Tartu Ülikooli matemaatikaolümpiaad

14. mai 2010. a.

1) Tõesta, et iga täisarvu $n \geq 1$ korral

$$\frac{e}{2n+2} < e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{e}{2n+1}.$$

2) Jada (a_n) on defineeritud võrdustega $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 1$ ning

$$a_n^3 = a_{n-1}a_{n-2}a_{n-3}$$

kui $n \geq 3$. Leia

$$\lim_{n\to\infty} a_n.$$

3) Olgu $x_1, x_2, \ldots x_n$ Eukleudilise ruumi $\mathbb{R}^m$ elemendid. Tõesta, et

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{\sqrt{n}} \right\|^2 \leq \frac{n+1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left\| \frac{x_k}{\sqrt{k}} \right\|^2.$$

4) Tähistagu M_2 kõikide reaalsete 2×2-maatriksite hulka.

(a) Tõesta, et iga maatriksi $A \in M_2$ jaoks leiduvad $B, C \in M_2$ nii, et $A = B^2 + C^2$.

(b) Kas leiduvad $B, C \in M_2$ nii, et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = B^2 + C^2$ ja $BC = CB$?

5) Leia piirväärtus

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{(2n+1)!}{(n!)^2}\right)^2 \iint\limits_Q (xy(1-x)(1-y))^n \sqrt{ye^{2x-\sin(\pi y)}}dxdy,$$

kus $Q = [0,1] \times [0,1]$.

6) Leia kõik binaarsed tehted $* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mis rahuldavad tingimust

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad (x * z) * (z * y) = (x * y) + z.$$