

# Matemaatikaolümpiaad 2000

## Valikvoor

1. (20 punkti) Koondugu rida  $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2$ . Tõestada, et rida  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  koondub absoluutselt.

2. (20 punkti) Leida kõik kogu reaalteljel  $\mathbb{R}$  diferentseeruvad funktsioonid, mille väärtuste hulgaks on  $[1, \infty)$  ning mis rahuldavad tingimust

$$\int_1^{f(x)} e^{u^2} du = \int_0^x \frac{udu}{f(u)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

3. (20 punkti) Olgu  $a > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x_1, x_2, \dots, x_n \in (0, \infty)$ ,  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$ . Tõestada, et

$$\sum_{k=1}^n \left(x_k + \frac{1}{x_k}\right)^a \geq \frac{(n^2 + 1)^a}{n^{a-1}}.$$

4. (20 punkti) Olgu täisarvud  $a_n$  ja  $b_n$  määratud seosega

$$(1 + \sqrt{3})^n = a_n + b_n \sqrt{3}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Leida piirväärtus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}.$$

5. (20 punkti) Rahuldagu ruutmaatriks  $A$  tingimusi

$$A^2 = \frac{A}{3}, \quad \det(A - E) \cdot \det(3A + 2E) \neq 0,$$

kus  $E$  on ühikmaatriks. Leida maatriks  $X$ , kui

$$3X^{-1} = 3(3A + 2E)^{-1} + (E - A)^{-1}.$$

**6. (25 punkti)** Olgu

$$f(x) = x^k - a_{k-1}x^{k-1} - \dots - a_0,$$

kus  $k \in \mathbb{N}$ ,  $a_0, \dots, a_{k-1} \in \mathbb{R}$ ,  $a_0 \neq 0$ . Tõestada, et funktsioon

$$u(n) = n^r a^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

kus  $r \in \{0\} \cup \mathbb{N}$  ja  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , on süsteemi

$$u(n+k) = a_0 u(n) + a_1 u(n+1) + \dots + a_{k-1} u(n+k-1), \quad n \in \mathbb{N},$$

lahendiks parajasti siis, kui  $a$  on polünoomi  $f(x)$  vähemalt  $r+1$  kordne juur.