Aivo Parring

GEOMEETRIA I

Tartu 2003

SISSEJUHATUS

Antud aine on "Algebra ja geomeetria" kursuse geomeetria osa jätk. Ta on ette nähtud matemaatika eriala üliõpilastele. Esimeses peatükis on vaatluse all teist järku joonte üldteooria. Siin klassifitseeritakse teist järku jooned ja antakse valemid nende tüübi määramiseks invariantide abil. Teises peatükis uuritakse teist järku pindade − ellipsoidi, teist järku koonuse, ühe- ja kahekattelise hüperboloidi, elliptilise ja hüperboolse paraboloidi ning elliptilise, hüperboolse ja paraboolse silindri − ehitust, lähtudes kanoonilisest võrrandist. Viimases, kolmandas, peatükis käsitletakse teist järku pindade üldteooriat.

Alljärgnevas kasutame õppevahendi "Algebra ja geomeetria" tähiseid.

SISUKORD

I. Teist järku joonte üldteooria

II. Teist järku pindade ehituse uurimine kanoonilise võrrandi abil

III. Teist järku pindade üldteooria

I. TEIST JÄRKU JOONTE ÜLDTEOORIA

1. TEIST JÄRKU JOONE MÕISTE. TEMA VÕRRANDIS KORDAJATE TEISENEMISE VALEMID ÜLEMINEKUL UUELE REEPERILE

Tähistame järgnevas tasandit E_2 ja tema poolt tekitatud kahemõõtmelist vektorruumi $\mathbf{E}_2$ abil. Olgu $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ mistahes reeper. Siin reeperi alguspunkt O on tasandi E_2 punkt ja $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ vektorruumi $\mathbf{E}_2$ baas. Tasandi igal punktil X tekivad nüüd koordinaadid, mida tähistatame x_1 ja x_2 abil, lühidalt $X(x_1, x_2)$. Viimased on punkti X kohavektori $\overrightarrow{OX}$ koordinaadid reeperisse kuuluva baasi suhtes.

Definitsioon 1.1. *Tasandi* E_2 *punktihulka* $\{X(x_1, x_2)\}$, *mille iga punkti* $X(x_1, x_2)$ *koordinaadid mingi reeperi* $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ *korral rahuldavad võrrandit*

$$\gamma: \quad a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + a = 0, \tag{1.1}$$

kus kordajad a_{11}, a_{12} *ja* a_{22} *ei ole korraga võrdsed nulliga, nimetatakse teist järku jooneks* γ.

Juhime tähelepanu sellele, et selles definitsioonis reeper ei pea olema ilmtingimata ristreeper, vaatamata sellele, et järgnevas me sageli kasutame just ristreeperit. Võrrandi (1.1) vasak pool

$$f(x_1, x_2) := a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + a \tag{1.2}$$

on spetsiifilise ehitusega kahemuutuja funktsioon. Ta koosneb liidetavatest ehitusega $\alpha x_1^s x_2^t$. See on tõepoolest nii, sest funktsiooni (1.2) iga liidetava võime kirjutada kujul

$$\begin{array}{lll} a_{11}x_1^2 = a_{11}x_1^2x_2^0, & 2a_{12}x_1x_2 = 2a_{12}x_1^1x_2^1, & a_{22}x_2^2 = a_{22}x_1^0x_2^2, \\ 2a_1x_1 = 2a_1x_1^1x_2^0, & 2a_2x_2 = 2a_2x_1^0x_2^1, & a = ax_1^0x_2^0. \end{array}$$

Siin iga *liidetava astmeks nimetatakse temas olevate muutujate* x_1 *ja* x_2 *astmenäitajate summat.* Võrrandis (1.1) on kolm esimest liidetavat teise astme liidetavad, kaks järgmist esimese astme liidetavad, viimane aga nullastme liidetav. See jutt on õige, kui liidetavas esinev kordaja ei ole võrdne nulliga. *Võrrandi* (1.1) *astmeks nimetatakse tema liidetavate kõrgemat astet.* Seega võrrand (1.1) on teise astme võrrand. Teist järku joon antakse seega teise astme võrrandi abil. Võrrandis (1.1) osasid

$$f_r(x_1, x_2) := a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2, \quad 2a_1x_1 + 2a_2x_2$$

nimetatakse vastavalt *ruutosaks* ja *lineaarosaks.* Liidetavat a nimetatakse võrrandi (1.1) *vabaliikmeks.* Kui võrrandis (1.1) siiski peaks olema $a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0$, kuid kordajad a_1 ja a_2 ei ole korraga võrdsed nulliga, siis saame võrrandi

$$2a_1x_1 + 2a_2x_2 + a = 0,$$

mis on tasandil asuva sirge üldvõrrand ning seega ei ole enam teist järku joone võrrand. Sirget on aga juba vaadeldud "Algebra ja geomeetria" kursuses.

Umbes sadakond aastat tagasi tähistati punkti koordinaate x_1 ja x_2 asemel vastavalt x ja y abil. Kordajaid võrrandis (1.1) tähistati aga vastavalt A, B, C, D, E ja F abil. Nimetatud arhailiste tähiste korral võrrand (1.1) saab kuju

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Võrrandis (1.1) kolmel liidetaval esineb kordaja 2 , mille olemasolu on esmapilgul arusaamatu. Tegelikult on neist lihtne lahti saada, tähistades $\overline{a}_{12} = 2a_{12}$, $\overline{a}_1 = 2a_1$ ja $\overline{a}_2 = 2a_2$ olemegi kordajast 2 lahti saanud. Põhjuseks, miks kordajast 2 lahti saada ei taheta, on asjaolu, et vastasel juhul paljudes valemites tekib kordaja $\frac{1}{2}$. Valemi (1.1) kompaktsemaks kirjapanekuks summa märgi abil toome sisse täiendava kordaja a_{21}, loeme ta võrdseks kordajaga a_{12}. Viimase abil saame kirjutada

$$2a_{12}x_1x_2 = a_{12}x_1x_2 + a_{12}x_1x_2 = a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_2x_1.$$

Võrrandi (1.1) saame nüüd kirja panna järgmiselt

$$\gamma : \quad \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}x_ix_j + 2\sum_{i=1}^{2} a_ix_i + a = 0.$$

Teist järku joone võrrand võimaldab kasutusele võtta teist järku maatriksi

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

mis $a_{21} = a_{12}$ tõttu on sümmeetriline maatriks, s.o. $A^\top = A$. See maatriks ei ole nullmaatriks, sest a_{11}, a_{12} ja a_{22} ei ole korraga võrdsed nulliga. Kasutades õppeaines "Algebra I" antud maatriksi astaku mõistet, saame öelda, et maatriksi A astak ei ole null, vaid on kas üks või kaks. Esimesel juhul $|A| = 0$ ja teisel juhul $|A| \neq 0$.

Kasutust leiab veel järgmine kolmandat järku maatriks

$$\overline{A} := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a \end{pmatrix}.$$

Selle maatriksi moodustamisel on kasutatud teist järku joone võrrandi (1.1) kõiki kordajaid. Lisaks sellele sisaldab ta "loodenurgas" maatriksit A.

Lõpuks selgitame, kuidas teist järku joone võrrandis kordajad teisenevad üleminekul uuele reeperile. Meenutame, et üleminekul ühelt nn. vanalt reeperilt $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ teisele nn. uuele reeperile $\{O'; \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2\}$ punkti X vanad koordinaadid (x_1, x_2) teisenevad uuteks koordinaatideks (x'_1, x'_2) valemite

$$\begin{aligned} x_1 &= c_{11}x'_1 + c_{12}x'_2 + c_1, \\ x_2 &= c_{21}x'_1 + c_{22}x'_2 + c_2 \end{aligned} \tag{1.3}$$

abil. Nendes valemites esinevad kordajad kirjeldavad uut reeperit vana reeperi suhtes; täpsemalt

$$\overrightarrow{OO'} = c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2$$

ja

$$\vec{e}\,'_1 = c_{11}\vec{e}_1 + c_{21}\vec{e}_2,$$

$$\vec{e}\,'_2 = c_{12}\vec{e}_1 + c_{22}\vec{e}_2.$$

"Algebra I" kohaselt on baasiteisenduse maatriks

$$C := \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

regulaarne, s.o. $|C| \neq 0$. Joone võrrandi (1.1) saamiseks uutes koordinaatides, tuleb temasse teha asendus valemist (1.3), ja viies saadud avaldise x'_1 ja x'_2 suhtes kujule (1.1), saamegi kätte joone võrrandi uued kordajad. Kuna saadavad valemid on suhteliselt keerulised, jaotame selle protseduuri lihtsamateks sammudeks. Reeperiteisendust

$$\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\} \longrightarrow \{O'; \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2\}$$

saab realiseerida kahes etapis. Esimesel etapil muudame ainult alguspunkti ja teisel etapil baasiosa, s.o.

$$\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\} \longrightarrow \{O'; \vec{e}_1, \vec{e}_2\} \longrightarrow \{O'; \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2\}.$$

Tähistame punkti X koordinaate vahepealses reeperis $\{O'; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ praegu $\overline{x}_1$ ja $\overline{x}_2$ abil, s.o. $X(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$. Me saame

$$\begin{aligned} x_1 &= \overline{x}_1 + c_1, \\ x_2 &= \overline{x}_2 + c_2 \end{aligned} \tag{1.4}$$

ja

$$\begin{aligned} \overline{x}_1 &= c_{11}x'_1 + c_{12}x'_2, \\ \overline{x}_2 &= c_{21}x'_1 + c_{22}x'_2. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Asendades viimasest valemist (1.5) valemisse (1.4), saamegi valemi (1.3). Nimetatud protseduuri võime sooritada ka vastupidises järjekorras. Esmalt muudame reeperis baasiosa ja siis alguspunkti, s.o.

$$\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\} \longrightarrow \{O; \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2\} \longrightarrow \{O'; \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2\}.$$

Saame

$$\begin{aligned} x_1 &= c_{11}\overline{x}_1 + c_{12}\overline{x}_2, \\ x_2 &= c_{21}\overline{x}_1 + c_{22}\overline{x}_2 \end{aligned} \tag{1.6}$$

ja

$$\begin{aligned} \overline{x}_1 &= x'_1 + c'_1, \\ \overline{x}_2 &= x'_2 + c'_2. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Siin c'_1 ja c'_2 on reeperi alguspunkti O' koordinaadid baasi $\{\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2\}$ suhtes. Seega

$$\overrightarrow{OO'} = c'_1\vec{e}\,'_1 + c'_2\vec{e}\,'_2.$$

Asendades valemist (1.7) valemisse (1.6), peame saama valemi (1.3). See on tõepoolest nii, sest

$$x_1 = c_{11}(x'_1 + c'_1) + c_{12}(x'_2 + c'_2),$$
$$x_2 = c_{21}(x'_1 + c'_1) + c_{22}(x'_2 + c'_2),$$

millest

$$x_1 = c_{11}x'_1 + c_{12}x'_2 + (c_{11}c'_1 + c_{12}c'_2),$$
$$x_2 = c_{21}x'_1 + c_{22}x'_2 + (c_{21}c'_1 + c_{22}c'_2).$$

Viimane on tegelikult valem (1.3), sest (1.3) abil näeme

$$c_{11}c'_1 + c_{12}c'_2 = c_1,$$
$$c_{21}c'_1 + c_{22}c'_2 = c_2.$$

Nüüd oleme lõpetanud eeltöö, et leida joone võrrandis (1.1) kordajate teisenemisvalemid.

Muudame reeperis esmalt alguspunkti. Tähistame punkti X vanu ja uusi koordinaate vastavalt x_1, x_2 ja x'_1, x'_2 abil. Nad on seotud valemitega

$$x_1 = x'_1 + c_1, \quad x_2 = x'_2 + c_2.$$

Asendades siit teist järku joone võrrandisse (1.1), saame

$$a_{11}(x'_1 + c_1)^2 + 2a_{12}(x'_1 + c_1)(x'_2 + c_2) + a_{22}(x'_2 + c_2)^2 +$$

$$+ 2a_1(x'_1 + c_1) + 2a_2(x'_2 + c_2) + a = 0,$$

millest

$$a'_{11}(x'_1)^2 + 2a'_{12}x'_1x'_2 + a'_{22}(x'_2)^2 + 2a'_1x'_1 + 2a'_2x'_2 + a' = 0,$$

kus

$$\begin{gathered} a'_{11} = a_{11}, \quad a'_{12} = a_{12}, \quad a'_{22} = a_{22}, \\ a'_1 = a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + a_1, \quad a'_2 = a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + a_2, \\ a' = a_{11}c_1^2 + 2a_{12}c_1c_2 + a_{22}c_2^2 + 2a_1c_1 + 2a_2c_2 + a. \end{gathered} \tag{1.8}$$

Näeme, et nii-öelda lükke korral teist järku joone võrrandi ruutosa kordajad ei muutu üldse. Ülejäänud kordajad aga teisenevad. Seejuures need teisenemisvalemid on kergesti meelde jäetavad. Nimelt

$$a'_1 = \frac{1}{2}\frac{d}{dx_1}f_r(x_1,x_2)\Big|_{(c_1,c_2)}, \quad a'_2 = \frac{1}{2}\frac{d}{dx_2}f_r(x_1,x_2)\Big|_{(c_1,c_2)}, \quad a' = f(c_1,c_2).$$

Kui me reeperis alguspunkti ei muuda, aga muudame baasi osa ning tähistame vanu ja uusi koordinaate vastavalt x_1, x_2 ja x'_1, x'_2 abil, siis

$$\begin{aligned} x_1 &= c_{11}x'_1 + c_{12}x'_2, \\ x_2 &= c_{21}x'_1 + c_{22}x'_2. \end{aligned}$$

Siit asendame teist järku joone võrrandisse. Saame

$$a_{11}(c_{11}x'_1 + c_{12}x'_2)^2 + 2a_{12}(c_{11}x'_1 + c_{12}x'_2)(c_{21}x'_1 + c_{22}x'_2)+$$

$$+a_{22}(c_{21}x'_1 + c_{22}x'_2)^2 + 2a_1(c_{11}x'_1 + c_{12}x'_2) + 2a_2(c_{21}x'_1 + c_{22}x'_2) + a = 0,$$

millest pärast korrastamist saame

$$a'_{11}(x'_1)^2 + 2a'_{12}x'_1x'_2 + a'_{22}(x'_2)^2 + 2a'_1x'_1 + 2a'_2x'_2 + a' = 0.$$

Siin

$$\begin{aligned} a'_{11} &= c_{11}^2a_{11} + 2c_{11}c_{21}a_{12} + c_{21}^2a_{22}, \\ a'_{12} &= c_{11}c_{12}a_{11} + (c_{11}c_{22} + c_{21}c_{12})a_{12} + c_{21}c_{22}a_{22}, \\ a'_{22} &= c_{12}^2a_{11} + 2c_{12}c_{22}a_{12} + c_{22}^2a_{22} \end{aligned} \tag{1.9}$$

ja

$$a'_1 = c_{11}a_1 + c_{21}a_2, \quad a'_2 = c_{12}a_1 + c_{22}a_2, \quad a' = a. \tag{1.10}$$

Paneme tähele, et vabaliige a ei teisenegi. Ruutosa kordajate teisenemisvalemid (1.9), mis on üsna keerulised, saab maatriksite abil lihtsamalt kirja panna. Tähistame

$$A' = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{pmatrix}.$$

Valemid (1.9) saame kirja panna järgmiselt:

$$A' = C^{\top}AC. \tag{1.11}$$

Veelgi enam. Isegi kõigi kordajate teisenemisvalemid (1.9) ja (1.10) saab kirja panna maatrikskujul. Tähistame

$$\overline{A}\,' := \begin{pmatrix} a\,'_{11} & a\,'_{12} & a'_1 \\ a\,'_{21} & a\,'_{22} & a\,'_2 \\ a\,'_1 & a'_2 & a\,' \end{pmatrix}, \quad \overline{C} := \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (1.12).$$

Kerge on kontrollida, et

$$\overline{A}\,' = \overline{C}^{\top}\overline{A}\;\overline{C}. \tag{1.13}$$

Leiame valemid (1.9) ja (1.10) kolmel erijuhul. Esimesel juhul vaatleme olukorda, kui reeperis vahetame baasivektorid ära omavahel. Sel korral

$$\vec{e}\,'_1 = \vec{e}_2, \quad \vec{e}\,'_2 = \vec{e}_1,$$

mistõttu

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Valemid (1.9) ja (1.10) saavad kuju

$$\begin{matrix} a\,'_{11} = a_{22}, & a\,'_{12} = a_{12}, & a\,'_{22} = a_{11}, \\ a\,'_1 = a_2, & a\,'_2 = a_1, & a\,' = a_. \end{matrix} \tag{1.14}$$

Teisel juhul vaatleme olukorda, kui me läheme ristreeperilt üle ristreeperile pöörde abil muutmata tema alguspunkti. Sel korral "Algebra ja geomeetria" kursuse §17 kohaselt

$$C = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}. \tag{1.15}$$

Seega

$$c_{11} = \cos t, \quad c_{12} = -\sin t, \quad c_{21} = \cos t, \quad c_{22} = \cos t.$$

Asendades siit valemitesse (1.9) ja (1.10), saame

$$\begin{aligned} a'_{11} &= \cos^2 t\ a_{11} + 2\sin t\cos t\ a_{12} + \sin^2 t\ a_{22}, \\ a'_{12} &= -\frac{1}{2}\sin(2t)(a_{11} - a_{22}) + \cos(2t)\ a_{12}, \\ a'_{22} &= \sin^2 t\ a_{11} - 2\sin t\cos t\ a_{12} + \cos^2 t\ a_{22} \end{aligned} \tag{1.16}$$

ja

$$a'_1 = \cos t \; a_1 + \sin t \; a_2, \quad a'_2 = -\sin t \; a_1 + \cos t \; a_2, \quad a' = a. \tag{1.17}$$

Ka kolmandal juhul läheme ristreeperilt üle ristreeperile nn. peegelduse abil, s.o. ühe baasivektoritest asendame tema vastandvektoriga. Siin on kaks võimalust

$$\vec{e}'_1 = \pm\vec{e}_1, \quad \vec{e}'_2 = \mp\vec{e}_2.$$

Seega

$$C = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ o & \mp 1 \end{pmatrix}$$

ehk

$$c_{11} = \pm 1, \quad c_{12} = 0, \quad c_{21} = 0, \quad c_{22} = \mp 1.$$

Valemid (1.9) ja (1.10) saavad kuju:

$$\begin{aligned} a'_{11} &= a_{11}, \quad a'_{12} = -a_{12}, \quad a'_{22} = a_{22}, \\ a'_1 &= \pm a_1, \quad a'_2 = \mp a_2, \qquad a' = a. \end{aligned} \tag{1.18}$$

2. TEIST JÄRKU JOONE TÜÜBI MÄÄRAMINE KANOONILISE VÕRRANDI LEIDMISE TEEL

Olgu antud teist järku joon võrrandiga

$$\gamma : a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + a = 0 \tag{2.1}$$

mingi ristreeperi $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ suhtes. Üle minnes uuele reeperile, nagu nägime, selles võrrandis kordajad teisenevad. Me otsime järgnevas sellist ristreeperit, mille suhtes teist järku joone võrrand on *võimalikult lihtsa kujuga, nn. kanoonilise kujuga.*

Lause 2.1. *Leidub ristreeperi sobiv pööre ümber alguspunkti, et kordaja* a_{12} *teist järku joone võrrandis* (2.1) *muutub nulliks.*

Tõestus. Juhul kui algselt juba $a_{12} = 0$, siis otsitav pöördenurk on $t = 0$. Lause on seega tõestatud. Vastasel juhul $a_{12} \neq 0$. Me peame leidma sobiva pöördenurga nii, et $a'_{12} = 0$, s.o. valemi (1.16) kohaselt on vaja näidata, et võrrandil

$$-\frac{1}{2}\sin(2t)(a_{11} - a_{22}) + \cos(2t)\ a_{12} = 0$$

ehk

$$\cot(2t) = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}$$

on lahend olemas. Kootangensi määramispiirkonda silmas pidades, on viimasel tõepoolest lahend olemas. Seega sobiv pöördenurk leidub. ♠

Sooritades ülemineku sellele ristreeperile, saab teist järku joone võrrand (2.1) kuju

$$\overline{a}_{11}\overline{x}_1^2 + \overline{a}_{22}\overline{x}_2^2 + 2\overline{a}_1\overline{x}_1 + 2\overline{a}_2\overline{x}_2 + a = 0. \tag{2.2}$$

Nagu näeme on uusi kordajaid ja koordinaate tähistatud, kattes vanad kriipsuga. Valemist (1.17) näeme, et kordaja a ei teisene.

Edasine arutelu hargneb, lähtudes teist järku joone uuest võrrandist (2.2). Kõik meie edasised sammud peavad olema sellised, et kordaja

$\overline{a}_{12} = 0$ säiluks. Järgnev arutelu jaguneb alajuhtudeks olenevalt sellest, kas üks või teine kordaja võrrandis (2.2) või sellest tuletatud võrrandis on null või erineb sellest.

I. Olgu $\overline{a}_{11} \neq 0$ ja $\overline{a}_{22} \neq 0$. Teist järku joone võrrandis (2.2) saab $\overline{x}_1$ ja $\overline{x}_2$ suhtes välja eraldada täisruudud. Saame

$$\overline{a}_{11}\Big(\overline{x}_1 + \frac{\overline{a}_1}{\overline{a}_{11}}\Big)^2 + \overline{a}_{22}\Big(\overline{x}_2 + \frac{\overline{a}_2}{\overline{a}_{22}}\Big)^2 + \Big(a - \frac{\overline{a}_1^2}{\overline{a}_{11}} - \frac{\overline{a}_2^2}{\overline{a}_{22}}\Big) = 0.$$

Tähistame uut vabaliiget

$$\overline{a} := -\Big(a - \frac{\overline{a}_1^2}{\overline{a}_{11}} - \frac{\overline{a}_2^2}{\overline{a}_{22}}\Big)$$

abil. Saame

$$\overline{a}_{11}\Big(\overline{x}_1 + \frac{\overline{a}_1}{\overline{a}_{11}}\Big)^2 + \overline{a}_{22}\Big(\overline{x}_2 + \frac{\overline{a}_2}{\overline{a}_{22}}\Big)^2 - \overline{a} = 0.$$

Nüüd viime reeperi alguspunkti punkti $O'(-\frac{\overline{a}_1}{\overline{a}_{11}}, -\frac{\overline{a}_2}{\overline{a}_{22}})$. Sel korral ruutosa kordajad ei muutu, nagu näeme valemitest (1.8). Tähistame punkti X uusi koordinaate $\tilde{x}_1$ ja $\tilde{x}_2$ abil. Me saame

$$\overline{a}_{11}\tilde{x}_1^2 + \overline{a}_{22}\tilde{x}_2^2 = \overline{a}. \tag{2.3}$$

Selle võrrandi uurimise jagame kaheks olenevalt sellest kas $\overline{a}$ on nullist erinev või võrdub nulliga.

I_1. Olgu $\overline{a} \neq 0$. Korrutame võrrandit (2.3) läbi nullist erineva teguriga $\frac{1}{\overline{a}}$. Saame

$$\tilde{a}_{11}\tilde{x}_1^2 + \tilde{a}_{22}\tilde{x}_2^2 = 1, \tag{2.4}$$

kus on tähistatud

$$\tilde{a}_{11} := \frac{\overline{a}_{11}}{\overline{a}}, \quad \tilde{a}_{22} := \frac{\overline{a}_{11}}{\overline{a}}.$$

Selle võrrandi edasine analüüs toimub nullist erinevate kordajate $\tilde{a}_{11}$ ja $\tilde{a}_{22}$ märgi järgi. Siin on olulisi võimalusi kolm.

1) Kui $\tilde{a}_{11} > 0$ ja $\tilde{a}_{22} > 0$, siis tähistame

$$\alpha_1 := \sqrt{\frac{1}{\tilde{a}_{11}}} > 0, \quad \alpha_2 := \sqrt{\frac{1}{\tilde{a}_{22}}} > 0.$$

Me saame teist järku joone võrrandile lõppkujuks

$$\frac{\tilde{x}_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{\tilde{x}_2^2}{\alpha_2^2} = 1.$$

Tegemist on ellipsi kanoonilise võrrandiga. *Seega teist järku jooneks võib olla ellips.*

2) Kui kordajad $\tilde{a}_{11}$ ja $\tilde{a}_{22}$ on isemärgilised, siis on kaks võimalust, kas $\tilde{a}_{11} > 0$ ja $\tilde{a}_{22} < 0$ või $\tilde{a}_{11} < 0$ ja $\tilde{a}_{22} > 0$. Siin teine võimalus on taandatav esimesele. Selleks tuleb vahetada ära viimases reeperis baasivektorid. Sel korral (1.14) tõttu kordajad $\tilde{a}_{11}$ ja $\tilde{a}_{22}$ vahetavad oma kohad ning saame esimese võimaluse. Tähistame

$$\alpha_1 := \sqrt{\frac{1}{\tilde{a}_{11}}} > 0, \quad \alpha_2 := \sqrt{-\frac{1}{\tilde{a}_{22}}} > 0.$$

Võrrand (2.4) saab kuju

$$\frac{\tilde{x}_1^2}{\alpha_1^2} - \frac{\tilde{x}_2^2}{\alpha_2^2} = 1.$$

Tegemist on hüperbooli kanoonilise võrrandiga. *Seega teist järku jooneks võib olla hüperbool.*

3) Kui $\tilde{a}_{11} < 0$ ja $\tilde{a}_{22} < 0$, siis tähistame

$$\alpha_1 := \sqrt{-\frac{1}{\tilde{a}_{11}}} > 0, \quad \alpha_2 := \sqrt{-\frac{1}{\tilde{a}_{22}}} > 0.$$

Me saame teist järku joone võrrandile lõppkujuks

$$\frac{\tilde{x}_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{\tilde{x}_2^2}{\alpha_2^2} = -1.$$

Sellest võrrandist näeme, et tegemist on sellise teist järku joonega, millel pole ühtegi punkti. Põhjuseks on asjaolu, et viimase võrrandi vasak pool iga $\tilde{x}_1$ ja $\tilde{x}_2$ korral mittenegatiivne mistõttu ei saa olla -1. Kuna saadud võrrand on üsna sarnane ellipsi kanoonilise võrrandiga ja lisaks sellele on sellel võrrandil üle kompleksarvude lahendid olemas, siis nimetatakse seda punktideta teist järku joont *imaginaarseks ellipsiks.*

I_2. Olgu $\overline{a} = 0$. Teist järku joone võrrand (2.3) saab kuju

$$\overline{a}_{11}\tilde{x}_1^2 + \overline{a}_{22}\tilde{x}_2^2 = 0.$$

Olenevalt kordajate $\overline{a}_{11}$ ja $\overline{a}_{22}$ märgist on siin olulisi juhte kaks.

4) Kui kordajad $\overline{a}_{11}$ ja $\overline{a}_{22}$ on isemärgilised, siis on kaks võimalust, kas $\overline{a}_{11} > 0$ ja $\overline{a}_{22} < 0$ või $\overline{a}_{11} < 0$ ja $\overline{a}_{22} > 0$. Kasutades absoluutväärtuse mõistet, saame mõlemad võimalused samaaegselt kirjutada kujul

$$|\overline{a}_{11}|\tilde{x}_1^2 - |\overline{a}_{22}|\tilde{x}_2^2 = 0.$$

Tähistades

$$\alpha_1 := \sqrt{\frac{1}{|\overline{a}_{11}|}} > 0, \quad \alpha_2 := \sqrt{\frac{1}{|\overline{a}_{22}|}} > 0,$$

saame

$$\frac{\tilde{x}_1^2}{\alpha_1^2} - \frac{\tilde{x}_2^2}{\alpha_2^2} = 0.$$

Seega

$$\Big(\frac{\tilde{x}_1}{\alpha_1} + \frac{\tilde{x}_2}{\alpha_2} = 0\Big) \vee \Big(\frac{\tilde{x}_1}{\alpha_1} - \frac{\tilde{x}_2}{\alpha_2} = 0\Big).$$

Tegemist on *kahe sirgega, täpsemalt kahe lõikuva sirgega*, sest nende normaalvektorid $\vec{n}_1 = (\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2})$ ja $\vec{n}_2 = (\frac{1}{\alpha_1}, -\frac{1}{\alpha_2})$ pole kollineaarsed. Näeme, et praeguse teist järku joone võrrandile saadud kuju korral on tegemist sellise ristreeperiga, mille alguspunkt on nende sirgete lõikepunktis ning koordinaatteljed poolitavad nende sirgete vahelised nurgad.

5) Kui kordajad $\overline{a}_{11}$ ja $\overline{a}_{22}$ on samamärgilised, siis analoogiliselt eelmisele juhule saame

$$|\overline{a}_{11}|\tilde{x}_1^2 + |\overline{a}_{22}|\tilde{x}_2^2 = 0.$$

Tähistades

$$\alpha_1 := \sqrt{\frac{1}{|\overline{a}_{11}|}} > 0, \quad \alpha_2 := \sqrt{\frac{1}{|\overline{a}_{22}|}} > 0,$$

saame

$$\frac{\tilde{x}_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{\tilde{x}_2^2}{\alpha_2^2} = 0. \tag{2.5}$$

Viimasest saame ainult ühe punkti koordinaatidega $\tilde{x}_1 = 0$ ja $\tilde{x}_2 = 0$. Võrrandi (2.5) poolt määratud punktihulga tõlgendamiseks lahutame selle võrrandi vasaku poole teguriteks üle kopleksarvude, saades

$$\left(\frac{\tilde{x}_1}{\alpha_1} + \frac{i}{\alpha_2}\tilde{x}_2\right)\left(\frac{\tilde{x}_1}{\alpha_1} - \frac{i}{\alpha_2}\tilde{x}_2\right) = 0.$$

Seega

$$\left(\frac{\tilde{x}_1}{\alpha_1} + \frac{i}{\alpha_2}\tilde{x}_2 = 0\right) \vee \left(\frac{\tilde{x}_1}{\alpha_1} - \frac{i}{\alpha_2}\tilde{x}_2 = 0\right).$$

Siin i on imaginaarühik. Formaalselt asjale lähenedes, on tegemist kahe lõikuva sirgega, millel on reaalne lõikepunkt. Saadud teist järku joone kohta öeldakse, et tegemist on *imaginaarsete lõikuvate sirgetega, millel on reaalne lõikepunkt.*

II. Võrrandis (2.2) üks kordajatest $\overline{a}_{11}$ ja $\overline{a}_{22}$ on nullist erinev, aga teine on võrdne nulliga.

Vajaduse korral, vahetades reeperis

$$\{O; \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2\},$$

mille suhtes võrrand (2.2) on saadud, baasivektorid, saame valemite (1.14) tõttu üldsust kitsendamata oletada, et nimelt $\overline{a}_{22} \neq 0$ ja $\overline{a}_{11} = 0$. Seega (2.2) saab kuju

$$\overline{a}_{22}\overline{x}_2^2 + 2\overline{a}_1\overline{x}_1 + 2\overline{a}_2\overline{x}_2 + a = 0.$$

Viimast saab natuke lihtsustada, korrutades viimase võrrandi läbi nullist erineva teguriga $\frac{1}{\overline{a}_{22}}$. Saame

$$\overline{x}_2^2 + 2\tilde{a}_1\overline{x}_1 + 2\tilde{a}_2\overline{x}_2 + \tilde{a} = 0. \tag{2.6}$$

Siin me oleme tähistanud

$$\tilde{a}_1 := \frac{\overline{a}_1}{\overline{a}_{22}}, \quad \tilde{a}_2 := \frac{\overline{a}_2}{\overline{a}_{22}}, \quad \tilde{a} := \frac{\overline{a}}{\overline{a}_{22}}.$$

6) Olgu $\tilde{a}_1 \neq 0$. Võrrandi (2.6) saame esitada kujul

$$(\overline{x}_2 + \tilde{a}_2)^2 + 2\tilde{a}_1\left(\overline{x}_1 + \frac{\tilde{a} - \tilde{a}_2^2}{2\tilde{a}_1}\right) = 0. \tag{2.7}$$

Muudame nüüd reeperi alguspunkti, võttes selleks punkti $O'(-\frac{\tilde{a}-\tilde{a}_2^2}{2\tilde{a}_1}, -\tilde{a}_2)$. Tähistame punkti X uusi koordinaate $\tilde{x}_1$ ja $\tilde{x}_2$ abil. Sel korral

$$\overline{x}_1 = \tilde{x}_1 - \frac{\tilde{a} - \tilde{a}_2^2}{\tilde{a}_1}, \quad \overline{x}_2 = \tilde{x}_2 - \tilde{a}_2.$$

Võrrand (2.7) saab kuju

$$\tilde{x}_2^2 = 2(-\tilde{a}_1)\tilde{x}_1.$$

Me võime oletada, et viimases on $-\tilde{a}_1 > 0$. Vastasel juhul asendame reeperis esimese baasivektori vastandvektoriga, mille tulemusena $-\tilde{a}_1$ muudab märki. Tähistades $p := -\tilde{a}_1$, saame

$$\tilde{x}_2^2 = 2p\tilde{x}_1.$$

Tegemist on parabooli kanoonilise võrrandiga. *Seega teist järku joonte seas on paraboolid.*

II$_1$. Olgu $\tilde{a}_1 = 0$. Teist järku joone võrrand (2.6) täpsustub. Saame

$$\overline{x}_2^2 + 2\tilde{a}_2\overline{x}_2 + \tilde{a} = 0.$$

ehk samaväärselt

$$(\overline{x}_2 + \tilde{a}_2)^2 + (\tilde{a} - \tilde{a}_2^2) = 0 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow (\overline{x}_2 + \tilde{a}_2)^2 + k = 0.$$

Viimases me oleme tähistanud

$$k := \tilde{a} - \tilde{a}_2^2.$$

Teist järku joone võrrandi viimasest kujust näeme, et see lihtsustub veelgi, kui nüüd reeperi alguspunkti viime punkti $O'(0, -\tilde{a}_2)$. Tähistame punkti X uusi koordinaate $\tilde{x}_1$ ja $\tilde{x}_2$ abil, mis avalduvad vanade koordinaatide $\overline{x}_1$ ja $\overline{x}_2$ kaudu valemitega

$$\overline{x}_1 = \tilde{x}_1, \quad \overline{x}_2 = \tilde{x}_2 - \tilde{a}_2.$$

Võrrand saab kuju

$$\tilde{x}_2^2 + k = 0. \tag{2.8}$$

Analüüsime seda olenevalt sellest kas konstant k on null, negatiivne või positiivne.

7) Olgu $k = 0$. Sel korral valemist (2.8) saame

$$\tilde{x}_2^2 = 0 \Longleftrightarrow \tilde{x}_2\tilde{x}_2 = 0$$

ehk

$$(\tilde{x}_2 = 0) \vee (\tilde{x}_2 = 0).$$

Tunneme ära, et tegemist on kahe kokkulangeva sirge üldvõrrandiga. *Teist järku joonte seas on paar ühtuvaid sirgeid.*

8) Olgu $k < 0$. Tähistame $c := \sqrt{-k}$. Võrrand (2.8) annab

$$\tilde{x}_2^2 - c^2 = 0 \Longleftrightarrow (\tilde{x}_2 + c)(\tilde{x}_2 - c) = 0$$

ehk

$$(\tilde{x}_2 + c = 0) \vee (\tilde{x}_2 - c = 0).$$

Tunneme ära, et tegemist on kahe paralleelse sirge üldvõrrandiga. *Seega teist järku joonte seas on paralleelsete* (*seejuures mitteühtuvate*) *sirgete paar.*

9) Olgu $k > 0$. Tähistame $c := \sqrt{k}$. Võrrand (2.8) annab

$$\tilde{x}_2^2 + c^2 = 0. \tag{2.9}$$

Siit näeme, et ei leidu ühtegi $\tilde{x}_2$ väärtust, et viimane võrrand kehtiks. Seega on tegemist kolmandat korda sellise teist järku joonega, millel pole ühtegi punkti. Et viimast teist järku joont ilmekamalt iseloomustada, esitame võrrandi (2.9) vasaku poole üle kompleksarvude kahe teguri korrutisena. Saame

$$(\tilde{x}_2 + ci)(\tilde{x}_2 - ci) = 0$$

ehk

$$(\tilde{x}_2 + ci = 0) \vee (\tilde{x}_2 - ci = 0).$$

Siin i on imaginaarühik. Tunneme ära, et tegemist on väliselt kahe paralleelse sirge üldvõrrandiga. Nimetame selliseid sirgeid, nagu varem, imaginaarseteks sirgeteks. *Seega teist järku joonte seas on paralleelsete* (*seejuures mitteühtuvate*) *imaginaarsete sirgete paar.*

Sellega on meie arutelud lõppenud. *Kokkuvõttes saame öelda, et teist järku jooni on üheksat tüüpi. Need kirjapanduna koordinaatides* x_1 *ja* x_2 *on järgmised.*

1) *Ellips kanoonilise võrrandiga*

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 1. \tag{2.10}$$

2) *Imaginaarne ellips kanoonilise võrrandiga*

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = -1. \tag{2.11}$$

3) *Paar lõikuvaid imaginaarseid sirgeid reaalse lõikepunktiga. Kanooniliseks võrrandiks on*

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 0. \tag{2.12}$$

4) *Hüperbool kanoonilise võrrandiga*

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} - \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 1. \tag{2.13}$$

5) *Paar lõikuvaid sirgeid kanoonilise võrrandiga*

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} - \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 0. \tag{2.14}$$

6) *Parabool kanoonilise võrrandiga*

$$x_2^2 = 2px_1. \tag{2.15}$$

7) *Paar ühtuvaid sirgeid kanoonilise võrrandiga*

$$x_2^2 = 0. \tag{2.16}$$

8) *Paar paralleelseid (seejuures mitteühtuvaid) sirgeid kanoonilise võrrandiga*

$$x_2^2 - c^2 = 0, \quad c > 0. \tag{2.17}$$

9) *Paar paralleelseid (seejuures mitteühtuvaid) imaginaarseid sirgeid kanoonilise võrrandiga*

$$x_2^2 + c^2 = 0, \quad c > 0. \tag{2.18}$$

3. TEIST JÄRKU JOONE LÕIKAMINE SIRGEGA. ASÜMPTOOTILISED SIHID

Olgu antud teist järku joon γ võrrandiga

$$\gamma: \quad a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + a = 0$$

ehk lühidalt

$$\gamma: \quad \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}x_ix_j + 2\sum_{i=1}^{2} a_ix_i + a = 0$$

mingi reeperi $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ suhtes. Siin reeper ei pea ilmtingimata olema ristreeper. Lõikame seda teist järku joont γ mingi sirgega s, mis olgu antud temal fikseeritud punkti $B(b_1, b_2)$ ja sihivektori $\vec{s} = (s_1, s_2) \neq \vec{0}$ abil. Lõikepunkti(de) $\gamma \cap s$ koordinaatide leidmine on kõige lihtsam, kui sirge s on antud parameetriliste võrranditega

$$\begin{cases} x_1 = b_1 + s_1t \\ x_2 = b_2 + s_2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{3.1}$$

Seega tuleb lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + a = 0 \\ \quad x_1 = b_1 + s_1t \\ \quad x_2 = b_2 + s_2t \end{cases},$$

kuna lõikepunkt(id) asub (asuvad) samaaegselt teist järku joonel γ ja lõikesirgel s. Asendades selle võrrandisüsteemi kahest viimasest võrrandist esimesse, me saame

$$a_{11}(b_1 + s_1t)^2 + 2a_{12}(b_1 + s_1t)(b_2 + s_2t) + a_{22}(b_2 + s_2t)^2 +$$

$$+2a_1(b_1 + s_1t) + 2a_2(b_2 + s_2t) + a = 0.$$

Korrastades selle parameetri t astmete järgi, saame

$$(a_{11}s_1^2 + 2a_{12}s_1s_2 + a_{22}s_2^2)t^2 + 2(a_{11}b_1s_1 + a_{12}b_1s_2 + a_{21}b_2s_1 +$$

$+a_{22}b_2s_2+a_1s_1+a_2s_2)t+(a_{11}b_1^2+2a_{12}b_1b_2+a_{22}b_2^2+2a_1b_1+2a_2b_2+a)=0$

ehk lühemalt

$$At^2+2Bt+C=0. \tag{3.2}$$

Siin me oleme tähistanud

$$\begin{aligned} A :=& a_{11}s_1^2+2a_{12}s_1s_2+a_{22}s_2^2, \\ B :=& a_{11}b_1s_1+a_{12}b_1s_2+a_{21}b_2s_1+a_{22}b_2s_2+a_1s_1+a_2s_2, \\ C :=& a_{11}b_1^2+2a_{12}b_1b_2+a_{22}b_2^2+2a_1b_1+2a_2b_2+a \end{aligned} \tag{3.3}$$

ehk lühemalt summa märgi ja eespool sisse viidud tähiste abil

$$\begin{aligned} A :=& \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}s_is_j = f_r(s_1,s_2), \\ B :=& \sum_{j=1}^{2}(\sum_{i=1}^{2} a_{ij}b_i+a_j)s_j, \\ C :=& \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}b_ib_j+2\sum_{i=1}^{2}a_ib_i+a=f(b_1,b_2). \end{aligned}$$

Juhime siin kahele asjale lugeja tähelepanu. Esiteks, loodame, et tähe A, kasutamine siin ei tekita segadust, sest esimeses paragrahvis on sama tähega tähistatud teist järku joone ruutosa kordajatest moodustatud teist järku maatriksit. Teine märkus on seotud samuti kordajaga A. Kui me samaaegselt lõikame teist järku joont ka teise sirgega, mille sihivektorit olgu tähistatud vektoriga $\vec{u}=(u_1,u_2)$. Siis tekib kordaja

$$A=a_{11}u_1^2+2a_{12}u_1u_2+a_{22}u_2^2,$$

mis on hoopis teine arv. Segaduse vältimiseks lisame tähele A argumendiks sulgudesse sirge sihivektori. Seega valemis (3.3)olevat A täpsemalt tähistame $A(\vec{s})$ abil. Seega viimasel juhul saame $A(\vec{u})$. Vajadus sellise eristamise järele tekib viienda paragrahvi lõpus.

Võrrandi (3.2) lahendamisel saame kätte need konkreetsed parameetri t väärtused, mille asendamisel sirge s parameetrilistesse võrranditesse

(3.1), saame kätte lõikepunkti(de) koordinaadid, seega lõikepunkti(d). Lõikepunkte tekib samapalju, kuipalju on võrrandil (3.2) lahendeid. Siin on mõeldavad järgmised olukorrad.

1) Kui kordaja $A \neq 0$, siis võrrand (3.2) on tundmatu t suhtes ruutvõrrand. Seega on tal kaks lahendit

$$t_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A}. \tag{3.4}$$

Seega sirge s lõikab teist järku joont γ kahes punktis. Millised need lõikepunktid on, sõltub valemi (3.4) diskriminandist

$$\mathcal{D} := B^2 - AC.$$

Kui $\mathcal{D} > 0$, siis lahendid t_1 ja t_2 on reaalsed ja seejuures erinevad. Saame kaks erinevat lõikepunkti, mida tähistame

$$Q_1(q_1^{(1)}, q_2^{(1)}), \quad Q_2(q_1^{(2)}, q_2^{(2)}) \tag{3.5}$$

abil. Siin oleme tähistanud

$$q_1^{(i)} := b_1 + s_1 t_i, \quad q_2^{(i)} := b_2 + s_2 t_i, \quad i \in \{1, 2\}. \tag{3.6}$$

Lõikepunktid Q_1 ja Q_2 on tõepoolest erinevad, sest oletades vastuväiteliselt, et nad langevad kokku, saame

$$Q_1 = Q_2 \Longleftrightarrow q_1^{(1)} = q_1^{(2)}, \quad q_2^{(1)} = q_2^{(2)} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow b_1 + s_1 t_1 = b_1 + s_1 t_2, \quad b_2 + s_2 t_1 = b_2 + s_2 t_2 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow s_1(t_1 - t_2) = 0, \quad s_2(t_1 - t_2) = 0.$$

Kuna $\vec{s} \neq \vec{0}$, siis tema koordinaadid s_1 ja s_2 ei ole korraga nullid. Seega ühest viimasest kahest tingimusest saame $t_1 = t_2$. Valem (3.4) lubab öelda $\mathcal{D} = 0$, saades vastuolu, sest $\mathcal{D} > 0$.

Kui $\mathcal{D} < 0$, siis lahendid t_1 ja t_2 on erinevad, kuid ei ole reaalsed, öeldakse, et *lahendid on imaginaarsed.* Seega sirge s lõikab teist järku joont γ kahes erinevas mittereaalsete koordinaatidega punktis. Analoogiliselt nagu $\mathcal{D} > 0$ korral veendume, et lõikepunktid Q_1 ja Q_2 on erinevad.

Kui $\mathcal{D} = 0$, siis võrrandi (3.2) lahendid ühtuvad, sest $t_1 = t_2 = \frac{-B}{A}$. Seega tekib kaks lõikepunkti Q_1 ja Q_2, mis langevad kokku, kuna neil on võrdsed koordinaadid.

2) Kui $A = 0$ ja $B \neq 0$, siis võrrand (3.2) saab kuju

$$2Bt + C = 0.$$

Viimasel on ainult üks lahend. Nimelt

$$t_0 = -\frac{C}{2B}, \quad B \neq 0.$$

Sirge s lõikab teist jätku joont γ ainult ühes punktis $Q(q_1, q_2)$, kus $q_1 = b_1 + s_1 t_0$ ja $q_2 = b_2 + s_2 t_0$.

3) Kui $A = 0$ ja $B = 0$ ja $C \neq 0$, siis võrrand (3.2) saab kuju

$$0t^2 + 0Bt + C = 0, \quad C \neq 0.$$

Sellel võrrandil ei ole lahendit. Seega sirge s ei lõika teist järku joont γ.

4) Kui võrrandis (3.2) kõik kordajad on võrdsed nulliga, siis järelikult $A = B = C = 0$. Võrrand (3.2) saab formaalselt kuju

$$0t^2 + 0t + 0 = 0$$

(sisuliselt kaob ära). Viimast rahuldavad kõik reaalarvud. Seega võrranditest (3.1) saame sirge s ja joone γ lõikepunktideks kõik sirge s punktid, seega sirge s on täielikult teist järku joonel γ. Lõikepunktide analüüs on lõppenud.

Definitsioon 3.2. *Lineaarkatet $L(\vec{s})$ nimetatakse vektori $\vec{s} \neq \vec{0}$ poolt määratud sihiks.*

Näeme, et siht $L(\vec{s})$ on vektorruumi $\mathbf{E}_2$ ühemõõtmeline alamruum. Ilmselt iga nullvektorist erineva vektori $\vec{a} \in L(\vec{s})$ korral $L(\vec{a}) = L(\vec{s})$. Seega sihti määrav vektor on määratud kordse vektori täpsuseni.

Definitsioon 3.3. *Sihti $L(\vec{s})$ määratuna vektori $\vec{s} = (s_1, s_2) \neq \vec{0}$ poolt nimetame teist järku joone γ asümptootiliseks sihiks, kui*

$$A = 0 \Longleftrightarrow a_{11}s_1^2 + 2a_{12}s_1s_2 + a_{22}s_2^2 = 0. \tag{3.7}$$

Paneme tähele, et kui kehtib viimane seos vektori $\vec{s}$ korral, siis ta kehtib ka iga vektori $\alpha\vec{s}$, kus $\alpha \neq 0$, korral. Seega asümptootilise sihi mõiste on tõepoolest sihiga , mitte ainult vektoriga, seotud mõiste.

Definitsioon 3.4. *Sihti, mis ei ole asümptootiline, s.o.*

$$A \neq 0 \Longleftrightarrow a_{11}s_1^2 + 2a_{12}s_1s_2 + a_{22}s_2^2 \neq 0. \tag{3.8}$$

nimetame teist järku joone mitteasümptootiliseks sihiks.

On huvitav teada palju asümptootilisi sihte omab üks või teine teist järku joon. Kerge on seda teha, kui kasutame nende kanoonilisi võrrandeid (2.10) – (2.18).

Ellipsil, imaginaarsel ellipsil ja imaginaarsetel lõikuvatel sirgetel reaalse lõikepunktiga kanooniliste võrranditega ruutosad on ühesugused, s.o.

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2},$$

siis on ühesugune ka asümptootilist sihti määrav tingimus (3.7). Selleks on

$$\frac{s_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{s_2^2}{\alpha_2^2} = 0.$$

Viimase lahendiks on ainult $s_1 = s_2 = 0$, mis ei määra asümptootilist sihti. Saime, et *ellipsil, imaginaarsel ellipsil ja imaginaarsetel lõikuvatel sirgetel reaalse lõikepunktiga asümptootilisi sihte ei ole.*

Ühesugune ruutosa on ka hüperboolil ja kahel lõikuval sirgel. Asümptootilised sihid tuleb leida võrrandist

$$\frac{s_1^2}{\alpha_1^2} - \frac{s_2^2}{\alpha_2^2} = 0.$$

Viimasest saame $s_2 = \pm\frac{\alpha_2}{\alpha_1}s_1$. Kuna siht määratakse kordaja täpsuseni, siis võime võtta $s_1 = \alpha_1$. Sel korral $s_2 = \pm\alpha_2$. Saime kaks nullvektorist erinevat vektorit $\vec{s}_1 = (\alpha_1, \alpha_2)$ ja $\vec{s}_2 = (\alpha_1, -\alpha_2)$. Kuna nende vektorite koordinaadid ei ole võrdelised, siis need vektorid ei ole kollineaarsed. Teisiti öeldes, pole üks neist avaldatav teise kaudu. Seega asümptootilised sihid $L(\vec{s}_1)$ ja $L(\vec{s}_2)$ on erinevad. Saime, et *hüperboolil ja kahel lõikuval sirgel on kaks erinevat asümptootilist sihti.*

Ülejäänud nelja tüüpi teist järku joone korral, milleks on kas parabool, paar ühtuvaid sirgeid, paar paralleelseid sirgeid ja paar imaginaarseid paralleelseid sirgeid, kanoonilise võrrandi ruutosa on ka siin ühesugune. Selleks on x_2^2. Asümptootilised sihid saame võrrandist

$$s_2^2 = 0 \Longleftrightarrow s_2 s_2 = 0 \Longleftrightarrow (s_2 = 0) \vee (s_2 = 0).$$

Saime kaks lahendit, seejuures s_1 on suvaline. Võttes esimeseks koordinaadiks $s_1 = 1$, saame, et need kaks kokkulangevat asümptootilist sihti määratakse vektori $\vec{s} = (1, 0) = \vec{e}_1$ poolt. Parabooli korral on tegemist parabooli telje sihiga. Kui on tegemist kahe ühtuva sirgega, kahe paralleelse sirgega või kahe imaginaarse paralleelse sirgega, siis asümptootiline siht määratakse nende sirgepaaride ühise sihivektori poolt. Saime, et *paraboolil, kahel ühtuval sirgel, kahel paralleelsel sirgel ja kahel imaginaarsel paralleelsel sirgel on kaks ühtuvat asümptootilist sihti.*

4. TEIST JÄRKU JOONE KESKPUNKT

Olgu meil antud teist järku joon γ võrrandiga

$$\gamma: \quad a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + a = 0 \tag{4.1}$$

mingi reeperi $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ suhtes. Siin reeper ei pea ilmtingimata olema ristreeper.

Definitsioon 4.1. *Me nimetame punkti joone keskpunktiks, kui see joon on sümmeetriline selle punkti suhtes.*

Rakendame seda definitsiooni, kui jooneks on teist järku joon γ, mis on antud võrrandiga (4.1). Tähistame otsitavat keskpunkti tähega $C(c_1, c_2)$. Otsitavateks on tegelikult koordinaadid c_1 ja c_2. Paneme keskpunkti definitsiooni meile sobival kujul kirja. Nimelt vaatleme läbi punkti C kõikvõimalikke sirgeid, mis lõikavad meie joont kahes punktis. Seega vaadeldavate sirgete sihivektorid on mitteasasümptootilise sihiga. Tegelikult jääb mängust välja ülimalt kaks sirget, nagu teame eelmisest paragrahvist. Iga sellise sirge s saame kirja panna parameetriliste võrranditega

$$s: \begin{cases} x_1 = c_1 + s_1 t \\ x_2 = c_2 + s_2 t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R},$$

kusjuures selle sirge sihivektori $\vec{s} = (s_1, s_2) \neq \vec{0}$ koordinaadid rahuldavad võrratust

$$A \neq 0 \Longleftrightarrow a_{11}s_1^2 + 2a_{12}s_1s_2 + a_{22}s_2^2 \neq 0.$$

Toimides analoogiliselt nagu eelmises paragrahvis, saame öelda, et iga mitteasümptootilise sihiga sirge lõikab joont γ kahes punktis

$$Q_1(q_1^{(1)}, q_2^{(1)}), \quad Q_2(q_1^{(2)}, q_2^{(2)}),$$

kus

$$q_1^{(i)} = c_1 + s_1 t_i, \quad q_2^{(i)} = c_2 + s_2 t_i, \quad i \in \{1, 2\}.$$

Joone keskpunkti definitsiooni kohaselt on punkt C meie lõigu Q_1Q_2 keskpunkt. Seega keskpunkti koordinaadid on selle lõigu otspunktide vastavate koordinaatide poolsumma. Järelikult

$$c_1 = \frac{1}{2}\big(q_1^{(1)} + q_1^{(2)}\big), \quad c_2 = \frac{1}{2}\big(q_2^{(1)} + q_2^{(2)}\big)$$

ehk

$$c_1 = \frac{1}{2}\big[(c_1 + s_1 t_1) + (c_1 + s_1 t_2)\big], \quad c_2 = \frac{1}{2}\big[(c_2 + s_2 t_1) + (c_2 + s_2 t_2)\big].$$

Viimast korrastades, saame

$$(t_1 + t_2)s_1 = 0, \quad (t_1 + t_2)s_2 = 0.$$

Kuna vektor $\vec{s} \neq \vec{0}$, siis ei ole tema koordinaadid s_1 ja s_2 korraga nullid. Seetõttu viimasest saame $t_1 + t_2 = 0$. Asendades siia valemist (3.4), saame

$$B = 0 \Longleftrightarrow a_{11}c_1 s_1 + a_{12}c_1 s_2 + a_{21}c_2 s_1 + a_{22}c_2 s_2 + a_1 s_1 + a_2 s_2 = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_1)s_1 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_2)s_2 = 0. \tag{4.2}$$

Siinjuures me pole unustanud, et $a_{12} = a_{21}$. Võrrand (4.2) peab kehtima iga mitteasümptootilise sihi korral, seega sisuliselt iga vektori $\vec{s}$ korral välja arvatud ülimalt kaks sihti. Seega võrrandis (4.2) kordajad s_1 ja s_2 juures peavad olema võrdsed nulliga. Seega keskpunkti koordinaadid saame võrrandisüsteemist

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_1 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_2 = 0 \end{cases}. \tag{4.3}$$

Viimases võrrandisüsteemis oleme tähistanud keskpunkti koordinaate x_1 ja x_2 abil varasema c_1 ja c_2 asemel.

Lähtudes teist järku joonte kanoonilistest võrranditest (2.10) – (2.18), uurime palju on ühel või teisel teist järku joonel keskpunkte. Anname eelnevalt ühe mõiste.

Definitsioon 4.2. *Teist järku joont nimetame tsentraalseks, kui tal on ainult üks keskpunkt. Ülejäänud teist järku jooni nimetame mittetsentraalseteks.*

Kui süsteemi (4.3) maatriks

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

milleks on teist järku joone γ ruutosa maatriks, on regulaarne, siis saame ta lahendada Crameri valemi abil. Me saame sel korral süsteemile ainult ühe lahendi. Seega tegemist on tsentraalse teist järku joonega. Tsentraalse teist järku joone tunnuseks on $\delta := |A| \neq 0$. Juhul kui $\delta = 0$, siis on teist järku joon mittetsentraalne. *Tsentraalseteks teist järku joonteks on ellips, imaginaarne ellips, paar imaginaarseid lõikuvaid sirgeid reaalse lõikepunktiga, hüperbool ja paar lõikuvaid sirgeid*, sest

$$\delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha_1^2} & 0 \\ 0 & \pm\frac{1}{\alpha_2^2} \end{vmatrix} = \pm\frac{1}{\alpha_1^2\alpha_2^2} \neq 0.$$

Ülejäänud teist järku jooned, s.o. *parabool, paar paralleelseid sirgeid, paar paralleelseid imaginaarseid ja paar ühtuvaid sirgeid*, on mittetsentraalsed, sest

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Seega neil teist järku joontel keskpunktide arv ei ole üks. Selgitame kuidas neil juhtudel on täpsemalt lood kespunktidega. Selleks tuleb moodustada võrrandisüsteem (4.3). Parabooli (2.15) korral saame võrrandisüsteemile (4.3) kuju

$$-p = 0, \quad x_2 = 0.$$

See süsteem ei oma lahendit, sest $p \neq 0$. *Seega paraboolil keskpunktid puuduvad.* Kui teist järku jooneks on kas paar paralleelseid sirgeid, paar paralleelseid imaginaarseid sirgeid ja paar ühtuvaid sirgeid, on võrrandite (2.16) – (2.18) tõttu võrrandisüsteem (4.3) ühesuguse kujuga. Alles jääb ainult üks võrrand. Nimelt $x_2 = 0$. Keskpunktide hulk moodustab sirge. *Kui teist järku jooneks on paar paralleelseid sirgeid või paar paralleelseid imaginaarseid sirgeid, siis keskpunktide sirgeks on paralleelse sirgepaari kesksirge olenemata sellest kas sirged on reaalsed või imaginaarsed. Ühtuvate sirgete korral keskpunktide sirge ühtub nendega.*

5. TEIST JÄRKU JOONE DIAMEETER. KAASDIAMEETRID

Lõikame teist järku joont γ paralleelsete sirgetega. Seda paralleelsete sirgete hulka *nimetame parallelsete sirgete parveks.* Nende sirgetel kõigil on ühine siht, mis on määratav ühe ja sama nullvektorist erineva vektori poolt. Tähistame seda vektorit $\vec{s}$ abil. Oma paralleelsete sirgete parve tähistame $\mathcal{P}(\vec{s})$ abil. Kui selle parve sirgete siht $L(\vec{s})$ on teist järku joone γ jaoks mitteasümptootiline, siis meie parve iga sirge lõikab teist järku joont kahes punktis, eraldades temal lõigu. Järelikult paralleelsete sirgete parv tekitab paralleelsete lõikude parve. Veelgi enam, tekib nende lõikude keskpunktide hulk, mida me tähistame $d_\gamma(\vec{s})$ abil.

Definitsioon 5.1. *Teist järku joone lõikamisel mitteasümptootilist sihti omavate paralleelsete sirgetega tekib lõikepunktide poolt määratud lõikude keskpunktide hulk, mida nimetame selle teist järku joone diameetriks ehk diameetersirgeks määratuna selle mitteasümptootilise sihi poolt.*

Olgugi et me ei ole uurinud diameetri ehitust, on teist järku joonel diameetreid palju, sest erinevaid mitteasümptootilisi sihte on palju. Tegelikult, nagu eespool nägime, on tasandi E_2 poolt indutseeritud vektorruumi $\mathbf{E}_2$ iga siht, s.o. tema ühemõõtmeline alamruum $L(\vec{s})$, teist järku joone jaoks mitteasümptootiline, v.a. ülimalt kaks sihti. Asume nüüd uurima teist järku joone diameetrite ehitust.

Teoreem 5.1. *Teist järku joone diameeter on sirge.*

Tõestus. Olgu teist järku joon γ antud võrrandiga

$$\gamma: \quad a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + a = 0$$

mingi reeperi $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ suhtes. Võtame selle joone mistahes mitteasümptootilise sihi $L(\vec{s})$, mis olgu määratud vektori $\vec{s} = (s_1, s_2) \neq \vec{0}$ poolt. Vaatleme paralleelsete sirgete parve $\mathcal{P}(\vec{s})$, mille iga sirge on mitteasümptootilise sihiga $L(\vec{s})$. Selle parve mistahes sirge $s(D)$, kus $D(d_1, d_2) \in d_\gamma(\vec{s})$, parameetrilisteks võrranditeks on

$$s(D): \quad \begin{cases} x_1 = d_1 + s_1 t \\ x_2 = d_2 + s_2 t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Lugejale on ilmselt selge, et punkt $D(d_1, d_2)$ on vaadeldaval sirgel $s(D)$ tekkinud lõigu keskpunkt. Kui punkt $D(d_1, d_2)$ muutub otsitaval diameetril $d_\gamma(\vec{s})$, siis saame oma parve kõikide sirgete parameetrilised võrrandid. Nendeks on

$$s(D): \quad \begin{cases} x_1 = & d_1 + s_1 t \\ x_2 = & d_2 + s_2 t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad D(d_1, d_2) \in d_\gamma(\vec{s}).$$

Leiame nüüd diameetri suvalise punkti, mida oleme tähistatud $D(d_1, d_2)$ abil, koordinaadid d_1 ja d_2. Senini on nad meil kasutusel tähistuse tasemel. Koordinaatide d_1 ja d_2 avaldistes peavad olema mingil moel teist järku joone võrrandi kordajad kui ka mitteasümptootilise sihi koordinaadid. Selleks me leiame meie paralleelsete sirgete parve $\mathcal{P}(\vec{s})$ iga sirge $s(D)$ korral lõikepunktid teist järku joonega γ. Tähistame tekkivat kahte lõikepunkti ja nende koordinaate analoogilise valemiga (3.5) Seega

$$Q_1^{(D)}(q_1^{(1)}, q_2^{(1)}), \quad Q_2^{(D)}(q_1^{(2)}, q_2^{(2)}).$$

Siin me oleme lõikepunkti tähistele lisanud punkti D. Valemi (3.6) kohaselt

$$q_1^{(i)} := d_1 + s_1 t_i, \quad q_2^{(i)} := d_2 + s_2 t_i, \quad i \in \{1, 2\}, \tag{5.1}$$

kusjuures t_1 ja t_2 saame valemist (3.4). Seega

$$t_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A}. \tag{5.2}$$

Lõigu $Q_1^{(D)} Q_2^{(D)}$ keskpunkti D koordinaadid on otspunktide koordinaatide poolsumma. Järelikult

$$d_1 = \frac{1}{2}(q_1^{(1)} + q_1^{(2)}), \quad d_2 = \frac{1}{2}(q_2^{(1)} + q_2^{(2)})$$

ehk (5.1) tõttu

$$d_1 = \frac{1}{2}[(d_1 + s_1 t_1) + (d_1 + s_1 t_2)], \quad d_2 = \frac{1}{2}[(d_2 + s_2 t_1) + (d_2 + s_2 t_2)].$$

Siit saame

$$(t_1 + t_2) s_1 = 0, \quad (t_1 + t_2) s_2 = 0.$$

Kuna mitteasümptootilist sihti määrav vektor $\vec{s}$ ei ole nullvektor, siis tema koordinaadid s_1 ja s_2 ei ole korraga nullid. Seetõttu

$$t_1 + t_2 = 0.$$

Asendades siia valemist (5.2), saame $B = 0$. Viimane on (3.3) tõttu samaväärne tingimusega

$$a_{11}d_1s_1 + a_{12}d_1s_2 + a_{21}d_2s_1 + a_{22}d_2s_2 + a_1s_1 + a_2s_2 = 0$$

ehk

$$(a_{11}s_1 + a_{12}s_2)d_1 + (a_{21}s_1 + a_{22}s_2)d_2 + (a_1s_1 + a_2s_2) = 0.$$

See on tingimus, mida peavad rahuldama diameetri mistahes punkti D koordinaadid d_1 ja d_2. Seega tegu on diameetri võrrandiga. Tähistame diameetri muutuvat punkti $D(d_1, d_2)$ ümber $X(x_1, x_2)$ abil. Diameetri võrrandile saame kuju

$$d_\gamma(\vec{s}): \quad (a_{11}s_1 + a_{12}s_2)x_1 + (a_{21}s_1 + a_{22}s_2)x_2 + (a_1s_1 + a_2s_2) = 0. \quad (5.3)$$

Tunneme ära, et tegemist on sirge võrrandiga, kui vaid x_1 ja x_2 kordajad

$$a_{11}s_1 + a_{12}s_2, \quad a_{21}s_1 + a_{22}s_2$$

ei ole korraga nullid. Oletame vastuväiteliselt, et vaadeldavad kordajad just on nullid, s.o.

$$a_{11}s_1 + a_{12}s_2 = 0, \quad a_{21}s_1 + a_{22}s_2 = 0.$$

Sel korral

$$(a_{11}s_1 + a_{12}s_2)s_1 + (a_{21}s_1 + a_{22}s_2)s_2 = 0.$$

ehk

$$a_{11}s_1^2 + 2a_{12}s_1s_2 + a_{22}s_2^2 = 0.$$

Kuna meie siht on mitteasümptootiline, siis valemi (3.8) tõttu

$$a_{11}s_1^2 + 2a_{12}s_1s_2 + a_{22}s_2^2 \neq 0.$$

Oleme saanud vastuolu. Järelikult diameetri võrrand (5.3) on alati sirge võrrand. ♠

Kuna teist järku joone diameeter on sirge, siis on õigustatud nimetada teda ka diameetersirgeks, nagu eespool sai ka tehtud.

Teoreem 5.2. *Tsentraalse (mittetsentraalse) teist järku joone diameeter on mitteasümptootilise (asümptootilise) sihiga.*

Tõestus. Diameetri võrrandist (5.3) saame me tema sihivektoriks $\vec{t} = (t_1, t_2)$, kus

$$t_1 = a_{21}s_1 + a_{22}s_2, \quad t_2 = -(a_{11}s_1 + a_{12}s_2). \tag{5.4}$$

Nüüd selgitame milline on siht $L(\vec{t})$, kas ta on mitteasümptootiline või asümptootiline. Me oleme vastavat tingimust sihi $L(\vec{s})$ korral tähistanud tähega A. Täpsem on tähistada $A(\vec{s})$ abil. Arvutame:

$$A(\vec{t}) = a_{11}t_1^2 + 2a_{12}t_1t_2 + a_{22}t_2^2 = a_{11}(a_{21}s_1 + a_{22}s_2)^2 -$$

$$-2a_{12}(a_{21}s_1 + a_{22}s_2)(a_{11}s_1 + a_{12}s_2) + a_{22}(a_{11}s_1 + a_{12}s_2)^2 =$$

$$= \delta(a_{11}s_1^2 + 2a_{12}s_1s_2 + a_{22}s_2^2) = \delta A(\vec{s}).$$

Tsentraalse teist järku joone korral $\delta \neq 0$, mistõttu $A(\vec{t}) \neq 0$ ehk diameetri siht on mitteasümptootiline. Samas mittetsentraalse teist järku joone korral aga $\delta = 0$. Järelikult $A(\vec{t}) = 0$ ehk diameetri siht on asümptootiline. Sellega teoreem on tõestatud. ♠

Teoreem 5.3. *Teist järku joone kõik diameetrid läbivad igat tema keskpunkti.*

Tõestus. Olgu punkt $D(d_1, d_2)$ teist järku joone keskpunkt. Seega tema koordinaadid d_1 ja d_2 rahuldavad võrrandisüsteemi (4.3). Seega

$$\begin{cases} a_{11}d_1 + a_{12}d_2 + a_1 = 0 \\ a_{21}d_1 + a_{22}d_2 + a_2 = 0 \end{cases}.$$

Vaja on näidata, et keskpunkt $D(d_1, d_2)$ on ka mistahes diameetri punkt, s.o. tema koordinaadid peavad rahuldama võrrandit (5.3). See on tõepoolest nii, sest

$$(a_{11}s_1 + a_{12}s_2)d_1 + (a_{21}s_1 + a_{22}s_2)d_2 + (a_1s_1 + a_2s_2) =$$

$$= (a_{11}d_1 + a_{12}d_2 + a_1)s_1 + (a_{21}d_1 + a_{22}d_2 + a_2)s_2 = 0\, s_1 + 0\, s_2 = 0.$$

Sellega teoreem on tõestatud. ♠

See teoreem lubab kergesti kanda joonisele konkreetse mitteasümptootilise sihi korral tema poolt määratud teist järku joone diameetri. Kui meil on tsentraalne teist järku joon, siis mingi mitteasümptootilise sihi korral joonistame ühe sirge oma paralleelsete sirgete parvest. Diameeter läbib sellel sirgel tekkinud lõigu keskpunkti ja teist järku joone keskpunkti. Seega diameeter ongi määratud.

Jääb veel vaadelda mittetsentraalse teist järku joone diameetreid. Keskpunktita teist järku jooneks on ainult parabool. Lähtume tema kanoonilisest võrrandist (2.15):

$$x_2^2 = 2px_1.$$

Nagu nägime on temal kaks ühtuvat asümptootilist sihti. Valitud reeperi korral määratakse nad esimese baasivektori $\vec{e}_1$ poolt. Seega iga vektor $\vec{s} = (1, s_2)$, kus $s_2 \neq 0$, määrab mitteasümpootilise sihi. Tema poolt määratud diameetri võrrandiks saame

$$s_2x_2 - p = 0 \Longleftrightarrow x_2 = \frac{p}{s_2}.$$

Tähistades $k_2 = \frac{p}{s_2} \neq 0$, saame diameetri võrrandiks

$$x_2 = k_2, \quad k_2 \neq 0.$$

Näeme, et parabooli iga diameeter on paralleelne parabooli teljega.

Kui teist järku jooneks on reaalsete või imaginaarsete parallelsete sirgete või hoopis ühtuvate sirgete paar, siis kõigil neil joontel keskpunktid moodustavad sirge. Viimase teoreemi kohaselt, olenemata mitteasümptootilisest sihist, kõik diameetrid ühtuvad keskpunktide sirgega. Seega kõik diameetrid langevad kokku keskpunktide sirgega.

Võtame saadud tulemused kokku teoreemina.

Teoreem 5.4. *Kui mittetsentraalseks teist järku jooneks on parabool, siis kõik diameetrid on parallelsed parabooli teljega. Kui mittetsentraalseks teist järku jooneks on reaalsete, imaginaarsete parallelsete sirgete või hoopis ühtuvate sirgete paar, siis kõik diameetrid omavahel ühtuvad ja seejuures ühtuvad keskpunktide sirgega.*

Nagu teoreemist 5.2 saime, on tsentraalse teist järku joone korral tema mistahes mitteasümptootilise sihi $L(\vec{s})$ poolt määratud diameetri sihivektori $\vec{t}$ poolt määratud siht $L(\vec{t})$ mitteasümptootiline. Seega saab tema abil määrata uue diameetri. Valemi (5.4) abil saame tema võrrandiks

$$d_\gamma(\vec{t}): \quad (a_{11}t_1 + a_{12}t_2)x_1 + (a_{21}t_1 + a_{22}t_2)x_2 + (a_1t_1 + a_2t_2) = 0. \quad (5.5)$$

Leiame selle diameetri sihivektori koordinaadid. Viimased on muidugi määratud kordsuse täpsusega. Rehkenduste kirja panemiseks tähistame seda sihivektorit $\vec{u} = (u_1, u_2)$ abil. Tema koordinaatide leidmiseks valemist (5.5) on meile teejuhiseks valem (5.4) esmalt analoogia mõttes ja seejuures vahetult. Saame

$$u_1 = a_{21}t_1 + a_{22}t_2 = a_{21}(a_{21}s_1 + a_{22}s_2) - a_{22}(a_{11}s_1 + a_{12}s_2) = -\delta s_1$$

ja

$$u_2 = -(a_{11}t_1 + a_{12}t_2) = -a_{11}(a_{21}s_1 + a_{22}s_2) + a_{12}(a_{11}s_1 + a_{12}s_2) = -\delta s_2.$$

Saime

$$\vec{u} = -\delta\vec{s} \Longleftrightarrow L(\vec{u}) = L(\vec{s}).$$

Siit näeme, et diameeter $d_\gamma(\vec{t})$ on üks parve $\mathcal{P}(\vec{s})$ sirgetest, nimelt see, mis läbib meie joone keskpunkti.

Definitsioon 5.2. *Tsentraalse teist järku joone mitteasümptootilist sihti $L(\vec{v})$ nimetame mitteasümptootilise sihi $L(\vec{u})$ kaassihiks, kui sihte määravate vektorite $\vec{u} = (u_1, u_2)$ ja $\vec{v} = (v_1, v_2)$ koordinaadid rahuldavad tingimust*

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} a_{ij}u_iv_j = 0$$

ehk detailselt

$$a_{11}u_1v_1 + a_{12}(u_1v_2 + u_2v_1) + a_{22}u_2v_2 = 0. \quad (5.6)$$

Teoreem 5.5. *Kui tsentraalse teist järku joone mitteasümptootiline siht $L(\vec{v})$ on mitteasümptootilise sihi $L(\vec{u})$ kaassiht, siis siht $L(\vec{u})$ on sihi $L(\vec{v})$ kaassiht.*

Tõestus. Eelduse kohaselt kehtib valem (5.6). Kuna

$$a_{11}v_1u_1 + a_{12}(v_1u_2 + v_2u_1) + a_{22}v_2u_2 =$$

$$= a_{11}u_1v_1 + a_{12}(u_1v_2 + u_2v_1) + a_{22}u_2v_2 = 0,$$

siis siht on sihi $L(\vec{v})$ kaassiht. ♠

Teoreemist näeme, et pole oluline kumb siht on kumma sihi kaassiht. Seetõttu *kui kehtib valem* (5.6), *siis ütleme edaspidi, et mitteasümptootilised sihid* $L(\vec{u})$ *ja* $L(\vec{v})$ *on teineteise kaassihid.*

Teoreem 5.6. *Tsentraalse teist järku joone mitteasümptootilise sihi* $L(\vec{u})$ *kaassiht* $L(\vec{v})$ *määratakse üheselt.*

Tõestus. Kaassihi tingimusest (5.6), leiame lahendi $\vec{v} = (v_1, v_2)$. Selleks kirjutame valemi (5.6) eelnevalt meile sobival kujul:

$$(a_{11}u_1 + a_{12}u_2)v_1 + (a_{12}u_1 + a_{22}u_2)v_2 = 0,$$

mille üheks lahendiks on

$$v_1 = a_{12}u_1 + a_{22}u_2, \quad v_2 = -(a_{11}u_1 + a_{12}u_2).$$

See pole ainus lahend. Lahendiks on ka

$$\lambda v_1 = \lambda(a_{12}u_1 + a_{22}u_2), \quad \lambda v_2 = -\lambda(a_{11}u_1 + a_{12}u_2).$$

Siin λ on suvaline reaalarv. Õnneks kõik need lahendid määravad ainult ühe kaassihi. ♠

Teoreem 5.7. *Tsentraalse teist järku joone* γ *mitteasümptootilise sihi* $L(\vec{s})$ *poolt määratud diameetri* $d_\gamma(\vec{s})$ *sihivektori* $\vec{t} = (t_1, t_2)$, *kus*

$$t_1 = a_{12}s_1 + a_{22}s_2, \quad t_2 = -(a_{11}s_1 + a_{12}s_2),$$

siht $L(\vec{t})$ *on teineteise kaassihid.*

Tõestus. Vaja on kontrollida tingimust (5.6) . Teeme seda. Saame

$$a_{11}s_1t_1 + a_{12}(s_1t_2 + s_2t_1) + a_{22}s_2t_2 =$$

$$= a_{11}s_1(a_{12}s_1 + a_{22}s_2 - a_{12}s_1(a_{12}s_1 + a_{22}s_2 + a_{12}s_2(a_{12}s_1 + a_{22}s_2) -$$

$$-a_{22}s_2(a_{11}s_1 + a_{12}s_2) = 0.$$

Viimases koondusid liidetavad paarikaupa välja. ♠

Definitsioon 5.3. *Tsentraalse teist järku joone diameetripaari nimetame teineteise kaasdiameetriteks, kui nende sihivektorite poolt määratud sihid on teineteise kaassihid.*

Veidi eespool vaatluse all olevad diameetrid $d_\gamma(\vec{s})$ ja $d_\gamma(\vec{t})$ on teist järku joone γ kaasdiameetrid.

6. TEIST JÄRKU JOONE PUUTUJA

Anname mistahes joone γ puutuja mõiste mingis punktis $M \in \gamma$. Võtame samal joonel veel teise punkti X. *Joone punkte M ja X läbivat sirget $l(M, X)$ nimetame tema lõikajaks punktis M.*

Definitsioon 6.1. *Joone γ puutujaks punktis M nimetakse lõikaja $l(M, X)$ piirseisu, kui punkt X mööda meie joont piiramata läheneb punktile M.*

Meie rakendame seda definitsiooni teist järku joone

$$\gamma: \quad a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + a = 0 \tag{6.1}$$

korral. Viimane on antud mingi reeperi $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ suhtes. Fikseerime oma joonel mingi punkti $M(m_1, m_2)$. Seega

$$a_{11}m_1^2 + 2a_{12}m_1m_2 + a_{22}m_2^2 + 2a_1m_1 + 2a_2m_2 + a = 0. \tag{6.2}$$

Anname punkti M läbiva mistahes lõikaja veidi teisel moel, kui on seda tehtud definitsioonis. Nimelt punkti X asemel anname lõikaja sihivektori $\vec{s} = (s_1, s_2)$. Kui sivektorit muuta, saame erinevaid lõikajaid. Iga lõikaja anname parameetriliste võrrandite abil:

$$l(\vec{s}): \quad \begin{cases} x_1 = m_1 + s_1t \\ x_2 = m_2 + s_2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{6.3}$$

See lõikab teist järku joont γ kahes punktis. Üheks neist on punkt M. Me leiame nüüd lõikepunktide koordinaadid. Seda protseduuri on kirjeldatud kolmandas paragrahvis, mistõttu me saame kiiremini edasi minna. Asendades valemist (6.3) valemisse (6.1), saame talle kuju

$$At^2 + 2Bt + C = 0, \tag{6.4}$$

kus

$$\begin{aligned} A :=& a_{11}s_1^2 + 2a_{12}s_1s_2 + a_{22}s_2^2, \\ B :=& a_{11}m_1s_1 + a_{12}m_1s_2 + a_{21}m_2s_1 + a_{22}m_2s_2 + a_1s_1 + a_2s_2, \\ C :=& a_{11}m_1^2 + 2a_{12}m_1m_2 + a_{22}m_2^2 + 2a_1m_1 + 2a_2m_2 + a. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Siin me kasutasime valemeid (3.2) ja (3.3). Valemist (6.4) saame

$$t_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A}.$$

Kuna (6.2) tõttu, $C = 0$, siis

$$t_1 = 0, \quad t_2 = -2\frac{B}{A}. \tag{6.6}$$

Viimaste asendamisel sirge $l(\vec{s})$ võrrandisse (6.3), saame lõikepunktide koordinaadid. Üheks lõikepunktiks on, nagu öeldud, punkt $M(m_1, m_2)$. Tähistame teist lõikepunkti $Q(q_1, q_2)$ abil. Siinjuures

$$q_1 = m_1 + s_1 t_2, \quad q_2 = m_2 + s_2 t_2. \tag{6.7}$$

Meie eesmärgiks on puutuja leidmine. Definitsiooni 6.1 kohaselt tuleb lõikaja $l(\vec{s})$ sihivektorit $\vec{s}$ nii muuta, et lõikepunkt Q läheneb punktile M piki joont γ. Seega puutuja korral peavad punktid M ja Q kokku langema. Teisiti öeldes, vastavad koordinaadid peavad olema võrdsed, mis (6.7) abil lubab kirjutada

$$m_1 = q_1, \quad m_2 = q_2 \Longleftrightarrow m_1 = m_1 + s_1 t_2, \quad m_2 = m_2 + s_2 t_2. \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow s_1 t_2 = 0, \quad s_2 t_2 = 0.$$

Kuna sirge sihivektor $\vec{s}$ ei ole nullvektor, siis vähemalt üks koordinaatidest s_1 ja s_2 ei ole null. Seetõttu $t_2 = 0$ ehk (6.6) kohaselt $B = 0$. Valemi (6.5) abil omakorda saame

$$(a_{11}m_1 + a_{21}m_2 + a_1)s_1 + (a_{21}m_1 + a_{22}m_2 + a_2)s_2 = 0.$$

Viimase korrutamisel mistahes reaalarvuga t saame

$$(a_{11}m_1 + a_{21}m_2 + a_1)(s_1 t) + (a_{21}m_1 + a_{22}m_2 + a_2)(s_2 t) = 0.$$

Siia on nüüd kerge asendada $s_1 t$ ja $s_2 t$, sest sirge $l(\vec{s})$ võrranditest saame $s_1 t = x_1 - m_1$ ja $s_2 = x_2 - m_2$. Asenduse tulemusena saame

$$(a_{11}m_1 + a_{21}m_2 + a_1)(x_1 - m_1) + (a_{21}m_1 + a_{22}m_2 + a_2)(x_2 - m_2) = 0.$$

ehk

$$p(M): \quad \begin{aligned}(a_{11}m_1 + a_{21}m_2 + a_1)x_1 + (a_{21}m_1 + a_{22}m_2 + a_2)x_2 + \\ + (a_1m_1 + a_2m_2 + a) = 0.\end{aligned} \tag{6.8}$$

Siin me oleme arvestanud seost (6.2). Saadud võrrand on puutuja puutepunkktiga M võrrand. Seejuures me oleme puutujat tähistanud $p(M)$ abil. Puutuja võrrand omab mõtet, kui x_1 ja x_2 kordajad

$$a_{11}m_1 + a_{21}m_2 + a_1, \quad a_{21}m_1 + a_{22}m_2 + a_2$$

ei ole korraga nullid. Vastasel juhul ei ole tegemist sirge võrrandiga. Siit näeme, et teist järku joone sellises punktis $M(m_1, m_2,$ kus

$$a_{11}m_1 + a_{21}m_2 + a_1 = 0, \quad a_{21}m_1 + a_{22}m_2 + a_2 = 0 \tag{6.9}$$

ei ole puutujat. Öeldu paremaks tõlgendamiseks anname teist järku joone iseärase punkti mõiste.

Definitsioon 6.2. *Teist järku joone punkti nimetame tema iseäraseks punktiks, kui ta on ka tema keskpunktiks.*

Valemi (4.3) tõttu iseärase punkti korral kehtib (6.9). Lisaks kehtib (6.2), sest iseärane punkt on ka teist järku joonel. Seega iseäraste punktide koordinaadid saame võrrandisüsteemist

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_1 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_2 = 0 \\ a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + a = 0. \end{cases}$$

Viimase võrrandisüsteemi saab asendada lihtsamaga, kuid samaväärsega selle võrrandisüsteemiga. Selleks me lahutame kolmandast võrrandist x_1-kordse esimese ja x_2-kordse teise võrrandi. Saame

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_1 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_2 = 0 \\ a_1x_1 + a_2x_2 + a = 0. \end{cases}$$

Selle võrrandisüsteemi abil on kerge leida teist järku joonte erinevate tüüpide korral iseärased punktid, kasutades selleks joonte kanoonilisi võrrandeid

(2.10) – (2.18). Refereerivalt ütleme, et ellipsil, imaginaarsel ellipsil, paraboolil, parallelsel sirgepaaril ja imaginaarsel paraleelsel sirgepaaril ei ole iseäraseid punkte. Lõikuval sirgepaaril ja imaginaarsel lõikuval sirgepaaril reaalse lõikepunktiga on ainult üks iseärane punkt, milleks on nende lõikepunkt. Ühtuval sirgepaaril iga punkt on iseärane punkt.

Teeme nüüd ka kokkuvõtte puutuja kohta. Teist järku joone igas mitteiseärases punktis on olemas puutuja, mis määratakse võrrandiga (6.8). Iseärases punktis puutujat ei ole olemas.

Paneme veel kirja ellipsi, hüperbooli ja parabooli puutuja võrrandi, kui nad on antud kanooniliste võrranditega (2.10), (2.13) ja (2.15). Puutujavõrranditeks vastavalt on puutepunkkti $M(m_1, m_2)$ korral:

$$\frac{m_1 x_1}{\alpha_1^2} + \frac{m_2 x_2}{\alpha_2^2} = 1, \quad \frac{m_1 x_1}{\alpha_1^2} - \frac{m_2 x_2}{\alpha_2^2} = 1, \quad m_2 x_2 = p(x_1 + m_1).$$

7. TEIST JÄRKU JOONE TÜÜBI MÄÄRAMINE INVARIANTIDE ABIL

Olgu antud teist järku joon võrrandiga

$$\gamma : a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + a = 0$$

mingi reeperi $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ suhtes. Tema vasak pool

$$f(x_1, x_2) := a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + a$$

on kahemuutuja polünoom. Muutujateks on x_1 ja x_2. Minnes üle uuele reeperile $\{O'; \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2\}$, siis see polünoom uutes koordinaatides x'_1 ja x'_2 saab kuju

$$f(x'_1, x'_2) = a'_{11}(x'_1)^2 + 2a'_{12}x'_1x'_2 + a'_{22}(x'_2)^2 + 2a'_1x'_1 + 2a'_2x'_2 + a',$$

mis on taas kahemuutuja polünoom uute muutujate x'_1 ja x'_2 suhtes. Seejuures polünoomi $f(x_1, x_2)$ kordajad $a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_1, a_2, a$ teisenevad uuteks kordajateks $a'_{11}, a'_{12}, a'_{22}, a'_1, a'_2, a'$. Vaatamata sellele saab neist moodustada avaldisi $I(a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_1, a_2, a)$, mis ei sõltu sellest, millise reeperi suhtes me nad leiame.

Definitsioon 7.1. *Avaldist*

$$I(a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_1, a_2, a)$$

nimetame kahemuutuja polünoomi

$$f(x_1, x_2) := a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + a$$

invariandiks, kui üleminekul mistahes teisele reeperile $\{O'; \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2\}$, *arv* $I(a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_1, a_2, a)$ *ei muutu, s.o.*

$$I(a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_1, a_2, a) = I(a'_{11}, a'_{12}, a'_{22}, a'_1, a'_2, a').$$

Definitsioon 7.2. *Kahemuutuja polünoomi* $f(x_1, x_2)$ *invarianti üleminekul ristreeperilt mistahes teisele ristreeperile nimetame ortogonaalinvariandiks.*

Jїgnevas me vaatleme ainult kahemuutuja polünoomi ortogonaalinvariante.

Teoreem 7.1. *Kahemuutuja polünoomi*

$$f(x_1, x_2) := a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + a$$

ortogonaalinvariantideks on

$$\delta := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$\Delta := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a \end{vmatrix}$$

ja

$$s := a_{11} + a_{22}. \tag{7.1}$$

Tõestus. Nagu me esimeses paragrahvis nägime saab üleminekut ühelt ristreeperilt mistahes teisele ristreeperile jagada kolmeks sammuks: a) pööre, b) lüke ja c) peegeldus. Seega teoreem on tõestatud, kui me näitame, et δ, Δ ja s on pöörde,lükke ja peegelduse ortogonaalinvariandid. Ristreeperis $\{O'; \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2\}$ tähistame neid väidetavaid ortogonaalinvariante δ', Δ' ja s' abil. Tõestusel on meile abiks esimese paragrahvi valemid.

a) Ristreeperi pöörde korral valemite (1.11) ja (1.13) abil saame

$$\delta' = |A'| = |C^\top AC| = |C^\top||A||C| = |C|^2\delta,$$

$$\Delta' = |\overline{A}'| = |\overline{C}^\top \overline{A}\,\overline{C}| = |\overline{C}^\top||\overline{A}||\overline{C}| = |\overline{C}|^2\Delta.$$

Valemite (1.15) ja (1.12) tõttu $|C| = 1$ ja $|\overline{C}| = 1$. Seega

$$\Delta' = \Delta, \quad \delta' = \delta.$$

Valemite (1.16) abil saame

$$s' = a'_{11} + a'_{22} = (\cos^2 t\ a_{11} + 2\sin t\cos t\ a_{12} + \sin^2 t\ a_{22}) +$$

$$+ (\sin^2 t\ a_{11} - 2\sin t\cos t\ a_{12} + + \cos^2 t\ a_{22}) =$$

$$= (\cos^2 t + \sin^2 t)a_{11} + (\cos^2 t + \sin^2 t)a_{22} = a_{11} + a_{22} = s.$$

Seega δ, Δ ja s on reeperi pöörde invariandid.

b) Reeperi lükke korral kasutame valemeid (1.8). Kuna $a'_{11} = a_{11}$, $a'_{12} = a_{12}$ ja $a'_{22} = a_{22}$, siis vahetult näeme $\delta' = \delta$ ja $s' = s$. Arvu Δ invariantsuse näitamiseks tuleb arvestada, et

$$a'_1 = a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + a_1, \quad a'_2 = a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + a_2,$$

$$a' = a_{11}c_1^2 + 2a_{12}c_1c_2 + a_{22}c_2^2 + 2a_1c_1 + 2a_2c_2 + a = f(c_1, c_2).$$

Me saame

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_1 \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_2 \\ a'_1 & a'_2 & a' \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + a_2 \\ a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + a_1 & a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + a_2 & f(c_1, c_2) \end{vmatrix}.$$

Determinandi omaduste tõttu võime kolmandast reast lahutada c_1-kordse esimese ja c_2-kordse teise rea. Saame

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + a_2 \\ a_1 & a_2 & a_1c_1 + a_2c_2 + a_1 + a \end{vmatrix}.$$

Nüüd lahutame kolmandast veerust c_1-kordse esimese ja c_2-kordse teise veeru. Saame

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a \end{vmatrix} = \Delta.$$

Sellega oleme näidanud, et δ, Δ ja s on reeperi lükke invariandid.

c) Reeperi peegelduse korral kasutame valemeid (1.18), s.t.

$$\begin{aligned} a'_{11} &= a_{11}, \quad a'_{12} = -a_{12}, \quad a'_{22} = a_{22}, \\ a'_1 &= \pm a_1, \quad a'_2 = \mp a_2, \qquad a' = a. \end{aligned}$$

Me saame

$$\delta' = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \delta,$$

$$s' = a'_{11} + a'_{22} = a_{11} + a_{22} = s,$$

ja

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_1 \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_2 \\ a'_1 & a'_2 & a' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & -a_{12} & \pm a_1 \\ -a_{21} & a_{22} & \mp a_2 \\ \pm a_1 & \mp a_2 & a \end{vmatrix}.$$

Tuues esimesel sammul kolmandast reast ja veerust ette ± 1 ja teisel sammul teisest reast ja veerust ette -1, me saame

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_{11} & -a_{12} & a_1 \\ -a_{21} & a_{22} & -a_2 \\ a_1 & -a_2 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a \end{vmatrix} = \Delta.$$

Seega δ, Δ ja s on reeperi peegelduse invariandid. Kokkovõttes teoreem on tõestatud. ♠

Teoreem 7.2. *Kahemuutuja polünoomi*

$$f(x_1, x_2) := a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + a$$

korral

$$K = \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a \end{vmatrix} \tag{7.2}$$

on invariant ristreeperi pöörde ja peegelduse suhtes (*ortogonaalinvariant*), *kui teist järku joon*

$$\gamma : a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + a = 0$$

on tsentraalne või parabool (*paar paralleelseid, paar imaginaarseid paralleelseid või paar ühtuvaid sirgeid*).

Tõestus. Jälle jaotama oma tõestuse kolme ossa.

a) Veendume, et K on ristreeperi pöörde invariant. Valemite (1.17) abil saame

$$K' = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_1 \\ a'_1 & a' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{22} & a'_2 \\ a'_2 & a' \end{vmatrix} = s'a' - (a'_1)^2 - (a'_2)^2 =$$

$$= sa - (\cos t \ a_1 + \sin t \ a_2)^2 - (-\sin t \ a_1 + \cos t \ a_2)^2 =$$

$$= sa - a_1^2 - a_2^2 = K.$$

Seega K on ristreeperi pöördeinvariant.

b) Veendume, et K on ka peegelduse invariant. Kasutame valemeid (1.18). Me saame

$$K' = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_1 \\ a'_1 & a' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{22} & a'_2 \\ a'_2 & a' \end{vmatrix} = s'a' - (a'_1)^2 - (a'_2)^2 =$$

$$= sa - (\pm a_1)^2 - (\mp a_2)^2 = sa - a_1^2 - a_2^2 = K.$$

Seega K on ristreeperi peegelduse invariant.

c) Jääb veel uurida arvu K käitumist reeperi lükke korral. Kui teist järku joon on tsentraalne, siis lükkel K muutub. Näitame seda, lähtudes vaadeldavate teist järku joonte kanoonilistest võrranditest (2.10) – (2.14). Viimased saab korraga kirja panna järgmiselt:

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \epsilon\frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = k, \quad \epsilon \in \{1, -1\}; \quad k \in \{0, 1, -1\}.$$

Näiteks paar lõikuvaid sirgeid saame, kui $\epsilon = -1$ ja $k = 0$. Vaadeldavate teist järku joonte korral

$$K = \begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha_1^2} & 0 \\ 0 & -k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\epsilon}{\alpha_2^2} & 0 \\ 0 & -k \end{vmatrix} = -k\Big(\frac{1}{\alpha_1^2} + \frac{\epsilon}{\alpha_2^2}\Big).$$

Teeme nüüd reeperi lükke, viies nüüd reeperi alguspunkti mistahes punkti $C(c_1, c_2)$. Valemite (1.8) abil leiame oma teist järku joone võrrandis uued kordajad, milleks on

$$a'_{11} = \frac{1}{\alpha_1^2},\ a'_{12} = 0,\ a'_{22} = \frac{\epsilon}{\alpha_2^2},\ a'_1 = \frac{c_1}{\alpha_1^2},\ a'_2 = \frac{\epsilon c_2}{\alpha_2^2},\ a' = \frac{c_1^2}{\alpha_1^2} + \epsilon\frac{c_2^2}{\alpha_2^2} - k.$$

Kerge on nüüd leida K'. Saame

$$K' = \begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha_1^2} & \frac{c_1}{\alpha_1^2} \\ \frac{c_1}{\alpha_1^2} & \frac{c_1^2}{\alpha_1^2} + \epsilon\frac{c_2^2}{\alpha_2^2} - k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\epsilon}{\alpha_2^2} & \frac{\epsilon c_2}{\alpha_2^2} \\ \frac{\epsilon c_2}{\alpha_2^2} & \frac{c_1^2}{\alpha_1^2} + \epsilon\frac{c_2^2}{\alpha_2^2} - k \end{vmatrix} = K + \frac{\epsilon}{(\alpha_1\alpha_2)^2}(c_1^2 + c_2^2).$$

Siit näeme, et tsentraalse joone korral K ei ole reeperi lükke invariant. Veendume, et ka parabooli korral K ei ole reeperi lükke invariant. See on tõepoolest nii, sest, lähtudes parabooli kanoonilisest võrrandist (2.15), saame

$$a_{12} = 0, \quad a_{12} = 0, \quad a_{22} = 1, \quad a_1 = -2p, \quad a_2 = 0, \quad a = 0$$

ja

$$a'_{12} = 0, \quad a'_{12} = 0, \quad a'_{22} = 1, \quad a'_1 = -2p, \quad a'_2 = c_2, \quad a' = c_2^2 - 2pc_1,$$

mille abil

$$K = -4p^2, \quad K' = K - 2pc_1.$$

Seega K ei ole reeperi lükke invariant.

Lõpuks veendume, et K on reeperi lükke invariant, kui teist järku joonteks on reaalsete, imaginaarsete paralleelsete või ühtuvate sirgete paar. Viimaste kanoonilised võrrandid (2.16) – (2.18) saame ka siin korraga kirja panna valemiga

$$x_2^2 - k = 0.$$

Siin reaalsete paralleelsete, imaginaarsete paralleelsete sirgete ja ühtuvate sirgete korral on vastavalt $k > 0$, $k < 0$ ja $k = 0$. Selgitame, mida on ikkagi vaja kontrollida. Kuidas me saime teises paragrahvis jutuks olevate teist järku joonte kanoonilised võrrandid? Kõigepealt tegime ristreeperi pöörde, seejärel vajaduse korral peegelduse ja lõpuks lükke. Kahe esimese sammu korral on tõestatud, et K on invariant. Vaja on kontrollida invariantsust viimasel sammul. Ilmselt võime teha selle kontrolli, kui uurime K teisenemist, viies teist järku joone kanoonilise kuju korral kasutatava reeperi alguspunkti tagasi punkti, kus ta oli pärast reeperi pööret ja peegeldamist. Kuna

$$a_{12} = 0, \quad a_{12} = 0, \quad a_{22} = 1, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad a = -k$$

ja

$$a'_{12} = 0, \quad a'_{12} = 0, \quad a'_{22} = 1, \quad a'_1 = 0, \quad a'_2 = c_2, \quad a' = c_2^2 - k,$$

siis

$$K = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -k \end{vmatrix} = -k$$

ja

$$K' = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c_2^2 - k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & c_2 \\ c_2 & c_2^2 - k \end{vmatrix} = K.$$

Näeme, et K on lükke invariant. Teoreem on tõestatud. ♠

Järgnevas me anname teist järku joone invariandi mõiste.

Definitsioon 7.3. *Teist järku joone, antuna võrrandiga*

$$\gamma : a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + a = 0 \tag{7.3}$$

mingi ristreeperi $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ *suhtes, ortogonaalinvariandiks nimetatakse arvu* $I(a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_1, a_2, a)$, *mis ei muutu üleminekul mistahes teisele ristreeperile* $\{O'; \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2\}$, *s.o.*

$$I(a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_1, a_2, a) = I(a'_{11}, a'_{12}, a'_{22}, a'_1, a'_2, a').$$

Esmapilgul jääb mulje, et teist järku joone ortogonaalinvariandi mõiste langeb kokku võrrandi vasakul poolel oleva kahemuutuja polünoomi ortogonaalinvariandi mõistega. Tegelikult see päriselt nii ei ole. Põhjuseks on asjaolu, et teist järku joone võrrand ei ole üheselt määratud. Ta on määratud kordaja täpsusega. Sama teist järku joone võrranditeks on ka iga võrrand, mis saame võrrandist (7.3) tema läbikorrutamisel mistahes nullist erineva arvuga k Seega teist järku joonel γ on lõpmatult palju võrrandeid. Nendeks on

$$\begin{aligned} \gamma : \quad & (ka_{11})x_1^2 + 2(ka_{12})x_1x_2 + (ka_{22})x_2^2 + 2(ka_1)x_1 + \\ & + 2(ka_2)x_2 + (ka) = 0, \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{aligned} \tag{7.4}$$

Tähistame võrrandite (7.3) ja (7.4) vasaku poole invariante nagu eespool. Seega vastavavalt δ, s, Δ, K ja δ', s', Δ', K' abil. Kuna

$$\delta' = \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{vmatrix} = k^2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = k^2\delta,$$

$$s' = ka_{11} + ka_{22} = k(a_{11} + a_{22}) = ks,$$

$$\Delta' = \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_1 \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_2 \\ ka_1 & ka_2 & ka \end{vmatrix} = k^3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a \end{vmatrix} = k^3\Delta,$$

$$K = \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_1 \\ ka_1 & ka \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ka_{22} & ka_2 \\ ka_2 & ka \end{vmatrix} = k^2 \left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a \end{vmatrix} \right) = k^2 K,$$

siis

$$\delta\,' = k^2\delta, \quad s\,' = ks, \quad \Delta\,' = k^3\Delta, \quad K\,' = k^2K.$$

Siit näeme, et δ, s, Δ ja K ei ole teist järku joone γ ortogonaalinvariandid. Küll näeme, et kui neist suurustest mõni võrdub nulliga (ei võrdu nulliga), siis nii on see igas ristreeperis. Seega olla null (mitte olla null) on teist järku joone ortogonaalinvariant. Ka näeme, et δ, $s\Delta$ ja K on märgi invariandid. Nende viimaste faktide kasutamine võimaldab määrata teist järku joone tüübi. Selgitame öeldut lähemalt. Kohe märgime, et teist järku joone ortogonaalinvariandi võib arvutada olenemata sellest millise ristreeperi suhtes on teist järku joone võrrand antud. Kõige lihtsam on kasutada nendeks kanoonilisi võrrandeid, mis on antud valemitega (2.10)–(2.18). Parema jälgimise huvides esitame nad uuesti.

1) Ellips kanoonilise võrrandiga

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 1. \tag{7.5}$$

2) Imaginaarne ellips kanoonilise võrrandiga

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = -1. \tag{7.6}$$

3) Paar lõikuvaid imaginaarseid sirgeid reaalse lõikepunktiga. Kanooniliseks võrrandiks on

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 0. \tag{7.7}$$

4) Hüperbool kanoonilise võrrandiga

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} - \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 1. \tag{7.8}$$

5) Paar lõikuvaid sirgeid kanoonilise võrrandiga

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} - \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 0. \tag{7.9}$$

6) Parabool kanoonilise võrrandiga

$$x_2^2 = 2px_1. \tag{7.10}$$

7) Paar ühtuvaid sirgeid kanoonilise võrrandiga

$$x_2^2 = 0. \tag{7.11}$$

8) Paar paralleelseid (seejuures mitteühtuvaid) sirgeid kanoonilise võrrandiga

$$x_2^2 - c^2 = 0, \quad c > 0. \tag{7.12}$$

9) Paar paralleelseid (seejuures mitteühtuvaid) imaginaarseid sirgeid kanoonilise võrrandiga

$$x_2^2 + c^2 = 0, \quad c > 0. \tag{7.13}$$

Need üheksa klassi saame jagada kaheks δ abil. Nimelt $\delta \neq 0$ korral saame tsentraalsed teist järku jooned (7.5) – (7.9) ja $\delta = 0$ korral mittetsentraalsed teist järku jooned (7.10) – (7.13). Lugeja hooleks jätame δ arvutamise kanooniliste võrrandite abil. Veelgi enam, tsentraalsed teist järku jooned saame jagada omakorda kaheks δ märgi järgi. Ellipsi, imaginaarse ellipsi ja kahe imaginaarse lõikuva sirge korral on $\delta = \frac{1}{(\alpha_1\alpha_2)^2} > 0$ ning hüperbooli ja kahe lõikuva sirge korral $\delta = -\frac{1}{(\alpha_1\alpha_2)^2} < 0$. Osutub, et tsentraalsete teist järku joonte tüübid saame lõplikult määrata Δ ja $s\Delta$ abil. Hüperbooli ja lõikuvate sirgete korral, nagu nägime, on ühiseks tunnuseks $\delta < 0$. Esimesel juhul $\Delta = -\frac{1}{(\alpha_1\alpha_2)^2} \cdot 1 \neq 0$ ja teisel juhul $\Delta = -\frac{1}{(\alpha_1\alpha_2)^2} \cdot 0 = 0$. Seega $\delta < 0$ ja $\Delta \neq 0$ korral on tegemist hüperbooliga ning $\delta < 0$ ja $\Delta = 0$ korral kahe lõikuva sirgega. Ellipsi, imaginaarse ellipsi ja imaginaarsete lõikuvate sirgete paari saab omavahel eristada. Kahel esimesel juhul on $\Delta = \mp\frac{1}{(\alpha_1\alpha_2)^2} \neq 0$ ja viimasel juhul $\Delta = \frac{1}{(\alpha_1\alpha_2)^2} \cdot 0 = 0$. Kaks esimest juhtu saab omavasel lahutada $s\Delta$ märgi abil, sest

$$s\Delta = \mp\Big(\frac{1}{\alpha_1^2} + \frac{1}{\alpha_2^2}\Big)\frac{1}{(\alpha_1\alpha_2)^2}.$$

Seega ellipsi korral $\delta > 0$ ja $s\Delta < 0$, imaginaarse ellipsi korral $\delta > 0$ ja $s\Delta > 0$ ning imaginaarsete lõikuvate sirgepaari korral $\delta > 0$ ja $s\Delta = 0$. Seega tsentraalse teist järku joone tüüpi invariantide järgi oskame määrata.

Tuleb uurida veel mittetsentraalseid teist järku jooni. Parabooli korral $\Delta = -p^2 \neq 0$, aga reaalse kui ka imaginaarse paralleelse sirgepaari ja ühtuva sirgepaari korral $\Delta = 0$. Seega $\delta = 0$ ja $\Delta \neq 0$ korral on teist järku joon parabool. Reaalse, imaginaarse paralleelse ja ühtuva sirgepaari omavaheliseks lahutamiseks kasutama märgi-invarianti K. Siin me pole ka ära unustanud teoreemi 7.2. Lugejale jätame veenduda, et nende kolme teist järku joone korral vastavalt on $K < 0$, $K > 0$ ja $K = 0$. Seega reaalse paralleelse sirgepaari korral $\delta = 0$ ja $K < 0$, imaginaarse sirgepaari korral $\delta = 0$ ja $K > 0$ ning ühtuva sirgepaari korral $\delta = 0$ ja $K = 0$. Seega me oskame määrata teist järku joone tüüpi invariantide abil.

Saadud tulemused on esitatud tabelina paragrahvi lõpus.

Näide. *Määrata invariantide abil järgmiste teist järku joonte*

$$\begin{array}{rc}
1) & 3x_1^2 - 8x_1x_2 + 7x_2^2 + 8x_1 - 16x_2 + 20 = 0, \\
2) & 5x_1^2 + 14x_1x_2 + 11x_2^2 + 12x_1 - 8x_2 + 19 = 0, \\
3) & x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2^2 - 4x_1 - 6x_2 + 3 = 0, \\
4) & x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 2x_1 + 4x_2 + 1 = 0, \\
5) & 4x_1^2 - 12x_1x_2 + 9x_2^2 + 25 = 0, \\
6) & x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 4x_1 - 6x_2 + 29 = 0
\end{array}$$

tüüp.

Esimese teist järku joone korral

$$\delta = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 7 \end{vmatrix} = 5 > 0, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 4 \\ -4 & 7 & -8 \\ 4 & -8 & 20 \end{vmatrix} = 52,$$

$$s = 3 + 7 = 10, \quad s\Delta > 0.$$

Tegemist on imaginaarse ellipsiga.

Teise teist järku joone korral

$$\delta = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 11 \end{vmatrix} = 6 > 0, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 7 & 11 & -4 \\ 6 & -4 & 19 \end{vmatrix} = -698,$$

$$s = 5 + 11 = 16, \quad s\Delta < 0.$$

Tegemist on ellipsiga.

Kolmanda teist järku joone korral

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -3 < 0, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -3 \\ -2 & -3 & 3 \end{vmatrix} = -22 \neq 0.$$

Tegemist on hüperbooliga.

Neljanda teist järku joone korral

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

Tegemist on parabooliga.

Viienda teist järku joone korral

$$\delta = \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 9 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 4 & -6 & 0 \\ -6 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{vmatrix} = 0,$$

$$K = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 25 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 25 \end{vmatrix} = 325 > 0.$$

Tegemist on paralleelsete imaginaarsete sirgete paariga.

Kuuenda teist järku joone korral

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 29 \end{vmatrix} = 0.$$

Jooneks on *paar lõikuvaid imaginaarseid sirgeid reaalse lõikepunktiga.*

Joone tüübi määramine invariantide abil

Joone nimetus	*Kanooniline võrrand*	*Joone invariandid*
1. Ellips	$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 1$	$\delta > 0, \quad s\Delta < 0$
2. Imaginaarne ellips	$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = -1$	$\delta > 0, \quad s\Delta > 0$
3. Paar lõikuvaid imaginaarseid sirgeid	$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 0$	$\delta > 0, \quad s\Delta = 0$
4. Hüperbool	$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} - \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 1$	$\delta < 0, \quad \Delta \neq 0$
5. Paar lõikuvaid sirgeid	$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} - \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 0$	$\delta < 0, \quad \Delta = 0$
6. Parabool	$x_2^2 = 2px_1, p > 0$	$\delta = 0, \quad \Delta \neq 0$
7. Paar paralleelseid sirgeid	$x_2^2 - c^2 = 0, c > 0$	$\delta = 0, \Delta = 0, K < 0$
8. Paar paralleelseid imaginaarseid sirgeid	$x_2^2 + c^2 = 0, c > 0$	$\delta = 0, \Delta = 0, K > 0$
9. Paar ühtuvaid sirgeid	$x_2 = 0$	$\delta = 0, \Delta = 0, K = 0$

8. TEIST JÄRKU JOONE ASENDI MÄÄRAMINE PEASIHTIDE JA INVARIANTIDE ABIL

Asume määrama teist järku joone asendit invariantide abil. Seejuures ei ole sugugi oluline millise ristreeperi suhtes on antud teist järku joone võrrand.

Püstitatud ülesande lahendamiseks on meile kõigepealt vajalik tutvuda teist järku joone peasihi mõistega.

Definitsioon 8.1. *Olgu antud teist järku joon oma võrrandiga*

$$\gamma : a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + a = 0 \qquad (8.1)$$

mingi ristreeperi $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ *suhtes. Tema peasihiks nimetatakse sellist mitteasümptootilist sihti* $L(\vec{s})$, *mis on risti tema poolt määratud diameetriga*

$$d_\gamma(\vec{s}) : (a_{11}s_1 + a_{12}s_2)x_1 + (a_{21}s_1 + a_{22}s_2)x_2 + (a_1s_1 + a_2s_2) = 0. \quad (8.2)$$

Leiame sellele definitsioonile tuginedes, eeskirja, kuidas leida teist järku joone peasihti. Viiendas paragrahvis me tähistasime vektori $\vec{s}$ poolt määratud sihti $L(\vec{s})$ abil. Teeme samamoodi ka siin. Selleks, et $L(\vec{s})$ oleks peasiht, on vaja leida vektori $\vec{s}$ koordinaadid s_1 js s_2. Seejuures need koordinaadid ei tohi korraga olla võrdsed nulliga, sest sihti määrav vektor $\vec{s}$ ei tohi olla nullvektor. Lisaks sellele peavad koordinaadid s_1 ja s_2 olema määratud kordsuse täpsusega, sest siht $L(\vec{s})$ ei sõltu sellest. Muidugi otsitav siht peab olema teist järku joone mitteasümptootiline siht. Seega peab (3.8) tõttu kehtima

$$a_{11}s_1^2 + 2a_{12}s_1s_2 + a_{22}s_2^2 \neq 0.$$

Peasihi $L(\vec{s})$ korral peab vektor $\vec{s}$ olema risti tema poolt määratud diameetriga $d_\gamma(\vec{s})$ ehk tema normaalvektor

$$\vec{n} = (a_{11}s_1 + a_{12}s_2, \quad a_{21}s_1 + a_{22}s_2),$$

mis on saadud valemist (8.2), peab olema kollineaarne vektoriga $\vec{s}$. Seega

$$\vec{n} = \lambda\vec{s} \Longleftrightarrow \begin{cases} a_{11}s_1 + a_{12}s_2 = \lambda s_1 \\ a_{21}s_1 + a_{22}s_2 = \lambda s_2 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} (a_{11}-\lambda)s_1 + a_{12}s_2 = 0 \\ a_{21}s_1 + (a_{22}-\lambda)s_2 = 0 \end{cases}. \tag{8.3}$$

Sellest kahe tundmatuga lineaarvõrrandisüsteemist tuleb leida peasihti määrava vektori koordinaadid s_1 ja s_2. Esialgu tekitab segadust selles lineaarvõrrandisüsteemis suurus λ, sest me ei tea millega ta konkreetselt võrdub. Seda teadmata me oma lineaarvõrrandisüsteemi aga ei saa ju lahendada. Tegelikult asi nii lootuseta ei olegi. Nimelt lineaarvõrrandisüsteemi (8.3) lahendiks ei kõlba null-lahend. Selleks peab süsteemi maatriksi astak olema väiksem kui kaks ehk samaväärselt selle maatriksi determinant peab võrduma nulliga. Seda teame me aga algebra kursusest. Niisiis

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

millest

$$\lambda^2 - s\lambda + \delta = 0. \tag{8.4}$$

Meenutuseks märgime, et

$$s = a_{11} + a_{22}, \quad \delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2, \tag{8.5}$$

mis muuseas on ortogonaalinvariandid. Sellest jääb mulje, et see võrrand on ühesugune olenemata sellest, millise ristreeperi suhtes on teist järku joone võrrand (8.1) antud. Tegelikult on siin küll üks väike probleem, sest teist järku joonel on ühe ja sama ristreeperi suhtes lõpmatu palju võrrandeid. Lisaks võrrandile (8.1) on tema võrrandiks iga võrrand, mis saame võrrandi (8.1) läbikorrutamisel mistahes nullist erineva arvuga k. Seega sama teist järku joone võrranditeks sama ristreeperi suhtes on ka

$$\gamma : a'_{11}x_1^2 + 2a'_{12}x_1x_2 + a'_{22}x_2^2 + 2a'_1x_1 + 2a'_2x_2 + a' = 0,$$

kus

$$\begin{array}{lll} a'_{11} = ka_{11}, & a'_{12} = ka_{12}, & a'_{22} = ka_{22}, \\ a'_1 = ka_1, & a'_2 = ka_2, & a' = ka. \end{array}$$

Sellest tulenevalt

$$s' = a'_{11} + a'_{22} = ks, \quad \delta' = a'_{11}a'_{22} - (a'_{12})^2 = k^2\delta.$$

Võrrand (8.4) on nüüd juba kujuga

$$(\lambda')^2 - s'\lambda' + \delta' = 0.$$

Tema lahendite jaoks saame

$$\lambda'_i = \frac{1}{2}(s' \pm \sqrt{(s')^2 - 4\delta'}) = \frac{1}{2}k(s \pm \sqrt{s^2 - 4\delta}) = k\lambda_i, \quad i \in \{1, 2\}.$$

Seega teist järku joone võrrandi korrutamisel nullist erineva arvuga k korrutub sama arvuga ka λ, s.o. $\lambda' = k\lambda$. Tekib küsimus, kas nüüd muutub ka peasiht. Selle selgitamiseks tuleb uurida lineaarvõrrandisüsteemi (8.3) käitumist. Teist järku joone uue võrrandi korral selleks süsteemiks on

$$\begin{cases} (a'_{11} - \lambda')s_1 + a'_{12}s_2 = 0 \\ a'_{21}s_1 + (a'_{22} - \lambda')s_2 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} (ka_{11} - k\lambda)s_1 + ka_{12}s_2 = 0 \\ ka_{21}s_1 + (ka_{22} - k\lambda)s_2 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} k[(a_{11} - \lambda)s_1 + a_{12}s_2] = 0 \\ k[a_{21}s_1 + (a_{22} - \lambda)s_2] = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} (a_{11} - \lambda)s_1 + a_{12}s_2 = 0 \\ a_{21}s_1 + (a_{22} - \lambda)s_2 = 0 \end{cases}.$$

Siit näeme, et teist järku joone võrrandi korrutamisel mistahes nullist erineva arvuga, tema peasihid sellest ei sõltu.

Pöördume nüüd tagasi võrrandi (8.4) juurde. *Ruutvõrrandit* (8.4) *nimetatakse teist järku joone karakteristlikuks võrrandiks ja tema lahendeid omaväärtusteks.* Kuna karakteristliku võrrandi diskriminant

$$\mathcal{D} = s^2 - 4\delta = (a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 \quad (8.6)$$

ei ole negatiivne, siis omaväärtused on alati reaalsed. Seejuures muidugi võivad nad olla erinevad kui ka kokkulangevad olenevalt kordajatest teist järku joone võrrandis. Seega segadust tekitavast suurusest λ lineaarvõrrandisüsteemis (8.3) oleme lahti saanud: ta tuleb järgimööda asendada omaväärtusega ja igakord lahendada lineaarvõrrandisüsteem (8.3). Tähistame ruutvõrrandi (8.4) lahendeid, nagu tavaks, λ_1 ja λ_2 abil. Viete'i valemite kohaselt

$$s = \lambda_1 + \lambda_2, \quad \delta = \lambda_1\lambda_2. \quad (8.7)$$

Järgneva analüüsi jagame kaheks olenevalt sellest, kas δ on nullist erinev või on null. Teisiti öelduna, kas teist järku joon on tsentraalne või mittetsentraalne.

1. Olgu $\delta \neq 0$. Vaatluse all on tsentraalsed teist järku jooned. Seega kas 1) ellips, 2) imaginaarne ellips, 3) kaks imaginaarset lõikuvat sirget, 4) hüperbool või 5) kaks lõikuvat sirget. Muuseas varasemast teame, et kolmel esimesel teist järku joonel ei ole asümptootilisi sihte, kahel viimasel on kaks erinevat asümptootilist sihti. Seda fakti on aga kasulik silmas pidada peasihi määramisel. Valemi (8.7) teise abil saame öelda, et omaväärtused λ_1 ja λ_2 on nullist erinevad. Vaadeldava juhu jagame siit alates omakorda kaheks diskriminandi $\mathcal{D}$ järgi.

a) Vaatleme esmalt olukorda $\mathcal{D} > 0$. Sel korral omaväärtused on omavahel erinevad. Järgnevas lahendame lineaarvõrrandisüsteemi (8.3) kummagi omaväärtuse korral. Selle arutelu saame teha korraga, tähistades omaväärtused λ_i abil, kus $i \in \{1,2\}$. Lineaarvõrrandisüsteem (8.3) saab kuju

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_i)s_1 + a_{12}s_2 = 0 \\ a_{21}s_1 + (a_{22} - \lambda_i)s_2 = 0 \end{cases}. \tag{8.8}$$

Kuna

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda_i & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda_i \end{vmatrix} = 0,$$

siis sellel lineaarvõrrandisüsteemil leidub null-lahendist erinev lahend, mida tähistame $\vec{s}_i = (s_1^{(i)}, s_2^{(i)})$ abil. Kuna lineaarvõrrandisüsteem (8.8) on homogeenne, siis tema lahend on muuseas määratud kordaja täpsusega. Nüüd peame veel kontrollima, et siht $L(\vec{s}_i)$ on mitteasümptootiline. See on tõepoolest nii. Kuna $s_1^{(i)}$ ja $s_2^{(i)}$ on lineaarvõrrandisüsteemi (8.8) lahendid, siis

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_i)s_1^{(i)} + a_{12}s_2^{(i)} = 0 \\ a_{21}s_1^{(i)} + (a_{22} - \lambda_i)s_2^{(i)} = 0 \end{cases}$$

ehk

$$a_{11}s_1^{(i)} + a_{12}s_2^{(i)} = \lambda_i s_1^{(i)}, \quad a_{21}s_1^{(i)} + a_{22}s_2^{(i)} = \lambda_i s_2^{(i)}. \tag{8.9}$$

Viimase abil saame

$$(a_{11}s_1^{(i)} + a_{12}s_2^{(i)})s_1^{(i)} + (a_{21}s_1^{(i)} + a_{22}s_2^{(i)})s_2^{(i)} = \lambda_i[(s_1^{(i)})^2 + (s_2^{(i)})^2] \neq 0$$

ehk

$$a_{11}(s_1^{(i)})^2 + 2a_{12}s_1^{(i)}s_2^{(i)} + a_{22}(s_2^{(i)})^2 \neq 0.$$

Seega siht $L(\vec{s}_i)$ on mitteasümptootiline. Sihi $L(\vec{s}_i)$ ristseis diameetriga $d_\gamma(\vec{s}_i)$ tuleneb valemist (8.9). Veendume selles.

Teoreem 8.1. *Kuis teist järku joon on tsentraalne, mille omaväärtused on omavahel erinevad ja ei võrdu nulliga, siis tema peasihid on risti.*

Tõestus. Tingimusest (8.9) me $i = 1$ ja $i = 2$ korral saame

$$(a_{11}s_1^{(1)} + a_{12}s_2^{(1)})s_1^{(2)} + (a_{21}s_1^{(1)} + a_{22}s_2^{(1)})s_2^{(2)} = \lambda_1(s_1^{(1)}s_1^{(2)} + s_2^{(1)}s_2^{(2)})$$

ja

$$(a_{11}s_1^{(2)} + a_{12}s_2^{(2)})s_1^{(1)} + (a_{21}s_1^{(2)} + a_{22}s_2^{(2)})s_2^{(1)} = \lambda_2(s_1^{(1)}s_1^{(2)} + s_2^{(1)}s_2^{(2)}).$$

Näeme, et nende seoste vasakud pooled on võrdsed. Seega on võrdsed ka paremad pooled. Me saame

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(s_1^{(1)}s_1^{(2)} + s_2^{(1)}s_2^{(2)}) = 0.$$

Kuna omaväärtused λ_1 ja λ_2 on omavahel erinevad, siis seetõttu

$$s_1^{(1)}s_1^{(2)} + s_2^{(1)}s_2^{(2)} = 0 \Longleftrightarrow \langle \vec{s}_1, \vec{s}_2 \rangle \Longleftrightarrow \vec{s}_1 \perp \vec{s}_2.$$

Sellega teoreem on tõestatud. ♠

Teoreem 8.2. *Tsentraalse teist järku joone, mille omaväärtused on omavahel erinevad ja ei võrdu nulliga, keskpunkti läbivad peasihiga sirged on tema sümmeetriatelgedeks.*

Tõestus. Kasutame tsentraalsete joonte kanoonilisi võrrandeid. Nagu teame on sel korral reeper kanooniline. Seega reeperi alguspunkt on joone keskpunktis ja baasivektorid on sümmeetriatelgede sihilised. Nagu eelmise paragrahvi tabelist näeme, on

$$a_{11} = \frac{1}{\alpha_1^2}, \quad a_{22} = \frac{\epsilon}{\alpha_2^2}, \quad a_{12} = 0, \quad \epsilon = \pm 1.$$

Ellipsi, imaginaarse ellipsi ja lõikuvate imaginaarsete sirgete korral on $\epsilon = 1$ ning hüperbooli ja lõikuvate sirgete korral $\epsilon = -1$. Neid teist järku joonte tüüpe eristame vabaliikme $\overline{a}$ järgi. Ta on vastavalt paar rida eespool loetletud teist järku joonte järjekorrale järgmine

$$1)\quad \overline{a} = -1, \quad 2)\quad \overline{a} = 1, \quad 3)\quad \overline{a} = 0, \quad 4)\quad \overline{a} = -1, \quad 5)\quad \overline{a} = 0. \quad (8.10)$$

Paneme tähele, et
$$s = \frac{1}{\alpha_1^2} + \frac{\epsilon}{\alpha_2^2}, \quad \delta = \frac{\epsilon}{(\alpha_1\alpha_2)^2}.$$
Kuna karakteristliku võrrandi diskriminandiks on
$$\mathcal{D} = s^2 - 4\delta = \Big(\frac{1}{\alpha_1^2} - \frac{\epsilon}{\alpha_2^2}\Big)^2,$$
siis tema lahendid avalduvad
$$\lambda_i = \frac{1}{2}(s \pm \sqrt{\mathcal{D}}) = \frac{1}{2}\Big[\Big(\frac{1}{\alpha_1^2} + \frac{\epsilon}{\alpha_2^2}\Big) \pm \Big(\frac{1}{\alpha_1^2} - \frac{\epsilon}{\alpha_2^2}\Big)\Big],$$
millest
$$\lambda_1 = \frac{1}{\alpha_1^2}, \quad \lambda_2 = \frac{\epsilon}{\alpha_2^2}. \tag{8.11}$$
Siit saame
$$\alpha_1^2 = \frac{1}{\lambda_1}, \quad \alpha_2^2 = \frac{\epsilon}{\lambda_2}. \tag{8.12}$$
Leiame nüüd kummalegi omaväärtusele vastavad peasihid. Selleks tuleb moodustada lineaarvõrrandisüsteem (8.8). Kummagi omaväärtuse korral üks võrranditest on samasus. Omaväärtuse λ_1 korral saame peasihti määravaks alles jäänud võrrandiks $(\lambda_2 - \lambda_1)s_2 = 0$. Siit $\lambda_1 \neq \lambda_2$ tõttu $s_2 = 0$. Kuna s_1 on suvaline, siis võime võtta $s_1 = 1$. Seega peasihti määravaks vektoriks saame kanoonilise reeperi esimese baasivektori, s.o. $\vec{s}_1 = \vec{e}_1$. Analoogiliselt teisele omaväärtusele vastav peasiht määratakse vektoriga $\vec{s}_2 = \vec{e}_2$. Seega saadut arvestades, saame öelda, et tsentraalse teist järku joone keskpunkti läbivad peasihi sihilised sirged on joone sümmeetriateljed. Sellega teoreem on tõestatud. ♠

Nüüd saame teha juba mitmed tähelepanekuid. Esialgu küll tsentraalsete teist järku joonte kohta. *Nimelt teist järku joone ehitust võime uurida mistahes ristreeperi suhtes.* Ei pea käituma nagu teises paragrahvis, kus me läksime üle kanoonilisele reeperile, sest ainult sel korral me oskasime uurida oma teist järku joont. Nüüd me aga toimime järgmiselt. *Esiteks* invariantide abil määrame joone tüübi. *Teiseks* leiame valemi (8.5) abil ortogonaalinvariandid s ja δ. *Kolmandaks* moodustame karakteristliku võrrandi ja leiame omaväärtused. Kui viimased rahuldavad meie juhu nõudeid, siis *neljandaks* leiame peasihid. Neid määravad vektorid $\vec{s}_1$

ja $\vec{s}_2$ võime võtta pikkusega üks, sest nad on määratud niikuinii kordsuse täpsusega. *Viiendaks* leiame valemi (4.3) abil keskpunkti C. Nüüd võime öelda, et ristreeper $\{C; \vec{s}_1, \vec{s}_2\}$ on meie tsentraalse teist järku joone kanooniline reeper. Lõpuks ei ole raske leida kanoonilises reeperis oma joone kanoonilist võrrandit. Siin lähevad käiku omaväärtused. Nende ja (8.10) abil saama kirjutada

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \epsilon \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} + \overline{a} = 0.$$

Valemi (8.11) abil saame

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \overline{a} = 0.$$

Viimases on veel suurus $\overline{a}$, mis ei ole arvutatud meile antud teist järku joone invariantide kaudu. Püüame sellest hädast lahti saada. Selleks kasutame invarianti Δ, mille võime leida mistahes ristreeperi suhtes antud teist järku joone võrrandist. Leiame ta esmalt kanoonilise võrrandi abil, s.o. viimase võrrandi abil. Me saame viimase ja valemi (8.12) abil $\Delta = \lambda_1 \lambda_2 \overline{a} = \delta \overline{a}$, millest $\overline{a} = \frac{\Delta}{\delta}$. Seega saame

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0. \tag{8.13}$$

Viimane on sisuliselt meie tsentraalse teist järku joone kanooniline võrrand. Temas esinevad kõik kordajad on invariandid, mis saame arvutada teist järku joone võrrandi kordajate järgi. Seejuures ei ole oluline, millise ristreeperi suhtes tema võrrand on antud.

b) Vaatleme nüüd olukorda $\mathcal{D} = 0$. Valemi (8.6) abil saame

$$a_{11} = a_{22}, \quad a_{12} = 0, \tag{8.14}$$

kusjuures $a_{11} \neq 0$. Vastasel juhul ei ole ju tegemist teist järku joonega. Me saame nullist erineva $\delta = a_{11}^2$ kohta öelda, et ta on positiivne. Seega vaatluse all on kas ellips, imaginaarne ellips või imaginaarsete lõikuvate sirgete paar. Seejuures on neil $\mathcal{D} = 0$ tõttu mingi täiendav omadus, mis selgub kohe järgnevas. Selleks täpsustame tingimuste (8.14) abil teist järku joone võrrandit (8.1). Me saame

$$\gamma: \quad a_{11}(x_1^2 + x_2^2) + 2a_1 x_1 + 2a_2 x_2 + a = 0.$$

Korrutame viimast läbi nullist erineva teguriga $k = \frac{1}{a_{11}}$, mille tõttu

$$x_1^2 + x_2^2 + 2\frac{a_1}{a_{11}}x_1 + 2\frac{a_2}{a_{11}}x_2 + \frac{a}{a_{11}} = 0$$

ehk

$$\Big(x_1 + \frac{a_1}{a_{11}}\Big)^2 + \Big(x_2 + \frac{a_2}{a_{11}}\Big)^2 = \frac{a_1^2 + a_2^2 - a^2}{a_{11}^2}. \tag{8.15}$$

Tunneme ära, et tegemist on ringjoonega, mille keskpunktiks on punkt $C(-\frac{a_1}{a_{11}}, -\frac{a_2}{a_{11}})$ ja raadiuseks

$$r = \frac{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 - a^2}}{|a_{11}|}.$$

Siin $a_1^2+a_2^2-a^2 > 0$ korral on ringjoone raadius reaalne , $a_1^2+a_2^2-a^2 < 0$ korral mittereaalne ja $a_1^2+a_2^2-a^2 = 0$ korral "rigjoone" raadius on võrdne nulliga. Need ringjooned, olenevalt oma raadiusest, on vastavalt ellipsi, imaginaarse ellipsi ja imaginaarsete lõikuvate sirgete erijuht. Viies oma teist järku joone võrrandi kujule (8.15), saame kätte keskpunkti ja raadiuse, mis võimaldab meil ringjoone kanda kohe joonisele. Imaginaarsetel juhtudel jääb joonisele ainult nende keskpunkt, sest teisi reaalseid punkte lihtsalt ei ole.

Uurime veel, mida võime öelda vaadeldavate teist järku joonte peasihtide kohta. Kuna $s = 2a_{11}$ ja $\delta = a_{11}^2$, siis $\delta = \Big(\frac{s}{2}\Big)^2 \neq 0$. Karakteristlik võrrand (8.4) praegu annab

$$\lambda^2 - s\lambda + \Big(\frac{s}{2}\Big)^2 = 0 \Longleftrightarrow \Big(\lambda - \frac{s}{2}\Big)^2 = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{s}{2} \neq 0.$$

Näeme, et omaväärtused on võrdsed ja nullist erinevad. Omaväärtuste võrdsuse tõttu peasihte määrav lineaarvõrrandisüsteem (8.3) on kummagi omaväärtuse korral ühesugune. Seega need kaks peasihti langevad kokku. Leiame nüüd selle ühtuva peasihtide paari. Ilmselt me ei ole unustanud, et

$$a_{11} = a_{22} = \frac{s}{2}, \quad a_{12} = 0.$$

Peasihte määrav lineaarvôrrandisüsteem (8.3) viimaste tõttu saab kuju

$$\begin{cases} 0s_1 + 0s_2 = 0 \\ 0s_1 + 0s_2 = 0 \end{cases}.$$

Näeme, et selline "lineaarvõrrandisüsteem" ei pane koordinaatide s_1 ja s_2 valikule mingeid kitsendusi. Seega iga vektor $\vec{s} \neq \vec{0}$ määrab peasihtide paari. Siin me pidasime ka silmas, et vaadeldavate teist järku joonte kõik sihid on mitteasümptootilised.

2. Olgu $\delta = 0$. Vaatluse all on mittetsentraalsed teist järku jooned. Nendeks on 6) parabool, 7) paralleelsete sirgete paar, 8) paralleelsete imaginaarsete sirgete paar või 9) ühtuvate sirgete paar. Siin on juhtude nummerdamisel kasutatud eelmise paragrahvi tabelis kasutatud numbreid. Tingimusest $\delta = 0$ saame teha kaks tähelepanekut. Esiteks

$$\delta = 0 \Longleftrightarrow a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \Longleftrightarrow a_{11}a_{22} = a_{12}^2,$$

millest näeme, et a_{11} ja a_{22} ei ole korraga võrdsed nulliga, sest vastasel juhul on ka $a_{12} = 0$ mistõttu vaadeldav joon ei ole teist järku joon nagu eeldatakse. Juhul kui $a_{12} \neq 0$, siis a_{11} ja a_{22} on samamärgilised. Teiseks tingimuse $\delta = 0$ võime kirjutada determinandina

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Viimane ütleb, et selle determinandi üks rida on teise rea kordne. Oletame, et $a_{22} \neq 0$. Muuseas, kui $a_{22} = 0$, siis $a_{11} \neq 0$. Sel korral analüüs on samasugune juhule $a_{22} \neq 0$. Tehtud eeldusel toodud determinandi esimene rida on avaldatav teise rea kordsena. Tähistame kordsuse tegurit k abil, mis lubab meil kirjutada

$$a_{11} = ka_{12}, \quad a_{12} = ka_{22}. \tag{8.16}$$

Järgnevas leiame omaväärtused ja nende abil peasihid. Kuna meil aga $s = a_{11} + a_{22} \neq 0$, siis karakteristlikust võrrandist

$$\lambda^2 - s\lambda = 0,$$

näeme, et üks omaväärtustest on võrdne nulliga. Tähistame teda λ_1 abil. Saime $\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = s \neq 0$. Leiame nüüd nende omaväärtuste poolt määratud peasihid.

Omaväärtuse $\lambda_1 = 0$ korral valem (8.3) annab

$$\begin{cases} a_{11}s_1 + a_{12}s_2 = 0 \\ a_{21}s_1 + a_{22}s_2 = 0 \end{cases}.$$

Selles lineaarvõrrandisüsteemis olulisi võrrandeid on ainult üks. Nimelt esimene võrrand on järeldus teisest, sest valemi (8.16) tõttu teise võrrandi korrutamisel teguriga k saame

$$a_{12}s_1 + a_{22}s_2 = 0 \Longrightarrow k(a_{12}s_1 + a_{22}s_2) = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (ka_{12})s_1 + (ka_{22})s_2 = 0 \Longrightarrow a_{11}s_1 + a_{12}s_2 = 0.$$

Seega alles jääb ainult võrrand

$$a_{12}s_1 + a_{22}s_2 = 0. \tag{8.17}$$

Selle üheks lahendiks on

$$s_1 = a_{22}, \quad s_2 = -a_{12}.$$

Mistahes teine lahend on selle lahendi kordne. Kuna kõik nad määravad sama sihi, siis me võime töötada vektori

$$\vec{s}_1 = (a_{22}, -a_{12}) \neq \vec{0}$$

poolt määratud sihiga $L(\vec{s}_1)$. Kahjuks see siht ei osutu peasihiks, sest ta pole mitteasümptootiline. Tõepoolest

$$a_{11}s_1^2 + 2a_{12}s_1s_2 + a_{22}s_2^2 = (a_{11}s_1 + a_{12}s_2)s_1 + (a_{21}s_1 + a_{22}s_2)s_2 =$$

$$= k(a_{12}s_1 + a_{22}s_2)s_1 + (a_{21}s_1 + a_{22})s_2 = (a_{12}s_1 + a_{22})(ks_1 + s_2) =$$

$$= (a_{12}a_{22} - a_{22}a_{12})(ks_1 + s_2) = 0.$$

Seega omaväärtuse $\lambda_1 = 0$ poolt määratud siht ei ole peasiht, sest ta on asümptootiline. Selle asjaolu teadmine on meile siiski kasuks, sest mittetsentraalsetel teist järku joontel on kaks kokkulangevat asüptootilist sihti. Parabooli korral on ta tema telje sihiks ja ülejäänud paraleelsete või ühtuvate sirgete sihiks. Viimase saame leida võrrandi (8.17) lahendina.

Teise omaväärtuse $\lambda_2 = s$ korral peasihti määravas lineaarvõrrandisüsteemis

$$\begin{cases} (a_{11} - s)s_1 + a_{12}s_2 = 0 \\ a_{21}s_1 + (a_{22} - s)s_2 = 0 \end{cases}$$

ehk

$$\begin{cases} -a_{22}s_1 + a_{12}s_2 = 0 \\ \quad a_{21}s_1 - a_{11}s_2 = 0 \end{cases}$$

olulisi võrrandeid on taas üks, nimelt esimene, sest

$$-a_{22}s_1 + a_{12}s_2 = 0 \Longrightarrow k(-a_{22}s_1 + a_{12}s_2) = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow -(ka_{22})s_1 + (ka_{12})s_2 = 0 \Longrightarrow a_{21}s_1 - a_{11}s_2 = 0.$$

Lähtudes esimesest võrrandist, saime teise. Seega alles jääb võrrand

$$a_{22}s_1 - a_{12}s_2 = 0.$$

Tema lahend määrab vektori

$$\vec{s}_2 = (a_{12}, a_{22}) \neq \vec{0},$$

mis omakorda määrab sihi $L(\vec{s}_2)$. Tegemist on mitteasümptootilise sihiga, sest

$$a_{11}s_1^2 + 2a_{12}s_1s_2 + a_{22}s_2^2 = (a_{11}s_1 + a_{12}s_2)s_1 + (a_{21}s_1 + a_{22}s_2)s_2 =$$

$$= \lambda_2 s_1^2 + \lambda_2 s_2^2 = s(s_1^2 + s_2^2) \neq 0.$$

Järelikult siht $L(\vec{s}_2)$ on peasiht. Huvitav on märgata, et asümptootiline siht $L(\vec{s}_1)$ ja peasiht $L(s_2)$ on teineteisega risti, sest

$$\langle \vec{s}_1, \vec{s}_2 \rangle = a_{22}a_{12} - a_{12}a_{22} = 0 \Longleftrightarrow \vec{s}_1 \perp \vec{s}_2.$$

Kui me võtame vektorid $\vec{s}_1$ ja $\vec{s}_2$ pikkusega üks, siis baas $\{\vec{s}_1, \vec{s}_2\}$ on meie mittetsentraalsete teist järku joonte kanooniline baas. Paralleelsete, imaginaarsete paralleelsete sirgete ja ühtuvate sirgete korral saab leida (4.3) abil keskpunktide sirge. Fikseerime sellel vabalt ühe keskpunkti C, siis reeper $\{C; \vec{s}_1, \vec{s}_2\}$ on kanooniline reeper.

Keskpunktita parabooli korral on kanoonilise reeperi alguspunkt parabooli tipus. Probleem on selles, et kuidas aga tippu leida. Selgitame seda. Võtame paraboolil suvalise punkti $M(m_1, m_2)$. Muidugi tema koordinaadid rahuldavad parabooli võrrandit, s.o.

$$a_{11}m_1^2 + 2a_{12}m_1m_2 + a_{22}m_2^2 + 2a_1m_1 + 2a_2m_2 + a = 0$$

ehk

$$\begin{gathered}(a_{11}m_1 + a_{12}m_2 + a_1)m_1 + (a_{21}m_1 + a_{22}m_2 + a_2)m_2 + \\ + a_1m_1 + a_2m_2 + a = 0.\end{gathered} \tag{8.18}$$

Punkti $M(m_1, m_2)$ läbiv puutuja antakse võrrandiga (vt. (6.8))

$$p(M): \quad (a_{11}m_1 + a_{12}m_2 + a_1)x_1 + (a_{21}m_1 + a_{22}m_2 + a_2)x_2 +$$

$$+(a_1m_1 + a_2m_2 + a) = 0.$$

Kui me valime parabooli sellise puutuja, mis on risti parabooli telje sihti määrava vektoriga $\vec{s}_1$, siis punkt $M(m_1, m_2)$ on parabooli tipp. Sellise puutuja normaalvektor

$$\vec{n} = (a_{11}m_1 + a_{12}m_2 + a_1, \quad a_{21}m_1 + a_{22}m_2 + a_2)$$

on sel korral vektori $\vec{s}_1$ kordne. Seega

$$a_{11}m_1 + a_{21}m_2 + a_1 = a_{22}t,$$

$$a_{21}m_1 + a_{22}m_2 + a_2 = -a_{12}t. \tag{8.19}$$

Siin oleva parameetri t saame kätte, kui neist esimest korrutame teguriga a_{22} ja teist aga teguriga $-a_{12}$ ja kokku liidame, saame

$$(a_{12}^2 + a_{22}^2)t = a_1a_{22} - a_2a_{12},$$

millest

$$t = \frac{a_1 a_{22} - a_2 a_{12}}{a_{12}^2 + a_{22}^2}. \qquad (8.20).$$

Valemi (8.19) abil saame lihtsustada valemit (8.18). Saame

$$t(a_{22}m_1 - a_{12}m_2) + a_1 m_1 + a_2 m_2 + a = 0. \qquad (8.21)$$

Lahendades nüüd süsteemi, mis koosneb võrranditest (8.19) – (8.21), saame parabooli tipu koordinaadid. Seega ka parabooli korral on kirjeldatud, kuidas leida tema kanooniline reeper.

Lõpuks kirjeldame, kuidas invariantide abil leida mittetsentraalsete joonte korral nende kanoonilisi võrrandeid. Kuna arvutame käib invariantide abil, siis võime nad leida ükskõik, millise ristreeperis antud võrrandi abil. Tegelikult kasutame kanoonilisi võrrandeid, mis on läbi korrutatud mistahes nullist erineva arvuga.

Parabooli korral lähtume võrrandist

$$a_{22}x_2^2 + 2a_1 x_1 = 0.$$

Kuna

$$a_{22} = s = \lambda_2 \quad \Delta = -a_1^2 a_{22} = -a_1^2 \lambda_2 \Longleftrightarrow a_1 = \pm\sqrt{-\frac{\Delta}{\lambda_2}},$$

siis parabooli kanooniliseks võrrandiks on

$$\lambda_2 x_2^2 \pm \sqrt{-\frac{\Delta}{\lambda_2}} = 0. \qquad (8.22)$$

Siin ülemise (alumise) märgi korral on kanoonilise reeperi esimene baasivektor rakendatuna parabooli tipust piki parabooli telge suunatud paraboolist eemale (parabooli "sisse").

Kolme tüüpi sirgepaarid saame anda ehituselt ühesuguste võrrandiga. Nimelt

$$a_{22}x_2^2 + a = 0$$

abil. Nagu parabooli korral

$$a_{22} = \lambda_2, \quad K = aa_{22} = a\lambda_2 \Longleftrightarrow a = \frac{K}{\lambda_2},$$

mistõttu

$$\lambda_2 x_2^2 + \frac{K}{\lambda_2} = 0. \tag{8.23}$$

Paralleelsete sirgete korral $\frac{K}{\lambda_2} < 0$, imaginaarsete paralleelsete sirgete korral $\frac{K}{\lambda_2} > 0$ ja kahe ühtuva sirge korral $K = 0$.

Lõpuks toome mõningad näited. Me määrame teist järku joone tüübi, leiame invariantide abil tema kanoonilise võrrandi, seejärel leiame kanoonilise reeperi. Lõpuks veendume, et üleminekuga kanoonilisele reeperile saame oma joonele taas kanoonilise võrrandi, mis eelnevalt on leitud invariantide abil.

Näide 1. *Teist järku joon on antud ristreeperi* $\{O;\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$ *suhtes võrrandiga*

$$5x_1^2 + 8x_1x_2 + 5x_2^2 - 18x_1 - 18x_2 + 9 = 0.$$

Kuna

$$\delta = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 9 > 0, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 5 & 4 & -9 \\ 4 & 5 & -9 \\ -9 & -9 & 9 \end{vmatrix} = -81,$$

$$s = 5 + 5 = 10, \quad s\Delta < 0,$$

siis vaadeldavaks teist järku jooneks on *ellips.* Karakteristlikust võrrandist

$$\lambda^2 - 10\lambda + 9 = 0$$

saame omaväärtusteks $\lambda_1 = 1$ ja $\lambda_2 = 9$. Valemi (8.13) abil saame ellipsi kanooniliseks võrrandiks

$$\frac{X_1^2}{9} + \frac{X_2^2}{1} = 1.$$

Siin X_1 ja X_2 tähistavad punkti koordinaate ellipsi kanoonilises reeperis. Ellipsi poolteljed on $\alpha_1 = 3$ ja $\alpha_1 = 1$. Leiame ellipsi kanoonilise reeperi. Tema alguspunktiks on ellipsi keskpunkt. Valemi (4.3) kohaselt tema koordinaadid saadakse süsteemist

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 = 9 \\ 4x_1 + 5x_2 = 9 \end{cases}.$$

Seega ellipsi keskpunktiks on $C(1,1)$. Baasivektorid määratakse peasihti määrava vektori poolt. Viimane tuleb võtta pikkusega üks. Omaväärtuse $\lambda_1 = 1$ korral tuleb moodustada lineaarvõrrandisüsteem (8.3). Süsteemi jääb võrrand

$$s_1 + s_2 = 0,$$

millest normeeritud lahendivektoriks on

$$\vec{e}\,'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1).$$

Teise omaväärtuse $\lambda_2 = 9$ korral võrrandist

$$-s_1 + s_2 = 0$$

saame normeeritud lahendivektoriks seekord

$$\vec{e}\,'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1).$$

Ellipsi kanooniliseks reeperiks on $\{C; \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2\}$. Viimase abil saame kontrollida invariantide abil leitud kanoonilise võrrandi õigsust. Algebra ja geomeetria kursusest teame, et baasiteisendusel, praegu

$$\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\} \longrightarrow \{C; \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2\},$$

korral punkti koordinaadid teisenevad valemitega

$$x_1 = \frac{X_1 + X_2}{\sqrt{2}} + 1, \quad x_2 = \frac{-X_1 + X_2}{\sqrt{2}} + 1.$$

Lugejal soovitame kontrollida, et asendades siit joone võrrandisse, saame eespool leitud kanoonilise võrrandi.

Näide 2. *Teist järku joon on antud ristreeperi* $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ *suhtes võrrandiga*

$$7x_1^2 - 24x_1x_2 - 38x_1 + 24x_2 + 175 = 0.$$

Sel korral

$$\delta = \begin{vmatrix} 7 & -12 \\ -12 & 0 \end{vmatrix} = -144 < 0, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 7 & -12 & -19 \\ -12 & 0 & 12 \\ -19 & 12 & 175 \end{vmatrix} = -144^2 \neq 0,$$

$$s = 7 + 0 = 7.$$

Kuna $\delta < 0$ ja $\Delta \neq 0$, siis vaadeldavaks teist järku jooneks on *hüperbool.* Karakteristlikust võrrandist

$$\lambda^2 - 7\lambda - 144 = 0$$

saame omaväärtusteks $\lambda_1 = -9$ ja $\lambda_2 = 16$. Valemi (8.13) abil saame hüperbooli kanooniliseks võrrandiks

$$-\frac{X_1^2}{16} + \frac{X_2^2}{9} = 1.$$

Ka siin X_1 ja X_2 tähistavad punkti koordinaate hüperbooli kanoonilises reeperis. Hüperbooli poolteljed on $\alpha_1 = 4$ ja $\alpha_2 = 3$. Leiame hüperbooli kanoonilise reeperi. Tema alguspunktiks on hüperbooli keskpunkt. Valemi (4.3) kohaselt tema koordinaadid saadakse süsteemist

$$\begin{cases} 7x_1 - 12x_2 = 19 \\ x_1 = 1 \end{cases}.$$

Seega hüperbooli keskpunktiks on $C(1, -1)$. Baasivektorid määratakse ka siin peasihte määravate vektorite poolt. Viimane tuleb võtta pikkusega üks. Omaväärtuse $\lambda = -9$ korral tuleb moodustada lineaarvõrrandisüsteem (8.3). Süsteemi jääb võrrand

$$4s_1 - 3s_2 = 0,$$

millest normeeritud lahendivektoriks on

$$\vec{e}\,'_1 = \frac{1}{5}(3, 4).$$

Teise omaväärtuse $\lambda = 16$ korral võrrandist

$$3s_1 + 4s_2 = 0$$

saame normeeritud lahendivektoriks seekord

$$\vec{e}\,'_2 = \frac{1}{5}(-4, 3).$$

Hüperbooli kanooniliseks reeperiks on $\{C; \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2\}$. Viimase abil saame kontrollida invariantide abil leitud kanoonilise võrrandi õigsust. Baasiteisenduse

$$\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\} \longrightarrow \{C; \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2\},$$

korral punkti koordinaadid teisenevad valemitega

$$x_1 = \frac{3X_1 - 4X_2}{5} + 1, \quad x_2 = \frac{4X_1 + 3X_2}{5} - 1.$$

Lugejal soovitame ka seekord kontrollida, et asendades siit joone võrrandisse, saame eespool leitud kanoonilise võrrandi.

Näide 3. *Teist järku joon on antud ristreeperi* $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ *suhtes võrrandiga*

$$7x_1^2 + 6x_1x_2 - x_2^2 + 28x_1 + 12x_2 + 28 = 0.$$

Sel korral

$$\delta = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -16 < 0, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 7 & 3 & 14 \\ 3 & -1 & 6 \\ 14 & 6 & 28 \end{vmatrix} = 0,$$

$$s = 7 + 0 = 7.$$

Kuna $\delta < 0$ ja $\Delta = 0$, siis vaadeldavaks teist järku jooneks on *paar lõikuvaid sirgeid.* Karakteristlikust võrrandist

$$\lambda^2 - 6\lambda - 16 = 0$$

saame omaväärtusteks $\lambda_1 = 8$ ja $\lambda_2 = -2$. Valemi (8.13) abil saame selle lõikuva sirgepaari kanooniliseks võrrandiks

$$\frac{X_1^2}{1} - \frac{X_2^2}{4} = 0.$$

Leiame selle lõikuva sirgepaari kanoonilise reeperi. Tema alguspunktiks on tema keskpunkt. Valemi (4.3) kohaselt süsteemist

$$\begin{cases} 7x_1 + 3x_2 = -14 \\ \;\;3x_1 - x_2 = -6 \end{cases},$$

keskpunktiks saame $C(-2,0)$. Baasivektorid määratakse ka siin peasihte määravate vektorite poolt. Omaväärtuse $\lambda_1 = 8$ korral võrrandist

$$-s_1 + 3s_2 = 0$$

normeeritud lahendivektoriks saame

$$\vec{e}\,'_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}(3,1).$$

Teise omaväärtuse $\lambda_2 = -2$ korral võrrandist

$$3s_1 + s_2 = 0$$

saame siin normeeritud lahendivektoriks

$$\vec{e}\,'_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}(-1,3).$$

Lõikuva sirgepaari kanooniliseks reeperiks on $\{C;\vec{e}\,'_1,\vec{e}\,'_2\}$. Viimase abil saame kontrollida invariantide abil leitud kanoonilise võrrandi õigsust. Baasiteisenduse

$$\{O;\vec{e}_1,\vec{e}_2\} \longrightarrow \{C;\vec{e}\,'_1,\vec{e}\,'_2\},$$

korral punkti koordinaadid teisenevad valemitega

$$x_1 = \frac{3X_1 - X_2}{\sqrt{10}} - 2, \quad x_2 = \frac{X_1 + 3X_2}{\sqrt{10}}.$$

Lugejal soovitame ka seekord kontrollida, et asendades siit joone võrrandisse, saame eespool leitud kanoonilise võrrandi.

Näide 4. *Teist järku joon on antud ristreeperi* $\{O;\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$ *suhtes võrrandiga*

$$x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 8x_1 + 4 = 0.$$

Sel korral

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -16,$$

$$s = 1 + 1 = 2.$$

Kuna $\delta = 0$ ja $\Delta \neq 0$, siis seekord teist järku jooneks on *parabool.* Karakteristlikust võrrandist

$$\lambda^2 - 2\lambda = 0$$

saame omaväärtusteks $\lambda_1 = 0$ ja $\lambda_2 = 2$. Valemi (8.22) abil saame parabooli kanooniliseks võrrandiks

$$X_2^2 = \pm 2\sqrt{2} X_1.$$

Siin ülemise (alumise) märgi korral kanoonilise reeperi esimene baasivektor rakendatuna parabooli tipust on suunatud tema fookuse suunas (fookusest eemale). Leiame parabooli kanoonilise reeperi. Tema alguspunktiks on tema tipp. Selleks tuleb valemi (8.20) abil arvutada parameeter t, mis praegu on -2. Nüüd tuleb valemite (8.19) ja (8.21) moodustada lineaarvõrrandisüsteem. Me saame

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ 3x_1 - x_2 = 2 \end{cases}.$$

Seega parabooli tipuks on punkt $C(1, 1)$. Baasivektorid määratakse ka siin analoogiliselt nagu eelmiste näidete korral. Omaväärtuse $\lambda_1 = 0$ korral võrrandist

$$s_1 + s_2 = 0,$$

normeeritud lahendivektoriks saame

$$\vec{e}\,'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1).$$

Teise omaväärtuse $\lambda = -2$ korral võrrandist

$$-s_1 + s_2 = 0$$

saame siin normeeritud lahendivektoriks

$$\vec{e}\,'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1).$$

Parabooli kanooniliseks reeperiks on $\{C; \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2\}$. Viimase abil saame kontrollida kumb invariantide abil leitud parabooli kanoonilistest võrranditest realiseerub valitud kanoonilise reeperi korral. Baasiteisenduse

$$\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\} \longrightarrow \{C; \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2\},$$

korral punkti koordinaadid teisenevad valemitega

$$x_1 = \frac{X_1 + X_2}{\sqrt{2}} + 1, \quad x_2 = \frac{-X_1 + X_2}{\sqrt{2}}.$$

Asendades siit joone võrrandisse, saame kanooniliseks võrrandiks

$$X_2^2 = 2\sqrt{2}X_1.$$

Seega kaanoonilise reeperi esimene baasivektor on suunatud tipust fookuse suunas.

Näide 5. *Teist järku joon on antud ristreeperi* $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ *suhtes võrrandiga*

$$x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + x_1 + x_2 = 0.$$

Sel korral

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$s = 1 + 1 = 2, \quad K = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}.$$

Kuna $\delta = 0$, $\Delta = 0$ ja $K < 0$, siis teist järku jooneks on *paar paralleelseid sirgeid.* Karakteristlikust võrrandist

$$\lambda^2 - 2\lambda = 0$$

saame omaväärtusteks $\lambda_1 = 0$ ja $\lambda_2 = 2$. Valemi (8.23) abil saame meie paralleelse sirgepaari kanooniliseks võrrandiks

$$X_2^2 = \frac{1}{8}.$$

Leiame oma joone kanoonilise reeperi. Reeperi alguspunktiks kõlbab mistahes keskpunkt keskpunktide sirgelt

$$x_1 + x_2 + \frac{1}{2} = 0,$$

näiteks $C(0, -\frac{1}{2})$. Baasivektorid määratakse ka siin analoogiliselt nagu eelmiste näidete korral. Omaväärtuse $\lambda_1 = 0$ korral võrrandist

$$s_1 + s_2 = 0,$$

normeeritud lahendivektoriks saame

$$\vec{e}\,'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1).$$

Teise omaväärtuse $\lambda = 2$ korral võrrandist

$$-s_1 + s_2 = 0$$

saame siin normeeritud lahendivektoriks

$$\vec{e}\,'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1).$$

Kanooniliseks reeperiks on $\{C; \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2\}$. Viimase abil saame kontrollida kanoonilise võrrando õigsust. Baasiteisenduse

$$\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\} \longrightarrow \{C; \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2\},$$

korral punkti koordinaadid teisenevad valemitega

$$x_1 = \frac{X_1 + X_2}{\sqrt{2}}, \quad x_2 = \frac{-X_1 + X_2}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}.$$

Asendades siit joone võrrandisse, peame samuti saama kanoonilise võrrandi.

9. ELLIPSI, HÜPERBOOLI JA PARABOOLI PUUTUJA ÜHEST OMADUSEST

Selles paragrahvis tutvustame lugejat ellipsi, hüperbooli ja parabooli puutuja ühe huvitava omadusega. Seejuures saab seda omadust huvitavalt tõlgendada optika abil, kasutades sealt fakti, et valguskiir on tõlgendatav sirgena ning tema peegeldumisel langemisnurk on võdne peegeldumisnurgaga.

Teoreem 9.1. *Ellipsi mistahes puutuja moodustab võrdsed nurgad puutepunkti fokaalraadiustega.*

Tõestus. Kasutame ellipsi kanoonilist võrrandit, milleks ristreeperi korral on

$$\epsilon : \frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 1.$$

Tema mistahes punkti $M(m_1, m_2)$ korral

$$M \in \epsilon \Longleftrightarrow \frac{m_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{m_2^2}{\alpha_2^2} = 1.$$

Tähistame fokaalraadiuste $r_1(M) = F_1M$ ja $r_2(M) = F_2M$ nurka puutujaga

$$p(M) : \quad \frac{m_1x_1}{\alpha_1^2} + \frac{m_2x_2}{\alpha_2^2} = 1$$

vastavalt $\beta_1(M)$ ja $\beta_2(M)$ abil. Teoreem käsib meil tõestada, et $\beta_1(M) = \beta_2(M)$. Ilmselt punkti M muutumisel ellipsil nurgad $\beta_1(M)$ ja $\beta_2(M)$ muutuvad, aga nende nurkade võrdsus peab säiluma. Tõmbame fookustest F_1 ja F_2 puutujani $p(M)$ ristlõigud F_1A_1 ja F_2A_2. Selleks et näidata $\beta_1(M) = \beta_2(M)$ on küllaldane näidata, et täisnurksed kolmnurgad ΔA_1MF_1 ja ΔA_2MF_2 on sarnased. Kasutades kolmnurkade sarnasuse omadust külgede kaudu, on vaja näidata, et vastavate külgede suhted on võrdsed. Seega on vaja näidata, et

$$\frac{F_1A_1}{F_2A_2} = \frac{F_1M}{F_2M} = \frac{A_1M}{A_2M}. \tag{9.1}$$

Tegelikult on siin küllaldane näidata ainult

$$\frac{F_1A_1}{F_2A_2} = \frac{F_1M}{F_2M}. \tag{9.2}$$

Viimasest valemist valem (9.1) juba järeldub. Selle näitamiseks eeldame, et kehtib (9.2). Tähistades

$$\frac{F_1A_1}{F_2A_2} = \frac{F_1M}{F_2M} = k \Longleftrightarrow F_1A_1 = kF_2A_2, \quad F_1M = kF_2M$$

ja kasutades Pythagorase teoreemi, saame

$$\frac{A_1M}{A_2M} = \frac{\sqrt{(F_1M)^2 - (F_1A_1)^2}}{\sqrt{(F_2M)^2 - (F_2A_2)^2}} = \frac{\sqrt{(kF_2M)^2 - (kF_2A_2)^2}}{\sqrt{(F_2M)^2 - (F_2A_2)^2}} = k,$$

mistõttu kehtib (9.1). Seega teoreemi tõestamiseks on vaja näidata valemi (9.2) kehtivust. Meenutame, et puutepunkti $M(m_1, m_2)$ fokaalraadiused avalduvad

$$F_1M = |em_1 + \alpha_1|, \quad F_2M = |em_1 - \alpha_1|.$$

Siin e on ellipsi ekstsentrilisus ja avaldub fookuste $F_1(-c, 0)$ ja $F_2(c, 0)$ koordinaatide kaudu valemiga $e = \frac{c}{\alpha_1}$. Lõikude F_1A_1 ja F_2A_2 pikkused aga ei ole midagi muud kui vastavalt fookuste F_1 ja F_2 kaugused puutujani $p(M)$, s.o. sirgeni. Teadaoleva valemi abil saame

$$F_iA_i = \frac{|\mp \frac{cm_1}{\alpha_1^2} - 1|}{\frac{m_1^2}{\alpha_1^4} + \frac{m_2^2}{\alpha_2^4}} = \frac{|em_1 \pm \alpha_1|}{\alpha_1\left(\frac{m_1^2}{\alpha_1^4} + \frac{m_2^2}{\alpha_2^4}\right)} = \frac{F_iM}{\alpha_1\left(\frac{m_1^2}{\alpha_1^4} + \frac{m_2^2}{\alpha_2^4}\right)}, \quad i \in \{1, 2\}.$$

Viimase abil saame valemi (9.2). Sellega teoreem on tõestatud. ♠

Teoreem 9.2. *Hüperbooli mistahes puutuja jagab pooleks puutepunkti fokaalraadiuste vahelise nurga.*

Tõestus. Selle teoreemi on täiesti analoogiline eelmise teoreemi tõestusega. Vaatamata sellele me ta siiski esitame. Tõestuseks kasutame hüperbooli kanoonilist võrrandit, milleks ristreeperi korral on

$$h: \quad \frac{x_1^2}{\alpha_1^2} - \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 1.$$

Tema mistahes punkti $M(m_1, m_2)$ korral

$$M \in h \Longleftrightarrow \frac{m_1^2}{\alpha_1^2} - \frac{m_2^2}{\alpha_2^2} = 1.$$

Tähistame fokaalraadiuste $r_1(M) = F_1M$ ja $r_2(M) = F_2M$ nurka puutujaga

$$p(M): \quad \frac{m_1x_1}{\alpha_1^2} - \frac{m_2x_2}{\alpha_2^2} = 1$$

vastavalt $\beta_1(M)$ ja $\beta_2(M)$ abil. Teoreem käsib meil tõestada, et kehtib $\beta_1(M) = \beta_2(M)$. Ilmselt ka siin punkti M muutumisel hüperboolil nurgad $\beta_1(M)$ ja $\beta_2(M)$ muutuvad, aga nende nurkade võrdsus peab säiluma. Tõmbame fookustest F_1 ja F_2 puutujani $p(M)$ ristlõigud F_1A_1 ja F_2A_2. Selleks et näidata $\beta_1(M) = \beta_2(M)$ on küllaldane näidata, et täisnurksed kolmnurgad ΔA_1MF_1 ja ΔA_1MF_2 on sarnased. Kasutades kolmnurkade sarnasuse omadust külgede kaudu, on vaja näidata, et vastavate külgede suhted on võrdsed. Seega on vaja näidata, et

$$\frac{F_1A_1}{F_2A_2} = \frac{F_1M}{F_2M} = \frac{A_1M}{A_2M}. \tag{9.3}$$

Tegelikult on siin küllaldane näidata ainult

$$\frac{F_1A_1}{F_2A_2} = \frac{F_1M}{F_2M}. \tag{9.4}$$

Analoogiliselt nagu eelmise teoreemi tõestuse juures viimasest valemist (9.4) valem (9.3) juba järeldub. Seega teoreemi tõestamiseks on vaja näidata valemi (9.4) kehtivust. Meenutame, et puutepunkti $M(m_1, m_2)$ fokaalraadiused avalduvad, nagu ellipsi korral, samade valemite abil:

$$F_1M = |em_1 + \alpha_1|, \quad F_2M = |em_1 - \alpha_1|.$$

Siin e on hüperbooli ekstsentrilisus ja avaldub fookuste $F_1(-c, 0)$ ja $F_2(c, 0)$ koordinaatide kaudu valemiga $e = \frac{c}{\alpha_1}$. Ka see valem on samasugune, mis ellipsi korral. Lõikude F_1A_1 ja F_2A_2 pikkused aga ei ole midagi muud kui vastavalt fookuste F_1 ja F_2 kaugused puutujani $p(M)$, s.o. sirgeni. Rakendades algebra ja geomeetria kursusest valemit, kuidas leida punkti kaugust sirgeni, saame

$$F_iA_i = \frac{|\mp \frac{cm_1}{\alpha_1^2} - 1|}{\frac{m_1^2}{\alpha_1^4} + \frac{m_2^2}{\alpha_2^4}} = \frac{|em_1 \pm \alpha_1|}{\alpha_1\left(\frac{m_1^2}{\alpha_1^4} + \frac{m_2^2}{\alpha_2^4}\right)} = \frac{F_iM}{\alpha_1\left(\frac{m_1^2}{\alpha_1^4} + \frac{m_2^2}{\alpha_2^4}\right)}, \quad i \in \{1, 2\}.$$

Viimase abil saame valemi (9.3). Sellega teoreem on tõestatud. ♠

Teoreem 9.3. *Parabooli mistahes punkti puutuja lõikab võrdse nurga all puutepunkti fokaalraadiust ja sümmeetriatelge.*

Tõestus. Parabooli vabalt valitud punktis M joonestame puutuja $p(M)$. Tema nurka puutepunkti fokaalraadiusega ja parabooli teljega tähistame vastavalt $\alpha(M)$ ja $\beta(M)$ abil. Teoreem väidab, et iga punkti $M \in P$ korral need nurgad on omavahel võrdsed. Selle näitamiseks on küllaldane näidata, et kolmnurk ΔAMF on võrdhaarne. Siin punkt A on puutuja ja parabooli telje lõikepunkt. Teisiti öelduna on vaja näidata, et lõigud AF ja FM on pikkuselt võrdsed. Veendume selles.

Tõestamiseks lähtume parabooli P kanoonilisest võrrandist

$$P: \quad x_2^2 = 2px_1, \quad p > 0$$

antuna sobiva ristreeperi suhtes. Parabooli mistahes punktis

$$M(m_1, m_2) \in P \Longleftrightarrow m_2^2 = 2pm_1$$

puutujavõrrandiks on

$$p(M): \quad m_2x_2 = p(x_1 + m_1).$$

Lõikepunkti A koordinaadid saame süsteemist

$$\begin{cases} m_2x_2 = p(x_1 + m_1) \\ x_2 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow A(-m_1, 0).$$

Arvatavasti me pole unustanud, et $F(\frac{p}{2}, 0)$. Seega

$$AF = |\overrightarrow{AF}| = \sqrt{\left(\frac{p}{2} + m_1\right)^2} = \left|\frac{p}{2} + 1\right|$$

ja

$$FM = |\overrightarrow{FM}| = \sqrt{\left(m_1 - \frac{p}{2}\right)^2 + m_2^2} = \sqrt{\left(m_1 - \frac{p}{2}\right)^2 + 2pm_1} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{p}{2} + m_1\right)^2} = \left|\frac{p}{2} + 1\right|,$$

millest näeme, et $AF = FM$. Sellega teoreem on tõestatud. ♠

Lõpuks anname nendele teoreemidele geomeetrilise tõlgenduse, nagu eespool lubatud, optika abil.

Uurime ellipsi ükskõik kummast fookusest lähtuva valguskiire käiku. Alustagu valguskiir oma käiku fookusest F_1. Jõudes ellipsini mingis punktis M, ta peegeldub nii, et langemis- ja peegeldumisnurk on võrdsed. Nagu füüsikast on teada tuleb need nurgad võtta punkti M puutuja suhtes. Teoreemi 9.1 kohaselt läbib peegeldunud kiir teist fookust F_2. Seega on meil tegemist fookusest F_1 lähtuva kiire olukorraga. Seega pärast korduvaid peegeldumisi ellipsilt läbib ta kogu aeg fookusi senikaua kui kustub. Kui aga ühest fookusest lähtub valguskiirte kimp, siis iga kiir eraldi hakkab läbima fookusi. Seega fookuste kohale tekivad heledad täpid.

Püüame hüperbooli korral arutleda analoogiliselt. Teoreemi 9.2 abil näeme, et fookusest lähtuv valguskiir peegeldub nii, et temale toetuv sirge läbib teist fookust. Fookusest lähtuva kiirte kimbu korral on nii iga kimbu sirge korral.

Parabooli korral on olukord põnevam. Teoreemi 9.3 abil näeme, et fookusest lähtuv valguskiir peegeldub paraboolilt olles paralleelne tema teljega. Seega kiirte kimbu korral peegeldunud kiired on kõik paralleelsed parabooli teljega. Seega parabooli abil saab tekitada paralleelse kiirte kimbu. Tegelikult kasutatakse seda omadust vastupidises suunas. Parabooli asemel võetakse elliptiline pöördparaboloid. Nagu algebra ja geomeetria kursusest teame on tegemist pinnaga, mis saadakse parabooli pöörlemisel ümber oma telje. Kui kaugelt tulevad mingid signaalid, siis seda kimpu tuleb vaadelda koosnevana omavahel paralleelsetest "sirgetest". Suunates oma pöördpinna telje paralleelseks signaalide "sirgetega", siis nad peegelduvad ja läbivad kõik pinna fookust. Seega nad võimenduvad ja me võime "kuulata", millest nõrgad signaalid meiega räägivad.

10. ELLIPSI, HÜPERBOOLI JA PARABOOLI POLAARVÕRRAND

Osutub, et kolme kõige olulisema teist järku joone – ellipsi, hüperbooli ja parabooli – saab kirja panna ühesuguse võrrandiga, kui kasutame polaarkoordinaate. Neid jooni saab eristada sellesse võrrandisse kuuluva ekstsentrilisuse e järgi. Ellipsi korral $e \in (0,1)$, hüperbooli korral $e \in (1,\infty)$ ja parabooli korral $e = 1$. Nimetatud joonte uurimiseks varasemas algebra ja geomeetria kursuses kasutasime ristkoordinaate. On veel olemas polaarkoordinaadid, mis määravad punkti asukoha tasandil samahästi kui ristkoordinaadid. Punkti polaarkoorddinaatide mõiste andmiseks tuleb esmalt anda polaarkoordinaatsüsteemi mõiste. *Viimane koosneb punktist, mida nimetatakse pooluseks, ja temast lähtuvast kiirest ehk poolsirgest.* Võttes mingi polaarkoordinaatsüsteemi $\{Q, s\}$, saame tasandi mistahes punkti $X \neq Q$ asendi ka siin määrata kahe arvu abil. Üheks arvuks võtame punkti X kauguse pooluseni Q, mida tavaliselt tähistatakse r või täpsemalt r_X abil. Teiseks arvuks võtame pöördenurga, mis tekib kiire s pööramisel ümber pooluse Q punkti X läbivaks poolsirgeks s_X. Tähistame seda pöördenurka t, täpsemalt t_X abil. Nõuame, et $t \in [0, 2\pi)$, mille tulemusena punkti X teine polaarkoordinaat t_X määratakse üheselt.

Leiame nüüd ellipsi, hüperbooli ja parabooli võrrandi sobivalt valitud polaarkoordinaatsüsteemi korral. Olgu l vaadeldavate joonte juhtsirge ja F samapoolne fookus. Sirge s on fookust F läbiv ja juhtsirgega l ristuv sirge. Seega viimane sirge on joone sümmeetria telg. Algebra ja geomeetria kursusest teame, et punktihulk

$$\left\{X \middle| \quad \frac{r(X)}{d(X,l)} = e\right\} \tag{10.1}$$

on $e \in (0,1)$ on korral ellips, $e \in (1,\infty)$ korral hüperbool ja $e = 1$ korral parabool. Valemis (10.1) on $d(X,l)$ punkti X kaugus juhtsirgeni l ja $r(X)$ on vaadeldava joone punkti X fokaalraadius. Kõrvalolval joonisele on kantud joonest ainult osa. Olenevalt joonest tuleb seda ette kujutada kas osana ellipsist, osana hüperbooli ühest harust või osana paraboolist. Nüüd püüame võrrandi (10.1) kirja panna polaarkoordinaatides sobiva polaarkoordinaatsüsteemi korral. Viimase pooluseks valime joone fookuse F ja polaarteljeks sümmeetriateljest selle osa, mis lähtuvana poolusest eemaldub juhtsirgest. Tähistame viimast sama tähega, millega me tähistasime sümmeetriatelge, s.o. tähega s. Võrrandist (10.1) saame

$$r(X) = e\,d(X,l). \tag{10.2}$$

Siin joone suvalise punkti X fokaalraadius $r(X)$ on valitud polaarkoordinaatsüsteemi $\{Q,s\}$ korral ka esimeseks polaarkoordinaadiks. Seega kui valemis (10.2) õnnestub $d(X,l)$ avaldada polaarkoordinaatide kaudu, oleme me saanud joone võrrandi polaarkoordinaatides. Paneme tähele, et kui valemis (10.2) punktiks X on joone punkt P fookuse kohal, siis tema fookalraadiuseks on fokaalparameeter p. Seega

$$p = e\,d(P,l) \Longleftrightarrow p = e\,k \Longleftrightarrow k = \frac{p}{e}.$$

Siin k on on fookuse kaugus juhtsirgeni, mis on võrdne punkti P kaugusega samuti juhtsirgeni. Kerge on nüüd märgata, et

$$d(X,l) = k + r(X)\cos t_X = \frac{p}{e} + r(X)\cos t_X.$$

Siin t_X on teine polaarkoordinaat. Asendame siit valemisse (10.2). Me saame

$$r(X) = e\Big(\frac{p}{e} + r(X)\cos t_X\Big) \Longleftrightarrow r(X)(1 - e\cos t_X) = p,$$

millest

$$r(X) = \frac{p}{1 - e\cos t_X}$$

ehk ilma argumentideta

$$r = \frac{p}{1 - e\cos t}.$$

Saadud võrrand ongi kas ellipsi, hüperbooli ja parabooli võrrandiks polaarkoordinaatides olevalt ekstsentrilisusest e.

II.TEIST JÄRKU PINDADE EHITUSE UURIMINE KANOONILISE VÕRRANDI ABIL

11. ELLIPSOID

Definitsioon 11.1. *Punktihulka* $\{X\}$ *ruumis, mille iga punkti* X *koordinaadid* (x_1, x_2, x_3) *mingis ristreeperis* $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ *rahuldavad võrrandit*

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} + \frac{x_3^2}{\alpha_3^2} = 1, \tag{11.1}$$

kus α_1, α_2 *ja* α_3 *on positiivsed konstandid, nimetatakse ellipsoidiks.*

Selgitame esmalt ellipsoidi sümmeetria omadusi. Osutub, et ellipsoid on sümmeetriline kolme tasandi, kolme sirge ja ühe punkti suhtes. Valitud ristreeperi $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ korral on nendeks reeperitasandid, reeperiteljed ja reeperi alguspunkt. Veendume öeldus. Ruumi mistahes punkti $Z(z_1, z_2, z_3)$ korral temaga sümmeetrilised punktid Z_1, Z_2 ja Z_3 reeperitasandite $O\vec{e}_1\vec{e}_2$, $O\vec{e}_1\vec{e}_3$ ja $O\vec{e}_2\vec{e}_3$ suhtes on koordinaatidega $Z_1(z_1, z_2, -z_3)$, $Z_2(z_1, -z_2, z_3)$ ja $Z_3(-z_1, z_2, z_3)$. Sama punktiga $Z(z_1, z_2, z_3)$ sümmeetrilised punktid Z_4, Z_5 ja Z_6 seekord reeperitelgede $O\vec{e}_1$, $O\vec{e}_2$ ja $O\vec{e}_3$ suhtes on koordinaatidega $Z_4(z_1, -z_2, -z_3)$, $Z_5(-z_1, z_2, -z_3)$ ja $Z_6(-z_1, -z_2, z_3)$. Lõpuks punktiga $Z(z_1, z_2, z_3)$ sümmeetrilisel punktil Z_7 reeperi alguspunkti O suhtes on koordinaadid $Z_7(-z_1, -z_2, -z_3)$. Niisiis olgu Z ellipsoidi suvaline punkt. Tema koordinaadid rahuldavad ellipsoidi võrrandit (11.1), s.o.

$$\frac{z_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{z_2^2}{\alpha_2^2} + \frac{z_3^2}{\alpha_3^2} = 1. \tag{11.2}$$

Osutub, et sel korral on ellipsoidil ka punktid Z_1,...,Z_7. Selleks on vaja näidata, et nende punktide koordinaadid rahuldavad ellipsoidi võrrandit. Näiteks punkti Z_7 korral

$$\frac{(-z_1)^2}{\alpha_1^2} + \frac{(-z_2)^2}{\alpha_2^2} + \frac{(-z_3)^2}{\alpha_3^2} = \frac{z_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{z_2^2}{\alpha_2^2} + \frac{z_3^2}{\alpha_3^2} = 1.$$

Viimase võrdusmärgi juures arvestasime, et punkt Z on ellipsoidil, s.t kehtib (11.2). Analoogiliselt näidatakse, et punktid Z_1,...,Z_6 on ellipsoidil.

Definitsioon 11.2. *Tasandeid, sirgeid ja punkti, mille suhtes ellipsoid on sümmeetriline, nimetatakse neid ellipsoidi sümmeetriatasanditeks, sümmeetriatel gedeks ja keskpunktiks.*

Tõestuseta märgime, et erinevate α_1, α_2 ja α_3 korral ellipsoidil rohkem sümmeetriatasandeid, -telgi ja keskpunkte ei ole.

Silmas pidades viimast definitsiooni 11.2, *näeme, et ellipsoidi võrrand* (11.1) *on antud sellises ristreeperis, kus reeperi alguspunkt on ellipsoidi keskpunktis ja reeperitelgedeks on võetud sümmeetriateljed.*

Definitsioon 11.3. *Ellipsoidi lõikepunkte oma sümmeetriatelgedega nimetatakse ellipsoidi tippudeks.*

Seega ellipsoidi tippude koordinaadid tuleb leida võrrandisüsteemist, kuhu kuulub ellipsoidi võrrand ja sümmeetriatelje võrrandid. Süsteemist

$$\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \dfrac{x_2^2}{\alpha_2^2} + \dfrac{x_3^2}{\alpha_3^2} = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = \pm\alpha_1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

saame kaks tippu $A_1(-\alpha_1, 0, 0)$ ja $A_2(\alpha_1, 0, 0)$.

Teisest süsteemist

$$\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \dfrac{x_2^2}{\alpha_2^2} + \dfrac{x_3^2}{\alpha_3^2} = 1 \\ x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \pm\alpha_2 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

saame samuti kaks tippu $B_1(0, -\alpha_2, 0)$ ja $B_2(0, \alpha_2, 0)$.

On jäänud veel vaadelda süsteemi

$$\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \dfrac{x_2^2}{\alpha_2^2} + \dfrac{x_3^2}{\alpha_3^2} = 1 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = \pm\alpha_3 \end{cases},$$

millest saame kaks järgmist tippu $C_1(0, 0, -\alpha_3)$ ja $C_2(0, 0, \alpha_3)$. *Seega ellipsoidil on kuus tippu.*

Definitsioon 11.4. *Ellipsoidi tippupaaride poolt sümmeetriatelgedel tekkinud lõike nimetatakse ellipsoidi telgedeks. Poolt nimetatud lõikudest kui ka nende pikkusi nimetatakse ellipsoidi pooltelgedeks.*

Selle definitsiooni kohaselt on ellipsoidi telgedeks lõigud A_1A_2, B_1B_2 ja C_1C_2, mis on pikkustega $2\alpha_1$, $2\alpha_2$ ja $2\alpha_3$. Poolteljed on seega pikkustega α_1, α_2 ja α_3. Me oleme sellega konstantidele α_1, α_2 ja α_3 andnud geomeetrilise sisu.

Ellipsoidi kuju täpsemaks uurimiseks lõikame teda tasanditega, mis on paralleelsed või ühtuvad sümmeetriatasanditega. Tekkinud lõiked iseloomustavad ellipsoidi kuju. Seega ellipsoidi lõikamisel paralleelsete tasanditega avaneb võimalus näha kuidas ellipsoid ladestub nendest omavahel paralleelsetest lõigetest. Selliseid lõigete parvi on kolm, sest niipalju on sümmeetriatasandeid.

a) Lõikame ellipsoidi tasandiga $\pi_3 : x_3 = h_3$. See tasand on paralleelne või ühtub reeperitasandiga $O\vec{e}_1\vec{e}_2$. Andes konstandile h_3 mistahes väärtusi, saame kõik omavahel paralleelsed tasandid. Näiteks $h_3 = 0$ korral on $\pi_3 : x_3 = 0$. Me lõikame ellipsoidi sümmeetriatasandiga $O\vec{e}_1\vec{e}_2$. Üldjuhul tasandil $\pi_3 : x_3 = h_3$ tekkiva lõikejoone punktide koordinaadid rahuldavad süsteemi

$$\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \dfrac{x_2^2}{\alpha_2^2} + \dfrac{x_3^2}{\alpha_3^2} = 1 \\ \qquad\qquad\qquad x_3 = h_3 \end{cases},$$

millest

$$\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \dfrac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 1 - \dfrac{h_3^2}{\alpha_3^2} \\ \qquad\quad x_3 = h_3 \end{cases}. \tag{11.3}$$

Kuna $\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} \geq 0$, siis tasand $\pi_3 : x_3 = h_3$ ei lõika $1 - \frac{h_3^2}{\alpha_3^2} < 0$ korral ellipsoidi. Sellest võrratusest saame $|h_3| > \alpha_3$. Järelikult iga tasand $\pi_3 : x_3 = h_3$, mis on sümmeetriatasandist $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ kaugemal kui α_3, ei lõika ellipsoidi. Ellipsoidi lõikavad aga tasandid $\pi_3 : x_3 = h_3$ kui $1 - \frac{h_3^2}{\alpha_3^2} \geq 0$. See võrratus on samaväärne võrratusega $|h_3| \leq \alpha_3$. Need tasandid ei ole sümmeetriatasandist $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ kaugemal kui α_3. Seejuures $|h_3| = \alpha_3$ korral

$1-\frac{h_3^2}{\alpha_3^2}=0$, mistõttu süsteem (11.3) annab

$$\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{\alpha_1^2}+\dfrac{x_2^2}{\alpha_2^2}=0 \\ \qquad x_3=\pm\alpha_3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=0 \\ x_3=\pm\alpha_3 \end{cases}.$$

Seega tasand $\pi_3 : x_3 = \alpha_3$ lõikab ellipsoidi tipus $C_2(0,0,\alpha_3)$ ja tasand $\pi_3 : x_3 = -\alpha_3$ aga tipus $C_1(0,0,-\alpha_3)$.

Kui $|h_3| < \alpha_3$, siis $1-\frac{h_3^2}{\alpha_3^2} > 0$. Süsteemis (11.3) jagame esimese võrrandi teguriga $1-\frac{h_3^2}{\alpha_3^2}$. Kui tähistada

$$\overline{\alpha}_1 := \alpha_1\sqrt{1-\frac{h_3^2}{\alpha_3^2}} > 0, \qquad \overline{\alpha}_2 := \alpha_2\sqrt{1-\frac{h_3^2}{\alpha_3^2}} > 0, \tag{11.4}$$

siis süsteem (11.3) annab

$$\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{\overline{\alpha}_1^2}+\dfrac{x_2^2}{\overline{\alpha}_2^2}=1 \\ \qquad x_3=h_3 \end{cases}.$$

Näeme, et tasandil $\pi_3 : x_3 = h_3$ on lõikeks ellips pooltelgedega $\overline{\alpha}_1$ ja $\overline{\alpha}_2$. Mida lähemal on tasand $\pi_3 : x_3 = h_3$ sümmeetriatasandile $O\vec{e}_1\vec{e}_2$, seda "suuremad" on ellipsid, s.o. ellipsi poolteljed kasvavad, nagu näeme valemist (11.4). Kõige suuremate pooltelgedega ellipsi saame ellipsoidi lõikamisel sümmeetriatasandiga $x_3 = 0$. Sel korral $\overline{\alpha}_1 = \alpha_1$ ja $\overline{\alpha}_2 = \alpha_2$. Lõikeks on ellips

$$\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{\alpha_1^2}+\dfrac{x_2^2}{\alpha_2^2}=1 \\ \qquad x_3=0 \end{cases},$$

mille tippudeks on ellipsoidi tipud A_1, A_2 ja B_1, B_2. Juhul kui ellipsoidi võrrandis (11.1) on $\alpha_1 = \alpha_2$, siis lõike-ellipsid on ringjooned raadiusega $\overline{\alpha}_1 = \overline{\alpha}_2$ (vt. valem (11.4)).

b) Kuna ellipsoidi lõikamine tasandiga $\pi_2 : x_2 = h_2$ toimub analoogiliselt juhule a), siis arutlused anname võimalikult lühidalt. Lõike saame süsteemist

$$\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \dfrac{x_2^2}{\alpha_2^2} + \dfrac{x_3^2}{\alpha_3^2} = 1 \\ \qquad\qquad x_2 = h_2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \dfrac{x_3^2}{\alpha_3^2} = 1 - \dfrac{h_2^2}{\alpha_2^2} \\ \qquad x_2 = h_2 \end{cases}. \tag{11.5}$$

Kui $1-\frac{h_2^2}{\alpha_2^2} < 0$, siis $\frac{x_1^2}{\alpha_1^2}+\frac{x_2^2}{\alpha_2^2} \geq 0$ tõttu tasand π_2, mis on sümmeetriatasandist $O\vec{e}_1\vec{e}_3$ kaugemal kui α_2, ei lõika ellipsoidi. Kui lõiketasand on kaugusel α_2, siis $|h_2| = \alpha_2$ ehk $1 - \frac{h_2^2}{\alpha_2^2} = 0$. Süsteemi (11.5) esimesest võrrandist saame $x_1 = x_3 = 0$. Seega lõikamisel tasandiga $\pi_2 : x_2 = \alpha_2$ saame lõikeks tipu $B_2(0, \alpha_2, 0)$ ja lõikamisel tasandiga $\pi_2 : x_2 = -\alpha_2$ aga tipu $B_1(0, -\alpha_2, 0)$. Kui lõiketasand π_2 on sümmeetriatasandist $O\vec{e}_1\vec{e}_3$ kaugusel $|h_2| < \alpha_2$, siis $1 - \frac{h_2^2}{\alpha_2^2} > 0$, mistõttu eksisteerivad

$$\overline{\alpha}_1 := \alpha_1\sqrt{1 - \frac{h_2^2}{\alpha_2^2}} > 0, \qquad \overline{\alpha}_3 := \alpha_3\sqrt{1 - \frac{h_2^2}{\alpha_2^2}} > 0.$$

Süsteemile (11.5) saame kuju

$$\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{\overline{\alpha}_1^2} + \dfrac{x_3^2}{\overline{\alpha}_3^2} = 1 \\ \qquad x_2 = h_2 \end{cases}.$$

Seega tasandil $\pi_2 : x_2 = h_2$ tuleb lõikeks ellips pooltelgedega $\overline{\alpha}_1$ ja $\overline{\alpha}_3$. Tasandi π_2 lähenemisel sümmeetriatasandile $O\vec{e}_1\vec{e}_3$ ellipsi poolteljed $\overline{\alpha}_1$ ja $\overline{\alpha}_3$ kasvavad. Kõige suurema lõike-ellipsi saame ellipsoidi lõikamisel sümmeetriatasandiga $\pi_2 : x_2 = 0$, saades $\overline{\alpha}_1 = \alpha_1$ ja $\overline{\alpha}_3 = \alpha_3$. Selle ellipsi tippudeks on ellipsoidi tipud A_1, A_2 ja C_1, C_2.

Kui ellipsoidi võrrandis (11.1) on $\alpha_1 = \alpha_3$, siis lõigeteks on $\overline{\alpha}_1 = \overline{\alpha}_3$ tõttu ringjooned raadiusega $\overline{\alpha}_1 = \overline{\alpha}_3$.

c) Lõpuks lõikame ellipsoidi tasandiga $\pi_1 : x_1 = h_1$. Lõike saame süsteemist

$$\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \dfrac{x_2^2}{\alpha_2^2} + \dfrac{x_3^2}{\alpha_3^2} = 1 \\ \qquad\qquad x_1 = h_1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{x_2^2}{\alpha_2^2} + \dfrac{x_3^2}{\alpha_3^2} = 1 - \dfrac{h_1^2}{\alpha_1^2} \\ \qquad x_1 = h_1 \end{cases}. \tag{11.6}$$

Kui $1-\frac{h_1^2}{\alpha_1^2}<0$, siis lõige puudub. Et siit $|h_1|>\alpha_1$, siis lõiketasand on kaugemal kui α_1. Kui $|h_1|=\alpha_1$ ehk $1-\frac{h_1^2}{\alpha_1^2}=0$, siis süsteemi (11.6) esimesest võrrandist saame $x_2=x_3=0$. Lõikamisel tasandiga $\pi_1: x_1=\alpha_1$ saame lõikeks tipu $A_2(\alpha_1,0,0)$ ja lõikamisel tasandiga $\pi_1: x_1=-\alpha_1$ aga tipu $A_1(-\alpha_1,0,0)$. Kui lõiketasand π_1 on sümmeetriatasandist $O\vec{e}_2\vec{e}_3$ kaugusel $|h_1|<\alpha_1$, siis $1-\frac{h_1^2}{\alpha_1^2}>0$, mistõttu eksisteerivad

$$\overline{\alpha}_2:=\alpha_2\sqrt{1-\frac{h_1^2}{\alpha_1^2}}>0, \qquad \overline{\alpha}_3:=\alpha_3\sqrt{1-\frac{h_1^2}{\alpha_1^2}}>0.$$

Süsteemile (11.6) saame kuju

$$\begin{cases} \dfrac{x_2^2}{\overline{\alpha}_2^2}+\dfrac{x_3^2}{\overline{\alpha}_3^2}=1 \\ \qquad\quad x_1=h_1 \end{cases}.$$

Seega tasandil $\pi_1: x_1=h_1$ tuleb lõikeks ellips pooltelgedega $\overline{\alpha}_2$ ja $\overline{\alpha}_3$. Tasandi π_1 lähenemisel sümmeetriatasandile $O\vec{e}_2\vec{e}_3$ ellipsi pooltelјed $\overline{\alpha}_2$ ja $\overline{\alpha}_3$ kasvavad. Kõige suurema lõike-ellipsi saame ellipsoidi lõikamisel sümmeetriatasandiga $\pi_1: x_1=0$, saades $\overline{\alpha}_2=\alpha_2$ ja $\overline{\alpha}_3=\alpha_3$. Selle ellipsi tippudeks on ellipsoidi tipud B_1, B_2 ja C_1, C_2.

Kui ellipsoidi võrrandis (11.1) on $\alpha_2=\alpha_3$, siis lõigeteks on $\overline{\alpha}_2=\overline{\alpha}_3$ tõttu ringjooned raadiusega $\overline{\alpha}_2=\overline{\alpha}_3$.

Nüüd soovitame lugejal teha ellipsoidi joonise. Joonistame esmalt need lõike-ellipsid, mis tekivad sümmeetriatasanditel. Juba nende kolme lõike abil saame päris korraliku ettekujutuse ellipsoidist. Muidugi on soovitav kanda joonisele veel teisigi lõike-ellipseid.

Juhul kui ellipsoidi võrrandis poolteljed α_1 ja α_2 on võrdsed, siis juhul a) nägime, et lõigeteks on ringjooned. Seega ellipsoidi võime saada sümmeetriatasandi $O\vec{e}_1\vec{e}_3$ lõike-ellipsi

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2}+\frac{x_3^2}{\alpha_3^2}=1$$

pöörlemisel ümber x_3-telje, sest siis selle ellipsi iga punkt kirjeldab juhul a) saadud ringjooned iga kord sobivalt valides h_3 väärtusi.

Definitsioon 11.5. *Ellipsoidi, mis saadakse ellipsi pöörlemisel ümber sümmeetriatelje nimetame pöördellipsoidiks.*

Seega pöördellipsoidi korral pooltelgede seas peab üks paar võrdseid olema, s.o. $\alpha_1 = \alpha_2$, $\alpha_1 = \alpha_3$ või $\alpha_2 = \alpha_3$.

Kui ellipsoidi kõik kolme tüüpi lõiked on ringjooned, siis $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ ning ellipsoidi võrrandist (11.1) saame

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \alpha_1^2. \tag{11.7}$$

Tähistades selle pinna suvalise punkti $X(x_1, x_2, x_3)$ kohavektorit $\vec{x} := \overrightarrow{OX}$ ja arvestades $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, siis võrrand (11.7) laseb kirjutada

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = \alpha_1^2 \Longrightarrow |\vec{x}|^2 = \alpha_1^2 \Longrightarrow |\vec{x}| = \alpha_1.$$

See võrrand annab sellised punktid, mis on ellipsoidi keskpunktist võrdsel kaugusel α_1. *Seega tegemist on sfääriga.*

Definitsioon 11.6. *Ellipsoidi, mille poolteljed on kõik omavahel erinevad, nimetame kolmeteljeliseks ellipsoidiks.*

Ellipsoidi lõikeid sümmeetriatasanditel nimetame pealõigeteks. Pealõikeid on kolm, sest sümmeetriatasandeid on kolm.

12. TEIST JÄRKU KOONUS

Definitsioon 12.1. *Punktihulka $\{X\}$ ruumis, mille iga punkti X koordinaadid (x_1, x_2, x_3) mingis ristreeperis $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ rahuldavad võrrandit*

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} - \frac{x_3^2}{\alpha_3^2} = 0, \tag{12.1}$$

kus α_1, α_2 ja α_3 on positiivsed konstandid, nimetatakse teist järku koonuseks.

Osutub, et teist järku koonus on sümmeetriline kolme tasandi, kolme sirge ja ühe punkti suhtes. Valitud ristreeperi $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ korral on nendeks reeperitasandid, reeperiteljed ja reeperi alguspunkt. Kuna tõestus on analoogiline ellipsoidi juhule, siis jätame selle lugejale. Nagu ellipsoidi korral, nimetame ka teist järku koonuse korral vastavaid tasandeid, sirgeid ja punkti vaadeldava *pinna sümmeetriatasanditeks, sümmeetriatelgedeks ja tipuks.* Nagu näeme, nimetame sümmeetria punkti siin tipuks mitte aga keskpunktiks, olgugi et see ei oleks ju väär. Leiame teist järku koonuse tipud, s.o. sümmeetriatelgede lõikepunktid pinnaga. Selleks tuleb lahendada kolm järgmist süsteemi

$$\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \dfrac{x_2^2}{\alpha_2^2} - \dfrac{x_3^2}{\alpha_3^2} = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \dfrac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \dfrac{x_2^2}{\alpha_2^2} - \dfrac{x_3^2}{\alpha_3^2} = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \dfrac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \dfrac{x_2^2}{\alpha_2^2} - \dfrac{x_3^2}{\alpha_3^2} = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}.$$

Iga süsteem annab lahendiks kaks tippu. Kokku saame kuus tippu, kuid kõik kuus tippu omavahel ühtuvad, andes reeperi alguspunkti $O(0, 0, 0)$, s.o. teist järku koonuse keskpunkti. Seetõttu on igati loomulik nimetada teist järku koonuse keskpunkti tipuks. Nii eespool ka tegime.

Tõestuseta märgime, et erinevate α_1, α_2 ja α_3 korral ka teist järku koonusel nagu ellipsoidil rohkem sümmeetriatasandeid, -telgi ja tippe ei ole.

Samuti saame öelda, et teist järku koonuse võrrand (12.1) *on antud sellises ristreeperis, kus reeperi alguspunkt on teist järku koonuse tipus ja reeperitelgedeks on võetud sümmeetriateljed.*

Nüüd uurime teist järku koonuse lõikeid tasanditega, mis on paralleelsed või ühtuvad sümmeetriatasanditega.

a) Lõikama tasandiga $\pi_3 : x_3 = h_3$. Lõikepunktide koordinaadid leiame süsteemist

$$\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \dfrac{x_2^2}{\alpha_2^2} - \dfrac{x_3^2}{\alpha_3^2} = 0 \\ x_3 = h_3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \dfrac{x_2^2}{\alpha_2^2} = \dfrac{h_3^2}{\alpha_3^2} \\ x_3 = h_3 \end{cases}. \tag{12.2}$$

Kui $h_3 = 0$, siis lõiketasandiks $\pi_3 : x_3 = 0$ on sümmeetriatasand $O\vec{e}_1\vec{e}_2$. Süsteemist (12.2) saame

$$\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \dfrac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow O(0,0,0).$$

Seega sümmeetriatasand $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ lõikab teist järku koonust ainult ühes punktis – tipus O. Kui $h_3 \neq 0$, siis tasand $\pi_3 : x_3 = h_3$ on sümmeetriatasandist $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ kaugusel $|h_3|$. Kui eelnevalt valemis (12.2) esimest võrrandit jagada teguriga $\frac{h_3^2}{\alpha_3^2}$ ja tähistada

$$\overline{\alpha}_1 := \alpha_1\sqrt{\frac{h_3^2}{\alpha_3^2}} = \frac{\alpha_1}{\alpha_3}|h_3| > 0, \quad \overline{\alpha}_2 := \alpha_2\sqrt{\frac{h_3^2}{\alpha_3^2}} = \frac{\alpha_2}{\alpha_3}|h_3| > 0, \tag{12.3}$$

me saame

$$\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{\overline{\alpha}_1^2} + \dfrac{x_2^2}{\overline{\alpha}_2^2} = 1 \\ x_3 = h_3 \end{cases}. \tag{12.4}$$

Tasandil $\pi_3 : x_3 = h_3$ tuleb lõikeks ellips pooltelgedega $\overline{\alpha}_1$ ja $\overline{\alpha}_2$. Selle ellipsi keskpunkt O' asub punktis $O'(0,0,h_3)$, seega sümmeetriateljel $O\vec{e}_3$. Kui tasand $\pi_3 : x_3 = h_3$ eemaldub sümmeetriatasandist $O\vec{e}_1\vec{e}_2$, s.o. $|h_3|$ kasvab, siis valemi (12.3) kohaselt ellipsi (12.4) poolteljed $\overline{\alpha}_1$ ja $\overline{\alpha}_2$ kasvavad, s.o. lõike-ellipsid lähevad suuremaks.

b) Lõikame nüüd teist järku koonust tasandiga $\pi_1 : x_1 = h_1$. Lõike saame süsteemist

$$\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \dfrac{x_2^2}{\alpha_2^2} - \dfrac{x_3^2}{\alpha_3^2} = 0 \\ x_1 = h_1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -\dfrac{x_2^2}{\alpha_2^2} + \dfrac{x_3^2}{\alpha_3^2} = \dfrac{h_1^2}{\alpha_1^2} \\ x_1 = h_1 \end{cases}. \tag{12.5}$$

Juhul kui $h_1 = 0$, siis toimub lõikamine sümmeetriatasandiga $\pi_1 : x_1 = 0$. Süsteem (12.5) annab

$$\begin{cases} -\left(\dfrac{x_2}{\alpha_2}\right)^2 + \left(\dfrac{x_3}{\alpha_3}\right)^2 = 0 \\ \hfill x_1 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \left(-\dfrac{x_2}{\alpha_2} + \dfrac{x_3}{\alpha_3}\right)\left(\dfrac{x_2}{\alpha_2} + \dfrac{x_3}{\alpha_3}\right) = 0 \\ \hfill x_1 = 0 \end{cases}.$$

Viimane süsteem on samaväärne kahe järgmise süsteemiga

$$\begin{cases} -\dfrac{x_2}{\alpha_2} + \dfrac{x_3}{\alpha_3} = 0 \\ \hfill x_1 = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} \dfrac{x_2}{\alpha_2} + \dfrac{x_3}{\alpha_3} = 0 \\ \hfill x_1 = 0 \end{cases}.$$

Näeme, et lõikeks on kaks koonuse tipus lõikuvat sirget.

Juhul kui $h_1 \neq 0$, siis süsteem (12.5) on viidav kujule

$$\begin{cases} -\dfrac{x_2^2}{\overline{\alpha}_2^2} + \dfrac{x_3^2}{\overline{\alpha}_3^2} = 1 \\ \hfill x_1 = h_1 \end{cases}, \tag{12.6}$$

kus

$$\overline{\alpha}_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}|h_1|, \quad \overline{\alpha}_3 = \frac{\alpha_3}{\alpha_1}|h_1|. \tag{12.7}$$

Valemist (12.6) näeme, et tasandil $\pi_1 : x_1 = h_1$ on lõikeks hüperbool, mille reaaltelg on paralleelne reeperiteljega $O\vec{e}_3$ ja imaginaartelg reeperiteljega $O\vec{e}_2$.

c) Lõigates teist järku koonust tasandiga $\pi_2 : x_2 = h_2$, saame analoogilised tulemused juhule b). Soovitame selles heal lugejal veenduda.

Võtame teist järku koonusel suvalise punkti $Z(z_1, z_2, z_3)$, mis erineb tipust O. *Osutub,et punkte O ja Z läbiv sirge asub teist järku koonusel.* Tõepoolest. Paneme kirja selle sirge parameetrilised võrrandid, milledeks on

$$x_1 = z_1 t, \quad x_2 = z_2 t, \quad x_3 = z_3 t, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{12.8}$$

Selle sirge suvalise punkti koordinaadid $(z_1 t, z_2 t, z_3 t)$ rahuldavad teist järku koonuse võrrandit (12.1), sest

$$\frac{(z_1 t)^2}{\alpha_1^2} + \frac{(z_2 t)^2}{\alpha_2^2} - \frac{(z_3 t)^2}{\alpha_3^2} = t^2\left(\frac{z_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{z_2^2}{\alpha_2^2} - \frac{z_3^2}{\alpha_3^2}\right) = t^2 0 = 0.$$

Siin me arvestasime, et Z on teist järku koonuse punkt, s.o.

$$\frac{z_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{z_2^2}{\alpha_2^2} - \frac{z_3^2}{\alpha_3^2} = 0.$$

Definitsioon 12.2. *Teist järku koonusel asuvat sirget nimetame tema sirgjooneliseks moodustajaks.*

Definitsioon 12.3. *Teist järku koonuse sümmetriatelge $O\vec{e}_3$ nimetatakse tema teljeks.*

Pakume nüüd välja võimaluse, kuidas skitseerida teist järku koonust. Nagu punktis a) nägime, saame tema lõikamisel tasandiga, mis on risti teist järku koonuse teljega, lõikeks ellipsi, mida tähistame ϵ abil. Sirge, mis on risti selle ellipsi tasandiga ja läbib selle ellipsi keskpunkti, on meie teist järku koonuse telg. Viimasel asub ka meie teist järku koonuse tipp, tähistame tähega O. Iga sirge $s(O, Z)$, kus punkt Z kuulub ellipsile ϵ, on skitseeritaval teist järku koonusel. Pannes punkti Z liikuma mööda seda ellipsit, ladestub sirgetest $s(O, Z)$ meie teist järku koonus. Saame ka paika panna reeperi, mille suhtes teist järku koonusel on lihtne võrrand (12.1). Nimelt reeperi alguspunkt on koonuse tipus, reeperiteljed $O\vec{e}_1$ ja $O\vec{e}_2$ on vastavalt valitud ellipsi ϵ pikema ja lühema teljega paralleelsed. Kolmas reeperitelg on paika pandud teist järku koonuse teljega.

Juhul kui teist järku koonuse võrrandis on $\alpha_1 = \alpha_2$, siis lõiked iga tasandiga $\pi_3 : x_3 = h_3$, mil $h_3 \neq 0$, on ringjooned, sest lõike-ellipsi pooltelјed on võrdsed, s.o. $\overline{\alpha}_1 = \overline{\alpha}_2$ (vt. valem (12.3)). Sel korral koonuse iga moodustaja moodustab teist järku koonuse teljega konstantse nurga, tähistame näiteks tähega α. Seejuures ilmselt $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Sellise teist järku koonuse võime saada, kui võtame kaks lõikuvat sirget nendevahelise nurgaga α. Ühe neist sirgetest loeme teljeks. Teise sirge paneme ümber selle pöörlema. *Sellist teist järku koonust nimetame pöördkoonuseks.* Seega $\alpha_1 = \alpha_2$ on pöördkoonuse tunnus. Kerge on näha, et pöördkoonuse korral $tan\, \alpha = \frac{\alpha_1}{\alpha_3}$.

13. ÜHEKATTELINE JA KAHEKATTELINE HÜPERBOLOID

Definitsioon 13.1. *Punktihulka* $\{X\}$ *ruumis, mille iga punkti* X *koordinaadid* (x_1, x_2, x_3) *mingis ristreeperis* $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ *rahuldavad võrrandit*

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} - \frac{x_3^2}{\alpha_3^2} = \varepsilon, \tag{13.1}$$

kus α_1, α_2 *ja* α_3 *on positiivsed konstandid, nimetatakse* $\varepsilon = 1$ *korral ühekatteliseks ja* $\varepsilon = -1$ *korral kahekatteliseks hüperboloidiks.*

Osutub, et hüperboloidid on sümmeetrilised kolme tasandi, kolme sirge ja ühe punkti suhtes. Valitud ristreeperi $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ korral on nendeks reeperitasandid, reeperiteljed ja reeperi alguspunkt. Kuna tõestus on analoogiline ellipsoidi juhule, siis jätame ka siin tõestuse lugejale. Nagu ellipsoidi korral, nimetame ka hüperboloidide korral neid tasandeid, sirgeid ja punkti vaadeldava *pinna sümmeetriatasanditeks, sümmeetriatelgedeks ja keskpunktiks.* Leiame hüperboloidide tipud, s.o. sümmeetriatelgede lõikepunktid pinnaga. Selleks tuleb lahendada kolm järgmist süsteemi

$$\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \dfrac{x_2^2}{\alpha_2^2} - \dfrac{x_3^2}{\alpha_3^2} = \varepsilon \\ \hfill x_2 = 0 \\ \hfill x_3 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \dfrac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \dfrac{x_2^2}{\alpha_2^2} - \dfrac{x_3^2}{\alpha_3^2} = \varepsilon \\ \hfill x_1 = 0 \\ \hfill x_3 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \dfrac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \dfrac{x_2^2}{\alpha_2^2} - \dfrac{x_3^2}{\alpha_3^2} = \varepsilon \\ \hfill x_1 = 0 \\ \hfill x_2 = 0 \end{cases},$$

millest vastavalt saame

$$\begin{cases} x_1^2 = \varepsilon\alpha_1^2 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_2^2 = \varepsilon\alpha_2^2 \\ x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} -x_3^2 = \varepsilon\alpha_3^2 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}.$$

Ühekattelise hüperboloidi korral ($\varepsilon = 1$) kahest esimesest süsteemist kumbki annab kaks tippu $A_1(-\alpha_1, 0, 0)$, $A_2(\alpha_1, 0, 0)$ ja $B_1(0, -\alpha_2, 0)$, $B_2(0, \alpha_2, 0)$, aga kolmas süsteem ei ole lahenduv. Kahekattelise hüperboloidi korral ($\varepsilon = -1$) kaks esimest süsteemi ei ole lahenduvad, aga kolmas süsteem annab kaks tippu $C_1(0, 0, -\alpha_3)$ ja $C_2(0, 0, \alpha_3)$. Seega ühekattelise hüperboloidi telgedeks on lõigud A_1A_2 ja B_1B_2 vastavalt pikkustega $2\alpha_1$ ja $2\alpha_2$

ning pooltelgedeks α_1 ja α_2. Kahekattelise hüperboloidi korral on ainult üks telg C_1C_2 pikkusega $2\alpha_3$ ja üks pooltelg pikkusega α_3.

Järgnevas uurime ka siin vaadeldavate pindade lõikeid tasanditega, milleks on sümmeetriatasandid või nendega paralleelsed tasandid.

a) Lõikame hüperboloidi tasandiga $\pi_3 : x_3 = h_3$. Lõike punktide koordinaadid rahuldavad süsteemi

$$\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \dfrac{x_2^2}{\alpha_2^2} - \dfrac{x_3^2}{\alpha_3^2} = \varepsilon \\ \qquad\qquad x_3 = h_3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \dfrac{x_2^2}{\alpha_2^2} = \varepsilon + \dfrac{h_3^2}{\alpha_3^2} \\ \qquad x_3 = h_3 \end{cases}. \tag{13.2}$$

Selle süsteemi esimeses võrrandis on alati $\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} \geq 0$, aga kahekattelise hüperboloidi korral ($\varepsilon = -1$) võib paremal pool olla $-1 + \frac{h_3^2}{\alpha_3^2} < 0$. Viimane on samaväärne tingimusega $|h_3| < \alpha_3$. Seega kui tasand $\pi_3 : x_3 = h_3$ jääb tippude C_1 ja C_2 vahele, siis ta kahekattelist hüperboloidi ei lõika. Juhul kui tasand on sümmeetriatasandist kaugusel $|h_3| = \alpha_3$, siis selline tasand $h_3 = \alpha_3$ korral läbib tippu C_2 ja $h_3 = -\alpha_3$ aga tippu C_1. Seda näeme ka süsteemist (13.2), sest $-1 + \frac{h_3^2}{\alpha_3^2} = 0$ korral ta saab kuju

$$\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \dfrac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 0 \\ \qquad x_3 = h_3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = \pm\alpha_3 \end{cases} \Longrightarrow C_1(0, 0, -\alpha_3), \quad C_2(0, 0, \alpha_3).$$

Juhul kui tasand $\pi_3 : x_3 = h_3$ on väljaspool tippe C_1 ja C_2, s.o. $-1+\frac{h_3^2}{\alpha_3^2} > 0$, siis ta lõikab kahekattelist hüperboloidi. Kuna ühekattelise hüperboloidi korral ($\varepsilon = 1$) on valemis (13.2) alati $1 + \frac{h_3^2}{\alpha_3^2} > 0$, siis saame mõlemat tüüpi hüperboloidi korral leida korraga lõike võrrandi. Süsteemi (13.2) saame viia kujule

$$\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{\overline{\alpha}_1^2} + \dfrac{x_2^2}{\overline{\alpha}_2^2} = 1 \\ \qquad x_3 = h_3 \end{cases},$$

kus

$$\overline{\alpha}_1 := \alpha_1\sqrt{\varepsilon + \frac{h_3^2}{\alpha_3^2}}, \quad \overline{\alpha}_2 := \alpha_2\sqrt{\varepsilon + \frac{h_3^2}{\alpha_3^2}}. \tag{13.3}$$

Viimases ruutjuur $\varepsilon = -1$ korral eksisteerib. Tasandil $\pi_3 : x_3 = h_3$ lõikeks on ellips keskpunktiga $O'(0,0,h_3)$ sümmeetriateljel $O\vec{e}_3$. Nende ellipsite sümmeetriateljed iga h_3 korral on paralleelsed hüperboloidi sümmeetriatelgedega $O\vec{e}_1$ ja $O\vec{e}_2$. Kui tasand $\pi_3 : x_3 = h_3$ eemaldub sümmeetriatasandist $O\vec{e}_1\vec{e}_2$, siis lõike-ellipsi poolteljed $\overline{\alpha}_1$ ja $\overline{\alpha}_2$ kasvavad, mida näeme valemitest (13.3). Samadest valemitest näeme, et ühekattelise hüperbooidi kõige väiksemate pooltelgedega ellipsi saame $h_3 = 0$ korral. Siis lõikame ühekattelist hüperboloidi sümmeetriatasandiga $\pi_3 : x_3 = 0$. Selle ellipsi pooltelgedeks on $\overline{\alpha}_1 = \alpha_1$ ja $\overline{\alpha}_2 = \alpha_2$. Seda lõike-ellipsit nimetame *ühekattelise hüperboloidi kaelellipsiks.* Tema pooltelgedeks on selle ühekattelise hüperboloidi poolteljed α_1 ja α_2.

Moodustame nüüd lisaks hüperboloididele (13.1) samade α_1, α_2 ja α_3 abil teist järku koonuse, mille punktide koordinaadid (x_1, x_2, x_3) samas ristreeperis $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ rahuldavad võrrandit

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} - \frac{x_3^2}{\alpha_3^2} = 0, \tag{13.4}$$

Lõikame ka viimast, lisaks hüperboloididele (13.1), tasandiga $\pi_3 : x_3 = h_3$. Eelmise paragrahvi kohaselt tuleb ka siin lõikeks ellips

$$\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{\tilde{\alpha}_1^2} + \dfrac{x_2^2}{\tilde{\alpha}_2^2} = 1 \\ \qquad x_3 = h_3 \end{cases},$$

pooltelgedega

$$\tilde{\alpha}_1 := \alpha_1\sqrt{\frac{h_3^2}{\alpha_3^2}} = \frac{\alpha_1}{\alpha_3}|h_3| > 0, \quad \tilde{\alpha}_2 := \alpha_2\sqrt{\frac{h_3^2}{\alpha_3^2}} = \frac{\alpha_2}{\alpha_3}|h_3| > 0.$$

Leiame teist järku koonuse ja hüperloidi korral tasandil $\pi_3 : x_3 = h_3$ olevate lõike-ellipsite pooltelgede vahe. Saame

$$\tilde{\alpha}_1 - \overline{\alpha}_1 = \alpha_1\sqrt{\frac{h_3^2}{\alpha_3^2}} - \alpha_1\sqrt{\varepsilon + \frac{h_3^2}{\alpha_3^2}} = \alpha_1\left(\sqrt{\frac{h_3^2}{\alpha_3^2}} - \sqrt{\varepsilon + \frac{h_3^2}{\alpha_3^2}}\right) =$$

$$= \frac{\alpha_1\left(\sqrt{\frac{h_3^2}{\alpha_3^2}} - \sqrt{\varepsilon + \frac{h_3^2}{\alpha_3^2}}\right)\left(\sqrt{\frac{h_3^2}{\alpha_3^2}} + \sqrt{\varepsilon + \frac{h_3^2}{\alpha_3^2}}\right)}{\left(\sqrt{\frac{h_3^2}{\alpha_3^2}} + \sqrt{\varepsilon + \frac{h_3^2}{\alpha_3^2}}\right)} = \frac{-\alpha_1\varepsilon}{\left(\sqrt{\frac{h_3^2}{\alpha_3^2}} + \sqrt{\varepsilon + \frac{h_3^2}{\alpha_3^2}}\right)} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \tilde{\alpha}_1 - \overline{\alpha}_1 = \frac{-\alpha_1\varepsilon}{\left(\sqrt{\frac{h_3^2}{\alpha_3^2}} + \sqrt{\varepsilon + \frac{h_3^2}{\alpha_3^2}}\right)}. \tag{13.5}$$

Lugeja hooleks jätame kontrollida, et analoogiliselt saame

$$\tilde{\alpha}_2 - \overline{\alpha}_2 = \frac{-\alpha_2\varepsilon}{\left(\sqrt{\frac{h_3^2}{\alpha_3^2}} + \sqrt{\varepsilon + \frac{h_3^2}{\alpha_3^2}}\right)}. \tag{13.6}$$

Nendest valemitest (13.5) ja (13.6) näeme, et ühekattelise hüperboloidi korral ($\varepsilon = 1$) on $\tilde{\alpha}_1 - \overline{\alpha}_1 < 0$ ja $\tilde{\alpha}_2 - \overline{\alpha}_2 < 0$ ning kahekattelise hüperboloidi korral ($\varepsilon = -1$) on $\tilde{\alpha}_1 - \overline{\alpha}_1 > 0$ ja $\tilde{\alpha}_2 - \overline{\alpha}_2 > 0$. Nii on iga $h_3 \in \mathbb{R}$ korral, s.o. igal lõiketasandil $\pi_3 : x_3 = h_3$ teist järku koonuse lõike-ellips on ühekattelise hüperboloidi lõike-ellipsi sees ja kahekattelise hüperboloidi lõike-ellips teist järku koonuse lõike-ellipsi sees. Seega teist järku koonus asub ühekattelise hüperboloidi sees js kahekatteline hüperboloid omakorda teist järku koonuse sees. Kui lõiketasand $\pi_3 : x_3 = h_3$ eemaldub sümmeetriatasandist $O\vec{e}_1\vec{e}_2$, siis

$$\lim_{|h_3|\to\infty} (\tilde{\alpha}_1 - \overline{\alpha}_1) = 0, \qquad \lim_{|h_3|\to\infty} (\tilde{\alpha}_2 - \overline{\alpha}_2) = 0.$$

Seega teist järku koonus tuleb nii ühekattelisele kui ka kahekattelisele hüperboloidile kuitahes lähedale. *Sellise omadusega teist järku koonust nimetame vaadeldava pinna asümptootkoonuseks.* Seega teist järku koonus (13.4) on kumbagi tüüpi hüperboloidi (13.1) asümptootkoonuseks.

b) Lõikame ühekattelist kui ka kahekattelist hüperboloidi tasandiga $\pi_2 : x_2 = h_2$. Lõikepunktide koordinaadid rahuldavad süsteemi

$$\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \dfrac{x_2^2}{\alpha_2^2} - \dfrac{x_3^2}{\alpha_3^2} = \varepsilon \\ x_2 = h_2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{x_1^2}{\alpha_1^2} - \dfrac{x_3^2}{\alpha_3^2} = \varepsilon - \dfrac{h_2^2}{\alpha_2^2} \\ x_2 = h_2 \end{cases}. \tag{13.7}$$

Juhul kui $\varepsilon - \frac{h_2^2}{\alpha_2^2} < 0$ (nii on alati kahekattelise hüperboloidi korral olemata h_2 väärtusest), siis süsteemile (13.7) saame anda kuju

$$\begin{cases} -\frac{x_1^2}{\overline{\alpha}_1^2} + \frac{x_3^2}{\overline{\alpha}_3^2} = 1 \\ x_2 = h_2 \end{cases},$$

kus

$$\overline{\alpha}_1 := \alpha_1 \sqrt{-\left(\varepsilon - \frac{h_2^2}{\alpha_2^2}\right)}, \quad \overline{\alpha}_3 := \alpha_3 \sqrt{-\left(\varepsilon - \frac{h_2^2}{\alpha_2^2}\right)}.$$

Valemist näeme, et tasandil $\pi_2 : x_2 = h_2$ on lõikeks hüperbool, mille raaaltelg on paralleelne reeperiteljega $O\vec{e}_3$ ja imaginaartelg aga paralleelne reeperiteljega $O\vec{e}_1$.

Selgitame, mida tähendab ühekattelise hüperboloidi korral tingimus $1 - \frac{h_2^2}{\alpha_2^2} < 0$ omavahel paralleelsete lõiketasandite $\pi_2 : x_2 = h_2$ valimiseks. Kahekattelise hüperboloidi korral lisatingimust ei tulnud. Me saame tingimused h_2 valikuks:

$$1 - \frac{h_2^2}{\alpha_2^2} < 0 \Longrightarrow \frac{h_2^2}{\alpha_2^2} > 1 \Longrightarrow h_2^2 > \alpha_2^2 \Longrightarrow |h_2| > \alpha_2.$$

Seega iga lõiketasand asub väljaspool tippe B_1 ja B_2.

Lõigete uurimist tuleb veel jätkata ainult ühekattelise hüperboloidi korral.

Juhul kui $1 - \frac{h_2^2}{\alpha_2^2} = 0$, siis $|h_2| = \alpha_2$, s.o. $h_2 = \pm\alpha_2$. Seega selliseid tasandeid on kaks. Üks neist läbib tippu B_1 ja teine B_2. Valemist (13.7) lõike määramiseks saame

$$\begin{cases} \frac{x_1^2}{\alpha_1^2} - \frac{x_3^2}{\alpha_3^2} = 0 \\ x_2 = \pm\alpha_2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \frac{x_1}{\alpha_1} - \frac{x_3}{\alpha_2} = 0 \\ x_2 = \pm\alpha_2 \end{cases} \vee \begin{cases} \frac{x_1}{\alpha_1} + \frac{x_3}{\alpha_2} = 0 \\ x_2 = \pm\alpha_2 \end{cases}.$$

Seega kummalgi lõiketasandil $\pi_2 : x_2 = \pm\alpha_2$ tekib kaks lõikuvat sirget, mis tasandi $\pi_2 : x_2 = \alpha_2$ korral läbivad tippu B_2 ja tasandi $\pi_2 : x_2 = -\alpha_2$ korral aga tippu B_1.

Juhul kui ühekattelise hüperboloidi korral $1 - \frac{h_2^2}{\alpha_2^2} > 0$ ehk samaväärselt $-\alpha_2 < h_2 < \alpha_2$, siis iga lõiketasand $\pi_2 : x_2 = h_2$ on tippude B_1 ja B_2 vahel. Süsteemist (13.7) saame

$$\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{\overline{\alpha}_1^2} - \dfrac{x_3^2}{\overline{\alpha}_3^2} = 1 \\ x_2 = h_2 \end{cases},$$

kus

$$\overline{\alpha}_1 := \alpha_1 \sqrt{1 - \frac{h_2^2}{\alpha_2^2}}, \quad \overline{\alpha}_3 := \alpha_3 \sqrt{1 - \frac{h_2^2}{\alpha_2^2}}.$$

Seega vaadeldavatel tasanditel $\pi_2 : x_2 = h_2$ on lõikeks hüperbool, mille reaaltelg on paralleelne reeperiteljega $O\vec{e}_1$ ja imaginaartelg aga reeperiteljega $O\vec{e}_3$. Teeme kokkuvõtte lõigete kohta tasanditega $\pi_2 : x_2 = h_2$, kus $h_2 \in \mathbb{R}$.

Ühekattelise hüperboloidi lõikamisel tasandiga $\pi_2 : x_2 = h_2$, mis on tippude B_1 ja B_2 vahel, annab lõikeks hüperbooli. Reaaltelg on tal paralleelne reeperiteljega $O\vec{e}_1$ ja imaginaartelg paralleelne reeperiteljega $O\vec{e}_3$. Kui tasand $\pi_2 : x_2 = h_2$ läbib tippe B_1 või B_2, siis lõikeks on kaks lõikuvat sirget, mis läbivad lõiketasandil olevat tippu. Kui lõpuks lõiketasand $\pi_2 : x_2 = h_2$ on väljaspool tippe B_1 ja B_2, siis lõikeks on taas hüperbool, kuid siin on aga imaginaartelg paralleelne reeperiteljega $O\vec{e}_1$ ja reaaltelg paralleelne reeperiteljega $O\vec{e}_3$.

Kahekattelise hüperboloidi korral on lõikeks tasandiga $\pi_2 : x_2 = h_2$ iga $h_2 \in \mathbb{R}$ korral hüperbool, mille imaginaartelg on paralleelne reeperiteljega $O\vec{e}_1$ ja reaaltelg reeperiteljega $O\vec{e}_3$.

c) Ühekattelise (kahekattelise) hüperboloidi lõikamisel tasandiga $\pi_1 : x_1 = h_1$ saame analoogilised tulemused juhuga b). Seetõttu jätame lõigete uurimise ärksale lugejale.

Nüüd soovitame lugejal lõigete abil teha nii ühekattelise kui ka kahekattelise hüperboloidi joonise.

14. ELLIPTILINE JA HÜPERBOOLNE PARABOLOID

Definitsioon 14.1. *Punktihulka* $\{X\}$ *ruumis, mille iga punkti* X *koordinaadid* (x_1, x_2, x_3) *mingis ristreeperis* $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ *rahuldavad võrrandit*

$$\frac{x_1^2}{p_1} + \varepsilon \frac{x_2^2}{p_2} = 2x_3,$$

kus p_1 *ja* p_2 *on positiivsed konstandid, nimetatakse* $\varepsilon = 1$ *korral elliptiliseks ja* $\varepsilon = -1$ *korral hüperboolseks paraboloidiks.*

Analoogiliselt, nagu ellipsoidi korral, palume lugejal omal käel uurida paraboloidide sümmeetria omadusi. Osutub, et paraboloidid on sümmeetrilised kahe tasandi ja ühe sirge suhtes. Valitud reeperi $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ korral on nendeks tasanditeks reeperitasandid $O\vec{e}_1\vec{e}_3$ ja $O\vec{e}_2\vec{e}_3$ ning sirgeks nende lõikesirge, s.o. reeperitelg $O\vec{e}_3$. Niimetatud tasandeid ja sirget *nimetame paraboloidide sümmeetriatasanditeks ja teljeks.* Leiame *paraboloidide tipud, s.o. paraboloidi ja telje lõikepunktid.* Viimaste koordinaadid saame leida võrrandisüsteemist

$$\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{p_1} + \varepsilon \dfrac{x_2^2}{p_2} = 2x_3 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \implies O(0, 0, 0).$$

Saime, et paraboloididel on ainult üks tipp. Seejuures reeperi alguspunkt on paigutatud paraboloidide tippu. Rõhutame, et paraboloidid ei ole sümmeetrilised reeperitasandi $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ suhtes. Põhjuseks on asjaolu, et paraboloidide võrrandis on koordinaat x_3 esimesel astmel.

Paraboloidide kuju uurimiseks hakkame neid lõikama paralleelsete tasanditega. Saadud lõiked iseloomustavad ka paraboloide. Kuna kummagi paraboloidi korral on analüüs üsna erinev, siis vaatleme lõikeid kummagi paraboloidi tüübi korral eraldi.

Elliptilise paraboloidi lõiked

a) Lõikame tasandiga $\pi_3 : x_3 = h_3$. Selle tasandi eripäraks on, et ta ei ole paralleelne ühegi sümmeetriatasandiga. Reeperitasand $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ ei ole sümmeetriatasandiks nii nagu oli eelneva nelja tüüpi pinna korral. Küll võib seda lõiketasandit iseloomustada kui sümmeetriateljega $O\vec{e}_3$ ristuvat tasandit. Lõikepunktide koordinaadid tuleb leida süsteemist

$$\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{p_1} + \dfrac{x_2^2}{p_2} = 2x_3 \\ x_3 = h_3 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{x_1^2}{p_1} + \dfrac{x_2^2}{p_2} = 2h_3 \\ x_3 = h_3 \end{cases} . \tag{14.1}$$

Kuna $\frac{x_1^2}{p_1}+\frac{x_2^2}{p_2} \geq 0$, siis süsteemi (14.1) esimesest võrrandist näeme, et $h_3 < 0$ korral tasand $\pi_3 : x_3 = h_3$ ei lõika elliptilist paraboloidi. Kui $h_3 = 0$, siis lõikame reeperitasandiga $x_3 = 0$. Süsteemi (14.1) esimene võrrand annab $\frac{x_1^2}{p_1}+\frac{x_2^2}{p_2} = 0$, millest $p_1 > 0$ ja $p_2 > 0$ tõttu $x_1 = x_2 = 0$. Seega lõige koosneb ühest punktist, milleks on elliptilise paraboloidi tipp $O(0, 0, 0)$. Kui $h_3 > 0$, siis süsteemi (14.1) esimest võrrandit jagame teguriga $2h_3$. Defineerides

$$\alpha_1 := \sqrt{2p_1h_3}, \qquad \alpha_2 := \sqrt{2p_2h_3}, \tag{14.2}$$

saame

$$\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \dfrac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 1 \\ x_3 = h_3 \end{cases} .$$

Näeme, et lõikeks on ellips pooltelgedega α_1 ja α_2. Tema teljed on paralleelsed reeperitelgedega $O\vec{e}_1$ ja $O\vec{e}_2$. Kui tasand $\pi_3 : x_3 = h_3$ eemaldub reeperitasandist $O\vec{e}_1\vec{e}_2$, s.o. h_3 kasvab, siis valemi (14.2) kohaselt lõikeellipsi pooelteljed kasvavad.

b) Lõikame elliptilist paraboloidi tasandiga $\pi_2 : x_2 = h_2$. Lõikepunktide koordinaadid rahuldavad süsteemi

$$\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{p_1} + \dfrac{x_2^2}{p_2} = 2x_3 \\ x_2 = h_2 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x_1^2 = 2p_1\left(x_3 - \dfrac{h_2^2}{2p_2}\right) \\ x_2 = h_2 \end{cases} .$$

Näeme, et tasandil $\pi_2 : x_2 = h_2$ on lõikeks parabool, mille telg on paralleelne reeperiteljega $O\vec{e}_3$. Parabooli harud avanevad reeperitelje $O\vec{e}_3$ suunas, sest x_3 kordaja $2p_1$ on positiivne. Parabooli tipp asub punktis $O'(0, h_2, \frac{h_2^2}{2p_2})$.

Juhul kui $h_2 = 0$, siis parabool on reeperitasandil $O\vec{e}_1\vec{e}_3$. Tema tipp O' ühtib elliptilise paraboloidi tipuga O.

c) Lõikamisel tasandiga $\pi_1 : x_1 = h_1$ saame analoogilise tulemuse eelmise juhuga, mistõttu arutelu usaldame lugejale.

Pärast saadud tulemusi on aeg asuda elliptilise paraboloidi joonestamisele. Seejuures on soovitav kanda joonisele mitmesuguseid lõikeid lisaks neile, mis on toodud kõrvaloleval joonisel, kus on antud lõiked tasanditega $\pi_3 : x_3 = h_3$, $\pi_2 = 0$, $\pi_1 = 0$ ja $\pi_2 : x_2 = h_2$.

Hüperboolse paraboloidi lõiked

a) Lõikame tasandiga $\pi_3 : x_3 = h_3$. Ka siin ei ole tegemist sümmeetriatasandiga paralleelse tasandiga. Teda võib siingi iseloomustada kui sümmeetriateljega ristuvat tasandit. Lõikepunktide koordinaadid saame süsteemist

$$\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{p_1} - \dfrac{x_2^2}{p_2} = 2x_3 \\ x_3 = h_3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{x_1^2}{p_1} - \dfrac{x_2^2}{p_2} = 2h_3 \\ x_3 = h_3 \end{cases}. \tag{14.3}$$

Selle süsteemi uurimine sõltub h_3 märgist. Juhul kui $h_3 > 0$, siis süsteemi (14.3) saab esitada kujul

$$\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{\alpha_1^2} - \dfrac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 1 \\ x_3 = h_3 \end{cases}, \tag{14.4}$$

kus

$$\alpha_1 := \sqrt{2p_1h_3}, \qquad \alpha_2 := \sqrt{2p_2h_3}.$$

Lõikeks on hüperbool, mille reaaltelg on paralleelne reeperiteljega $O\vec{e}_1$ ja imaginaartelg reeperiteljega $O\vec{e}_3$. Hüperbooli keskpunkt on pinna teljel $O\vec{e}_3$ punktis $O'(0, 0, h_3)$.

Juhul kui $h_3 = 0$, siis süsteemi (14.3) saab esitada kujul

$$\begin{cases} \dfrac{x_1}{\sqrt{p_1}} - \dfrac{x_2}{\sqrt{p_2}} = 0 \\ x_3 = h_3 \end{cases} \vee \begin{cases} \dfrac{x_1}{\sqrt{p_1}} + \dfrac{x_2}{\sqrt{p_2}} = 0 \\ x_3 = h_3 \end{cases}.$$

Kumbki süsteem annab lõikeks sirge. Seega reeperitasand $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ lõikab hüperboolset paraboloidi mööda kahte lõikuvat sirget lõikepunktiga pinna tipus $O(0,0,0)$.

Juhul $h_2 < 0$ saame süsteemi (14.3) esitada kujul

$$\begin{cases} -\dfrac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \dfrac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 1 \\ x_3 = h_3 \end{cases}, \tag{14.4}$$

kus

$$\alpha_1 := \sqrt{-2p_1h_3}, \qquad \alpha_2 := \sqrt{-2p_2h_3}.$$

Lõikeks on hüperbool, mille reaaltelg on paralleelne reeperiteljega $O\vec{e}_2$ ja imaginaartelg on paralleelne aga reeperiteljega $O\vec{e}_1$. Hüperbooli tipp asub pinna teljel $O\vec{e}_3$ punktis $O'(0,0,h_3)$.

b) Lõikamisel tasandiga $\pi_2 : x_2 = h_2$, saame lõikepunktide koordinaatide jaoks süsteemi

$$\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{p_1} - \dfrac{x_2^2}{p_2} = 2x_3 \\ x_2 = h_2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1^2 = 2p_1\Big(x_3 + \dfrac{h_2^2}{2p_2}\Big) \\ x_2 = h_2 \end{cases}. \tag{14.5}$$

Lõikeks tasandil $\pi_2 : x_2 = h_2$ on parabool, mille telg on paralleelne reeperiteljega $O\vec{e}_3$. Kuna süsteemi (14.5) esimeses võrrandis kordaja $2p_1$ on positiivne, siis parabooli harud avanevad reeperitelje $O\vec{e}_3$ suunas. Parabooli tipp on punktis $O'(0, h_2, -\frac{h_2^2}{2p_2})$. Juhul $h_2 = 0$ lõikame reeperitasandiga $x_2 = 0$. Lõikeks sellel tasandil on parabool $x_1^2 = 2p_1x_3, \;\; x_2 = 0$, mille tipp on hüperboolse paraboloidi tipus. $O(0,0,0)$.

c) Lõikamisel tasandiga $\pi_1 : x_1 = h_1$, saame lõikepunktide koordinaatide leidmiseks süsteemi

$$\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{p_1} - \dfrac{x_2^2}{p_2} = 2x_3 \\ x_1 = h_1 \end{cases},$$

millest saame

$$\begin{cases} x_2^2 = -2p_2\Big(x_3 - \dfrac{h_1^2}{2p_1}\Big) \\ x_1 = h_1 \end{cases}. \tag{14.6}$$

Esimesest võrrandist näeme, et tasandil $\pi_1 : x_1 = h_1$ tuleb lõikeks parabool, mille telg on paralleelne reeperiteljega $O\vec{e}_3$. Parabooli harud avanevad reeperiteljele $O\vec{e}_3$ vastupidises suunas, sest süsteemi (14.6) esimeses võrrandis kordaja $-2p_2$ on negatiivne. Parabooli tipp on punktis $O'(h_1, 0, \frac{h_1^2}{2p_1})$.

Teades lõikeid, soovitame lugejal teha elliptilise ja hüperboolse paraboloidi joonised.

15. ELLIPTILINE, HÜPERBOOLNE JA PARABOOLNE SILINDER

Definitsioon 15.1. *Punktihulka $\{X\}$ ruumis, mille iga punkti X koordinaadid (x_1, x_2, x_3) mingis ristreeperis $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ rahuldavad võrrandit*

a) $\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 1$, *kus α_1 ja α_2 on positiivsed konstandid, nimetatakse elliptiliseks silindriks,*

b) $\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} - \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 1$, *kus α_1 ja α_2 on positiivsed konstandid, nimetatakse hüperboolseks silindriks,*

c) $x_2^2 = 2px_1$, *kus p on positiivne konstant, nimetatakse paraboolseks silindriks.*

Silindrite sümmeetriaomadused on ühesugused elliptilisel ja hüperboolsel silindril. Valitud reeperi $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ korral on elliptiline ja hüperboolne silinder sümmeetriline kõigi reeperitasandite $O\vec{e}_1\vec{e}_2$, $O\vec{e}_1\vec{e}_3$ ja $O\vec{e}_2\vec{e}_3$ suhtes. Uudse momendina lisandub, võrreldes näiteks ellipsoidiga, neid sümmeetriatasandeid veelgi. Nimelt on elliptiline ja hüperboolne silinder sümmeetriline veel iga tasandi suhtes, mis on paralleelne reeperitasandiga $O\vec{e}_1\vec{e}_2$, s.o. tasandi $\pi_3 : x_3 = h_3$ suhtes. Nende silindrite sümmeetriatelgedeks on aga kõik reeperiteljed ning lisaks veel sirged antuna võrranditega $x_3 = h_3, x_2 = 0$ ja $x_3 = h_3, x_1 = 0$. Samuti on need silindrid sümmeetrilised reeperitelje $O\vec{e}_3$ iga punkti suhtes.

Paraboolne silinder on sümmeetriline reeperitasandi $O\vec{e}_1\vec{e}_3$ ja tasandite $\pi_3 : x_3 = h_3$ suhtes. Sümmeetriatelgedeks on reeperitelg $O\vec{e}_1$ ja iga sirge $x_2 = 0, x_3 = h_3$.

Loetletud sümmeetriaomaduste tõestuse jätame ka siin lugejale.

Järgnevas lõikame silindreid tasandiga $\pi_3 : x_3 = h_3$. Lõikepunktide koordinaadid rahuldavad vastavalt järgmisi süsteeme

$$a) \begin{cases} \dfrac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \dfrac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 1 \\ x_3 = h_3 \end{cases}, \quad b) \begin{cases} \dfrac{x_1^2}{\alpha_1^2} - \dfrac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 1 \\ x_3 = h_3 \end{cases}, \quad c) \begin{cases} x_2^2 = 2px_1 \\ x_3 = h_3 \end{cases}.$$

Lõigeteks on vastavalt a) ellips, b) hüperbool ja c) parabool. Paneme tähele, et iga h_3 korral ellipsi ja hüperbooli teljed on paraleelsed reeperitelgedega $O\vec{e}_1$ ja $O\vec{e}_2$. Keskpunkt on reeperiteljel $O\vec{e}_3$ punktis $O'(0, 0, h_3)$. Paneme ka tähele seda, et lõigete poolteljed α_1 ja α_2 ei sõltu h_3 väärtusest. Analoogiline on olukord paraboolse silindri korral: lõikeparabooli sümmeetriatelg on paralleelne reeperiteljega $O\vec{e}_1$, tema tipp on reeperiteljel $O\vec{e}_3$ punktis $O'(0,0,h_3)$. Igal tasandil $x_3 = h_3$ on lõikeparaboolid ühesugused, sest fokaalparameeter p ei sõltu konstandi h_3 väärtusest. Saadud informatsiooni arvestades, saaksime silindrid skitseerida. Näiteks elliptilise silindri võime saada järgmiselt: võtame ellipsi ja sirge, mis läbib selle ellipsi keskpunkti ja on risti tema poolt mnääratud tasandiga; elliptilise silindri saame nüüd võetud ellipsi liikumisel paralleelselt iseendaga nii, et tema keskpunkt libiseks mööda valitud sirget. Hüperboolse silindri saame analoogiliselt, ainult liikuma tuleb panna hüperbool. Paraboolse silindri korral libiseb parabool paralleelselt iseendaga, kusjuures tema tipp libiseb mööda võetud sirget.

On veel üks võimalus silindrite skitseerimiseks, mis on võib-olla isegi ülevaatlikum. Selleks tõestame ühe omaduse. Teeme seda elliptilise silindri korral, sest täpselt samamoodi toimub see hüperboolse ja paraboolse silindri korral.

Olgu $P(p_1, p_2, p_3)$ elliptilise silindri vabalt fikseeritud punkt. Sel korral

$$\frac{p_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{p_2^2}{\alpha_2^2} = 1.$$

Moodustame nüüd sirge, mis läbib punkti P ja on sihivektoriga $\vec{e}_3$. Tema parameetrilisteks võrranditeks on

$$x_1 = p_1, \quad x_2 = p_2, \quad x_3 = p_3 + t, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{15.1}$$

Osutub, et sirge(15.1) asub elliptilisel silindril. Tõestuseks on vaja näidata, et selle sirge iga punkti $X(p_1, p_2, p_3 + t)$ koordinaadid rahuldavad elliptilise silindri võrrandit. See on tõepoolest nii, sest

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = \frac{p_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{p_2^2}{\alpha_2^2} = 1.$$

Viimast omadust kasutades, võime silindrid skitseerida ka nii. Elliptilise silindri saamiseks võtame ellipsi, temal mingi punkti P. Läbi tema võtame omakorda sirge, mis on risti valitud ellipsi tasandiga. Järgnevas paneme punkti P mööda ellipsit koos valitud sirgega liikuma. Viimane kirjeldabki elliptilise silindri. Kui ellipsi asemel võtame hüperbooli või parabooli, siis samasugusel moel saame hüperboolse või paraboolse silindri.

Märkus. Siin anname silindrilise pinna mõiste. Selleks võtame ruumis suuvalise kõvera, millist nimetame *juhtjooneks.* Läbi juhtjoone mingi punkti P võtame sirge, mida nimetame *moodustajaks.* Järgnevas paneme mööda juhtjoont punkti P koos moodustajaga liikuma, nõudes, et moodustaja jääks iseendaga paralleelseks. Sirgete poolt tekkivat pinda nimetatakse *silindriliseks pinnaks.* Ilmselt elliptiline, hüperboolne ja paraboolne silinder on silindrilised pinnad.

16. ÜHEKATTELISE HÜPERBOLOIDI SIRGJOONELISED MOODUSTAJAD

Siin me hakkame otsima selliseid sirgeid, mis asuvad pinnal, praegu ühakattelisel hüperboloidil. Mõningate eespool vaadeldud pindade korral selliste sirgete olemasolu on meile juba teada. Näiteks teist järku koonuse ja silindrite korral. Veelgi enam: need pinnad võib saada mingi sirge liikumisel. *Pinna sirgeid, milledest saab pinna moodustada, nimetatakse selle pinna sirgjoonelisteks moodustajateks.* Mõningate eespool vaadeldud pindade korral saab aga öelda, et neil sirgjoonelisi moodustajaid ei ole. Kindlasti ei ole sirgjoonelisi moodustajaid ellipsoidil, sest ta paikneb ruumi lõplikus osas – ristkülikus servadega $2\alpha_1$, $2\alpha_2$ ja $2\alpha_3$. Seetõttu mitte ükski sirge ei saa olla ellipsoidil. Samuti ei ole sirgjoonelisi moodustajaid elliptilisel paraboloidil. Seda näitab järgmine arutelu. Sirgjoonelise moodustaja peame saama pinna lõikamisel sobiva tasandiga. Näiteks elliptilise paraboloidi lõikamisel tasandiga, mis on paralleelne $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ tasandiga, lõikeks on kas ellips, üks punkt või lõige hoopiski puudub. Seega, kui elliptilisel paraboloidil sirgjoonelisi moodustajaid on olemas, siis need ei ole paralleelsed reeperitasandiga $O\vec{e}_1\vec{e}_2$. Samuti ei saa sirgjooneliseks moodustajaks olla mitte ükski sirge, mis ei ole paralleelne märgitud reeperitasandiga $O\vec{e}_1\vec{e}_2$, sest elliptiline paraboloid on sellest tasandist ühel pool, kuid sirge omab sellest tasandist mõlemal pool punkte. Seetõttu ei saa selline sirge olla sirgjooneline moodustaja. Osutub, et sirgjoonelisi moodustajaid ei ole ka kahekattelisel hüperboloidil. Ka siin sirgjooneline moodustaja ei saa olla paralleelne reeperitasandiga $O\vec{e}_1\vec{e}_2$, sest siis on ta saadav lõikamisel tasandiga, mis on paralleelne reeperitasandiga $O\vec{e}_1\vec{e}_2$. Sellel tasandil lõikeks pinnaga on ellips, millele peaks ära mahtuma meie sirgjooneline moodustaja. See on aga võimatu. Kui aga oletada, et sirgjooneline moodustaja ei ole paralleelne reeperitasandiga $O\vec{e}_1\vec{e}_2$, siis ta läbib ka tasandite $x_3 = \alpha_3$ ja $x_3 = -\alpha_3$ vahelist ruumiosa, kus aga ei ole kahekattelisel hüperboloidil punkte. Seega ka sellised sirged ei saa olla sirgjoonelisteks moodustajateks. Järelikult mitte ükski sirge ei saa olla sirgjooneline moodustaja. Eespool vaadeldavatest teist järku pindadest vajavad täiendavat uurimist ühekatteline hüperboloid ja hüperboolne paraboloid.

Teoreem 16.1. *Ühekattelise hüperboloidi igat punkti läbib kaks omavahel lõikuvat sirgjoonelist moodustajat.*

Tõestus. Olgu $M(m_1, m_2, m_3)$ ühekattelise hüperboloidi

$$p: \frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} - \frac{x_3^2}{\alpha_3^2} = 1$$

mistahes punkt. Sel korral

$$\frac{m_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{m_2^2}{\alpha_2^2} - \frac{m_3^2}{\alpha_3^2} = 1. \tag{16.1}$$

Olgu $l(M, \vec{s})$ punkti M läbiv sirge sihivektoriga $\vec{s} = (s_1, s_2, s_3) \neq \vec{0}$. Tema parameetrilisteks võrranditeks on

$$x_1 = m_1 + s_1 t, \quad x_2 = m_2 + s_2 t, \quad x_3 = m_3 + s_3 t, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{16.2}$$

Püüame selgitada, kas saab valida selle sirge sihivektori $\vec{s}$ nii, et sirge $l(M, \vec{s})$ on ühekattelisel hüperboloidil. Siis see sirge on meie pinna sirgjooneline moodustaja. Öeldu võib sõnastada ka samaväärselt nii: leida sirge $l(M, \vec{s})$ sihivektor $\vec{s}$ nii, et selle sirge iga punkt on lõikepunktiks ühekattelise hüperboloidiga. Lõikepunktid, kui ühekattelise hüperboloidi ja sirge $l(M, \vec{s})$ ühised punktid, tuleb leida võrrandisüsteemist

$$\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \dfrac{x_2^2}{\alpha_2^2} - \dfrac{x_3^2}{\alpha_3^2} = 1 \\ x_1 = m_1 + s_1 t \\ x_2 = m_2 + s_2 t \\ x_3 = m_3 + s_3 t \end{cases}.$$

Asendades selle süsteemi kolmest viimasest võrrandist esimesse võrrandisse, saame esimese võrrandi pärast korrastamist t astmete järgi viia kujule

$$\left(\frac{s_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{s_2^2}{\alpha_2^2} - \frac{s_3^2}{\alpha_3^2}\right) t^2 + 2\left(\frac{s_1 m_1}{\alpha_1^2} + \frac{s_2 m_2}{\alpha_2^2} - \frac{s_3 m_3}{\alpha_3^2}\right) t + \left(\frac{m_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{m_2^2}{\alpha_2^2} - \frac{m_3^2}{\alpha_3^2} - 1\right) = 0,$$

mis (16.1) tõttu on samaväärne

$$t\left[\left(\frac{s_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{s_2^2}{\alpha_2^2} - \frac{s_3^2}{\alpha_3^2}\right) t + 2\left(\frac{s_1 m_1}{\alpha_1^2} + \frac{s_2 m_2}{\alpha_2^2} - \frac{s_3 m_3}{\alpha_3^2}\right)\right] = 0. \tag{16.3}$$

Sellest võrrandist saame need t väärtused, mis vastavad lõikepunktidele. Viimaste abil sirge $l(M,\vec{s})$ parameetrilistest võrranditest (16.2) omakorda saame lõikepunktide koordinaadid. Pöördume tagasi võrrandi (16.3) juurde. Tema vasak pool on esitatud kahe teguri korrutisena. Esimese teguri võrrutamine nulliga annab $t = 0$, mis annab lõikepunktiks sirge $l(M,\vec{s})$ punkti M. Teise teguri võrrutamine nulliga annab

$$\left(\frac{s_1^2}{\alpha_1^2}+\frac{s_2^2}{\alpha_2^2}-\frac{s_3^2}{\alpha_3^2}\right)t+2\left(\frac{s_1m_1}{\alpha_1^2}+\frac{s_2m_2}{\alpha_2^2}-\frac{s_3m_3}{\alpha_3^2}\right)=0.$$

See võrrand peab kehtima aga iga $t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ korral. See on võimalik, kui

$$\begin{cases} \dfrac{s_1^2}{\alpha_1^2}+\dfrac{s_2^2}{\alpha_2^2}-\dfrac{s_3^2}{\alpha_3^2}=0 \\ \dfrac{s_1m_1}{\alpha_1^2}+\dfrac{s_2m_2}{\alpha_2^2}-\dfrac{s_3m_3}{\alpha_3^2}=0 \end{cases}. \tag{16.4}$$

See võrrandisüsteem on sirgjoonelise moodustaja sihivektori koordinaatide leidmiseks. Viimase lahendamine on üsna tülikas, sest esimeses võrrandis on otsitavad s_1, s_2 ja s_3 teisel astmel. Kui sellel võrrandisüsteemil on lahend olemas, siis $s_3 \neq 0$, sest vastasel juhul $s_3 = 0$ korral süsteemi (16.4) esimene võrrand annab

$$\frac{s_1^2}{\alpha_1^2}+\frac{s_2^2}{\alpha_2^2}=0 \quad\Longrightarrow\quad s_1=s_2=0 \quad\Longrightarrow \vec{s}=\vec{0}.$$

See on aga lubamatu, sest sirge sihivektor ei tohi olla nullvektor. See asjaolu, et $s_3 \neq 0$, lubab süsteemi (16.4) lihtsustada. Selleks arvestame, et sirge sihivektor on määratud kordsuse täpsusega. Seega, kui sirge $l(M,\vec{s})$ sihivektoriks on $\vec{s}$, siis sama sirge sihivektoriks on vektori $\vec{s}$ kõrval ka iga vektor $k\vec{s} = (ks_1, ks_2, ks_3)$, kus $k \neq 0$. Võttes $k = \frac{\alpha_3}{s_3}$, saame teha sirge $l(M,\vec{s})$ sihivektori kolmanda koordinaadi võrdseks arvuga α_3. Oletame, et seda on tehtud. Sel korral on sirge jaoks täpselt üks sihivektor. Tehtud kokkuleppe $s_3 = \alpha_3$ kohaselt süsteem (16.4) veidike lihtsustub. Saame

$$\begin{cases} \dfrac{s_1^2}{\alpha_1^2}+\dfrac{s_2^2}{\alpha_2^2}=1 \\ \dfrac{s_1m_1}{\alpha_1^2}+\dfrac{s_2m_2}{\alpha_2^2}=\dfrac{m_3}{\alpha_3} \end{cases}.$$

Selle süsteemi esimene võrrand on tõlgendatav ellipsi kanoonilise võrrandina, mistõttu ta saab asendada ellipsi parameetriliste võranditega. Saame

$$\begin{cases} s_1 = \alpha_1 cos\tau \\ s_2 = \alpha_2 sin\tau \\ \dfrac{s_1 m_1}{\alpha_1^2} + \dfrac{s_2 m_2}{\alpha_2^2} = \dfrac{m_3}{\alpha_3} \end{cases}.$$

Asendame kahest esimesest võrrandist s_1 ja s_2 kolmandasse võrrandisse. Saame

$$\frac{m_1}{\alpha_1} cos\tau = \frac{m_3}{\alpha_3} - \frac{m_2}{\alpha_2} sin\tau. \tag{16.5}$$

Tõstame viimase ruutu ja asendame $cos^2\tau = 1 - sin^2\tau$. Me saame $sin\tau$ suhtes järgmise ruutvõrrandi

$$\left(\frac{m_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{m_2^2}{\alpha_2^2}\right) sin^2\tau - 2\frac{m_2 m_3}{\alpha_2\alpha_3} sin\tau + \left(-\frac{m_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{m_3^2}{\alpha_3^2}\right) = 0,$$

mille lahendamisel saame

$$sin\tau = \frac{\frac{m_2 m_3}{\alpha_2\alpha_3} \pm \sqrt{\left(\frac{m_2 m_3}{\alpha_2\alpha_3}\right)^2 + \left(\frac{m_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{m_2^2}{\alpha_2^2}\right)\left(\frac{m_1^2}{\alpha_1^2} - \frac{m_3^2}{\alpha_3^2}\right)}}{\frac{m_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{m_2^2}{\alpha_2^2}} =$$

$$= \frac{\frac{m_2 m_3}{\alpha_2\alpha_3} \pm \sqrt{\left(\frac{m_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{m_2^2}{\alpha_2^2}\right)\frac{m_1^2}{\alpha_1^2} - \frac{m_1^2}{\alpha_1^2}\frac{m_3^2}{\alpha_3^2}}}{\frac{m_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{m_2^2}{\alpha_2^2}} =$$

$$= \frac{\frac{m_2 m_3}{\alpha_2\alpha_3} \pm \sqrt{\left(1 + \frac{m_3^2}{\alpha_3^2}\right)\frac{m_1^2}{\alpha_1^2} - \frac{m_1^2}{\alpha_1^2}\frac{m_3^2}{\alpha_3^2}}}{\frac{m_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{m_2^2}{\alpha_2^2}} = \frac{\frac{m_2 m_3}{\alpha_2\alpha_3} \pm \frac{m_1}{\alpha_1}}{\frac{m_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{m_2^2}{\alpha_2^2}}.$$

Seega

$$sin\tau = \frac{\frac{m_2 m_3}{\alpha_2\alpha_3} \pm \frac{m_1}{\alpha_1}}{\frac{m_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{m_2^2}{\alpha_2^2}}.$$

Nüüd leiame $cos\tau$. Selleks asendame leitud $sin\tau$ valemisse (16.5). Saame

$$\frac{m_1}{\alpha_1}cos\tau = \frac{m_3}{\alpha_3} - \frac{m_2}{\alpha_2}sin\tau = \frac{m_3}{\alpha_3} - \frac{m_2}{\alpha_2}\frac{\frac{m_2m_3}{\alpha_2\alpha_3} \pm \frac{m_1}{\alpha_1}}{\frac{m_1^2}{\alpha_1^2}+\frac{m_2^2}{\alpha_2^2}} =$$

$$= \frac{(\frac{m_3}{\alpha_3})(\frac{m_1^2}{\alpha_1^2}+\frac{m_2^2}{\alpha_2^2}) - \frac{m_2^2}{\alpha_2^2}\frac{m_3}{\alpha_3} \pm \frac{m_1}{\alpha_1}\frac{m_2}{\alpha_2}}{\frac{m_1^2}{\alpha_1^2}+\frac{m_2^2}{\alpha_2^2}} = \frac{m_1}{\alpha_1}\frac{\frac{m_1m_3}{\alpha_1\alpha_3} \mp \frac{m_2}{\alpha_2}}{\frac{m_1^2}{\alpha_1^2}+\frac{m_2^2}{\alpha_2^2}}.$$

Seega

$$cos\tau = \frac{\frac{m_1m_3}{\alpha_1\alpha_3} \mp \frac{m_2}{\alpha_2}}{\frac{m_1^2}{\alpha_1^2}+\frac{m_2^2}{\alpha_2^2}}.$$

Viimaste abil saame sirgjooneliste moodustajete jaoks kaks sihivektorit

$$\vec{s}_1(M) = \left(\alpha_1\frac{\frac{m_1m_3}{\alpha_1\alpha_3} - \frac{m_2}{\alpha_2}}{\frac{m_1^2}{\alpha_1^2}+\frac{m_2^2}{\alpha_2^2}}, \alpha_2\frac{\frac{m_2m_3}{\alpha_2\alpha_3} + \frac{m_1}{\alpha_1}}{\frac{m_1^2}{\alpha_1^2}+\frac{m_2^2}{\alpha_2^2}}, \alpha_3\right) \tag{16.6}$$

ja

$$\vec{s}_2(M) = \left(\alpha_1\frac{\frac{m_1m_3}{\alpha_1\alpha_3} + \frac{m_2}{\alpha_2}}{\frac{m_1^2}{\alpha_1^2}+\frac{m_2^2}{\alpha_2^2}}, \alpha_2\frac{\frac{m_2m_3}{\alpha_2\alpha_3} - \frac{m_1}{\alpha_1}}{\frac{m_1^2}{\alpha_1^2}+\frac{m_2^2}{\alpha_2^2}}, \alpha_3\right). \tag{16.7}$$

Valemist (16.1) näeme, et punkti M koordinaadid m_1 ja m_2 ei ole korraga nullid. Seega vektorid $\vec{s}_1$ ja $\vec{s}_2$ ei ole ühekattelise hüperboloidi ühegi punkti M korral kollineaarsed, sest nende vektorite kolmandate koordinaatide suhe on 1, kuid esimeste ja teiste koordinaatide suhe samaaegselt ei ole aga 1.

Oleme näidanud, et ühekattelise hüperboloidi igat punkti M läbib kaks omavahel lõikuvat sirgjoonelist moodustajat $l(M,\vec{s}_1(M))$ ja $l(M;\vec{s}_2(M))$.♠

Jagame nüüd ühekattelise hüperboloidi kõigi sirgjooneliste moodustajate hulga kaheks lõikumatuks alamhulgaks nn. *parveks*

$$\mathcal{P}_1 := \{l(M,\vec{s}_1(M)|M \in p\}, \quad \mathcal{P}_2 := \{l(M,\vec{s}_2(M)|M \in p\}.$$

Ühekatteline hüperboloid ladestub kummagi parve sirgjoonelistest moodustajatest:

$$p = \cup_{M\in p}l(M,\vec{s}_1(M)), \quad p = \cup_{M\in p}l(M,\vec{s}_2(M)).$$

Ühekattelise hüperboloidi mistahes sirgjoonelise moodustaja andmiseks parameetriliste võrranditega tuleb temal võtta vabalt mingi punkt M, selle koordinaatide abil leida valemi (16.6) või (16.7) abil tema sihivektori koordinaadid. Need valemid on kahjuks üsna keerulised. Tegelikult saab siin olukorda lihtsustada, valides punkti M sirgjoonelisel moodustajal sobivalt. Nagu nägime on mistahes sirgjoonelise moodustaja korral tema sihivektori kolmas koordinaat $s_3 = \alpha_3$ tõttu nullist erinev. See aga tähendab, et kõik sirgjoonelised moodustajad lõikavad reeperitasandit $O\vec{e}_1\vec{e}_2$, teisiti öelduna kaelellipsit. Seega punktiks M võime võtta sirgjoonelise moodustaja lõikepunkti reeperitasandiga $O\vec{e}_1\vec{e}_2$, teisiti öelduna kaelellipsiga. Sellise punkti kolmas koordinaat m_3 on aga null. Seega $M(m_1, m_2, 0)$. Selle nulli tõttu oluliselt lihtsustuvad sihivektorite (16.6) ja (16.7) avaldised. Seejuures arvestame ka valemit (16.1). Me saame

$$\vec{s}_1(M) = \Big(-\frac{\alpha_1}{\alpha_2} m_2, \frac{\alpha_2}{\alpha_1} m_1, \alpha_3 \Big), \vec{s}_2(M) = \Big(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} m_2, -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} m_1, \alpha_3 \Big).$$

Sõnastame ühekattelise hüperboloidi jaoks kaks teoreemi, mille tõestused suures osas saab anda korraga.

Teoreem 16.2. *Ühekattelise hüperboloidi mistahes kaks sirgjoonelist moodustajat erinevast parvest on kas lõikuvad või on paralleelsed. Viimasel juhul lõikavad nad kaelellipsit meie pinna keskpunkti suhtes sümmeetrilistes punktides.*

Teoreem 16.3. *Ühekattelise hüperboloidi mistahes kaks erinevat sirgjoonelist moodustajat samast parvest on kiivsirged.*

Tõestus. Olgu teoreemi 16.2 korral võetud sirgjoonelised moodustajad $l(M, \vec{s}_1(M)) \in \mathcal{P}_1$ ja $l(N, \vec{s}_2(N)) \in \mathcal{P}_2$ ning teoreemi 16.3 korral võetud kaks erinevat sirgjoonelist moodustajat, näiteks esimesest parvest, seega $l(M, \vec{s}_1(M)), l(N, \vec{s}_1(N)) \in \mathcal{P}_1$. Nagu sai selgitatud, võime eeldada, et ühekattelise hüperboloidi punktid M ja N on kaelellipsil. Järelikult $M(m_1, m_2, 0)$ ja $N(n_1, n_2, 0)$ ning

$$\frac{m_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{m_2^2}{\alpha_2^2} = 1, \quad \frac{n_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{n_2^2}{\alpha_2^2} = 1.$$

Nende sirgjooneliste moodustajate sihivektoriteks on

$$\vec{s}_1(M) = \left(-\frac{\alpha_1}{\alpha_2} m_2, \frac{\alpha_2}{\alpha_1} m_1, \alpha_3 \right),$$
$$\vec{s}_\epsilon(N) = \left(\epsilon\frac{\alpha_1}{\alpha_2} n_2, -\epsilon\frac{\alpha_2}{\alpha_1} n_1, \alpha_3 \right).$$

Siin $\epsilon = 1$ vastab teoreemile 16.2 ja $\epsilon = -1$ teoreemile 16.3. Algebra ja geomeetria kursusest teame, et ruumis kaks sirget, praegu sirgjoonelised moodustajad $l(M, \vec{s}_1(M))$ ja $l(N, \vec{s}_\epsilon(N))$, on kiivsirged, kui segakorrutis $\vec{s}_1(M)\vec{s}_\epsilon(N)\overrightarrow{NM}$ on nullist erinev. Vastasel juhul sirged ei ole kiivsirged. Arvutame selle segakorrutise:

$$\vec{s}_1(M)\vec{s}_\epsilon(N)\overrightarrow{NM} = \begin{vmatrix} -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} m_2 & \frac{\alpha_2}{\alpha_1} m_1 & \alpha_3 \\ \epsilon\frac{\alpha_1}{\alpha_2} n_2 & -\epsilon\frac{\alpha_2}{\alpha_1} n_1 & \alpha_3 \\ m_1 - n_1 & m_2 - n_2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \alpha_3 \left[\begin{vmatrix} \epsilon\frac{\alpha_1}{\alpha_2} n_2 & -\epsilon\frac{\alpha_2}{\alpha_1} n_1 \\ m_1 - n_1 & m_2 - n_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} m_2 & \frac{\alpha_2}{\alpha_1} m_1 \\ m_1 - n_1 & m_2 - n_2 \end{vmatrix} \right] =$$

$$= \alpha_3 \left[(m_2 - n_2)\left(\epsilon\frac{\alpha_1}{\alpha_2} n_2 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} m_2 \right) + (m_1 - n_1)\left(\epsilon\frac{\alpha_2}{\alpha_1} n_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} m_1 \right) \right] =$$

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \left[\frac{(m_2 - n_2)(m_2 + \epsilon\, n_2)}{\alpha_2^2} + \frac{(m_1 - n_1)(m_1 + \epsilon\, n_1)}{\alpha_1^2} \right].$$

Teoreemi 16.2 korral, nagu öeldud, on $\epsilon = 1$. Viimasest valemist segakorrutise jaoks saame

$$\vec{s}_1(M)\vec{s}_1(N)\overrightarrow{NM} = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \left[\frac{(m_2 - n_2)(m_2 + n_2)}{\alpha_2^2} + \frac{(m_1 - n_1)(m_1 + n_1)}{\alpha_1^2} \right] =$$

$$= \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \left[\frac{m_2^2 - n_2^2}{\alpha_2^2} + \frac{m_1^2 - n_1^2}{\alpha_1^2} \right] = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \left[\left(\frac{m_2^2}{\alpha_2^2} + \frac{m_1^2}{\alpha_1^2} \right) - \left(\frac{n_2^2}{\alpha_2^2} + \frac{n_1^2}{\alpha_1^2} \right) \right] =$$
$$= \alpha_1\alpha_2\alpha_3(1 - 1) = 0.$$

Seega kaks sirgjoonelist moodustajat erinevatest parvedest ei ole kiivsirged. Nad on kas lõikuvad või paralleelsed. Paralleelsuse korral nende sihivektorid $\vec{s}_1$ ja $\vec{s}_2$ on kollineaarsed, s.t. koordinaatide suhted on võrdsed. Järelikult

$$\frac{-\frac{\alpha_1}{\alpha_2} m_2}{\frac{\alpha_1}{\alpha_2} n_2} = \frac{\frac{\alpha_2}{\alpha_1} m_1}{-\frac{\alpha_2}{\alpha_1} n_1} = \frac{\alpha_3}{\alpha_3},$$

millest $n_1 = -m_1$ ja $n_2 = -m_2$. Järelikult punktid $M(m_1, m_2, 0)$ ja $N(-m_1, -m_2, 0)$ paiknevad teineteise suhtes sümmeetriliselt ühekattelise hüperboloidi keskpunkti $O(0,0,0)$ suhtes. Teoreem 16.2 on tõestatud.

Teoreemi 16.3 tõestamiseks tuleb võtta $\epsilon = -1$. Sel korral saame

$$\vec{s}_1(M)\vec{s}_1(N)\overrightarrow{NM} = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\left[\frac{(m_2-n_2)^2}{\alpha_2^2} + \frac{(m_1-n_1)^2}{\alpha_1^2}\right].$$

Kuna meil on tegemist sama parve kahe erineva sirgjoonelise moodustajaga, siis punktid M ja N on erinevad. Seetõttu ei ole korraga $m_1 - n_1$ ja $m_2 - n_2$ võrdsed nulliga. Näemegi, et $\vec{s}_1(M)\vec{s}_1(N)\overrightarrow{NM} \neq 0$, mis ütleb, et sama parve kaks erinevat sirgjoonelist moodustajat on kiivsirged. Sellega ka teoreem 16.3 on tõestatud. ♠

17. HÜPERBOOLSE PARABOLOIDI SIRGJOONELISED MOODUSTAJAD

Käeolev paragrahv on oma sisu poolest analoogiline eelmisele. Ka tulemused on üsna sarnased. Nagu eelmises paragrahvis nägime, taandus sirgjoonelise moodustaja leidmine vaadeldava pinna sellise lõikaja leidmisele, mille iga punkt on lõikepunktiks.

Teoreem 17.1. *Hüperboolse paraboloidi igat punkti läbib kaks omavahel lõikuvat sirgjoonelist moodustajat.*

Tõestus. Hüperboolne paraboloid sobivas ristreeperis $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ on antav võrrandiga

$$p : \frac{x_1^2}{p_1} - \frac{x_2^2}{p_2} = 2x_3,$$

kus $p_1 > 0$ ja $p_2 > 0$ on konstandid. Temal võetud punkti $M(m_1, m_2, m_3)$ korral

$$\frac{m_1^2}{p_1} - \frac{m_2^2}{p_2} = 2m_3. \tag{17.1}$$

Sirge, mis läbib punkti M ja on sihivektoriga $\vec{s} = (s_1, s_2, s_3) \neq \vec{0}$, parameetrilisteks võrranditeks on

$$x_1 = m_1 + s_1 t, \quad x_2 = m_2 + s_2 t, \quad x_3 = m_3 + s_3 t, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{17.2}$$

Lõikepunktide koordinaadid rahuldavad süsteemi

$$\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{p_1} - \dfrac{x_2^2}{p_2} = 2x_3 \\ x_1 = m_1 + s_1 t \\ x_2 = m_2 + s_2 t \\ x_3 = m_3 + s_3 t \end{cases}.$$

Asendades viimasest kolmest võrrandist esimesse, saame järgmise ruutvõrrandi

$$\left(\frac{s_1^2}{p_1} - \frac{s_2^2}{p_2}\right)t^2 + 2\left(\frac{m_1 s_1}{p_1} - \frac{m_2 s_2}{p_2} - s_3\right)t + \left(\frac{m_1^2}{p_1} - \frac{m_2^2}{p_2} - 2m_3\right) = 0,$$

mille vabaliige on (17.1) tõttu võrdne nulliga. Seega

$$t\left[\left(\frac{s_1^2}{p_1}-\frac{s_2^2}{p_2}\right)t+2\left(\frac{m_1s_1}{p_1}-\frac{m_2s_2}{p_2}-s_3\right)\right]=0. \tag{17.3}$$

Sellest võrrandist saame need t väärtused, mis vastavad lõikepunktidele. Viimaste abil sirge $l(M,\vec{s})$ parameetrilistest võrranditest (17.2) omakorda saame lõikepunktide koordinaadid. Pöördume tagasi võrrandi (17.3) juurde. Tema vasak pool on esitatud kahe teguri korrutisena. Esimese teguri võrrutamine nulliga annb $t=0$, mis annab lõikepunktiks sirge $l(M,\vec{s})$ punkti M. Teise teguri võrrutamine nulliga annab

$$\left(\frac{s_1^2}{p_1}-\frac{s_2^2}{p_2}\right)t+2\left(\frac{m_1s_1}{p_1}-\frac{m_2s_2}{p_2}-s_3\right).$$

See võrrand peab kehtima aga iga $t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ korral. See on võimalik, kui

$$\frac{s_1^2}{p_1}-\frac{s_2^2}{p_2}=0,\qquad \frac{m_1s_1}{p_1}-\frac{m_2s_2}{p_2}-s_3=0. \tag{17.4}$$

Esimesest võrrandist saame

$$\left(\frac{s_1}{\sqrt{p_1}}-\frac{s_2}{\sqrt{p_2}}\right)\left(\frac{s_1}{\sqrt{p_1}}+\frac{s_2}{\sqrt{p_2}}\right)=0,$$

millest

$$\frac{s_1}{\sqrt{p_1}}\mp\frac{s_2}{\sqrt{p_2}}=0 \quad\Longrightarrow\quad s_2=\pm\sqrt{\frac{p_2}{p_1}}s_1.$$

Paneme tähele, et $s_1\neq 0$. Kui peaks olema $s_1=0$, siis viimase tõttu $s_2=0$ ning ning (17.4) teine võrrand lisab $s_3=0$. Seega sirge sihivektoriks tuleb nullvektor, mis aga on lubamatu. Kuna sirge sihivektor määratakse kordsuse täpsusega, siis võime võtta $s_1=\sqrt{p_1}$. Sel korral

$$s_1=\sqrt{p_1}\quad\Longrightarrow\quad s_2=\pm\sqrt{p_2}\quad s_3=\frac{m_1}{\sqrt{p_1}}\mp\frac{m_2}{\sqrt{p_2}}.$$

Saame kaks sihivektorit

$$\vec{s}_1(M)=\left(\sqrt{p_1},\sqrt{p_2},\frac{m_1}{\sqrt{p_1}}-\frac{m_2}{\sqrt{p_2}}\right),$$
$$\vec{s}_2(M)=\left(\sqrt{p_1},-\sqrt{p_2},\frac{m_1}{\sqrt{p_1}}+\frac{m_2}{\sqrt{p_2}}\right).$$

Kuna sihivektori kordsus sai fikseeritud, siis sirge ja tema sihivektori vahel on üksühene vastavus. Seega punkti M läbib kaks sirgjoonelist moodustajat. Nad on lõikuvad, sest sihivektorid on mittekollineaarsed. Teoreem on tõestatud. ♠

Jagame nüüd hüperboolse paraboloidi kõigi sirgjooneliste moodustajate hulga kaheks lõikumatuks alamhulgaks nn. *parveks*

$$\mathcal{P}_1 := \{l(M, \vec{s}_1(M) | M \in p\}, \quad \mathcal{P}_2 := \{l(M, \vec{s}_2(M) | M \in p\}.$$

Hüperboolne paraboloid ladestub kummagi parve sirgjoonelistest moodustajatest:

$$p = \cup_{M \in p} l(M, \vec{s}_1(M)), \quad p = \cup_{M \in p} l(M, \vec{s}_2(M)).$$

Huvitav on märgata, et esimese parve iga sirgjooneline moodustaja on paraleelne tasandiga

$$\pi_1 : \frac{x_1}{\sqrt{p_1}} - \frac{x_2}{\sqrt{p_2}} = 0$$

ja teise parve iga sirgjooneline moodustaja aga paralleelne tasandiga

$$\pi_2 : \frac{x_1}{\sqrt{p_1}} + \frac{x_2}{\sqrt{p_2}} = 0.$$

Selleks on küllaldane veenduda, et sirgjoonelise moodustaja sihivektor on aga risti vastava tasandi normaalvektoriga

$$\vec{n}_1(M) = \left(\frac{1}{\sqrt{p_1}}, -\frac{1}{\sqrt{p_2}}, 0\right), \quad \vec{n}_2(M) = \left(\frac{1}{\sqrt{p_1}}, \frac{1}{\sqrt{p_2}}, 0\right),$$

s.o. skalaarkorrutised $\langle \vec{s}_1(M), \vec{n}_1(M) \rangle$ ja $\langle \vec{s}_2(M), \vec{n}_2(M) \rangle$ on nullid. See on aga ilmne.

Teoreem 17.2. *Hüperboolse paraboloidi iga kaks sirgjoonelist moodustajat erinevatest parvedest lõikuvad.*

Tõestus. Olgu $l(M, \vec{s}_1(M))$ ja $l(N, \vec{s}_2(N))$ erinevate parvede sirgjooneliste moodustajate paar. Nagu eelmises paragrahvis sai selgitatud, ei ole nad kiivsirged, kui segakorrutis $\vec{s}_1(M)\vec{s}_2(N)\overrightarrow{NM}$ on null. Rehkenduste lihtsustamiseks valime punktid M ja N sobivalt sirgjoonelistel moodustajatel. Kõik sirgjoonelised moodustajad $s_2 = \pm\sqrt{p_2} \neq 0$ tõttu lõikavad reeperitasandit $O\vec{e}_1\vec{e}_3$. Seega me võime punktideks M ja N võtta sirgjoonelise moodustaja lõikepunkti sellel tasandil. Seega $M(m_1, 0, m_3)$ ja $N(n_1, 0, n_3)$. Lisaks sellele nende koordinaadid rahuldavad pinna võrrandit: $m_1^2 = 2p_1m_3$ ja $n_1^2 = 2p_1n_3$. Samuti täpsustavad sirgjooneliste moodustajate sihivektorid, saades

$$\vec{s}_1(M) = \left(\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \frac{m_1}{\sqrt{p_1}}\right), \quad \vec{s}_2(N) = \left(\sqrt{p_1}, -\sqrt{p_2}, \frac{n_1}{\sqrt{p_1}}\right).$$

Kuna

$$\vec{s}_1(M)\vec{s}_2(N)\overrightarrow{NM} = \begin{vmatrix} \sqrt{p_1} & \sqrt{p_2} & \frac{m_1}{\sqrt{p_1}} \\ \sqrt{p_1} & -\sqrt{p_2} & \frac{n_1}{\sqrt{p_1}} \\ m_1 - n_1 & 0 & m_3 - n_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2\sqrt{p_1} & 0 & \frac{m_1}{\sqrt{p_1}} + \frac{n_1}{\sqrt{p_1}} \\ \sqrt{p_1} & -\sqrt{p_2} & \frac{n_1}{\sqrt{p_1}} \\ m_1 - n_1 & 0 & m_3 - n_3 \end{vmatrix} = -\sqrt{p_2} \begin{vmatrix} 2\sqrt{p_1} & \frac{m_1}{\sqrt{p_1}} + \frac{n_1}{\sqrt{p_1}} \\ m_1 - n_1 & m_3 - n_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \sqrt{\frac{p_2}{p_1}}\Big[(m_1^2 - n_1^2) - 2p_1(m_3 - n_3)\Big] = \sqrt{\frac{p_2}{p_1}}\Big[(m_1^2 - 2p_1m_3) - (n_1^2 - 2p_1n_3)\Big] = 0,$$

Siis sirgjooneltsed moodustajad $l(M, \vec{s}_1(M))$ ja $l(N, \vec{s}_2(N))$ ei ole kiivsirged. Seega nad on kas lõikuvad või paralleelsed. Kuna nende sihivektorid ei ole kollineaarsed, siis nad on lõikuvad. Teoreem on tõestatud. ♠

Teoreem 17.3. *Hüperboolse paraboloidi iga kaks erinevat sirgjoonelist moodustajat samast parvedest on kiivsirged.*

Tõestus. Kaks erinevat sirgjoonelist moodustajat $l(M, \vec{s}_\epsilon(M)))$ ja $l(N, \vec{s}_\epsilon(N))$ on võetud $\epsilon = 1$ korral esimesest parvest ja $\epsilon = 2$ korral teisest parvest. Nende moodustajate punktid M ja N asugu ka siin reeperitasandil $O\vec{e}_1\vec{e}_2$. Seetõttu $M(m_1, 0, m_3)$ ja $N(n_1, 0, n_3)$. Et tegemist on pinna punktidega, siis $m_1^2 = 2p_1m_3$ ja $n_1^2 = 2p_1n_2$. Arvestame veel, et sirgjoonelised moodustajad on erinevad, siis teoreemi 17.1 tõttu punktid M ja N on ka erinevad, millest tuleneb $m_1 \neq n_1$. Nende sirgete sihivektoriteks on

$$\vec{s}_\epsilon(M) = \left(\sqrt{p_1}, \epsilon\sqrt{p_2}, \frac{m_1}{\sqrt{p_1}}\right), \quad \vec{s}_\epsilon(N) = \left(\sqrt{p_1}, \epsilon\sqrt{p_2}, \frac{n_1}{\sqrt{p_1}}\right).$$

Arvutame nüüd nõutava segakorrutise:

$$\vec{s}_\epsilon(M)\vec{s}_\epsilon(N)\overrightarrow{NM} = \begin{vmatrix} \sqrt{p_1} & \epsilon\sqrt{p_2} & \frac{m_1}{\sqrt{p_1}} \\ \sqrt{p_1} & \epsilon\sqrt{p_2} & \frac{n_1}{\sqrt{p_1}} \\ m_1 - n_1 & 0 & m_3 - n_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{m_1}{\sqrt{p_1}} - \frac{n_1}{\sqrt{p_1}} \\ \sqrt{p_1} & \epsilon\sqrt{p_2} & \frac{n_1}{\sqrt{p_1}} \\ m_1 - n_1 & 0 & m_3 - n_3 \end{vmatrix} = -\epsilon\sqrt{\frac{p_2}{p_1}}(m_1 - n_1)^2 \neq 0,$$

sest $m_1 \neq n_1$. Seega vaadeldav sirgjooneliste moodustajate paar koosneb kiivsirgetest. Teoreem on tõestatud. ♠.

III. TEIST JÄRKU PINDADE ÜLDTEOORIA

18. TEIST JÄRKU PINNA MÕISTE. TEMA VÕRRANDIS KORDAJATE TEISENEMISE VALEMID ÜLEMINEKUL UUELE REEPERILE

Käesolev peatükk on sarnane esimese peatükiga. See annab meile õiguse kasutada valemite kirjapanekul kompaktsemaid kirjutisi. Abiks on mõned tulemused "Algebra I" kursusest.

Tähistame nagu "Algebra ja geomeetria" kursuses E_3 ja $\mathbf{E}_3$ abil ruumi ja tema poolt tekitatud vektorruumi. Olgu võetud mistahes reeper $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Siin reeperi alguspunkt O on ruumi E_3 punkt ja vektorite kolmik $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ vektorruumi $\mathbf{E}_3$ baas. Ruumi igal punktil X tekivad nüüd koordinaadid, mida tähistatame x_1, x_2 ja x_3 abil, lühidalt $X(x_1, x_2, x_3)$. Meenutuseks märgime, et punkti X koordinaadid on tema kohavektori $\overrightarrow{OX} \in \mathbf{E}_3$ koordinaadid reeperisse kuuluva baasi $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ suhtes.

Definitsioon 18.1. *Ruumi E_3 punktihulka $\{X(x_1, x_2, x_3)\}$, mille iga punkti $X(x_1, x_2, x_3)$ koordinaadid mingis reeperis $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ rahuldavad võrrandit*

$$\begin{aligned} p: \quad & a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + \\ & + 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + 2a_3x_3 + a = 0, \end{aligned} \tag{18.1}$$

kus kordajad a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13} ja a_{23} ei ole korraga võrdsed nulliga, nimetatakse teist järku pinnaks. Oleme teda tähistanud tähega p.

Juhime tähelepanu sellele, et selles definitsioonis reeper ei pea olema ilmtingimata ristreeper, vaatamata sellele, et järgnevas me sageli kasutame just ristreeperit, sest enamus valemeid "Algebra ja geomeetria" kursuses on saadud meil ainult ristreeperi korral. Võrrandi (18.1) vasak pool

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) := {} & a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \\ & + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + 2a_3x_3 + a \end{aligned} \tag{18.2}$$

on spetsiifiline kolmemuutuja funktsioon. Ta koosneb järgmise ehitusega liidetavatest $\alpha x_1^s x_2^t x_3^u$. See on tõepoolest nii, sest funktsiooni (18.2) iga liidetava võime kirjutada kujul

$$\begin{aligned} a_{11}x_1^2 &= a_{11}x_1^2x_2^0x_3^0, & a_{22}x_2^2 &= a_{22}x_1^0x_2^2x_3^0,\\ a_{33}x_3^2 &= a_{33}x_1^0x_2^0x_3^2, & 2a_{12}x_1x_2 &= 2a_{12}x_1^1x_2^1x_3^0,\\ 2a_{13}x_1x_3 &= 2a_{13}x_1^1x_2^0x_3^1, & 2a_{23}x_2x_3 &= 2a_{23}x_1^0x_2^1x_3^1,\\ 2a_1x_1 &= 2a_1x_1^1x_2^0x_3^0, & 2a_2x_2 &= 2a_2x_1^0x_2^1x_3^0,\\ 2a_3x_3 &= 2a_3x_1^0x_2^0x_3^1, & a &= ax_1^0x_2^0x_3^0. \end{aligned}$$

Siin iga *liidetava astmeks nimetatakse temas olevate muutujate* x_1, x_2 *ja* x_3 *astmenäitajate summat.* Võrrandis (18.1) on kuus esimest liidetavat teise astme liidetavad, kolm järgmist esimese astme liidetavad, viimane aga nullastme liidetav. See jutt on õige, kui liidetavas esinev kordaja ei ole võrdne nulliga. *Võrrandi* (18.1) *astmeks nimetatakse tema liidetavate kõrgemat astet.* Seega võrrand (18.1) on teise astme võrrand. Teist järku pind antakse seega teise astme võrrandi abil. Võrrandis (18.1) osasid

$$\begin{aligned} f_r(x_1, x_2, x_3) &:= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2+\\ &+ 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 \end{aligned}$$

ja

$$2a_1x_1 + 2a_2x_2 + 2a_3x_3$$

nimetatakse vastavalt *ruutosaks* ja *lineaarosaks.* Liidetavat a nimetatakse võrrandi (18.1) *vabaliikmeks.* Kui võrrandis (18.1) siiski peaks a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23} võrduma nulliga, kuid kordajad a_1, a_2 ja a_3 ei ole korraga võrdsed nulliga, siis saame võrrandi

$$2a_1x_1 + 2a_2x_2 + 2a_3x_3 + a = 0,$$

mis on ruumis asuva tasandi üldvõrrand ning seega ei ole enam teist järku pinna võrrand.

Võrrandis (18.1) kuuel liidetaval esineb kordaja 2, mille olemasolu on esmapilgul arusaamatu. Tegelikult on neist lihtne lahti saada. Tähistades $\overline{a}_{12} = 2a_{12}$, $\overline{a}_{13} = 2a_{13}$, $\overline{a}_{23} = 2a_{23}$, $\overline{a}_1 = 2a_1$, $\overline{a}_2 = 2a_2$ ja $\overline{a}_3 = 2a_3$, olemegi kordajast 2 lahti saanud. Põhjuseks, miks kordajast 2 lahti saada ei taheta, on asjaolu, et sel korral paljudes valemites tekib kordaja $\frac{1}{2}$. Valemi (18.1) saab kompaktsemalt kirja panna summa märgi abil. Selleks toome sisse täiendavad kordajad a_{21}, a_{31} ja a_{32}. Loeme nad vastavalt võrdseks kordajatega a_{12}, a_{13} ja a_{23}. Viimaste abil saame kirjutada näiteks

$$2a_{12}x_1x_2 = a_{12}x_1x_2 + a_{12}x_1x_2 = a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_2x_1.$$

Võrrandi (18.1) saame nüüd kirja panna järgmiselt

$$p: \quad \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j + 2\sum_{i=1}^{3} a_ix_i + a = 0.$$

Teist järku pinna võrrand võimaldab kasutusele võtta kolmandat järku maatriksi

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \tag{18.3}$$

mis $a_{21} = a_{12}$, $a_{31} = a_{13}$ ja $a_{32} = a_{23}$ tõttu on sümmeetriline maatriks, s.o. $A^\top = A$. See maatriks ei ole nullmaatriks, sest pinna võrrandi ruutosa kordajad ei ole korraga võrdsed nulliga. Kasutades õppeaines "Algebra I" antud maatriksi astaku mõistet, saame öelda, et maatriksi A astak ei ole null, vaid on kas üks, kaks või kolm. Tähistades $\delta = |A|$, siis esimesel ja teisel juhul $\delta = 0$ ja kolmandal juhul $\delta \neq 0$.

Kasutust leiab järgmine neljandat järku maatriks

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a \end{pmatrix}.$$

Selle maatriksi moodustamisel on kasutatud teist järku pinna võrrandi (18.1) kõiki kordajaid. Lisaks sellele sisaldab ta "loodenurgas" maatriksit A.

Lõpuks selgitame, kuidas teist järku pinna võrrandis kordajad teisenevad üleminekul uuele reeperile. Meenutame, et üleminekul ühelt nn. vanalt reeperilt $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ teisele nn. uuele reeperile $\{O'; \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3\}$ punkti X vanad koordinaadid (x_1, x_2, x_3) teisenevad uuteks koordinaatideks (x'_1, x'_2, x'_3) valemite

$$x_i = \sum_{s=1}^{3} c_{is}x'_s + c_i, \quad i \in \{1, 2, 3\}, \tag{18.4}$$

abil. Nendes valemites esinevad kordajad kirjeldavad uut reeperit vana reeperi suhtes; täpsemalt

$$\overrightarrow{OO'} = \sum_{s=1}^{3} c_s \vec{e}_s$$

ja

$$\vec{e}\,'_i = \sum_{s=1}^{3} c_{si} \vec{e}_s, \quad i \in \{1, 2, 3\}.$$

"Algebra I" kohaselt on baasiteisenduse maatriks

$$C := \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

regulaarne, s.o. $|C| \neq 0$. Teist järku pinna võrrandi (18.1) saamiseks uutes koordinaatides, tuleb temasse teha asendus valemitest (18.4), ja viies saadud avaldise x'_1, x'_2 ja x'_3 suhtes kujule (18.1), saamegi kätte pinna võrrandi uued kordajad. Kuna saadavad valemid on suhteliselt keerulised, jaotame selle protseduuri lihtsamateks sammudeks, saades igal sammul pinna võrrandis kordajate teisenemise valemid. Reeperiteisendust

$$\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \longrightarrow \{O'; \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3\}$$

saab realiseerida kahe sammuna. Esimesel sammul muudame ainult alguspunkti ja teisel sammul baasiosa, s.o.

$$\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \longrightarrow \{O'; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \longrightarrow \{O'; \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3\}.$$

Tähistades punkti X koordinaate vahepealses reeperis $\{O'; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ nüüd $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$ ja $\overline{x}_3$ abil, s.o. $X(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3)$, me saame

$$x_i = \overline{x}_i + c_i, \quad i \in \{1, 2, 3\} \tag{18.5}$$

ja

$$\overline{x}_i = \sum_{s=1}^{3} c_{is} x'_s, \quad i \in \{1, 2, 3\}. \tag{18.6}$$

Asendades viimasest valemist (18.6) valemisse (18.5), saamegi valemi (18.4). Nimetatud protseduuri võime sooritada ka nii, et esmalt muudame reeperis baasiosa ja siis alguspunkti, s.o.

$$\{O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\} \longrightarrow \{O;\vec{e}\,'_1,\vec{e}\,'_2,\vec{e}\,'_3\} \longrightarrow \{O';\vec{e}\,'_1,\vec{e}\,'_2,\vec{e}\,'_3\}.$$

Saame

$$x_i = \sum_{s=1}^{3} c_{is}\overline{x}_s, \quad i \in \{1,2,3\} \tag{18.7}$$

ja

$$\overline{x}_i = x'_i + c'_i, \quad i \in \{1,2,3\}. \tag{18.8}$$

Siin $c\,'_i$ on reeperi alguspunkti O' koordinaadid baasi $\{\vec{e}\,'_1,\vec{e}\,'_2,\vec{e}\,'_3\}$ suhtes. Seega

$$\overrightarrow{OO'} = \sum_{s=1}^{3} c'_s\vec{e}\,'_s.$$

Asendades valemist (18.8) valemisse (18.7), peame saama valemi (18.4). See on tõepoolest nii, sest

$$x_i = \sum_{s=1}^{3} c_{is}(x'_s + c'_s), \quad i \in \{1,2,3\},$$

millest

$$x_i = \sum_{s=1}^{3} c_{is}x'_s + \sum_{s=1}^{3} c_{is}c'_s, \quad i \in \{1,2,3\}.$$

Viimane on tegelikult valem (18.4), sest (18.4) abil näeme

$$\sum_{s=1}^{3} c_{is}c'_s = c_i, \quad i \in \{1,2,3\}.$$

Nüüd oleme kõik teinud, et leida pinna võrrandis (18.1) kordajate teisenemisvalemid. Kui me muudame reeperis ainult alguspunkti ning tähistame punkti X vanu ja uusi koordinaate vastavalt x_1,x_2,x_3 ja x'_1,x'_2,x'_3 abil, siis saame

$$x_i = x'_i + c_i, \quad i \in \{1,2,3\}.$$

Asendades siit teist järku pinna võrrandisse (18.1), saame

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}(x'_i + c_i)(x'_j + c_j) + 2\sum_{s=1}^{3} a_s(x'_s + c_s) + a = 0,$$

millest

$$\sum_{i,j=1}^{3} a'_{ij}x'_i x'_j + 2\sum_{s=1}^{3} a'_s x'_s + a' = 0,$$

kus

$$a'_{ij} = a_{ij}, \quad i,j \in \{1,2,3\}, \tag{18.9}$$

$$\begin{aligned} a'_i &= \sum_{s=1}^{3} a_{is}c_s + a_i, \quad i \in \{1,2,3\}, \\ a' &= \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}c_i c_j + 2\sum_{s=1}^{3} a_s c_s + a. \end{aligned} \tag{18.10}$$

Näeme, et nii-öelda reeperi alguspunkti muutmise korral teist järku pinna võrrandi ruutosa kordajad ei muutu üldse. Ülejäänud kordajad aga teisenevad. Seejuures a_i teisenemisvalemid võib meelde jätta osatuletiste abil. Nimelt

$$a'_i = \frac{1}{2}\frac{d}{dx_i} f_r(x_1, x_2, x_3)\Big|_{(c_1,c_2,c_3)}, \quad i \in \{1,2,3\}.$$

Ka kerge on meelde jätta vabaliikme teisenemisvalemit. Näeme

$$a' = f(c_1, c_2, c_3).$$

Kui me reeperis alguspunkti ei muuda, aga muudame baasi osa ning tähistame vanu ja uusi koordinaate vastavalt x_1, x_2, x_3 ja x'_1, x'_2, x'_3 abil, siis

$$x_i = \sum_{s=1}^{3} c_{is}x'_s, \quad i \in \{1,2,3\}.$$

Siit asendame teist järku pinna võrrandisse (18.1). Saame

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}\Big(\sum_{s=1}^{3} c_{is}x'_s\Big)\Big(\sum_{t=1}^{3} c_{jt}x'_t\Big) + 2\sum_{i=1}^{3} a_i\Big(\sum_{s=1}^{3} c_{is}x'_s\Big) + a = 0,$$

millest pärast korrastamist saame

$$\sum_{i,j=1}^{3} a'_{ij} x'_i x'_j + 2\sum_{s=1}^{3} a'_s x'_s + a' = 0.$$

Siin

$$a'_{st} = \sum_{i,j=1}^{3} c_{is} a_{ij} c_{jt}, \quad s,t \in \{1,2,3\} \tag{18.11}$$

ja

$$a'_s = \sum_{i=1}^{3} c_{is} a_i, \quad a' = a, \quad s \in \{1,2,3\}. \tag{18.12}$$

Näeme, et vabaliige ei teisene.

Ruutosa kordajate teisenemisvalemid (18.11) saab kompaktsemalt kirja panna maatriksite abil. Tähistame

$$A' := \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{pmatrix}.$$

Valemid (18.11) saame kirja panna järgmiselt:

$$A' = C^{\top} A C. \tag{18.13}$$

Viimase valemi korral tahame rõhutada, et valemi (18.9) tõttu reeperi alguspunkti muutmisel maatriks A ei muutu. *Seega teist järku pinna ruutosa maatriks A on vektorruumiga $\mathbf{E}_3$ seotud maatriks.* Ka kõigi kordajate teisenemisvalemid (18.11) ja (18.12) saab kirja panna maatrikskujul. Tähistame

$$\overline{A} := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a \end{pmatrix}, \quad \overline{C} := \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{18.14}$$

Kerge on näha, et

$$\overline{A}' = \overline{C}^{\top} \overline{A}\, \overline{C}, \tag{18.15}$$

kus

$$\overline{A}\,' := \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & a'_1 \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} & a'_2 \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} & a'_3 \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 & a' \end{pmatrix}.$$

Lugeja hooleks jääb selles veendumine.

Teeme lõpuks veel kaks tähelepanekut. Esmalt paneme tähele, et pinna võrrand (18.1) ei muutu mitte ainult üleminekul uuele reeperile, vaid isegi ühes ja samas reeperis on pinnal lõpmatult palju võrrandeid. Pinna võrrand on tegelikult määratud nullist erineva kordaja täpsuseni, sest

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j+2\sum_{i=1}^{3} a_ix_i+a=0 \Longleftrightarrow \sum_{i,j=1}^{3}(ka_{ij})x_ix_j+2\sum_{i=1}^{3}(ka_i)x_i+(ka)=0,$$

kus $k \neq 0$. Teiseks paneme tähele, et ühe ja sama pinna ruutosa erinevatel maatriksitel A, $A\,'$ ja kA astakud on võrdsed, sest valemis (18.13) maatriksid C ja $C^\top$ on regulaarsed ja tegur $k \neq 0$. Seega teist järku pinna ruutosa maatriksi astak on invariantne suurus. *Nimetame teist järku pinna ruutosa maatriksi astakut selle pinna astakuks.*

19. TEIST JÄRKU PINNA TÜÜBI MÄÄRAMINE KANOONILISE VÕRRANDI LEIDMISE TEEL

Käesolev paragrahv on § 2 analoog. Seal leidsime teist järku joonte kanoonilised võrrandid ja määrasime nende tüübid. Siin kahjuks uurimine ei ole enam nii lihtsalt läbiviidav. Osutub, et me saame kasutada siin ruutvormide teooriat kursusest "Algebra I". Selles paragrahvis vaatleme teist järku pindu ristreeperis.

Alustame nüüd pinna võrrandi lihtsustamist. Olgu teist järku pind p antud võrrandiga

$$p: \quad \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j + 2\sum_{i=1}^{3} a_ix_i + a = 0 \tag{19.1}$$

mingis ristreeperis $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Osutub, et tema ruutosa sümmeetriline maatriks A, mis on kirja pandud valemi (18.3) abil, tekitab ruutvormi, s.o. tekitab kujutuse

$$F: \quad \mathbf{E}_3 \longrightarrow \mathbb{R}. \tag{19.2}$$

Teeme seda järgmiselt. Iga vektori $\vec{x} \in \mathbf{E}_3$ korral avaldame ta ristreeperis sisalduva baasi kaudu, saades avaldisest $\vec{x} = \sum_{i=1}^{3} x_i\vec{e}_i$ vektori $\vec{x}$ koordinaadid x_1, x_2 ja x_3. Viimaste abil annamegi kujutuse (19.2) valemiga

$$\vec{x} \longmapsto F(\vec{x}) := \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j.$$

See definitsioon on korrektne, kui temas maatriks A on sümmeetriline ja üleminekul uuele reeperile ta teiseneb nii nagu peab teisenema ruutvormi maatriks, nimelt valemiga (18.13). Ruutvormide teooriast kasutame nüüd järgmist teoreemi, mille me siin ainult sõnastame kolmemõõtmelise vektorruumi korral.

Teoreem 19.1. (Vt [1], lk 280.) *Vektorruumis* $\mathbf{E}_3$ *leidub selline ristbaas* $\{\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3\}$, *mille korral ruutvormi maatriks* A *saab diagonaalkuju*

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \tag{19.3}$$

kusjuures λ_1, λ_2 *ja* λ_3 *on kuupvõrrandi* $|A - \lambda E| = 0$ *lahendid.*

Viimases kuupvõrrandis ühikmaatriks E on *ristbaasivektorite skalaarkorrutiste maatriks*, mida tavaliselt tähistatakse G abil. Öeldu täpsemalt

$$G = (\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle) = (\delta_{ij}) = E.$$

Kuidas selles teoreemis deklareeritud ristbaasi leida, selleks arutleme veidi teisiti.

Definitsioon 19.1. *Regulaarset ruutmaatriksit* A *nimetame ortogonaalmaatriksiks, kui* $A^{-1} = A^\top$.

Teoreem 19.2. *Üleminek ühelt ristbaasilt teisele ristbaasile toimub ortogonaalmaatriksi abil.*

Tõestus. Olgu baas $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ ristbaas. Seetõttu tema baasivektorid on paarikaupa risti ja pikkusega üks, s.o.

$$\vec{e}_i \perp \vec{e}_j \quad (i < j), \quad |\vec{e}_i| = 1, \quad i, j \in \{1, 2, 3\}.$$

Need tingimused saab kompaktselt kirja panna skalaarkorrutamise ja Kroneckeri sümboli abil:

$$\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \delta_{ij}, \quad i, j \in \{1, 2, 3\}.$$

Üleminek uuele ristbaasile $\{\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3\}$ toimub valemitega

$$\vec{e}\,'_i = \sum_{s=1}^{3} c_{si} \vec{e}_s, \quad i \in \{1, 2, 3\}. \tag{19.4}$$

Siin baasiteisendusemaatriks

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

on regulaarne maatriks, mistõttu omab ta pöördmaatriksit C^{-1}. Kuna uus baas $\{\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3\}$ on ristbaas, siis ka tema korral

$$\langle \vec{e}\,'_i, \vec{e}\,'_j \rangle = \delta_{ij}, \quad i, j \in \{1, 2, 3\}.$$

Asendades siia valemist (19.4), saame

$$\langle \vec{e}\,'_i, \vec{e}\,'_j \rangle = \delta_{ij} \Longleftrightarrow \langle \sum_{s=1}^{3} c_{si}\vec{e}_s, \sum_{t=1}^{3} c_{tj}\vec{e}_t \rangle = \delta_{ij} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{s,t=1}^{3} c_{si}c_{tj}\langle \vec{e}_s, \vec{e}_t \rangle = \delta_{ij} \Longleftrightarrow \sum_{s,t=1}^{3} c_{si}\delta_{st}c_{tj} = \delta_{ij} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{s=1}^{3} c_{si}c_{sj} = \delta_{ij}.$$

Saadud seose saame kirjutada maatrikskujul. Nimelt $C^\top C = E$. Korrutades seda paremalt maatriksiga C^{-1}, saame $C^\top = C^{-1}$. Teoreem on tõestatud. ♠

Pinna ruutosa maatriksi A teisenemise eeskirja (18.13) üleminekul ristbaasilt ristbaasile saame kirja panna ka järgmiselt

$$A\,' = C^{-1}AC.$$

See asjaolu võimaldab korrektselt defineerida veel ka lineaarteisenduse

$$\varphi : \mathbf{E}_3 \longrightarrow \mathbf{E}_3; \quad \vec{x} = \sum_{i=1}^{3} x_i\vec{e}_i \longmapsto \varphi(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{3}\Big(\sum_{s=1}^{3} a_{is}x_s\Big)\vec{e}_i. \qquad (19.5)$$

Kuna maatriks A *on sümmeetriline, siis valem* (19.5) *annab täpsemalt sümmeetrilise lineaarteisenduse.* Toome kaks fakti sümmeetrilise lineaarteisenduse kohta (vt. [1], lk.-d 260–261).

Teoreem 19.3. *Sümmeetrilise lineaarteisenduse karakteristliku kuupvõrrandi* $|A - \lambda E| = 0$ *lahendid* λ_1, λ_2 *ja* λ_3 *on reaalsed.*

Teoreem 19.4. *Sümmeetrilise lineaarteisenduse korral normeeritud omavektoritest saab moodustada ristbaasi, mille suhtes lineaarteisenduse maatriks on diagonaalkujuga*

$$A\,' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Teoreemi 19.1 rakendamine tagab, et saame ristreeperilt $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ üle minna sellisele ristreeperile $\{O; \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3\}$, mille suhtes teist järku pinna võrrand (19.1) saab kuju

$$p: \quad \sum_{i=1}^{3} (\lambda_i \overline{x}_i^2 + 2\overline{a}_i \overline{x}_i) + a = 0. \tag{19.6}$$

Viimases $\overline{x}_i$ on punkti X uued koordinaadid. Meie käsutuses on veel võimalus muuta ristreeperi alguspunkti. Oluline on seejuures, et maatriks (19.3) ei muutu, nagu näeme valemist (18.9). Teisiti öelduna valemis (19.6) ruutosa ei muutu. Järgnevas me jagame teist järku pinnad alajuhtudeks maatriksi (19.3) astaku järgi ja seejuures igal juhul eraldi selgitame millisesse punkti viime ristreeperi alguspunkti.

I. Olgu $rank A' = 3$. Sel korral valemis (19.6) kõik λ_i on nullist erinevad. Teist järku pinna võrrandi (19.6) saab täisruutude välja eraldamisega viia kujule

$$\sum_{i=1}^{3} \lambda_i \Big(\overline{x}_i + \frac{\overline{a}_i}{\lambda_i} \Big)^2 + \ \overline{a} = 0,$$

kus $\overline{a} = a - \frac{\overline{a}_i^2}{\lambda_i}$. Võtame ristreeperi uueks alguspunktiks

$$O'\Big(-\frac{\overline{a}_1}{\lambda_1}, -\frac{\overline{a}_2}{\lambda_2}, -\frac{\overline{a}_3}{\lambda_3} \Big).$$

Viimase ristreeperi korral pinna võrrand saab kuju

$$\lambda_1 \tilde{x}_1^2 + \lambda_2 \tilde{x}_2^2 + \lambda_3 \tilde{x}_3^2 + \overline{a} = 0. \qquad (19.7).$$

Siin saame välja eraldada järgmised alamjuhud.

1. Kui λ_1, λ_2, λ_3 ja $-\overline{a}$ on samamärgilised, siis võrrandist (19.7) me saame

$$\frac{\tilde{x}_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{\tilde{x}_2^2}{\alpha_2^2} + \frac{\tilde{x}_3^2}{\alpha_3^2} = 1, \tag{19.8}$$

kus

$$\alpha_i := \sqrt{-\frac{\overline{a}}{\lambda_i}} > 0, \quad i \in \{1, 2, 3\}.$$

Võrrand (19.8) *on ellipsoidi kanooniline võrrand.*

2. Kui λ_1, λ_2, λ_3 ja $\overline{a}$ on samamärgilised, siis võrrandist (19.7) me saame

$$\frac{\tilde{x}_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{\tilde{x}_2^2}{\alpha_2^2} + \frac{\tilde{x}_3^2}{\alpha_3^2} = -1, \tag{19.9}$$

kus

$$\alpha_i := \sqrt{\frac{\overline{a}}{\lambda_i}} > 0, \quad i \in \{1, 2, 3\}.$$

Võrrandit (19.9) ei rahulda mitte ühegi punkti koordinaadid. Kuna võrrand (19.9) on väliselt sarnane ellipsoidi kanooniline võrrandiga, siis seda teist järku pinda nimetame *imaginaarseks ellipsoidiks.*

3. Kui λ_1, λ_2, λ_3 on samamärgilised ja $\overline{a} = 0$, siis võrrandist (19.7) me saame

$$\frac{\tilde{x}_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{\tilde{x}_2^2}{\alpha_2^2} + \frac{\tilde{x}_3^2}{\alpha_3^2} = 0, \tag{19.10}$$

kus

$$\alpha_i := \sqrt{\frac{1}{|\lambda_i|}} > 0, \quad i \in \{1, 2, 3\}.$$

Võrrandit (19.10) rahuldavad ainult punkti $O'(0, 0, 0)$ koordinaadid. Kuna võrrand (19.10) on väliselt sarnane allpool saadava teist järku koonuse võrrandiga, siis nimetame siin saadud pinda *imaginaarseks teist järku koonuseks.*

4. Kui λ_1, λ_2, $-\lambda_3$ ja $-\overline{a}$ on samamärgilised, siis võrrandist (19.7) me saame

$$\frac{\tilde{x}_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{\tilde{x}_2^2}{\alpha_2^2} - \frac{\tilde{x}_3^2}{\alpha_3^2} = 1, \tag{19.11}$$

kus

$$\alpha_i := \sqrt{-\frac{\overline{a}}{\lambda_i}} > 0, \quad i \in \{1, 2, \}, \quad \alpha_3 := \sqrt{\frac{\overline{a}}{\lambda_3}} > 0.$$

Võrrand (19.11) *on ühekattelise hüperboloidi kanooniline võrrand.*

5. Kui λ_1, λ_2, $-\lambda_3$ ja $\overline{a}$ on samamärgilised, siis võrrandist (19.7) me saame

$$\frac{\tilde{x}_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{\tilde{x}_2^2}{\alpha_2^2} - \frac{\tilde{x}_3^2}{\alpha_3^2} = -1, \tag{19.12}$$

kus

$$\alpha_i := \sqrt{\frac{\overline{a}}{\lambda_i}} > 0, \quad i \in \{1,2,\}, \quad \alpha_3 := \sqrt{-\frac{\overline{a}}{\lambda_3}}.$$

Võrrand (19.12) *on kahekattelise hüperboloidi kanooniline võrrand.*

6. Kui λ_1, λ_2, $-\lambda_3$ on samamärgilised ja $\overline{a} = 0$, siis võrrandist (19.7) me saame

$$\frac{\tilde{x}_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{\tilde{x}_2^2}{\alpha_2^2} - \frac{\tilde{x}_3^2}{\alpha_3^2} = 0, \tag{19.13}$$

kus

$$\alpha_i := \sqrt{\frac{1}{|\lambda_i|}} > 0, \quad i \in \{1,2,3\}.$$

Võrrand (19.13) *on teist järku koonuse kanooniline võrrand.*

Sellega juht I on ammendatud. Ükskõik kuidas valida jutuks olevate kordajate märke, me uusi teist järku pinna tüüpe ei saa. Veenduge.

II. Olgu $rank A' = 2$. Sel korral maatriksis A' üks diagonaalielementidest on null ja kaks on nullist erinevad. Viimases ristreeperis baasivektoreid ära vahetades, alati saavutame, et nimelt λ_3 on võrdne nulliga. Võrrandi (19.6) täisruutude väljaeraldamisega saame esitada kujul

$$\lambda_1\Big(\overline{x}_1 + \frac{\overline{a}_1}{\lambda_1}\Big)^2 + \lambda_2\Big(\overline{x}_2 + \frac{\overline{a}_2}{\lambda_2}\Big)^2 + \ 2\overline{a}_3\overline{x}_3 + \overline{a} = 0, \tag{19.14}$$

kus $\overline{a} = a - \frac{(\overline{a}_1)^2}{\lambda_1} - \frac{(\overline{a}_2)^2}{\lambda_2}$.

Olgu võrrandis (19.14) kordaja $\overline{a}_3 \neq 0$. Sel korral saab selle võrrandi esitada kujul

$$\lambda_1\Big(\overline{x}_1 + \frac{\overline{a}_1}{\lambda_1}\Big)^2 + \lambda_2\Big(\overline{x}_2 + \frac{\overline{a}_2}{\lambda_2}\Big)^2 + \ 2\overline{a}_3\Big(\overline{x}_3 + \frac{\overline{a}}{2\overline{a}_3}\Big) = 0. \tag{19.15}$$

Võtame ristreeperi alguspunktiks

$$O'\Big(-\frac{\overline{a}_1}{\lambda_1}, -\frac{\overline{a}_2}{\lambda_2}, -\frac{\overline{a}}{2\overline{a}_3}\Big).$$

Tähistame selles ristreeperis $\{O'; \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3\}$ punkti koordinaate $\tilde{x}_i$ abil. Võrrand (19.15) saab kuju

$$\lambda_1\tilde{x}_1^2 + \lambda_2\tilde{x}_2^2 + 2\overline{a}_3\tilde{x}_3 = 0. \tag{19.16}$$

7. Olgu võrrandis (19.16) kordajad λ_1 ja λ_2 samamärgilised. Üldsust kitsendamata võime eeldada veel, et samas võrrandis kordaja $-\overline{a}_3$ on ka sama märgiga kui λ_1 ja λ_2. Vastasel juhul asendame kasutusel olevas ristreeperis kolmanda baasivektori oma vastandvektoriga. Loodan, et lugeja on juba märganud, et võrrand (19.16) säilitab seejuures oma kuju. Saame

$$\frac{\tilde{x}_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{\tilde{x}_2^2}{\alpha_2^2} = 2\tilde{x}_3, \tag{19.17}$$

kus

$$\alpha_i := \sqrt{-\frac{\overline{a}_3}{\lambda_i}} > 0, \quad i \in \{1,2\}.$$

Võrrand (19.17) *on elliptilise paraboloidi kanooniline võrrand.*

8. Olgu võrrandis (19.16) kordajad λ_1 ja $-\lambda_2$ samamärgilised. Üldsust kitsendamata võime siis eeldada, et ka kordajad λ_1, $-\lambda_2$ ja $-\overline{a}_3$ on samamärgilised. Võrrandi (19.16) saame kirjutada kujul:

$$\frac{\tilde{x}_1^2}{\alpha_1^2} - \frac{\tilde{x}_2^2}{\alpha_2^2} = 2\tilde{x}_3, \tag{19.18}$$

kus

$$\alpha_1 := \sqrt{-\frac{\overline{a}_3}{\lambda_1}} > 0, \quad \alpha_2 := \sqrt{\frac{\overline{a}_3}{\lambda_2}} > 0.$$

Võrrand (19.18) *on hüperboolse paraboloidi kanooniline võrrand.*

Järgmise teist järku pinna kanoonilise võrrandi saamiseks pöördume tagasi võrrandi (19.14) juurde, kus meil toimus hargnemine. Nüüd me oletame, et selles võrrandis on $\overline{a}_3 = 0$. Sel korral võrrand (19.14) lihtsustub järgmiseks võrrandiks:

$$\lambda_1\Big(\overline{x}_1 + \frac{\overline{a}_1}{\lambda_1}\Big)^2 + \lambda_2\Big(\overline{x}_2 + \frac{\overline{a}_2}{\lambda_2}\Big)^2 + \ \overline{a} = 0, \tag{19.19}$$

Võtame ristreeperi alguspunktiks

$$O'\Big(-\frac{\overline{a}_1}{\lambda_1}, -\frac{\overline{a}_2}{\lambda_2}, 0\Big).$$

Muuseas lisame, et tegelikult alguspunkti kolmandaks koordinaadiks võib võtta millise arvu iganes. Tähistame selles ristreeperis $\{O'; \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3\}$ punkti koordinaate $\tilde{x}_i$ abil. Võrrand (19.19) saab kuju

$$\lambda_1 \tilde{x}_1^2 + \lambda_2 \tilde{x}_2^2 + \quad \overline{a} = 0. \tag{19.20}$$

Selle võrrandi abil leiame järgmiste teist järku pindade kanoonilised võrrandid.

9. Olgu võrrandis (19.20) kordajad λ_1, λ_2 ja $-\overline{a}$ samamärgilised. Võrrandi (19.20) saame esitada kujul

$$\frac{\tilde{x}_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{\tilde{x}_2^2}{\alpha_2^2} = 1, \tag{19.21}$$

kus

$$\alpha_i := \sqrt{-\frac{\overline{a}}{\lambda_i}} > 0, \quad i \in \{1, 2\}.$$

Võrrand (19.21) *on elliptilise silindri kanooniline võrrand.*

10. Olgu võrrandis (19.20) nüüd kordajad λ_1, λ_2 ja $\overline{a}$ samamärgilised. Võrrandi (19.20) saame esitada kujul

$$\frac{\tilde{x}_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{\tilde{x}_2^2}{\alpha_2^2} = -1, \tag{19.22}$$

kus

$$\alpha_i := \sqrt{\frac{\overline{a}}{\lambda_i}} > 0, \quad i \in \{1, 2\}.$$

Võrrandit (19.22) ei rahuldada mitte ühegi punkti koordinaadid. *Ilma punktideta teist järku pinda, mille kanooniliseks võrrandiks on* (19.22), *nimetatakse imaginaarseks elliptiliseks silindriks.*

11. Olgu võrrandis (19.20) kordajad λ_1, $-\lambda_2$ ja $-\overline{a}$ samamärgilised. Võrrandi (19.20) saame esitada kujul

$$\frac{\tilde{x}_1^2}{\alpha_1^2} - \frac{\tilde{x}_2^2}{\alpha_2^2} = 1, \tag{19.23}$$

kus

$$\alpha_1 := \sqrt{-\frac{\overline{a}}{\lambda_1}} > 0, \quad \alpha_2 := \sqrt{\frac{\overline{a}}{\lambda_1}} > 0.$$

Võrrand (19.23) *on hüperboolse silindri kanooniline võrrand.*

12. Olgu võrrandis (19.20) kordajad λ_1, λ_2 samamärgilised ja $\overline{a} = 0$. Võrrandi (19.20) saame esitada kujul

$$\frac{\tilde{x}_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{\tilde{x}_2^2}{\alpha_2^2} = 0, \tag{19.24}$$

kus

$$\alpha_i := \sqrt{\frac{1}{|\lambda_i|}} > 0, \quad i \in \{1, 2\}.$$

Siit saame $\tilde{x}_1 = 0$, $\tilde{x}_2 = 0$ ja $\tilde{x}_3$ on suvaline reaalarv. Seega võrrandi (19.24) poolt määratud punktihulgaks on sirge, milleks praeguse ristreeperi korral on $\tilde{x}_3$-telg. *Teist järku pinda kanoonilise võrrandiga* (19.24) *nimetatakse kaheks lõikuvaks imaginaarseks tasandiks reaalse lõikesirgega.* Selle nimetuse õigustamiseks esitame võrrandi (19.24) üle kompleksarvude kahe teguri korrutisena. Nimelt

$$\Big(\frac{\tilde{x}_1}{\alpha_1} + i\frac{\tilde{x}_2}{\alpha_2}\Big)\Big(\frac{\tilde{x}_1}{\alpha_1} - i\frac{\tilde{x}_2}{\alpha_2}\Big) = 0$$

ehk

$$\Big(\frac{\tilde{x}_1}{\alpha_1} + i\frac{\tilde{x}_2}{\alpha_2} = 0\Big) \vee \Big(\frac{\tilde{x}_1}{\alpha_1} - i\frac{\tilde{x}_2}{\alpha_2} = 0\Big).$$

Siin i on imaginaarühik. Viimane annabki imaginaarsete lõikuvate tasandite paari reaalse lõikesirgega.

13. Olgu võrrandis (19.20) kordajad λ_1, $-\lambda_2$ samamärgilised ja $\overline{a} = 0$. Võrrandi (19.20) saame esitada kujul

$$\frac{\tilde{x}_1^2}{\alpha_1^2} - \frac{\tilde{x}_2^2}{\alpha_2^2} = 0, \tag{19.25}$$

kus

$$\alpha_i := \sqrt{\frac{1}{|\lambda_i|}} > 0, \quad i \in \{1, 2\}.$$

Kuna võrrandi (19.25) saab esitada kujul

$$\Big(\frac{\tilde{x}_1}{\alpha_1} + \frac{\tilde{x}_2}{\alpha_2} = 0\Big) \vee \Big(\frac{\tilde{x}_1}{\alpha_1} - \frac{\tilde{x}_2}{\alpha_2} = 0\Big),$$

siis *võrrand* (19.25) *annab teist järku pinnaks kaks lõikuvat tasandit.*

Sellega juht II on ammendatud. Ükskõik kuidas valida jutuks olevate kordajate märke me uusi teist järku pinna tüüpe ei saa. Veenduge.

III. Olgu $rank A' = 1$. Sel korral maatriksis A' kaks diagonaalielementidest on nullid ja ainult üks on nullist erinev. Viimases ristreeperis baasivektoreid ära vahetades, alati saavutame, et nimelt λ_1 ja λ_2 on võrdsed nulliga. Võrrandi (19.6) saame esitada kujul

$$p: \quad \lambda_3 \overline{x}_3^2 + 2\sum_{i=1}^{3} \overline{a}_i \overline{x}_i + a = 0. \tag{19.26}$$

Vaatleme siin esmalt olukorda, kus lineaarosa kordajatest $\overline{a}_1$ ja $\overline{a}_2$ ei ole korraga võrdsed nulliga. Sel korral saame ristreeperis $\{O; \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3\}$ parandada baasiosa $\{\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3\}$, mille tulemusena muutub $\overline{a}_2$ nulliks, kuid $\overline{a}_1$ jääb nullist erinevaks. Selgitame nüüd öeldut lähemalt. Teeme baasiteisenduse

$$\begin{aligned} \vec{e}\,''_1 &= k(\overline{a}_1 \vec{e}\,'_1 + \overline{a}_2 \vec{e}\,'_2), \\ \vec{e}\,''_2 &= k(\overline{a}_2 \vec{e}\,'_1 - \overline{a}_1 \vec{e}\,'_2), \\ \vec{e}\,''_3 &= \vec{e}\,'_3, \end{aligned} \tag{26.27}$$

kus

$$k := \frac{1}{\sqrt{(\overline{a}_1)^2 + (\overline{a}_2)^2}} \neq 0.$$

Kerge on näha, et $\langle \vec{e}\,''_i, \vec{e}\,''_j \rangle = \delta_{ij}$ mistõttu baas $\{\vec{e}\,''_1, \vec{e}\,''_2, \vec{e}\,''_3\}$ on ristbaas ja järelikult reeper

$$\{O; \vec{e}\,''_1, \vec{e}\,''_2, \vec{e}\,''_3\}$$

ristreeper. Selgitame, mis juhtus sellele ristreeperile üleminekul võrrandi (19.26) kordajatega. Uued ruutosa kordajad leiame valemi (18.11) abil, arvestades, et C ja A asemel on

$$C' = \begin{pmatrix} k\overline{a}_1 & k\overline{a}_2 & 0 \\ k\overline{a}_2 & -k\overline{a}_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Siin C' saamiseks kasutasime valemit (19.27). Kergesti näeme, et maatriks A' ei teisene sest

$$A'' = (C')^\top A' C' = A'.$$

Järelikult valemis (19.26) ruutosa ei muutu. Lineaarosa kordajate teisenemise leiame valemite (18.12) abil. Lugejale jätame kontrollida, et

$$a_1'' = \sqrt{(\overline{a}_1)^2 + (\overline{a}_2)^2} \neq 0, \quad a_2'' = 0, \quad a_3'' = \overline{a}_3.$$

Tähistame punkti koordinaate valitud ristreeperi korral $\hat{x}_i$ abil. Sama valemi (18.12) abil näeme, et vabaliige a jääb muutumatuks. Võrrand (19.26) saab kuju

$$p: \quad \lambda_3 \hat{x}_3^2 + 2a_1''\hat{x}_1 + 2a_3''\hat{x}_3 + a = 0$$

ehk

$$p: \quad \lambda_3\Big(\hat{x}_3 + \frac{a_3''}{\lambda_3}\Big)^2 + 2a_1''\Big(\hat{x}_1 + \frac{\overline{a}}{2a_1''}\Big) = 0, \tag{19.28}$$

kus $\overline{a} = a - \frac{(a_3'')^2}{\lambda_3}$. Võtame ristreeperi alguspunktiks

$$O'\Big(-\frac{\overline{a}}{2a_1''}, 0, -\frac{a_3''}{\lambda_3}\Big).$$

Tähistame uues ristreeperis punkti koordinaate $\tilde{x}_i$ abil. Võrrandile (19.28) saame kuju

$$\lambda_3 \tilde{x}_3^2 + 2a_1''\tilde{x}_1 = 0. \tag{19.29}$$

Selle võrrandi abil jätkame uute teist järku pindade kanooniliste võrrandite otsimist. Tegelikult saame siit ainult ühe teist järku pinna.

14. Vajaduse korral asendades esimese baasivektori vastandvektoriga, saame alati eeldada, et λ_3 ja $-a_1''$. samamärgilised. Sel korral võrrandi saame esitada kujul

$$\tilde{x}_3^2 = 2p\tilde{x}_1, \tag{19.30}$$

kus $p = \frac{-a_1''}{\lambda_3.} > 0$. *Tegemist on paraboolse silindriga, mille kanooniliseks võrrandiks on* (19.30).

Pöördume tagasi võrrandi (19.26) juurde ja vaatleme juhtu $\overline{a}_1 = 0$ ja $\overline{a}_2 = 0$. Sel korral see võrrand saab kuju

$$\lambda_3 \overline{x}_3^2 + 2\overline{a}_3\overline{x}_3 + a = 0.$$

ehk

$$\lambda_3\left(\overline{x}_3 + \frac{\overline{a}_3}{\lambda_3}\right) + \overline{a} = 0, \tag{19.31}$$

kus $\overline{a} = a - \frac{(\overline{a}_3)^2}{\lambda_3}$. Võtame nüüd reeperi alguspunktiks

$$O'\left(0, 0, -\frac{\overline{a}_3}{\lambda_3}\right).$$

Tähistame valitud ristreeperis punkti koordinaate $\tilde{x}_i$ abil. Võrrand (19.31) omandab kuju

$$\lambda_3 \tilde{x}_3^2 + \overline{a} = 0. \tag{19.32}$$

Analüüsides siin kordajaid, saame viimased kolm teist järku pinnatüüpi.

15. Kui λ_3 ja $-\overline{a}$ on samamärgilised, siis võrrandile (19.31) saame anda kuju

$$\tilde{x}_3^2 - \alpha^2 = 0, \tag{19.33}$$

kus $\alpha = \sqrt{-\frac{\overline{a}}{\lambda_3}} > 0$. *Tegemist on kahe paralleelse tasandiga,* sest võrrandi (19.33) võib esitada kahe omaette võrrandina

$$(\tilde{x}_3 + \alpha = 0) \vee (\tilde{x}_3 - \alpha = 0).$$

16. Kui λ_3 ja $\overline{a}$ on samamärgilised, siis võrrandile (19.30) saame anda kuju

$$\tilde{x}_3^2 + \alpha^2 = 0, \tag{19.34}$$

kus $\alpha = \sqrt{\frac{\overline{a}}{\lambda_3}} > 0$. Viimast võrrandit ei rahulda mitte ühegi punkti koordinaadid. Seega on tegemist teist järku pinnaga, millel ei ole punkte. *Teist järku pinda kanoonilise võrrandiga* (19.34) *nimetatakse imaginaarsete paralleelsete tasandite paariks.* Selline nimetus tuleneb asjaolust, et ka võrrandi (19.34) saab lahutada teguriteks nagu võrrandi (19.33), kuid nüüd üle kompleksarvude. Täpsemalt

$$(\tilde{x}_3 + i\alpha = 0) \vee (\tilde{x}_3 - i\alpha = 0),$$

millest näemegi, et tegemist on paralleelse tasandipaariga, kuid on saadud üle kompleksarvude.

17. Kui $\overline{a} = 0$, siis võrrandist (19.33) saame

$$\tilde{x}_3^2 = 0. \tag{19.35}$$

Sellel võrrandil, kui ruutvõrrandil, on kaks lahendit, mis praegu langevad kokku. Nimelt $\tilde{x}_3 = 0$. See on aga tasandi võrrand. Valitud ristreeperi korral on tegemist $(\tilde{x}_1\tilde{x}_2)$-koordinaattasandiga. *Kokkuvõttes, teist järku pind kanoonilise võrrandiga* (19.35) *on kaks ühtuvat tasandit.*

20. TEIST JÄRKU PINNA LÕIKAMINE SIRGEGA. ASÜMPTOOTILISED SIHID

Olgu antud teist järku pind p võrrandiga

$$p: \quad \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j + 2\sum_{i=1}^{3} a_ix_i + a = 0 \tag{20.1}$$

mingi reeperi $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ suhtes. Siin reeper ei pea ilmtingimata olema ristreeper. Lõikame seda teist järku pinda p mingi sirgega s, mille anname temal fikseeritud punkti $B(b_1, b_2, b_3)$ ja sihivektori $\vec{s} = (s_1, s_2, s_3) \neq \vec{0}$ abil. Lõikepunkti(de) $p \cap s$ koordinaatide leidmine on kõige lihtsam, kui sirge s on antud parameetriliste võrranditega

$$x_i = b_i + s_it, \quad i \in \{1, 2, 3\}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{20.2}$$

Kuna lõikepunkt(id) asub(asuvad) sama-aegselt teist järku pinnal p ja lõikesirgel s, siis lõikepunktide koordinaatide leidmiseks tuleb lahendada võrrandisüsteem, mis koosneb võrranditest (20.1) ja (20.2). Asendades sirge (20.2) võrrandid pinna võrrandisse (20.1), me saame

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}(b_i + s_it)(b_j + s_jt) + 2\sum_{i=1}^{3} a_i(b_i + s_it) + a = 0.$$

Korrastades selle parameetri t astmete järgi, saame

$$\Big(\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}s_is_j\Big)t^2 + \Big(\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}b_is_j + \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}s_ib_j + 2\sum_{i=1}^{3} a_is_i\Big)t +$$

$$+\Big(\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}b_ib_j + 2\sum_{i=1}^{3} a_ib_i + a\Big) = 0.$$

Osutub, et siin

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}b_is_j = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}s_ib_j.$$

Selle näitamiseks arvestame esiteks $a_{ij} = a_{ji}$, teiseks vahetame sumeerimisindekseid – vahetame indeksid i ja j omavahel – ja kolmandaks vahetame kahekordses summas summade leidmise järjekorra. Pannes öeldu samm-sammult kirja, saame

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}s_i b_j = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ji}s_i b_j = \sum_{j,i=1}^{3} a_{ij}s_j b_i = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}b_i s_j.$$

Seega

$$\Big(\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}s_i s_j\Big)t^2 + 2\Big(\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}b_i s_j + \sum_{i=1}^{3} a_i s_i\Big)t+$$

$$+\Big(\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}b_i b_j + 2\sum_{i=1}^{3} a_i b_i + a\Big)= 0.$$

Viimase saame kirjutada kompaktsemalt, kui tähistame

$$A := \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}s_i s_j, \quad B := \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}b_i s_j + \sum_{i=1}^{3} a_i s_i, \tag{20.3}$$

$$C := \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}b_i b_j + 2\sum_{i=1}^{3} a_i b_i + a = f(b_1, b_2, b_3). \tag{20.4}$$

Saame

$$At^2 + 2Bt + C = 0. \tag{20.5}$$

Juhime siin kahele asjale tähelepanu. Esiteks loodame, et siin kasutatud tähega A, ei lähe segamini üle-eelmises paragrahvis sama tähega tähistatud teist järku pinna ruutosa kordajatest moodustatud kolmandat järku maatriksiga. Teine märkus on seotud samuti kordajaga A. Kui me samaaegselt teist järku pinda lõikame ka teise sirgega, mille sihivektorit olgu tähistatud vektoriga $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$. Siis tekib samuti kordaja

$$A = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}u_i u_j,$$

mis on hoopis teine arv, kui valemis (20.3). Segaduse vältimiseks lisame tähele A argumendiks sulgudesse sirge sihivektori. Seega valemis (20.3) olevat A täpsemalt tähistame $A(\vec{s})$ abil. Viimasel juhul aga saame $A(\vec{u})$. Seda täpsustust kasutame muidugi siis, kui selle eristamise järele tekib vajadus.

Võrrandi (20.5) lahendamisel saame kätte need konkreetsed parameetri t väärtused, mille asendamisel sirge s parameetrilistesse võrranditesse (20.2), tekivad lõikepunkti(de) koordinaadid, seega ka lõikepunkti(d). Lõikepunkte tekib samapalju, kuipalju on võrrandil (20.5) lahendeid. Siin on mõeldavad järgmised olukorrad.

1) Kui kordaja $A \neq 0$, siis võrrand (20.5) on tundmatu t suhtes ruutvõrrand. Seega on tal kaks lahendit

$$t_{1;2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A}. \tag{20.6}$$

Sirge s lõikab teist järku pinda p kahes punktis. Millised need lõikepunktid on, sõltub valemi (20.6) diskriminandist

$$\mathcal{D} := B^2 - AC.$$

Kui $\mathcal{D} > 0$, siis lahendid t_1 ja t_2 on reaalsed ja seejuures erinevad. Saame kaks erinevat lõikepunkti, mida tähistame

$$Q_1(q_1^{(1)}, q_2^{(1)}, q_3^{(1)}), \quad Q_2(q_1^{(2)}, q_2^{(2)}, q_3^{(2)}))$$

abil. Siin oleme tähistanud

$$q_i^{(\alpha)} := b_i + s_i t_\alpha, \quad i \in \{1,2,3\}, \quad \alpha \in \{1,2\}. \tag{20.7}$$

Lõikepunktid Q_1 ja Q_2 on tõepoolest erinevad, sest oletades vastuväiteliselt, et nad langevad kokku, siis saame

$$Q_1 = Q_2 \Longleftrightarrow q_i^{(1)} = q_i^{(2)}, \quad i \in \{1,2,3\} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow b_i + s_i t_1 = b_i + s_i t_2, \quad i \in \{1,2,3\} \Longleftrightarrow s_i(t_1 - t_2) = 0, \quad i \in \{1.2.3\}.$$

Kuna $\vec{s} \neq \vec{0}$, siis tema koordinaadid s_i ei ole korraga nullid. Seega ühest viimasest kolmest tingimusest saame $t_1 = t_2$. Valem (20.6) lubab öelda $\mathcal{D} = 0$, saades vastuolu, sest $\mathcal{D} > 0$.

Kui $\mathcal{D} < 0$, siis erinevad lahendid t_1 ja t_2 ei ole reaalsed, öeldakse, et *lahendid on imaginaarsed ehk mittereaalsed.* Seega sirge s lõikab teist järku pinda p kahes erinevas mittereaalsete koordinaatidega punktis. Analoogiliselt nagu $\mathcal{D} > 0$ korral veendume, et lõikepunktid Q_1 ja Q_2 on tõepoolest erinevad.

Kui $\mathcal{D} = 0$, siis võrrandi (20.6) lahendid ühtuvad, sest $t_1 = t_2 = \frac{-B}{A}$. Seega tekib kaks lõikepunkti Q_1 ja Q_2, mis langevad kokku, kuna neil on ühesugused koordinaadid.

2) Kui $A = 0$ ja $B \neq 0$, siis võrrand (20.5) saab kuju

$$2Bt + C = 0.$$

Viimasel on ainult üks lahend. Nimelt

$$t_0 = -\frac{C}{2B}, \quad B \neq 0.$$

Sirge s lõikab teist jätku pinda p ainult ühes punktis $Q(q_1, q_2, q_3)$, kus $q_i = b_i + s_i t_0$.

3) Kui $A = 0$ ja $B = 0$ ja $C \neq 0$, siis võrrand (20.5) saab kuju

$$0t^2 + 0Bt + C = 0, \quad C \neq 0.$$

Sellel võrrandil ei ole lahendit. Seega sirge s ei lõika teist järku pinda p.

4) Kui võrrandis (20.5) kõik kordajad on võrdsed nulliga, siis on $A = B = C = 0$. Võrrand (20.5) saab kuju

$$0t^2 + 0t + 0 = 0$$

(sisuliselt kaob ära). Viimast rahuldavad kõik reaalarvud. Seega sirge s ja pinna p lõikepunktideks on kõik sirge s punktid. Seega sirge s on täielikult teist järku pinnal p. Lõikepunktide analüüs on lõppenud.

Definitsioon 20.2. *Lineaarkatet $L(\vec{s})$ nimetatakse vektori $\vec{s} \neq \vec{0}$ poolt määratud sihiks.*

Näeme, et siht $L(\vec{s})$ on vektorruumi $\mathbf{E}_3$ ühemõõtmeline alamruum. Ilmselt iga nullvektorist erineva vektori $\vec{a} \in L(\vec{s})$ korral $L(\vec{a}) = L(\vec{s})$. Seega sihti määrav vektor on määratud kordse vektori täpsuseni.

Definitsioon 20.3. *Sihti* $L(\vec{s})$ *määratuna vektori* $\vec{s} = (s_1, s_2, s_3) \neq \vec{0}$ *poolt nimetame teist järku pinna* p *asümptootiliseks sihiks, kui*

$$A = 0 \Longleftrightarrow \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} s_i s_j = 0. \tag{20.8}$$

Paneme tähele, et kui kehtib viimane seos vektori $\vec{s}$ korral, siis ta kehtib ka iga vektori $\alpha\vec{s}$ korral. Seega asümptootilise sihi mõiste on tõepoolest sihiga , mitte vektoriga, seotud mõiste.

Definitsioon 20.4. *Sihti, mis ei ole asümptootiline, s.o.*

$$A \neq 0 \Longleftrightarrow \sum_{i,j=1} a_{ij} s_i s_j \neq 0.$$

nimetame mitteasümptootiliseks sihiks.

On huvitav teada palju asümptootilisi sihte omab üks või teine teist järku pind. Selleks kasutame eelmises paragrahvis saadud teist järku pinna kanoonilisi võrrandeid. Toome kõigepealt ära nende teist järku pindade kanoonilised võrrandid. Need on järgmised

1) Ellipsoid

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} + \frac{x_3^2}{\alpha_3^2} = 1.$$

2) Imaginaarne ellipsoid

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} + \frac{x_3^2}{\alpha_3^2} = -1.$$

3) Imaginaarne teist järku koonus

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} + \frac{x_3^2}{\alpha_3^2} = 0.$$

4) Ühekatteline hüperboloid

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} - \frac{x_3^2}{\alpha_3^2} = 1.$$

5) Kahekatteline hüperboloid

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} - \frac{x_3^2}{\alpha_3^2} = -1.$$

6) Teist järku koonus

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} - \frac{x_3^2}{\alpha_3^2} = 0.$$

7) Elliptiline paraboloid

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 2x_3.$$

8) Hüperboolne paraboloid

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} - \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 2x_3.$$

9) Elliptiline silinder

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 1.$$

10) Imaginaarne elliptiline silinder

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = -1.$$

11) Paar imaginaarseid lõikuvaid tasandeid

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 0.$$

12) Hüperboolne silinder

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} - \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 1.$$

13) Paar lõikuvaid tasandeid

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} - \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 0.$$

14) Paraboolne silinder

$$x_3^2 = 2px_1.$$

15) Paar paralleelseid tasandeid

$$x_3^2 - \alpha^2 = 0.$$

16) Paar imaginaarseid paralleelseid tasandeid

$$x_3^2 + \alpha^2 = 0.$$

17) Paar ühtuvaid tasandeid

$$x_3^2 = 0.$$

Kõigil neil konkreetsetel juhtudel asümptootiliste sihtide saamiseks tuleb moodustada võrrand (20.8).

Ellipsoidi, imaginaarse ellipsoidi ja imaginaarsete lõikuvate tasandite kanooniliste võrrandite ruutosad on ühesugused. Seega asümptootilist sihti määrav võrrand on ühesugune. Asümptootilise sihi võrrandist

$$\frac{s_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{s_2^2}{\alpha_2^2} + \frac{s_3^2}{\alpha_3^2} = 0.$$

saame $s_1 = s_2 = s_3 = 0$. Saadud lahendivektor $\vec{s} = (0, 0, 0)$ on nullvektor ja asümptootilist sihti ei määra. Seega ellipsoidil, imaginaarsel ellipsoidil ja imaginaarsetel lõikuvatel tasanditel asümptootilised sihid puuduvad.

Samuti ühe- ja kahekattelise hüperboloidi ning teist järku koonuse kanoonilistel võrranditel on ruutosa ühesugune. Seega asümptootilist sihti(sihte) määrav võrrand on ühesugune. Nimelt

$$\frac{s_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{s_2^2}{\alpha_2^2} - \frac{s_3^2}{\alpha_3^2} = 0.$$

Siit näeme, et sellel võrrandil on palju lahendeid. Me saame oma olukorda kirjeldada isegi täpsemalt. Kui asümptootilisi sihte määravad vektorid rakendada reeperi alguspunktist, siis kõigi nende pindade korral nende vektorite lõpp-punkt kirjeldab teist järku koonuse pooltelgedega α_1, α_2 ja α_3.

Elliptilise paraboloidi, elliptilise silindri ja imaginaarse elliptilise silidri kanooniliste võrrandite ruutosa on ühesugune. Seega saab koos käsitleda asümptootiliste sihtide probleemi. Võrrandist

$$\frac{s_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{s_2^2}{\alpha_2^2} = 0$$

saame $s_1 = s_2 = 0$, seejuures s_3 valikule ei saanud mitte mingisuguseid kitsendusi. Kuna sihti määrav vektor määratakse kordsuse täpsusega, siis võime võtta $s_3 = 1$. Seega elliptilisel paraboloidil, elliptilisel silindril ja imaginaarsel elliptilisel silindril on ainult üks asümptootiline siht, mis määratakse vektoriga $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$. Näeme, et tegemist on elliptilise paraboloidi, elliptilise silindri ja imaginaarse elliptilise silindri telje sihiga.

Samuti hüperboolse paraboloidi, hüperboolse silindri ja kahe lõikuva tasandi kanoonilise võrrandi ruutosa on ühesugune. Neil juhtudel võrrandist

$$\frac{s_1^2}{\alpha_1^2} - \frac{s_2^2}{\alpha_2^2} = 0,$$

saame

$$s_2 = \pm\frac{\alpha_2}{\alpha_1} s_1.$$

Asümptootilised sihid määratakse seega vektorite

$$\vec{s}_\beta = s_1(\alpha_1\vec{e}_1 \pm \alpha_2\vec{e}_2) + s_3\vec{e}_3, \quad \beta \in \{1, 2\}, \quad (s_1, s_3) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \setminus (0, 0)$$

poolt. Kui me rakendame kõik saadud vektorid reeperi alguspunktist, siis nende lõpp-punkt kirjeldab $\beta = 1$ korral ($\beta = 2$ korral) tasandi

$$\frac{x_1}{\alpha_1} - \frac{x_2}{\alpha_2} = 0 \quad \Big(\frac{x_1}{\alpha_1} + \frac{x_2}{\alpha_2} = 0\Big).$$

ilma reeperi alguspunktita. Need tasandid on tuntud eelmise peatüki sellest paragrahvist, kus me käsitlesime hüperboolse paraboloidi sirgjoonelisi moodustajaid (vt. § 17) .

Paraboolse silindri, paralleelse ja imaginaarse paralleelse ning ühtuva tasandipaari korral on samuti kanooniliste võrrandite ruutosad ühesugused. Võrrandist

$$s_2^2 = 0$$

saame kahekordse lahendi $s_2 = 0$, seejuures s_1 ja s_3 on suvalised ainukese nõudega, et asümptootilist sihti määrav vektor ei oleks nullvektor. Seega asümptootilised sihid määratakse vektorite

$$\vec{s} = (s_1, 0, s_3), \quad (s_1, s_3) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus (0, 0).$$

poolt.

21. TEIST JÄRKU PINNA KESKPUNKT

Olgu meil antud teist järku pind p võrrandiga

$$p: \quad \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_i x_j + 2\sum_{i=1}^{3} a_i x_i + a = 0 \tag{21.1}$$

mingi reeperi $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ suhtes. Siin reeper ei pea ilmtingimata olema ristreeper.

Definitsioon 21.1. *Me nimetame punkti $C(c_1, c_2, c_3)$ teist järku pinna keskpunktiks, kui tema koordinaadid rahuldavad lineaarvõrrandisüsteemi*

$$\sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_j + a_i = 0, \quad i \in \{1, 2, 3\}. \tag{21.2}$$

Teoreem 21.1. *Teist järku pind on sümmeetriline keskpunkti suhtes.*

Tõestus. Olgu $C(c_1, c_2, c_3)$ teist järku pinna p keskpunkt. Seega tema koordinaadid rahuldavad lineaarvõrrandisüsteemi (21.2), s.o.

$$\sum_{j=1}^{3} a_{ij}c_j + a_i = 0, \quad i \in \{1, 2, 3\}. \tag{21.3}$$

Meil on vaja näidata, et iga punkti $Y(y_1, y_2, y_3) \in p$ korral keskpunkti $C(c_1, c_2, c_3)$ suhtes sümmeetriline punkt, tähistame teda $\overline{Y}(\overline{y}_1, \overline{y}_2, \overline{y}_3)$ abil, asub ka pinnal p. Veendume selles. Kerge on kirja panna punkti $\overline{Y}$ koordinaadid punktide Y ja C koordinaatide kaudu, sest lõigu $Y\overline{Y}$ keskpunktiks peab olema keskpunkt C. Seega

$$\frac{1}{2}(y_i + \overline{y}_i) = c_i, \quad i \in \{1, 2, 3\} \Longleftrightarrow \overline{y}_i = 2c_i - y_i, \quad i \in \{1, 2, 3\}. \tag{21.4}$$

Eelduse kohaselt $Y \in p$, siis tema koordinaadid rahuldavad pinna p võrrandit (21.1), s.o.

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}y_i y_j + 2\sum_{i=1}^{3} a_i y_i + a = 0. \tag{21.5}$$

Meil tuleb nüüd näidata, et punkti $\overline{Y}$ koordinaadid rahuldavad ka võrrandit (21.1). See on tõepoolest nii, sest

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}\overline{y}_i\overline{y}_j + 2\sum_{i=1}^{3} a_i\overline{y}_i + a =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}(2c_i - y_i)(2c_j - y_j) + 2\sum_{i=1}^{3} a_i(2c_i - y_i) + a =$$

$$= \Big(\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}y_iy_j - 2\sum_{i=1}^{3} a_iy_i + a\Big) + 4\sum_{i=1}^{3}\Big(\sum_{j=1}^{3} a_{ij}c_j + a_i\Big)c_i - 4\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}c_iy_j =$$

$$= -4\sum_{i=1}^{3} a_iy_i + 4\sum_{i=1}^{3} 0 \;\; c_i - 4\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}c_iy_j =$$

$$= -4\sum_{i=1}^{3}\Big(\sum_{j=1}^{3} a_{ij}c_j + a_i\Big)y_i = -4\sum_{i=1}^{3} 0 \;\; y_i = 0.$$

Siin me kasutasime valemeid (21.4), (21.5) ja (21.3). Sellega teoreem on tõestatud. ♠

Analüüsime lineaarvõrrandisüsteemi (21.2). Tema lahendite hulk annab teist järku pinna keskpunktide hulga. Kroneckeri-Capelli teoreemi kohaselt sõltub lahendite probleem süsteemi maatriksi ja laiendatud maatriksi astakust, s.o. maatriksite

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_3 \end{pmatrix}$$

astakust. Muuseas esimene maatriks on teist järku pinna ruutosa maatriks, mis on antud valemiga (18.3). Ilmselt alati $rankA \le rank\tilde{A}$. *Kui meil* $rankA < rank\tilde{A}$, *siis lineaarvõrrandisüsteemil* (21.3) *lahendid puuduvad. Teist järku pinnal ei ole keskpunkte. Kui* $rankA = rank\tilde{A}$, *siis teist järku pinnal on olemas keskpunkt*(*id*). *Täpsemalt* $rankA = rank\tilde{A} = 3$, $rankA = rank\tilde{A} = 2$ *ja* $rankA = rank\tilde{A} = 1$ *korral teist järku pinnal* *on vastavalt üks keskpunkt, keskpunktid moodustavad sirge ja keskpunktid moodustavad tasandi.*

Definitsioon 21.2. *Teist järku pinda nimetame tsentraalseks kui tal on ainult üks keskpunkt, muudel juhtudel nimetame mittetsentraalseks.* Tsentraalse (mittetsentraalse) teist järku pinna korral $\delta \neq 0$ $(\delta = 0)$.

Lõpuks selgitame, mitu keskpunkti on ühel või teisel teist järku pinnal. Selleks on kasulik tugineda eelmises paragrahvis toodud kanoonilistele võrranditele.

Ellipsoidi, imaginaarse ellipsoidi, imaginaarse teist järku koonuse, ühekattelise hüperboloidi, kahekattelise hüperboloidi ja teist järku koonuse korral maatriksi

$$A = \begin{pmatrix} \frac{i}{\alpha_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & \pm\frac{1}{\alpha_3^2} \end{pmatrix}$$

astak on $|A| \neq 0$ tõttu kolm. Sama suur on laiendatud maatriksi $\tilde{A}$ astak, sest astak ei saa ületada ridade arvu, s.o. kolme. Järelikult on nendel teist järku pindadel üks keskpunkt. Seega tegu on tsentraalsete teist järku pindadega. Võrrandisüsteemist (21.2) saame $x_1 = x_2 = x_3 = 0,$ mistõttu nende pindade kanooniliste võrrandite korral reeperi alguspunkt asub pinna keskpunktis.

Elliptilisel ja hüperboolsel paraboloidil keskpunktid puuduvad, sest maatriksite

$$A = \begin{pmatrix} \frac{i}{\alpha_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & \pm\frac{1}{\alpha_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} \frac{i}{\alpha_1^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm\frac{1}{\alpha_2^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p \end{pmatrix}$$

astakud ei ole võrdsed, sest $rank A = 2$ ja $rank \tilde{A} = 3$.

Elliptilise silindri, imaginaarse elliptilise silindri, reaalse lõikesirgega kahe imaginaarsete tasandi, hüperboolse silindri ja kahe lõikuva tasandi korral maatriksite

$$A = \begin{pmatrix} \frac{i}{\alpha_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & \pm\frac{1}{\alpha_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} \frac{i}{\alpha_1^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm\frac{1}{\alpha_2^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

korral $rank A = rank\tilde{A} = 2 < 3$. Seetõttu keskpunktid on olemas ja nad moodustavad sirge. Lineaarvõrrandisüsteem (21.2) praegu annab meile $x_1 = x_2 = 0$. Keskpunktide sirgeks on elliptilise, imaginaarse elliptilise ja hüperboolse silindri telg ning kahe imaginaarse lõikuva tasandi ja kahe lõikuva tasandi korral nende lõikesirge. Kõikidel neil viiel juhul kanoonilise võrrandi korral reeperi alguspunkt asub mistahes punktis keskpunktide sirgel.

Paraboolsel silindril ei ole keskpunkte, sest maatriksite

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -p \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

astakud on erinevad. Nimelt $rank A = 1$ ja $\tilde{A} = 2$.

Kolme viimase teist järku pinna korral, milleks on paar paralleelseid, paar imaginaarseid paralleelseid ja paar ühtuvaid tasandeid, keskpunktide hulk on tasand, sest maatriksite

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

astakud on võrdsed ja võrduvad ühega. Kuna astaku langus maksimaalsest on kaks, siis keskpunktide hulk on tasand. Nende pindade kanooniliste võrrandite korral valemi (21.2) abil näeme, et keskpunktide tasandiks on x_1x_2-koordinaattasand. Reeperi alguspunktiks on mistahes punkt sellel tasandil.

22. TEIST JÄRKU PINNA DIAMEETERTASAND. PEASIHID

Lõikame teist järku pinda p paralleelsete sirgetega. Seda paralleelsete sirgete hulka *nimetame parallelsete sirgete parveks.* Nende sirgetel kõigil on ühine siht, mis on määratav nullvektorist erineva vektori poolt. Tähistame seda vektorit $\vec{s}$ abil. Oma paralleelsete sirgete parve tähistame $\mathcal{P}(\vec{s})$ abil. Kui selle parve sirgete siht $L(\vec{s})$ on teist järku pinna p jaoks mitteasümptootiline, siis meie parve iga sirge lõikab teist järku pinda kahes punktis, eraldades sellel sirgel lõigu. Järelikult paralleelsete sirgete parv tekitab paralleelsete lõikude parve. Veelgi enam, tekib nende lõikude keskpunktide parv, mida me tähistame $d_p(\vec{s})$ abil.

Definitsioon 22.1. *Teist järku pinna lõikamisel mitteasümptootilist sihti omavate paralleelsete sirgetega tekib lõikepunktide poolt määratud lõikude keskpunktide hulk, mida nimetame selle teist järku pinna diameetertasandiks määratuna mitteasümptootilise sihi poolt.*

Asume nüüd uurima teist järku pinna diameetertasandi ehitust.

Teoreem 22.1. *Teist järku pinna diameetertasand on tasand.*

Tõestus. Olgu meil antud teist järku pind p võrrandiga

$$p: \quad \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j + 2\sum_{i=1}^{3} a_ix_i + a = 0$$

mingi ristreeperi $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ suhtes. Võtame selle pinna mistahes mitteasümptootilise sihi $L(\vec{s})$, mis olgu määratud vektori $\vec{s} = (s_1, s_2, s_3)$ poolt. Seejuures $\vec{s} \neq \vec{0}$. Vaatleme paralleelsete sirgete parve $\mathcal{P}(\vec{s})$, mille iga sirge on mitteasümptootilise sihiga $L(\vec{s})$. Selle parve iga sirge $s(D)$, kus $D(d_1, d_2, d_3) \in d_p(\vec{s})$, parameetrilisteks võrranditeks on

$$s(D): x_i = d_i + s_it, \quad i \in \{1,2,3\}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Lugejale on ilmselt selge, et punkt $D(d_1, d_2, d_3)$ on vaadeldaval sirgel $s(D)$ tekkinud lõigu keskpunkt. Kui punkt $D(d_1, d_2, d_3)$ hulgas $d_p(\vec{s})$ muutub, siis saame oma parve kõikide paralleelsete sirgete parameetrilised võrrandid. Nendeks on

$$\mathcal{P}(\vec{s}): x_i = d_i + s_it, \quad i \in \{1,2,3\}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad D(d_1, d_2, d_3) \in d_p(\vec{s}).$$

Leiame nüüd diameetertasandi suvalise punkti, mida oleme tähistanud $D(d_1, d_2, d_3)$ abil, koordinaadid d_1, d_2 ja d_3. Senini on nad meil kasutusel rohkem tähistuse tasemel. Koordinaadid d_1, d_2 ja d_3 peavad avalduma mingil moel teist järku pinna võrrandi kordajate kui ka mitteasümptootilist sihti määrava vektori koordinaatide kaudu. Selle selgitamiseks leiame meie paralleelsete sirgete parve $\mathcal{P}(\vec{s})$ iga sirge $s(D)$ korral lõikepunktid teist järku pinnaga p. Tähistame tekkivat kahte lõikepunkti

$$Q_\alpha^{(D)}(q_1^{(\alpha)}, q_2^{(\alpha)}, q_3^{\alpha)}), \quad \alpha \in \{1, 2\}.$$

Siin me oleme lõikepunktide tähistele lisanud punkti D. Valemi (20.7) kohaselt

$$q_i^{(\alpha)} := d_i + s_i t_\alpha, \quad i \in \{1, 2, 3\}, \quad \alpha \in \{1, 2\}, \tag{22.1}$$

kusjuures t_1 ja t_2 saame valemist (20.6). Seega

$$t_{1;2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A}. \tag{22.2}$$

Lõigu $Q_1^{(D)} Q_2^{(D)}$ keskpunkti D koordinaadid on otspunktide koordinaatide poolsumma. Järelikult

$$d_i = \frac{1}{2}(q_i^{(1)} + q_i^{(2)}), \quad i \in \{1, 2, 3\}$$

ehk (22.1) tõttu

$$d_i = \frac{1}{2}[(d_i + s_i t_1) + (d_i + s_i t_2)], \quad i \in \{1, 2, 3\}.$$

Siit saame

$$(t_1 + t_2) s_i = 0, \quad i \in \{1, 2, 3\}.$$

Kuna mitteasümptootilist sihti määrav vektor $\vec{s}$ ei ole nullvektor, siis tema koordinaadid s_1, s_2 ja s_3 ei ole korraga nullid. Seetõttu

$$t_1 + t_2 = 0.$$

Asendades siia valemist (22.2), saame $B = 0$. Viimane on (20.3) tõttu samaväärne tingimusega

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} d_i s_j + \sum_{i=1}^{3} a_i s_i = 0$$

ehk

$$\sum_{j=1}^{3} \Big(\sum_{i=1}^{3} a_{ij} s_i \Big) d_j + \sum_{i=1}^{3} a_i s_i = 0.$$

See on tingimus, mida peavad rahuldama diameetertasandi mistahes punkti D koordinaadid d_1, d_2 ja d_3. Seega tegu on diameetertasandi võrrandiga. Tähistame diameetertasandi muutuvat punkti $D(d_1, d_2, d_3)$ ümber tähe $X(x_1, x_2, x_3)$ abil. Diameetertasandi võrrandile saame kuju

$$d_p(\vec{s}) : \sum_{j=1}^{3} \Big(\sum_{i=1}^{3} a_{ij} s_i \Big) x_j + \sum_{i=1}^{3} a_i s_i = 0. \tag{22.3}$$

Tunneme ära, et tegemist on tasandi võrrandiga, kui vaid x_1, x_2 ja x_3 kordajad

$$\sum_{i=1}^{3} a_{ij} s_i, \quad j \in \{1, 2, 3\}$$

ei ole korraga nullid. Oletame vastuväiteliselt, et vaadeldavad kordajad just on nullid, s.o.

$$\sum_{i=1}^{3} a_{i1} s_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{3} a_{i2} s_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{3} a_{i3} s_i = 0.$$

Korrutame viimaseid vastavalt koordinaatidega s_1, s_2, ja s_3 ning liidame kokku. Saame

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} s_i s_j = 0.$$

Kuna eelduse kohaselt siht $L(\vec{s})$ on mitteasümptootiline, siis viimane kahekordne summa on nullist erinev. Oleme saanud vastuolu. Järelikult diameetertasandi võrrand (22.3) on alati tasandi võrrand. ♠

Teoreem 22.2. *Teist järku pinna kõik diameetertasandid läbivad igat tema keskpunkti.*

Tõestus. Olgu punkt $C(c_1, c_2, c_3)$ teist järku pinna mistahes keskpunkt. Tema koordinaadid c_1, c_2 ja c_3 rahuldavad võrrandisüsteemi (21.2):

$$\sum_{j=1}^{3} a_{ij}c_j + a_i = 0, \quad i \in \{1, 2, 3\}. \tag{22.4}$$

Vaja on näidata, et keskpunkt $C(c_1, c_2, c_3)$ on ka mistahes diameetertasandi punkt, s.o. tema koordinaadid peavad rahuldama võrrandit (22.3). Korrutame seostes (22.4) esimest, teist ja kolmandat vastavalt vektori $\vec{s}$ koordinaatidega s_1, s_2 ja s_3 ning liidame seejärel kokku. Saame

$$\Big(\sum_{j=1}^{3} a_{1j}c_j + a_1\Big)s_1 + \Big(\sum_{j=1}^{3} a_{2j}c_j + a_2\Big)s_2 + \Big(\sum_{j=1}^{3} a_{3j}c_j + a_3\Big)s_3 = 0$$

ehk

$$\sum_{i=1}^{3}\Big(\sum_{j=1}^{3} a_{ij}c_j + a_i\Big)s_i = 0.$$

Viimane samaväärselt

$$\sum_{j=1}^{3}\Big(\sum_{i=1}^{3} a_{ij}s_i\Big)c_j + \sum_{i=1}^{3} a_i s_i = 0.$$

Seega keskpunkti C koordinaadid rahuldavad diameetertasandi võrrandit (22.3). Sellega teoreem on tõestatud. ♠

Järgmisema me tutvume teist järku pinna peasihi mõistega.

Definitsioon 22.2 *Teist järku pinna mitteasümptootilist sihti nimetame peasihiks, kui ta on risti tema poolt määratud diameetertasandiga.*

Sellest definitsioonist järeldame, et kui teist järku pinnal on peasihte olemas, siis pind on sümmeetriline nende peasihtide diameetertasandite suhtes. On teada, et pinna sümmeetriaomaduste teadmine oluliselt lihtsustab pinna ehituse uurimist. Igasugune pind võib olla sümmeeteriline nii punkti, sirge kui tasandi suhtes. Teist järku pindade sümmeetriat punktide suhtes on juba uuritud. Jutt on keskpunktidest. Peasihtide mõiste abil avaneb võimalus ka teist järku pinna sümmeetriatasandite leidmiseks.

Leiame nüüd valemid teist järku pinna peasihtide leidmiseks. Kasutame selleks peasihi definitsiooni. Tuleb leida selline vektor, mis määrab mitteasümptootilise sihi ja on seejuures risti oma diameetertasandiga ehk on kollineaarne diameetertasandi normaalvektoriga

$$\vec{n} = \Big(\sum_{i=1}^{3} a_{i1}s_i, \sum_{i=1}^{3} a_{i2}s_i, \sum_{i=1}^{3} a_{i3}s_i\Big).$$

Me võime kirjutada

$$\vec{n} = \lambda\vec{s} \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{3} a_{ij}s_i = \lambda s_j, \quad j \in \{1,2,3\} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{3} a_{ij}s_i = \sum_{i=1}^{3}(\lambda\delta_{ij})s_i, \quad j \in \{1,2,3\} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{3}(a_{ij} - \lambda\delta_{ij})s_i = 0, \quad j \in \{1,2,3\}. \tag{22.5}$$

Viimane on lineaarvõrranisüsteem peasihti määrava vektori $\vec{s}$ koordinaatide s_1, s_2 ja s_3 leidmiseks. Siia tuleb veel lisada tingimus, et lahendivektor $\vec{s}$ ei oleks nullvektor. Selleks tingimuseks on, et süsteemi (22.5) maatriksi

$$A - \lambda E = (a_{ij} - \lambda\delta_{ij})$$

astak ei tohi olla maksimaalne, s.o. astak on väiksem kui kolm. Astaku mõiste kohaselt

$$|A - \lambda E| = 0.$$

Selle kuupvõrrandi lahendamisel saame kolm lahendit, mida tähistame λ_1, λ_2 ja λ_3 abil. Teoreemi 21.3 kohaselt on need lahendid reaalsed. Iga lahendi λ_α korral lahendame homogeense lineaarvõrrandisüsteemi

$$\sum_{i=1}^{3}(a_{ij} - \lambda_\alpha\delta_{ij})s_i^\alpha = 0, \quad j \in \{1,2,3\}. \tag{22.6}$$

Leitud lahendivektor $\vec{s}_{(\alpha)} = (s_1^{(\alpha)}, s_2^{(\alpha)}, s_3^{(\alpha)})$ ei pea veel määrama peasihti. Veel peab olema täidetud mitteasümtootilisuse tingimus, s.o. $A(\vec{s}_{(\alpha)}) \neq 0$.

Viimane ei pea aga olema täidetud. Seega igal teist järku pinnal ei pea kaugeltki olema kolme peasihti. Paneme tähele, et paragrahvis 21 teist järku pinna kanoonilises reeperis olev ristbaas kontrueeritakse samade valemite abil (vt. valem (19.4)). Ainult seal ei nõuta mitteasümptootilisust. Seega seal kasutatav ristreeperi baasivektorid ei pea kõik olema teist järku pinna peasihilised. Nad on lihtsalt teist järku pinna ruutosa maatriksi poolt indutseeritud lineaarteisenduse normeeritud omavektorid.

Nüüd selgitame kui palju on ühel või teisel teist järku pinnal peasihte. Lihtne on seda teha, kui me kasutame oma teist järku pindade kanoonilisi võrrandeid. Kriipsutame seejuures alla, et kanoonilised võrrandid on saadud ristreeperis, nagu ütleb teoreem 19.4.

Peasihtide leidmise saab mitmete pinnatüüpide puhul viia läbi ühekorraga. Korraga saab näiteks leida kõigi tsentraalsete teist järku pindade peasihid. Seega vaatluse all on ellipsoid, imaginaarne ellipsoid, imaginaarne teist järku koonus, ühe- ja kahekatteline hüperbloid ning teist järku koonus. Lähtudes nende kanoonilistest võrrandist, saame pinna ruutosa maatriksiks

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & \pm\frac{1}{\alpha_3^2} \end{pmatrix}.$$

Siin ülemist märki tuleb kasutada loetelus kolme esimese teist järku pinna korral ja alumist märki kolme järgmise pinna korral. Võrrandi $|A-\lambda E| = 0$ lahendamisel saame omaväärtusteks

$$\lambda_1 = \frac{1}{\alpha_1^2}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{\alpha_2^2}, \quad \lambda_3 = \pm\frac{1}{\alpha_3^2}.$$

Võrrandisüsteemi (22.6) abil saame leida kordsuse täpsusega määratud omavektorid. Seega lahendiks on sihid. Tavaliselt sihi asemel kasutatakse normeeritud esindajavektorit. Palju ühe või teise omaväärtuse korral süsteemil (22.6) on lahendeid sõltub sellest kas omaväärtused on kõik paarikaupa erinevad või nende seas on võrdseid. Esimesel juhul annab süsteem (22.6) iga omaväärtuse korral lahendiks ühe peasihi. Nendeks on nimelt kanoonilise reeperi baasivektorite $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ ja $\vec{e}_3$ poolt määratud sihid $L(\vec{e}_1)$, $L(\vec{e}_2)$ ja $L(\vec{e}_3)$. Kõik nad määravad peasihi, sest

$$A(\vec{e}_1) = \frac{1}{\alpha_1^2} \neq 0 \quad A(\vec{e}_2) = \frac{1}{\alpha_2^2} \neq 0 \quad A(\vec{e}_3) = \pm\frac{1}{\alpha_3^2} \neq 0.$$

Järelikult on vaadeldavad teist järku pinnad ka diameetertasandite $d_p(\vec{e}_1)$, $d_p(\vec{e}_2)$ ja $d_p(\vec{e}_3)$ suhtes sümmeetrilised. Kui omaväärtuste seas on võrdseid paare, siis pind on "sümmeetrilisem". Näiteks olgu $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$. Sel korral λ_3 abil leitavaks peasihiks on ikkagi üheselt määratud $L(\vec{e}_3)$. Võrdsete omaväärtuste λ_1 ja λ_2 korral iga siht $L(\vec{e})$, kus

$$\vec{e} = cos\, t\, \vec{e}_1 + sin\, t\, \vec{e}_2, \quad t \in [0, 2\pi),$$

on $A(\vec{e}) = \lambda_1 \neq 0$ tõttu peasiht. Kõigi diameetertasandite $d_p(\vec{e})$ suhtes vaadeldavad teist järku pinnad on sümmeetrilised. Seega tegu on pöördpindadega. Nähtavasti pakub lugejale suurt huvi uurida veel olukorda, kui kolm omaväärtust on omavahel kõik võrdsed. Sel korral ruumi kõik sihid on peasihid. Pind on sümmeetriline iga diameetertasandi suhtes. Seda kõike me saime süsteemi (22.6) lahendamisel.

Nüüd vaatleme selliseid teist järku pindu, mille ruutosa maatriksi astak on võrdne kahega. Vaatluse all on elliptiline ja hüperboolne paraboloid, elliptiline ja imaginaarne silinder, kaks imaginaarset lõikuvat tasandit reaalse lõikesirgega, hüperboolne silinder ning kaks lõikuvat tasandit. Lähtudes kanoonilisest võrrandist, saame nende pindade ruutosa maatriksiks

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & \pm\frac{1}{\alpha_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Võrrandi $|A - \lambda E| = 0$ lahendamisel saame omaväärtusteks

$$\lambda_1 = \frac{1}{\alpha_1^2}, \quad \lambda_2 = \pm\frac{1}{\alpha_2^2}, \quad \lambda_3 = 0.$$

Põhijuhul $\lambda_1 \neq \lambda_2$ võrrandisüsteemi (22.6) lahendamisel saadud kolme omaväärtuse korral normeeritud omavektoriteks saame vastavalt kanoonilise reeperi baasivektorid $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ ja $\vec{e}_3$. Kaks esimest omavektorit määravad peasihi, kolmas aga mitte, sest

$$A(\vec{e}_1) = \frac{1}{\alpha_1^2} \neq 0 \quad A(\vec{e}_2) = \frac{1}{\alpha_2^2} \neq 0, \quad A(\vec{e}_3) = 0.$$

Peasihtide $L(\vec{e}_1)$ ja $L(\vec{e}_2)$ diameetertasansditeks on x_2x_3- ja x_1x_3-koordinaattasand. Nende suhtes vaadeldavad teist järku pinnad on sümmeetrilised.

Lõpuks jääb veel vaadelda teist järku pindu, mille ruutosa maatriksi astak on üks. Seega vaatluse all on paraboolne silinder, kaks paralleelset tasandit, kaks imaginaarset paralleelset tasandit ning kaks ühtuvat tasandit. Loetletud teist järku pindade kanoonilistel võrranditel on ühine ruutosa maatriks. Nimelt

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Võrrandi $|A - \lambda E| = 0$ lahendamisel saame omaväärtusteks

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 1.$$

Moodustades nüüd iga omaväärtuse korral süsteemi (22.6), kummagi omaväärtuse $\lambda_1 = 0$ ja $\lambda_2 = 0$ korral on iga nullvektorist erinev vektor $\vec{a}$ lineaarkattest $L(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ omavektoriks. Kahjuks ei ole nad peasihid, sest $A(\vec{a}) = 0$ tõttu ei ole siht $L(\vec{a})$ mitteasümptootiline. Kolmanda omaväärtuse $\lambda_3 = 1$ korral omavektoriks saame vektori $\vec{e}_3$. Siht $L(\vec{e}_3)$ on peasiht, sest $A(\vec{e}_3) = 1 \neq 0$. Selle peasihi poolt määratud diameetertasandiks on x_1x_2-koordinaattasand. Selle suhtes on eespool loetletud teist järku pinnad sümmeetrilised. Kui on tegemist kahe paralleelse tasandiga, kahe imaginaarse paralleelse tasandiga ning kahe ühtuva tasandiga, siis saadud diameetertasand ühtub keskpunktide tasandiga.

23. TEIST JÄRKU PINNA PUUTUJATASAND

Definitsioon 23.1. *Teist järku pinna punkti, mis on ka keskpunktiks, nimetame iseäraseks punktiks. Pinna ülejäänud punkte nimetame mitteiseärasteks.*

Silmas pidades keskpunktide paragrahvi § 21, saame kirjeldada teist järku pindade iseäraste punktide hulka. Ühe iseärase punktiga on teist järku koonus ja imaginaarne koonus. Lõikuvate tasandite ja imaginaarsete lõikuvate tasandite korral iseärasteks punktideks on nende lõikesirge. Kaks ühtuvat tasandit koosnevad ainult iseärastest punktidest.

Definitsioon 23.2. *Teist järku pinna puutujaks pinna mitteiseärases punktis nimetatakse sirget, mis läbib seda punkti ja see punkt on kas kahekordseks lõikepunktiks pinnaga või siis see sirge on täielikult pinnal.*

Selgitame öeldut detailsemalt. Kui pinna punkti M läbiv puutuja on mitteasümptootilise sihiga, siis punkt M peab olema puutuja ja pinna kahekordne lõikepunkt. Kui puutuja on asümptootilise sihiga, siis puutuja peab olema täielikult pinnal, s.o. selline puutuja on pinna sirgjooneline moodustaja.

Teoreem 23.1. *Teist järku pinna mitteiseärast punkti läbivate puutujate hulk moodustab tasandi.*

Tõestus. Olgu punkt $M(m_1, m_2 m_3)$ teist järku pinna

$$p: \quad \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} x_i x_j + 2\sum_{i=1}^{3} a_i x_i + a = 0 \tag{23.1}$$

mitteiseärane punkt. Olla pinna punkt tähendab, et

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} m_i m_j + 2\sum_{i=1}^{3} a_i m_i + a = 0. \tag{23.2}$$

Olla aga pinna mitteiseärane punkt tähendab, et ta ei ole pinna keskpunkt. Seega punkti $M(m_1, m_2, m_3)$ koordinaadid ei rahulda vähemalt ühte süsteemi (21.2) võrranditest. Järelikult vähemalt üks kordajetest

$$\sum_{j=1}^{3} a_{1j} m_j + a_1, \quad \sum_{j=1}^{3} a_{2j} m_j + a_2, \quad \sum_{j=1}^{3} a_{3j} m_j + a_3 \tag{23.3}$$

on nullist erinev. Leiame läbi punkti $M(m_1, m_2, m_3)$ minevad puutujad. Võtame ette punkti $M(m_1, m_2, m_3)$ läbiva sirge sihiga $L(\vec{s})$ määratuna vektori $\vec{s} \neq \vec{0}$ poolt. Tema parameetrilisteks võrranditeks on

$$x_i = m_i + s_i t, \quad i \in \{1, 2, 3\}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{23.4}$$

Lõikepunktide leidmiseks teist järku pinnaga tuleb lahendada neljast võrrandist (23.1) ja (23.4) koosnev süsteem. Asendades kolmest viimasest võrrandist esimesse võrrandisse, saame talle kuju

$$At^2 + 2Bt + C = 0, \tag{23.5}$$

kus selle võrrandi kordajad on antud valemitega (20.3) ja (20.4). Viimases kordaja C on (23.2) tõttu võrdne nulliga. Võrrand (23.5) lihtsustub, saades

$$t(At + 2B) = 0. \tag{23.6}$$

Juhul kui siht $L(\vec{s})$ on mitteasümptootiline, siis viimases võrrandis $A \neq 0$. Lahenditeks saame $t_1 = 0$ ja $t_2 = -2\frac{B}{A}$. Lõikepunkt M on kahekordne, kui $t_1 = t_2$. Seega $B = 0$. Kui lõikesirge siht on asümptootiline, siis $A = 0$. Võrrand (23.6) annab $Bt = 0$. Sel korral puutuja peab asuma pinnal. Seega viimane peab kehtima iga reaalarvu t korral. Seega ka sellel juhul saame puutujaks olemise tingimuseks $B = 0$. Arvestades $B = 0$ avaldist, mis antakse valemiga (20.3), saame

$$B = 0 \Longleftrightarrow \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} m_i s_j + \sum_{i=1}^{3} a_i s_i = 0 \Longleftrightarrow \sum_{j=1}^{3} \Big(\sum_{i=1}^{3} a_{ij} m_i + a_j \Big) s_j = 0$$

ehk

$$\sum_{j=1}^{3} \Big(\sum_{i=1}^{3} a_{ij} m_i + a_j \Big) s_j t = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Asendame siia valemist (23.4) saadava $s_j t = x_j - m_j$. Me saame

$$\sum_{j=1}^{3} \Big(\sum_{i=1}^{3} a_{ij} m_i + a_j \Big) (x_j - m_j) = 0$$

ehk

$$\sum_{j=1}^{3}\Big(\sum_{i=1}^{3} a_{ij}m_i + a_j\Big)x_j - \sum_{j=1}^{3}\Big(\sum_{i=1}^{3} a_{ij}m_i + a_j\Big)m_j = 0. \tag{23.7}$$

Kuna viimases x_1, x_2 ja x_3 kordajad valemi (23.3) tõttu pole samaaegselt nullid, siis (23.7) on tasandi võrrand. Seega punkti M läbivate puutujate hulk on tasand. Sellega teoreem on tõestatud. ♠.

Tasandi (23.7) võrrandi saab seose (23.2) abil kirjutada sobivamal kujul:

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}m_i x_j + \sum_{i=1}^{3} a_i(x_i + m_i) + a = 0. \tag{23.8}$$

See valem on kerge meelde jätta. Teist järku pinna võrrand (23.1) tuleb esitada kujul

$$p: \quad \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}\underline{x_i}x_j + \sum_{i=1}^{3} a_i(x_i + \underline{x_i}) + a = 0.$$

Viimases võrrandis on pooles ulatuses alla kriipsutatud teist järku pinna muutuva punkti X koordinaatidest asendatud puutepunkti M koordinaatidega m_1, m_2 ja m_3. Saamegi puutujatasandi võrrandi (23.8). Kirjeldatud protseduuri nimetame *muutujate pooliti asenduseks.*

Teist järku pinna iseärases punktis puutujatasandit ei ole olemas, sest võrrandis (23.8) on x_1, x_2 ja x_3 kordajad võrdsed nulliga ning seetõttu ei ole tegemist tasandi võrrandiga.

Lugejal soovitame kõigi seitsmeteistkümne pinnatüübi kanoonilisi võrrandeid kasutades, panna kirja puutujatasandi võrrandid.

24. TEIST JÄRKU PINNA INVARIANDID

See paragrahv on analoogiline seitsmenda paragrahviga, kus vaatlesime teist järku joonte invariante.

Olgu antud teist järku pind võrrandiga

$$p: \quad \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_i x_j + 2\sum_{i=1}^{3} a_i x_i + a = 0$$

mingi reeperi $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ suhtes. Tema vasak pool

$$f(x_1, x_2, x_3) := \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_i x_j + 2\sum_{i=1}^{3} a_i x_i + a$$

on kolmemuutuja polünoom. Muutujateks on x_1, x_2 ja x_3. Minnes üle uuele reeperile $\{O'; \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3\}$, siis see polünoom uutes koordinaatides x'_1, x'_2 ja x'_3 saab kuju

$$f(x'_1, x'_2, x'_3) := \sum_{i,j=1}^{3} a'_{ij}x'_i x'_j + 2\sum_{i=1}^{3} a'_i x'_i + a',$$

mis on taas kolmemuutuja polünoom uute muutujate x'_1, x'_2 ja x'_3 suhtes. Seejuures polünoomi $f(x_1, x_2, x_3)$ kordajad teisenevad uuteks kordajateks $a'_{11}, a'_{22}, a'_{33}, a'_{12}, a'_{13}, a'_{23}, a'_1 a'_2, a'_3$ ja a'. Vaatamata sellele, et kordajad teisenevad, saab neist moodustada funktsioone

$$I(a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}, a_1 a_2, a_3, a),$$

mille väärtus ei sõltu sellest, millise reeperi suhtes me nad leiame.

Definitsioon 24.1. *Funktsiooni*

$$I(a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}, a_1 a_2, a_3, a)$$

nimetame kolmemuutuja polünoomi

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_i x_j + 2\sum_{i=1}^{3} a_i x_i + a$$

invariandiks, kui üleminekul mistahes teisele reeperile $\{O'; \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3\}$, *arv* $I(a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}, a_1, a_2, a_3, a)$ *ei muutu, s.o.*

$$I(a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}, a_1 a_2, a_3, a) =$$

$$= I(a'_{11}, a'_{22}, a'_{33}, a'_{12}, a'_{13}, a'_{23}, a'_1 a'_2, a'_3, a').$$

Definitsioon 24.2. *Kolmemuutuja polünoomi* $f(x_1, x_2, x_3)$ *invarianti üleminekul ristreeperilt mistahes teisele ristreeperile nimetame ortogonaalinvariandiks.*

Järgnevas me vaatleme kolmemuutuja polünoomi $f(x_1, x_1, x_3)$ invariantidest ainult ortogonaalinvariante.

Teoreem 24.1. *Kolmemuutuja polünoomi*

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} x_i x_j + 2\sum_{i=1}^{3} a_i x_i + a$$

ortogonaalinvariantideks on

$$\delta := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \tag{24.1}$$

$$s := a_{11} + a_{22} + a_{33}, \tag{24.2}$$

$$S := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \tag{24.3}$$

ja

$$\Delta := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a \end{vmatrix}.$$

Tõestus. Näitame esmalt, et δ, s ja S on ortogonaalinvariandid. Paneme tähele, et kõik nad on moodustatud kolmemuutuja polünoomi $f(x_1, x_2, x_3)$ ruutosa kordajatest. Valemite (18.9) kohaselt reeperi alguspunkti muutmisel need suurused δ, s ja S ei muutu, sest ruutosa kordajad ei muutu. Seega üleminekul ühelt ristreeperilt teisele ristreeperile, on küllaldane näidata invariantsust üleminekul ühelt ristbaasilt teisele ristbaasile. Siin me tugineme valemitele (18.13), s.o. $A' = C^{\top}AC$. Teoreemi 21.2 kohaselt on üleminekul ühelt ristbaasilt teisele ristbaasile baasiteisenduse maatriks ortogonaalmaatriks, mistõttu $A' = C^{-1}AC$. Selle valemi abil näitame, et δ, s ja S on ortogonaalinvariandid. Suvalise reaalarvu λ korral moodustame maatriksi $A' - \lambda E$, mille saame maatriksi omadustele tuginedes, avaldada maatriksi $A - \lambda E$ kaudu. Tõepoolest

$$A' - \lambda E = C^{-1}AC - \lambda E = C^{-1}AC - C^{-1}(\lambda E)C = C^{-1}(A - \lambda E)C \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow A' - \lambda E = C^{-1}(A - \lambda E)C.$$

Kasutades teoreemi maatriksite korrutise determinandist, viimasest valemist me saame jätkata

$$|A' - \lambda E| = |C^{-1}(A - \lambda E)C| = |C^{-1}||A - \lambda E||C| =$$

$$= (|C^{-1}||C|)|A - \lambda E| = (|C|^{-1}|C|)|A - \lambda E| = |A - \lambda E|.$$

Siin me arvestasime, et maatriksi ja pöördmaatriksi determinandid on teineteise pöördarvud. Saime, et

$$|A' - \lambda E| = |A - \lambda E|, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{24.4}$$

Seega iga reaalarvu λ korral determinant $|A - \lambda E|$ on ortogonaalinvariant. Saadud determinant on λ suhtes kuup-polünoom. Nähes veidi vaeva, saame

$$|A - \lambda E| = -\lambda^3 + s\lambda^2 - S\lambda + \delta.$$

Tähelepanu on väärt, et siin kordajateks on s, S ja δ, mille invariantsust tahame näidata. Sama moodi saame leida

$$|A' - \lambda E| = -\lambda^3 + s'\lambda^2 - S'\lambda + \delta'.$$

Siin s', S' ja δ' leitud maatriksi A' elementide abil analoogiliselt valemitele (24.1)– (24.3). Valem (24.4) saab kuju

$$\lambda^3 - s'\lambda^2 + S'\lambda - \delta' = \lambda^3 - s\lambda^2 + S\lambda - \delta, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Polünoomide võrdsuse definitsiooni kohaselt peavad sama astmega λ juures kordajad olema võrdsed. Me saame

$$s' = s, \quad S' = S, \quad \delta' = \delta.$$

Seega s, S ja δ on kolmemuutuja polünoomi $f(x_1, x_2, x_3)$ ortogonaalinvariandid.

Jääb veel näidata, et Δ on samuti polünoomi $f(x_1, x_2, x_3)$ ortogonaalinvariant. Algul veendume, et ta on invariant, kui läheme üle ristbaasilt ristbaasile, jättes seega reeperi alguspunkti paigale. Paneme tähele, et Δ on maatriksi

$$\overline{A} := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a \end{pmatrix}$$

determinant: $\Delta = |\overline{A}|$. Baasiteisendusel maatriks $\overline{A}$ teiseneb uueks maatriksiks

$$\overline{A}\,' := \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & a'_1 \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} & a'_2 \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} & a'_3 \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 & a' \end{pmatrix}$$

valemiga

$$\overline{A}\,' = \overline{C}^{\top} \overline{A}\ \overline{C}, \tag{24.5}$$

kus

$$\overline{C} := \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Siin me kasutasime valemeid (18.14) ja (18.15). Osutub, et maatriks $\overline{C}$ on ortogonaalmaatriks nii nagu baasiteisendusmaatriks C. Meil on vaja näidata, et $\overline{C}^{-1} = \overline{C}^{\top}$. Maatriksil $\overline{C}$ muidugi pöördmaatriks leidub, sest $|\overline{C}| = |C| \neq 0$. Leiame nüüd maatriksi $\overline{C}$ pöördmaatriksi. Tähistame otsitavat pöördmaatriksit

$$\overline{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{pmatrix}$$

abil. Tema elemendid saame leida pöördmaatriksi definitsiooni kohaselt tingimustest $\overline{C}\,\overline{X} = E$ ja $\overline{X}\,\overline{C} = E$. Esimese ja teise abil vastavalt saame, et x_{41}, x_{42}, x_{43} ja x_{14}, x_{24}, x_{34} on võrdsed nulliga ning x_{44} on võrdne ühega. Seega

$$\overline{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & 0 \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & 0 \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Järgi jäänud elemendid, nagu näeme, tuleb leida tingimustest $XC = E$ ja $CX = E$, kus

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}.$$

Seega jutt on maatriksi C pöördmaatriksist. Tema kohta aga teame, et $C^{-1} = C^{\top}$. Järelikult

$$\overline{C}^{\,-1} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

millest $\overline{C}^{\,-1} = C^{\top}$. Oleme näidanud, et $\overline{C}$ on ortogonaalmaatriks. Valem (24.5) täpsustub, kui läheme üle ristbaasilt ristbaasile. Saame

$$\overline{A}\,' = \overline{C}^{\,-1}\overline{A}\;\overline{C}.$$

Viimase tõttu

$$\Delta\,' = |\overline{A}\,'| = |\overline{C}^{\,-1}\overline{A}C| = |\overline{C}^{\,-1}||\overline{A}||\overline{C}| = |\overline{C}|^{-1}|\overline{A}||\overline{C}| = |\overline{A}| = \Delta,$$

mistõttu Δ on üleminekul ristbaasilt ristbaasile kolmemuutuja polünoomi $f(x_1, x_2, x_3)$ invariant.

Jääb veel näidata, et Δ on invariantne reeperi alguspunkti muutmisel. Kui viime reeperi alguspunkti punkti $O\,'(c_1, c_2, c_3)$, siis teist järku pinna võrrandi kordajate teisenemisvalemid on leitud paragrahvis § 18. Need on (18.9)−(18.10) kohaselt

$$a'_{ij} = a_{ij}, \quad i, j \in \{1, 2, 3\},$$

$$a_i' = \sum_{s=1}^{3} a_{is}c_s + a_i, \quad i \in \{1,2,3\}$$

ja

$$a' = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}c_ic_j + 2\sum_{s=1}^{3} a_sc_s + a.$$

Viimaste abil leiame Δ teisenemisvalemi. Me saame

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_{11}' & a_{12}' & a_{13}' & a_1' \\ a_{21}' & a_{22}' & a_{23}' & a_2' \\ a_{31}' & a_{32}' & a_{33}' & a_3' \\ a_1' & a_2' & a_3' & a' \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \sum_{s=1}^{3} a_{1s}c_s + a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \sum_{s=1}^{3} a_{2s}c_s + a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \sum_{s=1}^{3} a_{3s}c_s + a_3 \\ \sum_{s=1}^{3} a_{1s}c_s + a_1 & \sum_{s=1}^{3} a_{2s}c_s + a_2 & \sum_{s=1}^{3} a_{3s}c_s + a_3 & a' \end{vmatrix}.$$

Siin me ei saanud asendada kordajat a', sest vastasel juhul poleks determinant mahtunud ära paberile. Kasutame determinantide omadusi: lahutame neljandast reast s_1-kordse esimese, s_2-kordse teise ja s_3-kordse kolmanda rea. Kui veel peame silmas, et $a_{ij} = a_{ji}$, siis me saame

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \sum_{s=1}^{3} a_{1s}c_s + a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \sum_{s=1}^{3} a_{2s}c_s + a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \sum_{s=1}^{3} a_{3s}c_s + a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \sum_{s=1}^{3} a_sc_s + a \end{vmatrix}.$$

Järgmisena lahutame neljandast veerust taas s_1-kordse esimese, s_2-kordse teise ja s_3-kordse kolmanda veeru. Näeme

$$\Delta' = \Delta.$$

Seega Δ on kolmemuutuja polünoomi $f(x_1, x_2, x_3)$ ortogonaalinvariat.

Teoreem 24.2. *Arvud*

$$K = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_1 \\ a_{31} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_3 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{32} & a_{33} & a_3 \\ a_2 & a_3 & a \end{vmatrix}$$

ja

$$\sigma = \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_3 \\ a_3 & a \end{vmatrix}$$

on kolmemuutuja polünoomi

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{s=1}^{3} a_s x_s + a$$

invariandid üleminekul ristbaasilt ristbaasile.

Tõestus. Moodustame neljanda astme polünoomi

$$|\overline{A} - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} & a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a - \lambda \end{vmatrix}.$$

Determinandi definitsiooni kohaselt saab viimase esitada kujul

$$|\overline{A} - \lambda E| = \lambda^4 - I_1 \lambda^3 + I_2 \lambda^2 + I_3 \lambda + I_4. \tag{24.6}$$

Siin kordajad I_1, I_2, I_3 ja I_4 avalduvad maatriksi $\overline{A}$ elementide kaudu, s.o, teist järku pinna võrrandi kordajate kaudu. Leiame nüüd kordajad I_1, I_2, I_3 ja I_4. Nende leidmine ei ole tehniliselt kõige lihtsam. See-eest on nad aga tuntud kirjandusest. Tegemist on maatriksi $\overline{A}$ sama järku peamiinorite summaga. Täpsemalt I_1, I_2, I_3 ja I_4 on võrdsed vastavalt maatriksi $\overline{A}$ esimest, teist, kolmandat ja neljandat järku peamiinorite summaga. Meenutame, et mingi ruutmaatriksi peamiinorid on peadiagonaalile toetuvad miinorid. Maatriksi $\overline{A}$ korral on neli esimest järku, kuus teist järku, neli kolmandat järku ja üks neljandat järku peamiinor. Öeldut arvestades

$$I_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33} + a,$$

I

$$I_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{1} \\ a_{1} & a\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{22} & a_{2} \\ a_{2} & a\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{33} & a_{3} \\ a_{3} & a\end{vmatrix},$$

$$I_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2} \\ a_{1} & a_{2} & a\end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{1} \\ a_{31} & a_{33} & a_{3} \\ a_{1} & a_{3} & a\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{2} \\ a_{32} & a_{33} & a_{3} \\ a_{2} & a_{3} & a\end{vmatrix}$$

ja

$$I_4=|\overline{A}|=\Delta.$$

Nüüd

$$|\overline{A}\,'-\lambda E|=|\overline{C}^{-1}(\overline{A}-\lambda E)\overline{C}|=|\overline{C}^{-1}||\overline{A}-\lambda E||\overline{C}|=$$

$$=(|\overline{C}^{-1}||\overline{C}|)|\overline{A}-\lambda E|=(|\overline{C}|^{-1}|\overline{C}|)|\overline{A}-\lambda E|=|\overline{A}-\lambda E|$$

tõttu

$$|\overline{A}\,'-\lambda E|=|\overline{A}-\lambda E|.$$

Analoogiliselt valemile (24.6) on õige

$$|\overline{A}\,'-\lambda E|=\lambda^4-I\,'_1\lambda^3+I\,'_2\lambda^2+I\,'_3\lambda+I\,'_4,$$

mille abil koos valemiga (24.6) saame

$$\lambda^4-I\,'_1\lambda^3+I\,'_2\lambda^2+I\,'_3\lambda+I\,'_4=\lambda^4-I_1\lambda^3+I_2\lambda^2+I_3\lambda+I_4.$$

ehk

$$\lambda^4-I\,'_1\lambda^3+I\,'_2\lambda^2+I\,'_3\lambda+\Delta\,'=\lambda^4-I_1\lambda^3+I_2\lambda^2+I_3\lambda+\Delta.$$

Polünoomide võrdsuse definitsiooni kohaselt

$$I\,'_1=I_1,\quad I\,'_2=I_2,\quad I\,'_3=I_3,\quad \Delta\,'=\Delta,$$

mistõttu I_1, I_2, I_3 ja Δ on kolmemuutuja polünoomi $f(x_1, x_2, x_3)$ invariandid üleminekul ristbaasilt ristbaasile. Kuna δ ja S, nagu eelmisest teoreemist teame, on ortogonaalinvariandid, siis üleminekul ristbaasilt ristbaasile $\delta\,' = \delta$ ja $S\,' = S$. Seetõttu

$$K\,' = I\,'_3 - \delta\,' = I_3 - \delta = K.$$

ja

$$\sigma\,' = I\,'_2 - S\,' = I_2 - S = \sigma.$$

Sellega on teoreem tõestatud. ♠

Osutub, et saadud suurused I_1, I_2, I_3, seetõttu ka K ja σ ei ole reeperi alguspunkti muutmise suhtes muutumatud. Täpsemalt: osade teist järku pindade korral on nad invariandid osade puhul mitte. Järgnevas võtame vaatluse alla K ja σ käitumise reeperi alguspunkti muutmisel. Teoreemi lühema sõnastamise huvides kasutame § 22 toodud teist järku pinnatüüpide numeratsiooni.

Teoreem 24.3. *Olgu* $f(x_1, x_2, x_3)$ *kolmemuutuja polünoom*

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{i=1}^{3} a_i x_i + a$$

ja tema poolt määratud teist järku pind

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Kui võrrand $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ *määrab pinnatüübi* $1 - 8$ (*määrab pinnatüübi* $1 - 14$), *siis arv* K (*arv* σ) *ei ole ristreeperi alguspunkti muutmise korral polünoomi* $f(x_1, x_2, x_3)$ *invariant. Pinnatüüpide* $9 - 17$ *korral* (*pinnatüüpide* $15 - 17$ *korral*) *on arv* K (*arv* σ) *aga invariant. Siin me kasutasime* § 22 *pinnatüüpide numeratsiooni.*

Tõestus. Jaotame teoreemi tõestuse kaheks etapiks. Lähtume kanoonilisest reeperist, s.o. reeperist, mille suhtes teist järku pinna võrrand on kanoonilise kujuga. Tähistame kanoonilist reeperit $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Viimane on, nagu teame, ristreeper. Kuna suurused K ja σ on ristbaasi muutmise suhtes invariandid, siis võime kasutada mistahes teise alguspunktiga ristreeperi korral ristbaasi osas kanoonilises reeperis olevat ristbaasi $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Tähistame uuritavaid suurusi kanoonilise reeperi alguspunkti

O korral K ja σ abil ning mistahes teise alguspunkti O' korral reeperist $\{O'; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ tähistame K' ja σ' abil.

Vaatleme esmalt tsentraalseid teist järku pindu, s.o. § 22 *toodud loetelus juhtusid* 1–6. Kõigil neil kuuel juhul saab teist järku pinna võrrandi esitada ühise võrrandiga

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a = 0.$$

Valides siin sobivalt kordajaid, saame kõigi tsentraalsete teist järku pindade kanoonilised võrrandid. Näiteks ühekattelise hüperboloidi kanoonilise võrrandi saamiseks tuleb võtta $a_{11} = \frac{1}{\alpha_1^2}$, $a_{22} = \frac{1}{\alpha_2^2}$, $a_{33} = -\frac{1}{\alpha_3^2}$ ja $a = -1$. Seega

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a.$$

Kanoonilise reeperi $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ korral

$$K = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

ja

$$\sigma = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix}.$$

Leiame nüüd K' ja σ' uue alguspunkti O' korral. Tema koordinaate tähistame c_1, c_2 ja c_3 abil. Täpsemalt on nad kohavektori $\overrightarrow{OO'}$ koordinaadid baasi $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ suhtes, s.o.

$$\overrightarrow{OO'} = c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + c_3\vec{e}_3.$$

Sel korral kolmemuutuja polünoomi $f(x_1, x_2, x_3)$ kordajad teisenevad. Nad on antud valemitega (18.9)–(18.10), mis toome siin uuesti ära:

$$a'_{ij} = a_{ij}, \quad i, j \in \{1, 2, 3\}, \tag{24.7}$$

$$a'_i = \sum_{s=1}^{3} a_{is}c_s + a_i, \quad i \in \{1, 2, 3\} \tag{24.8}$$

ja

$$a' = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} c_i c_j + 2 \sum_{s=1}^{3} a_s c_s + a. \tag{24.9}$$

Nende abil saame leida

$$K' = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_1 \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_2 \\ a'_1 & a'_2 & a' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{13} & a'_1 \\ a'_{31} & a'_{33} & a'_3 \\ a'_1 & a'_3 & a' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{22} & a'_{23} & a'_2 \\ a'_{32} & a'_{33} & a'_3 \\ a'_2 & a'_3 & a' \end{vmatrix}$$

elemendid. Saame

$$K' = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{11}c_1 \\ 0 & a_{22} & a_{22}c_2 \\ a_{11}c_1 & a_{22}c_2 & a' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{11}c_1 \\ 0 & a_{33} & a_{33}c_3 \\ a_{11}c_1 & a_{33}c_3 & a' \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & a_{22}c_2 \\ 0 & a_{33} & a_{33}c_3 \\ a_{22}c_2 & a_{33}c_3 & a' \end{vmatrix}.$$

Siin

$$a' = a_{11}c_1^2 + a_{22}c_2^2 + a_{33}c_3^2 + a.$$

Nüüd K' avaldise parema poole igat determinanti lihtsustame ühte moodi. Esimese determinandi korral lahutame kolmandast reast c_1-kordse esimese rea ja c_2-kordse teise rea, seejärel kolmandast veerust c_1-kordse esimese veeru ja c_2-kordse teise veeru. Analoogiliselt toimime teise ja kolmanda determinandiga. Saame

$$K' = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}c_3^2 + a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & a_{22}c_2^2 + a \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & a_{11}c_1^2 + a \end{vmatrix}.$$

Siit saame

$$K' = K + \delta(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2)$$

ehk

$$K' = K + \delta\,|\overrightarrow{OO'}|^2. \tag{24.10}$$

Juba siit näeme, et K' avaldis sõltub uue alguspunkti koordinaatidest. Seega K pole invariant. Leiame nüüd jutuks oleva suuruse teisenemisvalemi, kui me viime reeperi alguspunkti mistahes punktist O' mistahes teise punkti O''. Need punktid on määratavad oma koordinaatidega leituna kanoonilise reeperi $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ suhtes. Selleks tuleb punktide O' ja O'' kohavektorid $\overrightarrow{OO'}$ ja $\overrightarrow{OO''}$ avaldada baasi $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ suhtes. Tähistame jutuks olevaid avaldisi

$$\overrightarrow{OO'} = c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + c_3\vec{e}_3, \quad \overrightarrow{OO''} = \bar{c}_1\vec{e}_1 + \bar{c}_2\vec{e}_2 + \bar{c}_3\vec{e}_3.$$

Analoogiliselt valemile (24.10) saame

$$K'' = K + \delta\,|\overrightarrow{OO''}|^2$$

Selle ja (24.7) abil saame

$$K'' = K' + \delta\,(|\overrightarrow{OO''}|^2 - |\overrightarrow{OO'}|^2).$$

Siit näeme veelkord, et reeglina K muutub reeperi alguspunkti muutmisel. Huvitav on märgata, et teist järku pinna keskpunktist võrdsel kaugusel olevate punktide O' ja O'' korral $K'' = K'$.

Selgitama nüüd σ käitumist. Kanoonilise reeperi alguspunkti O korral

$$\sigma = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix}$$

Minnes punkti O', saame leida

$$\sigma\,' = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_1 \\ a'_1 & a' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{22} & a'_2 \\ a'_2 & a' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{33} & a'_3 \\ a'_3 & a' \end{vmatrix}$$

elemendid valemite (18.9)$-$(18.10) abil. Me saame

$$\sigma\,' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11}c_1 \\ a_{11}c_1 & a' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{22}c_2 \\ a_{22}c_2 & a' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{33}c_3 \\ a_{33}c_3 & a' \end{vmatrix}.$$

Viimase abil aga

$$\sigma\,' = \sigma + (c_1^2 + c_2^2)\begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} + (c_1^2 + c_3^2)\begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{33} \end{vmatrix} + (c_2^2 + c_3^2)\begin{vmatrix} a_{22} & 0 \\ 0 & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Kuna see valem sõltub punkti O' koordinaatidest, siis σ ei ole invariant. Alguspunkti viimisel punktist O' punkti O'', saame

$$\sigma\,'' = \sigma\,' + [(c_1^2 + c_2^2) - (\overline{c}_1^2 + \overline{c}_2^2)]\begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} +$$

$$+[(c_1^2 + c_3^2) - (\overline{c}_1^2 + \overline{c}_3^2)]\begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{33} \end{vmatrix} + [(c_2^2 + c_3^2) - (\overline{c}_2^2 + \overline{c}_3^2)]\begin{vmatrix} a_{22} & 0 \\ 0 & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Viimane valem on liialt keeruline, et teda meelde jätta.

Korraga saame vaadelda elliptilist ja hüperboolset paraboloidi. Seega § 22 antud on need pindu tähistatud numbriga 7 ja 8. Mõlema pinna kanoonilise võrrandi saab anda valemiga

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 = 2x_3.$$

Seega

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 - 2x_3.$$

Kanoonilise reeperi $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ alguspunkti O korral

$$K = -(a_{11} + a_{22}), \quad \sigma = -1.$$

Viime reeperi alguspunkti mistahes punkti $O\,'$, mis olgu määratud vektori

$$\overrightarrow{OO'} = c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + c_3\vec{e}_3$$

abil. Sel korral, arvestades valemeid (24.7)–(24.9), me saame

$$K' = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{11}c_1 \\ 0 & a_{22} & a_{22}c_2 \\ a_{11}c_1 & a_{22}c_2 & a\,' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{11}c_1 \\ 0 & 0 & -1 \\ a_{11}c_1 & -1 & a\,' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & a_{22}c_2 \\ 0 & 0 & -1 \\ a_{22}c_2 & -1 & a\,' \end{vmatrix}$$

ja

$$\sigma\,' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11}c_1 \\ a_{11}c_1 & a\,' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{22}c_2 \\ a_{22}c_2 & a\,' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & a\,' \end{vmatrix}.$$

Siin
$$a' = a_{11}c_1^2 + a_{22}c_2^2 - 2c_3.$$
Viimasteste abil saame
$$K' = K - 2a_{11}a_{22}c_3. \qquad \sigma' = \sigma + a_{11}a_{22}(c_1^2 + c_2^2) - 2(a_{11} + a_{22})c_3.$$
Analoogiliselt reeperi mistahes teise alguspunkti O'' korral, mis olgu määratud vektori
$$\overrightarrow{OO''} = \bar{c}_1\vec{e}_1 + \bar{c}_2\vec{e}_2 + \bar{c}_3\vec{e}_3$$
abil, saame
$$K'' = K - 2a_{11}a_{22}\bar{c}_3, \qquad \sigma'' = \sigma + a_{11}a_{22}(\bar{c}_1^2 + \bar{c}_2^2) - 2(a_{11} + a_{22})\bar{c}_3.$$
Saadud valemite abil saame, et reeperi alguspunkti viimisel punktist O' punkti O'' vaadeldavad suurused teisenevad järgmiselt
$$K'' = K' - 2a_{11}a_{22}(c_3 - \bar{c}_3)$$
ja
$$\sigma'' = \sigma' + a_{11}a_{22}[(\bar{c}_1^2 + \bar{c}_2^2) - (c_1^2 + c_2^2)] + 2(a_{11} + a_{22})(\bar{c}_3 - c_3).$$
Viimased valemid sõltuvad alguspunktide koordinaatidest. Seega K ja σ ei ole ka siin polünoomi $f(x_1, x_2, x_3)$ invariandid.

Nüüd vaatleme pinnaklasse 9−14. *Vaatluse all on elliptiline, imaginaarne elliptiline, hüperboolne silinder ning imaginaarsete lõikuvate ja lõikuvate tasandite paar.* Kõigi nende tasandite kanoonilised võrrandid saame anda valemiga
$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a = 0, \quad a_{11} \neq 0, \quad a_{22} \neq 0.$$
Seega
$$f(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a.$$
Kanoonilise reeperi $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ alguspunkti O korral
$$K = a_{11}a_{22}a, \quad \sigma = (a_{11} + a_{22})a.$$

Viime reeperi alguspunkti mistahes punkti $O\,'$, mis olgu määratud vektori

$$\overrightarrow{OO'} = c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + c_3\vec{e}_3$$

abil. Sel korral, arvestades valemeid (24.7)–(24.9), me saame

$$K' = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{11}c_1 \\ 0 & a_{22} & a_{22}c_2 \\ a_{11}c_1 & a_{22}c_2 & a\,' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{11}c_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{11}c_1 & 0 & a\,' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & a_{22}c_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{22}c_2 & 0 & a\,' \end{vmatrix}$$

ja

$$\sigma\,' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11}c_1 \\ a_{11}c_1 & a\,' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{22}c_2 \\ a_{22}c_2 & a\,' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a\,' \end{vmatrix}.$$

Siin

$$a\,' = a_{11}c_1^2 + a_{22}c_2^2 + a.$$

Viimastest me saame

$$K\,' = K, \quad \sigma\,' = \sigma + a_{11}a_{22}(c_1^2 + c_2^2).$$

Analoogiliselt reeperi mistahes teise alguspunkti $O\,''$ korral, mis olgu määratud vektori

$$\overrightarrow{OO''} = \overline{c}_1\vec{e}_1 + \overline{c}_2\vec{e}_2 + \overline{c}_3\vec{e}_3$$

abil, saame

$$K\,'' = K, \qquad \sigma\,'' = \sigma + a_{11}a_{22}(\overline{c}_1^2 + \overline{c}_2^2).$$

Saadud valemite abil saame, et reeperi alguspunkti viimisel punktist $O\,'$ punkti $O\,''$ vaadeldavad suurused teisenevad järgmiselt

$$K\,'' = K\,', \quad \sigma\,'' = \sigma\,' + a_{11}a_{22}[(\overline{c}_1^2 + \overline{c}_2^2) - (c_1^2 + c_2^2)].$$

Näeme, et K on polünoomi $f(x_1, x_2, x_3)$ invariant, kuid σ seda ei ole.

Olgu järgmiseks pinnaklassiks *paraboolne silinder*. Tema kanoonilisest võrrandist $x_3^2 = 2px_1$ saame $f(x_1, x_2, x_3) = x_3^2 - 2px_1$. Kanoonilise reeperi $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ alguspunkti O korral

$$K = -p^2, \quad \sigma = -p^2.$$

Viime reeperi alguspunkti mistahes punkti O', mis olgu määratud vektori

$$\overrightarrow{OO'} = c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + c_3\vec{e}_3$$

abil. Sel korral, arvestades valemeid (24.7)–(24.9), me saame

$$K' = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -p \\ 0 & 0 & 0 \\ -p & 0 & c_3^2 - 2pc_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & -p \\ 0 & 1 & c_3 \\ -p & c_3 & c_3^2 - 2pc_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c_3 \\ 0 & c_3 & c_3^2 - 2pc_1 \end{vmatrix},$$

millest

$$K' = 0 - p^2 \Longrightarrow K' = K,$$

ja

$$\sigma' = \begin{vmatrix} 0 & -p \\ -p & c_3^2 - 2pc_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c_3^2 - 2pc_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & c_3 \\ c_3 & c_3^2 - 2pc_1 \end{vmatrix},$$

millest

$$\sigma' = \sigma - 2pc_1.$$

Analoogiliselt reeperi mistahes teise alguspunkti O'' korral, mis olgu määratud vektori

$$\overrightarrow{OO''} = \bar{c}_1\vec{e}_1 + \bar{c}_2\vec{e}_2 + \bar{c}_3\vec{e}_3$$

abil, saame

$$K'' = K, \quad \sigma'' = \sigma - 2p\bar{c}_1.$$

Saadud valemite abil saame, et reeperi alguspunkti viimisel punktist O' punkti O'' vaadeldavad suurused teisenevad järgmiselt

$$K'' = K', \quad \sigma'' = \sigma' + 2p(c_1 - \bar{c}_1).$$

Näeme, et K on polünoomi $f(x_1, x_2, x_3)$ invariant, kuid σ seda ei ole.

Lõpuks vaatleme pinnaklasse 15–17. *Tegemist on kahe paralleelse, kahe imaginaarse paralleelse ja kahe ühtuva tasandiga.* Nad saab anda kanoonilise võrrandiga $x_3^2 + a = 0$. Seega $f(x_1, x_2, x_3) = x_3^2 + a$. Kanoonilise reeperi $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ alguspunkti O korral

$$K = 0, \quad \sigma = a.$$

Viime reeperi alguspunkti mistahes punkti O', mis olgu määratud vektori

$$\overrightarrow{OO'} = c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + c_3\vec{e}_3$$

abil. Sel korral, arvestades valemeid (24.7)$-$(24.9), me saame

$$K' = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3^2 + a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c_3 \\ 0 & c_3 & c_3^2 + a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c_3 \\ 0 & c_3 & c_3^2 + a \end{vmatrix},$$

millest

$$K' = 0 \Longrightarrow K' = K,$$

ja

$$\sigma' = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c_3^2 + a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c_3^2 + a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & c_3 \\ c_3 & c_3^2 + a \end{vmatrix} = a,$$

millest

$$\sigma' = \sigma.$$

Analoogiliselt reeperi mistahes teise alguspunkti O'' korral, mis olgu määratud vektori

$$\overrightarrow{OO''} = \bar{c}_1\vec{e}_1 + \bar{c}_2\vec{e}_2 + \bar{c}_3\vec{e}_3$$

abil, saame

$$K'' = K, \quad \sigma'' = \sigma.$$

Saadud valemite abil saame, et reeperi alguspunkti viimisel punktist O' punkti O'' vaadeldavad suurused ei teisene

$$K'' = K', \quad \sigma'' = \sigma'.$$

Näeme, et K ja σ on invariandid. Sellega teoreem on tõestatud. ♠

Teeme nüüd ühe väga olulise, kahjuks ebameeldiva, märkuse. Leitud ortogonaalinvariandid δ, Δ, s, S, K ja σ on kolmemuutuja polünoomi

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j + 2\sum_{i=1} a_ix_i + a$$

invariandid, mitte aga teist järku pinna

$$p : \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{i=1} a_i x_i + a = 0$$

invariandid. Põhjuseks on asjaolu, et selles võrrandis kordajad a_{ij}, a_i ja a määratakse kordaja täpsusega, sest pinna võrrandit võime nullist erineva teguriga läbi korrutada ilma et pinna tüüp muutuks. Seega selle pinna võrrandi kordajateks on ka iga kordajate seeria ka_{ij}, ka_i, ka mistahes nullist erineva reaalarvu k korral. Sel korral

$$\begin{aligned} \delta' =& k^3\delta, \quad \Delta' = k^4\Delta, \quad s' \;\; = ks, \\ S' =& k^2 S, \quad K' = k^3 K, \quad \sigma' = k^2\sigma, \end{aligned} \tag{24.11}$$

millest näeme, et vaadeldavad suurused polegi teist järku pinna ortogonaalinvariandid. Küll on vaadeldavatel suurustel midagi väga olulist ka säilinud. Näiteks olla null või nullist erinev. Suurused Δ, S, σ ja moodustatud $s\delta$ säilitavad märki.

Osutub, et nii vähese informatsiooni abil saame teist järku pindade tüübid määrata.

25. TEIST JÄRKU PINNA TÜÜBI MÄÄRAMINE INVARIANTIDE ABIL

Selles paragrahvis leiame invariantide abil kriteeriumid, mille abil saab kindlaks teha teist järku pinna tüübi, olenemata sellest, millise ristreeperi suhtes pinna võrrand on algselt antud. Samas aga pinna tüübi määramiseks vastavate tingimuste leidmiseks kasutame teist järku pinna kõige lihtsamaid võrrandeid. Nendeks on kanoonilised võrrandid. Viimased on leitud § 19 ja seejuures nimelt ristreeperi suhtes.

Oma teist järku pinnad, milliseid on paragrahvis § 19 jagatud seitsmeteskümneks tüübiks, saame kõigepealt jagada kaheks: tsentraalseteks ja mittetsentraalseteks. Tsentraalseid, s.o. ühe keskpunktiga teist järku pindu, on kuut tüüpi. Nagu teame on nendeks 1) ellipsoid, 2) imaginaarne ellipsoid, 3) imaginaarne teist järku koonus, 4) ühekatteline hüperboloid, 5) kahekatteline hüperboloid ja 6) teist järku koonus. Teist järku pind on tsentraalne, kui tema võrrandi ruutosa maatriks $A = (a_{ij})$ on regulaarne, s.o. $\delta = |A| \neq 0$. Siin ja edaspidi selles paragrahvis jälgitakse, et samasugused nõuded invariantidele kehtiksid tegelikult tervele invariantide klassile, mis on määratletud valemitega (24.11).

Mittetsentraalsed teist järku pinnad on ülejäänud teist järku pinnad. Need pinnad ei ole ühe keskpunktiga pinnad. Selliseid on 11 tüüpi. Nendeks on 7) elliptiline paraboloid, 8) hüperboolne paraboloid, 9) elliptiline silinder, 10) imaginaarne elliptiline silinder, 11) kaks imaginaarset lõikuvat tasandit, 12) hüperboolne silinder, 13) kaks lõikuvat tasandit, 14) paraboolne silinder, 15) kaks paraleelset tasandit, 16) kaks imaginaarset paralleelset tasandit ja 17) kaks ühtuvat tasandit. Nende pinnaklasside tunnuseks on, et pinna võrrandi ruutosa maatriks on mitteregulaarne, s.t. $\delta = |A| = 0$.

Teist järku pindade klassifitseerimise esimene samm on tehtud. Seega, kui $\delta = |A| \neq 0$, on tegemist tsentraalse teist järku pinnaga (üks tüüpidest $1-6$) ja, kui $\delta = |A| = 0$, on tegemist mittetsentraalse teist järku pinnaga (üks tüüpidest $7-17$).

Nüüd võtame täiendava vaatluse alla kõigepealt tsentraalsed teist järku pinnad, kasutades uusi invariante. Teeme seda kanooniliste võrrandite kasutamise abil. Võrrandist

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} + \frac{x_3^2}{\alpha_3^2} = \varepsilon \tag{25.1}$$

konstandi ε sobival fikseerimisel saame 1) ellipsoidi ($\varepsilon = 1$), 2) imaginaarse ellipsoidi ($\varepsilon = -1$), 3) imaginaarse koonuse ($\varepsilon = 0$) kanoonilise võrrandi, aga võrrandist

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} - \frac{x_3^2}{\alpha_3^2} = \varepsilon \tag{25.2}$$

konstandi ε järgmisel fikseerimisel 4) ühekattelise hüperboloidi ($\varepsilon = 1$), kahekattelise hüperboloidi ($\varepsilon = -1$) ja teist järku koonuse ($\varepsilon = 0$). Nende võrrandite abil leiame invariandid $s\delta$ ja S. Kolme esimese teist järku pinnatüübi 1−3 korral valemist (25.1) saame

$$s\delta = \Big(\frac{1}{\alpha_1^2} + \frac{1}{\alpha_2^2} + \frac{1}{\alpha_3^2}\Big)\frac{1}{(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^2} > 0,$$

$$S = \frac{1}{(\alpha_1\alpha_2)^2} + \frac{1}{(\alpha_1\alpha_3)^2} + \frac{1}{(\alpha_2\alpha_3)^2} > 0.$$

Kolme järgmise pinnatüübi 4−6 korral valemist (25.2) saame

$$s\delta = -\Big(\frac{1}{\alpha_1^2} + \frac{1}{\alpha_2^2} - \frac{1}{\alpha_3^2}\Big)\frac{1}{(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^2},$$

$$S = \frac{1}{(\alpha_1\alpha_2)^2} - \frac{1}{(\alpha_1\alpha_3)^2} - \frac{1}{(\alpha_2\alpha_3)^2}.$$

Osutub, et sel korral ei ole õige $s\delta > 0$ ja $S > 0$, nagu on seda pinnatüüpide 1−3 korral. Tõepoolest, sest sel korral

$$\begin{cases} s\delta > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \Big(\frac{1}{\alpha_1^2} + \frac{1}{\alpha_2^2} - \frac{1}{\alpha_3^2}\Big)\frac{1}{(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^2} < 0 \\ \frac{1}{(\alpha_1\alpha_2)^2} - \frac{1}{(\alpha_1\alpha_3)^2} - \frac{1}{(\alpha_2\alpha_3)^2} > 0 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\alpha_1^2} + \frac{1}{\alpha_2^2} < \frac{1}{\alpha_3^2} \\ \Big(\frac{1}{\alpha_1^2} + \frac{1}{\alpha_2^2}\Big)\frac{1}{\alpha_3^2} < \frac{1}{(\alpha_1\alpha_2)^2} \end{cases}.$$

Korrutades saadud kahel võrratusel omavahel vasakud pooled ja omavahel paremad pooled ning seejärel saadud võrratust korrutades teguriga α_3^2, me saame

$$\left(\frac{1}{\alpha_1^2}+\frac{1}{\alpha_2^2}\right)^2 < \frac{1}{(\alpha_1\alpha_2)^2}.$$

Korrastamisel järeldub

$$\frac{1}{\alpha_1^4}+\frac{1}{(\alpha_1\alpha_2)^2}+\frac{1}{\alpha_2^4} < 0.$$

See on aga võimatu $\alpha_1 \neq 0, \alpha_2 \neq 0$ ja $\alpha_3 \neq 0$ tõttu. Sellega oleme näidanud, et tsentraalsete pinnatüüpide 4−6 korral ei ole õige $s\delta > 0$ ja $S > 0$. Õige on aga $s\delta \leq 0$ või $S \leq 0$. Nüüd on juba lihtne eristada pinnatüüpe 1−3 üheltpoolt ja pinnaüüpe 4−6 teiselt poolt. Seda saame teha invariandi Δ abil. Valemite (25.1) ja (25.2) abil vastavalt saame

$$\Delta = -\frac{\varepsilon}{(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^2}, \quad \Delta = \frac{\varepsilon}{(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^2}.$$

Seega 1) ellipsoidi korral $\Delta < 0$, 2) imaginaarse ellipsoidi korral $\Delta > 0$, 3) imaginaarse teist järku koonuse korral $\Delta = 0$, 4) ühekattelise hüperboloidi korral $\Delta > 0$, 5) kahekattelise hüperboloidi korral $\Delta < 0$ ja 6) teist järku koonuse korral $\Delta = 0$.

Sellega tsentraalsete teist järku pindade jaoks on leitud invariantide süsteemid, et määrata ta tüüp olenemata sellest millises ristreeperis on ta võrrand antud.

Saadud tulemused on esitatud tabelis 1 järgmisel leheküljel.

Nüüd võtame vaatluse alla mittetsentraalsed teist järku pinnad. Nende tunnuseks on $\delta = 0$. Eespool toodud loetelus on tegu juhtudega 7−17. Nagu tsentraalsete pindade korral on ka siin vaja kanoonilisi võrrandeid invariantide süsteemi leidmiseks, et määrata pinna tüüp. Õnneks saab ka siin kanoonilised võrrandid esitada kompaktsemalt.

7−8) Elliptiline, hüperboolne paraboloid

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2}+\varepsilon\frac{x_1^2}{\alpha_2^2} = 2x_3, \quad \varepsilon \in \{1, -1\}. \tag{25.3}$$

Tabel 1
Tsentraalse teist järku pinna
tüübi määramine invariantide abil ($\delta \neq 0$)

Pinna nimetus	*Kanooniline võrrand*	*Pinna invariandid*
1. Ellipsoid	$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_3^2} = 1$	$s\delta > 0, \quad S > 0,$ $\Delta < 0$
2. Imaginaarne ellipsoid	$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_3^2} = 0$	$s\delta > 0, \quad S > 0,$ $\Delta > 0$
3. Imaginaarne teist järku koonus	$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_3^2} = 0$	$s\delta > 0, \quad S > 0,$ $\Delta = 0$
4. Ühekatteline hüperboloid	$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} - \frac{x_2^2}{\alpha_3^2} = 1$	$(s\delta \leq 0) \vee (S \leq 0),$ $\Delta > 0$
5. Kahekatteline hüperboloid	$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} - \frac{x_2^2}{\alpha_3^2} = -1$	$(s\delta \leq 0) \vee (S \leq 0),$ $\Delta < 0$
6. Teist järku koonus	$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} - \frac{x_2^2}{\alpha_3^2} = 0$	$(s\delta \leq 0) \vee (S \leq 0),$ $\Delta = 0$

9−11) Elliptiline, imaginaarne elliptiline silinder, kaks imaginaarset lõikuvat tasandit

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_1^2}{\alpha_2^2} = \varepsilon, \quad \varepsilon \in \{1, -1, 0\}. \tag{25.4}$$

12−13) Hüpperboolne silinder, kaks lõikuvat tasandit

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} - \frac{x_1^2}{\alpha_2^2} = \varepsilon, \quad \varepsilon \in \{1, 0\}. \tag{25.5}$$

14) Paraboolne silinder

$$x_3^2 = 2px_1, \quad p \neq 0. \tag{25.6}$$

15−17) Kaks paralleelset, kaks imaginaarset paralleelset, kaks ühtuvat tasandit

$$x_3^2 + \alpha = 0. \quad \alpha < 0, \quad \alpha > 0, \quad \alpha = 0. \tag{25.7}$$

Kasutades võrrandeid (25.3)−(25.7), saame arvutada invariandid. Kuna see on üsna lihtne, siis jätame selle lugejale. Osutub, et invariandi Δ abil saame need 11 pinnatüüpi 7−17 jagada kolme rühma. Paneme tähele, et 7) elliptilise paraboloidi korral $\Delta = (\alpha_1\alpha_2)^{-2} < 0$ ja 8) hüperboolse paraboloidi korral $\Delta = -(\alpha_1\alpha_2)^{-2} > 0$ ning ülejäänud mittetsentraalsete pinnatüüpide lorral $\Delta = 0$. Seega elliptilise ja hüperboolse paraboloidi määramiseks on invariantide süsteem leitud. Invariantide $\delta = \Delta = 0$ korral teist järku pind on üks tüüpidest 9−17 eristamata neid omavahel. Need üheksa pinnatüüpi saab invariandi S abil jagada omakorda kolme alamrühma. Nimelt

9−11) elliptilise, imaginaarse elliptilise silindri, imaginaarsete lõikuvate tasandite korral $S = (\alpha_1\alpha_2)^{-2} > 0$,

12−13) hüperboolse silindri ja kahe lõikuva tasandi korral on aga meil $S = -(\alpha_1\alpha_2)^{-2} < 0$,

14−17)paraboolse silindri, kahe paralleelse, imaginaarse paralleelse, ühtuva tasandi korral $S = 0$.

Kuna pinnatüüpide 9−17 korral K on invariant, siis me saame seda kasutada. Ta võimaldab kahe esimese rühma pinnatüübid lahutada. Pinnatüüpide 9−11 korral saame nad eristada. Elliptilise silindri korral $K < 0$, elliptilise imaginaarse silindri korral $K > 0$ ja kahe imaginaarse lõikuva tasandi korral $K = 0$. Samuti saame invariandi K abil eristada pinnatüübid

12−13. Hüperboolse silindri korral $K \neq 0$ ja kahe lõikuva tasandi korral $K = 0$. Kolmanda rühma pinnatüüpide 14−17 korral eristub ainult $K \neq 0$ korral paraboolne silinder, kuid $K = 0$ korral on tegemist pinnatüüpidega 15−17. Need pinnatüübid saab lahutada omavahel σ abil, mis on nende korral invariant. Kahe paralleelse tasandi korral on $\sigma < 0$, kahe imaginaarse paralleelse tasandi korral $\sigma > 0$ ja kahe ühtuva tasandi korral aga $\sigma = 0$.

Sellega ka mittetsentraalsete teist järku pindade korral on leitud invariantide süsteem, mis võimaldab määrata pinnatüübi.

Esitame saadud tulemused tabelis 2.

Tabel 2
Mittetsentraalse teist järku pinna
tüübi määramine invariantide abil ($\delta = 0$)

Pinna nimetus	*Kanooniline võrrand*	*Pinna invariandid*
1. Elliptiline paraboloid	$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 2x_3$	$\delta = 0, \quad \Delta < 0$
2. Hüperboolne paraboloid	$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} - \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 2x_3$	$\delta = 0, \quad \Delta > 0$
3. Elliptiline silinder	$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 1$	$\delta = 0, \quad \Delta = 0,$ $K < 0$
4. Elliptiline imaginaarne silinder	$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = -1$	$\delta = 0, \quad \Delta = 0, \quad S > 0,$ $K > 0$
5. Kaks imaginaarset lõikuvat tasandit	$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 0$	$\delta = 0, \quad \Delta = 0, \quad S > 0,$ $K = 0$
6. Hüperboolne silinder	$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} - \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 1$	$\delta = 0, \quad \Delta = 0, \quad S < 0,$ $K \neq 0$

Pinna nimetus	*Kanooniline võrrand*	*Pinna invariandid*
7. Kaks lõikuvat tasandit	$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} - \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 0$	$\delta = 0, \quad \Delta = 0,$ $S < 0, \quad K = 0$
8. Paraboolne silinder	$x_3^2 = 2px_1, \quad p \neq 0$	$\delta = 0, \quad \Delta = 0,$ $S = 0, \quad K \neq 0$
9. Kaks paralleelset tasandit	$x_3^2 - \alpha^2 = 0$	$\delta = 0, \quad \Delta > 0, \quad S = 0,$ $K = 0, \quad \sigma < 0$
10. Kaks imaginaarset paralleelset tasandit	$x_3^2 + \alpha^2 = 0$	$\delta = 0, \quad \Delta = 0,$ $K = 0, \quad \sigma > 0$
11. Kaks ühtuvat tasandit	$x_3^2 = 0$	$\delta = 0, \quad \Delta = 0, \quad S = 0,$ $K = 0, \quad \sigma = 0$

26. TEIST JÄRKU PINNA KANOONILISE VÕRRANDI LEIDMINE INVARIANTIDE ABIL

Käesolev paragrahv on § 19 jätk. Seal me leidsime teist järku pindade kanoonilised võrrandid. Me aga ei saanud anda kanooniliste võrrandite leidmist invariantide abil, sest meil ei olnud veel invariandi mõistet. Meenutame kõigepealt lühidalt, mida me § 19 tegime.

Olgu antud teist järku pind p võrrandiga

$$p: \quad \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j + 2\sum_{i=1}^{3} a_ix_i + a = 0 \tag{26.1}$$

mingi ristreeperi $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ suhtes. Selles valemis x_1, x_2 ja x_3 on ruumi E^3 muutuva punkti X koordinaadid vaadeldava ristreeperi suhtes. Me lihtsustasime pinna p võrrandit (26.1), minnes üle sobivale ristreeperile $\{O'; \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3\}$, kusjuures see toimus kahes etapis. Esmalt muutsime esialgses ristreeperis $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ sobivalt baasi, jättes alguspunkti muutmata. Uut ristreeperit tähistasime $\{O; \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3\}$. Teiseks valisime sobiva alguspunkti O', saades ristreeperiks $\{O'; \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3\}$. Kirjeldame täpsemalt, kuidas see ristreeperite valik toimus. Reeperi esimese valiku aluseks on ainult ristreeperid muutmata alguspunkti. Seega temasse kuuluv baas on alati ristbaas. Seetõttu pinna p ruutosa maatriks A teiseneb ristbaasi teisendusel $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \xrightarrow{C} \{\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3\}$ ortogonaalmaatriksi abil, seega meil $C^{-1} = C^\top$. Niisiis maatriksi A teisenemisvalem $A' = C^\top AC$ täpsustub valemiks

$$A' = C^{-1}AC.$$

Viimane ütleb, et vektorruumis $\mathbf{E}^3$ saab defineerida lineaarteisenduse. Kuna maatriks A on sümmeetriline, siis see lineaarteisendus on täpsemalt sümmeetriline. Seega tekib omaväärtusülesanne. Selle kohaselt tuleb meil leida kuupvõrrandist $|A - \lambda E| = 0$ omaväärtused λ_1, λ_2 ja λ_3, mis on reaalsed, sest lineaarteisendus, nagu öeldud, on sümmeetriline. Siin tuleb juhtida tähelepanu sellele, et millises järjekorras me nummerdame omaväärtusi, selles on meil vabadus. Seda tuleb teha nii, et saaksime pinna kanooniliseks vôrrandiks nagu on toodud tabelites 1 ja 2. Iga omaväärtuse λ_k korral, kus $k \in \{1, 2, 3\}$, tuleb meil seejärel leida omavektor $\vec{s}_k = (s_1^{(k)}, s_2^{(k)}, s_3^{(k)}) \neq \vec{0}$.

Viimase koordinaadid leitakse aga lineaarvõrrandisüsteemist

$$\sum_{j=1}^{3}(a_{ij} - \lambda_k\delta_{ij})s_j^{(k)} = 0, \quad i \in \{1, 2, 3\}.$$

Kuna lineaarvõrrandisüsteem on homogeenne, siis iga omavektor on määratud kordaja täpsusega. Seega, kui oleme leidnud mingi omavektori $\vec{s}_k \neq \vec{0}$, siis sama omaväärtuse λ_k omavektoriks on ka $\vec{s}\,'_k = \alpha\vec{s}_k$, kus $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Valides $\alpha = \frac{1}{|\vec{s}_k|}$, saame omavektori $\vec{s}\,'_k$ pikkusega 1. Ühikvektoritest koosnev omavektorite süsteem $\{\vec{s}\,'_1, \vec{s}\,'_2, \vec{s}\,'_3\}$ koosneb aga paarikaupa ristuvatest vektoritest. Kui omaväärtused on paarikaupa erinevad, siis see normeeritud ristuvate omavektrite süsteem suuna täpsuseni määratakse üheselt. Kui omaväärtuste seas on võrdseid paare, siis saab ka valida ristuvatest ühikvektoritest koosneva süsteemi, kuid neid on lõpmatu palju, sest võrdsele omavektorite paarile vastav omavektorite hulk on kahemõõtmeline vektorruum ilma nullvektorita. Seega on igas olukorras tegemist ristbaasiga. Sellisele ristbaasile me üle lähemegi. Kuna me ei muuda reeperi alguspunkti, siis saame reeperi $\{O; \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3\}$. Siin me tähistasime ümber $\vec{e}\,'_k = \vec{s}\,'_k$, kus $k \in \{1, 2, 3\}$. Teame, et valitud ristreeperis pinna p ruutosa maatriks A teiseneb uueks maatriksiks A', mis on ehitusega

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}. \tag{26.2}$$

Pinna võrrand (26.1) valitud ristreeperis saab tublisti lihtsama kuju

$$p : \lambda_1\overline{x}_1^2 + \lambda_2\overline{x}_2^2 + \lambda_3\overline{x}_3^2 + 2\sum_{i=1}^{3}\overline{a}_i\overline{x}_i + a = 0. \tag{26.3}$$

Siin $\overline{x}_1, \overline{x}_2$ ja $\overline{x}_3$ tähistavad muutuva punkti X koordinaate valitud ristreeperis $\{O; \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3\}$. Muuseas viimases pinna võrrandis vabaliige a ei ole üldse teisenenud.

Järgmise sammuna tuleb muuta ristreeperi $\{O; \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3\}$ alguspunkti O, asendades selle sobiva punktiga O'. See protseduur sõltub aga pinna ruutosa maatriksi A astakust $r := rank\, A$. Kuna pinna ruutosa maatriksi A astak on invariant, s.o. vaatamata sellele, et maatriks A teiseneb üleminekul uuele ristreeperile, on tema astak r muutumatu. Seetõttu me võime astaku leidmiseks kasutada maatriksit A leituna mistahes ristreeperi suhtes. Me võime näiteks selle astaku leida, kui A on kujuga (26.2). Sel korral on kerge leida tema nullist erinevaid miinoreid. Neid tuleb otsida peamiinorite seast, sest kõik teised miinorid on võrdsed nulliga. Näiteks $r = 3$ korral peab leiduma maatriksil (26.2) üks kolmandat järku nullist erinev miinor, milleks saab olla $|A'| = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$. Seega $r = 3$ tähendab, et maatriksi A kõik omaväärtused on nullist erinevad. Analoogiliselt $r = 2$ korral üks omaväärtustest on null, aga kaks on nullist erinevad, ja $r = 1$ korral kaks omaväärtust on nullid ja ainult üks on nullist erinev. Kuna ristreeperi uue alguspunkti O' valik sõltub maatriksi A astakust, siis meie arutelus toimub hargnemine tema astaku järgi.

I. Olgu $r = 3$. Seega $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0$ ehk $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$ ja $\lambda_3 \neq 0$. Sel korral võrrandi (26.3) saab $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$ ja $\overline{x}_3$ suhtes teisendada täisruutudeks, s.o. esitada kujul

$$\lambda_1(\overline{x}_1 + \overline{\alpha}_1)^2 + \lambda_2(\overline{x}_2 + \overline{\alpha}_2)^2 + \lambda_3(\overline{x}_3 + \overline{\alpha}_3)^2 + \overline{a} = 0.$$

Võttes nüüd reeperis $\{O; \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3\}$ uue alguspunkti O' koordinaatideks $(-\overline{\alpha}_1, -\overline{\alpha}_2, -\overline{\alpha}_3)$, me saame reeperis $\{O\,'; \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3\}$ tema võrrandiks

$$\lambda_1\tilde{x}_1^2 + \lambda_2\tilde{x}_2^2 + \lambda_3\tilde{x}_3^2 + \overline{a} = 0. \tag{26.4}$$

Siin $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2$ ja $\tilde{x}_3$ on muutuva punkti X koordinaadid viimases reeperis. Oluline on siin rõhutada, et võrrandis (26.4) vabaliikme $\overline{a}$ saab leida nimelt invariantide abil. Selleks leiame invariandi Δ. Selle leidmiseks võime kasutada meie pinna võrrandit antuna mistahes ristreeperi suhtes, sest tegemist on ju invariandiga. Me saame

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{a} \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\lambda_3\overline{a} = \delta\overline{a},$$

millest $\overline{a} = \frac{\Delta}{\delta}$. Seega pinna p võrrand (26.4) saab kuju

$$\lambda_1\tilde{x}_1^2 + \lambda_2\tilde{x}_2^2 + \lambda_3\tilde{x}_3^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0. \tag{26.5}$$

See võrrand on eespool valemi (19.7) all. Kuna $\delta \neq 0$, siis pind p on tsentraalne. Pinna keskpunkti C koordinaadid viimases ristreeeris saame süsteemist $\lambda_1 \tilde{x}_1 = 0$, $\lambda_2 \tilde{x}_2 = 0$ ja $\lambda_3 \tilde{x}_3 = 0$. Seega $C(0,0,0)$. Näeme. et viimase ristreeperi alguspunkt O' on viidud tsentraalse pinna keskpunkti. Pinna võrrand (26.5) on sisuliselt tsentralse pinna kanooniline võrrand. Mis on selle võrrandi eelis? Selles esinevad suurused– omaväärtused λ_1, λ_2, λ_3 ning invariandid δ ja Δ– saame leida pinna esialgse võrrandi (26.1) abil. Seejärel on kohe kirja pandav pinna kanooniline võrrand (26.5). Kergesti on leitav ka ristreeper $\{O'; \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3\}$, mille suhtes see kanooniline võrrand saadakse. Alguspunkti $O' = C$ koordinaatideks on keskpunkti koordinaadid, mille leidmiseks on eespool leitud valemid. Baasivektoriteks on normeeritud omavektorid.

II. Olgu $r = 2$. Sel korral üks omaväärtustest on null. Meie tähistes on $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$ ja $\lambda_3 = 0$. Selle juhu alla langeb seitse tüüpi teist järku pindu. Paragrahvi § 19 numeratsiooni kasutades, on need pinnatüübid 7–13. Neist pinnatüüpide 7 ja 8, s.o. paraboloidide, kanoonilised võrrandid saadedakse valemist (19.16), milleks on

$$\lambda_1 \tilde{x}_1^2 + \lambda_2 \tilde{x}_2^2 + 2a_3 \tilde{x}_3 = 0, \quad a_3 \neq 0. \tag{26.6}$$

Pinnatüüpide 9–13 kanoonilised võrrandid saadakse aga valemist (19.20), s.o.

$$\lambda_1 \tilde{x}_1^2 + \lambda_2 \tilde{x}_2^2 + a = 0. \tag{26.7}$$

Sisuliselt valemid (26.6) ja (26.7) on nende pinnatüüpide kanoolised võrrandid. Me peame nad esitama aga ainult invariantide abil. Seega a_3 ja a tuleb esitada invariantide abil. Siin λ_1 ja λ_2 on juba invariandid. Invariantide arvutamiseks võime kasutada valemit (26.6) või (26.7), sest invariandid ei sõltu ristreeperi valikust. Valemi (26.6) abil saame $\Delta = -a_3^2 \lambda_1 \lambda_2 \neq 0$. Kuna $S = \lambda_1 \lambda_2$, siis

$$\Delta = -a_3^2 S \Longleftrightarrow a_3 = \pm\sqrt{-\frac{\Delta}{S}}.$$

Kumb märk siin valida a_3 jaoks tuleb teha kindlaks mingil täiendaval moel. Paraboloidide kanooniliseks võrrandiks invariantide abil saame

$$\lambda_1 \tilde{x}_1^2 + \lambda_2 \tilde{x}_2^2 \pm 2\sqrt{-\frac{\Delta}{S}}\,\tilde{x}_3 = 0. \tag{26.8}$$

Valemist (26.7) saame $\Delta = 0$, mis ei luba määrata konstanti a. Abiks on pinnatüüpide 9−13 korral aga K, mis on invariant. Kuna $K = a\lambda_1\lambda_2$ ja $S = \lambda_1\lambda_2$, siis $a = \frac{K}{S}$. Seega a on avaldatud invariantide kaudu. Järelikult võrrand

$$\lambda_1\tilde{x}_1^2 + \lambda_2\tilde{x}_2^2 + \frac{K}{S} = 0.$$

on pinnatüüpide 9−13 kanooniliseks võrrandiks invariantide kaudu.

III. Olgu $r = 1$. Sel korral omaväärtustest kaks on nullid. Meil on tähistatud $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$ ja $\lambda_3 \neq 0$. Vaatluse all on pinnatüübid 14−17. Pinnatüübi 14, s.o. paraboolse silindri, kanoonolise võrrandi saame valemist (19.29), milleks on

$$\lambda_3\tilde{x}_3^2 + 2a_1\tilde{x}_1 = 0, \quad a_1 \neq 0. \tag{26.9}$$

Paralleelsete (ühtuvate) tasandipaaride, s.o. pinnatüüpide 14−17, kanoonilised võrrandid saame valemist (19.32), milleks on

$$\lambda_3\tilde{x}_3^2 + a = 0. \tag{26.10}$$

Jääb veel leida konstandid a_1 ja a invariantide kaudu. Valemist (26.9) saame $K = -a_1^2\lambda_3$, millest $a_1 = \pm\sqrt{-\frac{K}{\lambda_3}}$. Ka siin tuleb täpsustada kumb märk valida. Seega paraboolse silindri kanooniline võrrand invariantide kaudu on

$$\lambda_3\tilde{x}_3^2 \pm 2\sqrt{-\frac{K}{\lambda_3}}\tilde{x}_1 = 0. \tag{26.11}$$

Lähtume nüüd valemist (26.10). Tegemist on pinnatüüpidega 15−17. Seega ka $\sigma = \lambda_3$ on invariant. Siit $a = \frac{\sigma}{\lambda_3}$. Seega paralleelsete (ühtuvate) tasandipaaride kanooniliseks võrrandiks on

$$\lambda_3\tilde{x}_3^2 + \frac{\sigma}{\lambda_3} = 0. \tag{26.12}$$

Sellega meie oleme andnud valemid mistahes ristreeperis antud teist järku pinna võrrandit kasutades, kanoonilise võrrandi leidmiseks.

27. TEIST JÄRKU PINNA ASENDI MÄÄRAMINE

Teist järku pinna asendi määramise all mõistame invariantide abil sellise ristreeperi leidmist, milles meie pinna võrrand saavutab kanoonilise kuju. Pinna sellist ristreeperit nimetame tema *kanooniliseks reeperiks.* Pinnal võib olla enam kui üks kanooniline reeper, ilma et tema kanooniline võrrand muutuks. See asjaolu on tingitud pinna sümmeetriatasandite olemasolust.

Eelmises paragrahvis sai seletatud, kuidas invariantide abil leida teist järku pinna võrrandi kanooniline kuju. Kui ka asendi määramise küsimus, s.o. kanoonilise ristreeperi leidmise küsimus, saab lahenduse, siis me võime oma teist järku pinna võrrandi anda mistahes ristreeperis ja me saame kõik teada pinna ehituse kohta. Varem, teises peatükis, oleme uurinud igat tüüpi teist järku pindade ehitust, kui tema võrrand on antud kanoonilises reeperis.

Tegelikult me oskame juba praegugi öelda pea-aegu kõik teist järku pinna kanoonilise ristreeperi leidmise kohta. Kanoonilisse reeperisse kuuluvateks baasivektoriteks tuli võtta meie pinna ruutosa maatriksi normeeritud omavektorid ja reeperi alguspunktiks reeglina pinna keskpunkt, kui viimane (viimased) on olemas. Kui pinnal on mitu keskpunkti, siis reeperi alguspunktiks kõlbab ükskõik milline neist. Seejuures pinna kanooniline võrrand sellest ei sõltu. Tsentraalsetel pindadel on aga ainult üks keskpunkt, mistõttu kanoonilise reeperi alguspunkt määratakse üheselt. Samas märkame, et kanoonilises reeperis baasivektorid ei määrata sugugi üheselt. See tuleb sellest, et omavektorite normeerimisel saadav ühikvektor ei määrata üheselt. Saadakse kaks ühikvektorit− vektor ja ta vastandvektor. Kui pinna kanoonilises võrrandis mingi koordinaat on ruudus, s.o. pinnal on sümmetriatasand, siis on ükskõik kumma normeeritud omavektori kanoonilisse baasi lülitame. Näiteks ellipsoidil seetõttu on kaheksa kanoonilist reeperit.

Eelmises paragrahvis nägime, et teatud määramatus jääb meid kimbutama elliptilise ja hüperboolse paraboloidi ning paraboolse silindri korral. Nende kanoonilised võrrandid sisaldavad esimese astme liidetavat. Meil on selleks koordinaat x_3. Me ei oska paraku seni öelda kumb normeeritud omavektor tuleb valida baasivektoriks $\vec{e}\,'_3$. Sellest sõltub märk pinna võrrandis koordinaati x_3 sisaldava liidetava ees. Samuti me ei oska paika panna kanoonilise reeperi alguspunkti, sest neil kolmel pinnatüübil puudub ju keskpunkt.

Selgitame kõigepealt paraboloidide korral, kuidas kanoonilist reeperit ikkagi leida. Selle leidmise saab jagada kaheks osaks: esiteks baasivektorite leidmine ja teiseks alguspunkti leidmine. Siin me tugineme paragrahvis § 18 toodud pinna võrrandi kordajate teisenemise valemite täpsemale uurimisele.

Olgu paraboloid p mingis ristreeperis $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ antud võrrandiga

$$p: \quad \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j + 2\sum_{i=1}^{3} a_ix_i + a = 0. \tag{27.1}$$

Me peame uuesti läbi analüüsima omaväärtusülesande eeldusel, et kaks omaväärtust on nullist erinevad ja üks on võrdne nulliga. Meie tähistes $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$ ja $\lambda_3 = 0$. Viimased on leitavad karakteristliku võrrandi

$$-\lambda^3 + s\lambda^2 - S\lambda = 0$$

lahendamisel. Siin me oleme arvestanud, et invariant $\delta = 0$. Omavektorite $\vec{s}_k = (s_1^{(k)}, s_2^{(k)}, s_3^{(k)})$ koordinaadid saame kätte homogeensest lineaarvõrrandisüsteemist

$$\begin{aligned}
(a_{11} - \lambda_k)s_1^{(k)} + a_{12}s_2^{(k)} + a_{13}s_3^{(k)} &= 0,\\
a_{21}s_1^{(k)} + (a_{22} - \lambda_k)s_2^{(k)} + a_{23}s_3^{(k)} &= 0,\\
a_{31}s_1^{(k)} + a_{32}s_2^{(k)} + (a_{33} - \lambda_k)s_3^{(k)} &= 0,
\end{aligned} \tag{27.2}$$

kus $k \in \{1, 2, 3\}$. Selle võrrandisüsteemi lahendivektor iga omaväärtuse λ_k korral on määratud kordsuse täpsusega. Kanoonilisse baasi lülitamiseks sobib ainult normeeritud omavektor $\vec{e}\,'_k$, s.o. üks vektoritest

$$\pm\frac{1}{|\vec{s}_k|}\vec{s}_k = (\overline{s}_1^{(k)}, \overline{s}_2^{(k)}, \overline{s}_3^{(k)}).$$

Minnes üle reeperile $\{O; \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3\}$, kus alguspunkt on jäetud muutmata ja baas koosneb normeeritud omavektoritest, paraboloidi võrrand selles reeperis, nagu teame, saab kuju

$$\lambda_1\overline{x}_1^2 + \lambda_2\overline{x}_2^2 + 2\overline{a}_1\overline{x}_1 + 2\overline{a}_2\overline{x}_2 + 2\overline{a}_3\overline{x}_3 + a = 0. \tag{27.3}$$

Siin $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$ ja $\overline{x}_3$ on paraboloidi muutuva punkti X koordinaadid valitud reeperis. Viimases võrrandis vabaliige a polegi teisenud (vt. § 18). Samuti oleme arvestanud, et $\lambda_3 = 0$. Paraboloidide korral $\overline{a}_3 \neq 0$.

Käesoleva juhu eripära seisneb selles, et omaväärtus $\lambda_3 = 0$ ja $\delta = 0$. See omakorda kajastub omavektori $\vec{s}_3 = (s_1^{(3)}, s_2^{(3)}, s_3^{(3)})$ koordinaatides, mis leitakse süsteemist

$$
\begin{aligned}
a_{11}s_1^{(3)} + a_{12}s_2^{(3)} + a_{13}s_3^{(3)} &= 0,\\
a_{21}s_1^{(3)} + a_{22}s_2^{(3)} + a_{23}s_3^{(3)} &= 0,\\
a_{31}s_1^{(3)} + a_{32}s_2^{(3)} + a_{33}s_3^{(3)} &= 0.
\end{aligned}
\tag{27.4}
$$

Viimane on saadud süsteemist (27.2), kui $k = 3$. Süsteemi maatriksiks on meie pinna võrrandi ruutosa maatriks

$$
A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \tag{27.5}
$$

mis on astakuga kaks. Süsteemi (27.4) analüüsimiseks moodustame maatriksi A reavektorid

$$
\vec{a}_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13}), \quad \vec{a}_2 = (a_{21}, a_{22}, a_{23}), \quad \vec{a}_3 = (a_{31}, a_{32}, a_{33}).
$$

Nende abil saab kompaktsemalt panna kirja süsteemi (27.4):

$$
\langle \vec{a}_1, \vec{s}_3 \rangle = 0, \quad \langle \vec{a}_2, \vec{s}_3 \rangle = 0, \quad \langle \vec{a}_3, \vec{s}_3 \rangle = 0,
$$

millest

$$
\vec{a}_1 \perp \vec{s}_3, \quad \vec{a}_2 \perp \vec{s}_3 \quad \vec{a}_3 \perp \vec{s}_3.
$$

Viimane on antav samaväärselt lineaarkatte abil, s.o. $L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) \perp \vec{s}_3$.

Järgnevas moodustame maatriksi A algebraliste täiendite maatriksi $\tilde{A}$. Elemendi a_{ij} algebralist täiendit, nagu tavaliselt, tähistame A_{ij} abil. Seega

$$
\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix},
$$

kus

$$
A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},
$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Moodustame ka maatriksi $\tilde{A}$ reavektorid

$$\vec{A}_1 = (A_{11}, A_{12}, A_{13}), \quad \vec{A}_2 = (A_{21}, A_{22}, A_{23}), \quad \vec{A}_3 = (A_{31}, A_{32}, A_{33}).$$

Huvitav on märgata, et

$$\vec{A}_1 = \vec{a}_2 \times \vec{a}_3, \quad \vec{A}_2 = -\vec{a}_1 \times \vec{a}_3, \quad \vec{A}_3 = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2,$$

millest

$$\vec{A}_1 \perp \vec{a}_2, \ \ \vec{A}_1 \perp \vec{a}_3; \quad \vec{A}_2 \perp \vec{a}_1, \ \ \vec{A}_2 \perp \vec{a}_3; \quad \vec{A}_3 \perp \vec{a}_1, \ \ \vec{A}_3 \perp \vec{a}_2. \qquad (27.6)$$

Kasutades segakorrutamise mõistet, saame lisada veel järgmist:

$$0 = \delta = |A| = \vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3 = \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2 \times \vec{a}_3 \rangle = \langle \vec{a}_1, \vec{A}_1 \rangle \Longleftrightarrow \vec{a}_1 \perp \vec{A}_1,$$

$$0 = \delta = |A| = \vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3 = -\vec{a}_2\vec{a}_1\vec{a}_3 = \langle \vec{a}_2, -\vec{a}_1 \times \vec{a}_3 \rangle = \langle \vec{a}_2, \vec{A}_2 \rangle \Longleftrightarrow \vec{a}_2 \perp \vec{A}_2,$$

$$0 = \delta = |A| = \vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3 = \vec{a}_3\vec{a}_1\vec{a}_2 = \langle \vec{a}_3, \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \rangle = \langle \vec{a}_3, \vec{A}_3 \rangle \Longleftrightarrow \vec{a}_3 \perp \vec{A}_3.$$

Viimasest koos valemiga (27.6) saame

$$\vec{a}_1 \perp \vec{A}_i, \quad \vec{a}_2 \perp \vec{A}_i, \quad \vec{a}_3 \perp \vec{A}_i, \quad i \in \{1, 2, 3\}.$$

Seega $L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) \perp \vec{A}_i$. Eespool on juba saadud $L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) \perp \vec{s}_3$. Neli vektorit $\vec{A}_1$, $\vec{A}_2$, $\vec{A}_3$ ja $\vec{s}_3$ on kahemõõtmelise alamruumi $L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) \subset \mathbf{E}_3$ ortogonaaltäiendi $L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)^{\perp}$, mis on ühemõõtmeline, vektorid. Seega nad on omavahel kollineaarsed. Kuna omavektor ei ole definitsiooni kohaselt nullvektor, siis saame iga vektori $\vec{A}_i$ avaldada omavektori $\vec{s}_3$ kaudu. Seega õige on

$$\vec{A}_1 = t_1\vec{s}_3, \quad \vec{A}_2 = t_2\vec{s}_3, \quad \vec{A}_3 = t_3\vec{s}_3. \qquad (27.7)$$

Nüüd täpsustame, kuidas paraboloidide võrrandis (27.3) nullist erinev kordaja $\overline{a}_3$ avaldub esialgsete kordajate kaudu. Paraboloidide võrrandi (27.3) saamiseks punkti koordinaadid teisenevad valemite

$$\begin{aligned}
x_1 =& s_1^{(1)}\overline{x}_1 + s_1^{(2)}\overline{x}_2 + s_1^{(3)}\overline{x}_3,\\
x_2 =& s_2^{(1)}\overline{x}_1 + + s_2^{(2)}\overline{x}_2 + s_2^{(3)}\overline{x}_3,\\
x_3 =& s_3^{(1)}\overline{x}_1 + + s_3^{(2)}\overline{x}_2 + s_3^{(3)}\overline{x}_3
\end{aligned}$$

abil. Asendades siit paraboloidide võrrandisse (27.1), saame

$$\overline{a}_3 = a_1 s_1^{(3)} + a_2 s_2^{(3)} + a_3 s_3^{(3)}. \tag{27.8}$$

Muudame nüüd osaliselt reeperi alguspunkti, eraldades võrrandis (27.3) välja koordinaatide $\overline{x}_1$ ja $\overline{x}_2$ täisruudud, s.t. viime punkti O punkti O' koordinaatidega $(-\frac{\overline{a}_1}{\lambda_1}, -\frac{\overline{a}_2}{\lambda_2}.0)$. Hiljem võime ju vajaduse korral kolmandat koordinaati täpsustada. Uusi koordinaate tähistame $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$ ja $\tilde{x}_3$ abil. Paraboloidide võrrand (27.3) saab kuju

$$\lambda_1\tilde{x}_1^2 + \lambda_2\tilde{x}_2^2 + 2\overline{a}_3\tilde{x}_3 + \tilde{a} = 0. \tag{27.9}$$

Oluline on märgata, et koordinaadi $\tilde{x}_3$ kordaja ei teisenenud. Sellest võrrandist loeme paraboloidide kohta juba üsna palju välja. Viimane reeper $\{O'; \vec{e}\,'_1, e\,'_2, e\,'_3\}$ on üsna lähedane kanoonilisele reeperile. Selle reeperi alguspunkt on paraboloidi teljel, reeglina küll mitte pinna tippus, mida täpsustame allpool. Keskendume vektori $\vec{e}\,'_3$ suuna täpsustamisele. Selleks lõikame oma paraboloidi (27.9) tasandiga $\tilde{x}_2 = 0$. Seega

$$\left\{\begin{aligned} \lambda_1\tilde{x}_1^2 + \lambda_2\tilde{x}_2^2 + 2\overline{a}_3\tilde{x}_3 + \tilde{a} = 0,\\ \tilde{x}_2 = 0 \end{aligned}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{aligned} \lambda_1\tilde{x}_1^2 + 2\overline{a}_3\tilde{x}_3 + \tilde{a} = 0,\\ \tilde{x}_2 = 0 \end{aligned}\right. .$$

Lõikeks paraboloidi sümmeetriatasandil $\tilde{x}_2 = 0$ on parabool. Tema võrrand on üsna lähedane kanoonilisele võrrandile. Silmas pidades esimeses peatükis esitatud teist järku joonte teooriat, sellest võrrandist näeme, et isemärgiliste λ_1 ja $\overline{a}_3$ korral, s.o. $\lambda_1\overline{a}_3 < 0$ korral on vektor $\vec{e}\,'_3$ suunatud selle parabooli kumeruse suunas, mis sobib ka paraboloidi telje suunaks. Kui aga $\lambda_1\overline{a}_3 > 0$, siis paraboloidi kanoonilise võrrandi saamiseks tuleb kolmas baasivektor asendada vastandvektoriga. Seega järgnevas tuleb hakata uurima

$\lambda_1\overline{a}_3$ märki. Sellisel kujul ei ole see korrutis leitav, sest me ei tea kordajat $\overline{a}_3$. Kui siia asendame valemist (27.8), saame me tublisti parema avaldise:

$$\lambda_1\overline{a}_3 = \lambda_1(a_1 s_1^{(3)} + a_2 s_2^{(3)} + a_3 s_3^{(3)}). \tag{27.10}$$

Selles valemis olevad suurused on kõik arvutatavad lähtevõrrandi (27.1) abil. Tegelikult saab leida veelgi parema valemi baasivektori $\vec{e}\,'_3$ suuna määramiseks. Selleks moodustame abivektori $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ valemiga

$$\vec{b} := -(a_1\vec{A}_1 + a_2\vec{A}_2 + a_3\vec{A}_3).$$

Siin a_1, a_2 ja a_3 on paraboloidi võrrandi (27.1) lineaarosa kordajad. Asendades siia vektorid $\vec{A}_1$, $\vec{A}_2$ ja $\vec{A}_3$, me saame

$$\vec{b} = -(a_1A_{11}+a_2A_{21}+a_3A_{31}, a_1A_{12}+a_2A_{22}+a_3A_{32}, a_1A_{13}+a_2A_{23}+a_3A_{33}),$$

millest

$$\vec{b} = \left(-\begin{vmatrix} a_1 & a_{12} & a_{13} \\ a_2 & a_{22} & a_{23} \\ a_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_{11} & a_1 & a_{13} \\ a_{21} & a_2 & a_{23} \\ a_{31} & a_3 & a_{33} \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_3 \end{vmatrix} \right). \tag{27.11}$$

Selle vektori $\vec{b}$ koordinaadid on invariandi

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a \end{vmatrix}$$

neljanda rea elementide a_1, a_2 ja a_3 algebraklised täiendid. Samuti on oluline märgata, et vektor $\vec{b}$ ei ole nullvektor, sest vastasel juhul saaksime

$$\Delta = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a\delta = a_10 + a_20 + a_30 + a0 = 0.$$

See on lubamatu, sest paraboloidide korral $\Delta \neq 0$. Valemi (27.7) abil saame vektorile $\vec{b}$ anda kuju $\vec{b} = -(a_1t_1 + a_2t_2 + a_3t_3)\vec{s}_3$. Järelikult tegemist on omaväärtusele $\lambda_3 = 0$ vastava konkreetse omavektoriga $\vec{b}$, mille koordinaadid saame arvutada vahetult paraboloidi võrrandi kordajate abil valemiga

(27.11). Võtame vektoriga $\vec{b}$ samasuunalise ühikvektori kolmandaks baasivektoriks $\vec{e}\,'_3$. Seega $\vec{e}\,'_3 = \frac{1}{|\vec{b}|}\vec{b}$ ehk koordinaatides $s_i^{(3)} = \frac{1}{|\vec{b}|}b_i$. Seetõttu (27.10) on samaväärne valemiga

$$\lambda_1 \bar{a}_3 = \lambda_1 \frac{1}{|\vec{b}|}(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) = \lambda_1 \frac{1}{|\vec{b}|}\Delta. \tag{27.12}$$

Siin me arvestasime, et

$$\Delta = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a\delta = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Saadud valem (27.12) on väga sobiv paraboloidi telje suuna määramiseks. Selleks on vektori $\vec{e}\,'_3 = \frac{1}{|\vec{b}|}\vec{b}$ suund, kui $\lambda_1 \bar{a}_3 < 0$, nagu oleme eespool näidanud. Kuna

$$\lambda_1 \bar{a}_3 < 0 \Longleftrightarrow \lambda_1 \frac{1}{|\vec{b}|}\Delta < 0 \Longleftrightarrow \lambda_1 \Delta < 0,$$

siis võime öelda järelikult ka nii: *vektori $\vec{b}$ suund on paraboloidi telje suund, kui $\lambda_1 \Delta < 0$. Kui $\lambda_1 \Delta > 0$, siis paraboloidi telje suunaks on $-\vec{b}$.*

Anname nüüd valemid paraboloidi tipu koordinaatide leidmiseks. Sinna tuleb viia kanoonilise reeperi alguspunkt. Nende leidmiseks saab kasutada pinna puutujatasandi mõistet. Paraboloidi punkti $M(m_1, m_2, m_3)$ korral

$$M \in p \Longleftrightarrow \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} m_i m_j + 2\sum_{i=1}^{3} a_i m_i + a = 0. \tag{27.13}$$

Punktis $M(m_1, m_2, m_3)$ puutujatasandi võrrandi annab valem (23.7). Meid huvitab tegelikult tema normaalvektori $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ koordinaadid. Sellest valemist saame

$$\begin{aligned} n_1 &= a_{11} m_1 + a_{12} m_2 + a_{13} m_3 + a_1, \\ n_2 &= a_{21} m_1 + a_{22} m_2 + a_{23} m_3 + a_2, \\ n_3 &= a_{31} m_1 + a_{32} m_2 + a_{33} m_3 + a_3. \end{aligned} \tag{27.14}$$

Ilmselt punkt $M(m_1, m_2, m_3)$ on paraboloidi tipp, kui puutujatasand on risti paraboloidi teljega, s.o. normaalvektor $\vec{n}$ on kollineaarne omaväärtusele $\lambda_3 = 0$ vastava omavektoriga $\vec{s}_3 = (s_1^{(3)}, s_2^{(3)}, s_3^{(3)})$. Seega paraboloidi tipu koordinaadid saame tingimusest (27.14), millele tuleb lisada kolm kollineaarsuse tingimust

$$n_1 = ts_1^{(3)}, \quad n_2 = ts_2^{(3)}, \quad n_3 = ts_3^{(3)}, \quad t \neq 0$$

ehk samaväärselt

$$\begin{aligned} a_{11}m_1 + a_{12}m_2 + a_{13}m_3 + a_1 &= ts_1^{(3)}, \\ a_{21}m_1 + a_{22}m_2 + a_{23}m_3 + a_2 &= ts_2^{(3)}, \\ a_{31}m_1 + a_{32}m_2 + a_{33}m_3 + a_3 &= ts_3^{(3)}. \end{aligned} \tag{27.15}$$

Nagu juba öeldud, otsitavateks on paraboloidi tipu koordinaadid m_1, m_2 ja m_3. Paraku on lisandunud veel neljas tundmatu – parameeter t. Viimase peab nii valima, et tundmatute m_1, m_2 ja m_3. suhtes mittehomogeenne süsteem (27.15) omaks lahendit, s.o. kehtiks Kroneckeri -Capelli teoreem. Kuna süsteemi maatriksi astak on 2, siis selles süsteemis sobiva t korral olulisi võrrandeid on 2. Kolmandaks võrrandiks tuleb lisada (27.13), sest punkt M peab asuma ju paraboloidil. Viimane küll kahjuks ei ole lineaaarne. Leiame nüüd süsteemi (27.15) abil parameetri t, tehes küll seda üsna formaalselt. Korrutame jutuks oleva süsteemi võrrandeid järgimööda omavektori $\vec{s}_3$ koordinaatidega ja liidame seejärel kokku. Saame

$$(a_{11}m_1 + a_{12}m_2 + a_{13}m_3 + a_1)s_1^{(3)} + (a_{21}m_1 + a_{22}m_2 + a_{23}m_3 + a_2)s_2^{(3)} +$$

$$+(a_{31}m_1 + a_{32}m_2 + a_{33}m_3 + a_3)s_3^{(3)} = [(s_1^{(3)})^2 + (s_2^{(3)})^2 + (s_3^{(3)})^2]t.$$

Korrastame viimast punkti M koordinaatide järgi. Saame

$$(a_{11}s_1^{(3)} + a_{21}s_2^{(3)} + a_{31}s_3^{(3)})m_1 + (a_{12}s_1^{(3)} + a_{22}s_2^{(3)} + a_{32}s_3^{(3)})m_2 +$$

$$(a_{13}s_1^{(3)} + a_{23}s_2^{(3)} + a_{33}s_3^{(3)})m_3 + (a_1s_1^{(3)} + a_2s_2^{(3)} + a_3s_3^{(3)}) =$$

$$= [(s_1^{(3)})^2 + (s_2^{(3)})^2 + (s_3^{(3)})^2]t.$$

Kuna m_1, m_2 ja m_3 kordajad on võrdsed nulliga, siis

$$[(s_1^{(3)})^2 + (s_2^{(3)})^2 + (s_3^{(3)})^2]t = a_1s_1^{(3)} + a_2s_2^{(3)} + a_3s_3^{(3)},$$

millest saamegi parameetriks

$$t = \frac{a_1 s_1^{(3)} + a_2 s_2^{(3)} + a_3 s_3^{(3)}}{(s_1^{(3)})^2 + (s_2^{(3)})^2 + (s_3^{(3)})^2}. \qquad (27.16)$$

Asendades siit süsteemi (27.15) ja lahendades koos võrrandiga (27.13), saamegi paraboloidi tipu koordinaadid. Osutub, et selle süsteemi viimast võrrandit (27.13) saab kolme esimese võrrandi (27.15) abil lihtsustada. Selleks kirjutame võrrandi (27.13)

$$a_{11}m_1^2 + a_{22}m_2^2 + a_{33}m_3^2 + 2a_{12}m_1m_2 + 2a_{13}m_1m_3 + 2a_{23}m_2m_3 +$$

$$+2a_1m_1 + 2a_2m_2 + 2a_3m_3 + a = 0$$

järgmiselt

$$(a_{11}m_1 + a_{12}m_2 + a_{13}m_3 + a_1)m_1 + (a_{21}m_1 + a_{22}m_2 + a_{23}m_3 + a_2)m_2 +$$

$$+(a_{31}m_1 + a_{32}m_2 + a_{33}m_3 + a_3)m_3 + (a_1m_1 + a_2m_2 + a_3m_3 + a) = 0.$$

Siin suluavaldised saame asendada oma süsteemi kolmest esimesest võrrandist. Saame

$$[s_1^{(3)}m_1 + s_2^{(3)}m_2 + s_3^{(3)}m_3]t + (a_1m_1 + a_2m_2 + a_3m_3 + a) = 0.$$

Seega paraboloidi tipu koordinaadid saame süsteemi

$$\begin{aligned} a_{11}m_1 + a_{12}m_2 + a_{13}m_3 &= ts_1^{(3)} - a_1, \\ a_{21}m_1 + a_{22}m_2 + a_{23}m_3 &= ts_2^{(3)} - a_2, \\ a_{31}m_1 + a_{32}m_2 + a_{33}m_3 &= ts_3^{(3)} - a_3, \\ a_1m_1 + a_2m_2 + a_3m_3 + a &= -t[s_1^{(3)}m_1 + s_2^{(3)}m_2 + s_3^{(3)}m_3] \end{aligned} \qquad (27.17)$$

lahendamisel, eelnevalt valemist (27.16) asendades parameetri t. Sellega on kirjeldatud, kuidas leida paraboloidide korral tema kanooniline reeper.

Lõpuks selgitame paraboolse silindri korral kanoonilise reeperi leidmist. Eelnevalt meenutame, et paraboolse silindri enda ehitust on uuritud teises peatükis § 15. Sealt me teame, et paraboolne silinder on teatav paralleelsete sirgete parv, seejuures selliste, mille lõikamisel mistahes ristuva tasandiga, tekib parabool. Lõigates aga kõigi selliste omavahel paralleelsete tasanditega, tekib lõikeparaboolide parv. Paraboolne silinder on vaadeldav ka nende paraboolide parvena. Nende paraboolide omavahel paralleelsetest sümmeetriatelgedest ladestub meie paraboolse silindri sümmeetriatasand. See tasand lõikab paraboolset silindrit mööda sirgjoonelist moodustajat, mis koosneb jutuks olevate paraboolide tippudest. Viidatud paragrahvi kohaselt saame öelda, et paraboolse silindri kanoonilise reeperi alguspunktiks kõlbab iga lõikeparabooli tipp. Järelikult kanoonilise reeperi alguspunkt ei määrata üheselt. Esimene baasivektor $\vec{e}\,'_1$ on valitud alguspunktist lõikeparabooli telge mööda tema harude vahele, teine baasivektor $\vec{e}\,'_2$ on aga alguspunkti läbiva sirgjoonelise moodustaja sihivektor ja kolmas baasivektor $\vec{e}\,'_3$ on paraboolse silindri sümmeetriatasandi normaalvektor. Kõik need vektorid on muidugi ühikvektorid. Hakkame nüüd selgitama paraboolse silindri kanoonilise reeperi leidmist. Meie silindri korral võrrandi (27.1) ruutosa maatriksi (27.5) astak $rankA = 1$. Tabelist 2 juhu 8 alt saame invariantideks $\delta = 0$, $\Delta = 0$, $S = 0$ ja $K \neq 0$. Karakteristlikust võrrandist $\lambda^3 - s\lambda^2 = 0$ näeme, et kaks omaväärtust on nullid ja kolmas on nullist erinev. Tähistame järgnevas kanoonilist reeperit $\{O'; \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3\}$. Sellesse reeperisse kuuluvad baasivektorid saame põhimõtteliselt avaldada baasivektorite $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ kaudu kujul

$$\begin{aligned}
\vec{e}\,'_1 &= s_1^{(1)}\vec{e}_1 + s_2^{(1)}\vec{e}_2 + s_3^{(1)}\vec{e}_3,\\
\vec{e}\,'_2 &= s_1^{(2)}\vec{e}_1 + s_2^{(2)}\vec{e}_2 + s_3^{(2)}\vec{e}_3,\\
\vec{e}\,'_3 &= s_1^{(3)}\vec{e}_1 + s_2^{(3)}\vec{e}_2 + s_3^{(3)}\vec{e}_3.
\end{aligned} \tag{27.18}$$

Siin baasiteisenduse maatriks

$$C = \begin{pmatrix} s_1^{(1)} & s_1^{(2)} & s_1^{(3)} \\ s_2^{(1)} & s_2^{(2)} & s_2^{(3)} \\ s_3^{(1)} & s_3^{(2)} & s_3^{(3)} \end{pmatrix}$$

on ortogonaalmaatriks. Tema pöördmaatriks on seetõttu

$$C^{-1} = C^{\top} = \begin{pmatrix} s_1^{(1)} & s_2^{(1)} & s_3^{(1)} \\ s_1^{(2)} & s_2^{(2)} & s_3^{(2)} \\ s_1^{(3)} & s_2^{(3)} & s_3^{(3)} \end{pmatrix}.$$

Reeperiteisendust

$$\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \longrightarrow \{O'; \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3\}$$

on ülevaatlikum sooritada kahes etapis

$$\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \longrightarrow \ \{O; \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3\} \longrightarrow \{O'; \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3\}.$$

Muutuva punkti X koordinaate tähistame lähtereeperis x_1, x_2, x_3 , teises vahepealses reeperis $x\,'_1, x\,'_2, x\,'_3$ ja lõppreeperis $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3$ abil. Esimesel sammul paraboolse silindri võrrandi (27.1) ruutosa maatriks A läheb kanoonilisele kujule, mille diagonaalil on karakteristliku võrrandi $\lambda^2(\lambda - s) = 0$ lahendid $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ja $\lambda_3 = s$. Meenutame, et $s = a_{11} + a_{22} + a_{33}$. Paraboolse silindri võrrand vahepealses reeperis saab kuju

$$s(x\,'_3)^2 + 2a\,'_1 x\,'_1 + 2a\,'_3 x\,'_3 + a = 0. \tag{27.19}$$

Viimases $a\,'_2 = 0$, mida on varem selgitatud valemiga (19.27). Valemit (18.12) kasutades, saame öelda, et siin

$$a\,'_k = s_1^{(k)} a_1 + s_2^{(k)} a_2 + s_3^{(k)} a_3, \quad k \in \{1.2, 3\}.$$

Kujutame nüüd ette, et läheme esialgsesse ristreeperisse tagasi. Maatriksi $C^\top$ abil saame

$$x\,'_k = s_1^{(k)} x_1 + s_2^{(k)} x_2 + s_3^{(k)} x_3, \quad k \in \{1.2, 3\}.$$

Asendades siit paraboolse silindri võrrandisse (27.19), saame pinna võrrandile järgmise kuju esialgsetes koordinaatides

$$s(s_1^{(3)} x_1 + s_2^{(3)} x_2 + s_3^{(3)} x_3)^2 + 2(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3) + a = 0$$

ehk samaväärselt

$$\mathrm{sign}(s)(\sqrt{|s|} s_1^{(3)} x_1 + \sqrt{|s|} s_2^{(3)} x_2 + \sqrt{|s|} s_3^{(3)} x_3)^2 + 2(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3) + a = 0.$$

Siin sign on signum-funktsioon, mjs defineeritakse valemiga

$$\mathrm{sign}(x) := \begin{cases} 1, \text{ kui } x > 0, \\ 0, \text{ kui } x = 0, \\ -1, \text{ kui } x < 0. \end{cases}$$

Me oleme tõestanud järgmise teoreemi.

Teoreem 27.1. *Paraboolse silindri võrrandi ruutosa on märgi täpsuseni täisruut, s.o.*

$$a_{ij}x_ix_j = \operatorname{sign}(s)\,(\sqrt{|s|}s_1^{(3)}x_1 + \sqrt{|s|}s_2^{(3)}x_2 + \sqrt{|s|}s_3^{(3)}x_3)^2.$$

Tähistame $h_k := \sqrt{|s|}s_k^{(3)}$, kus $k \in \{1, 2, 3\}$. Paraboolse silindri võrrandile saame kuju

$$\operatorname{sign}(s)(h_1x_1 + h_2x_2 + h_3x_3)^2 + 2(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3) + a = 0. \quad (27.20)$$

Selle kuju leidmine on imelihtne. Kordajad h_1, h_2 ja h_3 avalduvad lähtevõrrandi ruutosa kordajate a_{ij} kaudu. Seega neid tuleb vaadelda kui teadaolevaid.

Pöördume tagasi võrrandi (27.19) juurde. Paraboolse silindri kanoonilise reeperi saamiseks tuleb panna paika reeperi alguspunkt O'. Tähistame tema koordinaate c_1, c_2 ja c_3 abil. Koordinaatide teisenemisvalemiteks on $x'_k = \overline{x}_k + c_k$. Asendades siit paraboolse silindri võrrandisse (27.19), peame saama

$$s(\overline{x}_3)^2 + 2\overline{a}_1\overline{x}_1 = 0. \quad (27.21).$$

Kordajad $\overline{a}_2, \overline{a}_3$ ja $\overline{a}$ lähevad nulliks. Veel paneme tähele, et $\overline{a}_1 = a'_1$. Valemist (27.21) saame kanoonilise võrrandi

$$(\overline{x}_3)^2 = 2p\overline{x}_1.$$

Siin $p = -\frac{\overline{a}_1}{s}$ peab olema positiivne. Selle tingimuse olla positiivne saame esitada sobivamal kujul. Nimelt

$$p > 0 \iff \frac{\overline{a}_1}{s} < 0 \iff \frac{a'_1}{s} < 0 \iff sa'_1 < 0 \iff$$

$$\iff s(s_1^{(1)}a_1 + s_2^{(1)}a_2 + s_3^{(1)}a_3) < 0 \iff$$

$$\iff \operatorname{sign}(s)\,|s|(s_1^{(1)}a_1 + s_2^{(1)}a_2 + s_3^{(1)}a_3) < 0 \iff$$

$$\iff \operatorname{sign}(s)\,(s_1^{(1)}a_1 + s_2^{(1)}a_2 + s_3^{(1)}a_3) < 0. \quad (27.22)$$

Defineerides vektori $\vec{a} := (a_1, a_2, a_3)$ ja arvestades valemitest (27.18) esimest, saame (27.22) esitada skalaarkorrutise abil. Me saame

$$\operatorname{sign}(s)\, \langle \vec{e}\,'_1, \vec{a} \rangle < 0. \tag{27.23}$$

See on tingimus, mida me allpool kasutame kanoonilise reeperi sellise esimese baasivektori konstrueerimiseks, mis on suunatud lõikeparabooli sisemusse.

Asume paraboolse silindri kanoolilist reeperit konstrueerima. Esitame paraboolse silindri võrrandi kujul (27.20). Viimase abil moodustame kahe tasandi võrrandid:

$$\pi_1 : h_1x_1 + h_2x_2 + h_3x_3 = 0, \quad \pi_2 : 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + 2a_3x_3 + a = 0.$$

Nende tasandite lõikejoon $\pi_1 \cap \pi_2$ on muidugi sirge. Selle sirge iga punkt $X(x_1, x_2, x_3)$ asub ka paraboolsel silindril, sest koordinaadid rahuldavad paraboolse silindri võrrandit (27.20), siis lõikejoon $\pi_1 \cap \pi_2$ on paraboolsel silindril, seega on tema sirgjooneline moodustaja. Püüame selgitada tasandite π_1 ja π_2 asendit. Meenutuseks $h_k = \sqrt{|s|}s_k^{(3)}$, kus $k \in \{1, 2, 3\}$. Seega tasandi π_1 normaalvektor $\vec{h} = (h_1, h_2, h_3)$ on kollineaarne kanoonilise reeperi kolmanda baasivektoriga. Järelikult tasand π_1 on paraleelne paraboolse silindri sümmeetriatasandiga. Osutub, et tasand π_2 on paraboolse silindri puutujatasand, mis puutub pinnaga mööda sirgjoonelist moodustajat $\pi_1 \cap \pi_2$. Tõepoolest. Olgu punkt $M(m_1, m_2, m_3)$ sirgjoonelise moodustaja $\pi_1 \cap \pi_2$ punkt, mistõttu

$$h_1m_1 + h_2m_2 + h_3m_3 = 0, \quad 2a_1m_1 + 2a_2m_2 + 2a_3m_3 + a = 0. \tag{27.24}$$

Puutujatasandi võrrandiks punktis M valemi (23.8) kohaselt on

$$\begin{aligned} &[h_1(h_1m_1 + h_2m_2 + h_3m_3)\operatorname{sign}(s) + a_1]x_1 + \\ +&[h_2(h_1m_1 + h_2m_2 + h_3m_3)\operatorname{sign}(s) + a_2]x_2 + \\ +&[h_3(h_1m_1 + h_2m_2 + h_3m_3)\operatorname{sign}(s) + a_3]x_3 + \\ &+(a_1m_1 + a_2m_2 + a_3m_3 + a) = 0, \end{aligned} \tag{27.25}$$

millest (27.24) abil puutujatasandi võrrandiks saame

$$2a_1x_1 + 2a_2x_2 + 2a_3x_3 + a = 0.$$

Saime tasandi π_2 võrrandi.

Sirgjoonelise moodustaja $\pi_1 \cap \pi_2$ sihivektor on tasandite π_1 ja π_2 normaalvektorite $\vec{h}$ ja $\vec{a}$ vektorkorrutis $\vec{h} \times \vec{a}$. Normeerituna saame viimasest kanoonilise reeperi teise baasivektori

$$\vec{e}\,'_2 = \frac{1}{|\vec{h} \times \vec{a}|} \vec{h} \times \vec{a}. \tag{27.26}$$

Seega kanoonilise reeperi teine baasivektor on leitud.

Püüame järgnevas leida sellise tasandi $\overline{\pi}_1$, mis on paraboolse silindri sümmeetriatasand. Otsitav tasand on paralleelne tasandiga π_1. Seega tasandi $\overline{\pi}_1$ võrrandit tuleb otsida kujul

$$\overline{\pi}_1 : h_1x_1 + h_2x_2 + h_3x_3 + t = 0.$$

Leiame vabaliikme t. Lähtume paraboolse silindri võrrandist (27.20), kirjutades selle veidi teisel kujul

$$\begin{aligned} &\operatorname{sign}(s)\,(h_1x_1 + h_2x_2 + h_3x_3 + t)^2 + \\ &+2(a_1 - \operatorname{sign}(s)\,h_1t)x_1 + 2(a_2 - \operatorname{sign}(s)\,h_2t)x_2 + \\ &+2(a_3 - \operatorname{sign}(s)\,h_3t)x_3 + (a - \operatorname{sign}(s)\,t^2) = 0. \end{aligned} \tag{27.27}$$

Nii nagu eespool moodustame kaks tasandit võrranditega

$$\begin{aligned} &\overline{\pi}_1 : h_1x_1 + h_2x_2 + h_3x_3 + t = 0, \\ &\overline{\pi}_2 : 2(a_1 - \operatorname{sign}(s)\,h_1t)x_1 + 2(a_2 - \operatorname{sign}(s)\,h_2t)x_2 + \\ &\quad + 2(a_3 - \operatorname{sign}(s)\,h_3t)x_3 + (a - \operatorname{sign}(s)\,t^2) = 0. \end{aligned} \tag{27.28}$$

Muuseas, kui tasandite $\overline{\pi}_1$ ja $\overline{\pi}_2$ võrrandites võtta $t = 0$, siis peame saama tasandite π_1 ja π_2 võrrandid. Nii ka on. Viimaste tasandite (27.27) lõikejooneks $\overline{\pi}_1 \cap \overline{\pi}_2$ on ka siin sirge, mis asub paraboolsel silindril. Seega on tegemist tema sirgjoonelise moodustajaga. Kui parameeter t muutub reaalarvude hulgas, siis saame kätte kõik sirgjoonelised moodustajad. Me otsime ainult ühte, mis on lõikeparaboolide tippudest moodustuv sirgjooneline moodustaja. Leiame tingimuse, kuidas leida parameeter t, et tasand $\overline{\pi}_1$ oleks sümmeetriatasand. Kui sirgjoonelisel moodustajal $\overline{\pi}_1 \cap \overline{\pi}_2$ võtta mistases punkt $M(m_1, m_2, m_3)$, siis saame leida puutujatasandi $p(M)$ puutepunktiga

$M(m_1, m_2, m_3)$. Tegelikult puutepunkte on siin rohkem kui võetud punkt $M(m_1, m_2, m_3)$. Nendeks on punkti $M(m_1.m_2, m_3)$ läbiva sirgjoonelise moodustaja kõik punktid. Tasand $\overline{\pi}_1$ on paraboolse silindri sümmeetriatasand, kui ta on risti puutujatasandiga $p(M)$. See tähendab, et nende normaalvektorite skalaarkorrutis peab olema null. See tingimus sisaldab otsitavat parameetrit t, kust me saame ta leida. Teeme teoks öeldu. Kõigepealt tuleb leida puutujatasandi $p(M)$ võrrand. Selleks on võrrand (27.25) lisatingimustega $M(m_1, m_2, m_3) \in \overline{\pi}_1$ ja $M(m_1, m_2, m_3) \in \overline{\pi}_2$. Seega

$$\begin{aligned}
&h_1 m_1 + h_2 m_2 + h_3 m_3 + t = 0,\\
&2(a_1 - \operatorname{sign}(s)\, h_1 t)m_1 + 2(a_2 - \operatorname{sign}(s)\, h_2 t)m_2 +\\
&+ 2(a_3 - \operatorname{sign}(s)\, h_3 t)m_3 + (a - \operatorname{sign}(s)\, t^2) = 0,
\end{aligned}$$

millest

$$\begin{aligned}
h_1 m_1 + &h_2 m_2 + h_3 m_3 + t = 0,\\
2(a_1 m_1 + a_2 m_2 + &a_3 m_3) + (a + \operatorname{sign}(s)\, t^2) = 0.
\end{aligned} \tag{27.29}$$

Viimaste abil saame puutujatasandi võrrandit (27.25) lihtsustada,saades

$$2(a_1 - \operatorname{sign}(s) h_1 t)x_1 + 2(a_1 - \operatorname{sign}(s) h_1 t)x_1 + 2(a_1 - \operatorname{sign}(s) h_1 t)x_1 +$$
$$+(a - \operatorname{sign}(s)\, t^2) = 0.$$

Näeme, et puutujatasandiks $p(M)$ on tasand $\overline{\pi}_2$. Tasandite $\overline{\pi}_1$ ja $\overline{\pi}_2$ normaalvektoriteks on vastavalt $\vec{h}$ ja $\vec{k} := \vec{a} - \operatorname{sign}(s)\, t\vec{h}$. Nüüd on lihtne kirja panna võrrand parameetri t määramiseks. Saame

$$\overline{\pi}_1 \perp p(M) \iff \vec{h} \perp \vec{k} \iff \langle \vec{h}, \vec{k} \rangle = 0 \iff$$
$$\iff \langle \vec{h}, \vec{a} - \operatorname{sign}(s)\, t\vec{h} \rangle = 0 \iff \langle \vec{h}, \vec{a} \rangle - \operatorname{sign}(s) |\vec{h}|^2 = 0,$$

millest

$$t = \operatorname{sign}(s)\, \frac{\langle \vec{h}, \vec{a} \rangle}{|\vec{h}|^2}.$$

Asendades siit t valemitesse (27.29), saame

$$\begin{aligned}
h_1 x_1 + h_2 x_2 + h_3 x_3 + \operatorname{sign}(s)\, \frac{\langle \vec{h}, \vec{a} \rangle}{|\vec{h}|^2} &= 0,\\
2(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3) + (a + \frac{\langle \vec{h}, \vec{a} \rangle^2}{|\vec{h}|^4}) &= 0.
\end{aligned} \tag{27.30}$$

See võrrandisüsteem määrab paraboolse silindri lõikeparaboolide tippudest koosneva sirgjoonelise moodustaja muutuva punkti $X(x_1, x_2, x_3)$ koordinaadid. Leides siit mistahes konkreetse punkti koordinaadid, oleme leidnud kanoonilise reeperi alguspunkti O'. Asendame nüüd leitud t võrranditesse (27.28). Saame

$$\begin{aligned} \overline{\pi}_1 &: h_1x_1 + h_2x_2 + h_3x_3 + \operatorname{sign}(s)\,\frac{\langle\vec{h},\vec{a}\rangle}{|\vec{h}|^2} = 0, \\ \overline{\pi}_2 &: 2(a_1 - \frac{\langle\vec{h},\vec{a}\rangle}{|\vec{h}|^2}h_1)x_1 + 2(a_2 - \frac{\langle\vec{h},\vec{a}\rangle}{|\vec{h}|^2}h_2)x_2 + \\ &+ 2(a_3 - \frac{\langle\vec{h},\vec{a}\rangle}{|\vec{h}|^2}h_3)x_3 + (a - \frac{\langle\vec{h},\vec{a}\rangle^2}{|\vec{h}|^4}) = 0. \end{aligned}$$

Siin tasandi $\overline{\pi}_1$ võrrand määrab paraboolse silindri sümmeetriatasandi ja tasandi $\overline{\pi}_2$ võrrand aga eelmise tasandiga ristuva puutujatasandi. Nende tasandite normaalvektorite $\vec{h}$ ja $\vec{k} = \vec{a} - \frac{\langle\vec{h},\vec{a}\rangle}{|\vec{h}|^2}\vec{h}$ abil saame leida kanoonilise reeperi puuduvad vektorid $\vec{e}\,'_3$ ja $\vec{e}\,'_1$, mis on kollineaarsed vastavalt vektoritega $\vec{h}$ ja $\vec{k}$. Kuna vektoriks $\vec{e}\,'_3$ kõlbab normeeritud vektor $\vec{h}$ või normeeritud vastandvektor, siis võime võtta

$$\vec{e}\,'_3 = \frac{1}{|\vec{h}|}\vec{h}. \qquad (27.31).$$

Vektoriks $\vec{e}\,'_1$ kõlbab üks vektoritest $\frac{1}{|\vec{k}|}\vec{k}$ või -$\frac{1}{|\vec{k}|}\vec{k}$ ehk lühidalt $\frac{\epsilon}{|\vec{k}|}\vec{k}$, kus ϵ on $+1$ või -1. Seega $\vec{e}\,'_1 = \frac{\epsilon}{|\vec{k}|}\vec{k}$. Teguri ϵ määrame valemi (27.23) abil. Viimase abil saame

$$\begin{aligned} &\operatorname{sign}(s)\,\langle\vec{e}\,'_1,\vec{a}\rangle < 0 \Longleftrightarrow \operatorname{sign}(s)\,\frac{\epsilon}{|\vec{k}|}\langle\vec{k},\vec{a}\rangle < 0 \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \epsilon\,\operatorname{sign}(s)\,\langle\vec{k},\vec{a}\rangle < 0. \qquad (27.32). \end{aligned}$$

Kuna $\operatorname{sign}(s)\,\langle\vec{k},\vec{a}\rangle$ on leitav paraboolse silindri võrrandi kordajate kaudu, siis saame määrata kordaja ϵ, et kektiks võrratus (27.32). Edasi saame leida

$$\vec{e}\,'_1 = \frac{\epsilon}{|\vec{k}|}\vec{k}. \qquad (27.33),$$

kus

$$\vec{k} = \vec{a} - \frac{\langle \vec{h}, \vec{a} \rangle}{|\vec{h}|^2} \vec{h}. \tag{27.34}$$

Sellega paraboolse silindri kanooniline reeper on konstrueeritud.

Järgmises paragrahvis on toodud rida näiteid kuidas leida erinevate pindade korral tema kanoonilist reeperit.

28. PINNA KANOONILISE VÕRRANDI JA KANOONILISE REEPERI LEIDMINE INVARIANTIDE ABIL

(näited)

Vaadeldavates näidetes on meil pinna võrrand antud mingis ristreeperis

$$\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}. \tag{28.1}$$

Muutuva punkti X koordinaate selles ristreeperis tähistame aga x_1, x_2, x_3 abil. Pinna kanoonilist ristreeperit tähistame aga

$$\{O'; \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3\} \tag{28.2}$$

abil. Punkti X koordinaate selles ristreeperis $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3$ abil.

Näide 1. Olgu pind mingis ristreeperis (28.1) antud võrrandiga

$$x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3 - 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 0.$$

Määrata invariantide abil pinna tüüp, leida kanooniline reeper ja kanooniline võrrand selles reeperis.

Lahendus. Pinna invariandid on

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -36, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 36,$$

$$K = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -20,$$

$$S = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 0, \quad s = 1 + 5 + 1 = 7.$$

Kuna $s\delta = -256 \leq 0$, $\quad S = -20 \leq 0$, $\quad \Delta = 36 > 0$, siis tabelist 1 saame, et pinnaks on *ühekatteline hüperboloid.*

Leiame kanoonilise reeperi. Kuna $\delta \neq 0$, siis on tegemist tsentraalse pinnaga. Seetõttu kanoonilise reeperi alguspunktiks on pinna keskpunkt. Viimane tuleb valemi (21.2) kohaselt leida võrrandisüsteemist

$$x_1 + x_2 + 3x_3 + 1 = 0,$$
$$x_1 + 5x_2 + x_3 - 3 = 0,$$
$$3x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0.$$

Selle süsteemi lahendamisel, näiteks Gaussi meetodiga, saame keskpunkti koordinaatideks $x_1 = -\frac{1}{3}, x_2 = -\frac{2}{3}$ ja $x_3 = \frac{2}{3}$. Seega kanoonilise reeperi alguspunktiks on $O'(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$. Kanoniseeritud reeperi baasivektoriteks on pinna ruutosa maatriksi A normeeritud omavektorid. Kõigepealt tuleb leida omaväärtused karakteristlikust võrrandist

$$\lambda^3 - s\lambda^2 + S\lambda - \delta = 0 \Longrightarrow \lambda^3 - 7\lambda^2 + 36 = 0.$$

Proovimise teel üheks omaväärtuseks on (võtame kolmandaks) $\lambda_3 = -2$. Kuna

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 36 = (\lambda + 2)(\lambda^2 - 9\lambda + 18),$$

siis ülejäänud kaks omaväärtust saame ruutvõrrandi $\lambda^2 - 9\lambda + 18 = 0$ lahenditena, milleks on $\lambda_1 = 3$ ja $\lambda_2 = 6$.

Omaväärtusele λ_k vastava omavektori $\vec{s}_k$ koordinaadid $s_1^{(k)}, s_2^{(k)}$ ja $s_3^{(k)}$ tuleb leida võrrandisüsteemist (27.2):

$$\begin{aligned}
(a_{11} - \lambda_k)s_1^{(k)} + a_{12}s_2^{(k)} + a_{13}s_3^{(k)} &= 0,\\
a_{21}s_1^{(k)} + (a_{22} - \lambda_k)s_2^{(k)} + a_{23}s_3^{(k)} &= 0,\\
a_{31}s_1^{(k)} + a_{32}s_2^{(k)} + (a_{33} - \lambda_k)s_3^{(k)} &= 0.
\end{aligned}$$

Meie näite korral omaväärtusele $\lambda_1 = 3$ vastava omavektori $\vec{s}_1$ koordinaatide $s_1^{(1)}, s_2^{(1)}$ ja $s_3^{(1)}$ leidmiseks tuleb lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{aligned}
-2s_1^{(1)} + s_2^{(1)} + 3s_3^{(1)} &= 0,\\
s_1^{(1)} + 2s_2^{(1)} + s_3^{(1)} &= 0,\\
3s_1^{(1)} + s_2^{(1)} - 2s_3^{(1)} &= 0,
\end{aligned}$$

mille lahendamisel saame $s_1^{(1)} = s_3^{(1)}$ ja $s_2^{(1)} = -s_3^{(1)}$. Fikseerides sobivalt vaba tundmatu $s_3^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, saame $s_1^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ja $s_2^{(1)} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Kuna saadud omavektor $\vec{s}_1 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ on juba normeeritud, siis kanoonilise reeperi esimeseks baasivektoriks on

$$\vec{e}\,'_1 = \Big(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\Big).$$

Omaväärtusele $\lambda_2 = 6$ vastava omavektori $\vec{s}_2$ koordinaatide $s_1^{(2)}, s_2^{(2)}$ ja $s_3^{(2)}$ leidmiseks tuleb aga lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{aligned} -5s_1^{(2)} + s_2^{(2)} + 3s_3^{(2)} &= 0, \\ s_1^{(2)} - s_2^{(2)} + s_3^{(2)} &= 0, \\ 3s_1^{(2)} + s_2^{(2)} - 5s_3^{(2)} &= 0. \end{aligned}$$

Lahendiks saame $s_1^{(2)} = s_3^{(2)}$ ja $s_2^{(2)} = 2s_3^{(2)}$. Võttes vabaks tundmatuks $s_3^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{6}}$, saame $s_1^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{6}}$ ja $s_2^{(2)} = \frac{2}{\sqrt{6}}$. Omavektor $\vec{s}_2 = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$ on taas normeeritud. Kanoonilise reeperi teiseks baasivektoriks on seega

$$\vec{e}\,'_2 = \Big(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\Big).$$

Omaväärtusele $\lambda_3 = -2$ vastava omavektori $\vec{s}_3$ koordinaadid $s_1^{(3)}, s_2^{(3)}$ ja $s_3^{(3)}$ leiame võrrandisüsteemist

$$\begin{aligned} 3s_1^{(3)} + s_2^{(3)} + 3s_3^{(3)} &= 0, \\ s_1^{(3)} + 7s_2^{(3)} + s_3^{(3)} &= 0, \\ 3s_1^{(3)} + s_2^{(3)} + 3s_3^{(3)} &= 0, \end{aligned}$$

mille lahendamisel saame $s_1^{(3)} = -s_3^{(3)}$ ja $s_2^{(3)} = 0$. Siit vaba tundmatu $s_3^{(3)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ korral saame normeeritud omavektoriks $s_1^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ja $s_2^{(3)} = 0$. Kanoonilise reeperi kolmandaks baasivektoriks on

$$\vec{e}\,'_3 = \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\Big).$$

Kanooniline reeper

$$\{O\,'; \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3\} \tag{28.2}$$

on leitud.

Lõpuks leiame pinna kanoonilise võrrandi kanoonilises reeperis. Valemi (26.5) kohaselt on selleks

$$\lambda_1 \overline{x}_1^2 + \lambda_2 \overline{x}_2^2 + \lambda_3 \overline{x}_3^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0, \tag{28.3}$$

millest asenduste tegemisel saame

$$3\overline{x}_1^2 + 6\overline{x}_2^2 - 2\overline{x}_3^2 - 1 = 0.$$

Seega kanooniliseks võrrandiks on

$$\frac{\overline{x}_1^2}{(\frac{1}{\sqrt{3}})^2} + \frac{\overline{x}_2^2}{(\frac{1}{\sqrt{6}})^2} + \frac{\overline{x}_2^2}{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2} = 1.$$

Pooltelgedeks on

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad \alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Näide 2. Olgu pinna võrrandiks ristreeperis (28.1)

$$x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3 - 14x_1 - 4x_2 + 14x_3 + 16 = 0.$$

Määrata invariantide abil pinna tüüp, leida kanooniline reeper ja kanooniline võrrand.

Lahendus. Invariandid on

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 54, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 & -7 \\ 2 & -2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 & 7 \\ -7 & -2 & 7 & 16 \end{vmatrix} = 0,$$

$$S = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -27, \quad s = 1 - 2 + 1 = 0.$$

Kuna $s\delta = 0 \leq 0$ ja $\Delta = 0$, siis tabelist 1 saame, et pind on *teist järku koonus.* Tegemist on tsentraalse pinnaga. Seetõttu kanoonilise reeperi js kanoonilise võrrandi leidmine toimub nagu näites 1.

Leiame nüüd kanoonilise reeperi. Reeperi alguspunkt asub pinna tipus, mille koordinaadid saame võrrandisüsteemi

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 7 &= 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 2 &= 0, \\ -4x_1 - 2x_2 + x_3 + 7 &= 0 \end{aligned}$$

lahendamisel. Me saame $x_1 = 1, x_2 = 1$ ja $x_3 = -1$. Kanoonilise reeperi alguspunktiks on

$$O'(1, 1, -1).$$

Omavektorite leidmiseks tuleb kuupvõrrandist

$$\lambda^3 - 27\lambda - 54 = 0$$

leida omaväärtused. Me saame $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = -3$ ja $\lambda_3 = 6$. Näeme, et -3 on kahekordne omaväärtus. See toob teatud omapära omavektorite, s.o. kanoonilise reeperi baasivektorite leidmisele, mida ei olnud eelmises näites, sest omavektorid olid paarikaupa erinevad. Niisiis leiame omaväärtustele $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$ ehk lühidalt $\lambda_k = -3$, kus $k \in \{1, 2\}$, vastavad omavektorid. Omavektori $\vec{s}_k$ koordinaadid $s_1^{(k)}, s_2^{(k)}$ ja $s_3^{(k)}$ saame võrrandisüsteemist

$$\begin{aligned} 4s_1^{(k)} + 2s_2^{(k)} - 4s_3^{(k)} &= 0, \\ 2s_1^{(k)} + s_2^{(k)} - 2s_3^{(k)} &= 0, \\ -4s_1^{(k)} - 2s_2^{(k)} + 4s_3^{(k)} &= 0, \end{aligned}$$

mille lahendamisel saame $s_2^{(k)} = -2s_1^{(k)} + 2s_3^{(k)}$. Näeme, et vabade tundmatute arv on kaks. Seega omavektorite hulk on kahemõõtmeline vektorruum. Tema baasi kuulub kaks lineaarselt sõltumatut vektorit. Selleks tuleb vabadele tundmatule $s_1^{(k)}$ ja $s_3^{(k)}$ anda kaks seeriat väärtusi. Kummagi seeria korral leiame $s_2^{(k)}$. Kui võtame $s_1^{(k)} = 1$ ja $s_3^{(k)} = 0$, siis saame $s_2^{(k)} = -2$. Omavektoriks saame $\vec{u}_1 = (1, -2, 0)$. Kui võtame $s_1^{(k)} = 0$ ja $s_3^{(k)} = 1$, siis saame $s_2^{(k)} = 2$. Omavektoriks saame $\vec{u}_2 = (0, 2, 1)$. Kuna vektorite $\vec{u}_1$ ja $\vec{u}_2$ koordinaadid ei ole võrdelised, siis vektorsüsteem $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ on lineaarselt sõltumatu. Seega on tegemist jutuks oleva alamruumi baasiga. Seega saame seda alamruumi vaadelda lineaarkattena $L(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ moodustajatega $\vec{u}_1$ ja $\vec{u}_2$. Kahjuks baas $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ ei ole ristbaas, et saaks kasutada tema vektoreid kanoonilise reeperi kahe baasivektorina. Selleks konstrueerime ristuvate vektorite süsteemi $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$, võttes $\vec{a}_1 = \vec{u}_1$. Otsime vektorit $\vec{a}_2$ kujul $\vec{a}_2 = \vec{u}_1 + t\vec{u}_2$, valides parameetri nii, et $\vec{a}_1 \perp \vec{a}_2$, s.o. skalaarkorrutis $\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2 \rangle = 0$. Seega

$$\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2 \rangle = 0 \Longleftrightarrow \langle \vec{u}_1, \vec{u}_1 + t\vec{u}_2 \rangle = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\iff |\vec{u}_1|^2 + t\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2\rangle = 0 \iff 5 - 4t = 0 \iff t = \frac{5}{4}.$$

Siin me arvestasime, et $|\vec{u}_1|^2 = 5$ ja $\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2\rangle = -\frac{4}{5}$. Oleme saanud sama alamruumi $L(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ leitud ristuvate vektorite $\vec{a}_1 = \vec{u}_1 = (1, -2, 0)$ ning $\vec{a}_2 = \vec{u}_1 + \frac{5}{4}\vec{u}_2 = (1, \frac{1}{2}, \frac{5}{4})$ lineaarkattena. Normeerides selle vektorite paari, saame kanoonilise reeperi kaks baasivektorit

$$\vec{e}\,'_1 = \frac{1}{|\vec{a}_1|}\vec{a}_1 = \Big(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, 0\Big), \quad \vec{e}\,'_2 = \frac{1}{|\vec{a}_2|}\vec{a}_2 = \Big(\frac{4}{3\sqrt{5}}, \frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{5}}{3}\Big).$$

Paneme tähele, et konstreeritud baasivektorite paare $\vec{e}\,'_1$ ja $\vec{e}\,'_2$ on lõpmatu palju. See sõltub sellest kuidas fikseerime vabad tundmatud, s.o. kuidas konstrueerime vektorid $\vec{u}_1$ ja $\vec{u}_2$. Märgime, et sellest määramatusest ei sõltu pinna kanooniline võrrand.

Omaväärtusele $\lambda_3 = 6$ vastava omavektori $\vec{s}_3$ koordinaadid saame võrrandisüsteemist

$$\begin{aligned} -5s_1^{(3)} + 2s_2^{(3)} - 4s_3^{(3)} &= 0,\\ 2s_1^{(3)} + 8s_2^{(3)} - 2s_3^{(3)} &= 0,\\ -4s_1^{(3)} - 2s_2^{(3)} - 5, s_3^{(3)} &= 0, \end{aligned}$$

saades $s_1^{(3)} = -s_3^{(3)}$ ja $s_2^{(3)} = -\frac{1}{2}s_3^{(3)}$. Võttes siin vaba tundmatu võrdseks $s_3^{(3)} = -2$, saame $\vec{u}_3 = (2, 1, -2)$. Viimase normeerimisel saame kanoonilise reeperi kolmandaks baasivektoriks

$$\vec{e}\,'_3 = \Big(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\Big).$$

Seega kanooniline reeper on leitud.

Tukeb veel leida teist järku koonuse kanooniline võrrand. Selleks kasutame valemit (28.3). Me saame

$$\frac{\overline{x}_1^2}{1^2} + \frac{\overline{x}_2^2}{1^2} - \frac{\overline{x}_3^2}{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2} = 0.$$

Näide 3. Olgu pinna võrrandiks ristreeperis (28.1)

$$2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 - 4x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 3 = 0.$$

Määrata invariantide abil pinna tüüp, leida kanooniline reeper ja kanooniline võrrand.

Lahendus. Leiame invariandid. Saame

$$\delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \\ -2 & 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -125,$$

$$S = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 10, \quad s = 2 + 2 + 3 = 7.$$

Tegemist on $\delta = 0$ tõttu mittetsentraalse pinnaga. Kuna lisaks $\Delta < 0$, siis tabelist 2 näeme, et pind on *elliptiline paraboloid.*

Leiame pinna kanoonilise reeperi. Paraboloidide korral on see kõige keerulisem, kuna pinna kanooniline võrrand sisaldab esimese astme liidetavat.

Karakteristlikust võrrandist

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 - 10\lambda = 0$$

saame $\lambda_1 = 2$, $\lambda_1 = 5$ ja $\lambda_3 = 0$.

Omaväärtusele $\lambda_1 = 2$ vastava omavektori $\vec{s}_1$ koordinaadid saame võrrandisüsteemist

$$\begin{aligned} 2s_2^{(1)} + s_3^{(1)} &= 0, \\ 2s_1^{(1)} + s_3^{(1)} &= 0, \\ s_1^{(1)} + s_2^{(1)} + s_3^{(1)} &= 0. \end{aligned}$$

Selle lahendamisel saame $s_1^{(1)} = -\frac{1}{2}s_3^{(1)}$ ja $s_2^{(1)} = -\frac{1}{2}s_3^{(1)}$. Võttes vabaks tundmatuks $s_3^{(1)} = -\frac{2}{\sqrt{6}}$, saame $s_1^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{6}}$ ja $s_2^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{6}}$. Saadud omavektor on normeeritud, mistõttu kõlbab kanoonilise reeperi esimeseks baasivektoriks

$$\vec{e}\,'_1 = \Big(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\Big).$$

Omaväärtusele $\lambda_2 = 5$ vastava omavektori $\vec{s}_2$ koordinaadid saame võrrandisüsteemist

$$\begin{aligned} -3s_1^{(2)} + 2s_2^{(2)} + s_3^{(2)} &= 0, \\ 2s_1^{(2)} - 3s_2^{(2)} + s_3^{(2)} &= 0, \\ s_1^{(2)} + s_2^{(2)} - 2s_3^{(1)} &= 0. \end{aligned}$$

Selle lahendamisel saame $s_1^{(2)} = s_3^{(2)}$ ja $s_2^{(2)} = s_3^{(2)}$. Võttes vabaks tundmatuks $s_3^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, saame $s_1^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ja $s_2^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{3}.}$ Saadud omavektor on normeeritud, mistõttu kõlbab kanoonilise reeperi teiseks baasivektoriks

$$\vec{e}\,'_2 = \Big(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\Big).$$

Omaväärtusele $\lambda_3 = 0$ vastava omavektori $\vec{s}_3$ koordinaadid saame võrrandisüsteemist

$$\begin{aligned} 2s_1^{(3)} + 2s_2^{(3)} + s_3^{(3)} &= 0, \\ 2s_1^{(3)} + 2s_2^{(3)} + s_3^{(3)} &= 0, \\ s_1^{(3)} + s_2^{(3)} + 3s_3^{(3)} &= 0. \end{aligned}$$

Selle lahendamisel saame $s_1^{(3)} = -s_2^{(3)}$ ja $s_3^{(3)} = 0$. Võttes vabaks tundmatuks $s_2^{(3)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, saame $s_1^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ja $s_3^{(3)} = 0$. Saadud omavektor $\vec{s}_3 = \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\Big)$ on normeeritud. Normeeritud omavektoriks on ka tema vastandvektor $-\vec{s}_3$. Neist kahest vektorust üks on suunatud elliptilise paraboloidi sisemusse. Nimelt see sobib kanoonilise reeperi kolmandaks baasivektoriks. Selle kindlaks tegemiseks on eelmises paragrahvis antud meetodika. Selle kohaselt tuleb leida vektor $\vec{p} = s(A_1, A_2, A_3)$. Siin A_1, A_2 ja A_3 on invariandi Δ elementide a_{14}, a_{24} ja a_{34} algebralised täiendid. Osutub, et vektor $\vec{p}$ on elliptilise paraboloidi telje sihiline ja suunatud pinna sisemusse. Jääb veel see vektor normeerida vektoriga $\vec{p}$ samasuunaliseks ühikvektoriks, mis ongi kanoonilise reeperi kolmandaks baasivektoriks. Seega omaväärtusele $\lambda_3 = 0$ vastavaid normeerutud omavektoreid $\vec{s}_3$ ja $-\vec{s}_3$ ei olegi vaja leida. Leiame nüüd determinandid A_1, A_2 ja A_3. Saame

$$A_1 = -\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 25, \quad A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -25,$$

$$A_3 = -\begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Seega $\vec{p} = 7(25, -25, 0)$. Temaga samauunaline ühikvektor on kanoonilise reeperi kolmas baasivektor

$$\vec{e}\,'_3 = \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\Big).$$

On jäänud veel leida kanoonilise reeperi alguspunkt $O\,'(m_1, m_2, m_3)$. Kõigepealt tuleb valemi (27.16) abil leida parameeter t, milleks praegu saame $t = -\frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}} - 0 = -\frac{5}{\sqrt{2}}$. Koordinaatide m_1, m_2 ja m_3 leidmiseks tuleb moodustada võrrandisüsteem (27.17), mis meie näite korral on järgmine:

$$\begin{aligned}2m_1 + 2m_2 + m_3 &= -\frac{1}{2},\\ 2m_1 + 2m_2 + m_3 &= -\frac{1}{2},\\ m_1 + m_2 + 3m_3 &= 1,\\ -2m_1 + 3m_2 - m_3 + 3 &= \frac{5}{2}m_1 - \frac{5}{2}m_2\end{aligned}$$

ehk

$$\begin{aligned}2m_1 + 2m_2 + m_3 &= -\frac{1}{2},\\ m_1 + m_2 + 3m_3 &= 1,\\ 9m_1 - 11m_2 + 2m_3 &= 6.\end{aligned}$$

Lahendades selle võrrandisüsteemi, saame $m_1 = -\frac{1}{40}, m_2 = -\frac{19}{40}$ ja $m_3 = \frac{1}{2}$. Kanoonilise reeperi alguspunktiks on

$$O\,'\Big(-\frac{1}{40}, -\frac{19}{40}, \frac{1}{2}\Big).$$

Leiame meie elliptilise paraboloidi kanoonilise võrrandi. Valemi (26.8) kohaselt tuleb kasutada valemit

$$\lambda_1\tilde{x}_1^2 + \lambda_2\tilde{x}_2^2 - 2\sqrt{-\frac{\Delta}{S}}\tilde{x}_3 = 0.$$

Tehes asendused, saame

$$2\overline{x}_1^2 + 5\overline{x}_2^2 - 2\sqrt{\frac{125}{10}}\overline{x}_3 = 0,$$

millest kanooniliseks võrrandiks saame

$$\frac{\overline{x}_1^2}{\frac{5}{2\sqrt{2}}} + \frac{\overline{x}_2^2}{\frac{1}{2\sqrt{2}}} = 2\overline{x}_3.$$

Näide 4. Olgu pinna võrrandiks ristreeperis (28.1)

$$2x_1^2 + 10x_2^2 - 2x_3^2 + 12x_1x_2 + 8x_2x_3 + 12x_1 + 4x_2 + 8x_3 - 1 = 0.$$

Määrata invariantide abil pinna tüüp, leida kanooniline reeper ja kanooniline võrrand.

Lahendus. Leiame invariandid. Saame

$$\delta = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 6 & 10 & 4 \\ 0 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 0 & 6 \\ 6 & 10 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & -2 & 4 \\ 6 & 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 25,$$

$$S = \begin{vmatrix} 10 & 4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 10 \end{vmatrix} = -56, \quad s = 2 + 10 - 2 = 10.$$

Tegemist on meil $\delta = 0$ tõttu mittetsentraalse pinnaga. Kuna lisaks $\Delta > 0$, siis tabelist 2 näeme, et pind on *hüperboolne paraboloid.* Lahendamise metoodika on sama, mis eelmise näite korral.

Leiame pinna kanoonilise reeperi. Paraboloidide korral on see kõige keerulisem, kuna pinna kanooniline võrrand sisaldab esimese astme liidetavat.

Karakteristlikust võrrandist

$$\lambda^3 - 10\lambda^2 - 56\lambda = 0$$

saame $\lambda_1 = 14$, $\lambda_2 = -4$ ja $\lambda_3 = 0$.

Omaväärtusele $\lambda_1 = 14$ vastava omavektori $\vec{s}_1$ koordinaadid saame võrrandisüsteemist

$$\begin{aligned} -12s_1^{(1)} + 6s_2^{(1)} &= 0, \\ 6s_1^{(1)} - 4s_2^{(1)} + 4s_3^{(1)} &= 0, \\ 4s_2^{(1)} - 16s_3^{(1)} &= 0. \end{aligned}$$

Selle lahendamisel saame $s_1^{(1)} = 2s_3^{(1)}$ ja $s_2^{(1)} = 4s_3^{(1)}$. Võttes vabaks tundmatuks $s_3^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{21}}$, saame $s_1^{(1)} = \frac{2}{\sqrt{21}}$ ja $s_2^{(1)} = \frac{4}{\sqrt{21}}$. Saadud omavektor on normeeritud, mistõttu kõlbab kanoonilise reeperi esimeseks baasivektoriks

$$\vec{e}\,'_1 = \Big(\frac{2}{\sqrt{21}}, \frac{4}{\sqrt{21}}, \frac{1}{\sqrt{21}}\Big).$$

Omaväärtusele $\lambda_2 = -4$ vastava omavektori $\vec{s}_2$ koordinaadid saame võrrandisüsteemist

$$\begin{aligned} 6s_1^{(2)} + 6s_2^{(2)} &= 0, \\ 6s_1^{(2)} + 14s_2^{(2)} + 4s_3^{(2)} &= 0, \\ 4s_2^{(2)} + 2s_3^{(2)} &= 0. \end{aligned}$$

Selle lahendamisel saame $s_1^{(2)} = \frac{1}{2}s_3^{(2)}$ ja $s_2^{(2)} = -\frac{1}{2}s_3^{(2)}$. Võttes vabaks tundmatuks $s_3^{(2)} = \frac{2}{\sqrt{6}}$, saame $s_1^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{6}}$ ja $s_2^{(2)} = -\frac{1}{\sqrt{6}}$. Saadud omavektor on normeeritud, mistõttu kõlbab kanoonilise reeperi teiseks baasivektoriks

$$\vec{e}\,'_2 = \Big(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\Big).$$

Kanoonilise reeperi kolmanda baasivektori leidmiseks tuleb leida vektor $\vec{p} = s(A_1, A_2, A_3)$. Siin A_1, A_2 ja A_3 on invariandi Δ elementide a_{14}, a_{24} ja a_{34} algebralised täiendid. Leiame nüüd determinandid A_1, A_2 ja A_3. Saame

$$A_1 = -\begin{vmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 10 & 4 & 2 \\ 4 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 96, \quad A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 6 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -32,$$

$$A_3 = -\begin{vmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 6 & 10 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = -64.$$

Seega $\vec{p} = 320(3, -1, -2)$. Temaga samauunaline ühikvektor on kanoonilise reeperi kolmas baasivektor

$$\vec{e}\,'_3 = \Big(\frac{3}{\sqrt{14}}, -\frac{1}{\sqrt{14}}, -\frac{2}{\sqrt{14}}\Big).$$

On jäänud veel leida kanoonilise reeperi alguspunkt $O'(m_1, m_2, m_3)$. Valemi (27.16) abil saame parameetriks $t = \frac{8}{\sqrt{14}}$. Koordinaatide m_1, m_2 ja m_3 leidmiseks tuleb moodustada võrrandisüsteem (27.17), mis meie näite korral on järgmine:

$$\begin{aligned} 7m_1 + 21m_2 &= -15, \\ 21m_1 + 35m_2 + 14m_3 &= -9, \\ 14m_2 - 7m_3 &= -18, \\ 54m_1 + 10m_2 + 20m_3 &= 7 \end{aligned}.$$

Selles võrrandisüsteemis teine võrrand on võrdne kolmkordne esimene võrrand miinus kahekordne kolmas võrrand. Seega teise võrrandi võib võrrandisüsteemist ära jätta. Alles jääb võrrandisüsteem

$$\begin{aligned} 7m_1 + 21m_2 &= -15, \\ 14m_2 - 7m_3 &= -18,. \\ 54m_1 + 10m_2 + 20m_3 &= 7 \end{aligned}$$

Selle võrrandisüsteemi lahendamisel saame $m_1 = -\frac{183}{784}, m_2 = -\frac{499}{784}$ ja $m_3 = \frac{509}{392}$. Kanoonilise reeperi alguspunktiks on

$$O'\Big(-\frac{183}{784}, -\frac{499}{784}, \frac{509}{392}\Big).$$

Leiame hüperboolse paraboloidi kanoonilise võrrandi. Valemi (26.8) kohaselt tuleb kasutada valemit

$$\lambda_1 \tilde{x}_1^2 + \lambda_2 \tilde{x}_2^2 - 2\sqrt{-\frac{\Delta}{S}}\tilde{x}_3 = 0.$$

Tehes asendused, saame hüperboolse paraboloidi kanooniliseks võrrandiks

$$\frac{\overline{x}_1^2}{\frac{2}{7}\sqrt{\frac{2}{7}}} - \frac{\overline{x}_2^2}{\sqrt{\frac{2}{7}}} = 2\overline{x}_3.$$

Näide 5. Olgu pinna võrrandiks ristreeperis (28.1)

$$x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 - 6x_3 + 1 = 0.$$

Määrata invariantide abil pinna tüüp, leida kanooniline reeper ja kanooniline võrrand.

Lahendus. Leiame invariandid. Saame

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$S = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad s = 1 + 1 + 4 = 6.$$

$$K = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -18.$$

Pind on $\delta = \Delta = S = 0$ ja $K \neq 0$ tõttu *paraboolne silinder.*

Esitame pinna võrrandi kujul (27.20).Saame

$$(x_1 + x_2 + 2x_3)^2 + (-6x_3 + 1) = 0,$$

mille abil saame vektorid

$$\vec{h} = (1, 1, 2), \quad \vec{a} = (0, 0, -3), \quad \vec{s}_2 = \vec{h} \times \vec{a} = (-3, 3, 0) = -3(1, -1.0).$$

Valemist (27.26) näeme, et viimase normeerimisel saame paraboolse silindri sirgjooneliste moodustajate ühise ühiksihivektori

$$\vec{e}\,'_2 = \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\Big),$$

mis on kanoonilise reeperi teiseks baasivektoriks. Valem (27.31) lubab öelda, et kanoonilise reeperi kolmanda baasivektori saame vektori $\vec{h}$ normeerimisel. Seega

$$\vec{e}\,'_3 = \Big(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\Big).$$

Kõige keerulisem on leida kanoonilise reeperi esimest baasivektorit. Valemi (27.25) abil saame $t = -1$. Järgnevas saame valemi (27.34) abil vektori

$$\vec{k} = \vec{h} - \vec{a} = (-1, -1, 1),$$

mille normeerimisel saame kanoonjlise reeperi esimese baasivektori

$$\vec{e}\,'_1 = \Big(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\Big).$$

On jäänud veel leida kanoonilise reeperi alguspunkt, milleks kõlbab suvaline punkt, mille koordinaadid rahuldavad võrrandisüsteemi (27.30). Praeguse näite korral on see järgmine

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 - 1 &= 0 \\ -3x_3 + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Fikseerides ühe tundmatu, näiteks $x_1 = 0$, saame $x_2 = \frac{1}{3}$ ja $x_3 = \frac{1}{3}$. Kanoonilise reeperi alguspunktiks kõlbab

$$O\,'\Big(0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\Big).$$

Kanooniline reeper on leitud.

Lõpuks lepame paraboolse silindri kanoonilise võrrandi valemi (26.11) abil, kasutades alumist märki. Saame

$$\overline{x}_3^2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\overline{x}_1.$$

Näide 6. Olgu pinna võrrandiks ristreeperis (28.1)

$$4x_1^2 + 9x_2^2 + x_3^2 - 12x_1x_2 + 4x_1x_3 - 6x_2x_3 + 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 5.$$

Määrata invariantide abil pinna tüüp, leida kanooniline reeper ja kanooniline võrrand.

Lahendus. Leiame invariandid. Saame

$$\delta = \begin{vmatrix} 4 & -6 & 2 \\ -6 & 9 & -3 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 4 & -6 & 2 & 2 \\ -6 & 9 & -3 & -3 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 0,$$

$$S = \begin{vmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 9 \end{vmatrix} = 0, \quad s = 4 + 9 + 1 = 14.$$

$$K = \begin{vmatrix} 9 & -3 & -3 \\ -3 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & -6 & 2 \\ -6 & 9 & -3 \\ 2 & -3 & -5 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\sigma = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 9 & -3 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -84.$$

Pinnaks on paar paralleelseid tasandeid, sest

$$\delta = 0, \quad \Delta = 0, \quad S = 0, \quad K = 0, \quad \sigma < 0.$$

Asume kanooniltse reeperi leidmisele. Karakteristlikust võrrandist

$$\lambda^3 - 14\lambda = 0$$

saame omaväärtusteks $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ja $\lambda_3 = 14$. Leiame omavektorid. Omaväärtuste $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ korral omavektori(te) koordinaadid saame võrrandisüsteemist

$$\begin{aligned} 4s_1 - 6s_2 + 2s_3 &= 0, \\ -6s_1 + 9s_2 - 3s_3 &= 0, \\ 2s_1 - 3s_2 + s_3 &= 0, \end{aligned}$$

milles olulisi võrrandeid on ainult üks. Saame

$$2s_1 - 3s_2 + s_3 = 0 \Longleftrightarrow s_1 = \frac{3}{2}s_2 - \frac{1}{2}s_3.$$

Fundamentaalsüsteemiks sobib

$$\vec{s}_1 = (3, 2, 0), \quad \vec{s}_2 = (1, 0, -2).$$

Kõik omavektorid moodustavad lineaatkatte $L(\vec{s}_1, \vec{s}_2)$, mille mistahes vektor avaldub $\vec{s} = t_1\vec{s}_1 + t_2\vec{s}_2$. Omavektori definitsiooni kohaselt tuleb mängust välja jätta nullvektor, mis saadakse $t_1 = t_2 = 0$ korral. Alamruum $L(\vec{s}_1, \vec{s}_2)$ on meie paralleelse tasandipaari ühine riht, Baasivektorite paar $\vec{e}\,'_1$ ja $\vec{e}\,'_2$ sellest lineaarkattest pole määratud kaugeltki üheselt. Ainsaks nõudeks on, et nad oleksid ristuvad ühikvektorid. Kanoonilise reeperi esimeseks baasivektoriks võib võtta $\vec{e}\,'_1 = \frac{1}{|\vec{s}_1|}\vec{s}_1$, s.o.

$$\vec{e}\,'_1 = \Big(\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}, 0\Big).$$

Ristuvat vektorit otsime kujul $\vec{a}_2 = \vec{s}_1 + t\vec{s}_2$. Parameeter t tuleb nii valida, et saaksime ristuva vektori. Seega

$$\vec{a}_2 \perp \vec{s}_1 \Longleftrightarrow \langle \vec{a}_2, \vec{s}_1 \rangle = 0 \Longleftrightarrow \langle \vec{s}_1 + t\vec{s}_2, \vec{s}_1 \rangle = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow |\vec{s}_1|^2 + t\langle \vec{s}_2, \vec{s}_1 \rangle = 0 \Longleftrightarrow t = -\frac{|\vec{s}_1|^2}{\langle \vec{s}_1, \vec{s}_2 \rangle} = -\frac{13}{3}.$$

Seega

$$\vec{a}_2 = s_1 - \frac{13}{3}\vec{s}_2 = \frac{2}{3}(-2, 3, 13).$$

Viimase normeerimisel saame kanoonilise reeperi teise baasivektori

$$\vec{e}\,'_2 = \Big(-\frac{2}{\sqrt{182}}, \frac{3}{\sqrt{182}}, \frac{13}{\sqrt{182}}\Big).$$

Kolmanda baasivektori võime leida kolmanda omavektori abil, aga võib ka leida vektorkorrutise $\vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = -2(2, -3, 1)$ abil, normeerides selle. Saame

$$\vec{e}\,'_3 = \Big(\frac{2}{\sqrt{14}}, -\frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}\Big).$$

Kanoonilise reeperi alguspunktiks kõlbab keskpunktide tasandi

$$2x_1 - 3x_2 + x_1 + 1 = 0,$$

mistahes punkt. Näiteks

$$O\,'(0, 0, -1).$$

Kanooniline reeper on leitud.

Leiame tasandipaari kanoonilise võrrandi valemi (26.12) abil. Saame

$$\overline{x}_3^2 = \frac{3}{7} \Longleftrightarrow \overline{x}_2 = \pm\sqrt{\frac{3}{7}}.$$

Sellega me oma näited lõpetame.