole tegemist sümmeetriatasandiga paralleelse tasandiga. Teda võib siingi iseloomustada kui sümmeetriateljega ristuvat tasandit. Lõikepunktide koordinaadid saame süsteemist

$$\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{p_1} - \dfrac{x_2^2}{p_2} = 2x_3 \\ x_3 = h_3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{x_1^2}{p_1} - \dfrac{x_2^2}{p_2} = 2h_3 \\ x_3 = h_3 \end{cases} . \tag{14.3}$$

Selle süsteemi uurimine sõltub h_3 märgist. Juhul kui $h_3 > 0$, siis süsteemi (14.3) saab esitada kujul

$$\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{\alpha_1^2} - \dfrac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 1 \\ x_3 = h_3 \end{cases} , \tag{14.4}$$

kus

$$\alpha_1 := \sqrt{2p_1h_3}, \qquad \alpha_2 := \sqrt{2p_2h_3}.$$

Lõikeks on hüperbool, mille reaaltelg on paralleelne reeperiteljega $O\vec{e}_1$ ja imaginaartelg reeperiteljega $O\vec{e}_3$. Hüperbooli keskpunkt on pinna teljel $O\vec{e}_3$ punktis $O'(0, 0, h_3)$.

Juhul kui $h_3 = 0$, siis süsteemi (14.3) saab esitada kujul

$$\begin{cases} \dfrac{x_1}{\sqrt{p_1}} - \dfrac{x_2}{\sqrt{p_2}} = 0 \\ x_3 = h_3 \end{cases} \vee \begin{cases} \dfrac{x_1}{\sqrt{p_1}} + \dfrac{x_2}{\sqrt{p_2}} = 0 \\ x_3 = h_3 \end{cases} .$$

Kumbki süsteem annab lõikeks sirge. Seega reeperitasand $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ lõikab hüperboolset paraboloidi mööda kahte lõikuvat sirget lõikepunktiga pinna tipus $O(0,0,0)$.

Juhul $h_2 < 0$ saame süsteemi (14.3) esitada kujul

$$\begin{cases} -\dfrac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \dfrac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 1 \\ x_3 = h_3 \end{cases}, \tag{14.4}$$

kus

$$\alpha_1 := \sqrt{-2p_1h_3}, \qquad \alpha_2 := \sqrt{-2p_2h_3}.$$

Lõikeks on hüperbool, mille reaaltelg on paralleelne reeperiteljega $O\vec{e}_2$ ja imaginaartelg on paralleelne aga reeperiteljega $O\vec{e}_1$. Hüperbooli tipp asub pinna teljel $O\vec{e}_3$ punktis $O'(0,0,h_3)$.

b) Lõikamisel tasandiga $\pi_2 : x_2 = h_2$, saame lõikepunktide koordinaatide jaoks süsteemi

$$\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{p_1} - \dfrac{x_2^2}{p_2} = 2x_3 \\ x_2 = h_2 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1^2 = 2p_1\Big(x_3 + \dfrac{h_2^2}{2p_2}\Big) \\ x_2 = h_2 \end{cases}. \tag{14.5}$$

Lõikeks tasandil $\pi_2 : x_2 = h_2$ on parabool, mille telg on paralleelne reeperiteljega $O\vec{e}_3$. Kuna süsteemi (14.5) esimeses võrrandis kordaja $2p_1$ on positiivne, siis parabooli harud avanevad reeperitelje $O\vec{e}_3$ suunas. Parabooli tipp on punktis $O'(0, h_2, -\frac{h_2^2}{2p_2})$. Juhul $h_2 = 0$ lõikame reeperitasandiga $x_2 = 0$. Lõikeks sellel tasandil on parabool $x_1^2 = 2p_1x_3, \;\; x_2 = 0$, mille tipp on hüperboolse paraboloidi tipus. $O(0,0,0)$.

c) Lõikamisel tasandiga $\pi_1 : x_1 = h_1$, saame lõikepunktide koordinaatide leidmiseks süsteemi

$$\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{p_1} - \dfrac{x_2^2}{p_2} = 2x_3 \\ x_1 = h_1 \end{cases},$$

millest saame

$$\begin{cases} x_2^2 = -2p_2\Big(x_3 - \dfrac{h_1^2}{2p_1}\Big) \\ x_1 = h_1 \end{cases}. \tag{14.6}$$

Esimesest võrrandist näeme, et tasandil $\pi_1 : x_1 = h_1$ tuleb lõikeks parabool, mille telg on paralleelne reeperiteljega $O\vec{e}_3$. Parabooli harud avanevad reeperiteljele $O\vec{e}_3$ vastupidises suunas, sest süsteemi (14.6) esimeses võrrandis kordaja $-2p_2$ on negatiivne. Parabooli tipp on punktis $O'(h_1, 0, \frac{h_1^2}{2p_1})$.

Teades lõikeid, soovitame lugejal teha elliptilise ja hüperboolse paraboloidi joonised.

15. ELLIPTILINE, HÜPERBOOLNE JA PARABOOLNE SILINDER

Definitsioon 15.1. *Punktihulka* $\{X\}$ *ruumis, mille iga punkti* X *koordinaadid* (x_1, x_2, x_3) *mingis ristreeperis* $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ *rahuldavad võrrandit*

a) $\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 1$, *kus* α_1 *ja* α_2 *on positiivsed konstandid, nimetatakse elliptiliseks silindriks,*

b) $\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} - \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 1$, *kus* α_1 *ja* α_2 *on positiivsed konstandid, nimetatakse hüperboolseks silindriks,*

c) $x_2^2 = 2px_1$, *kus* p *on positiivne konstant, nimetatakse paraboolseks silindriks.*

Silindrite sümmeetriaomadused on ühesugused elliptilisel ja hüperboolsel silindril. Valitud reeperi $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ korral on elliptiline ja hüperboolne silinder sümmeetriline kõigi reeperitasandite $O\vec{e}_1\vec{e}_2$, $O\vec{e}_1\vec{e}_3$ ja $O\vec{e}_2\vec{e}_3$ suhtes. Uudse momendina lisandub, võrreldes näiteks ellipsoidiga, neid sümmeetriatasandeid veelgi. Nimelt on elliptiline ja hüperboolne silinder sümmeetriline veel iga tasandi suhtes, mis on paralleelne reeperitasandiga $O\vec{e}_1\vec{e}_2$, s.o. tasandi $\pi_3 : x_3 = h_3$ suhtes. Nende silindrite sümmeetriatelgedeks on aga kõik reeperiteljed ning lisaks veel sirged antuna võrranditega $x_3 = h_3, x_2 = 0$ ja $x_3 = h_3, x_1 = 0$. Samuti on need silindrid sümmeetrilised reeperitelje $O\vec{e}_3$ iga punkti suhtes.

Paraboolne silinder on sümmeetriline reeperitasandi $O\vec{e}_1\vec{e}_3$ ja tasandite $\pi_3 : x_3 = h_3$ suhtes. Sümmeetriatelgedeks on reeperitelg $O\vec{e}_1$ ja iga sirge $x_2 = 0, x_3 = h_3$.

Loetletud sümmeetriaomaduste tõestuse jätame ka siin lugejale.

Järgnevas lõikame silindreid tasandiga $\pi_3 : x_3 = h_3$. Lõikepunktide koordinaadid rahuldavad vastavalt järgmisi süsteeme

$$a) \begin{cases} \dfrac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \dfrac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 1 \\ x_3 = h_3 \end{cases}, \quad b) \begin{cases} \dfrac{x_1^2}{\alpha_1^2} - \dfrac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 1 \\ x_3 = h_3 \end{cases}, \quad c) \begin{cases} x_2^2 = 2px_1 \\ x_3 = h_3 \end{cases}.$$

Lõigeteks on vastavalt a) ellips, b) hüperbool ja c) parabool. Paneme tähele, et iga h_3 korral ellipsi ja hüperbooli teljed on paraleelsed reeperitelgedega $O\vec{e}_1$ ja $O\vec{e}_2$. Keskpunkt on reeperiteljel $O\vec{e}_3$ punktis $O'(0, 0, h_3)$. Paneme ka tähele seda, et lõigete poolteljed α_1 ja α_2 ei sõltu h_3 väärtusest. Analoogiline on olukord paraboolse silindri korral: lõikeparabooli sümmeetriatelg on paralleelne reeperiteljega $O\vec{e}_1$, tema tipp on reeperiteljel $O\vec{e}_3$ punktis $O'(0,0,h_3)$. Igal tasandil $x_3 = h_3$ on lõikeparaboolid ühesugused, sest fokaalparameeter p ei sõltu konstandi h_3 väärtusest. Saadud informatsiooni arvestades, saaksime silindrid skitseerida. Näiteks elliptilise silindri võime saada järgmiselt: võtame ellipsi ja sirge, mis läbib selle ellipsi keskpunkti ja on risti tema poolt mnääratud tasandiga; elliptilise silindri saame nüüd võetud ellipsi liikumisel paralleelselt iseendaga nii, et tema keskpunkt libiseks mööda valitud sirget. Hüperboolse silindri saame analoogiliselt, ainult liikuma tuleb panna hüperbool. Paraboolse silindri korral libiseb parabool paralleelselt iseendaga, kusjuures tema tipp libiseb mööda võetud sirget.

On veel üks võimalus silindrite skitseerimiseks, mis on võib-olla isegi ülevaatlikum. Selleks tõestame ühe omaduse. Teeme seda elliptilise silindri korral, sest täpselt samamoodi toimub see hüperboolse ja paraboolse silindri korral.

Olgu $P(p_1, p_2, p_3)$ elliptilise silindri vabalt fikseeritud punkt. Sel korral

$$\frac{p_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{p_2^2}{\alpha_2^2} = 1.$$

Moodustame nüüd sirge, mis läbib punkti P ja on sihivektoriga $\vec{e}_3$. Tema parameetrilisteks võrranditeks on

$$x_1 = p_1, \quad x_2 = p_2, \quad x_3 = p_3 + t, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{15.1}$$

Osutub, et sirge(15.1) asub elliptilisel silindril. Tõestuseks on vaja näidata, et selle sirge iga punkti $X(p_1, p_2, p_3 + t)$ koordinaadid rahuldavad elliptilise silindri võrrandit. See on tõepoolest nii, sest

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = \frac{p_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{p_2^2}{\alpha_2^2} = 1.$$

Viimast omadust kasutades, võime silindrid skitseerida ka nii. Elliptilise silindri saamiseks võtame ellipsi, temal mingi punkti P. Läbi tema võtame omakorda sirge, mis on risti valitud ellipsi tasandiga. Järgnevas paneme punkti P mööda ellipsit koos valitud sirgega liikuma. Viimane kirjeldabki elliptilise silindri. Kui ellipsi asemel võtame hüperbooli või parabooli, siis samasugusel moel saame hüperboolse või paraboolse silindri.

Märkus. Siin anname silindrilise pinna mõiste. Selleks võtame ruumis suuvalise kõvera, millist nimetame *juhtjooneks.* Läbi juhtjoone mingi punkti P võtame sirge, mida nimetame *moodustajaks.* Järgnevas paneme mööda juhtjoont punkti P koos moodustajaga liikuma, nõudes, et moodustaja jääks iseendaga paralleelseks. Sirgete poolt tekkivat pinda nimetatakse *silindriliseks pinnaks.* Ilmselt elliptiline, hüperboolne ja paraboolne silinder on silindrilised pinnad.

16. ÜHEKATTELISE HÜPERBOLOIDI SIRGJOONELISED MOODUSTAJAD

Siin me hakkame otsima selliseid sirgeid, mis asuvad pinnal, praegu ühakattelisel hüperboloidil. Mõningate eespool vaadeldud pindade korral selliste sirgete olemasolu on meile juba teada. Näiteks teist järku koonuse ja silindrite korral. Veelgi enam: need pinnad võib saada mingi sirge liikumisel. *Pinna sirgeid, milledest saab pinna moodustada, nimetatakse selle pinna sirgjoonelisteks moodustajateks.* Mõningate eespool vaadeldud pindade korral saab aga öelda, et neil sirgjoonelisi moodustajaid ei ole. Kindlasti ei ole sirgjoonelisi moodustajaid ellipsoidil, sest ta paikneb ruumi lõplikus osas – ristkülikus servadega $2\alpha_1$, $2\alpha_2$ ja $2\alpha_3$. Seetõttu mitte ükski sirge ei saa olla ellipsoidil. Samuti ei ole sirgjoonelisi moodustajaid elliptilisel paraboloidil. Seda näitab järgmine arutelu. Sirgjoonelise moodustaja peame saama pinna lõikamisel sobiva tasandiga. Näiteks elliptilise paraboloidi lõikamisel tasandiga, mis on paralleelne $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ tasandiga, lõikeks on kas ellips, üks punkt või lõige hoopiski puudub. Seega, kui elliptilisel paraboloidil sirgjoonelisi moodustajaid on olemas, siis need ei ole paralleelsed reeperitasandiga $O\vec{e}_1\vec{e}_2$. Samuti ei saa sirgjooneliseks moodustajaks olla mitte ükski sirge, mis ei ole paralleelne märgitud reeperitasandiga $O\vec{e}_1\vec{e}_2$, sest elliptiline paraboloid on sellest tasandist ühel pool, kuid sirge omab sellest tasandist mõlemal pool punkte. Seetõttu ei saa selline sirge olla sirgjooneline moodustaja. Osutub, et sirgjoonelisi moodustajaid ei ole ka kahekattelisel hüperboloidil. Ka siin sirgjooneline moodustaja ei saa olla paralleelne reeperitasandiga $O\vec{e}_1\vec{e}_2$, sest siis on ta saadav lõikamisel tasandiga, mis on paralleelne reeperitasandiga $O\vec{e}_1\vec{e}_2$. Sellel tasandil lõikeks pinnaga on ellips, millele peaks ära mahtuma meie sirgjooneline moodustaja. See on aga võimatu. Kui aga oletada, et sirgjooneline moodustaja ei ole paralleelne reeperitasandiga $O\vec{e}_1\vec{e}_2$, siis ta läbib ka tasandite $x_3 = \alpha_3$ ja $x_3 = -\alpha_3$ vahelist ruumiosa, kus aga ei ole kahekattelisel hüperboloidil punkte. Seega ka sellised sirged ei saa olla sirgjoonelisteks moodustajateks. Järelikult mitte ükski sirge ei saa olla sirgjooneline moodustaja. Eespool vaadeldavatest teist järku pindadest vajavad täiendavat uurimist ühekatteline hüperboloid ja hüperboolne paraboloid.

Teoreem 16.1. *Ühekattelise hüperboloidi igat punkti läbib kaks omavahel lõikuvat sirgjoonelist moodustajat.*

Tõestus. Olgu $M(m_1, m_2, m_3)$ ühekattelise hüperboloidi

$$p : \frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} - \frac{x_3^2}{\alpha_3^2} = 1$$

mistahes punkt. Sel korral

$$\frac{m_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{m_2^2}{\alpha_2^2} - \frac{m_3^2}{\alpha_3^2} = 1. \tag{16.1}$$

Olgu $l(M, \vec{s})$ punkti M läbiv sirge sihivektoriga $\vec{s} = (s_1, s_2, s_3) \neq \vec{0}$. Tema parameetrilisteks võrranditeks on

$$x_1 = m_1 + s_1 t, \quad x_2 = m_2 + s_2 t, \quad x_3 = m_3 + s_3 t, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{16.2}$$

Püüame selgitada, kas saab valida selle sirge sihivektori $\vec{s}$ nii, et sirge $l(M, \vec{s})$ on ühekattelisel hüperboloidil. Siis see sirge on meie pinna sirgjooneline moodustaja. Öeldu võib sõnastada ka samaväärselt nii: leida sirge $l(M, \vec{s})$ sihivektor $\vec{s}$ nii, et selle sirge iga punkt on lõikepunktiks ühekattelise hüperboloidiga. Lõikepunktid, kui ühekattelise hüperboloidi ja sirge $l(M, \vec{s})$ ühised punktid, tuleb leida võrrandisüsteemist

$$\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \dfrac{x_2^2}{\alpha_2^2} - \dfrac{x_3^2}{\alpha_3^2} = 1 \\ x_1 = m_1 + s_1 t \\ x_2 = m_2 + s_2 t \\ x_3 = m_3 + s_3 t \end{cases}.$$

Asendades selle süsteemi kolmest viimasest võrrandist esimesse võrrandisse, saame esimese võrrandi pärast korrastamist t astmete järgi viia kujule

$$\left(\frac{s_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{s_2^2}{\alpha_2^2} - \frac{s_3^2}{\alpha_3^2}\right)t^2 + 2\left(\frac{s_1 m_1}{\alpha_1^2} + \frac{s_2 m_2}{\alpha_2^2} - \frac{s_3 m_3}{\alpha_3^2}\right)t + \left(\frac{m_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{m_2^2}{\alpha_2^2} - \frac{m_3^2}{\alpha_3^2} - 1\right) = 0,$$

mis (16.1) tõttu on samaväärne

$$t\left[\left(\frac{s_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{s_2^2}{\alpha_2^2} - \frac{s_3^2}{\alpha_3^2}\right)t + 2\left(\frac{s_1 m_1}{\alpha_1^2} + \frac{s_2 m_2}{\alpha_2^2} - \frac{s_3 m_3}{\alpha_3^2}\right)\right] = 0. \tag{16.3}$$

Sellest võrrandist saame need t väärtused, mis vastavad lõikepunktidele. Viimaste abil sirge $l(M, \vec{s})$ parameetrilistest võrranditest (16.2) omakorda saame lõikepunktide koordinaadid. Pöördume tagasi võrrandi (16.3) juurde. Tema vasak pool on esitatud kahe teguri korrutisena. Esimese teguri võrrutamine nulliga annab $t = 0$, mis annab lõikepunktiks sirge $l(M, \vec{s})$ punkti M. Teise teguri võrrutamine nulliga annab

$$\left(\frac{s_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{s_2^2}{\alpha_2^2} - \frac{s_3^2}{\alpha_3^2}\right)t + 2\left(\frac{s_1 m_1}{\alpha_1^2} + \frac{s_2 m_2}{\alpha_2^2} - \frac{s_3 m_3}{\alpha_3^2}\right) = 0.$$

See võrrand peab kehtima aga iga $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ korral. See on võimalik, kui

$$\left\{\begin{aligned} \frac{s_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{s_2^2}{\alpha_2^2} - \frac{s_3^2}{\alpha_3^2} &= 0 \\ \frac{s_1 m_1}{\alpha_1^2} + \frac{s_2 m_2}{\alpha_2^2} - \frac{s_3 m_3}{\alpha_3^2} &= 0 \end{aligned}\right. . \tag{16.4}$$

See võrrandisüsteem on sirgjoonelise moodustaja sihivektori koordinaatide leidmiseks. Viimase lahendamine on üsna tülikas, sest esimeses võrrandis on otsitavad s_1, s_2 ja s_3 teisel astmel. Kui sellel võrrandisüsteemil on lahend olemas, siis $s_3 \neq 0$, sest vastasel juhul $s_3 = 0$ korral süsteemi (16.4) esimene võrrand annab

$$\frac{s_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{s_2^2}{\alpha_2^2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad s_1 = s_2 = 0 \quad \Longrightarrow \vec{s} = \vec{0}.$$

See on aga lubamatu, sest sirge sihivektor ei tohi olla nullvektor. See asjaolu, et $s_3 \neq 0$, lubab süsteemi (16.4) lihtsustada. Selleks arvestame, et sirge sihivektor on määratud kordsuse täpsusega. Seega, kui sirge $l(M, \vec{s})$ sihivektoriks on $\vec{s}$, siis sama sirge sihivektoriks on vektori $\vec{s}$ kõrval ka iga vektor $k\vec{s} = (ks_1, ks_2, ks_3)$, kus $k \neq 0$. Võttes $k = \frac{\alpha_3}{s_3}$, saame teha sirge $l(M, \vec{s})$ sihivektori kolmanda koordinaadi võrdseks arvuga α_3. Oletame, et seda on tehtud. Sel korral on sirge jaoks täpselt üks sihivektor. Tehtud kokkuleppe $s_3 = \alpha_3$ kohaselt süsteem (16.4) veidike lihtsustub. Saame

$$\left\{\begin{aligned} \frac{s_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{s_2^2}{\alpha_2^2} &= 1 \\ \frac{s_1 m_1}{\alpha_1^2} + \frac{s_2 m_2}{\alpha_2^2} &= \frac{m_3}{\alpha_3} \end{aligned}\right. .$$

Selle süsteemi esimene võrrand on tõlgendatav ellipsi kanoonilise võrrandina, mistõttu ta saab asendada ellipsi parameetriliste võranditega. Saame

$$\begin{cases} s_1 = \alpha_1 cos\tau \\ s_2 = \alpha_2 sin\tau \\ \dfrac{s_1 m_1}{\alpha_1^2} + \dfrac{s_2 m_2}{\alpha_2^2} = \dfrac{m_3}{\alpha_3} \end{cases}.$$

Asendame kahest esimesest võrrandist s_1 ja s_2 kolmandasse võrrandisse. Saame

$$\frac{m_1}{\alpha_1} cos\tau = \frac{m_3}{\alpha_3} - \frac{m_2}{\alpha_2} sin\tau. \tag{16.5}$$

Tõstame viimase ruutu ja asendame $cos^2\tau = 1 - sin^2\tau$. Me saame $sin\tau$ suhtes järgmise ruutvõrrandi

$$\left(\frac{m_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{m_2^2}{\alpha_2^2}\right) sin^2\tau - 2\frac{m_2 m_3}{\alpha_2 \alpha_3} sin\tau + \left(-\frac{m_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{m_3^2}{\alpha_3^2}\right) = 0,$$

mille lahendamisel saame

$$sin\tau = \frac{\frac{m_2 m_3}{\alpha_2 \alpha_3} \pm \sqrt{\left(\frac{m_2 m_3}{\alpha_2 \alpha_3}\right)^2 + \left(\frac{m_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{m_2^2}{\alpha_2^2}\right)\left(\frac{m_1^2}{\alpha_1^2} - \frac{m_3^2}{\alpha_3^2}\right)}}{\frac{m_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{m_2^2}{\alpha_2^2}} =$$

$$= \frac{\frac{m_2 m_3}{\alpha_2 \alpha_3} \pm \sqrt{\left(\frac{m_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{m_2^2}{\alpha_2^2}\right)\frac{m_1^2}{\alpha_1^2} - \frac{m_1^2}{\alpha_1^2}\frac{m_3^2}{\alpha_3^2}}}{\frac{m_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{m_2^2}{\alpha_2^2}} =$$

$$= \frac{\frac{m_2 m_3}{\alpha_2 \alpha_3} \pm \sqrt{\left(1 + \frac{m_3^2}{\alpha_3^2}\right)\frac{m_1^2}{\alpha_1^2} - \frac{m_1^2}{\alpha_1^2}\frac{m_3^2}{\alpha_3^2}}}{\frac{m_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{m_2^2}{\alpha_2^2}} = \frac{\frac{m_2 m_3}{\alpha_2 \alpha_3} \pm \frac{m_1}{\alpha_1}}{\frac{m_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{m_2^2}{\alpha_2^2}}.$$

Seega

$$sin\tau = \frac{\frac{m_2 m_3}{\alpha_2 \alpha_3} \pm \frac{m_1}{\alpha_1}}{\frac{m_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{m_2^2}{\alpha_2^2}}.$$

Nüüd leiame $cos\tau$. Selleks asendame leitud $sin\tau$ valemisse (16.5). Saame

$$\frac{m_1}{\alpha_1}cos\tau = \frac{m_3}{\alpha_3} - \frac{m_2}{\alpha_2}sin\tau = \frac{m_3}{\alpha_3} - \frac{m_2}{\alpha_2}\frac{\frac{m_2m_3}{\alpha_2\alpha_3} \pm \frac{m_1}{\alpha_1}}{\frac{m_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{m_2^2}{\alpha_2^2}} =$$

$$= \frac{(\frac{m_3}{\alpha_3})(\frac{m_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{m_2^2}{\alpha_2^2}) - \frac{m_2^2}{\alpha_2^2}\frac{m_3}{\alpha_3} \pm \frac{m_1}{\alpha_1}\frac{m_2}{\alpha_2}}{\frac{m_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{m_2^2}{\alpha_2^2}} = \frac{m_1}{\alpha_1}\frac{\frac{m_1m_3}{\alpha_1\alpha_3} \mp \frac{m_2}{\alpha_2}}{\frac{m_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{m_2^2}{\alpha_2^2}}.$$

Seega

$$cos\tau = \frac{\frac{m_1m_3}{\alpha_1\alpha_3} \mp \frac{m_2}{\alpha_2}}{\frac{m_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{m_2^2}{\alpha_2^2}}.$$

Viimaste abil saame sirgjooneliste moodustajete jaoks kaks sihivektorit

$$\vec{s}_1(M) = \left(\alpha_1\frac{\frac{m_1m_3}{\alpha_1\alpha_3} - \frac{m_2}{\alpha_2}}{\frac{m_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{m_2^2}{\alpha_2^2}}, \alpha_2\frac{\frac{m_2m_3}{\alpha_2\alpha_3} + \frac{m_1}{\alpha_1}}{\frac{m_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{m_2^2}{\alpha_2^2}}, \alpha_3\right) \tag{16.6}$$

ja

$$\vec{s}_2(M) = \left(\alpha_1\frac{\frac{m_1m_3}{\alpha_1\alpha_3} + \frac{m_2}{\alpha_2}}{\frac{m_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{m_2^2}{\alpha_2^2}}, \alpha_2\frac{\frac{m_2m_3}{\alpha_2\alpha_3} - \frac{m_1}{\alpha_1}}{\frac{m_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{m_2^2}{\alpha_2^2}}, \alpha_3\right). \tag{16.7}$$

Valemist (16.1) näeme, et punkti M koordinaadid m_1 ja m_2 ei ole korraga nullid. Seega vektorid $\vec{s}_1$ ja $\vec{s}_2$ ei ole ühekattelise hüperboloidi ühegi punkti M korral kollineaarsed, sest nende vektorite kolmandate koordinaatide suhe on 1, kuid esimeste ja teiste koordinaatide suhe samaaegselt ei ole aga 1.

Oleme näidanud, et ühekattelise hüperboloidi igat punkti M läbib kaks omavahel lõikuvat sirgjoonelist moodustajat $l(M, \vec{s}_1(M))$ ja $l(M; \vec{s}_2(M))$.♠

Jagame nüüd ühekattelise hüperboloidi kõigi sirgjooneliste moodustajate hulga kaheks lõikumatuks alamhulgaks nn. *parveks*

$$\mathcal{P}_1 := \{l(M, \vec{s}_1(M)|M \in p\}, \quad \mathcal{P}_2 := \{l(M, \vec{s}_2(M)|M \in p\}.$$

Ühekatteline hüperboloid ladestub kummagi parve sirgjoonelistest moodustajatest:

$$p = \cup_{M\in p}l(M, \vec{s}_1(M)), \quad p = \cup_{M\in p}l(M, \vec{s}_2(M)).$$

Ühekattelise hüperboloidi mistahes sirgjoonelise moodustaja andmiseks parameetriliste võrranditega tuleb temal võtta vabalt mingi punkt M, selle koordinaatide abil leida valemi (16.6) või (16.7) abil tema sihivektori koordinaadid. Need valemid on kahjuks üsna keerulised. Tegelikult saab siin olukorda lihtsustada, valides punkti M sirgjoonelisel moodustajal sobivalt. Nagu nägime on mistahes sirgjoonelise moodustaja korral tema sihivektori kolmas koordinaat $s_3 = \alpha_3$ tõttu nullist erinev. See aga tähendab, et kõik sirgjoonelised moodustajad lõikavad reeperitasandit $O\vec{e}_1\vec{e}_2$, teisiti öelduna kaelellipsit. Seega punktiks M võime võtta sirgjoonelise moodustaja lõikepunkti reeperitasandiga $O\vec{e}_1\vec{e}_2$, teisiti öelduna kaelellipsiga. Sellise punkti kolmas koordinaat m_3 on aga null. Seega $M(m_1, m_2, 0)$. Selle nulli tõttu oluliselt lihtsustuvad sihivektorite (16.6) ja (16.7) avaldised. Seejuures arvestame ka valemit (16.1). Me saame

$$\vec{s}_1(M) = \Big(- \frac{\alpha_1}{\alpha_2} m_2, \frac{\alpha_2}{\alpha_1} m_1, \alpha_3 \Big), \vec{s}_2(M) = \Big(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} m_2, - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} m_1, \alpha_3 \Big).$$

Sõnastame ühekattelise hüperboloidi jaoks kaks teoreemi, mille tõestused suures osas saab anda korraga.

Teoreem 16.2. *Ühekattelise hüperboloidi mistahes kaks sirgjoonelist moodustajat erinevast parvest on kas lõikuvad või on paralleelsed. Viimasel juhul lõikavad nad kaelellipsit meie pinna keskpunkti suhtes sümmeetrilistes punktides.*

Teoreem 16.3. *Ühekattelise hüperboloidi mistahes kaks erinevat sirgjoonelist moodustajat samast parvest on kiivsirged.*

Tõestus. Olgu teoreemi 16.2 korral võetud sirgjoonelised moodustajad $l(M, \vec{s}_1(M)) \in \mathcal{P}_1$ ja $l(N, \vec{s}_2(N)) \in \mathcal{P}_2$ ning teoreemi 16.3 korral võetud kaks erinevat sirgjoonelist moodustajat, näiteks esimesest parvest, seega $l(M, \vec{s}_1(M)), l(N, \vec{s}_1(N)) \in \mathcal{P}_1$. Nagu sai selgitatud, võime eeldada, et ühekattelise hüperboloidi punktid M ja N on kaelellipsil. Järelikult $M(m_1, m_2, 0)$ ja $N(n_1, n_2, 0)$ ning

$$\frac{m_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{m_2^2}{\alpha_2^2} = 1, \quad \frac{n_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{n_2^2}{\alpha_2^2} = 1.$$

Nende sirgjooneliste moodustajate sihivektoriteks on

$$\vec{s}_1(M) = \left(-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}m_2, \frac{\alpha_2}{\alpha_1}m_1, \alpha_3\right),$$
$$\vec{s}_\epsilon(N) = \left(\epsilon\frac{\alpha_1}{\alpha_2}n_2, -\epsilon\frac{\alpha_2}{\alpha_1}n_1, \alpha_3\right).$$

Siin $\epsilon = 1$ vastab teoreemile 16.2 ja $\epsilon = -1$ teoreemile 16.3. Algebra ja geomeetria kursusest teame, et ruumis kaks sirget, praegu sirgjoonelised moodustajad $l(M, \vec{s}_1(M))$ ja $l(N, \vec{s}_\epsilon(N))$, on kiivsirged, kui segakorrutis $\vec{s}_1(M)\vec{s}_\epsilon(N)\overrightarrow{NM}$ on nullist erinev. Vastasel juhul sirged ei ole kiivsirged. Arvutame selle segakorrutise:

$$\vec{s}_1(M)\vec{s}_\epsilon(N)\overrightarrow{NM} = \begin{vmatrix} -\frac{\alpha_1}{\alpha_2}m_2 & \frac{\alpha_2}{\alpha_1}m_1 & \alpha_3 \\ \epsilon\frac{\alpha_1}{\alpha_2}n_2 & -\epsilon\frac{\alpha_2}{\alpha_1}n_1 & \alpha_3 \\ m_1 - n_1 & m_2 - n_2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \alpha_3\left[\begin{vmatrix} \epsilon\frac{\alpha_1}{\alpha_2}n_2 & -\epsilon\frac{\alpha_2}{\alpha_1}n_1 \\ m_1 - n_1 & m_2 - n_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -\frac{\alpha_1}{\alpha_2}m_2 & \frac{\alpha_2}{\alpha_1}m_1 \\ m_1 - n_1 & m_2 - n_2 \end{vmatrix}\right] =$$

$$= \alpha_3\left[(m_2 - n_2)\left(\epsilon\frac{\alpha_1}{\alpha_2}n_2 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}m_2\right) + (m_1 - n_1)\left(\epsilon\frac{\alpha_2}{\alpha_1}n_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}m_1\right)\right] =$$

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\left[\frac{(m_2 - n_2)(m_2 + \epsilon\, n_2)}{\alpha_2^2} + \frac{(m_1 - n_1)(m_1 + \epsilon\, n_1)}{\alpha_1^2}\right].$$

Teoreemi 16.2 korral, nagu öeldud, on $\epsilon = 1$. Viimasest valemist segakorrutise jaoks saame

$$\vec{s}_1(M)\vec{s}_1(N)\overrightarrow{NM} = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\left[\frac{(m_2 - n_2)(m_2 + n_2)}{\alpha_2^2} + \frac{(m_1 - n_1)(m_1 + n_1)}{\alpha_1^2}\right] =$$

$$= \alpha_1\alpha_2\alpha_3\left[\frac{m_2^2 - n_2^2}{\alpha_2^2} + \frac{m_1^2 - n_1^2}{\alpha_1^2}\right] = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\left[\left(\frac{m_2^2}{\alpha_2^2} + \frac{m_1^2}{\alpha_1^2}\right) - \left(\frac{n_2^2}{\alpha_2^2} + \frac{n_1^2}{\alpha_1^2}\right)\right] =$$
$$= \alpha_1\alpha_2\alpha_3(1 - 1) = 0.$$

Seega kaks sirgjoonelist moodustajat erinevatest parvedest ei ole kiivsirged. Nad on kas lõikuvad või paralleelsed. Paralleelsuse korral nende sihivektorid $\vec{s}_1$ ja $\vec{s}_2$ on kollineaarsed, s.t. koordinaatide suhted on võrdsed. Järelikult

$$\frac{-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}m_2}{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}n_2} = \frac{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}m_1}{-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}n_1} = \frac{\alpha_3}{\alpha_3},$$

millest $n_1 = -m_1$ ja $n_2 = -m_2$. Järelikult punktid $M(m_1, m_2, 0)$ ja $N(-m_1, -m_2, 0)$ paiknevad teineteise suhtes sümmeetriliselt ühekattelise hüperboloidi keskpunkti $O(0,0,0)$ suhtes. Teoreem 16.2 on tõestatud.

Teoreemi 16.3 tõestamiseks tuleb võtta $\epsilon = -1$. Sel korral saame

$$\vec{s}_1(M)\vec{s}_1(N)\overrightarrow{NM} = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\left[\frac{(m_2-n_2)^2}{\alpha_2^2} + \frac{(m_1-n_1)^2}{\alpha_1^2}\right].$$

Kuna meil on tegemist sama parve kahe erineva sirgjoonelise moodustajaga, siis punktid M ja N on erinevad. Seetõttu ei ole korraga $m_1 - n_1$ ja $m_2 - n_2$ võrdsed nulliga. Näemegi, et $\vec{s}_1(M)\vec{s}_1(N)\overrightarrow{NM} \neq 0$, mis ütleb, et sama parve kaks erinevat sirgjoonelist moodustajat on kiivsirged. Sellega ka teoreem 16.3 on tõestatud. ♠

17. HÜPERBOOLSE PARABOLOIDI SIRGJOONELISED MOODUSTAJAD

Käeolev paragrahv on oma sisu poolest analoogiline eelmisele. Ka tulemused on üsna sarnased. Nagu eelmises paragrahvis nägime, taandus sirgjoonelise moodustaja leidmine vaadeldava pinna sellise lõikaja leidmisele, mille iga punkt on lõikepunktiks.

Teoreem 17.1. *Hüperboolse paraboloidi igat punkti läbib kaks omavahel lõikuvat sirgjoonelist moodustajat.*

Tõestus. Hüperboolne paraboloid sobivas ristreeperis $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ on antav võrrandiga

$$p : \frac{x_1^2}{p_1} - \frac{x_2^2}{p_2} = 2x_3,$$

kus $p_1 > 0$ ja $p_2 > 0$ on konstandid. Temal võetud punkti $M(m_1, m_2, m_3)$ korral

$$\frac{m_1^2}{p_1} - \frac{m_2^2}{p_2} = 2m_3. \tag{17.1}$$

Sirge, mis läbib punkti M ja on sihivektoriga $\vec{s} = (s_1, s_2, s_3) \neq \vec{0}$, parameetrilisteks võranditeks on

$$x_1 = m_1 + s_1 t, \quad x_2 = m_2 + s_2 t, \quad x_3 = m_3 + s_3 t, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{17.2}$$

Lõikepunktide koordinaadid rahuldavad süsteemi

$$\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{p_1} - \dfrac{x_2^2}{p_2} = 2x_3 \\ x_1 = m_1 + s_1 t \\ x_2 = m_2 + s_2 t \\ x_3 = m_3 + s_3 t \end{cases}.$$

Asendades viimasest kolmest võrrandist esimesse, saame järgmise ruutvõrrandi

$$\left(\frac{s_1^2}{p_1} - \frac{s_2^2}{p_2}\right)t^2 + 2\left(\frac{m_1 s_1}{p_1} - \frac{m_2 s_2}{p_2} - s_3\right)t + \left(\frac{m_1^2}{p_1} - \frac{m_2^2}{p_2} - 2m_3\right) = 0,$$

mille vabaliige on (17.1) tõttu võrdne nulliga. Seega

$$t\left[\left(\frac{s_1^2}{p_1}-\frac{s_2^2}{p_2}\right)t+2\left(\frac{m_1s_1}{p_1}-\frac{m_2s_2}{p_2}-s_3\right)\right]=0. \tag{17.3}$$

Sellest võrrandist saame need t väärtused, mis vastavad lõikepunktidele. Viimaste abil sirge $l(M,\vec{s})$ parameetrilistest võrranditest (17.2) omakorda saame lõikepunktide koordinaadid. Pöördume tagasi võrrandi (17.3) juurde. Tema vasak pool on esitatud kahe teguri korrutisena. Esimese teguri võrrutamine nulliga annb $t=0$, mis annab lõikepunktiks sirge $l(M,\vec{s})$ punkti M. Teise teguri võrrutamine nulliga annab

$$\left(\frac{s_1^2}{p_1}-\frac{s_2^2}{p_2}\right)t+2\left(\frac{m_1s_1}{p_1}-\frac{m_2s_2}{p_2}-s_3\right).$$

See võrrand peab kehtima aga iga $t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ korral. See on võimalik, kui

$$\frac{s_1^2}{p_1}-\frac{s_2^2}{p_2}=0,\qquad \frac{m_1s_1}{p_1}-\frac{m_2s_2}{p_2}-s_3=0. \tag{17.4}$$

Esimesest võrrandist saame

$$\left(\frac{s_1}{\sqrt{p_1}}-\frac{s_2}{\sqrt{p_2}}\right)\left(\frac{s_1}{\sqrt{p_1}}+\frac{s_2}{\sqrt{p_2}}\right)=0,$$

millest

$$\frac{s_1}{\sqrt{p_1}}\mp\frac{s_2}{\sqrt{p_2}}=0 \quad\Longrightarrow\quad s_2=\pm\sqrt{\frac{p_2}{p_1}}s_1.$$

Paneme tähele, et $s_1\neq 0$. Kui peaks olema $s_1=0$, siis viimase tõttu $s_2=0$ ning ning (17.4) teine võrrand lisab $s_3=0$. Seega sirge sihivektoriks tuleb nullvektor, mis aga on lubamatu. Kuna sirge sihivektor määratakse kordsuse täpsusega, siis võime võtta $s_1=\sqrt{p_1}$. Sel korral

$$s_1=\sqrt{p_1}\quad\Longrightarrow\quad s_2=\pm\sqrt{p_2}\quad s_3=\frac{m_1}{\sqrt{p_1}}\mp\frac{m_2}{\sqrt{p_2}}.$$

Saame kaks sihivektorit

$$\vec{s}_1(M)=\left(\sqrt{p_1},\sqrt{p_2},\frac{m_1}{\sqrt{p_1}}-\frac{m_2}{\sqrt{p_2}}\right),$$
$$\vec{s}_2(M)=\left(\sqrt{p_1},-\sqrt{p_2},\frac{m_1}{\sqrt{p_1}}+\frac{m_2}{\sqrt{p_2}}\right).$$

Kuna sihivektori kordsus sai fikseeritud, siis sirge ja tema sihivektori vahel on üksühene vastavus. Seega punkti M läbib kaks sirgjoonelist moodustajat. Nad on lõikuvad, sest sihivektorid on mittekollineaarsed. Teoreem on tõestatud. ♠

Jagame nüüd hüperboolse paraboloidi kõigi sirgjooneliste moodustajate hulga kaheks lõikumatuks alamhulgaks nn. *parveks*

$$\mathcal{P}_1 := \{l(M, \vec{s}_1(M) | M \in p\}, \quad \mathcal{P}_2 := \{l(M, \vec{s}_2(M) | M \in p\}.$$

Hüperboolne paraboloid ladestub kummagi parve sirgjoonelistest moodustajatest:

$$p = \cup_{M \in p} l(M, \vec{s}_1(M)), \quad p = \cup_{M \in p} l(M, \vec{s}_2(M)).$$

Huvitav on märgata, et esimese parve iga sirgjooneline moodustaja on paraleelne tasandiga

$$\pi_1 : \frac{x_1}{\sqrt{p_1}} - \frac{x_2}{\sqrt{p_2}} = 0$$

ja teise parve iga sirgjooneline moodustaja aga paralleelne tasandiga

$$\pi_2 : \frac{x_1}{\sqrt{p_1}} + \frac{x_2}{\sqrt{p_2}} = 0.$$

Selleks on küllaldane veenduda, et sirgjoonelise moodustaja sihivektor on aga risti vastava tasandi normaalvektoriga

$$\vec{n}_1(M) = \left(\frac{1}{\sqrt{p_1}}, -\frac{1}{\sqrt{p_2}}, 0\right), \quad \vec{n}_2(M) = \left(\frac{1}{\sqrt{p_1}}, \frac{1}{\sqrt{p_2}}, 0\right),$$

s.o. skalaarkorrutised $\langle \vec{s}_1(M), \vec{n}_1(M) \rangle$ ja $\langle \vec{s}_2(M), \vec{n}_2(M) \rangle$ on nullid. See on aga ilmne.

Teoreem 17.2. *Hüperboolse paraboloidi iga kaks sirgjoonelist moodustajat erinevatest parvedest lõikuvad.*

Tõestus. Olgu $l(M, \vec{s}_1(M))$ ja $l(N, \vec{s}_2(N))$ erinevate parvede sirgjooneliste moodustajate paar. Nagu eelmises paragrahvis sai selgitatud, ei ole nad kiivsirged, kui segakorrutis $\vec{s}_1(M)\vec{s}_2(N)\overrightarrow{NM}$ on null. Rehkenduste lihtsustamiseks valime punktid M ja N sobivalt sirgjoonelistel moodustajatel. Kõik sirgjoonelised moodustajad $s_2 = \pm\sqrt{p_2} \neq 0$ tõttu lõikavad reeperitasandit $O\vec{e}_1\vec{e}_3$. Seega me võime punktideks M ja N võtta sirgjoonelise moodustaja lõikepunkti sellel tasandil. Seega $M(m_1, 0, m_3)$ ja $N(n_1, 0, n_3)$. Lisaks sellele nende koordinaadid rahuldavad pinna võrrandit: $m_1^2 = 2p_1m_3$ ja $n_1^2 = 2p_1n_3$. Samuti täpsustavad sirgjooneliste moodustajate sihivektorid, saades

$$\vec{s}_1(M) = \left(\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \frac{m_1}{\sqrt{p_1}}\right), \quad \vec{s}_2(N) = \left(\sqrt{p_1}, -\sqrt{p_2}, \frac{n_1}{\sqrt{p_1}}\right).$$

Kuna

$$\vec{s}_1(M)\vec{s}_2(N)\overrightarrow{NM} = \begin{vmatrix} \sqrt{p_1} & \sqrt{p_2} & \frac{m_1}{\sqrt{p_1}} \\ \sqrt{p_1} & -\sqrt{p_2} & \frac{n_1}{\sqrt{p_1}} \\ m_1 - n_1 & 0 & m_3 - n_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2\sqrt{p_1} & 0 & \frac{m_1}{\sqrt{p_1}} + \frac{n_1}{\sqrt{p_1}} \\ \sqrt{p_1} & -\sqrt{p_2} & \frac{n_1}{\sqrt{p_1}} \\ m_1 - n_1 & 0 & m_3 - n_3 \end{vmatrix} = -\sqrt{p_2} \begin{vmatrix} 2\sqrt{p_1} & \frac{m_1}{\sqrt{p_1}} + \frac{n_1}{\sqrt{p_1}} \\ m_1 - n_1 & m_3 - n_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \sqrt{\frac{p_2}{p_1}}\left[(m_1^2 - n_1^2) - 2p_1(m_3 - n_3)\right] = \sqrt{\frac{p_2}{p_1}}\left[(m_1^2 - 2p_1m_3) - (n_1^2 - 2p_1n_3)\right] = 0,$$

Siis sirgjooneltsed moodustajad $l(M, \vec{s}_1(M))$ ja $l(N, \vec{s}_2(N))$ ei ole kiivsirged. Seega nad on kas lõikuvad või paralleelsed. Kuna nende sihivektorid ei ole kollineaarsed, siis nad on lõikuvad. Teoreem on tõestatud. ♠

Teoreem 17.3. *Hüperboolse paraboloidi iga kaks erinevat sirgjoonelist moodustajat samast parvedest on kiivsirged.*

Tõestus. Kaks erinevat sirgjoonelist moodustajat $l(M, \vec{s}_\epsilon(M)))$ ja $l(N, \vec{s}_\epsilon(N))$ on võetud $\epsilon = 1$ korral esimesest parvest ja $\epsilon = 2$ korral teisest parvest. Nende moodustajate punktid M ja N asugu ka siin reeperitasandil $O\vec{e}_1\vec{e}_2$. Seetõttu $M(m_1, 0, m_3)$ ja $N(n_1, 0, n_3)$. Et tegemist on pinna punktidega, siis $m_1^2 = 2p_1m_3$ ja $n_1^2 = 2p_1n_2$. Arvestame veel, et sirgjoonelised moodustajad on erinevad, siis teoreemi 17.1 tõttu punktid M ja N on ka erinevad, millest tuleneb $m_1 \neq n_1$. Nende sirgete sihivektoriteks on

$$\vec{s}_\epsilon(M) = \left(\sqrt{p_1}, \epsilon\sqrt{p_2}, \frac{m_1}{\sqrt{p_1}}\right), \quad \vec{s}_\epsilon(N) = \left(\sqrt{p_1}, \epsilon\sqrt{p_2}, \frac{n_1}{\sqrt{p_1}}\right).$$

Arvutame nüüd nõutava segakorrutise:

$$\vec{s}_\epsilon(M)\vec{s}_\epsilon(N)\overrightarrow{NM} = \begin{vmatrix} \sqrt{p_1} & \epsilon\sqrt{p_2} & \frac{m_1}{\sqrt{p_1}} \\ \sqrt{p_1} & \epsilon\sqrt{p_2} & \frac{n_1}{\sqrt{p_1}} \\ m_1 - n_1 & 0 & m_3 - n_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{m_1}{\sqrt{p_1}} - \frac{n_1}{\sqrt{p_1}} \\ \sqrt{p_1} & \epsilon\sqrt{p_2} & \frac{n_1}{\sqrt{p_1}} \\ m_1 - n_1 & 0 & m_3 - n_3 \end{vmatrix} = -\epsilon\sqrt{\frac{p_2}{p_1}}(m_1 - n_1)^2 \neq 0,$$

sest $m_1 \neq n_1$. Seega vaadeldav sirgjooneliste moodustajate paar koosneb kiivsirgetest. Teoreem on tõestatud. ♠.